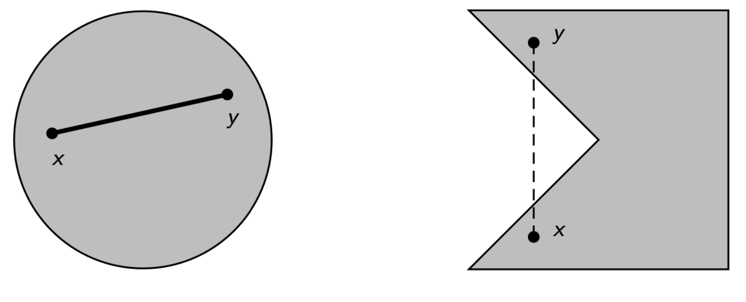
SET CONVESSO

Definizione

Un set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se, per ogni $x, y \in C$ e per ogni $\alpha \in [0,1]$ vale:

$$\boxed{\alpha x + (1-\alpha) y \in C}$$



convex set

non-convex set

SET AFFINE

Definizione

Un set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è **affine** se, per ogni $x, y \in C$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ vale:

$$\boxed{\alpha x + (1-\alpha) y \in C}$$

Esempi

1) Punto singolo : $\{x\}$
2) Retta
3) Soluzione del sistema lineare : $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$
4) Ogni sottospazio

Sottospazio

È un set affine particolare perché:

Preso $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio se, per ogni $x, y \in S$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha x + \beta y \in S$$

Esempi

1) $\{0\}$
2) Ogni retta che passa per zero
3) Soluzione del sistema lineare: $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

DIFFERENZA FRA AFFINE SET e CONVEX SET:

Se un set C è CONVESSO, allora il segmento che unisce qualsiasi coppia di punti in C appartiene anch'esso in C.
In un set AFFINE A è la retta passante per quasiasi punto di A ad appartenere ad A

COMBINAZIONE CONVESSA

Una combinazione convessa dei punti $x_1 \dots x_k$ è un punto y:

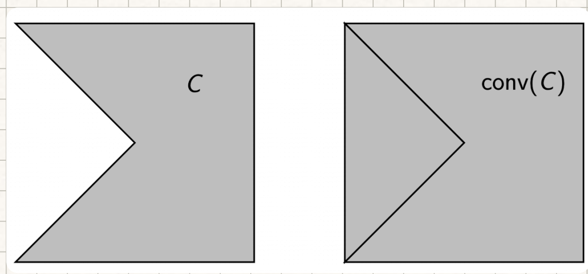
$$y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

con $\alpha_i \in [0, 1]$ e $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

LEMMA: Se il set C è convesso ogni $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ definito come sopra appartiene a C

CONVEX HULL

Il convex hull di un set C, $\mathrm{conv}(C)$, è l'intersezione di tutti i set convessi che contengono C. In altre parole è il più piccolo set convesso che contiene C



Proposizione: $\mathrm{conv}(C) = \{$ tutte le combinazioni convesse di $C \}$

Nota: C è convesso sse $C = \mathrm{conv}(C)$

POLIEDRO

È un esempio di set convesso

Definizione

È l'intersezione di un numero finito di sotto-spazi chiusi in $\mathbb{R}^n$. Dove per sotto-spazio chiuso si intente la soluzione di una disequazione lineare:

$$a^T x \le \beta \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{R}$$

formalmente un poliedro P è definito:

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{A}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} x \le \underbrace{b}_{\in \mathbb{R}^m} \}$$

Nota: Un poliedro è convesso perchè tutti i sottospazi chiusi sono set convessi

BALLS: $B(\bar{x}, r) = \{ z \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - z\| \le r \}$

OPERAZIONI ALGEBRICHE CHE PRESERVONO LA CONVESSITA'

1) **SOMMA**: $C_1 + C_2 = \{x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$
2) **PRODOTTO**: $\alpha C_1 = \{\alpha x : x \in C_1\}$
3) **DIFFERENZA**: $C_1 - C_2 = \{x - y : x \in C_1, y \in C_2\}$
4) **CLOSURE**: Frontiera (l'uguale)
5) **INTERIOR**: Parte interna (il minore stretto)

RELATIVE INTERIOR

Innanzitutto definiamo aff(C) il più piccolo set affine che contiene C.

Definizione

Preso $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso, definiamo l'interno relativo di C come:

$$ri(C) = \{x \in C : \exists \varepsilon > 0 : aff(C) \cap B(x, \varepsilon) \subseteq C\}$$

Per ogni punto di C esiste una sfera centrata nel punto in questione e di raggio ε, la cui intersezione con aff(C) è inclusa in C.

Esempio

Sia $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 3,\ x_2 = 0\}$, allora

$$ri(C) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 < 3,\ x_2 = 0\}$$

TEOREMA

Sia C un set convesso non vuoto in $\mathbb{R}^n$, allora anche $ri(C)$ è un set convesso non vuoto

SEPARATION OF CONVEX SETs

I due set A e B in $\mathbb{R}^n$ si dicono linearmente separabili se $\exists\ a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq \emptyset,\ \beta \in \mathbb{R}$:

$$a^T x \geq \beta \quad \forall x \in A$$
$$a^T x \leq \beta \quad \forall x \in B$$

Strettamente separabili se uno fra $\leq$ e $\geq$ diventa strettamente minore o maggiore.

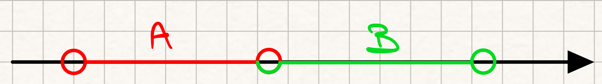
TEOREMA

Siano A, B due set convessi non vuoti in $\mathbb{R}^n$; i due set sono linearmente separabili SSE

$$ri(A) \cap ri(B) = \emptyset$$

Difatti due set convessi sconnessi sono sempre linearmente separabili.

Esempio



AFFINE FUNCTION

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si dice affine se:

$$f(x) = Ax + b \quad \text{con} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m$$

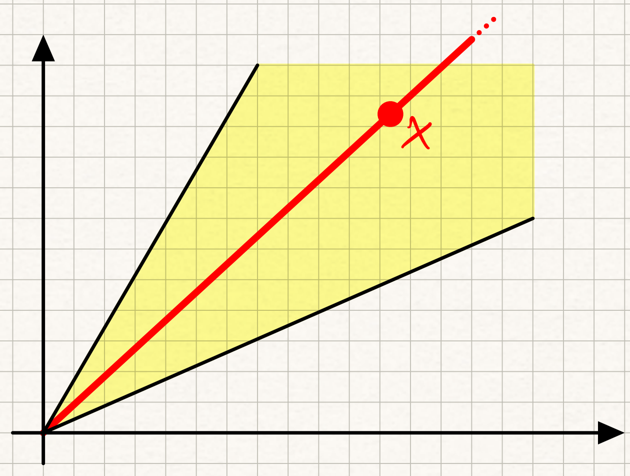
Proprietà

1) Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso lo è anche $f(C) = \{ f(x) : x \in C \}$
2) Se $C \subseteq \mathbb{R}^m$ è convesso lo è anche $f^{-1}(C) = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in C \}$

CONO

Un set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cono se, per ogni $x \in C$ e per ogni $\lambda \geq 0$ risulta che

$$\lambda x \in C$$

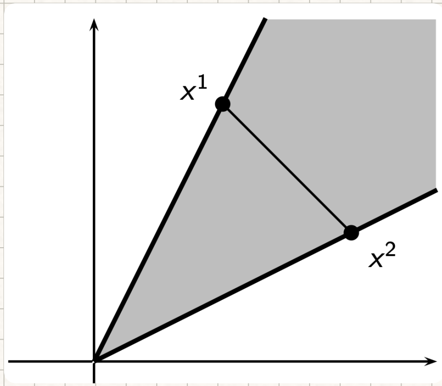


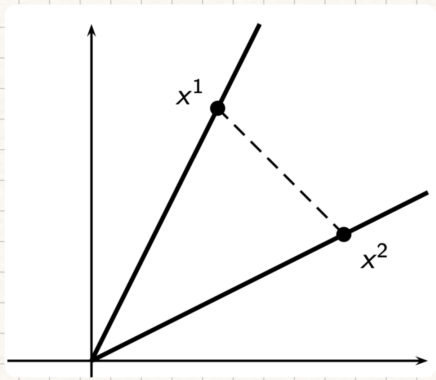
Quindi se $x \in C$ con $x \neq \emptyset$ allora l'intera retta che passa per x e $\emptyset$ appartiene a C

Attenzione

Un cono può essere sia convesso che non

CONVESSO NON CONVESSO





Cono di recessione

Dato un poliedro $P = \{x : Ax \leq b\}$ si definisca recession cone di P:

$$\operatorname{rec}(P) := \{d : \; x + \alpha d \in P \quad \text{for any } x \in P,\ \alpha \geq 0\}.$$

Si può provare che $\operatorname{rec}(P) = \{d : Ad \leq 0\}$

Cono Tangente

Dato $\bar{x} \in cl(C) \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisca tangent cone T_C:

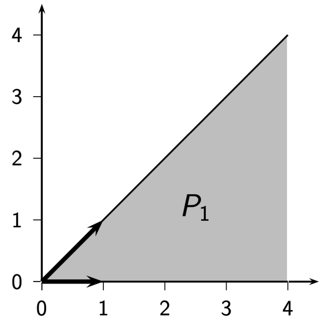
$$T_C(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \exists \, \{z_k\} \subset C, \exists \, \{t_k\} > 0, \; z_k \to \bar{x}, \; t_k \to 0, \; \lim_{k \to \infty} \frac{z_k - \bar{x}}{t_k} = d \right\}$$

Cono tangente a C in $\bar{x}$.

Detto a parole, sono tutti i vettori d, che puntano a $\bar{x}$, partendo da una qualsiasi serie di punti z_k in C.

Example

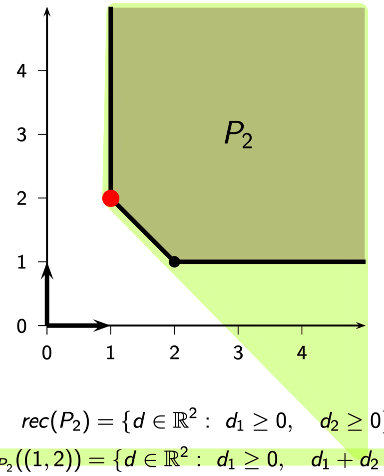
$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 \leq x_1, \quad x_2 \geq 0\}$



is a polyhedral cone.

$rec(P_1) = P_1, \quad T_{P_1}((0,0)) = P_1.$

$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$



$rec(P_2) = \{d \in \mathbb{R}^2 : \; d_1 \geq 0, \quad d_2 \geq 0\}$

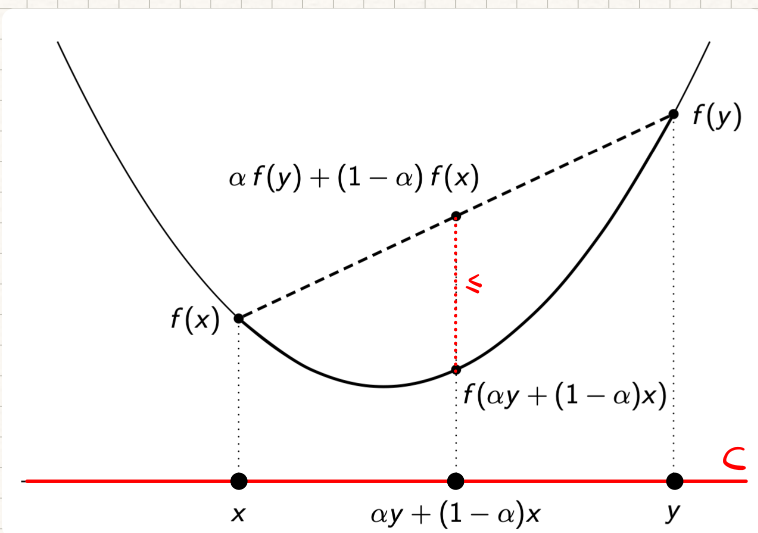
$T_{P_2}((1,2)) = \{d \in \mathbb{R}^2 : \; d_1 \geq 0, \quad d_1 + d_2 \geq 0\}$

FUNZIONI CONVESSE

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, la funzione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **convessa** in C se:

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$$

$$\forall x, y \in C; \qquad \forall \alpha \in [0, 1]$$



TEOREMA

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è convessa in $\mathbb{R}^n$ SSE il set dato dall' epigraph (spazio sovrastante a $f(x)$) è convesso.

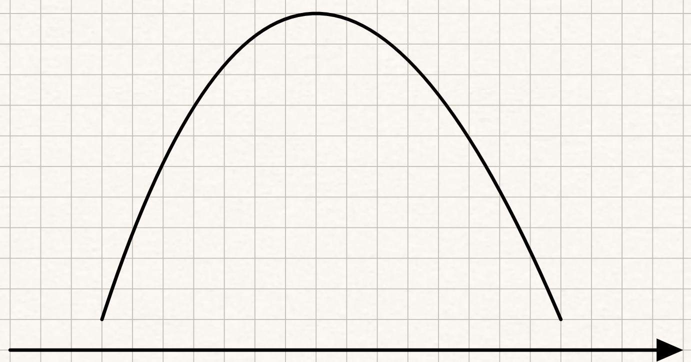
$$epi\left(f_C\right) = \{(x,y) \in C \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

FUNZIONE CONCAVA

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, la funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si dice concava in C se $-f(x)$ è convessa:

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) \geq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$$

$$\forall x, y \in C; \quad \forall \alpha \in [\emptyset, 1]$$



TEOREMA DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE CONVESSA

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa nel set convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora la funzione f è continua in $ri(C)$.

STRICTLY CONVEX FUNCTIONS

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, la funzione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice strettamente convessa in C se:

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) < \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$$

$$\forall x, y \in C; \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

STRONGLY CONVEX FUNCTIONS

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, la funzione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice fortemente convessa in C se:

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) - \frac{\tau}{2} \alpha (1-\alpha) \|y-x\|_2^2$$

$$\forall x, y \in C; \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

In questa seconda definizione ci stiamo assicurando che la nostra funzione sia più piccola anche di un fattore quadratico aggiunto a $\alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$.

Nota: per la concavità vale lo stesso discorso, usando però $-f(\cdot)$ al posto di $f()$

TEOREMA

Si dice che $f(\cdot)$ è strongly convex SSE $\exists\, \tau > 0$ (costante) tale che:

$$f(x) - \frac{\tau}{2}\|x\|_2^2 \quad \text{è convessa}$$

Per questo teorema si può dedurre che $f(\cdot)$ è fortemente convessa SSE esiste una funzione convessa φ e un numero $\tau > 0$ tale che:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{\tau}{2}\|x\|_2^2$$

Proprietà

Strongly convex $\longrightarrow$ strictly convex $\longrightarrow$ convex

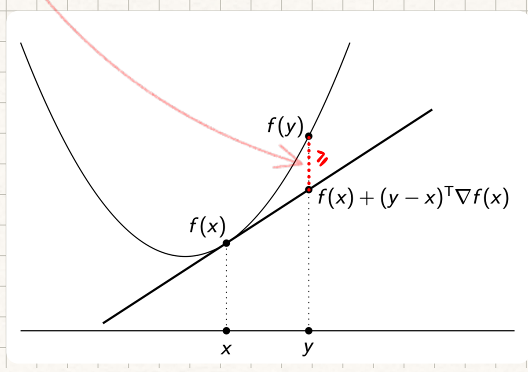
TEOREMA: First Order Condition

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un set aperto e convesso.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e differenziabile in C.

Il teorema afferma che $f(\cdot)$ è convessa SSE

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)^T \nabla f(x) \quad \forall x, y \in C$$



1) $f(\cdot)$ è strictly convex in C SSE

$$f(y) > f(x) + (y-x)^T \nabla f(x) \quad \forall x,y \in C,\ x \neq y$$

2) $f(\cdot)$ è strongly convex in C SSE $\exists \tau > 0$:

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)^T \nabla f(x) + \frac{\tau}{2} \|y-x\|_2^2 \quad \forall x,y \in C$$

TEOREMA: Second order conditions

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un set aperto e convesso.

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e differenziabile in C due volte

1) $f(\cdot)$ è convessa in C SSE $\forall x \in C$ la matrice Hessiana $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva, ovvero:

$$v^T \nabla^2 f(x) v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

In altre parole gli autovalori di $\nabla^2 f(x)$ sono $\lambda_i > 0$

2) Se la $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva $\forall x \in C$, allora $f(\cdot)$ è strictly convex in C.

3) Se $\exists \tau > 0$: $\nabla^2 f(x) - \tau I$ è definita positiva $\forall x \in C$ allora $f(\cdot)$ è strongly convex ovvero:

$$v^T \nabla^2 f(x) v \geq \tau \|v\|_2^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

In altre parole gli autovalori di $\nabla^2 f(x)$ sono $\lambda_i \geq \tau$

CONVESSITÀ FUNZIONE QUADRATICA

Definiamo $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$$

Dove $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica, mentre $c \in \mathbb{R}^n$

1) $\nabla f(x) = \frac{1}{2}\left((x^T Q)^T + Q x\right) + c = Qx + c$

2) Q è l'HESSIANA di $f(x)$

COROLLARI

1) $f(x)$ convessa SSE Q è semidefinita positiva
2) $f(x)$ strongly convex SSE definita positiva
3) $f(x)$ concava SSE Q è semidefinita negativa
4) $f(x)$ strongly concave SSE definita negativa

OPERAZIONI CHE PRESERVANO LA CONVESSITÀ

1) Prodotto: $f(\cdot)$ convessa $\Rightarrow$ $\alpha f(\cdot)$ convessa

2) Somma: f_1, f_2 convesse $\Longrightarrow$ $f_1 + f_2$ convessa

3) $f(\cdot)$ convessa $\Longrightarrow$ $f(Ax+b)$ convessa

4) Massimo: $f_1 \dots f_n$ convessa $\Longrightarrow$ $f(x) = \max\left(f_1(x) \dots f_n(x)\right)$ convessa

5) Sup: $\{f_i\}_{i\in I}$ famiglia di funzioni convesse $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $f(x) = \sup\limits_{i\in I}\{f_i(x)\}$ convessa

6) Composizione: prese $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) se $f(\cdot)$ è convessa e $g(\cdot)$ è convessa non-decrescente

$\Longrightarrow$ $f \circ g$ è convessa

b) se $f(\cdot)$ è concava e $g(\cdot)$ è convessa non-crescente

$\Longrightarrow$ $f \circ g$ è convessa

c) se $f(\cdot)$ è concava e $g(\cdot)$ è concava non-decrescente

$\Longrightarrow$ $f \circ g$ è concava

d) se $f(\cdot)$ è convessa e $g(\cdot)$ è concava non-crescente

$\Longrightarrow$ $f \circ g$ è concava

SUBLEVEL SETs

Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, il set S:

$$S_k(f) = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq k \}$$

è detto k-sublevel set di f

QUASI-CONVEX FUNCTION

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso, e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di dice che $f(\cdot)$ è quasi convessa in C se esiste $S_k(f)$:

$$S_k(f) \cap C = \{ x \in C : f(x) \leq k \}$$

tale che $S_k(f)$ è convesso $\forall k \in \mathbb{R}$

$f(\cdot)$ si dica Quasi-Concava in C se $-f(\cdot)$ è Quasi-Convessa in C