FUNZIONE IMPULSO

Per capire la convoluzione con segnali discreti, dobbiamo introdurre la funzione impulso in 2D:

$$\delta[x,y] = \begin{cases} 1 & \text{se } x,y=\emptyset \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se diamo in input a un sistema LSI un'immagine, l'output corrispondente è la risposta impulsiva del sistema.

Esempio:

Usiamo il solito filtro 3×3 a media mobile

$$h[x,y] = \frac{1}{9} \sum_{k=-1}^{1} \sum_{l=-1}^{1} f[x-k,\ y-l]$$

Vediamo ora come usare la risposta impulsiva per calcolare l'immagine di output $g[x,y]$ partendo dall'ingresso $f[x,y]$.

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f[x,y] = {} & f[\emptyset,\emptyset] \cdot \delta[x-\emptyset,\ y-\emptyset] + \\ & f[\emptyset,1] \cdot \delta[x-\emptyset,\ y-1] + \\ & f[1,\emptyset] \cdot \delta[x-1,\ y-\emptyset] + \dots \end{aligned}$$

In generale:

$$f[x,y] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f[k,l] \cdot \delta[x-k,\ y-l]$$

Ora diamo $f[x,y]$ in ingresso a un sistema LSI, per ottenere:

$$S\left(f[x,y]\right) = S\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f[k,\ell] \cdot \delta[x-k, y-\ell]\right)$$

Usando la proprietà del filtro S di super-position e di shift invariant:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f[k,\ell] \cdot \underbrace{S\left(\delta[x-k, y-\ell]\right)}_{h}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f[k,\ell] \cdot h[x-k, y-\ell]$$

Dove h è la risposta impulsiva.

CONVOLUZIONE DISCRETA

Definiamo ora l'operazione di convoluzione discreta in 1D, delle due digital function $f[x]$ e $g[x]$:

$$f[x] * g[x] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[x] \cdot g[x-k]$$

In 2D:

$$f[x,y] * g[x,y] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f[x,y] \cdot g[x-k, y-l]$$

La convoluzione discreta condivide le stesse proprietà della sua variante continua.

Quindi, quello che abbiamo chiamato $g[x,y] = S(f[x,y])$ è:

$$g[x,y] = h[x,y] * f[x,y] = f[x,y] * h[x,y]$$

Esempio

Calcoliamo a mano, passo passo, $g[x,y]$, utilizzando il seguente Kernel:

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix} = h[x,y]$$

Questa $h[x,y]$ fa le veci di $g[x,y]$ nella definizione di convoluzione. Da non confondere con la g output di $S(f)$.

Passo 1: flip h lungo x:

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{flip } x} \begin{bmatrix} h_7 & h_8 & h_9 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}$$

Passo 2: flip h ancora rispetto a y

$$\begin{bmatrix} h_7 & h_8 & h_9 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{flip } x} \begin{bmatrix} h_9 & h_8 & h_7 \\ h_6 & h_5 & h_4 \\ h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Sovrapponiamo con f

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \end{bmatrix} = f[x,y]$$

Passo 4: Convoluzione $f * h$

$$\begin{aligned}(f * h)[0,0] = {} & h_9 \cdot f_1 + h_8 f_2 + h_7 f_3 + \\ & + h_6 f_4 + h_5 f_5 + h_4 f_6 + \\ & + h_3 f_7 + h_2 f_8 + h_1 f_9\end{aligned}$$

Nota: La somma degli indici è sempre 10 ($h_9 f_1$)

Complessità con un filtro $m \times n$: $O(m \cdot n)$

Difatti è così che funziona l'occhio umano, fa una convoluzione: