DEFINIZIONI

1) EDGE: è un cambiamento locale dell'intensità di un'immagine.

2) EDGE POINT: è un pixel dell'immagine dove è locato un edge

3) EDGE DETECTOR: è un algoritmo che produce un set di edge point, data un'immagine in input

PASSI DI UN EDGE DETECTOR

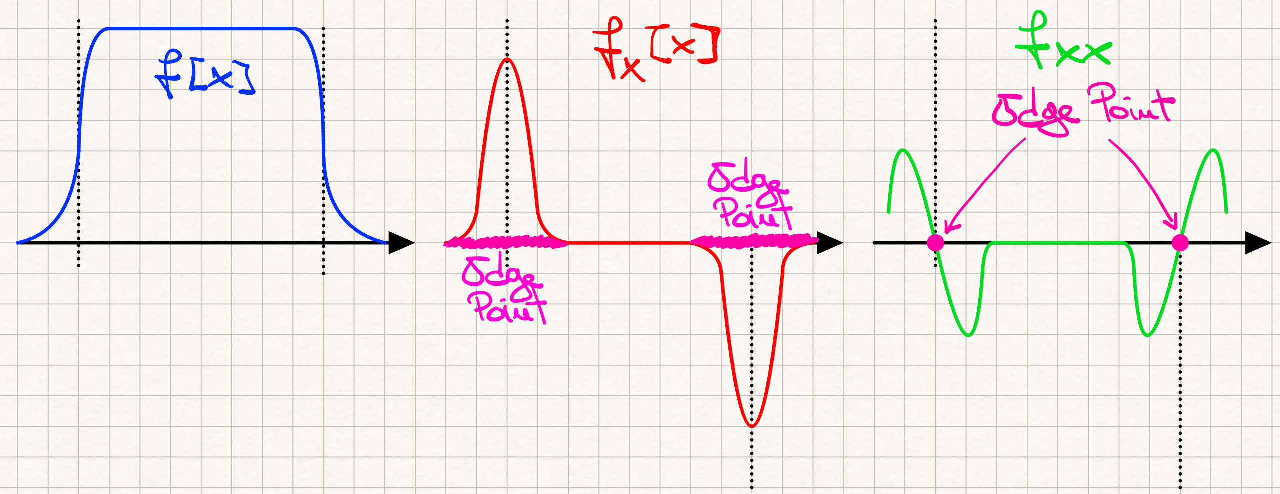
1) FILTERING: Bisogna filtrare il rumore presente nell'immagine. E dato che abbiamo a che fare con immagini digitali, che per loro natura piene di rumore bisogna fare questo passaggio.
Si usa il filtro gausiano per ridurre la complessità essendo separable.

2) ENHANCEMENT: Bisogna migliorare la qualità dell'immagine così che sia più adatta al nostro scopo. Per farlo si usa la MAGNITUDINE DEL GRADIENTE pixel per pixel.
Questa operazione è complessa, per questo si usano le approssimazioni della magnitudine di ∇f.

3) DETECTION: I vari edge point si trovano confrontanto $\|\nabla f\|$ con una threshold.

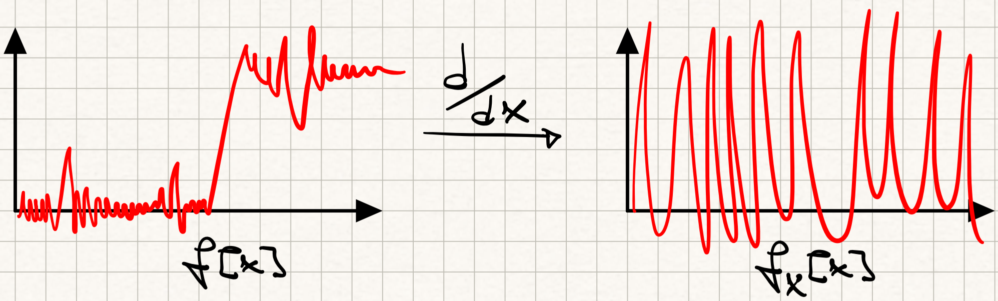
Storicamente, l'operazione di edge detector veniva implementata col solo utilizzo di $\|\nabla f[x,y]\|$. Ma questo porta ad avere come risultato troppi edge points, spesso non significativi o ridondanti.
Un approccio migliore è quello di cercare i pixel corrispondenti ai massimi locali di $\|\nabla f[x,y]\|$, per considerarli edge point.

Esempio



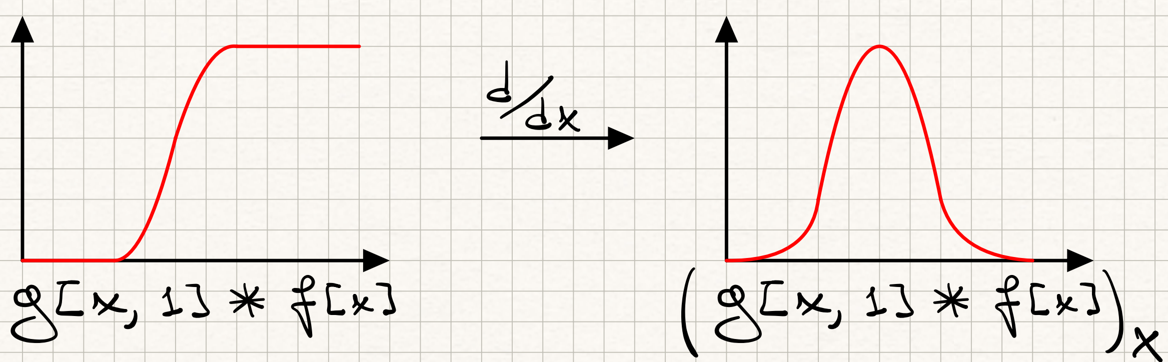
RUMORE

Abbiamo detto che le immagini digitali sono piene di rumore. Come fare?



Se facciamo la derivata di un'immagine piena di rumore, il risultato sarà una $f_x[x]$ che non ci dice nulla. Questo perché il rumore, nelle alte frequenze danno alla $f[x]$ tantissimi cambi di direzione.

Dobbiamo eliminare il rumore usando un filtro passa-basso, e uno splendido filtro atto a ciò è il filtro gaussiano. Applicando il filtro $g[x, \sigma]$ a $f[x]$:



Quanto è complesso questo approccio?

Parecchio, considerando che bisogna calcolare una convoluzione e una derivata. Ma possiamo fare meglio, ci viene in aiuto la proprietà di differenziabilità:

$$\left(f[x] * g[x,\sigma]\right)_x = f[x] * g_x[x,\sigma]$$

$$\left(f[x] * g[x,\sigma]\right)_{xx} = \left(f[x] * g_x[x,\sigma]\right)_x = f[x] * g_{xx}[x,\sigma]$$

Quindi basta (pre)calcolare $g_x[x,\sigma]$ e $g_{xx}[x,\sigma]$ per fare la convoluzione.

LOG

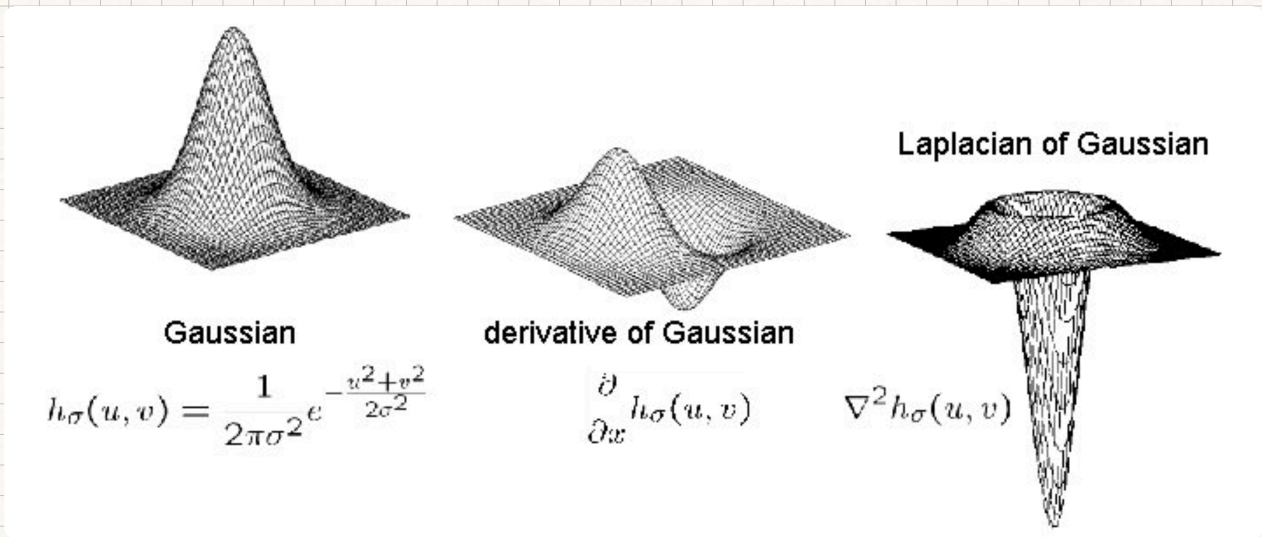
In 2D basta usare l'operatore laplaciano $\nabla^2 f[x,y]$ al posto delle derivate, e lo applichiamo all'immagine filtrata, ma come abbiamo visto questo equivale a fare il laplaciano del filtro stesso. Facendo questo definiamo quello che in letteratura è chiamato LAPLACIAN OF GAUSSIAN (LOG):

$$\nabla g[x,y,\sigma] = -\frac{1}{2\pi\sigma^4}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)[x,y]$$

$$\nabla^2 g[x,y,\sigma] = g_{xx}[x,y,\sigma] + g_{yy}[x,y,\sigma] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sigma^4}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\left(1-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= LOG[x,y,\sigma]$$



Ma il nostro obiettivo è sempre quello di trovare gli edge.
Possiamo usare due "algoritmi":

1) Fare la convoluzione dell'immagine e $g_x[x,y,\sigma]$, poi fare la convoluzione con $g_y[x,y,\sigma]$, così da trovare 2 numeri per pixel.
Calcoliamo $\|\nabla g[x,y,\sigma]\|$ (che è un filtro non lineare) per poi compararlo con la magnitudine del gradiente dei pixel circostanti per vedere se è maggiore o minore.

2) Fare la convoluzione dell'immagine con il $LOG[x,y,\sigma]$ e cercare gli zeri. This is the way.

$$LOG[x,y,\sigma] * f[x,y]$$

PROPRIETÀ QUASI-SEPARABILE

Vediamo se il LOG gode della proprietà separabile, così da velocizzare i calcoli.

Abbiamo già dimostrato che

$$g[x,y,\sigma] = \underset{\text{horizontal}}{g_h[x,y,\sigma]} * \underset{\text{vertical}}{g_v[x,y,\sigma]}$$

Da cui

$$\begin{cases} (g[x,y,\sigma])_x = g_v[y,\sigma] * (g_h[x,\sigma])_x \\ (g[x,y,\sigma])_y = (g_v[y,\sigma])_y * g_h[x,\sigma] \end{cases}$$

Cerchiamo ora g_{xx} e g_{yy}

$$\begin{cases} (g[x,y,\sigma])_{xx} = g_v[y,\sigma] * (g_h[x,\sigma])_{xx} \\ (g[x,y,\sigma])_{yy} = (g_v[y,\sigma])_{yy} * g_h[x,\sigma] \end{cases}$$

Da qui calcoliamo il Laplaciano di g: $\nabla^2 g[x,y,\sigma]$

$$\boxed{\nabla^2 g[x,y,\sigma] = g_v[y,\sigma] * (g_h[x,\sigma])_{xx} + (g_v[y,\sigma])_{yy} * g_h[x,\sigma]}$$

Possiamo quindi dire che il LOG è dato dalla somma di due operatori separable, per questo viene chiamato quasi-separable.

Esempio

Usiamo un LOG 3×3 con $\sigma = 1/4$

$$\left(g[x,y,1/4]\right)_{xx} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}}_{g_h} * \frac{1}{8}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\6\\1\end{bmatrix}}_{g_v} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\6 & -12 & 6\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left(g[x,y,1/4]\right)_{yy} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 6 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 6 & 1\\-2 & -12 & -2\\1 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

$$LOG[x,y,1/4] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\4 & -24 & 4\\2 & 4 & 2\end{bmatrix}$$