

----- OPTIMIZATION AND GAME THEORY -----

Set Convesso

Il set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se $\forall x, y \in C$ and $\forall \alpha \in [0, 1] \rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$

Set Affine

Il set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è **affine** se $\forall x, y \in C$ and $\forall \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$

Combinazione Convessa

$$y = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \quad \text{con: } 1) \alpha_1 \dots \alpha_k \in [0, 1], \quad 2) \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

Lemma 1

C convesso $\rightarrow \forall x_1 \dots x_k \in C$ and $\alpha_1 \dots \alpha_k \in [0, 1] : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$,

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in C$$

Proposizione

$\{C_i\}_{i \in I}$ ogni possibile famiglia di set convessi $\rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ è convesso

Convex Hull

$\text{conv}(C)$ di un set C è il più piccolo set convesso che contiene C

Proposizione

$\text{conv}(C) = \{\text{tutte le combinazioni convesse dei punti in } C\}$

Nota

$\text{conv}(C) = C$ per C convesso

Definizione di Poliedro

Un poliedro P è l'intersezione di un numero finito di semipiani in \mathbb{R}^n

Somma Di Set Convessi

Siano C_1 e C_2 set convessi $\rightarrow C_1 + C_2 := \{x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$ (Vale anche per la differenza)

Prodotto Di Set Convessi

Sia C un set convesso $\rightarrow \alpha \cdot C := \{\alpha \cdot x : x \in C\}$

Closure

C convesso $\rightarrow \text{cl}(C)$ convesso

Interior

C convesso $\rightarrow \text{int}(C) \neq \emptyset$, convesso

Affine Set

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff}(C)$ è il più piccolo set affine che contiene C

Relative Interior

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso $\rightarrow ri(C) := \{x \in C : \exists \epsilon > 0 : aff(C) \cap B(x, \epsilon) \subseteq C\}$

Teorema

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso non vuoto $\rightarrow ri(C)$ è convesso non vuoto

Teorema

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ due set convessi non vuoti $\rightarrow A$ e B sono linearmente separabili **SSE**
 $ri(A) \cap ri(B) = \emptyset$

Funzioni Affine

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è affine se $f(x) = Ax + b$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso $\rightarrow f(C) = \{f(x) : x \in C\}$ è convesso

$C \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso $\rightarrow f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in C\}$ è convesso

Definizione Di Cono

Un set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cono SE $\forall x \in C, \forall \lambda > 0 \rightarrow \lambda x \in C$

Cono Di Recessione

Dato un poliedro $P = \{x : Ax \leq b\}$ il cono di recessione di P è

$$rec(P) := \{d : x + \alpha \cdot d \in P, \quad \forall x \in P, \quad \alpha > 0\}.$$

Cono Tangente ●●●

Dato $x' \in cl(C) \subseteq \mathbb{R}^n$ il cono tangente a x' è:

$$T_C(x') := \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \{z_k\} \subset C, \exists \{t_k\} > 0, z_k \rightarrow x', t_k \rightarrow 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x'}{t_k} = d\}$$

Funzione Convessa

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in C se

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x) \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Teorema

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in \mathbb{R}^n **SSE** $epi f_C := \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$ è convesso

Funzione Concava

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è concava in C se $-f$ è convessa in C

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \geq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x) \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Teorema

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso $\rightarrow f$ continua nel $ri(C)$

Strictly Convex

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **strictly** convex in C se

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) < \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x) \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

Strongly Convex

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ set convesso, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **strongly** convex in C se $\exists \tau > 0$:

$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) < \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x) - \frac{\tau}{2} \alpha(1 - \alpha) \|y - x\|_2^2 \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Teorema

f è strongly convex **SSE** $\exists \tau > 0: f(x) - \frac{\tau}{2} \|x\|_2^2$ è convessa

Nota

f è strongly convex **SSE** esiste una funzione ψ e $\tau > 0: f(x) = \psi(x) + \frac{\tau}{2} \|x\|_2^2$

Teorema

f è convessa in C **SSE** $f(y) \geq f(x) + (y - x)^T \nabla f(x) \quad \forall x, y \in C$

Teorema

f è strictly convex in C **SSE** $f(y) > f(x) + (y - x)^T \nabla f(x) \quad \forall x, y \in C, \quad x \neq y$

Teorema

f è strongly convex in C **SSE** $\exists \tau > 0: f(y) \geq f(x) + (y - x)^T \nabla f(x) + \frac{\tau}{2} \|y - x\|_2^2 \quad \forall x, y \in C$

Teorema •••

- f è convessa in C **SSE** $\forall x \in C$ la Hessiana $\nabla^2 f(x)$ è **semi-definita positiva** ($v^T \nabla^2 f(x) v \geq 0$)
Ovvero che gli autovalori λ di $\nabla^2 f(x)$ sono: $\lambda \geq 0 \quad \forall x \in C$
- Se $\nabla^2 f(x) > 0 \quad \forall x \in C \rightarrow f$ è strictly convex
- f è strongly convex in C **SSE** $\exists \tau > 0: \nabla^2 f(x) - \tau I$ è **semi-definita positiva** $\forall x \in C$. Ovvero:
 $v^T \nabla^2 f(x) v \geq \tau \|v\|_2^2 \quad \forall x \in C, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
Ovvero che gli autovalori λ di $\nabla^2 f(x)$ sono: $\lambda \geq \tau \quad \forall x \in C$

Teoremi •••

- Se f è convessa e $\alpha > 0 \rightarrow \alpha \cdot f$ è convessa
- Se f_1, f_2 sono convesse $\rightarrow f_1 + f_2$ è convessa
- Se f è convessa $\rightarrow f(Ax + b)$ è convessa
- Se $f_1 \cdots f_n$ sono convesse $\rightarrow \max \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ è convessa
- Se $\{f_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di funzioni convesse $\rightarrow \sup_{i \in I} \{f_i(x)\}$ è convessa

Teoremi

Siano $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- Se f è convessa e g è convessa non-decrescente $\rightarrow f \circ g$ è convessa
- Se f è concava e g è convessa non-crescente $\rightarrow f \circ g$ è convessa
- Se f è concava e g è concava non-decrescente $\rightarrow f \circ g$ è concava
- Se f è convessa e g è concava non-crescente $\rightarrow f \circ g$ è concava

Problema Di Ottimizzazione

$$f_* = \min\{f(x): x \in X\} \rightarrow P$$

Con

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Valore Ottimo

Il valore ottimo di P è definito come $v(P) = \inf\{f(x): x \in X\}$. $v(P) \in \mathbb{R}$

Ottimo Globale

$$x^* \in X : f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X$$

Ottimo Locale

$$x^* \in X : f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x^*, r) \quad \forall r > 0$$

Teorema di Weierstrass •••

Per f continua in X regione di ammissione chiusa e limitata \rightarrow Esiste (almeno) un ottimo globale

Corollario 2

Se la funzione obiettivo f è continua e la regione di ammissione X è chiusa e $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che il k - *sublevel set*: $S_k(f) = \{x \in X : f(x) \leq k\}$ è non-vuoto e limitato \rightarrow Esiste (almeno) un ottimo globale

Funzione Coerciva

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in X}} f(x) = +\infty$$

Corollario 3

Se la funzione f è continua e coerciva, e $X \neq \emptyset$ è chiuso \rightarrow Esiste (almeno) un ottimo globale

Teorema 1

Sia f convessa in X convesso \rightarrow Ogni ottimo locale di P è anche globale

Proposizione 1

Sia f strictly convex in X convesso, e P ammette un ottimo globale x^* $\rightarrow x^*$ è l'unica soluzione ottima di P

Teorema 2

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è strongly convex in \mathbb{R}^n e X è chiuso \rightarrow Esiste un ottimo globale

Corollario 1

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è strongly convex in \mathbb{R}^n e X è chiuso e CONVESSO \rightarrow Esiste un ottimo globale UNICO

Teorema 3

Sia X APERTO e sia f differenziabile in $x^* \in X$. Se x^* è un ottimo locale per P $\rightarrow \nabla f(x^*) = 0$

Teorema 4 - Second order necessary optimality condition

Sia X aperto e $x^* \in X$ ottimo locale per $P \rightarrow 1) \nabla f(x^*) = 0. \quad 2) \nabla^2 f(x^*) \geq 0$

Teorema 5 – Second order sufficient optimality condition

Sia X aperto, preso $x^* \in X$ assumiamo le seguenti condizioni vere

1) $\nabla f(x^*) = 0.$

2) $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$

$\rightarrow x^*$ è un ottimo locale per P

Teorema 6 – Optimality condition for convex problems

Sia f differenziabile e convessa nel set X convesso e aperto $\rightarrow x^* \in X$ è un ottimo globale per P **SSE** $\nabla f(x^*) = 0$

Teorema 7

Sia f differenziabile e STRICTLY CONVEX nel set aperto e convesso $X \rightarrow x^* \in X$ è un ottimo globale UNICO per P **SSE** $\nabla f(x^*) = 0$

METODI DI OTTIMIZZAZIONE PER PROBLEMI NON VINCOLATI

Metodo del gradiente

- 1) Scegliere $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- 2) $k = 0$
- 3) SE $\nabla f(x_k) = 0$ ALLORA stop
- 4) ALTRIMENTI
 - a. $d_k = -\nabla f(x_k)$
 - b. $t_k \leftarrow \min_{t \geq 0} f(x_k + t \cdot d_k)$
 - c. $x_{k+1} = x_k + t_k \cdot d_k$
 - d. $k = k + 1$
- 5) Step 2

Proposizione

Sia f continua e differenziabile $\rightarrow (d_k)^T d_{k+1} = 0 \quad \forall k$

Proposizione

Sia f continua e differenziabile \rightarrow SE $\{x_k\} \rightarrow x^*$ ALLORA $\nabla f(x^*) = 0$

Teorema

Se f è coerciva $\rightarrow \forall x_0$ punto di partenza della sequenza $\{x_k\} \rightarrow x^*$, essa è limitata, e ogni punto di accumulo di $\{x_k\}$ è un punto stazionario per $f(x)$

Corollario

Se f è coerciva e convessa $\rightarrow \forall x_0$ punto di partenza della sequenza $\{x_k\} \rightarrow x^*$, essa è limitata, e ogni punto di accumulo di $\{x_k\}$ è un minimo globale per $f(x)$

Corollario

Se f è stongly convex $\rightarrow \forall x_0$ punto di partenza della sequenza $\{x_k\}$, essa converge all'unico minimo globale per $f(x)$

Metodo del gradiente – Caso Quadratico

Se $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$, con $Q > 0$.

Dove: $g_k = \nabla f(x_k) = Qx_k + c$

Per cui $t_k = -\frac{(d_k)^T \cdot g_k}{(d_k)^T \cdot Q \cdot d_k}$

Metodo del gradiente con la linea di ricerca inesatta di Armijo

- 1) Scegliere $\alpha, \gamma \in (0, 1)$
- 2) Scegliere $t' > 0$
- 3) Scegliere $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- 4) $k = 0$
- 5) SE $\nabla f(x_k) = 0$ ALLORA stop
- 6) ALTRIMENTI
 - a. $d_k = -\nabla f(x_k)$
 - b. $t_k = t'$
 - c. while $f(x_k + t_k \cdot d_k) > f(x_k) + \alpha t_k (d_k)^T \nabla f(x_k)$
 - i. $t_k = \gamma t_k$
 - d. $x_{k+1} = x_k + t_k \cdot d_k$
 - e. $k = k + 1$
- 7) Step 2

Metodo del gradiente coniugato

- 1) Scegliere $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- 2) $g_0 = \nabla f(x_0) = Qx_0 + c$
- 3) $k = 0$
- 4) SE $g_k = \nabla f(x_k) = 0$ ALLORA stop
- 5) ALTRIMENTI
 - a. SE $k = 0$ ALLORA $d_k = -g_k$
 - b. ALTRIMENTI
 - i. $\beta_k = \frac{(g_k)^T Q d_{k-1}}{(d_{k-1})^T Q d_{k-1}}$
 - ii. $d_k = -g_k + \beta_k d_{k-1}$
 - c. $t_k = -\frac{(g_k)^T d_k}{(d_k)^T Q d_k}$
 - d. $x_{k+1} = x_k + t_k \cdot d_k$
 - e. $g_{k+1} = Qx_{k+1} + c$
 - f. $k = k + 1$
- 6) Step 2

Proposizioni

- Un modo alternativo di calcolare $t_k = \frac{\|g_k\|^2}{(d_k)^T Q d_k}$
- Un modo alternativo di calcolare $\beta_k = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}$
- Se non troviamo il minimo globale dopo k iterazioni $\rightarrow \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ sono ortogonali
- Se non troviamo il minimo globale dopo k iterazioni $\rightarrow \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ sono coniugate rispetto a Q e x_k è il minimo di $f(x)$ su $x_0 + \text{Span}(d_1, d_2, \dots, d_k)$

Teorema

Il metodo del Gradiente Coniugato (CG) trova il minimo globale in, al massimo, n iterazioni

Teorema

Se Q ha r autovalori distinti \rightarrow CG trova il minimo globale in, al massimo, r iterazioni

Metodo di Newton – Basic Version

- 1) Scegliere $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- 2) $k = 0$
- 3) SE $\nabla f(x_k) = 0$ ALLORA stop
- 4) ALTRIMENTI
 - a. $d_k \leftarrow \nabla^2 f(x_k) d = -\nabla f(x_k)$: dove d è la direzione del gradiente
 - b. $x_{k+1} = x_k + d_k$
 - c. $k = k + 1$
- 5) Step 2

Teorema Di Convergenza

Se x^* è un minimo locale di $f(x)$ e $\nabla^2 f(x^*) > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall x_0 \in B(x^*, \delta)$ e la sequenza $\{x_k\} \rightarrow x^*$ e

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2 \quad \forall k > k', \text{ per } C > 0 \text{ e } k' > 0$$

Metodo di Newton – con linea di ricerca (inesatta)

- 1) Scegliere $\alpha, \gamma \in (0, 1)$
- 2) Scegliere $t' > 0$
- 3) Scegliere $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- 4) $k = 0$
- 5) SE $\nabla f(x_k) = 0$ ALLORA stop
- 6) ALTRIMENTI
 - d. $d_k \leftarrow \nabla^2 f(x_k) d = -\nabla f(x_k)$
 - e. $t_k = t'$
 - f. while $f(x_k + t_k \cdot d_k) > f(x_k) + \alpha t_k (d_k)^T \nabla f(x_k)$
 - i. $t_k = \gamma t_k$
 - g. $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$
 - h. $k = k + 1$
- 7) Step 2

Teorema Di Convergenza

Se f è strongly convex $\rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ la sequenza $\{x_k\} \rightarrow x^*$ minimo globale di $f(x)$

Se $\alpha \in (0, 1/2)$ e $t' = 1 \rightarrow$ la convergenza è quadratica

PROBLEMI VINCOLATI

Set Di Disequazioni Attive

Definiamo $\mathcal{A}(x^*) = \{j: g_j(x^*) = 0\}$ il set di disequazioni attive $x^* \in X$

First Order Feasible Direction Cone

$$D(x^*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n: \begin{array}{l} d^T \nabla g_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \\ d^T \nabla h_k(x^*) = 0 \quad \forall k = 1 \dots p \end{array} \right\}$$

Definizione – Abadie Constraint Qualification (ACQ)

ACQ è valida per un punto ammissibile $x^* \in X$ **SE**: $T_X(x^*) = D(x^*)$

Teoremi •••

1) Vicoli Affini

SE g_j e h_k sono funzioni affini $\forall j, k \rightarrow$ ACQ è verificata

2) Slatex Condition

SE g_j è convessa $\forall j = 1 \dots m$, e h_k è affine $\forall k = 1 \dots p$, e $\exists x' \in X: g(x') < 0$, $h(x') = 0 \rightarrow$ ACQ è verificata $\forall x \in X$

3) Dipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi

SE $x^* \in X$ e i vettori

i. $\nabla g_i(x^*) \leq 0, \forall i \in \mathcal{A}(x^*)$

j. $\nabla h_k(x^*) = 0 \quad \forall k = 1 \dots p$

sono linearmente dipendenti \rightarrow ACQ è verificata in x^*

TEOREMA KKT •••

SE x^* è un minimo locale e **SE** l'ACQ è verificata $\rightarrow \exists \lambda^* \in \mathbb{R}^n, \exists \mu^* \in \mathbb{R}^n : (x^*, \lambda^*, \mu^*)$ soluzione del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \cdot \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* \cdot g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \\ \lambda_i^* \geq 0 \\ g(x^*) \leq 0 \\ h(x^*) = 0 \end{array} \right.$$

LAGRANGIANA

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j \cdot h_j(x) = 0$$

KKT Con la lagrangiana

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0. \\ \lambda_i \cdot g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \\ \lambda_i \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{array} \right.$$

Con $\lambda_i \cdot \nabla g_i(x) = 0$, sostituibile con $\lambda^T \cdot g(x) = 0$ o $< \lambda, g(x) > = 0$

Teorema – KKT per problemi convessi

SE il problema P è convesso e (λ^*, μ^*, x^*) è la soluzione del KKT $\rightarrow x^*$ è un ottimo globale

Rilassamento Lagrangiano

$$\begin{cases} \inf (L(x, \lambda, \mu)) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Funzione duale Lagrangiana

$$\varphi(\lambda, \mu) := \inf (L(x, \lambda, \mu))$$

- 1) Concava
- 2) $\varphi(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$ per qualche punto
- 3) $\varphi(\lambda, \mu)$ non differenziabile per qualche punto

Teorema

$\forall \lambda \geq 0$ e $\forall \mu \in \mathbb{R}^p \rightarrow \varphi(\lambda, \mu) \leq v(P)$ minimo globale per P

Problema duale Lagrangiano

$$\begin{cases} \max (\varphi(\lambda, \mu)) \\ \lambda \geq 0 \end{cases} = D$$

D è per definizione **convesso** sempre.

Teorema

Per qualsiasi problema di ottimizzazione P vale che: $v(D) \leq v(P)$

Teorema

Supponiamo che f , g e h siano continue e differenziabili:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} = P$$

con P convesso, $\exists x^*$ ottimo globale e l' ACQ è soddisfatto \rightarrow

- 1) $v(D) = v(P)$ e D ammette l'ottimo
- 2) (λ^*, μ^*) è l'ottimo per D **SSE** (λ^*, μ^*) è un vettore dei moltiplicatori KKT associato a x^*

Teorema

(x^*, λ^*, μ^*) è punto di **sella** per $L(x, \lambda, \mu)$, ovvero

$$L(x^*, \lambda, \mu) \leq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, \lambda^*, \mu^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^p$$

SSE x^* è un ottimo per P, e (λ^*, μ^*) è un ottimo per D, e vale $v(D) = v(P)$

SUPPORT VECTOR MACHINE

Iperpiano Di Separazione

$$H = \{z \in \mathbb{R}^n : w^T x + b = 0\} : \begin{cases} w^T x_i + b > 0 & \forall x_i \in A \\ w^T x_i + b < 0 & \forall x_i \in B \end{cases}$$

Dove A e B sono i due labeled-set. Affinché H valga $\text{conv}(A) \cup \text{conv}(B) = \emptyset$

Funzione di Decisione

$$y_i = f(x) = \text{sign}(w^T x + b) = \begin{cases} 1 & \text{se } w^T x + b > 0 \\ -1 & \text{se } w^T x + b < 0 \end{cases} \leftarrow \text{classe}$$

Definizione – Margine di Separazione

Se H è l'iperpiano di separazione dei due insiemi A e B , allora definiamo il margine di separazione di H come:

$$\rho(H) = \min_{x \in A \cup B} \frac{|w^T x + b|}{\|w\|}$$

Teorema

Trovare l'iperpiano H che ha il massimo margine di separazione $\rho(H)$ equivale a risolvere il seguente problema di programmazione quadratico convesso:

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ w^T x_i + b > 1 & \forall x_i \in A \\ w^T x_i + b < -1 & \forall x_i \in B \end{cases}$$

Linear SVM

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ 1 - y_i(w^T x_i + b) \leq 0 & \forall x_i = 1, \dots, l \end{cases}$$

Funzione Lagrangiana

$$L(x, b, \lambda) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i w^T x_i - b \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^l \lambda_i$$

- 1) **SE** $\sum_{i=1}^l \lambda_i y_i \neq 0 \rightarrow \min_{w,b} L(x, b, \lambda) = -\infty$
- 2) **SE** $\sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = 0 \rightarrow L$ non dipende da b ,
 L è strongly convex,
 $\nabla_w L(x, b, \lambda) = w - \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i x_i = 0$

Funzione Duale

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j x_i^T x_j \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i & \text{se } \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = 0 \end{cases}$$

Problema Duale

$$\begin{cases} \max_{\lambda} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j x_i^T x_j \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i & \text{OPPURE} & \max_{\lambda} -\frac{1}{2} \lambda^T X^T X \lambda + e^T \lambda \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Con $e^T = (1, \dots, 1)$ e $X = \{y_1 x_1, \dots, y_l x_l\}$

- 1) Il duale è convesso: $X^T X \geq 0$
- 2) λ^* ottimo del KKT associato a (w^*, b^*) è ottimo anche del duale
- 3) **SE** $\lambda_i^* > 0 \rightarrow x_i$ è detto **support vector**
- 4) **SE** λ_i^* è ottimo del duale $\rightarrow w^* = \sum_{i=1}^l \lambda_i^* y_i x_i$
- 5) b^* è ottenuto da: $\lambda_i^* (1 - y_i (w^{*T} x_i + b^*)) \rightarrow b^* = \frac{1}{y_i} - (w^*)^T x_i$

Primale Linear SVM con SOFT MARGIN

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i \\ 1 - y_i (w^T x_i + b) \leq \xi_i & \forall i = 1, \dots, l \\ \xi_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, l \end{cases}$$

- 1) **SE** $\xi_i > 1 \rightarrow$ il punto x_i è miss-classificato e $\sum_{i=1}^l \xi_i$ è un limite superiore al numero di punti miss-classificati
 - a. **SE** $x_i \in A$ e $w^T x_i + b < 0 \rightarrow \xi_i > 1$ miss-classificato
 - b. **SE** $x_i \in B$ e $w^T x_i + b > 0 \rightarrow \xi_i > 1$ miss-classificato

Duale Linear SVM con SOFT MARGIN

$$\begin{cases} \max_{\lambda} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j x_i^T x_j \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = 1 \\ 0 \leq \lambda_i \leq C \end{cases}$$

- 1) **SE** λ^* è una soluzione ottima di questo duale $\rightarrow w^* = \sum_{i=1}^l \lambda_i^* y_i x_i$
- 2) Possiamo ottenere b^* , fissando $0 \leq \lambda_i \leq C$, e usando la condizione complementare (slackness): $\begin{cases} \lambda_i^* [1 - y_i ((w^*)^T x_i + b^*) - \xi_i^*] = 0 \\ \mu_i^* \xi_i^* = (C - \lambda_i^*) \xi_i^* = 0 \end{cases}$ da cui: $b^* = \frac{1}{y_i} - (w^*)^T x_i$
- 3) ξ_i^* è l'errore nel classificare il punto i -esimo
- 4) **SE** $0 \leq \lambda_i^* < C \rightarrow \xi_i^* = 0$
- 5) **SE** $0 < \lambda_i^* \leq C \rightarrow \xi_i^* = 1 - y_i ((w^*)^T x_i + b^*)$
- 6) **SE** $\xi_i^* > 0 \rightarrow \lambda_i^* = C \rightarrow$ condizione necessaria per **mis-classificare** x_i

Primale Non-Linear SVM

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i \\ 1 - y_i (w^T \phi(x_i) + b) \leq \xi_i & \forall i = 1, \dots, l \\ \xi_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, l \end{cases}$$

Duale Non-Linear SVM

$$\begin{cases} \max_{\lambda} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i y_j \phi(x_i^T) \phi(x_j) \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^l \lambda_i \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$
$$w^* = \sum_{i=1}^l \lambda_i^* y_i \phi(x_i)$$

Troviamo b^* , fissando $0 < \lambda_i^* < C$:

$$y_i \left[\sum_{i=1}^l \lambda_i^* y_i \phi^T(x_i) \phi(x_i) + b^* \right] - 1 = 0$$

$$f(x) = \text{sign}((w^*)^T \phi(x) + b^*)$$

Funzione Kernel

Definiamo $k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione kernel: $k(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$

Teorema

Se k è una funzione Kernel, e se $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ la matrice $K: k_{ij} = k(x_i, x_j) \geq 0$

Possiamo usare la funzione k per ridefinire il duale.

In Pratica

- 1) Scegliere una funzione Kernel k
- 2) Trovare la soluzione ottima del duale λ^*
- 3) Scegliere $i: 0 < \lambda_i^* < C$, e trovare b^*
- 4) Calcolare la decision function $f(x)$

REGRESSIONE

Sistema per trovare il polinomio di regressione

$$\begin{cases} \min \|Az - y\| \\ z \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Residual Vector

$$r \in \mathbb{R}^l: r_i = p(x_i) - y_i$$

Dove r è la differenza fra valore reale e valore predetto.

Polinomio di regressione con $\|\bullet\|_2$

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|Az - y\|_2^2 = \frac{1}{2} z^T A^T A z - z^T A^T y + \frac{1}{2} y y^T \\ z \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Con $\text{rank}(A) = n$, $A^T A > 0$

Soluzione: $z = (A^T A)^{-1} A^T y$

Polinomio di regressione con $\|\bullet\|_1$

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|Az - y\|_1 \\ z \in \mathbb{R}^n \end{cases} = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^l u_i \\ u_i \geq A_i z - y_i \\ u_i \leq y_i - A_i z \end{cases}$$

Forma vettoriale:

$$\begin{cases} \min_{z,u} (\emptyset_n^T, e_n^T) \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} \\ D \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} \leq d \end{cases}$$

Con:

$$D = \begin{pmatrix} A & -I_l \\ -A & -I_l \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix}$$

Polinomio di regressione con $\|\bullet\|_\infty$

$$\begin{cases} \min \|Az - y\|_\infty \\ z \in \mathbb{R}^n \end{cases} = \begin{cases} \min(u) \\ u_i \geq A_i z - y_i \\ u_i \leq y_i - A_i z \end{cases}$$

Forma vettoriale:

$$\begin{cases} \min_{z,u} (0, 0, \dots, 0, 1) \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} \\ D \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} \leq d \end{cases}$$

Con:

$$D = \begin{pmatrix} A & -I_l \\ -A & -I_l \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix}$$

Regressione ε – SV Lineare

$$\begin{cases} \min \left(\frac{1}{2} \|w\|^2 \right) \\ y_i \geq w^T x_i + b + \varepsilon \\ y_i \leq w^T x_i + b - \varepsilon \end{cases}$$

Forma vettoriale:

$$\begin{cases} \min_{z,u} \frac{1}{2} (w^T, b) Q \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} \\ D \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} \leq d \end{cases}$$

Con:

$$Q = \begin{pmatrix} I_l & \emptyset \\ \emptyset_l^T & \emptyset \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -X & -e_l \\ X & e_l \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \varepsilon e_l - y \\ \varepsilon e_l + y \end{pmatrix}$$

Regressione ε – SV Lineare con variabili di rilassamento (Slack Variables)

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l (\xi_i^+, \xi_i^-) \\ y_i \leq w^T x_i + b + \varepsilon + \xi_i^+ \quad \forall i = 1, \dots, l \\ y_i \geq w^T x_i + b - \varepsilon - \xi_i^- \quad \forall i = 1, \dots, l \\ \xi_i^+, \xi_i^- \geq 0 \end{cases}$$

Forma vettoriale:

$$\begin{cases} \min_{z,u} \frac{1}{2} (w^T, b, (\xi_i^+)^T, (\xi_i^-)^T) Q_1 \begin{pmatrix} w \\ b \\ \xi_i^+ \\ \xi_i^- \end{pmatrix} + c^T \begin{pmatrix} w \\ b \\ \xi_i^+ \\ \xi_i^- \end{pmatrix} \\ D_1 \begin{pmatrix} w \\ b \\ \xi_i^+ \\ \xi_i^- \end{pmatrix} \leq d_1 \\ \xi_i^+ \geq 0 \\ \xi_i^- \geq 0 \end{cases}$$

Con:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0_n & \emptyset_{n \times 2l} \\ 0_n^T & 0 & 0_{2l}^T \\ \emptyset_{2l \times n} & 0_{2l} & 1_{2l \times 2l} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} -x & -e_l & -I_l & \emptyset_{l \times l} \\ x & e_l & \emptyset_{l \times l} & -I_l \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \varepsilon e_l - y \\ \varepsilon e_l + y \end{pmatrix}$$

Lagrangiana ε – SV Lineare (Slack Variables)

$$\begin{aligned} L(w, b, \xi^+, \xi^-, \lambda^+, \lambda^-, \eta^+, \eta^-) = \\ \frac{1}{2} \|w\|^2 - w^T \left[\sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) x_i \right] - b \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) + \sum_{i=1}^l \xi_i^+ (C - \lambda_i^+ - \eta_i^+) \\ + \sum_{i=1}^l \xi_i^- (C - \lambda_i^- - \eta_i^-) - \varepsilon \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ + \lambda_i^-) + \sum_{i=1}^l y_i (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) \end{aligned}$$

- 1) $\nabla_w L = w - \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) x_i = 0$
- 2) $\nabla_b L = -\sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) = 0$
- 3) $\nabla_{\xi_i^\pm} L = C - \lambda_i^\pm - \eta_i^\pm = 0$

Duale ε – SV Lineare (Slack Variables)

$$\begin{cases} \max_{\lambda^+, \lambda^-} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) (\lambda_j^+ - \lambda_j^-) (x_i)^T x_j - \varepsilon \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ + \lambda_i^-) + \sum_{i=1}^l y_i (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) \\ \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) = 0 \\ \lambda_i^+ \in [0, C] \\ \lambda_i^- \in [0, C] \end{cases}$$

In formato vettoriale:

$$\begin{cases} \max_{\lambda^+, \lambda^-} -\frac{1}{2} ((\lambda^+)^T, (\lambda^-)^T) Q \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix} + [-e(e_l^T, e_l^T) + (y^T, -y^T)] \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix} \\ (e_l^T, -e_l^T) \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda_i^+ \in [0, C] & i = 1, \dots, l \\ \lambda_i^- \in [0, C] & i = 1, \dots, l \end{cases}$$

Con:

$$Q = \begin{pmatrix} X & -X \\ -X & X \end{pmatrix}, \quad X = [(x_i)^T x_j] \quad \forall i, j = 1, \dots, l$$

1) È un problema **convesso** di programmazione quadratica

2) **SE** $\lambda^+ > 0$ oppure $\lambda^- > 0 \rightarrow x_i$ è un **support vector**

3) **SE** (λ^+, λ^-) ottimo del duale $\rightarrow w = \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) x_i$

4) b è ottenuto tramite la *complementary condition*:

$$\begin{cases} \lambda_i^+ [\varepsilon + \xi_i^+ - y_i + w^T x_i + b] = 0 \\ \lambda_i^- [\varepsilon + \xi_i^- + y_i - w^T x_i - b] = 0 \\ \xi_i^+ (C - \lambda_i^+) = 0 \\ \xi_i^- (C - \lambda_i^-) = 0 \end{cases}$$

i. $0 < \lambda^+ < C \rightarrow b = y_i - w^T x_i - \varepsilon$

ii. $0 < \lambda^- < C \rightarrow b = y_i - w^T x_i + \varepsilon$

Regressione ε – SV NON Lineare

Definiamo: $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$, spazio delle caratteristiche, e cerchiamo una regressione lineare in $\{\phi(x_i), y_i\}$ nello spazio $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$.

Primale

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l (\xi_i^+, \xi_i^-) \\ y_i \geq w^T \phi(x_i) + b + \varepsilon + \xi_i^+ \\ y_i \leq w^T \phi(x_i) + b - \varepsilon - \xi_i^- \end{cases}$$

Duale

$$\begin{cases} \max_{\lambda^+, \lambda^-} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-)(\lambda_j^+ - \lambda_j^-) k(x_i, x_j) - \varepsilon \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ + \lambda_i^-) + \sum_{i=1}^l y_i (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) \\ \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) = 0 \\ \lambda_i^+ \in [0, C] \\ \lambda_i^- \in [0, C] \end{cases}$$

Ricordando che $k(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \phi(x_j)$

Passi

- 1) Scegliere una funzione kernel: $k(x_i, x_j)$
- 2) Risolvendo il duale abbiamo: $(\lambda^+, \lambda^-) \Rightarrow w = \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) \phi(x_i)$
 - a. $w^T \phi(x_i) = \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) k(x_i, x_j)$
- 3) complementary condition:
$$\begin{cases} \lambda_i^+ [y_i - f(x_i) - \varepsilon - \xi_i^+] = 0 \\ \lambda_i^- [y_i - f(x_i) + \varepsilon + \xi_i^-] = 0 \\ \xi_i^+ (C - \lambda_i^+) = 0 \\ \xi_i^- (C - \lambda_i^-) = 0 \end{cases}$$
- 4) $0 < \lambda^+ < C \Rightarrow b = y_i - w^T \phi(x_i) - \varepsilon = y_i - \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) k(x_i, x_j) - \varepsilon$
- 5) $0 < \lambda^- < C \Rightarrow b = y_i - w^T \phi(x_i) + \varepsilon = y_i - \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) k(x_i, x_j) + \varepsilon$

Funzione di regressione per ε – SV NON Lineare

$$f(x) = w^T \phi(x_i) + b = \sum_{i=1}^l (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) k(x_i, x_j) + b$$

CLUSTER

Modello

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^l \min_{j=1, \dots, k} d(p_i, x_j) \\ x_j \in \mathbb{R}^n \quad \forall j = 1, \dots, k \end{cases} : M$$

Dove $d(p_i, x_j)$ è la distanza fra il punto p_i e il centroide x_j

Problema di Clustering

- 1) **SE** $k = 1$ il problema è convesso
- 2) **SE** $k > 1$ il problema è non convesso e non differenziabile

Teorema

Il problema $\begin{cases} \min \sum_{i=1}^l \min_{j=1, \dots, k} \|p_i - x_j\|_2^2 \\ x_j \in \mathbb{R}^n \quad \forall j = 1, \dots, k. \end{cases}$ è equivalente al seguente problema non convesso e non differenziabile:

$$\begin{cases} \min_{x, \alpha} f(x, \alpha) := \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \|p_i - x_j\|_2^2 \\ \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, l \\ \alpha_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, l \quad \forall j = 1, \dots, k. \\ x_j \in \mathbb{R}^n \quad \forall j = 1, \dots, k \end{cases} : C_2$$

K-Means

- 1) Inizializzazione
 - a. Set $t = 0$
 - b. Setta i centroidi $x_1^0 \dots x_k^0$
 - c. Setta $\alpha_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & j: \|p_i - x_j\|_2 = \min_{h=1, \dots, k} \|p_i - x_h^0\|_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
 - i. $\forall i = 1 \dots l$
- 2) Aggiornamento centroidi
 - a. $\forall j = 1, \dots, k. \quad x_j^{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^l \alpha_{ij}^t \cdot p_i}{\sum_{i=1}^l \alpha_{ij}^t}$
- 3) Aggiornamento clusters
 - a. $\forall i = 1, \dots, l. \quad \alpha_{ij}^{t+1} = \begin{cases} 1 & j: \|p_i - x_j^{t+1}\|_2 = \min_{h=1, \dots, k} \|p_i - x_h^{t+1}\|_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- 4) Stopping condition
 - a. Se $f(x^{t+1}, \alpha^{t+1}) = f(x^t, \alpha^t) \rightarrow \text{STOP}$
 - b. Altrimenti $t++$ e vai al passo 2

Teorema

L'algoritmo di K-Means termina dopo un numero finito di iterazioni in una soluzione (x^*, α^*) del sistema KKT del problema C_2 tale che

$$\begin{aligned} f(x^*, \alpha^*) &\leq f(x^*, \alpha) & \forall \alpha \geq 0: \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} &= 1. \quad \forall i = 1, \dots, l \\ f(x^*, \alpha^*) &\leq f(x, \alpha^*) & \forall x \in \mathbb{R}^{kl} \end{aligned}$$

Teorema $\|\cdot\|_1$

Il problema $\begin{cases} \min \sum_{i=1}^l \min_{j=1, \dots, k} \|p_i - x_j\|_1 \\ x_j \in \mathbb{R}^n \quad \forall j = 1, \dots, k \end{cases}$ è equivalente al seguente problema non convesso e non differenziabile:

$$\begin{cases} \min_{x, \alpha} f(x, \alpha) := \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \|p_i - x_j\|_1 \\ \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} = 1 & \forall i = 1, \dots, l \\ \alpha_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, l \quad \forall j = 1, \dots, k \\ x_j \in \mathbb{R}^n & \forall j = 1, \dots, k \end{cases} : C_1$$

Teorema $\bullet\bullet\bullet$

Il problema C_1 è equivalente al seguente problema non convesso e non differenziabile:

$$\begin{cases} \min_{x, \alpha, u} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^n \alpha_{ij} u_{ijk} \\ u_{ijk} \geq (p_i)_h - (x_j)_h & \forall i = 1, \dots, l, \quad \forall j = 1, \dots, k, \quad \forall h = 1, \dots, n \\ u_{ijk} \geq (x_j)_h - (p_i)_h & \forall i = 1, \dots, l, \quad \forall j = 1, \dots, k, \quad \forall h = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} = 1 & \forall i = 1, \dots, l \\ \alpha_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, l, \quad \forall j = 1, \dots, k \\ x_j \in \mathbb{R}^n & \forall j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

K-Median

- 1) Inizializzazione
 - a. Set $t = 0$
 - b. Setta i centroidi $x_1^0 \dots x_k^0$
 - c. Setta $\alpha_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & j: \|p_i - x_j\|_1 = \min_{h=1, \dots, k} \|p_i - x_h^0\|_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
 - i. $\forall i = 1 \dots l$
- 2) Aggiornamento centroidi
 - a. $\forall j = 1, \dots, k. \quad x_j^{t+1} = \text{mediano}(p_i: \alpha_{ij}^t = 1)$
- 3) Aggiornamento clusters
 - a. $\forall i = 1, \dots, l. \quad \alpha_{ij}^{t+1} = \begin{cases} 1 & j: \|p_i - x_j^{t+1}\|_1 = \min_{h=1, \dots, k} \|p_i - x_h^{t+1}\|_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- 4) Stopping condition
 - a. Se $f(x^{t+1}, \alpha^{t+1}) = f(x^t, \alpha^t) \rightarrow \text{STOP}$
 - b. Altrimenti $t++$ e vai al passo 2

Teorema

L'algoritmo di K-Median termina dopo un numero finito di iterazioni in una soluzione (x^*, α^*) punto stazionario tale che:

$$\begin{aligned} f(x^*, \alpha^*) &\leq f(x^*, \alpha) & \forall \alpha \geq 0: \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} &= 1. \quad \forall i = 1, \dots, l \\ f(x^*, \alpha^*) &\leq f(x, \alpha^*) & \forall x \in \mathbb{R}^{kl} \end{aligned}$$

METODI PER PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE VINCOLATI

(Exact) Penalty Method

Trasformiamo il problema P (convesso, e sono con le $g_i(x)$) in un problema senza vincoli aggiungendo una penalità a f

$$\begin{cases} \min f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \rho(x) := \rho_\varepsilon(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} = P_\varepsilon$$

Dove

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^m (\max\{0, g_i(x)\})^2$$

Proposizione

- 1) SE f e g_i sono continue e differenziabili \rightarrow anche ρ_ε lo è, e il gradiente è:

$$\nabla \rho_\varepsilon(x) = \nabla f(x) + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} \nabla g_i(x)$$

- 2) SE f e g_i sono convesse \rightarrow anche ρ_ε lo è
3) Ogni problema P_ε ha una relazione con $P \rightarrow v(P_\varepsilon) \leq v(P) \quad \forall \varepsilon > 0$
4) SE x_ε^* risolve il problema $P_\varepsilon \rightarrow x_\varepsilon^*$ è ottimo anche per P
5) SE $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \rightarrow v(P_{\varepsilon_1}) \leq v(P_{\varepsilon_2})$

Passi del metodo

- 1) Settare $\varepsilon_0 > 0$
- 2) Settare $\tau \in (0, 1)$
- 3) Settare $k = 0$
- 4) Trovare l'ottimo x_k del problema P_{ε_k}
- 5) SE $x_k \in X$
 - a. STOP
- 6) ALTIMENTI
 - a. $\varepsilon_{k+1} = \tau \varepsilon_k$
 - b. $k++$
 - c. Passo 1

Teoremi

- SE f è coerciva $\rightarrow \exists \{x_k\}$, sequenza limitata, e ogni punto stazionario è un'ottima soluzione di P
- SE $\{x_k\} \rightarrow x^* \rightarrow x^*$ è un'ottima soluzione di P
- SE $\{x_k\} \rightarrow x^*$ e i gradienti dei vincoli attivi sono linearmente indipendenti $\rightarrow x^*$ è un'ottima soluzione di P e la sequenza $\{\lambda_k\} : \lambda_k^i = \frac{2}{\varepsilon} \max\{0, g_i(x_k)\} \rightarrow \lambda^*$ vettore dei moltiplicatori del KKT associati a x^*

(In quello esatto, dato che il problema P convesso, abbiamo una sola soluzione e quindi un unico ε .)

Barrier Method

Questo metodo cerca una sequenza di punti ammissibili che approssima la soluzione ottima di P , problema vincolato, approssimandolo con:

$$\begin{cases} \min f(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)) = \psi_\varepsilon(x) \\ x \in \text{int}(X) \end{cases} \quad := P_B$$

Proprietà di $B(x) = \sum_{i=1}^m \log(-g_i(x))$

1) $\text{dom}(B) = \text{int}(X)$

2) B convesso

3) B derivabile con:

a. $\nabla B(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)} \nabla g_i(x)$

b. $\nabla^2 B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{[g_i(x)]^2} \nabla g_i(x) \nabla g_i(x)^T + \sum_{i=1}^m \frac{1}{-g_i(x)} \nabla^2 g_i(x)$

Passi del metodo

1) Settare $\delta > 0$

2) Settare $\varepsilon_1 > 0$

3) Settare $\tau \in (0, 1)$

4) Scegliere x_0

5) Settare $k = 1$

6) Trovare l'ottimo x_k del problema P_B

a. Partendo da x_{k-1}

7) **SE** $m \varepsilon_k < \delta$

a. **STOP**

8) **ALTRIMENTI**

a. $\varepsilon_{k+1} = \tau \varepsilon_k$

b. $k++$

c. Passo 1

Trovare x_0

Consideriamo il problema ausiliare:

$$\begin{cases} \min s \\ g_i(x) < s \quad \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

1) Prendiamo $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, e cerchiamo $\tilde{s} > \max_{i=1, \dots, m} g_i(\tilde{x}) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{s})$

2) Cercare la soluzione ottima dell'ausiliare: (x^*, s^*) usando un Barrier Method

3) **SE** $s^* < 0 \rightarrow x^* \in \text{int}(X)$

a. **ALTRIMENTI** $\text{int}(X) = \emptyset$

PROBLEMI MULTI OBIETTIVO

Definizione

$$\begin{cases} \min f(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x)) \\ x \in X \end{cases}$$

Ordine di Pareto

Dati $x, y \in \mathbb{R}^s$

$$x \geq y \iff x_i \geq y_i \quad \forall i = 1, \dots, s$$

- 1) Reflexive: $x \geq x$
- 2) Asimmetrico: se $x \geq y$ e $y \geq x \rightarrow x = y$
- 3) Transitiva: se $x \geq y$ e $y \geq z \rightarrow x \geq z$

Minimi di Pareto per un Sottoinsieme

1) Ideal Minimum

- a. $x^* \in A$ è un $IMin(A)$ se $y \geq x^*, \forall y \in A$
- b. $x^* \in A$ è un $IMin(A)$ se $A \subseteq (x^* + \mathbb{R}_+^s)$

2) Minimum

- a. $x^* \in A$ è un $Min(A)$ se $\nexists y \in A, y \neq x^*, x^* \geq y$
- b. $x^* \in A$ è un $Min(A)$ se $A \cap (x^* - \mathbb{R}_+^s) = \emptyset$

3) Weak Minimum

- a. $x^* \in A$ è un $WMin(A)$ se $\nexists y \in A, y \neq x^*, x^* > y$
- b. $x^* \in A$ è un $WMin(A)$ se $A \cap (x^* - \text{int}(\mathbb{R}_+^s)) = \emptyset$

Preposizione

Se $IMin(A) \neq \emptyset \rightarrow IMin(A) = Min(A) = \{x^*\}$

Teorema – Esistenza del minimo

Se $\exists x^* \in A: A \cap (x^* - \mathbb{R}_+^s)$ è compatto $\rightarrow Min(A) \neq \emptyset$

Minimi di Pareto per un problema multi-obiettivo P •••

1) Ideal Minimum

- a. $x^* \in X$ è un $IMin(P)$ se $f(x^*) = IMin(f(X))$ ovvero se $f(x) \geq f(x^*), \forall x \in X$

2) Minimum

- a. $x^* \in X$ è un $Min(P)$ se $f(x^*) = Min(f(X))$ ovvero che $\nexists x \in X$:
 - i. $f_i(x^*) \geq f_i(x), \forall i = 1, \dots, s$
 - ii. $f_j(x^*) > f_j(x)$. Per qualche $j \in \{1, \dots, s\}$

3) Weak Minimum

- a. $x^* \in X$ è un $WMin(P)$ se $f(x^*) = WMin(f(X))$ ovvero che:
 - i. $\nexists x \in X: f_i(x^*) > f_i(x), \forall i = 1, \dots, s$

Teorema •••

Se f_i è continua $\forall i = 1, \dots, s$ e se X è compatto $\rightarrow \exists Min(P)$

Teorema •••

Se f_i è continua $\forall i = 1, \dots, s$ e se X è chiuso, e se $\exists v \in \mathbb{R}, \exists j = 1, \dots, s$:

$$\{x \in X: f_j(x) \leq v\}$$

è un insieme non vuoto e limitato $\rightarrow \exists Min(P)$

Corollario

Se f_i è continua $\forall i = 1, \dots, s$ e se X è chiuso, con f_j coerciva per qualche $j \in \{1, \dots, s\}$

$\rightarrow \exists \text{Min}(P)$

Teorema

$x^* \in X$ è un $\text{Min}(P)$ **SSE** il problema ausiliario P_a ha soluzione 0

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^s \varepsilon_i \\ f_i(x) + \varepsilon_i \leq f_i(x^*). \quad \forall i = 1, \dots, s \\ x \in X \\ \varepsilon \geq 0 \end{cases} := P_a$$

Teorema

$x^* \in X$ è un $\text{WMin}(P)$ **SSE** il problema ausiliario P_{wa} ha soluzione 0

$$\begin{cases} \max v \\ v \leq \varepsilon_i & \forall i = 1, \dots, s \\ f_i(x) + \varepsilon_i \leq f_i(x^*). & \forall i = 1, \dots, s \\ x \in X \\ \varepsilon \geq 0 \end{cases} := P_{wa}$$

PROBLEMI MULTI OBIETTIVO NON VINCOLATI

Definizione problema

$$\begin{cases} \min f(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x)) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad := P_u$$

con f_i continua e differenziabile $\forall i = 1, \dots, s$

Teorema

SE $x^* \in X$ è un $Min(P_u)$ \Rightarrow il problema S_1 non ha soluzione.

$$\begin{cases} \nabla f_i(x^*)^T d < 0, \quad \forall i = 1, \dots, s \\ d \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad := S_1$$

Condizione Necessaria di Ottimalità

SE $x^* \in X$ è un $WMin(P_u)$ $\Rightarrow \exists \theta^* \in \mathbb{R}^s$: (x^*, θ^*) è una soluzione di:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^s \theta_i \nabla f_i(x^*) = 0 \\ \theta \geq 0 \\ \sum_{i=1}^s \theta_i = 1 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad := S$$

Condizione Sufficiente di Ottimalità

SE P_u è convesso (Ovvero ogni f_i è convessa) e (x^*, θ^*) è l'ottimo per $S \Rightarrow$

1) $x^* = WMin(P_u)$

2) **SE** vale anche $\theta^* > 0 \Rightarrow x^* = Min(P_u)$

PROBLEMI MULTI OBIETTIVO VINCOLATI

Definizione problema

$$\begin{cases} \min f(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x)) \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n: g_j(x) \leq 0, h_k(x) = 0\} \end{cases} := P$$

$$\forall j = 1, \dots, m \text{ e } \forall k = 1, \dots, p$$

Teorema KKT Multi-Obiettivo

SE x^* è un $WMin(P)$ e **SE** l'ACQ è verificata in $x^* \rightarrow \exists \theta^* \in \mathbb{R}^s, \exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m, \exists \mu^* \in \mathbb{R}^p :$
 $(x^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^s \theta_i \cdot \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \nabla g_j(x) + \sum_{k=1}^p \mu_k \cdot \nabla h_k(x) = 0 \\ \theta \geq 0 \\ \sum_{i=1}^s \theta_i = 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda_j \cdot \nabla g_j(x) = 0. & \forall j = 1, \dots, m \\ g(x^*) \leq 0 \\ h(x^*) = 0 \end{cases}$$

Teorema – Condizione Necessaria di Ottimalità

SE $x^* \in X$ è un $WMin(P) \rightarrow$ il problema S non ha soluzione.

$$\begin{cases} \nabla f_i(x^*)^T d < 0. & \forall i = 1, \dots, s. \\ d \in T_X(x^*) \end{cases} := S$$

Corollario

SE x^* è un $WMin(P)$ e **SE** l'ACQ è verificata in x^* il problema S_1 non ha soluzione.

$$\begin{cases} v^T \nabla f_i(x^*)^T d < 0. & \forall i = 1, \dots, s \\ v^T \nabla g_j(x^*)^T d \leq 0. & \forall j = 1, \dots, m \\ v^T \nabla h_k(x^*)^T d < 0. & \forall k = 1, \dots, p \\ v \in \mathbb{R}^n \end{cases} := S_1$$

Teorema – Condizione Sufficiente di Ottimalità

Assunti f_i e g_j sono convesse $\forall i$ e $\forall j$, e h_k è affine $\forall k$:

- 1) **SE** $(x^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ risolve il KKT $\rightarrow x^* = WMin(P)$
- 2) **SE** $(x^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ risolve il KKT e $\theta^* > 0 \rightarrow x^* = Min(P)$

Proposizione

SE x^* è un unico minimo globale per f_k in X , per qualche $k = 1, \dots, s \rightarrow x^* = Min(P)$

SCALARIZATION METHOD

Associamo al problema P vincolato, il sistema P_α che associa pesi a ogni f_i :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^s \alpha_i f_i(x) \\ x \in X \end{cases} := P_\alpha$$

Con S_α insieme delle soluzioni ottime di P_α

$$\alpha \geq 0, \quad \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$$

Teorema

- $\bigcup_{\alpha \geq 0} S_\alpha \subseteq \{WMin(P)\}$
- $\bigcup_{\alpha > 0} S_\alpha \subseteq \{Min(P)\}$

Teorema

SE che X è convesso e che f_i sono convesse in X , $\forall i = 1, \dots, s \rightarrow$

$$\bigcup_{\alpha \geq 0} S_\alpha = \{WMin(P)\}$$

Teorema

Sia P è lineare (ovvero che f_i è lineare $\forall i = 1, \dots, s$) e sia X un poliedro \rightarrow

- $\bigcup_{\alpha \geq 0} S_\alpha = \{WMin(P)\}$
- $\bigcup_{\alpha > 0} S_\alpha = \{Min(P)\}$

Proposizione

SE x^* è un unico minimo globale per P_α , per qualche α , $\rightarrow x^* = Min(P)$

NOTA

Solo con $\alpha = 0$ si hanno $WMin(P)$, gli altri sono $Min(P)$ di Pareto; tranne che se con $\alpha = 0$ la funzione che rimane è strongly convex

NOTA

SE l'ottimo di P_α coincide sia con $\alpha = 0$ che con $\alpha = 1 \rightarrow x^* = IMin(P)$ perché minimizza entrambe le funzioni obiettivo

GOAL METHOD

Definiamo nello spazio obiettivo \mathbb{R}^s un punto ideale z , così definito:

$$z_i = \min_{x \in X} f_i(x). \quad \forall i = 1, \dots, s.$$

Teorema

Per avvicinarsi il più possibile a z , risolviamo:

$$\left\{ \min_{x \in X} \|f(x) - z\|_q \quad \text{con } q \in [1, +\infty] \right\} := G$$

- SE $q \in [1, +\infty) \rightarrow$ ogni soluzione ottima di G è un $Min(P)$
- SE $q = +\infty \rightarrow$ ogni soluzione ottima di G è un $WMin(P)$

Goal Method – Norma 2

$$\left\{ \min_{x \in X} \frac{1}{2} \|Cx - z\|_2^2 = \frac{1}{2} x^T C^T C x - x^T C^T z + \frac{1}{2} z^T z \right\} := G_2$$

GAME THEORY – Matrix Game

Definizione two-person non-cooperative game

$$P_1 \rightarrow \min_{x \in X} f_1(x, y), \quad P_2 \rightarrow \min_{y \in Y} f_2(x, y)$$

Equilibrio di Nash

In un two-person non-cooperative game, una coppia di strategie (x^*, y^*) è detta Equilibrio di Nash SE

$$f_1(x^*, y^*) = \min_{x \in X} f_1(x, y^*), \quad f_2(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} f_2(x^*, y)$$

Matrix Game

In un two-person non-cooperative game, dove:

- X e Y sono set finiti: $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$
- $f_1 = -f_2$ (zero-sum game)

definiamo la Matrix Game $C: c_{ij} = f_1(i, j)$

Definizione – Strategia Strictly Dominated

Dato un two-person non-cooperative game, una strategia $x \in X$ è strettamente dominata da $x^* \in X$ se:

$$f_1(x, y) > f_1(x^*, y) \quad \forall y \in Y$$

Similmente $y \in Y$ è strettamente dominata da $y^* \in Y$ se:

$$f_2(x, y) > f_2(x, y^*) \quad \forall x \in X$$

Le strategie dominate possono essere eliminate dal gioco

Mixed Strategies

SE C è un Matrix Game $m \times n \rightarrow$

- una Mixed Strategy per il giocatore 1 è un vettore grande m contenete probabilità.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^m: x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

- una Mixed Strategy per il giocatore 2 è un vettore grande n contenete probabilità.

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n: y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$$

Pure Strategy

Sono i vertici di X e Y : $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

Expected Cost

$$f_1(x, y) = x^T C y, \quad f_2(x, y) = -x^T C y$$

Nota

$$x^T C y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i c_{ij} y_j$$

Mixed Strategies Nash Equilibrium

SE C è un Matrix Game $m \times n \rightarrow (x^*, y^*) \in X \times Y$ è un Mixed Strategies Nash Equilibrium **SE**

$$\max_{y \in Y} (x^*)^T C y = (x^*)^T C y^* = \max_{x \in X} x^T C (y^*)$$

O equivalentemente:

$$(x^*)^T C y \leq (x^*)^T C y^* \leq x^T C (y^*) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

(x^*, y^*) è un **punto di sella** per $f_1(x, y) = x^T C y$ su $X \times Y$

Punto Di Sella

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. (x^*, y^*) è un punto di sella della funzione $F: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ **SE**

$$F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

Teorema

$(x^*, y^*) \in X \times Y$ soddisfa la condizione di punto di sella **SSE**

1) x^* è una soluzione ottima di: $\min_{x \in X} (\sup_{y \in Y} F(x, y))$

2) y^* è una soluzione ottima di: $\max_{y \in Y} (\inf_{x \in X} F(x, y))$

3) $\sup_{y \in Y} F(x, y) = \inf_{x \in X} F(x, y)$

Tutte e tre le condizioni sono equivalenti a: $\min_{x \in X} (\sup_{y \in Y} F(x, y)) = \max_{y \in Y} (\inf_{x \in X} F(x, y)) = F(x^*, y^*)$

Teorema – Esistenza del punto di sella

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Assumendo che

1) X e Y sono non vuoti, convessi e compatti

2) $F(\bullet, y)$ è continua e quasi-convessa in $X, \forall y \in Y$

3) $F(x, \bullet)$ è continua e quasi-convessa in $Y, \forall x \in X$

$\rightarrow F$ ammette un punto di sella in $X \times Y$

Corollario

1) Ogni Matrix Game ha almeno un Mixed Strategies Nash Equilibrium

2) (x^*, y^*) è un Mixed Strategies Nash Equilibrium **SSE**

$$\begin{cases} x^* \text{ è una soluzione ottima di: } \min_{x \in X} (\max_{y \in Y} x^T C y) \\ y^* \text{ è una soluzione ottima di: } \max_{y \in Y} (\min_{x \in X} x^T C y) \end{cases}$$

Con valore ottimo pari a $(x^*)^T C y^*$

Teorema

Il problema $\min_{x \in X} (\max_{y \in Y} x^T C y)$ è equivalente a risolvere il seguente problema di

programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min v \\ v \geq \sum_{i=1}^m c_{ij} x_i \quad \forall j = 1, \dots, n \\ x \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1 \end{cases} \quad := P_1$$

Teorema

Il problema $\max_{y \in Y} (\min_{x \in X} x^T C y)$ è equivalente a risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max w \\ w \geq \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j & \forall i = 1, \dots, m \\ y \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \end{cases} \quad := P_2$$

Proposizione

P_2 è il duale di P_1

Risoluzione Esercizi

I Pure Strategies Nash Equilibria possono essere cercati fra i **minimi di ogni colonna** della matrice per $Player_1$ e i **massimi di ogni riga** per $Player_2$.

I punti in comune sono Pure Strategies Nash Equilibria.

Nota

SE il P_1 è convesso \rightarrow Qualsiasi combinazione convessa fra due Pure Strategies Nash Equilibrium è una Mixed Strategies Nash Equilibria

Definizione Combinazione Convessa con due punti

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \quad \alpha \in [0, 1]$$

GAME THEORY – Bimatrix Games

Definizione

Un Bimatrix Game è un two-person non-cooperative game, dove:

- X e Y sono set finiti:
 - $X = \{x \in \mathbb{R}^m: x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$
 - $Y = \{y \in \mathbb{R}^n: y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$
- $f_1 \neq -f_2$ (non zero-sum game)
 - $f_1(x, y) = x^T C_1 y$
 - $f_2(x, y) = x^T C_2 y$

Teorema

Ogni Bimatrix Game ha almeno un Mixed Strategies Nash Equilibrium

Teorema

Definendo $B_1: Y \rightarrow X$ e $B_2: X \rightarrow Y$:

$$B_1(y) = \{\text{Soluzioni ottime di } \min_{x \in X} x^T C_1 y\}$$

$$B_2(x) = \{\text{Soluzioni ottime di } \min_{y \in Y} x^T C_2 y\}$$

→ (x^*, y^*) è un Nash Equilibrium **SSE** $x^* \in B_1(y)$ e $y^* \in B_2(x)$

Teorema – KKT per Bimatrix Games

(x^*, y^*) è un Nash Equilibrium **SSE** $\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 y^* + \mu_1 e_m \geq 0 \\ x^* \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m x_i^* = 1 \\ x_i^* (C_1 y^* + \mu_1 e_m) \geq 0. \quad \forall i = 1 \dots m \\ C_2 x^* + \mu_2 e_n \geq 0 \\ y^* \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n y_j^* = 1 \\ y_j^* (C_2 x^* + \mu_2 e_n) \geq 0. \quad \forall j = 1 \dots n \end{array} \right. \quad := KS$$

È Verificato

Proposizione

(x^*, y^*, μ_1, μ_2) è una soluzione per **KS SSE** è una soluzione ottima del problema di programmazione quadratica seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \psi(x, y, \mu_1, \mu_2) = [x^T (C_1 y + \mu_1 e_m) + y^T (C_2 x + \mu_2 e_n)] \\ C_1 y + \mu_1 e_m \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ C_2 x + \mu_2 e_n \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \end{array} \right. \quad := QP$$

E $\psi(x^*, y^*, \mu_1, \mu_2) = 0$

Formato Matriciale di QP

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} (w^T, \mu^T) H \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} \\ A_{in} \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} \leq b_{in} \\ A_{eq} \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} \leq b_{eq} \\ w \geq 0 \end{cases} := QP$$

Con: ($O ==$ matrice di uni)

$$H = \begin{pmatrix} O_{m \times m} & C_1 + C_2 & e_m & O_{m \times 1} \\ C_1^T + C_2^T & O_{n \times n} & O_{n \times 1} & e_n \\ e_m^T & O_{1 \times n} & 0 & 0 \\ O_{1 \times m} & e_n^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{in} = \begin{pmatrix} -C_2^T & O_{n \times n} & O_{n \times 1} & -e_n \\ O_{m \times m} & -C_1 & -e_m & O_{m \times 1} \end{pmatrix} \quad b_{in} = \begin{pmatrix} O_{n \times 1} \\ O_{m \times 1} \end{pmatrix}$$

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b_{eq} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w^T = (x^T, y^T)$$

GAME THEORY – Convex Games

$$P_1 \rightarrow \begin{cases} \min_x f_1(x, y) \\ g_i^1(x) \leq 0, \quad \forall i = 1 \dots p \end{cases}, \quad P_2 \rightarrow \begin{cases} \min_y f_2(x, y) \\ g_j^2(y) \leq 0, \quad \forall j = 1 \dots q \end{cases}$$

Con f_1, f_2, g^1 e g^2 continue e differenziabili

Teorema

SE le regioni di ammissione

- $X = \{x \in \mathbb{R}^m: g_i^1(x) \leq 0, \quad \forall i = 1 \dots p\}$
- $Y = \{y \in \mathbb{R}^n: g_j^2(y) \leq 0, \quad \forall j = 1 \dots q\}$

Sono chiuse, limitate e convesse e le funzioni di costo:

- 1) $f_1(\bullet, y)$ è quasi-convessa $\forall y \in Y$
- 2) $f_2(x, \bullet)$ è quasi-convessa $\forall x \in X$

→ esiste almeno un Nash Equilibrium

Teorema – Condizione KKT

SE (x^*, y^*) è un Nash Equilibrium e ACQ sono verificati sia in x^* che in y^* → $\exists \lambda^1 \in \mathbb{R}^p$ e $\exists \lambda^2 \in \mathbb{R}^q$:

$$\begin{cases} \nabla_x f_1(x^*, y^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^1 \nabla g_i^1(x^*) = 0 \\ \lambda^1 \geq 0 \\ g^1(x^*) \leq 0 \\ \lambda_i^1 g_i^1(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ \nabla_y f_2(x^*, y^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^2 \nabla g_j^2(y^*) = 0 \\ \lambda^2 \geq 0 \\ g^2(y^*) \leq 0 \\ \lambda_j^2 g_j^2(y^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \end{cases}$$

SE $(x^*, y^*, \lambda^1, \lambda^2)$ risolve il KKT di sopra, e il game è convesso → (x^*, y^*) è un Nash Equilibrium

MATLAB

Funzione *linprog* (*f*, *A*, *b*, *Aeq*, *beq*, *lb*, *ub*, *opzioni*)

Dove. Il sistema che risolve, in generale è fatto:

$$\begin{cases} \min_x (f^T x) \\ Ax \leq b \\ Aeq x = b. \\ lb \leq x \leq ub \end{cases}$$

Funzione *quadprog* (*H*, *f*, *A*, *b*, *Aeq*, *beq*, *lb*, *ub*, *x₀*, *opzioni*)

Dove. Il sistema che risolve, in generale è fatto:

$$\begin{cases} \min_x \left(\frac{1}{2} x^T H x + f^T x \right) \\ Ax \leq b \\ Aeq x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases}$$

Funzione

[x, fval, exitflag, output, lambda] = fmincon (*fun*, *x₀*, *A*, *b*, *Aeq*, *beq*, *lb*, *ub*, *nonlcon*)

Dove. Il sistema che risolve, in generale è fatto:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ Ax \leq b \\ Aeq x = beq \\ lb \leq x \leq ub \\ c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \end{cases}$$

fun = @(x) ...

nonlcon = @(x) const(x)

function [c, ceq] = const(x)

c = [...];

ceq = [...];

end

Funzione *fminunc* uguale ma senza vincoli

RISOLUZIONE ESERCIZI

ESERCIZIO 1: Mono-Objective

- 1) **Provare se il problema ammette un ottimo globale**
 - a. Controllare se $f(x)$ è convessa tramite gli auto-vettori dell'Hessiana
 - b. Controllare se $f(x)$ è continua nel set X di ammissione
- 2) **Applicare il metodo indicato tramite lo script MatLab**
- 3) **Il punto ottenuto è un minimo globale del problema?**
 - a. Se $f(x)$ è strongly convex allora il minimo globale è unico
 - b. Per farlo bisogna vedere se la soluzione trovata è anche soluzione del KKT associato al problema. Usando il teorema che dice: SE il problema P è convesso e (λ^*, μ^*, x^*) è la soluzione del $KKT \rightarrow x^*$ è un ottimo globale

ESERCIZIO 2: SVM

- 1) **Scrivere il modello richiesto, copiandolo da sopra.**
- 2) **Risolvere usando MatLab, con i parametri descritti dalla traccia**
- 3) **Trovare i punti miss-classified**
 - a. Bisogna considerare la “complementary slackness condition”, in particolare se il punto è miss-classificato allora l'errore $\xi_i^* > 0$, per cui da $(C - \lambda_i^*)\xi_i^* = 0$ deriviamo $C = \lambda_i^*$. Cercare i punti con questo λ_i^* . Ma non basta, potrebbero esserci punti classificati correttamente anche con $C = \lambda_i^*$. Per notarlo basta calcolare il valore dell'Iperpiano con il punto indicato, e vedere se soddisfa:
 - i. $w^T x_i + b > 0 \quad \forall x_i \in A$
 - ii. $w^T x_i + b < 0 \quad \forall x_i \in B$
- 4) **Classifica il nuovo punto**
 - a. Bisogna vedere se:
 - i. $w^T x_i + b > 0 \quad \forall x_i \in A$
 - ii. $w^T x_i + b < 0 \quad \forall x_i \in B$

ESERCIZIO 2: Regressione

- 1) **Scrivere il modello richiesto, copiandolo da sopra.**
- 2) **Risolvere usando MatLab, con i parametri descritti dalla traccia**
- 3) **Trovare i Support Vector:**
 - a. Usare MatLab, i SV sono dati dalla seconda e dalla terza colonna
- 4) **Trovare i punti che cadono fuori dal ε - tube usando la soluzione del duale**
 - a. Guardando le condizioni del primale:
 - i. $y_i - f(x_i) - \varepsilon - \xi_i^+ \leq 0$
 - ii. $y_i - f(x_i) + \varepsilon + \xi_i^+ \leq 0$Se un punto è fuori dal ε - tube, allora l'errore è $\xi_i^+, \xi_i^- > 0$
Bisogna cercare i punti a cui corrisponde un errore positivo, cerchiamo prima nella soluzione duale i punti (λ^+, λ^-) , e cerchiamo i punti che hanno $C = \lambda_i^*$, per lo stesso principio del problema SVM .

ESERCIZIO 2: Clustering

- 1) **Scrivere il modello richiesto, copiandolo da sopra.**
- 2) **Risolvere usando MatLab, con i parametri descritti dalla traccia**

ESERCIZIO 3: Multi-Objective

1) Prova l'esistenza del Minimo di Pareto, trovare i $WMin(P)$ e i $Min(P)$

- a. Per farlo risolvere il P_α dello scalarized problem, attraverso il KKT , provando che il problema P_α è convesso e che le ACQ sono soddisfatti:
 - i. Per $\alpha_1 = 0$
 - ii. Per $\alpha_1 = 1$
 - iii. Per $0 < \alpha_1 < 1$
 1. Distinguere i casi per $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$
- b. **SE** il problema P è lineare allora tutti i risultati trovati sono $WMin(P)$ o $Min(P)$ secondo il teorema di sopra descritto
- c. **SE** una delle f_i è Strongly Convex allora ha un unico minimo che è un $Min(P)$

ESERCIZIO 4: Mono-Matrix

1) Trovare le strategie dominate per eliminarle:

- a. Player 2: Eliminiamo le **colonne** che hanno tutti i valori \leq agli elementi corrispondenti delle altre colonne (Mi tengo la colonna maggiore)
- b. Player 1: Eliminiamo le **righe** che hanno tutti i valori \geq agli elementi corrispondenti delle altre righe (Mi tengo la riga minore)

2) Trovare le Pure Strategies Nash Equilibria

- a. Cercare gli elementi che sono contemporaneamente **massimi per la propria riga e minimi per la propria colonna**.
- b. Ricordare di mantenere gli indici della matrice originale

3) Trovare un Mixed Strategies Nash Equilibria

- a. Risolvere il sistema primale dato dalla definizione sopra, con MatLab
- b. **SE** il risultato del sistema è un Pure Strategies Nash Equilibria, allora controllare se il problema è lineare, per cui ogni combinazione convessa fra due punti di Pure Strategies Nash Equilibria è un Mixed Strategies Nash Equilibria.

ESERCIZIO 4: Bi-Matrix

1) Fa tutto MatLab 😂