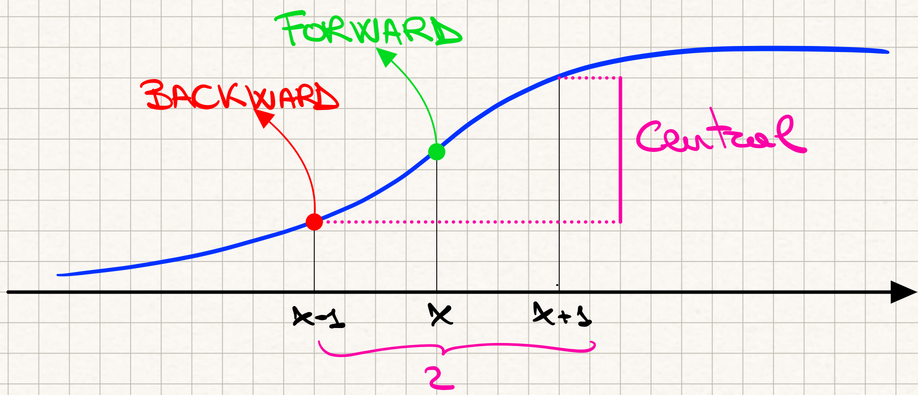
DERIVATE DISCRETE

In 1D la derivata discreta di una funzione $f[x]$ può essere definita in modi diversi:

1) FORWARD DERIVATIVES: $f_x[x] = f[x+1] - f[x]$

2) BACKWARD DERIVATIVES: $f_x[x] = f[x] - f[x-1]$

3) CENTRAL DERIVATIVES: $f_x[x] = \frac{1}{2}\left(f[x+1] - f[x-1]\right)$



Se riscriviamo $f_x[x] = h[x] * f[x]$, usando il digital filter $h[x]$, possiamo dire che le derivate sopra descritte possono ridursi alla convoluzione coi seguenti filtri:

1) FORWARD DERIVATIVES: $h[x] = [1 \;\; -1 \;\; 0]$

2) BACKWARD DERIVATIVES: $h[x] = [0 \;\; 1 \;\; -1]$

3) CENTRAL DERIVATIVES: $h[x] = \frac{1}{2}[1 \;\; 0 \;\; -1]$

Questi kernel sono detti differential kernels.

GRADIENTE IN 2D

In 2D il gradiente $\nabla f[x,y]$ dell'immagine $f[x,y]$ è definito come segue:

$$\nabla f[x,y] = \begin{bmatrix} f_x[x,y] \\ f_y[x,y] \end{bmatrix}$$

Per definizione il gradiente ci da la direzione da seguire per raggiungere un massimo della funzione, che nel nostro caso vuol dire raggiungere l'intensità massima dell'immagine.

GRADIENT MAGNITUDE

$$\|\nabla f[x,y]\| = \sqrt{f_x^2[x,y] + f_y^2[x,y]}$$

La magnitudine è comunemente approssimata con:

1) $\|\nabla f[x,y]\| \approx |f_x[x,y]| + |f_y[x,y]|$

2) $\|\nabla f[x,y]\| \approx \max\left(|f_x[x,y]|, |f_y[x,y]|\right)$

Possiamo permetterci di approssimare perché tanto siamo interessati a scoprire dove si trovano i grossi cambiamenti di intensità nell'immagine

GRADIENT DIRECTION

$$\alpha\left(\nabla f[x,y]\right) = \arctan\left(\frac{f_y[x,y]}{f_x[x,y]}\right)$$

DISCRETE LAPLACIAN OPERATOR

L'operatore laplaciano discreto è definito come

$$\nabla^2 f[x,y] = f_{xx}[x,y] + f_{yy}[x,y]$$

Dove la derivata seconda di un'immagine $f[x,y]$ si calcola come segue:
Usiamo la forward

$$f_{xx}[x,y] = \frac{1}{\partial x} \partial \Big(f[x+1,y] - f[x,y] \Big) =$$

$$= \frac{\partial f[x+1,y]}{\partial x} - \frac{\partial f[x,y]}{\partial x}$$

Che sono semplici derivate, che possiamo calcolare ancora con la forward:

$$= f[x+2,y] - f[x+1,y] - f[x+1,y] - f[x,y] =$$

$$= f[x+2,y] - 2f[x+1,y] - f[x,y]$$

Questa derivata che abbiamo trovato è centrata in $x+1$, bisogna riportarla in x:

$$f_{xx}[x,y] = f[x+1,y] - 2f[x,y] - f[x-1,y] = [1 \ -2 \ -1] * f[x,y]$$

$$f_{yy}[x,y] = f[x,y+1] - 2f[x,y] - f[x,y-1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} * f[x,y]$$

Combiniamo questi due filtri in uno $L[x,y]$:

$$\nabla^2 f[x,y] = L[x,y] * f[x,y]$$

Dove $L[x,y]$ è così fatto:

$$L[x,y] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} \text{DIFFERENTIAL LAPLACIAN FILTER}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$