Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — 2º semestre de 2011
Professor: Newton José Vieira
Primeira Prova/Solução do professor — 20/09/2011

As duas primeiras questões valem 3 e as outras valem 4 pontos cada uma.

1. Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e as linguagens $A = \Sigma\{1\}\Sigma^*$ e $B = \Sigma^*\{1\}$. Usando uma expressão obtida a partir de *conjuntos finitos* e operações dentre *união*, *concatenação* e *fecho de Kleene*, expresse:

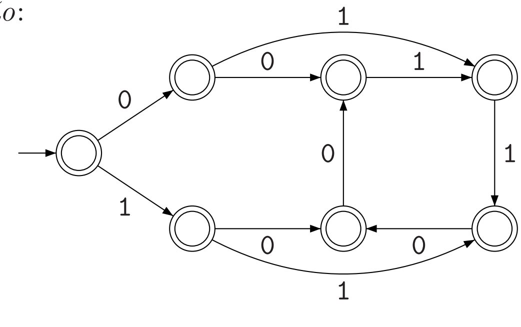
   a) $\overline{A}$.
   b) $A \cap B$.
   c) $B - A$.

   Solução:

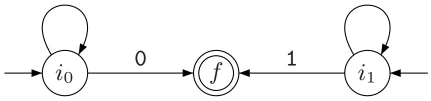
   a) $\overline{A} = \{\lambda, 0, 1\} \cup \Sigma\{0\}\Sigma^*$.
   b) $A \cap B = \Sigma\{1\} \cup \Sigma\{1\}\Sigma^*\{1\} = \Sigma\{1\}(\{\lambda\} \cup \Sigma^*\{1\})$.
   c) $B - A = \{1\} \cup \Sigma\{0\}\Sigma^*\{1\} = (\{\lambda\} \cup \Sigma\{0\}\Sigma^*)\{1\}$.

2. Apresente o digrama de estados de um AFD que reconheça "*o conjunto das palavras em que o símbolo na posição i é diferente do símbolo na posição $i + 2$, para $i \geq 1$*". Considere que o símbolo na posição 1 de uma palavra é seu primeiro símbolo, o símbolo na posição 2 é o segundo, e assim por diante.

   Solução:



3. Seja o AFN com o seguinte diagrama de estados:

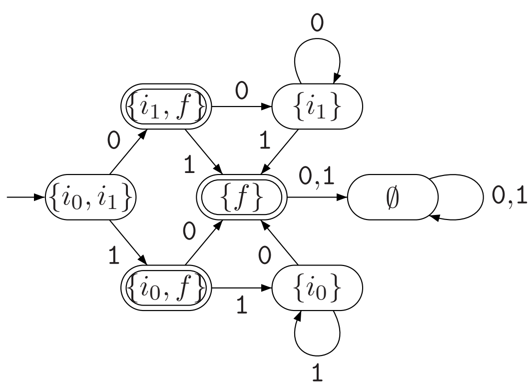


   a) Que linguagem é reconhecida pelo AFN em questão?
   b) Obtenha um AFD equivalente pelo método de construção-de-subconjuntos (aquele em que cada estado do AFD é um subconjunto dos estados do AFN).

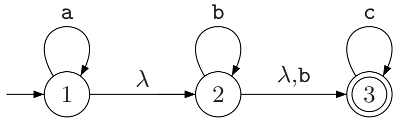
   Solução:

   a) $\{1\}^*\{0\} \cup \{0\}^*\{1\}$

b) AFD:



4. Seja o AFN-λ com o seguinte diagrama de estados:

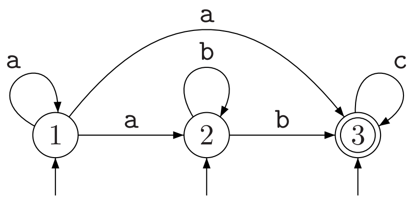


Obtenha um AFN equivalente usando o método visto em aula. Explicite, para cada estado e e símbolo s, como é feito o cálculo de $\delta'(e, s)$ nos casos em que $\delta'(e, s) \neq \delta(e, s)$ (δ é a função de transição do AFN-λ e δ' é a função de transição do AFN sendo obtido).

Solução:

$\delta'(1, \mathtt{a}) = f\lambda(\delta(1, \mathtt{a})) = f\lambda(\{1\}) = \{1, 2, 3\}$.

AFN:



5. Sejam L uma linguagem regular qualquer, $L_1 = \{\mathtt{0}\}^*$ e $L_2 = \{\mathtt{0}^k\mathtt{1}^{k+1} \mid k \geq 0\}$. Para cada linguagem a seguir, mostre que ela é regular ou que não é ou que pode ser ou não ser:

a) L_1L_2.
b) $L \cap L_1$.
c) $L \cap L_2$.
d) $L - L_1$.

Solução:

a) $L_1L_2 = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^{k+1} \mid 0 \leq k \leq n\}$ não é regular:
Suponha que L_1L_2 é regular. Seja k a constante do LB e a palavra de L_1L_2 $z = \mathtt{0}^k\mathtt{1}^{k+1}$. Sejam u, v e w tais que $z = uvw$, $|uv| \leq k$ e $|v| > 0$. Neste caso, como $|uv| \leq k$, v contém apenas 0s e, assim, $uv^0w = \mathtt{0}^{k-|v|}\mathtt{1}^{k+1}$. Como $|v| > 0$, $k - |v| < k$ e, portanto, $\mathtt{0}^{k-|v|}\mathtt{1}^{k+1} \notin L_1L_2$. Isto contradiz o LB. Logo, L_1L_2 não é regular.

b) $L \cap L_1$ é regular, pois L e L_1 são regulares e as linguagens regulares são fechadas sob interseção.

c) $L \cap L_2$ pode ser regular: por exemplo, $\emptyset \cap L_2 = \emptyset$. E $L \cap L_2$ pode não ser regular: por exemplo, $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \cap L_2 = L_2$.

d) $L - L_1$ é regular, pois L e L_1 são regulares, $L - L_1 = L \cap \overline{L_1}$ e as linguagens regulares são fechadas sob complementação e sob interseção.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Primeira prova/Solução do professor

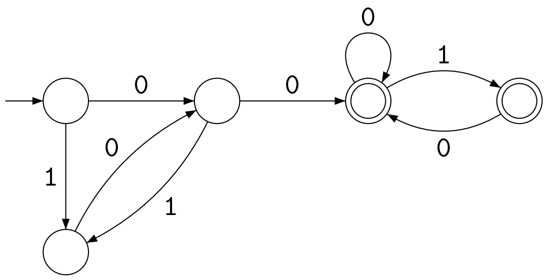
1. Seja a linguagem $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid 00$ é subpalavra de w e 11 não é subpalavra de $w\}$. Faça:

   (a) Um AFD que reconheça L.

   (b) Uma expressão regular que denote L.

   Solução:

   (a) AFD:



   (b) $(0 + 10)(10)^*0(0 + 10)^*(\lambda + 1)$.

2. Obtenha gramáticas para as seguintes linguagens sobre $\{0,1\}$:

   (a) A linguagem da questão anterior.

   (b) $\{0^n1^n0^n \mid n \geq 0\}$.

   Solução:

   (a) $P \to 0A \mid 10A$
   $A \to 0B \mid 10A$
   $B \to 0B \mid 10B \mid \lambda \mid 1$

   (b) $X \to Y \mid \lambda$
   $Y \to 0YU0 \mid 010$
   $0U \to U0$
   $1U \to 11$

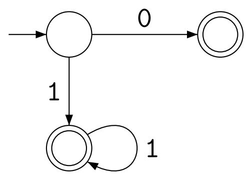
3. Seja a linguagem X denotada por $0 + 11^*$. Construa autômatos finitos sem transições λ, que reconheçam X, com a seguinte característica:

   (a) O autômato tem um único estado inicial.

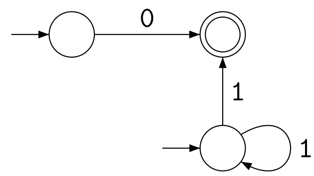
   (b) O autômato tem um único estado final.

   Solução:

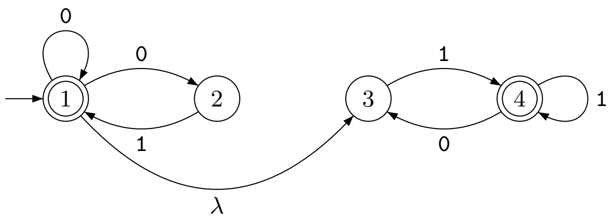
   (a)



   (b)



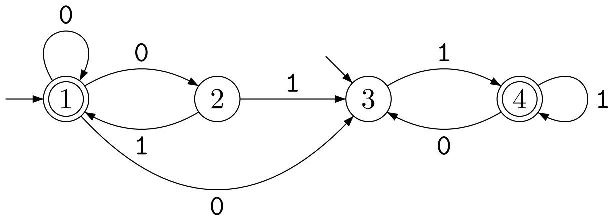
4. Seja o AFNλ com o diagrama de estados:



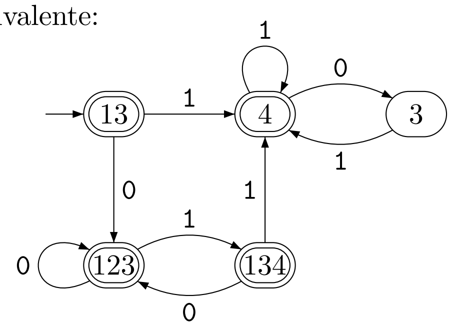
(a) Apresente o diagrama de estados de um AFN equivalente (use o método visto no curso).
(b) Apresente um AFD equivalente.

Solução:

(a) AFN equivalente:



(b) AFD equivalente:



5. Seja L uma linguagem regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Mostre que a linguagem $\{w \in \Sigma^* \mid$ ou $w \in L$ ou w contém pelo menos um $\mathtt{a}$ (mas não ambos)$\}$ é regular.

Solução:

A linguagem em questão é $(L \cup \Sigma^*\{\mathtt{a}\}\Sigma^*) - (L \cap \Sigma^*\{\mathtt{a}\}\Sigma^*)$. Como a classe das linguagens regulares é fechada sob as operações de união, interseção e diferença, segue-se ela é regular.

6. Prove que $\{xy \in \{a,b\}^* \mid |x| = |y| \text{ e } n_a(x) \geq n_b(y)\}$ não é regular. ($n_s(w)$ é o número de símbolos s na palavra w.)

Solução:

Seja L a linguagem em questão, e suponha que ela seja regular. Então o lema do bombeamento se aplica. Seja k a constante lá referida e $z = \mathtt{b}^k\mathtt{a}^k$. Como $z \in L$ e $|z| > k$, sejam u v e w tais que $z = uvw$, $|uv| \leq k$ e $|v| > 0$. Como $uvw = \mathtt{b}^k\mathtt{a}^k$ e $|uv| \leq k$, v só contém $\mathtt{b}$s e, portanto, $uv^2w = \mathtt{b}^{k+|v|}\mathtt{a}^k$. Como $|v| > 0$, tem-se dois casos:

1. $|v|$ ímpar. Então $|uv^2w|$ é ímpar e, portanto, $uv^2w \notin L$.
2. $|v| > 0$ par. Então a primeira metade de uv^2w não contém $\mathtt{a}$s, mas a segunda contém $\mathtt{b}$s (pelo menos um no seu início). Segue-se que $uv^2w \notin L$.

Assim, $uv^2w \notin L$, contradizendo o lema do bombeamento. Logo, a linguagem não é regular.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2014
Professor: Newton José Vieira
Primeira prova/Solução do professor — 16/09/2014.

1. Começando com *conjuntos finitos*, usando apenas as operações de *união*, *interseção*, *concatenação* e/ou *fecho de Kleene*, expresse as linguagens a seguir:

   (a) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid w$ contém $\mathtt{00}$ como prefixo e como sufixo$\}$.

   (b) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid w$ contém $\mathtt{00}$ e $|w|$ é par$\}$.

   Solução:

   (a) $\{\mathtt{00}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{00}\} \cup \{\mathtt{00}, \mathtt{000}\}$.

   (b) $(\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{00}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*) \cap (\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\})^*$.

2. Diga que linguagens são geradas pelas gramáticas:

   (a) $(\{A\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_1, A)$, sendo R_1 constituído de:
   $A \rightarrow \mathtt{0}A \mid A\mathtt{01} \mid \mathtt{1}$

   (b) $(\{S, A\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_2, S)$, sendo R_2 constituído de:
   $S \rightarrow AS \mid \lambda$
   $A \rightarrow \mathtt{0}A\mathtt{0} \mid \mathtt{1}$

   Solução:

   (a) $\{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\}\{\mathtt{01}\}^*$.

   (b) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}\mathtt{0}^n \mid n \in \mathbb{N}\}^*$.

3. Sejam os PDs:

   - P1: dadas uma gramática G, uma palavra w e um número n, determinar se é verdade que $P \overset{n}{\Rightarrow} w$ em G.
   - P2: dados dois AFNλ M_1 e M_2, determinar se $L(M_1) = L(M_2)$.

   Para cada um deles, dizer:

   (a) Quantos parâmetros ele tem.

   (b) Se ele é decidível e por que.

   Solução:

   (a) P1 tem 3 parâmetros e P2 tem 2 parâmetros.

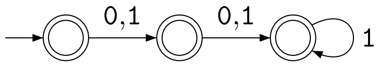
   (b)
   - P1 é decidível, pois o conjunto de todas as derivações de n passos é finito: basta gerar x tal que $P \overset{n}{\Rightarrow} x$ até que $x = w$ ou então esgotar todo o conjunto.
   - P2 é decidível: obtendo-se AFDs equivalentes a M_1 e M_2 e, em seguida, minimizando-se ambos os AFDs, os resultados das minimizações são o mesmo AFD (a menos dos nomes dos estados) sse $L(M_1) = L(M_2$.

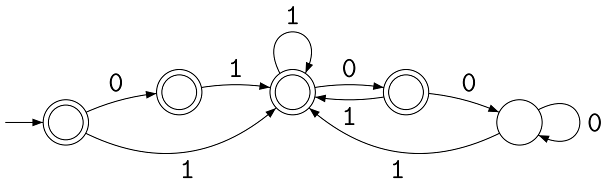
4. Construa AFDs que reconheçam as linguagens:

   (a) $\{\lambda, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}\{\lambda, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}\{\mathtt{1}\}^*$;

   (b) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid \mathtt{00}$ não é prefixo nem sufixo de $w\}$;

   Solução:

(a) 

(b) 

5. Explique como construir um autômato finito para a linguagem $\{w \in L_1L_2 \,|\, w \notin L_3\}$ a partir de três AFDs, M_1 que reconhece L_1, M_2 que reconhece L_2 e M_3 que reconhece L_3. Explicite os passos apenas mencionando os métodos de obtenção e de transformação de autômatos vistos durante o curso; não há necessidade de expor os detalhes de tais métodos.

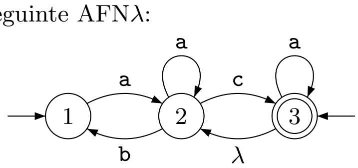
   Solução: O AFD M_5, assim construído, reconhece a linguagem:

   (a) $M_4 \leftarrow$ AFNλ obtido de M_1 e M_2 que reconhece L_1L_2;
   (b) $M_4' \leftarrow$ AFN equivalente a M_4;
   (c) $M_4'' \leftarrow$ AFD equivalente a M_4';
   (d) $M_3' \leftarrow$ AFD que reconhece $\overline{L(M_3)}$;
   (e) $M_5 \leftarrow$ AFD produto de M_4'' e M_3' que reconhece $L(M_4'') \cap L(M_3')$.

6. Prove que $L = \{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \,|\, w = w^R\}$ e $\overline{L}$ não são regulares.

   Solução: Suponha que L seja regular. Seja k a contante do LB e $z = \mathtt{0}^k\mathtt{1}\mathtt{0}^k$. O LB diz que existem u, v, e w tais que $z = uvw$, $|uv| \leq k$, $|v| > 0$ e $uv^iw \in L$ para $i \in \mathbb{N}$. Como $uvw = \mathtt{0}^k\mathtt{1}\mathtt{0}^k$ e $|uv| \leq k$, $uv^2w = \mathtt{0}^{k+|v|}\mathtt{1}\mathtt{0}^k$. Mas $\mathtt{0}^{k+|v|}\mathtt{1}\mathtt{0}^k \notin L$, pois $|v| > 0$ e, neste caso, existe um único $\mathtt{1}$ e ele não é o símbolo central. Isto contradiz o LB. Logo, L não é regular. Como L não é regular, $\overline{L}$ também não é: se fosse, $\overline{\overline{L}}$ seria...

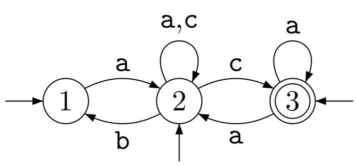
7. Seja o seguinte AFNλ:



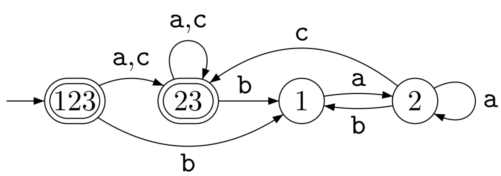
   (a) Obtenha um AFN equivalente utilizando o método apresentado em aula.
   (b) Obtenha, em seguida, um AFD equivalente.

   Solução:

   (a) AFN:



   (b) AFD:



Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2015
Professor: Newton José Vieira
Primeira Prova/Solução do professor — 15/9/2015

1. Expresse as linguagens a seguir utilizando operações sobre *conjuntos finitos* de palavras. Só podem ser usadas as operações: concatenação, união e fecho de Kleene.

   a) $\{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid w$ contém no máximo dois $\mathtt{b}$s$\}$.

   b) $\{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid$ a subpalavra $\mathtt{ab}$ ocorre um número par de vezes em $w\}$.

   Solução:

   a) $\{\mathtt{a}\}^*\{\lambda,\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*\{\lambda,\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.

   b) $(\{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{ab}\}\{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{ab}\})^*\{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}^*$.

2. Construa gramáticas para as linguagens da questão 1.

   Solução:

   a)
   $$\begin{aligned} P &\to ABABA \\ A &\to \mathtt{a}A \mid \lambda \\ B &\to \lambda \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} P &\to BA\mathtt{ab}BA\mathtt{ab}P \mid BA \\ A &\to \mathtt{a}A \mid \lambda \\ B &\to \mathtt{b}B \mid \lambda \end{aligned}$$

3. Explique porque os problemas a seguir são decidíveis:

   a) Dado um AFN, determinar se ele reconhece uma linguagem finita.

   b) Dados 3 AFDs M_1, M_2 e M_3, determinar se $L(M_1) - L(M_2) = L(M_3)$.

   Solução:

   a) Dado um AFN M, determina-se um AFD M' equivalente; em seguida, minimizando-se M', obtém-se um AFD M''. $L(M)$ é finita sse o diagrama de estados de M'', escluído um eventual estado de erro, não contém ciclo (todo caminho simples iniciado no estado inicial é aberto).

   b) De M_1 e M_2 obtém-se o produto M_p; este, com estados finais sendo os pares (e_1, e_2) tais que e_1 é estado final de M_1 e e_2 é estado não final de M_2, reconhece $L(M_1) - L(M_2)$. Seja M'_p um AFD mínimo equivalente a Mp e M'_3 um AFD mínimo equivalente a M_3. Então $L(M_1) - L(M_2) = L(M_3)$ sse os diagramas de estado de M'_p e de M'_3 são isomorfos (ou seja, são idênticos a menos dos nomes dos estados).

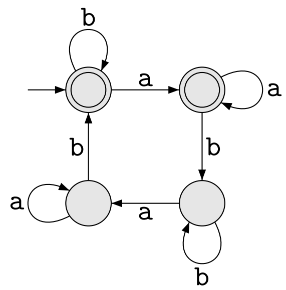
4. Construa AFDs que reconheçam:

   a) $\{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid$ a subpalavra $\mathtt{ab}$ ocorre um número par de vezes em $w\}$.

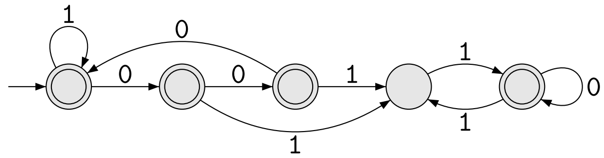
   b) $\{\mathtt{000},\mathtt{1}\}^*\{\mathtt{0},\mathtt{11}\}^*$.

   Solução:

a)



b)



5. Para cada linguagem a seguir, mostre que ela é regular ou que não é:

   a) $\{x\mathtt{a}x \mid x \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*\}$.

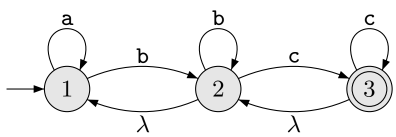
   b) $\{x \mid ax \in L\}$, caso L seja uma linguagem regular. Aqui a é um símbolo do alfabeto de L.

   Solução:

   a) Sejam L a linguagem em questão e $R = \{\mathtt{b}\}^*$. Sejam $\mathtt{b}^i$ e $\mathtt{b}^j$, $i \neq j$, duas palavras arbitrárias de R. Tem-se que $\mathtt{b}^i\mathtt{a}\mathtt{b}^i \in L$ e $\mathtt{b}^j\mathtt{a}\mathtt{b}^i \notin L$. Pelo teorema da invariância à direita, L não é regular.

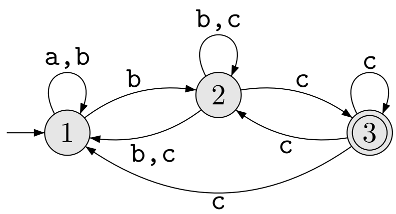
   b) Se $(E, \Sigma, \delta, i, F)$ é um AFD que reconhece L, então $(E, \Sigma, \delta, \delta(i, a), F)$ é um AFD que reconhece $\{x \mid ax \in L\}$. Logo esta linguagem é regular.

6. Obtenha um AFN equivalente a:



usando o método de obtenção de AFN a partir de AFNλ visto em aula (ou no livro-texto). Explicite o cálculo de $\delta'(e, s)$ para cada par $(e, s) \in \{1, 2, 3\} \times \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ tal que $|\delta'(e, s)| > 1$.

Solução:



$\delta'(1, \mathtt{b}) = f\lambda(\delta(1, \mathtt{b})) = f\lambda(\{2\}) = \{1, 2\}$,
$\delta'(2, \mathtt{b}) = f\lambda(\delta(2, \mathtt{b})) = f\lambda(\{2\}) = \{1, 2\}$,
$\delta'(2, \mathtt{c}) = f\lambda(\delta(2, \mathtt{c})) = f\lambda(\{3\}) = \{1, 2, 3\}$,
$\delta'(3, \mathtt{c}) = f\lambda(\delta(3, \mathtt{c})) = f\lambda(\{3\}) = \{1, 2, 3\}$.

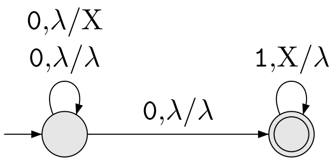
Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Segunda prova/Solução do professor — 22/10/2013

1. Para cada linguagem a seguir, construa um APD que a reconheça, se possível. Se não for possível, construa um APN. Critério de reconhecimento: por estado final **e** pilha vazia.

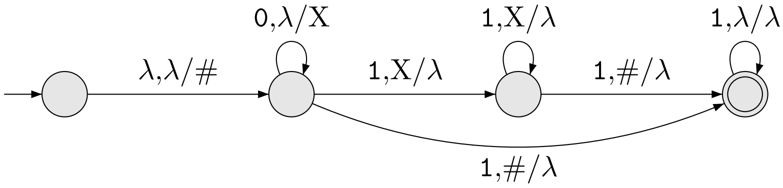
   a) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^k \mid n > k\}$.
   b) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^k \mid n < k\}$.

   Solução:

   a) APN:



   b) APD:



2. Seja $L = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^p \mid m \geq n$ **ou** $m \geq p\}$.

   (a) Construa uma GLC que gere L.
   (b) Mostre que a GLC construída é ambígua ou apresente uma argumentação convincente de que não é.

   Solução:

   (a)
$$\begin{aligned} P &\rightarrow XC \mid Y \\ X &\rightarrow \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{a}X \mid \lambda \\ C &\rightarrow \mathtt{c}C \mid \lambda \\ Y &\rightarrow \mathtt{a}Y\mathtt{c} \mid \mathtt{a}Y \mid B \\ B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \lambda \end{aligned}$$

   (b) A GLC é ambígua, pois há duas derivações mais à esquerda para λ:
$$P \Rightarrow XC \Rightarrow C \Rightarrow \lambda$$
$$P \Rightarrow Y \Rightarrow B \Rightarrow \lambda$$

3. Mostre que:

   (a) Existe gramática regular ambígua.
   (b) Não existe linguagem regular inerentemente ambígua.

   Solução:

   (a) É ambígua: $P \rightarrow \mathtt{a}A \mid \mathtt{a}$
$$A \rightarrow \lambda$$

(b) Para qualquer linguagem regular existe um AFD M que a reconhece. Obtendo-se a gramática regular G a partir M, tem-se para qualquer palavra w:

- Existe uma única computação possível para w em M, pois M é determinística.
- À computação para w em M corresponde uma única derivação em G, propiciada por:
$$\delta(X, a) = Y \text{ é transição em } M \text{ sse } X \rightarrow aY \text{ é regra em } G.$$
- Como G é regular, tal derivação de w é mais à esquerda. Portanto, existe uma única derivação mais à esquerda de w em G. Logo, G não é ambígua.

4. Prove que $L = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^p \mid m \geq n \text{ e } m \geq p\}$ não é livre do contexto.

Solução:

Suponha que L é livre do contexto. Seja k a constante do LB e $z = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k$. Como $|z| > k$, o lema diz que existem u, v, w, x e y tais que $z = uvwxy$, $|vwx| \leq k$, $vx \neq \lambda$ e $uv^iwx^iy \in L$ para todo $i \in \mathbf{N}$. Sejam, então, u, v, w, x e y tais que $z = uvwxy$, $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$. Dois casos a considerar:

- vx contém $\mathtt{a}$. Como $uvwxy = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k$ e $|vwx| \leq k$, vx não contém $\mathtt{c}$s e, portanto, uv^0wx^0y tem menos $\mathtt{a}$s do que $\mathtt{c}$s. Portanto, $uv^0wx^0y \notin L$.
- vx não contém $\mathtt{a}$. Como $vx \neq \lambda$, uv^2wx^2y tem menos $\mathtt{a}$s do que $\mathtt{b}$s ou menos $\mathtt{a}$s do que $\mathtt{c}$s e, portanto, $uv^2wx^2y \notin L$.

Assim, em qualquer caso existe i tal que $uv^iwx^iy \notin L$, o que contradiz o LB. Portanto, L não é livre do contexto.

5. Dada uma GLC qualquer, como se obtém uma GLC equivalente sem regras unitárias? Descreva de forma **precisa** um método para tal obtenção. (Regras unitárias são da forma $A \rightarrow B$, em que A e B são variáveis.)

Solução:

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, R, P)$. Para obter G' sem regras unitárias equivalente:

- Determine para cada $X \in V$:
$$\mathrm{enc}(X) = \{X\} \cup \{Y_n \in V \mid X \rightarrow Y_1, Y_1 \rightarrow Y_2, \ldots, Y_{n-1} \rightarrow Y_n \in R, \forall i \geq 1 (Y_i \in V)\}.$$
- $G' = (V, \Sigma, R', P)$, em que
$$R' = \{X \rightarrow w \mid w \notin V \text{ e existe } Y \in \mathrm{enc}(X) \text{ tal que } Y \rightarrow w \in R\}.$$

6. Apresente exemplos de LLCs L_1 e L_2 tais que $L_1 \cap L_2$:

(a) É regular.
(b) É LLC, mas não é regular.
(c) Não é LLC.

Solução:

(a) $L_1 = L_2 = \emptyset$.
(b) $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbf{N}\}$; $L_2 = \Sigma^*$.
(c) $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \mid n, k \in \mathbf{N}\}$; $L_2 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k \mid n, k \in \mathbf{N}\}$.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG

Teoria de Linguagens — 2º semestre de 2014

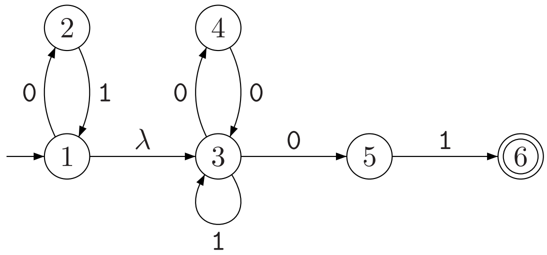
Professor: Newton José Vieira

Segunda Prova/Solução do professor

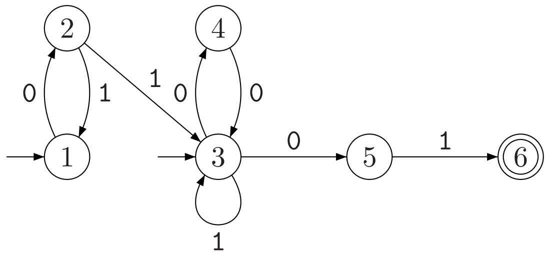
1. Construa um AFD que reconheça a linguagem denotada por $(01)^*(00+1)^*01$.

   Solução:

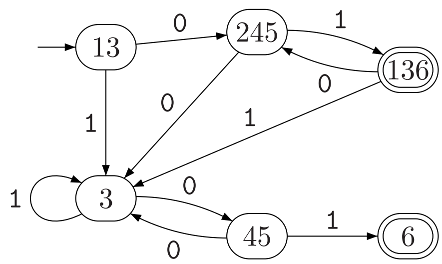
   Um AFNλ:



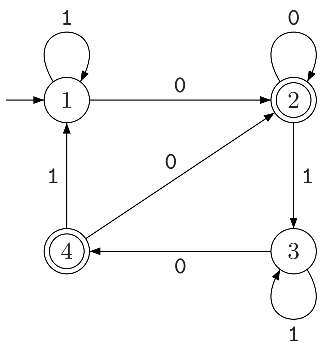
   AFN correspondente:



   AFD correspondente:

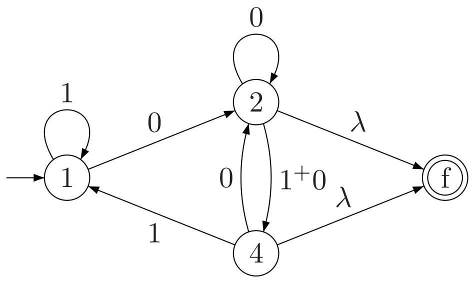


2. Obtenha uma expressão que denote a linguagem reconhecida pelo AFD:

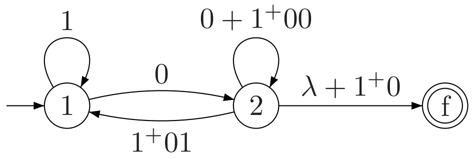


   Solução:

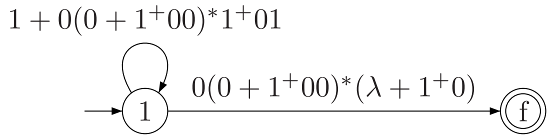
   Acrescentando-se um estado final, f, com transições λ de 2 e de 4 para f, e eliminando-se 3 em seguida:



Eliminando-se 4:



Eliminando-se 2:



ER: $(1 + 0(0 + 1^+00)^*1^+01)^*0(0 + 1^+00)^*(\lambda + 1^+0)$.

3. Construa uma GLC que gere $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \mid m \geq n \text{ ou } n \leq k\}$. Prove que sua GLC é ambígua mostrando duas derivações mais a esquerda de λ (se houver).

   Solução:

   GLC:

$$
\begin{aligned}
P &\to XC \mid AY \\
X &\to \mathtt{a}X \mid \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \lambda \qquad \text{gera } \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m \geq n\} \\
C &\to \mathtt{c}C \mid \lambda \\
Y &\to \mathtt{b}Y\mathtt{c} \mid Y\mathtt{c} \mid \lambda \qquad \text{gera } \{\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \mid n \leq k\} \\
A &\to \mathtt{a}A \mid \lambda
\end{aligned}
$$

   Duas derivações mais a esquerda de λ:

   1: $P \Rightarrow XC \Rightarrow C \Rightarrow \lambda$
   2: $P \Rightarrow AY \Rightarrow Y \Rightarrow \lambda$

4. Seja a GLC:

$$
\begin{aligned}
P &\to A \mid \mathtt{10} \\
A &\to \mathtt{0}A\mathtt{1} \mid B \\
B &\to \mathtt{00}B \mid B\mathtt{11} \mid \lambda
\end{aligned}
$$

   Aplique, em sequência, os métodos vistos em aula para:

   (a) eliminar regras λ;
   (b) eliminar regras unitárias.
   (c) obter uma GLC equivalente na forma normal de Chomsky.

Solução:

(a) Variáveis anuláveis: $\{B, A, P\}$. GLC resultante:

$$\begin{array}{lcl} P & \to & A \,|\, \mathtt{10} \,|\, \lambda \\ A & \to & \mathtt{0}A\mathtt{1} \,|\, \mathtt{01} \,|\, B \\ B & \to & \mathtt{00}B \,|\, B\mathtt{11} \,|\, \mathtt{00} \,|\, \mathtt{11} \end{array}$$

(b) $\mathrm{enc}(P) = \{P, A, B\}$, $\mathrm{enc}(A) = \{A, B\}$, $\mathrm{enc}(B) = \{B\}$. GLC resultante:

$$\begin{array}{lcl} P & \to & \mathtt{0}A\mathtt{1} \,|\, \mathtt{01} \,|\, \mathtt{10} \,|\, \mathtt{00}B \,|\, B\mathtt{11} \,|\, \mathtt{00} \,|\, \mathtt{11} \,|\, \lambda \\ A & \to & \mathtt{0}A\mathtt{1} \,|\, \mathtt{01} \,|\, \mathtt{00}B \,|\, B\mathtt{11} \,|\, \mathtt{00} \,|\, \mathtt{11} \\ B & \to & \mathtt{00}B \,|\, B\mathtt{11} \,|\, \mathtt{00} \,|\, \mathtt{11} \end{array}$$

(c) Forma normal de Chomsky:

$$\begin{array}{lcl} P & \to & ZR \,|\, ZU \,|\, UZ \,|\, ZS \,|\, BT \,|\, ZZ \,|\, UU \,|\, \lambda \\ A & \to & ZR \,|\, ZU \,|\, ZS \,|\, BT \,|\, ZZ \,|\, UU \\ B & \to & ZS \,|\, BT \,|\, ZZ \,|\, UU \\ R & \to & AU \\ S & \to & ZB \\ T & \to & UU \\ Z & \to & \mathtt{0} \\ U & \to & \mathtt{1} \end{array}$$

5. Prove que $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \,|\, k = min(m, n)\}$ é ou que não é livre do contexto. $min(m, n)$ é o menor valor entre m e n.

Solução:

Seja L a linguagem em questão e suponha que a mesma seja livre do contexto. Seja k a constante do LB e $z = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k$. Como $|z| > k$, o LB diz que existem u, v, w, x, y tais que $z = uvwxy$, $|vwx| \leq k$, $|vx| > 0$ e $uv^iwx^iy \in L$ para todo $i \geq 0$. Considere os dois casos:

1. vx contém o símbolo `c`. Como $|vwx| \leq k$, vx não contém `a`s. E como $|vx| > 0$, uv^2wx^2y contém mais `c`s do que `a`s (o número de `a`s é k e o de `c`s é maior do que k) e, portanto, o número de `c`s não é o mínimo entre o número de `a`s e o de `b`s . Logo, $uv^2wx^2y \notin L$.
2. vx não contém `c`. Como $|vx| > 0$, uv^0wx^0y contém mais `c`s do que `a`s e/ou `b`s (o número de `a`s e/ou de `b`s é menor do que k e o de `c`s é k) e, portanto, o número de `c`s não é o mínimo entre o número de `a`s e o de `b`s. Logo, $uv^2wx^2y \notin L$.

Portanto, em qualquer caso há contradição com o que diz o LB, podendo-se concluir que L não é livre do contexto.

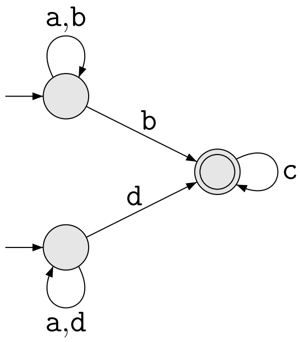
Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — 2º semestre de 2015
Segunda Prova/Solução do professor — 27/10/2015

1. Encontre uma expressão regular que denote $\{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \mid m+n \text{ é ímpar }\}$.

   Solução: $(00)^*(0+1)(11)^*$.

2. Construa um AFN de 3 estados que reconheça $(a+b)^*bc^* + (a+d)^*dc^*$.

   Solução:



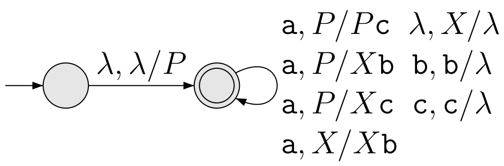
3. Construa uma GLC e um AP para a linguagem $\{\mathtt{a}^{m+n}\mathtt{b}^m\mathtt{c}^n \mid m+n \geq 1\}$.

   Solução:

   GLC:

$$\begin{aligned} P &\to \mathtt{a}P\mathtt{c} \mid \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{a}X\mathtt{c} \\ X &\to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \lambda \end{aligned}$$

   AP:



4. Descreva como eliminar regras unitárias em GLCs.

   Solução: Uma GLC equivalente a $G = (V, \Sigma, R, P)$ sem regras unitárias é $G' = (V, \Sigma, R', P)$, em que

$$R' = \{X \to w \mid \text{ existe } Y \in enc(X) \text{ tal que } Y \to w \in R \text{ e } w \notin V\},$$

   em que $enc(X)$ é o conjunto de toda $Z \in V$ tal que $Z = X$ ou existe uma sequência de regras $X \to Y_1$, $Y_1 \to Y_2$, $\ldots$, $Y_n \to Z$ em R, $n \geq 0$ (no caso em que $n = 0$, há apenas a regra $X \to Z$).

5. Use o lema do bombeamento para mostrar que $\{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$ não é LLC.

Solução: Suponha que tal linguagem seja LLC e seja k a constante do LB. Seja $z = 0^{k^2}$ e, de acordo com o LB, u, v, w, x e y tais que $uvwxy = z$, $|vwx| \leq k$ e $|vx| > 0$. Como $|vx| > 0$, $|uv^2wx^2y| > k^2$, e como $|vwx| \leq k$, $|uv^2wx^2y| \leq k^2 + k$. Portanto, $k^2 < |uv^2wx^2y| \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. Segue-se que uv^2wx^2y não pertence à linguagem, contradizendo o LB. Logo, a linguagem em questão não é LLC.

6. Prove que a afirmativa

se L não é uma LLC, então $(L - X) \cup (X - L)$ não é uma LLC

é ou não verdadeira, considerando os casos em que:

(a) X é finita.

(b) X é regular.

Solução:

(a) X é finita. Suponha que L não seja LLC e que, no entanto, $(L - X) \cup (X - L)$ seja LLC. Como $L \cap X$ e $X - L = X \cap \overline{L}$ são finitas, são regulares. Além disso, como linguagens regulares são fechadas sob complemento, $\overline{X - L}$ é regular. Como as linguagens livres do contexto são fechadas sob interseção com linguagem regular e sob união, então $[((L - X) \cup (X - L)) - (X - L)] \cup (X \cap L) = [((L - X) \cup (X - L)) \cap \overline{X - L}] \cup (X \cap L)$ deve ser LLC. Mas esta é igual a L, o que contradiz o fato de que L não é LLC. Portanto, $(L - X) \cup (X - L)$ não é LLC e a afirmativa é verdadeira.

(b) X é regular. Sejam L uma linguagem não LLC, Σ o alfabeto de L e $X = \Sigma^*$. Segue-se que $(L - X) \cup (X - L) = \emptyset \cup \overline{L} = \overline{L}$. Como as linguagens livres do contexto não são fechadas sob complemento, $\overline{L}$ pode ser LLC (com complemento não LLC). Portanto, a afirmativa é falsa.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG

Teoria de Linguagens — $2^{\underline{\text{o}}}$ semestre de 2015

Segunda Prova/especial/Solução do professor — 30/10/2015

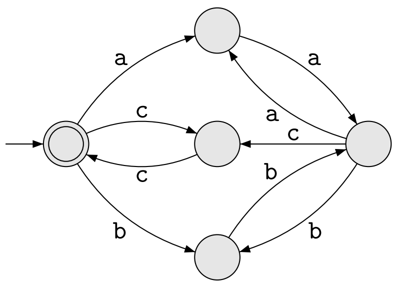
1. Encontre uma expressão regular que denote a linguagem:

$$\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid w \text{ tem um único } \mathtt{b} \text{ e não termina com } \mathtt{cc}\}.$$

Solução: $(a + c)^* b (c^* a)^* (\lambda + c)$

2. Construa um AFD reconheça $((aa + bb)^* cc)^*$.

Solução:



3. Construa uma GLC e um AP para a linguagem $\{\mathtt{0}^m \mathtt{1}^{m+n} \mathtt{0}^n \mid m + n \geq 2\}$.

Solução:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \mathtt{00}A\mathtt{11}B \mid \mathtt{0}A\mathtt{11}B\mathtt{0} \mid A\mathtt{11}B\mathtt{00} \\ A &\rightarrow \mathtt{0}A\mathtt{1} \mid \lambda \\ B &\rightarrow \mathtt{1}B\mathtt{0} \mid \lambda \end{aligned}$$

4. Descreva como seria possível, dada uma gramática regular G, determinar uma gramática regular G' tal que $L(G) = L(G')$ e G' não é ambígua.

Solução: Utilizando os métodos vistos no curso:

   1. A partir de G, obtenha um AFN M tal que $L(M) = L(G)$;
   2. A partir de M, obtenha um AFD M' tal que $L(M') = L(M)$;
   3. A partir de M', obtenha uma gramática redular G' tal que $L(G') = L(M')$.

Tem-se que $L(G) = L(M) = L(M') = L(G')$ e, assim como as computações do AFD M' para cada palavra são únicas, as derivações de G' para cada palavra são únicas. Logo, $L(G) = L(G')$ e G' não é ambígua.

5. Construa uma gramática na forma normal de Chomsky equivalente à gramática:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid SCB \\ A &\rightarrow \mathtt{a}A \mid C \\ B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b} \\ C &\rightarrow \mathtt{c}C \mid \lambda \end{aligned}$$

Deverão ser seguidos os passos recomendados em aula (os mesmos que são recomendados no livro texto).

Solução:

1. Eliminação de variáveis anuláveis:
   O conjunto de variáveis anuláveis é $\{C, A\}$. GLC obtida:

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid B \mid SCB \mid SB \\
A &\to \mathtt{a}A \mid \mathtt{a} \mid C \\
B &\to \mathtt{b}B \mid \mathtt{b} \\
C &\to \mathtt{c}C \mid \mathtt{c}
\end{aligned}$$

2. Eliminação de regras unitárias:
   $enc(S) = \{S, B\}$; $enc(A) = \{A, C\}$; $enc(B) = \{B\}$; $enc(C) = \{C\}$. GLC obtida:

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{b} \mid SCB \mid SB \\
A &\to \mathtt{a}A \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{c}C \mid \mathtt{c} \\
B &\to \mathtt{b}B \mid \mathtt{b} \\
C &\to \mathtt{c}C \mid \mathtt{c}
\end{aligned}$$

3. Substituição de terminais por variáveis:

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid YB \mid \mathtt{b} \mid SCB \mid SB \\
A &\to XA \mid \mathtt{a} \mid ZC \mid \mathtt{c} \\
B &\to YB \mid \mathtt{b} \\
C &\to ZC \mid \mathtt{c} \\
X &\to \mathtt{a} \\
Y &\to \mathtt{b} \\
Z &\to \mathtt{c}
\end{aligned}$$

4. Quebra de regras:

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid YB \mid \mathtt{b} \mid SR \mid SB \\
A &\to XA \mid \mathtt{a} \mid ZC \mid \mathtt{c} \\
B &\to YB \mid \mathtt{b} \\
C &\to ZC \mid \mathtt{c} \\
X &\to \mathtt{a} \\
Y &\to \mathtt{b} \\
Z &\to \mathtt{c} \\
R &\to CB
\end{aligned}$$

6. Seja $L = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \mid n, k \geq 0, m \neq n \text{ ou } n \neq k\}$. Mostre que:

   a) L é LLC.

   b) $\overline{L}$ não é LLC.

Solução:

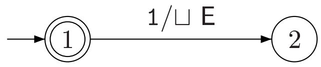
a) L é LLC, pois é gerada pela GLC:

$$
\begin{aligned}
S &\to XC \mid AY \\
X &\to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \\
Y &\to \mathtt{b}Y\mathtt{c} \mid \mathtt{b}B \mid C\mathtt{c} \\
A &\to \mathtt{a}A \mid \lambda \\
B &\to \mathtt{b}B \mid \lambda \\
C &\to \mathtt{c}C \mid \lambda
\end{aligned}
$$

b) $\overline{L}$ não é LLC, pois $\overline{L} = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Terceira Prova/Solução do professor — 26/11/2013

1. Seja a MT $M = (\{1, 2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \langle, \sqcup\}, \langle, \sqcup, \delta, 1, \{1\})$ com o diagrama de estados a seguir:

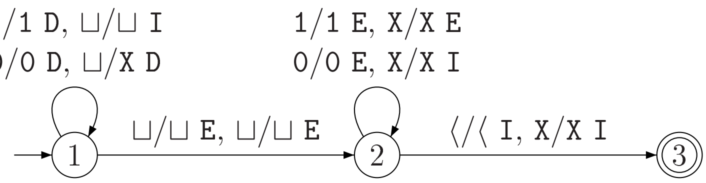


   Expresse a linguagem reconhecida por M por meio de uma expressão regular.

   Solução: $\lambda + 0(0 + 1)^*$.

2. Construa uma MT que reconheça $\{w \in \{0, 1\}^* \mid n_0(w) > n_1(w)\}$. Pode usar mais de uma fita, não determinismo etc.

   Solução: MT de duas fitas, a segunda para conter o número de 0s:



3. Dada uma gramática irrestrita G, como seria uma MT M que reconhece L(G)? Basta mostrar um algoritmo, em alto nível, de M. *Dica:* faça, como visto no curso, uma MT não determinística de duas fitas, a primeira contendo a palavra a reconhecer e a segunda uma forma sentencial de G.

   Solução: Seja uma gramática irrestrita $G = (V, \Sigma, R, P)$. Será apresentado um algoritmo para uma MT não determinística de duas fitas, M, tal que $L(M) = L(G)$. Fita 1: palavra de entrada; fita 2: forma sentencial de G.

```
Escreva P (a variável de partida) na fita 2.
laço
    selecione uma posição p na forma sentencial que está na fita 2;
    selecione uma regra u → v ∈ R;
    se u ocorre a partir da posição p da fita 2 então
        substitua u por v na fita 2;
        se a forma sentencial na fita 2 é idêntica à palavra na fita 1 então
            aceite
        fimse
    senão
        rejeite
    fimse
fimlaço.
```

4. Faça uma gramática sensível ao contexto que gere a linguagem $\{wxw \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \text{ e } x \in \{\mathtt{c}\}^+\}$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
P &\to \mathtt{a}PA \mid \mathtt{b}PB \mid C\\
C &\to C\mathtt{c} \mid \mathtt{c}\\
\mathtt{c}A &\to \mathtt{ca}\\
\mathtt{c}B &\to \mathtt{cb}\\
\mathtt{a}A &\to A\mathtt{a}\\
\mathtt{a}B &\to B\mathtt{a}\\
\mathtt{b}A &\to A\mathtt{b}\\
\mathtt{b}B &\to B\mathtt{b}
\end{aligned}
$$

5. Seja $L = \{R\langle M\rangle \mid L(M) = \{\mathtt{00},\mathtt{01},\mathtt{10},\mathtt{11}\}\}$. Mostre que:

   (a) L é recursivamente enumerável.

   (b) L não é recursiva.

Solução:

(a) Pode-se simular a execução de M sobre cada uma das palavras de $\{\mathtt{00},\mathtt{01},\mathtt{10},\mathtt{11}\}$ via uma MT S que se comporte como a MT universal para cada uma das 4 entradas. S tem 3 fitas; na fita 1 vem a entrada ($R\langle M\rangle$). Inicialmente, S inicializa as fitas 2 e 3 com $R\langle\mathtt{00}\rangle$ e $R\langle i\rangle$ (i é o estado inicial de M) e se comporta como a MT universal. Nas situações em que M aceita $\mathtt{00}$, S re-inicializa as fitas 2 e 3, agora com $R\langle\mathtt{01}\rangle$ e $R\langle i\rangle$. E assim por diante, simulando também o processamento para as palavras $\mathtt{10}$ e $\mathtt{11}$. M aceitando todas, S aceita. Note que, se M entra em *loop* para alguma das palavras, S também entra.

(b) A propridade "$L(M) = \{\mathtt{00},\mathtt{01},\mathtt{10},\mathtt{11}\}$" é não trivial. Logo, pelo teorema de Rice, L não é recursiva.

6. Mostre que é decidível ou que não é:

   (a) Dada uma MT, determinar se ela volta ao seu estado inicial se executada com a fita em branco.

   (b) Dada uma GLC G e uma gramática regular H, determinar se $L(G) = L(H)$.

Solução:

(a) Indecidível. O problema da fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de M, uma MT M', com um estado inicial i' diferente de todos os estados de M, que faz o seguinte:

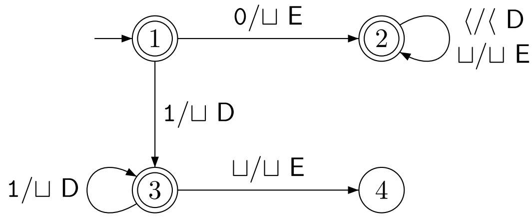
- De i', M' transita para o estado inicial de M, mantendo o cabeçote imóvel (via a transição $\delta'(i', \sqcup) = [i, \sqcup, I]$, sendo i o estado inicial de M).
- M' se comporta como M, mas nas situações em que M para, M' transita para i' (faz $\delta'(e, a) = [i', a, I]$ para todo estado e de M e símbolo de fita a de M tais que $\delta(e, a)$ é indefinido).

Com isto: M para se sua fita é iniciada em branco sse M' volta ao seu estado inicial se sua fita é iniciada em branco.

(b) Indecidível. O problema indecidível de determinar se $L(G) = \Sigma^*$ para GLCs G pode ser reduzido ao presente problema produzindo-se uma gramática regular H tal que $L(H) = \Sigma^*$. Com isto, $L(G) = \Sigma^*$ se, e somente se $L(G) = L(H)$.

Pós-Graduação em Ciência da Computação | DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens | $2^{\underline{o}}$ semestre de 2014
Professor: Newton José Vieira
Terceira Prova/Solução do professor | 2/12/2013

1. Seja a MT $M = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \langle, \sqcup\}, \langle, \sqcup, \delta, 1, \{1, 2, 3\})$ com o diagrama de estados:

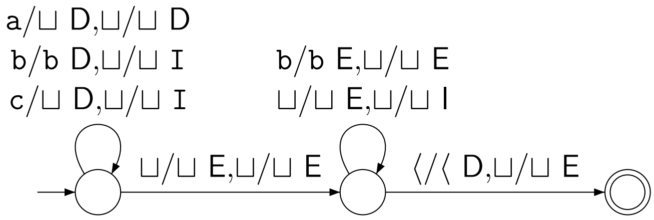


Expresse a linguagem reconhecida por M por meio de uma expressão regular.

Solução: $\lambda + 11^*0(0+1)^*$

2. Construa uma MT de duas fitas que reconheça $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) > n_{\mathtt{b}}(w)\}$. ($n_{\mathtt{a}}(w)$: número de as na palavra w.)

Solução:



3. No curso, foi mostrado como construir em três passos, a partir de uma MT $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$, uma gramática que gera $L(M)$. Mostre regras para o primeiro passo, em que é gerada toda forma sentencial $w\langle iw\rangle$ a partir do símbolo de partida P. Nesta forma sentencial, $\langle$, i e $\rangle$ são variáveis e $w \in \Sigma^*$.

Solução: Sejam $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ o alfabeto de M (e de terminais da gramática) e $\{A_1, \ldots, A_n\}$ variáveis para a gramática. As regras:

$P \rightarrow B\rangle$
$B \rightarrow a_j B A_j$ para $1 \leq j \leq n$
$B \rightarrow \langle i$
$a_j A_k \rightarrow A_k a_j$ para $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq n$
$iA_k \rightarrow ia_k$ para $1 \leq k \leq n$

4. Mostre que para um autômato de pilha P e uma expressão regular r arbitrários:

(a) É decidível determinar se $L(P) \subseteq L(r)$.

(b) É indecidível determinar se $L(r) \subseteq L(P)$.

Solução:

(a) $L(P) \subseteq L(r)$ sse $L(P) \cap \overline{L(r)} = \emptyset$ sse $L(G) = \emptyset$, onde G é obtido assim:

   (a) de r obtém-se um AFD M tal que $L(M) = L(r)$;
   (b) de M obtém-se um AFD M' tal que $L(M') = \overline{L(M)}$;
   (c) de P e M' obtém-se um AP P' tal que $L(P') = L(P) \cap L(M')$;
   (d) de P' obtém-se uma GLC G tal que $L(G) = L(P')$.

   Como o problema de determinar se $L(G) = \emptyset$ é decidível, o problema em questão é decidível.

(b) O problema indecidível de determinar se $L(G) = \Sigma^*$, para GLCs G, pode ser reduzido a este produzindo-se uma expressão regular r que denote Σ^* e uma GLC G que gere $L(P)$, pois: $L(G) = \Sigma^*$ sse $\Sigma^* \subseteq L(G)$.

5. Mostre que é decidível ou que não é:

   (a) Dada uma gramática irrestrita G, determinar se $L(G) \neq \emptyset$.
   (b) Dada uma MT, determinar se ela lê `0` em algum momento para a entrada λ (fita em branco).

Solução:

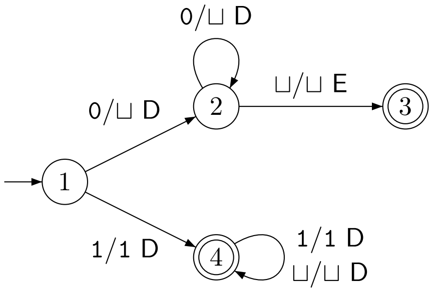
(a) É indecidível. O problema de determinar se $L(M) \neq \emptyset$, para MTs M, é indecidível (pelo Teorema de Rice). Tal problema pode ser reduzido ao problema em questão produzindo-se uma gramática irrestrita G tal que $L(G) = L(M)$.

(b) É indecidível. O problema da fita em branco pode ser reduzido ao problema em questão produzindo-se M' a partir de M tal que M' só difere de M com relação a:

   - se M contém o símbolo `0`, em M' tal símbolo deve estar substituído por um símbolo diferente de todos aqueles do alfabeto de fita de M; e
   - nas situações em que M para, M' escreve `0` e, em seguida, lê o `0` escrito.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2015
Professor: Newton José Vieira
Terceira Prova — 26/11/2015

1. Seja a MT $M = (\{1,2,3,4\}, \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}, \{\mathtt{0},\mathtt{1},\langle,\sqcup\}, \langle, \sqcup, \delta, 1, \{3,4\})$ com o diagrama de estados:

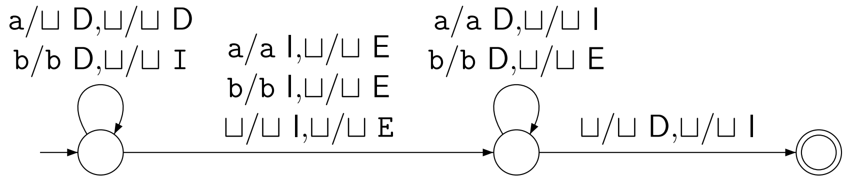


Expresse a linguagem reconhecida por M por meio de uma expressão regular.

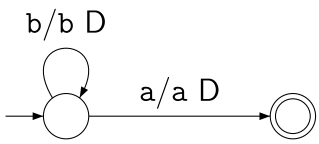
Solução: $00^* + 11^*0(0+1)^*$

2. Construa uma MT de duas fitas que reconheça $\{xy \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(x) > n_{\mathtt{b}}(y)\}$. ($n_{\mathtt{a}}(w)$: número de as na palavra w.) Para facilitar, pode usar não determinismo.

Solução:



Como a linguagem é igual a $\{x \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(x) > 0\}$, uma outra solução é:



3. Construa uma gramática que gere $\{\mathtt{a}^n xx \mid x \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \text{ e } |x| = n\}$.

Solução:

$$
\begin{array}{ll}
P \rightarrow \mathtt{a}PA\mathtt{a} \mid \mathtt{b}PB\mathtt{b} \mid M & \\
MA \rightarrow \mathtt{a}M & MB \rightarrow \mathtt{b}M \\
\mathtt{a}A \rightarrow A\mathtt{a} & \mathtt{b}A \rightarrow A\mathtt{b} \\
\mathtt{a}B \rightarrow B\mathtt{a} & \mathtt{b}B \rightarrow B\mathtt{b} \\
M \rightarrow \lambda &
\end{array}
$$

4. Mostre que se o problema da parada fosse decidível, toda linguagem recursivamente enumerável seria recursiva.

Solução: Suponha que P seja uma MT que solucione o problema da parada. Seja L uma linguagem recursivamente enumerável e M uma MT, que reconhece *por parada*, tal que $L(M) = L$. Então pode-se construir uma MT M' que reconhece L e que pare para qualquer palavra de entrada w da seguinte maneira:

1. M' obtém $R\langle M, w\rangle$ (no lugar de sua entrada w ou em uma segunda fita);
2. M' se comporta como P (sobre $R\langle M, w\rangle$);
3. nas situações em que P aceita (responde "sim"), M' aceita, e nas situações em que P rejeita (responde "não"), M' rejeita.

Tem-se:

$$w \in L(M) \text{ sse } M \text{ para se a entrada é } w \text{ sse } P \text{ aceita } R\langle M, w\rangle \text{ sse } w \in L(M').$$

Como M' sempre para e $L(M') = L(M) = L$, segue-se que L é recursiva.

5. Mostre que os seguintes problemas são indecidíveis:

(a) Dadas duas gramáticas livres do contexto G_1 e G_2, cada uma com *uma única variável*, determinar se $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$.

(b) Dada uma MT M e um símbolo a de seu alfabeto de entrada, determinar se M reconhece alguma palavra que tenha uma ocorrência de a.

Solução:

(a) O problema da correspondência de Post pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de um SCP S, as gramáticas G_X e G_Y. Note que cada uma destas GLCs tem uma única variável e são tais que $L(G_X) \cap L(G_Y) = \emptyset$ sse o PCP S não tem solução.

(b) O problema da parada pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de $R\langle M, w\rangle$, $R\langle M', a\rangle$ em que a é um símbolo qualquer do alfabeto de entrada de M (que é o mesmo que o de M') e M' é tal que:

1. M' apaga sua entrada qualquer que ela seja;
2. M' escreve w na fita;
3. M' se comporta como M;
4. nas situações em que M para, M' aceita.

Com isto, M para se a entrada é w sse $L(M') = \Sigma^*$ sse M' aceita alguma palavra com a.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG

Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013

Professor: Newton José Vieira

Prova Suplementar/Solução do professor

1. Determine uma expressão regular que denote o complemento de $\{01\}^*$ da seguinte forma:

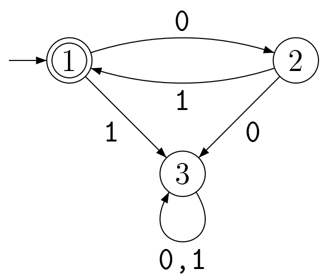
   (a) Desenhe o diagrama de estados de um autômato finito determinístico de 3 estados que reconheça $\{01\}^*$.

   (b) A partir desse autômato, obtenha um outro que reconheça o complemento de $\{01\}^*$.

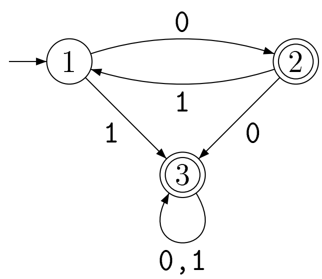
   (c) A partir desse último, explicite um diagrama de expressões regulares (diagrama ER) a ser usado como ponto de partida para a obtenção de uma expressão regular.

   (d) Obtenha a expressão regular, a partir do diagrama ER, por meio do método de eliminações sucessivas de estados.

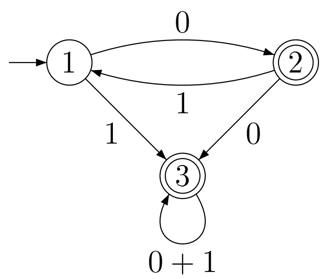
(a) AFD para $\{01\}^*$:



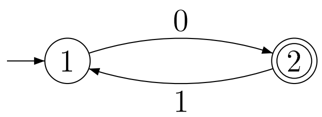
(b) AFD para $\overline{\{01\}^*}$:



(c) Diagrama ER inicial:

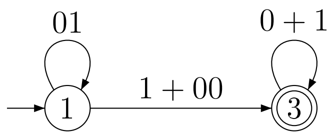


(d) Mantendo-se o estado final 2 e eliminando-se 3:



ER $r_1 : 0(10)^*$.

Mantendo-se o estado final 3 e eliminando-se 2:



ER $r_2 : (01)^*(1+00)(0+1)^*$.

ER para o complemento de $\{01\}^*$: $r_1 + r_2 = 0(10)^* + (01)^*(1+00)(0+1)^*$.

2. Diga se é verdade ou falso, justificando:

   (a) Se L_1 e L_2 são linguagens livres do contexto e $L_1 \subseteq L_2$, então $L_2 - L_1$ é uma linguagem livre do contexto.

   (b) Uma gramática (V, Σ, R, P) em que cada regra é da forma $X \rightarrow w$, sendo $X \in V$, $w \in (V \cup \Sigma)^*$ e $|w| \leq 2$, pode gerar qualquer linguagem livre do contexto.

Solução:

(a) Falso. Σ^* é livre do contexto e se L for livre do contexto, $\Sigma^* - L$ pode não ser livre do contexto, visto que a classe das linguagens livres do contexto não é fechada sob complementação.

(b) Verdadeiro. Uma gramática na forma normal de Chomsky só tem regras dessa forma.

3. Mostre que são equivalentes os seguintes critérios de aceitação para máquinas de Turing:

   (a) Por estado final: uma palavra w é aceita se e somente se a máquina atinge algum estado final ao processar w,.

   (b) Por parada: uma palavra w é aceita se e somente se a máquina para ao processar w.

Solução:

(a)$\rightarrow$(b)

Seja $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i, F)$ uma MT que aceite por estado final. Então a MT $(E \cup \{l\}, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta', i)$ tal que

- $l \notin E$;
- $\delta'(l, a) = [l, a, D]$ para todo $a \in \Gamma$;
- $\delta'(e, a)$ é indefinido para todo $(e, a) \in F \times \Gamma$;
- $\delta'(e, a) = \delta(e, a)$ para todo $(e, a) \in (E - F) \times \Gamma$ tal que $\delta(e, a)$ é definido;
- $\delta'(e, a) = [l, a, D]$ para todo $(e, a) \in (E - F) \times \Gamma$ tal que $\delta(e, a)$ é indefinido;

aceita $L(M)$ por parada.

(b)$\rightarrow$(a)

Seja $M = (E, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i)$ uma MT que aceite por parada. Então a MT $(E \cup \{f\}, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta', i, \{f\})$ tal que

- $f \notin E$;
- $\delta'(e, a) = \delta(e, a)$ para todo $(e, a) \in E \times \Gamma$ tal que $\delta(e, a)$ é definido;
- $\delta'(e, a) = [f, a, D]$ para todo $(e, a) \in E \times \Gamma$ tal que $\delta(e, a)$ é indefinido;

aceita $L(M)$ por estado final.

4. Mostre que é decidível ou que não é:

   (a) Dada uma GLC G, determinar se $L(G) \cap \{1\}^* \neq \emptyset$.

   (b) Dada uma MT, determinar se todos os seus estados são úteis. Estado útil: aquele que é atingido durante o processamento de alguma palavra de entrada.

   Solução:

   (a) Decidível. Tal problema pode ser reduzido ao problema decidível de determinar, dada uma GLC H, se $L(H) \neq \emptyset$: pode-se obter uma GLC H tal que $L(H) = L(G) \cap \{1\}^*$, como visto quando se mostrou que as linguagens livres do contexto são fechadas sob interseção com linguagens regulares.

   (b) Indecidível. O problema da parada para a fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de $R\langle M \rangle$, em que $M = (\{e_1, \ldots, e_n\}, \Sigma, \Gamma, \langle, \sqcup, \delta, i)$, uma MT $M' = (\{e_1, \ldots, e_n, q\} \cup X, \Sigma, \Gamma \cup \{c\}, \langle, \sqcup, \delta', i')$ tal que:

   - $i' \in X$ e $X \cap \{e_1, \ldots, e_n, q\} = \emptyset$;
   - $q \notin \{e_1, \ldots, e_n\}$;
   - Usando os estados em X, M' apaga a entrada e transita para i com o cabeçote posicionado no início.
   - $c \notin \Gamma$;
   - $\delta'(e, a) = \delta(e, a)$ para todo $(e, a) \in E \times \Gamma$ tal que $\delta(e, a)$ é definido;
   - $\delta'(e, a) = [q, c, I]$ para todo $(e, a) \in E \times \Gamma$ tal que $\delta(e, a)$ é indefinido;
   - $\delta(e_i, c) = [e_{i+1}, c, I]$ para $1 \leq i < n$;
   - $\delta(e_n, c)$ é indefinido.

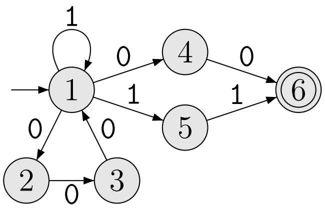
   Com isto, M para se processar com a fita em branco sse M' atinge o estado q ao processar sua entrada, qualquer que ela seja, sse todos os estados de M' são visitados sse todos os estados de M' são úteis.

Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2014
Professor: Newton José Vieira
Prova Suplementar/Solução do professor

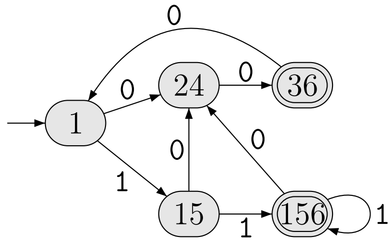
1. Apresente um diagrama de estados de um AFD que reconheça $(000 + 1)^*(00 + 11)$.

   Solução:

   AFN:



   AFD:



2. Apresente um diagrama de estados de um AFN que reconheça a linguagem

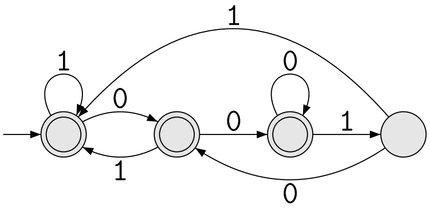
$$L = \{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid \mathtt{001} \text{ não é sufixo de } w\}$$

   e que tenha as seguintes características:

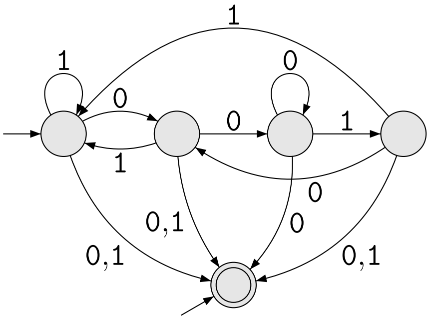
   - tem um único estado final; e
   - para cada $w \in L$ existe uma única computação de sucesso.

   Solução:

   AFD:



   AFN:



3. Se a linguagem $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) \text{ é par e } n_{\mathtt{b}}(w) \text{ é primo}\}$ for livre do contexto, prove que ela não é regular; caso contrário, prove que ela não é livre do contexto. ($n_{\mathtt{a}}(w)$ é o número de $\mathtt{a}$s em w.)

   Solução:

   Seja L a linguagem em questão e suponha que L seja LLC. Como a interseção de uma LLC com uma linguagem regular é LLC, $L \cap \{\mathtt{b}\}^*$ é LLC. Mas $L \cap \{\mathtt{b}\}^* = \{\mathtt{b}^n \mid n \text{ é primo}\}$, e esta última não é LLC. Contradição! Logo, L não é LLC.

4. Seja $L = \{\mathtt{0}^k\mathtt{1}^n \mid k \text{ é ímpar e } k \neq n\}$.

   (a) Construa uma gramática livre do contexto que gere L.

   (b) Para cada variável X da gramática, dê $L(X) = \{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid X \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$.

Solução:

$$
\begin{array}{lll}
P & \to & X \mid Y \\
X & \to & \mathtt{00}X \mid \mathtt{0}A \\
A & \to & \mathtt{11}A \mid \lambda \\
Y & \to & \mathtt{00}Y\mathtt{11} \mid \mathtt{0}B\mathtt{1} \mid \mathtt{0}C\mathtt{1} \\
B & \to & \mathtt{00}B \mid \mathtt{00} \\
C & \to & \mathtt{11}C \mid \mathtt{11}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
L(P) = L \\
L(X) = \{\mathtt{00}\}^*\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{11}\}^* \\
L(A) = \{\mathtt{11}\}^* \\
L(Y) = \{\mathtt{0}^k\mathtt{1}^n \mid k \text{ e } n \text{ ímpares e } k \neq n\} \\
L(B) = \{\mathtt{00}\}^+ \\
L(C) = \{\mathtt{11}\}^+
\end{array}
$$

5. Mostre que é decidível ou que não é:

   (a) Dada uma GLC G, determinar se $L(G) \subseteq \{\mathtt{1}\}^*$.

   (b) Dada uma MT M e um AFD A, determinar se $L(M) \subseteq L(A)$.

Solução:

(a) É decidível. Elimine as variáveis inúteis de G; se *nenhum terminal diferente de* $\mathtt{1}$ for referenciado nas regras após a eliminação de variáveis inúteis, então $L(G) \subseteq \{\mathtt{1}\}^*$; caso contrário, $L(G) \not\subseteq \{\mathtt{1}\}^*$.

(b) É indecidível. O problema de determinar se $L(M) \subseteq \emptyset$ é indecidível, pelo Teorema de Rice, visto que ser subconjunto de $\emptyset$ é uma propridade não trivial de LREs. E este problema pode ser reduzido ao problema em questão produzindo-se uma MT $M' = M$ e um AFD A tal que $L(A) = \emptyset$.