GAME THEORY

La teoria dei giochi è un analisi delle mosse che un giocatore può fare per raggiungere un obiettivo, scegliendo la miglior strategia possibile.
A ogni mossa presa viene associato un costo che è dipendente dall'azione intrapresa dall'avversario.

Lo scopo ultimo della teoria dei giochi è quello di prevedere ogni mossa di ogni giocatore col fine di minimizzare il proprio costo.

Definizione - Non Cooperative game

Un gioco non cooperativo è definito da N giocatori, e ogni giocatore i-esimo ha un set X_i di strategie a cui è associato una cost function $f_i : X_1 \times \cdots \times X_N \to \mathbb{R}$.
L'obiettivo di ogni giocatore è quello di ottimizzare il seguente problema:

$$\begin{cases} \min f_i(x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_N) \\ x_i \in X \end{cases}$$

MAZZEI
MAZZEI
SEY
GAY
SEY
GA

EQUILIBRIO DI NASH

Considerando due giocatori:

$$P_1 = \begin{cases} \min f_1(x,y) \\ x \in X \end{cases} \qquad P_2 = \begin{cases} \min f_2(x,y) \\ y \in Y \end{cases}$$

Si dice che una coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash se

$$f_1(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{x \in X} f_1(x, \bar{y}) \quad , \quad f_2(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{y \in Y} f_2(\bar{x}, y)$$

In parole semplici $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash se $\bar{x}$ è la miglior risposta a $\bar{y}$ e viceversa.

MATRIX GAMES

In un 2-Persons Non-Cooperative games definiamo la matrix games come quella matrice C, dove l'elemento (i,j) rappresenta il costo $c_{ij} = f_1(i,j)$ che il giocatore 1 è disposto a cedere al giocatore 2 se risponde con la strategia j alla strategia i giocata dal giocatore 1.

C è una matrice $m \times n$ dove m è la dimensione del pool di strategie ammesse da P_1 mentre n da P_2.

Nota: $f_1 = -f_2 \rightarrow$ ZERO-SUM GAME

Nota: L'equilibrio di Nash, se esiste, è dato da $(\bar{i}, \bar{j})$ dove:

$$f_1(\bar{i}, \bar{j}) = \min_{i \in X} f_1(i, \bar{j}) \qquad f_2(\bar{i}, \bar{j}) = \max_{j \in Y} f_1(\bar{i}, j)$$

STRICTLY DOMINATED STRATEGY

Dato un 2-Persons Non-Cooperativi game (Non necessariamente zero-sum), una strategia $x \in X$ è detta strictly dominated strategy da un'altra strategia $\tilde{x} \in X$ se:

$$f_1(x,y) > f_1(\tilde{x},y) \quad \forall y \in Y$$

In modo analogo una strategia $y \in Y$ è strictly dominated da $\tilde{y} \in Y$ se

$$f_1(x,y) > f_1(x,\tilde{y}) \quad \forall x \in X$$

Nota: tutte le strategie dominate da altre possono essere eliminate dal game.

MIXED STRATEGIES

SE C è una matrix game $n \times m$ si dice **mixed strategy** per il giocatore 1 (P_1) un vettore n-dimensionale che contiene probabilità.

Consideriamo $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \sum x_i = 1\}$ il set delle mixed strategies per P_1.

Pure strategies: Sono i vertici di X (i.e. $[0 \dots 1 \dots 0]$)

In egual modo definiamo una mixed strategy per P_2 con $Y = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0, \sum_{i=1}^{m} y_i = 1\}$

Nota: $x^T C y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i c_{ij} y_j$

EQUILIBRIO DI NASH con mixed strategies

Dato C un matrix game $n \times m$ definiamo $(\bar{x}, \bar{y})$ equilibrio di Nash SE

$$\max_{y \in Y} \left(\bar{x}^T C y \right) = \bar{x}^T C \bar{y} = \min_{x \in X} x^T C \bar{y}$$

o equivalentemente

$$\bar{x}^T C y \leq \bar{x}^T C \bar{y} \leq x^T C \bar{y} \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

Nota $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di sella per $f_1(x,y) = x^T C y$ in $X \times Y$.

Punto di sella

Presi $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di sella per $F: X \times Y \to \mathbb{R}$ SSE

$$F(\bar{x}, y) \leq F(\bar{x}, \bar{y}) \leq F(x, \bar{y}) \quad \forall x, y \in X \times Y$$

TEOREMA

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ soddisfa la condizione di punto di sella SSE:

1) $\bar{x}$ è la soluzione ottima per $\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x,y)$
2) $\bar{y}$ è la soluzione ottima per $\max_{y \in Y} \inf_{x \in X} F(x,y)$
3) $\sup_{y \in Y} F(\bar{x}, y) = \inf_{x \in X} F(x, \bar{y})$

Nota: tutte e tre queste condizioni sono equivalenti ha:

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x,y) = \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} F(x,y) = F(\bar{x}, \bar{y})$$

TEOREMA - Esistenza di un punto di sella

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, assumendo:

1) X e Y sono non vuoti e convessi
2) $F(\cdot, y)$ è continua e quasi convessa in X, $\forall y \in Y$
3) $F(x, \cdot)$ è continua e quasi convessa in Y, $\forall x \in X$

ALLORA F ammette un punto di sella in $X \times Y$

COROLLARIO

1) Ogni matrix game ha almeno un mixed strategies Nash equilibrium
2) $(\bar{x}, \bar{y})$ è un mixed strategies Nash equilibrium SSE

$$\begin{cases} \bar{x} \text{ è la soluzione ottima per } \min\limits_{x \in X} \max\limits_{y \in Y} x^T C y \\ \bar{y} \text{ è la soluzione ottima per } \max\limits_{y \in Y} \min\limits_{x \in X} x^T C y \end{cases}$$

è il valore ottimo uguale a $\bar{x}^T C \bar{y}$

TEOREMA

Il problema $\min\limits_{x \in X} \max\limits_{y \in Y} x^T C y$ è equivalente al seguente problema lineare:

$$\begin{cases} \min \; v \\ v \geq \sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \quad \forall j = 1 \dots n & = \text{Primale} \\ x \geq \emptyset \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \end{cases}$$

Viceversa il problema $\max\limits_{y \in Y} \min\limits_{x \in X} x^T C y$ e equivalente a:

$$\begin{cases} \max \; v \\ v \leq \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \quad \forall i = 1 \dots m & = \text{Duale} \\ y \geq \emptyset \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{cases}$$

I forma matriciale:

$$\begin{cases} \min \; v & e_n = (1 \dots 1)^T \in \mathbb{R}^n \\ (C^T, -e_n) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \leq \emptyset & x \in \mathbb{R}^m \\ (e_m^T, \emptyset) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 1 & v \in \mathbb{R} \\ x \geq \emptyset \end{cases}$$

BIMATRIX GAME

Un bimatrix game è un 2-Person Non-Cooperative game dove:

1) Abbiamo set finiti di pure strategy per ogni giocatore con:

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^m : x \geq \emptyset, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \}$$

$$Y = \{ y \in \mathbb{R}^n : y \geq \emptyset, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \}$$

2) $f_1 \neq -f_2$ (Non-Zero-SUM game):

- $f_1(x, y) = x^T C_1 y$
- $f_2(x, y) = x^T C_2 y$

TEOREMA

Ogni bimatrix game ha almeno un mixed strategies Nash equilibrium.

TEOREMA

Definendo $B_1 : Y \to X$ e $B_2 : X \to Y$ funzioni che mappano la miglior risposta strategica di un giocatore come:

$$B_1(y) = \{ \text{ottimo per } \min_{x \in X} x^T C_1 y \}$$

$$B_2(x) = \{ \text{ottimo per } \min_{y \in Y} x^T C_2 y \}$$

ALLORA $(\bar{x}, \bar{y})$ è un Nash equilibrium SSE $\bar{x} \in B_1(\bar{y})$ e $\bar{y} \in B_2(\bar{x})$.

Esempio

$$C_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Non ci sono delle strategie strettamente dominate sia per C_1 che per C_2.

2) Cerchiamo i pure-strategies Nash equilibrium
Considerando C_1, per la definizione di NE, la miglior risposta di P_1, mentre P_2 gioca la strategia 1 è la strategia 1 di P_1. Se P_2 gioca la strategia 2, P_1 risponde con la strategia 2 (Il costo minore):

$$(1,1) \quad e \quad (2,2)$$

La stessa cosa vale considerando C_2, perciò è un NE.

3) Risolviamo i problemi B_1 e B_2:

$$B_1: \min_{x \in X} x^T C_1 y =$$

$$(x_1 \ \ x_2) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -5x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Che quindi, preso $y \in Y$:

$$\begin{cases} \min -5x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x \in X \end{cases}$$

Ricordando che in un bimatrix

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0 , \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \}$$

$$Y = \{ y \in \mathbb{R}^n : y \geq 0 , \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \}$$

Possiamo scrivere:

$$x_1 + x_2 = 1 \longrightarrow x_2 = 1 - x_1$$

$$y_1 + y_2 = 1 \longrightarrow y_2 = 1 - y_1$$

$$\begin{aligned} -5x_1y_1 - x_2y_2 &= -5x_1y_1 - (1-x_1)(1-y_1) \\ &-5x_1y_1 - (1 - y_1 - x_1 + x_1y_1) \\ &-5x_1y_1 - 1 + y_1 + x_1 - x_1y_1 \\ &-6x_1y_1 - 1 + y_1 + x_1 \\ &(1-6y_1)x_1 + y_1 - 1 \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{cases} \min \ (1-6y_1)x_1 + y_1 - 1 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \longrightarrow \text{per } x_1, x_2 \geq 0 \text{ e } x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

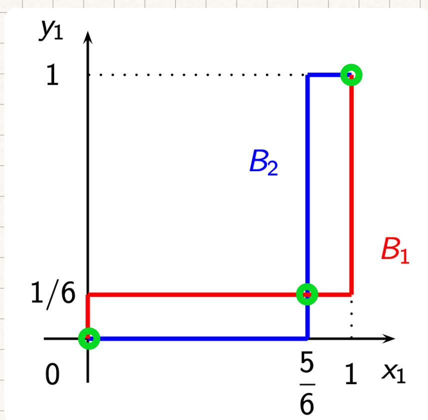
Da cui ricaviamo la soluzione ottima, considerando y come parametro e x come incognita, che è data dal segno del coefficiente di x_1:

$$B_1(y_1) = \begin{cases} 0 & \text{per } y_1 \in [0, 1/6) \\ (0, 1) & \text{per } y_1 = 1/6 \\ 1 & \text{per } y_1 = (1/6, 1] \end{cases}$$

Analogamente per C_2, abbiamo

$$\begin{cases} \min \ (5-6x_1)y_1 + 5x_1 - 5 \\ 0 \leq y_1 \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow B_2(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{per } x_1 \in [0, 5/6) \\ (0,1) & \text{per } x_1 = 5/6 \\ 1 & \text{per } x_1 = (5/6, 1] \end{cases}$$

L'equilibrio di Nash è dato dall'intersezione fra B_1 e B_2:



1) $\bar{x} = (0, 1)$, $\bar{y} = (0, 1) \Rightarrow$ pure strategies

2) $\bar{x} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, $\bar{y} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \Rightarrow$ mixed strategy

3) $\bar{x} = (0, 1)$, $\bar{y} = (0, 1) \Rightarrow$ pure strategies

KKT CONDITION for bimatrix games

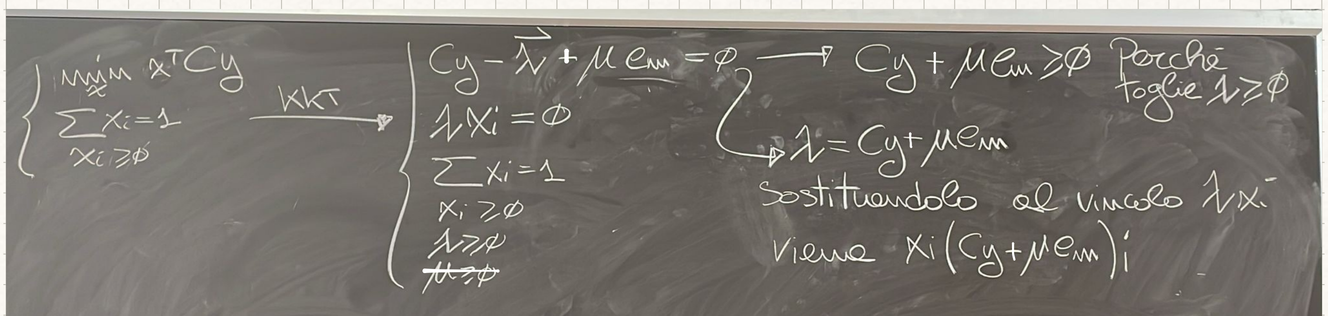
Per ogni giocatore consideriamo il proprio problema:

$$P_1(y) = \begin{cases} \min x^T C_1 y \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x \geq \emptyset \end{cases} \qquad P_2(x) = \begin{cases} \min x^T C_1 y \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \\ y \geq \emptyset \end{cases}$$

Consideriamo contemporaneamente le condizioni KKT di questi due problemi:

$$\begin{cases} C_1 y + \mu_1 e_m \geq \emptyset \\ x \geq \emptyset \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i (C_1 y + \mu_1 e_m)_i = \emptyset \end{cases} ; \qquad \begin{cases} C_2^T y + \mu_2 e_n \geq \emptyset \\ y \geq \emptyset \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j (C_2^T y + \mu_2 e_n)_j = \emptyset \end{cases}$$

Nota: $P_1(y)$ e $P_2(x)$ sono parametrici e lineari per cui la condizione KKT è sia necessaria che sufficiente ai fini dell'ottimalità.



TEOREMA - KKT condition for bimatrix game

$(\bar{x}, \bar{y})$ è un NE SSE $\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{cases}
C_1 y + \mu_1 e_m \geq \emptyset \\
x \geq \emptyset \\
\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
x_i (C_1 y + \mu_1 e_m)_i = \emptyset \quad \forall i = 1 \dots m \\
C_2^T y + \mu_2 e_n \geq \emptyset \\
y \geq \emptyset \\
\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
y_j (C_2^T y + \mu_2 e_n)_j = \emptyset \quad \forall j = 1 \dots n
\end{cases}
$$

è verificato