

# FILTRO GAUSSIANO

In 2D, il filtro gaussiano con spread  $\sigma > 0$  si presenta:

$$g[x, y, \sigma] = C \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Dove  $C$  è una costante di normalizzazione che fa sì che la somma degli elementi del filtro sia 1.

**Nota:** Un filtro gaussiano comunque lo si ruoti, non cambia il suo effetto, che è definito solo da  $\sigma$ .

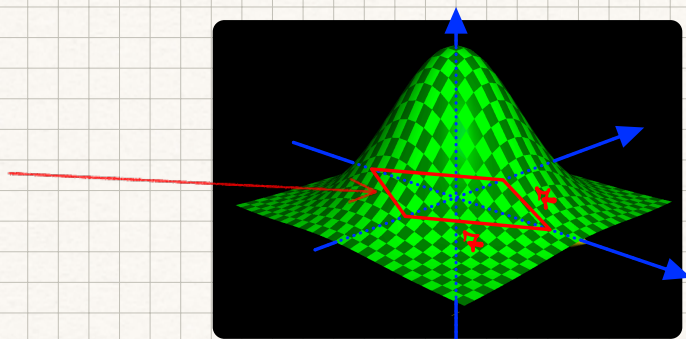
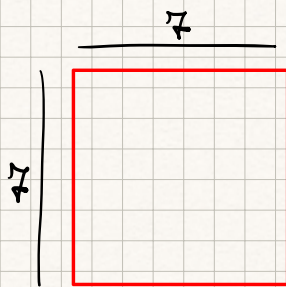
## Esempio di costruzione

Supponiamo di voler creare un filtro gaussiano grande  $7 \times 7$ .

Calcoliamo tutti i  $7 \cdot 7 = 49$  elementi usando la formula  $g(\cdot)$

con  $\sigma = 2$  e assumendo per ora  $C = 1$ .

Ogni punto del filtro è scelto in modo da centrare la campana di Gauss:



- 1) Calcoliamo gli elementi con  $g[x, y, 2]$  e  $C=1$ .  
Verrà fuori una matrice di elementi reali

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

- 2) Prendiamo l'elemento più piccolo (Essendo gaussiana i valori più piccoli si trovano nei 4 angoli) sia  $m$  e lo usiamo per calcolare la matrice  $C$ :

$$m \cdot C = 1 \implies C = \frac{1}{m}$$

Nel nostro esempio abbiamo  $m = 0.0011$  da cui  $C \approx 91$ .

- 3) Moltiplichiamo l'intera matrice per il  $C$  trovato e arrotondiamo all'intero più vicino. Per velocizzare i calcoli sono meglio gli interi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & & & & & & \\ 7 & & & & & & \\ 10 & & & 91 & & & \\ 7 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{bmatrix}$$



5) Normalizziamo, dividendo quest'ultima matrice, dividendola per la somma dei suoi elementi. Nel nostro esempio dividiamo per 1151.

## I FILTRI GAUSSIANI SONO TUTTI SEPARABILI

Questa è la proprietà che rende il filtro gaussiano molto usato.

Senza perdere generalità e solo per semplificare i seguenti calcoli, non considereremo la costante  $C$ .

$$\begin{aligned} f[x, y] * g[x, y, \sigma] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f[x-k, y-l] e^{\frac{-k^2 + l^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f[x-k, y-l] e^{\frac{-l^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-k^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Proprietà della potenza} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[x-k, y] * g_v[y, \sigma] \cdot e^{\frac{-k^2}{2\sigma^2}} \\ &= f[x, y] * g_v[y, \sigma] * g_h[x, \sigma] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{g[x, y, \sigma]} \end{aligned}$$

$$= f[x, y] * g[x, y, \sigma]$$