DEFINIZIONE PROBLEMA MULTI OBIETTIVO

Definiamo P, problema multiobjective come:

$$\begin{cases} \min f(x) = \{ f_1(x), \dots, f_s(x) \} \\ x \in X \end{cases} := P$$

Dove $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$

ORDINE DI PARETO

Per trovare un vettore ottimo per P, dobbiamo definire un ordine fra vettori così da dare significato a $\vec{x} > \vec{y}$:

$$x, y \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x \geq y \Rightarrow x_i \geq y_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

Proprietà:

1) Riflessiva: $x \geq x$

2) Asimetrica: $x \geq y$ e $y \geq x \Rightarrow x = y$

3) Transitiva: $x \geq y$ e $y \geq z \Rightarrow x \geq z$

Attenzione

Non tutti i vettori possono essere ordinati in questo modo.
Per esempio:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x \not\geq y \text{ e } y \not\geq x$$

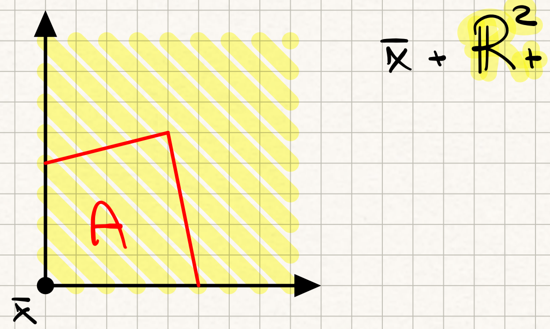
MINIMI DI PARETO

1) IDEAL MIN

Preso $\bar{x} \in A$, si dice IMin(A) SSE $\exists y > \bar{x}$ $\forall y \in A$.

O anche:

$\bar{x} \in A$ è IMin(A) se: $A \subseteq (\bar{x} + \mathbb{R}^s_+)$

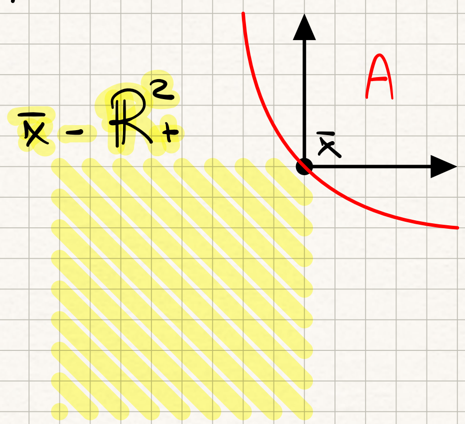


2) MIN

Preso $\bar{x} \in A$, si dice Min(A) SSE $\nexists y \in A$: $\bar{x} \geq y$ con $x \neq y$.

O anche:

$\bar{x} \in A$ è Min(A) se: $A \cap (\bar{x} - \mathbb{R}^s_+) = \{x\}$

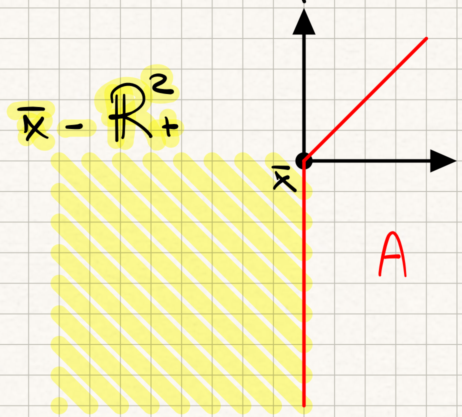


3) WEAK MIN

Preso $\bar{x} \in A$ si dice $WMin(A)$ **SE** $\nexists\, y \in A : \bar{x} > y$

O anche:

$\bar{x} \in A$ è $WMin(A)$ se: $A \cap \left(\bar{x} - \text{int}\left(\mathbb{R}^s_+\right)\right) = \emptyset$



Nota: $IMin(A) \subseteq Min(A) \subseteq WMin(A)$

PROPOSIZIONE

SE $IMin(A) \neq \emptyset$ **ALLORA** $IMin(A) = Min(A) = \{\bar{x}\}$

TEOREMA - Esistenza $Min(A)$

SE $\exists\, \bar{x} \in A$: $A \cap (\bar{x} - \mathbb{R}^s_+)$ è compatto ALLORA $Min(A) \neq \emptyset$

Dove, per insieme compatto si intende un insieme chiuso e limitato.

MINIMI DI PARETO PER P

Dato il problema multiobjective P definiamo

1) IMin

$x^* \in X$ è $IMin(P)$ **SSE** $f(x^*)$ è un $IMin(f(X))$
in altre parole se $f(x) \geq f(x^*)$ $\forall x \in X$.

2) Min

$x^* \in X$ è $Min(P)$ **SSE** $f(x^*)$ è un $Min(f(X))$
in altre parole se

$\nexists x \in X:$

$$f_i(x^*) \geq f_i(x) \quad \forall i=1\dots s$$
$$f_j(x^*) > f_j(x) \quad \text{per qualche } j \in \{1\dots s\}$$

3) WMin

$x^* \in X$ è $WMin(P)$ **SSE** $f(x^*)$ è un $WMin(f(X))$
in altre parole se

$\nexists x \in X:$

$$f_i(x^*) > f_i(x) \quad \forall i=1\dots s$$

TEOREMA

SE f_i è continua $\forall i = 1 \dots s$, e X è compatto ALLORA esiste un ottimo per P.

TEOREMA

SE f_i è continua $\forall i = 1 \dots s$, e X chiuso, e $\exists v \in \mathbb{R}$ e $j \in \{1 \dots s\}$ tale che il sottoinsieme:

$$\{x \in X : f_j(x) \leq v\}$$

NON è vuoto e limitato ALLORA esiste un minimo per P

Dimostrazione

È una conseguenza del teorema di esistenza del $Min(A)$. Ricordando questo teorema, in questo caso dobbiamo dimostrare che:

$$\exists y \in f(X) : S\hat{y} := f(X) \cap (y - \mathbb{R}^s_+) \Rightarrow \text{Compatto}$$

così che abbiamo la conseguenza che $Min(f(X)) \neq \emptyset$

Prendiamo i punti x del set $\{x \in X : f_j(x) \leq v\}$, definito nelle ipotesi. Prendiamo poi i, j con $i \neq j$:

$$\hat{y}_j = f_j(x) \quad e \quad \hat{y}_i = f_i(x)$$

Consideriamo ora il sottoinsieme B:

$$B = \{x \in X : f(x) \in S_y\} = \{x \in X : f(x) \leq \hat{y}\}$$

Dove B è l'insieme di soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_1(x) \leq \hat{y}_1 \\ \dots \\ f_s(x) \leq \hat{y}_s \\ x \in X \end{cases}$$

Dato che abbiamo assunto per ipotesi che X è chiuso e che f_i è continua $\forall i = 1 \dots s$ possiamo affermare che il seguente sottoinsieme chiuso:

$$\{x \in X : f_j(x) \leq \hat{y}_j\} \subseteq \{x \in X : f_j(x) \leq v\}$$

è COMPATTO.

Dato che f è continua allora anche B è compatto, essendo un sottoinsieme di un insieme a sua volta compatto ($\{x \in X : f_j(x) \leq \hat{y}_j\}$). Di conseguenza $f(B) = S\hat{y}$ è compatto e questo dimostra il teorema.

COROLLARIO

SE f_i è continua $\forall i = 1 \dots s$, X chiuso e f_j coerciva per qualche $j \in \{1 \dots s\}$ ALLORA esiste il minimo di P.

TEOREMA

$x^* \in X$ è un minimo per P SSE il problema ausiliare ha valore ottimo pari a $\emptyset$.

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i \\ f_i(x) + \varepsilon_i \leq f_i(x^*) \\ x \in X \\ \varepsilon \geq \emptyset \end{cases}$$

Dimostrazione

Sia $(\bar{x}, \bar{\varepsilon})$ soluzione ottima del problema ausiliare.

1) Assumiamo x^* minimo di P e che $\sum_{i=1}^{s} \bar{\varepsilon}_i > \emptyset$, ovvero che la soluzione dell'ausiliario non sia zero.

Allora $\exists j \in \{1 \dots s\} : \varepsilon_j > \emptyset$ (dato che la somma è positiva) di conseguenza:

$$f_i(x^*) \geq f_i(\bar{x}) \quad \forall i = 1 \dots s$$

$$f_j(x^*) \geq f_j(\bar{x}) + \bar{\varepsilon}_j > f_j(\bar{x})$$

Ma questo contraddice l'ipotesi che x^* è minimo per P.

2) Assumiamo ora che x^* non è minimo e che $\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i = \emptyset$.
Da qui deriva che:

$$f_i(x^*) \geq f_i(\bar{x}) \quad \forall i = 1 \dots s$$

$$f_j(x^*) \geq f_j(\bar{x}) \quad \text{per qualche } j \in \{1 \dots s\}$$

Settando $\varepsilon_j = f_j(x^*) - f_j(\bar{x}) > \emptyset$, abbiamo che la soluzione dell'ausiliario (x, ε) ci porta ad avere

$\sum_{i=1}^{s} \bar{\varepsilon}_i > 0$ perché $\varepsilon_i = \emptyset \ \forall i \neq j$ e $\varepsilon_j > \emptyset$, che contraddice l'assunzione iniziale, ovvero che l'ottimo valore è $\emptyset$.

TEOREMA

$x^* \in X$ è un weak minimo di P **SSE** il problema ausiliare ha valore ottimo pari a $\emptyset$.

$$\begin{cases} \max(v) \\ v \leq \varepsilon_i \\ f_i(x) + \varepsilon_i \leq f_i(x^*) \\ x \in X \\ \varepsilon \geq \emptyset \end{cases}$$

FIRST ORDER OPTIMALITY CONDITION

Consideriamo ora un problema multiobjective non limitato:

$$\begin{cases} \min f(X) = [f_1(x), \dots, f_s(x)] \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} = P_U$$

Con f_i continua e differenziabile $\forall i = 1 \dots s$

PROPOSIZIONE

SE x^* è un WMin(P_U) ALLORA il sistema S_1 è impossibile.

$$\begin{cases} \nabla f_i(x^*)^T \cdot d < \emptyset \quad \forall i = 1 \dots s \\ d \in \mathbb{R}^n \end{cases} = S_1$$

PROPOSIZIONE - Condizione necessaria per l'ottimalità.

SE x^* è un WMin(P_U) ALLORA $\exists \theta^* \in \mathbb{R}^s : (x^*, \theta^*)$ è una soluzione del sistema S:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} \theta_i \cdot \nabla f_i(x) = 0 \\ \theta \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{s} \theta_i = 1 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} = S$$

Dimostrazione

Considerando la proposizione precedente, il sistema S_1 è impossibile.

Definiamo il set $\Gamma := \{u \in \mathbb{R}^s : u_i = \nabla f_i(x^*)^T d,\ d \in \mathbb{R}^n,\ i=1 \dots s\}$ in modo tale che l'impossibilità di S_1 è equivalente a:

$$\Gamma \cap \left(-\mathrm{int}\left(\mathbb{R}^s_+\right)\right) = \emptyset$$

Quindi i due set Γ e $-\mathrm{int}(\mathbb{R}^s_+)$ sono disgiunti e convessi, per cui deve esistere un iperpiano che li separa:

$$1)\ \langle \theta, u \rangle = \emptyset \quad \forall u \in \Gamma$$

$$2)\ \langle \theta, u \rangle \leq \emptyset \quad \forall u \in -\mathrm{int}(\mathbb{R}^+_s)$$

Dove possiamo riscrivere 1) come:

$$\sum_{i=1}^{s} \theta_i \nabla f_i(x^*)^T d \leq \emptyset \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Dato che d è arbitrario possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{s} \theta_i \nabla f_i(x^*) = \emptyset$$

e settando

$$\theta^* = \frac{\theta}{\sum_{i=1}^{s} \theta_i}$$

Otteniamo che S è soddisfatto

PROPOSIZIONE - Condizione sufficiente per l'ottimalità

SE il problema P_u è **convesso** (ogni f_i è convessa) e (x^*, θ^*) è una soluzione del sistema S ALLORA x^* è un WMin(P_u).

SE aggiungiamo che $\theta^* > 0$ ALLORA x^* è Min(P_u)

Dimostrazione

FIRST ORDER OPTIMALITY CONDITION FOR CONSTRAINED PROBLEM

Consideriamo il problema P:

$$\begin{cases} \min \left(f_1(x) \dots f_s(x)\right) = f(X) \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0,\ j = 1 \dots m,\ h_k(x) = 0,\ k = 1 \dots p\} \end{cases}$$

Con f_i, g_j e h_k differenziabili.

TEOREMA KKT PER MULTI OBJECTIVE

SE x^* è un WMin(P) e la condizione ACQ è valida in x^*, ALLORA $\exists\, \theta^* \in \mathbb{R}^s$, $\exists\, \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$: $(x^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ è la soluzione del KKT:

$$\text{KKT} \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} \theta_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \nabla h_k(x) = 0 \\ \theta \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{s} \theta_i = 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda_j g_j(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

COROLLARIO

SE x^* è un WMin(P) e la condizione ACQ è valida in x^* ALLORA il sistema S_1 non ha soluzioni

$$\begin{cases} v^T \nabla f_i(x^*) < 0 \\ v^T \nabla g_j(x^*) \leq 0 \\ v^T \nabla h_k(x^*) = 0 \\ v \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dimostrazione

Osserviamo che quando la condizione ACQ è valida in un punto, in questo caso x^*, abbiamo che:

$$T_x(x^*) = D(x^*) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} v^T \nabla g_j(x^*) \leq 0 & \forall j \in A(x^*) \\ v^T \nabla h_k(x^*) = 0 & \forall k = 1 \dots p \end{array} \right\}$$

CONDIZIONE NECESSARIA DI OTTIMALITÀ

SE x^* è un WMin(P_u) ALLORA il sistema S_1 non ha soluzioni.

$$\left\{\begin{array}{ll} \nabla f_i(x^*)^T \cdot d < \emptyset & \forall i = 1 \dots s \\ d \in \underbrace{T_X(x^*)}_{\text{Cono Tangente in } x^*} & \end{array}\right. = S_1$$

Dimostrazione

Per contraddizione, assumiamo che esista una soluzione del sistema e essa sia $d \in T_X(x^*)$: $\nabla f_i(x^*)^T d < \emptyset$.
Per la definizione di cono tangente, prendiamo la sequenza $\{z_K\} \subseteq X$ e $\{t_K\} \to \emptyset$:

$$\lim_{K \to \infty} \frac{z_K - t_K}{t_K} = d$$

Aggiorniamo $z_K = x^* + t_K d + o(t_K)$ $\left(\text{o piccolo: } \frac{t_K}{o(t_K)} \to \emptyset\right)$.

Prendiamo una qualsiasi funzione f_i con $i \in \{1 \dots s\}$ e la approssimiamo al primo ordine:

$$f_i(z_K) = f_i(x^*) + t_K \nabla f_i(x^*) + o(t_K)$$

Da qui possiamo dire che esiste un $\bar{K} \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f_i(z_K) - f_i(x^*)}{t_K} = \nabla f_i(x^*)^T d + \frac{o(t_K)}{t_K} \qquad \forall K > \bar{K}, \ \forall i = 1 \dots s$$

Questo significa che $f_i(z_K) < f_i(x^*)$ $\forall K > \bar{K}$ e $\forall i = 1 \dots s$
Che è impossibile perché x^* è un WMin(P)

CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMALITÀ

Prendiamo il problema P convesso, da qui la condizione del KKT è anche sufficiente.

TEOREMA

Assumendo f_i e g_j convesse $\forall i,j$, e h_k affine $\forall k$:

1) SE $(x^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ è soluzione del KKT
   ALLORA $x^* = W\text{Min}(P)$

2) SE $(x^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ è soluzione del KKT e $\theta^* > 0$
   ALLORA $x^* = \text{Min}(P)$

PROPOSIZIONE

SE x^* è un unico minimo globale per f_k in X per qualche $k = \{1 \dots s\}$ ALLORA $x^* = \text{Min}(P)$

Vogliamo migliorare una sola funzione senza peggiorare le altre, che è poi il punto dei minimi di Pareto.
Ma se abbiamo che una delle funzioni è già ottimizzata non posso migliorarla ancora, quindi quel punto è un minimo

Dimostrazione

Sappiamo che $f_k(x^*) < f_k(x)$ $\forall x \neq x^*$ in X, perché x^* è definito minimo globale per f_k. Questa osservazione implica che il sistema seguente è impossibile:

$$\begin{cases} f_i(x^*) \geq f_i(x) & \forall i = 1 \dots s \\ f_j(x^*) > f_j(x) & \text{per qualche } j \in \{1 \dots s\} \\ x \in X \end{cases}$$

SCALARIZATION METHOD

Consideriamo il solito problema di ottimizzazione multi-objective vettoriale con vincoli in X (P).

Definiamo un vettore dei pesi associati alle funzioni obiettivo:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_s) \geq 0 \;:\; \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$$

Associamo a P il problema P_α dei pesi associati:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i(x) \\ x \in X \end{cases} = P_\alpha \quad \left(\text{SCALARIZED PROBLEM} \right)$$

Chiamiamo S_α la soluzione ottima di P_α.

TEOREMA

1) $\bigcup_{\alpha \geq 0} S_\alpha \subseteq \{ W\mathrm{Min}(P) \}$

2) $\bigcup_{\alpha > 0} S_\alpha \subseteq \{ \mathrm{Min}(P) \}$

Dimostrazione

Prendiamo $x^* \in S_\alpha$ ottimo per P_α, da cui:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i(x) \quad \forall x \in X \text{ e } x \neq x^*$$

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left[f_i(x^*) - f_i(x) \right] \leq 0$$

Considerando che i pesi $\alpha > 0$, l'unico modo per cui la disequazione sia soddisfatta è che

$$f_i(x^*) \leq f_i(x)$$

Per cui il sistema $f_i(x^*) > f_i(x)$ è impossibile e x^* è un $WMin(P)$.

Nota: Risolvere il problema P_α per ogni possibile α non ci permette di trovare tutti i Min e WMin

TEOREMA

SE X è convesso e che f_i è convessa in X $\forall i = 1 \dots s$

ALLORA:

$$\{ WMin(P) \} = \bigcup_{\alpha \geq 0} S_\alpha$$

TEOREMA

SE P è lineare (ovvero f_i è una funzione lineare $\forall i$) e se X è un poliedro ALLORA

$$1) \bigcup_{\alpha \geq 0} S_\alpha = \{ WMin(P) \}$$

$$2) \bigcup_{\alpha > 0} S_\alpha = \{ Min(P) \}$$

PROPOSIZIONE

SE x^* è l'unico minimo globale di P_α per qualche α

ALLORA x^* è $Min(P)$.

GOAL METHOD

Nello spazio obiettivo $\mathbb{R}^s$ definiamo z punto ideale come

$$z_i = \min_{x \in X} f_i(x) \quad \forall i = 1 \dots s$$

Il problema è che per $f(X)$ non esiste un punto ideale z, per questo vogliamo trovare un punto che sia più vicino possibile a z:

$$\begin{cases} \min \| f(x) - z \|_q \\ x \in X \end{cases} \qquad \text{con } q \in [1, +\infty] = G$$

TEOREMA

se non è la norma infinito

1) SE $q \in [1, +\infty)$ ALLORA ogni ottimo per G è $Min(P)$

2) SE $q = +\infty$ ALLORA ogni ottimo per G è $WMin(P)$

ESERCIZIO 5

$$\begin{cases} \min\left(x_1, \; x_1^2 + x_2^2 - 4x_1\right) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Trovare il set di $WMin(P)$.

P è un problema non vincolato, e sia f_1 che f_2 sono continue e differenziabili.

Verifichiamo se f_1 e f_2 sono convesse calando la Hessiana

1) $f_1(x_1, x_2) = x_1$

$$H_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Semidefinita Positiva}$$

Per il teorema f_1 è convessa

2) $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1$

$f_{2x_1} = 2x_1 - 4 \qquad f_{2x_2} = 2x_2$

$$H_{f_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Semidefinita Positiva}$$

Per il teorema f_2 è convessa

Quindi il nostro problema è convesso per cui possiamo usare sia la condizione necessaria che sufficiente di ottimalità per i problemi non vincolati:

$$\begin{cases} \theta_1 \nabla f_1(x) + \theta_2 \nabla f_2(x) = \emptyset \\ \theta_1 \geq \emptyset \\ \theta_2 \geq \emptyset \\ \theta_1 + \theta_2 = 1 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \end{pmatrix}, \qquad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \emptyset \\ \theta_1 \geq \emptyset \\ \theta_2 \geq \emptyset \\ \theta_1 + \theta_2 = 1 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} = \begin{cases} \theta_1 + 2\theta_2 x_1 - 4\theta_2 = \emptyset \\ 2\theta_2 x_2 = \emptyset \\ \theta_1 \geq \emptyset \\ \theta_2 \geq \emptyset \\ \theta_1 + \theta_2 = 1 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

tutte le soluzioni di questo sistema ci danno un WMin(P)

$$2\theta_2 x_2 = \emptyset \longrightarrow x_2 = \emptyset$$

Sostituendo $\theta_1 = 1 - \theta_2$

$$1 - \theta_2 + 2\theta_2 x_1 - 4\theta_2 = \emptyset$$

$$x_1 = \frac{5\theta_2 - 1}{2\theta_2}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{5\theta_2 - 1}{2\theta_2} \\ \emptyset \end{pmatrix} \qquad \theta^* = \begin{pmatrix} 1 - \theta_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$