GAUSSIAN FUNCTION

La funzione gaussiana in 1D, $g(x,\sigma)$ dove il parametro σ è detto spread : $\sigma > 0$

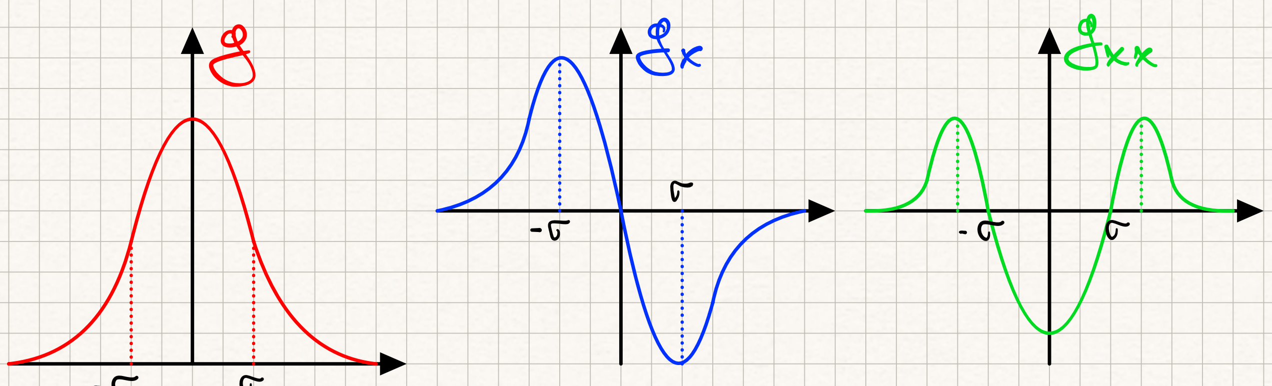
$$g(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

La derivata prima e seconda sono:

1) $g_x(x,\sigma) = -\frac{x}{\sigma^2}\, g(x,\sigma)$

2) $g_{xx}(x,\sigma) = -\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{x}{\sigma^4}\right) g(x,\sigma)$

Abbiamo introdotto questa funzione perchè è il kernel più usato per fare le convoluzioni, per via della sua splendità proprietà, che vedremo più avanti, prima analizziamo i seguenti grafici:



Notiamo che $g_x(x,\sigma)$ ha un solo punto che passa per zero, ovvero il punto in cui $g(x,\sigma)$ ha il suo massimo.

La g_{xx} ha due punti in cui si annulla: $(\sigma, 0)$ e $(-\sigma, 0)$.

Calcoliamo ora la derivata rispetto a σ:

$$g_\sigma(x,\sigma) = -\sigma\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{x}{\sigma^4}\right)g(x,\sigma)$$

notiamo che g_σ ha al suo interno g_{xx}:

$$g_\sigma(x,\sigma) = \sigma\cdot g_{xx}(x,\sigma)$$

IN 2D:

La definizione di $g(x,y,\sigma)$ con $\sigma > 0$:

$$g(x,y,\sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Le derivate per x sono:

$$g_x(x,y,\sigma) = -\frac{x}{\sigma^2}\, g(x,y,\sigma)$$

$$g_{xx}(x,y,\sigma) = -\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{x^2}{\sigma^4}\right)g(x,y,\sigma)$$

$$g_y(x,y,\sigma) = -\frac{y}{\sigma^2}\, g(x,y,\sigma)$$

$$g_{yy}(x,y,\sigma) = -\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{y^2}{\sigma^4}\right)g(x,y,\sigma)$$

Come prima calcoliamo $g_\sigma(x, y, \sigma)$:

$$g_\sigma(x, y, \sigma) = \sigma \underbrace{\left[g_{xx}(x,y,\sigma) + g_{yy}(x,y,\sigma) \right]}_{\nabla^2 g}$$

Quindi possiamo dire che:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \sigma} = g_\sigma(x, y, \sigma) = \sigma \nabla^2 g(x, y, \sigma)}$$

Anche detto il Laplaciano della gaussiana