UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BERGAMO

Dipartimento
di Ingegneria Gestionale,
dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

LX: Model Predictive Control

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   1.1 Equilibrio
   1.2 Stabilità
   1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   1.1 Controllabilità
   1.2 Osservabilità
   1.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   3.1 Anello aperto
   3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   7.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   7.2 Proprietà
   7.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   8.1 Formulazione
   8.2 Proprietà
   8.3 Stabilità
6. **Esempi di applicazioni**
   9.1 Pancreas Artificiale
   9.2

Outline

1. Introduzione
2. Linear MPC

Outline

1. **Introduzione**

2. Linear MPC

Introduzione

L'obiettivo di questa lezione è vedere alcune formulazioni specifiche di MPC.

In particolare, vedremo come si possono calcolare nella maggior parte dei casi gli ingredienti necessari per poter garantire la stabilità asintotica del sistema in anello chiuso.

Vedremo come formulare il regolatore nel caso di non poter misurare lo stato del sistema.

Vedremo inoltre come formulare il regolatore MPC nel caso di voler fare un setpoint tracking in un punto diverso dall'origine.

Outline

1. Introduzione

2. **Linear MPC**

Outline

1. Introduzione
2. **Linear MPC**
3. Setpoint Tracking MPC

Enunciato del problema

1. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone accessibile. Sia (A, B) ***raggiungibile***.

2. Si assuma inoltre l'esistenza di vincoli su stato e controllo $x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$

$$x \in \mathcal{X} \Longrightarrow x_{min} \leq x \leq x_{max},$$

$$u \in \mathcal{U} \Longrightarrow u_{min} \leq u \leq u_{max}$$

Enunciato del problema

4. Si voglia risolvere il problema di regolazione dello stato del sistema all'origine, progettando un regolatore MPC con garanzia di asintotica stabilità.

Per farlo, si assuma una cifra di merito quadratica, ovvero

$$J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2 + ||x(N)||_S^2$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j) + x(N)'Sx(N)$$

Con $Q = Q' \geq 0, S = S' \geq 0, R = R' > 0.$

Enunciato del problema

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t. \;\; x(0) = x(k)$$ *Condizione iniziale = Feedback di stato*

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) \in \mathbb{X}_f$$

Il problema di ottimizzazione cosí formulato è un problema di **programmazione quadratica (QP)**.

Come scegliere gli ingredienti del regolatore?

Ingredienti

Nella scorsa lezione abbiamo visto che nella progettazione di un MPC che garantisca che il sistema in anello chiuso **asintoticamente stabile dobbiamo soddisfare le seguenti condizioni**

Ingrediente	Descrizione
1	$f(x,u)$ e $\ell(x,u)$ continue
2	Set dei vincoli compatti
3	$\ell(x,u)$ e $V_f(x)$ definiti positivi
4	Ipotesi base di stabilità: esistenza della CLF
5	Ipotesi di invarianza: esistenza di un control invariant set

Osservazioni

1. La prima condizione è garantita dalla scelta del modello lineare e del costo.

2. La scelta di vincoli di massimo/minimo come intervalli chiusi e limitati garantisce la seconda condizione.

3. $Q = Q' \geq 0$, $S = S' \geq 0$, $R = R' > 0$ garantiscono che sia soddisfatta anche la terza condizione.

Dobbiamo quindi capire come soddisfare la condizione 4 e la condizione 5.

Condizione 4: CLF

Il costo terminale di un MPC lineare è

$$V_f(x) = ||x||_S^2, \qquad S = S' \geq 0$$

Tale costo è senza dubbio definito positivo e $V_f(0) = 0$. Dobbiamo quindi trovare un valore adeguato di S ed una **legge di controllo locale $\kappa_f(x)$ stabilizzante** tali per cui

$$V_f(f(x, \kappa_f(x))) - V_f(x) \leq -\ell\left(x, \kappa_f(x)\right)$$

ovvero

$$V_f(Ax + B\kappa_f(x)) - V_f(x) \leq -(||x||_Q^2 + ||\kappa_f(x)||_R^2)$$

Condizione 5: Invariant set

La legge di controllo locale deve essere inoltre tale da determinare l'esitenza di un control invariant set

$$\mathbb{X}_f = \left\{x \in \mathcal{X} : if\ x \in \mathbb{X}_f\ then \left(Ax + B\kappa_f(x)\right) \in \mathbb{X}_f, \kappa_f(x) \in \mathcal{U}\right\}$$

Nel caso dei sistemi lineari, è molto semplice trovare $\kappa_f(x)$: basta prendere la legge di controllo del LQR a orizzonte infinito

$$\kappa_f(x) = -Kx$$

Con $K = (R + B'PB)^{-1}B'PA$. Questa legge è ottima per definizione e inoltre garantisce che il sistema in anello chiuso $x(k+1) = (A - BK)x(k)$ è asintoticamente stabile.

Condizione 4: CLF

Inoltre, come costo terminale possiamo proprio prendere

$$V_f(x) = ||x||_P^2$$

Con P all'**unica** soluzione costante **dell'equazione stazionaria di Riccati**

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Questa scelta di costo terminale

- rappresenta esattamente il costo oltre l'orizzonte N e fino all'infinito
- è una CLF: l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza

Analisi

Il costo terminale misura quanto si spende per andare da N a infinito

$$V_f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j)$$

Ma le predizioni oltre l'orizzonte N sono governate dalla legge di controllo locale $\kappa_f(x) = -Kx$, per cui

$$x(j+1) = (A - BK)x(j) \Longrightarrow x(j) = (A - BK)^j x$$

$$u(j) = -Kx(j) = -K(A - BK)^j x$$

Sostituiamo queste definizioni nel costo precedente

Analisi

Sostituiamo queste definizioni nel costo

$$V_f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} x'(A - BK)^{j\prime}Q(A - BK)^{j}x + x'(A - BK)^{j\prime}K'RK(A - BK)^{j}x$$

$$= x'\left[\sum_{j=0}^{\infty}(A - BK)^{j\prime}(Q + K'RK)(A - BK)^{j}\right]x$$

$$= x'Px$$

Analisi

Con questa scelta di costo terminale, l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza

$$V_f((A - BK)x) \; - V_f(x) = -\left(||x||_Q^2 + ||-Kx||_R^2\right)$$

Infatti, sostituendo il costo scelto:

$$x'(A - BK)'P(A - BK)x - x'Px = -x'(Q + K'RK)x$$

Ignorando la variabile x' e x, comune a tutti i termini:

$$(A - BK)'P(A - BK) - P = -(Q + K'RK)$$

Analisi

Con questa scelta di costo terminale, l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza

$$V_f((A-BK)x) - V_f(x) = -\left(||x||_Q^2 + ||-Kx||_R^2\right)$$

Infatti, sostituendo il costo scelto:

$$x'(A-BK)'P(A-BK)x - x'Px = -x'(Q+K'RK)x$$

Ignorando la variabile x' e x, comune a tutti i termini:

$$(A-BK)'P(A-BK) - P = -(Q+K'RK)$$

Da cui: $$A'PA - A'PBK - K'B'PA + K'B'PBK - P = -(Q+K'RK)$$

Analisi

Riordiniamo l'equazione:

$$P = A'PA - A'PBK - K'B'PA + K'B'PBK + (Q + K'RK)$$

Da cui:

$$P = A'PA + Q - A'PBK - K'B'PA + K'(R + B'PB)K$$

Sostuiamo l'espressione $K = (R + B'PB)^{-1}B'PA$:

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$
$$+A'PB\underbrace{(R + B'PB)^{-1}(R + B'PB)}_{= I}(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Analisi

Quindi otteniamo:

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

$$-A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA + A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Da cui:

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Che è esattamente l'equazione di Riccati stazionaria.

Abbiamo così dimostrato che nel caso lineare, con questa scelta di costo terminale, l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza.

QED

Esempio

Si consideri il sistema dato da: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Supponiamo ore di avere dei vincoli sullo stato e sugli ingressi.

Sia ad esempio $x \in \mathcal{X}$ dato da $\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, -0.5 \leq u \leq 0.5$

Costruiamo un MPC con $Q = I,\ R = 1, N = 5$. Con questa scelta di matrici otteniamo

$$K = \begin{bmatrix} 0.4345 & 1.0285 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2.3671 & 1.1180 \\ 1.1180 & 2.5875 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[K, P] = dlqr(A, B, Q, R)}$$

Esempio

Come calcoliamo l'invariant set per il vincolo terminale?

$$\mathbb{X}_f = \{x \in \mathcal{X}: if\ x \in \mathbb{X}_f\ then (A - BK)x \in \mathbb{X}_f, -Kx \in \mathcal{U}\}$$

Innanzitutto calcolo la matrice del sistema in anello chiuso

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0.7828 & 0.4858 \\ -0.4345 & -0.0285 \end{bmatrix}$$

Dopo di che, per tutti gli $x \in \mathcal{X}$ e $-Kx \in \mathcal{U}$, cerco il set tale che $(A - BK)x \in \mathcal{X}$.

$$\boldsymbol{X}_{min} \leq x \leq \boldsymbol{X}_{max} \qquad \boldsymbol{U}_{min} \leq -Kx \leq \boldsymbol{U}_{max}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{max} \\ -\boldsymbol{X}_{min} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{max} \\ -\boldsymbol{U}_{min} \end{bmatrix}$$

Esempio

Raggruppiamo i vincoli in modo da esprimerli nella forma $\mathcal{G}x \leq \mathscr{g}$ dove

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathscr{g} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{max} \\ -\boldsymbol{X}_{min} \\ \boldsymbol{U}_{max} \\ -\boldsymbol{U}_{min} \end{bmatrix}$$

L’algoritmo è iterativo. Queste prime disuguaglizane definiscono il set

$$\mathcal{O}(0) = \{x : \mathcal{G}x \leq \mathscr{g}\}$$

Lo step successivo è dato da:

$$\mathcal{O}(1) = \{x \in \mathcal{O}(0) \colon \mathcal{G}(A - BK)x \leq \mathscr{g}\}$$

Esempio

Continuando a iterare:

$$\mathcal{O}(2) = \{x \in \mathcal{O}(1) \colon \mathcal{G}(A - BK)^2 x \leq g\}$$

La generica j –esima iterazione sarà:

$$\mathcal{O}(j) = \left\{x \in \mathcal{O}(j-1) \colon \mathcal{G}(A - BK)^j x \leq g\right\}$$

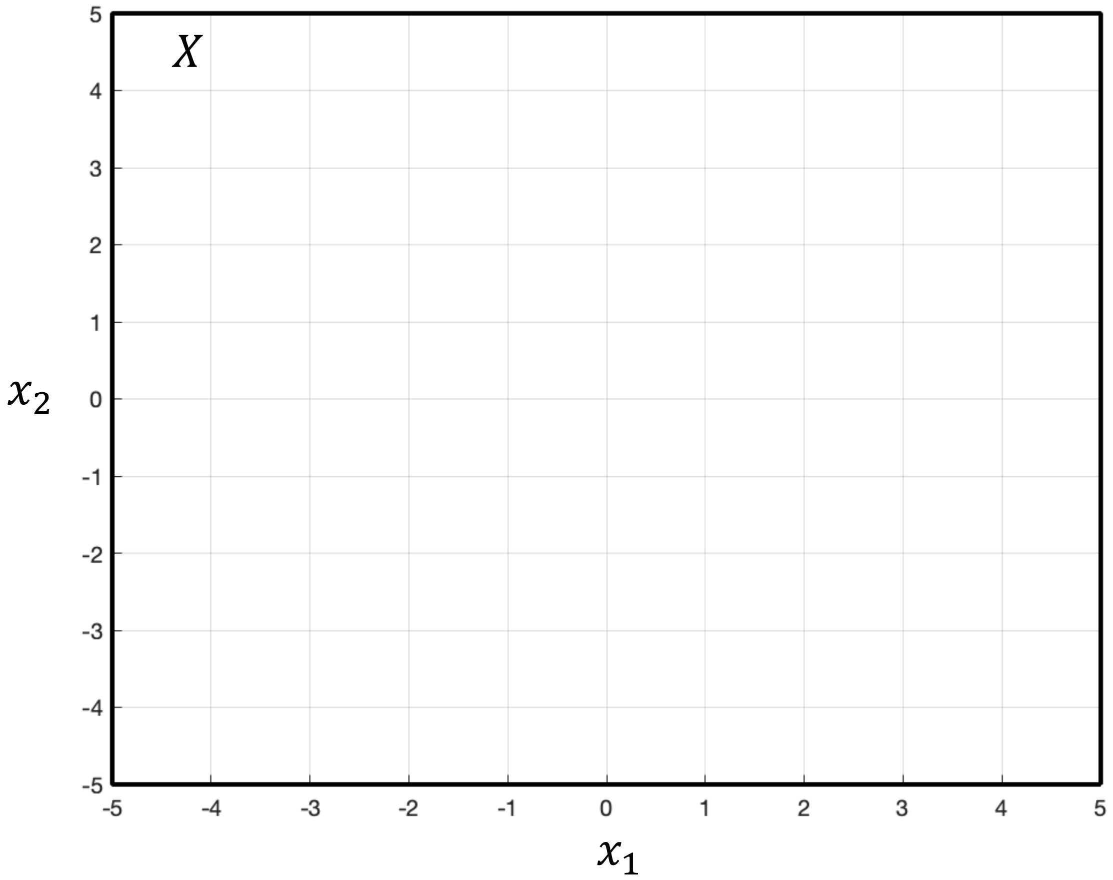
L'algoritmo si conclude quando si verifica che:

$$\mathcal{O}(j+1) = \mathcal{O}(j) = \mathcal{O}(\infty)$$

Il set $\mathcal{O}(\infty)$ si definisce **maximal invariant set**

Esempio

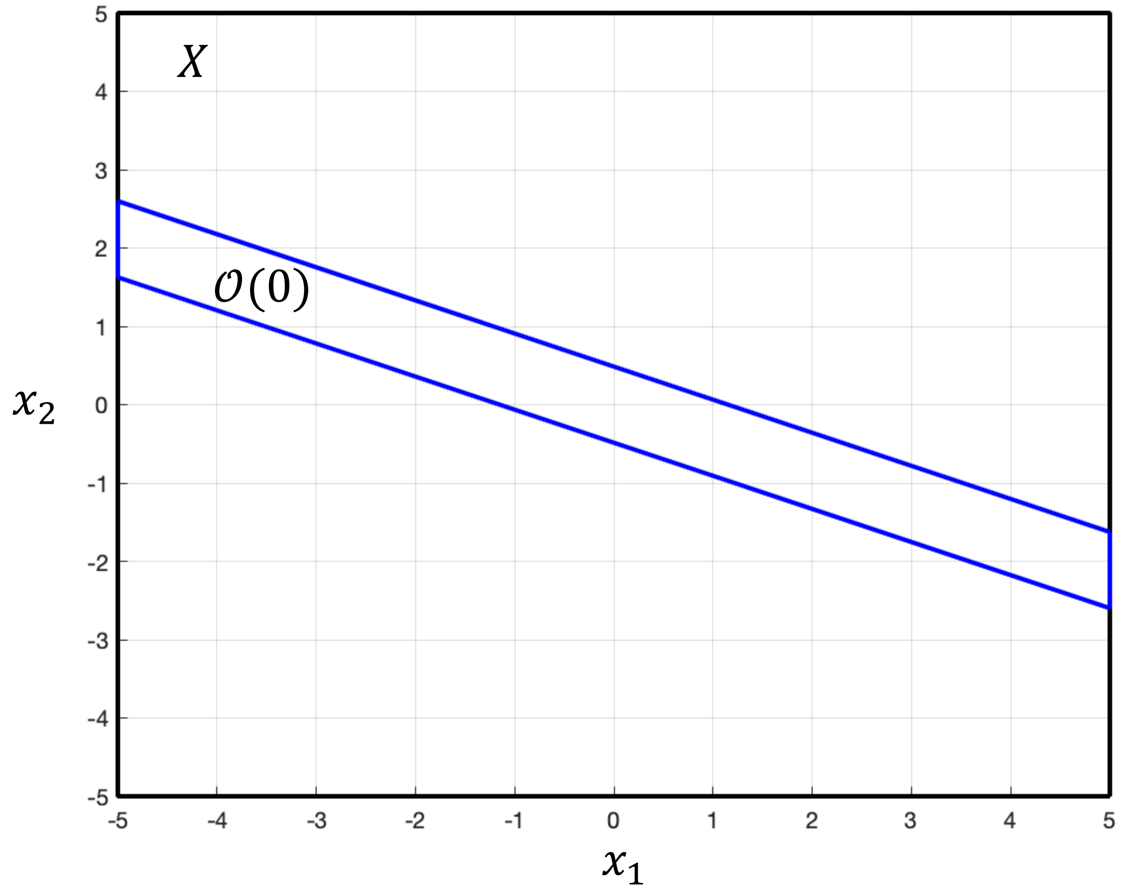
Mettiamo un po' di numeri. Nel nostro caso, il set dei vincoli sullo stato X è:



$$\mathcal{G}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esempio

Aggiungiamo i vincoli sugli ingressi convertiti in vincoli sullo stato



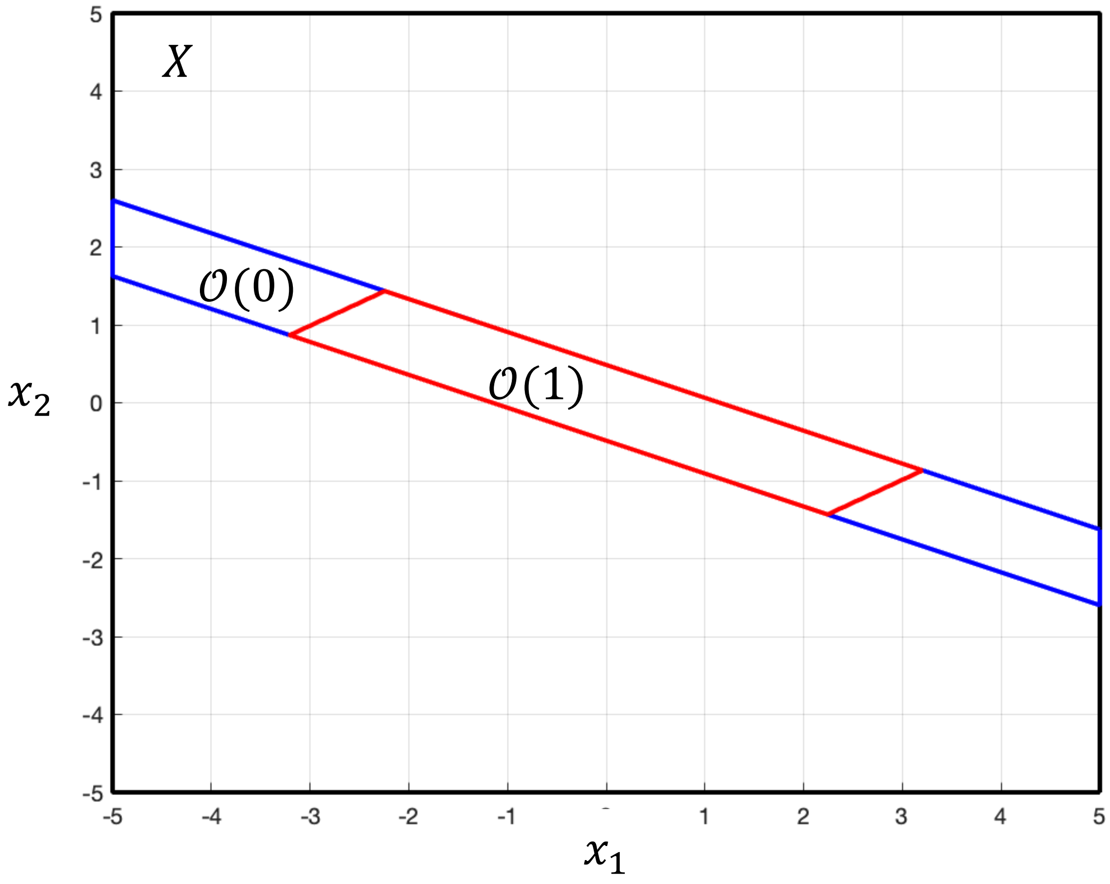
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -0.4345 & -1.0285 \\ 0.4345 & 1.0285 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Questo è il set:

$$\mathcal{O}(0) = \{x: \mathcal{G}x \leq g\}$$

Esempio

Facciamo una prima iterazione. Otteniamo il set



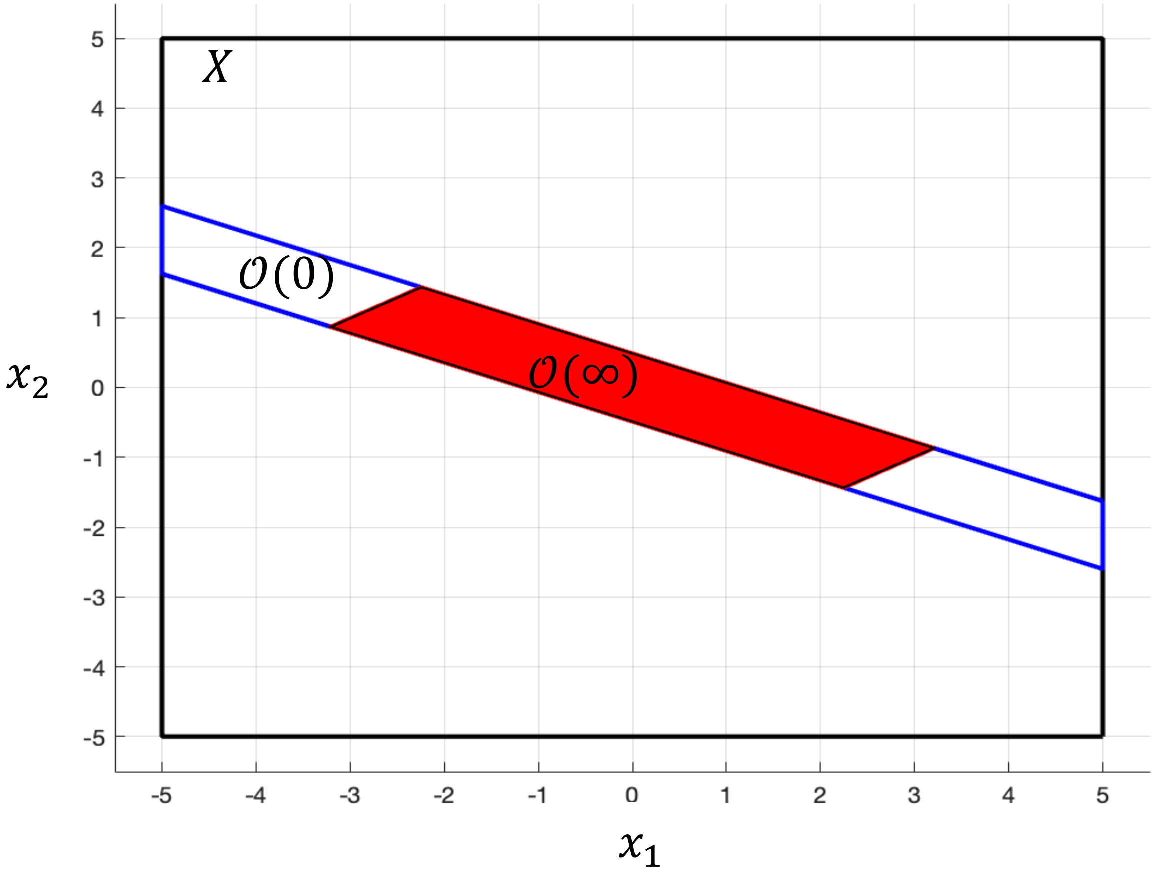
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}$$

Questo è il set:

$$\mathcal{O}(1) = \{x \in \mathcal{O}(0) \colon \mathcal{G}(A - BK)x \leq g\}$$

Esempio

Dopo un'altra iterazione, convergiamo

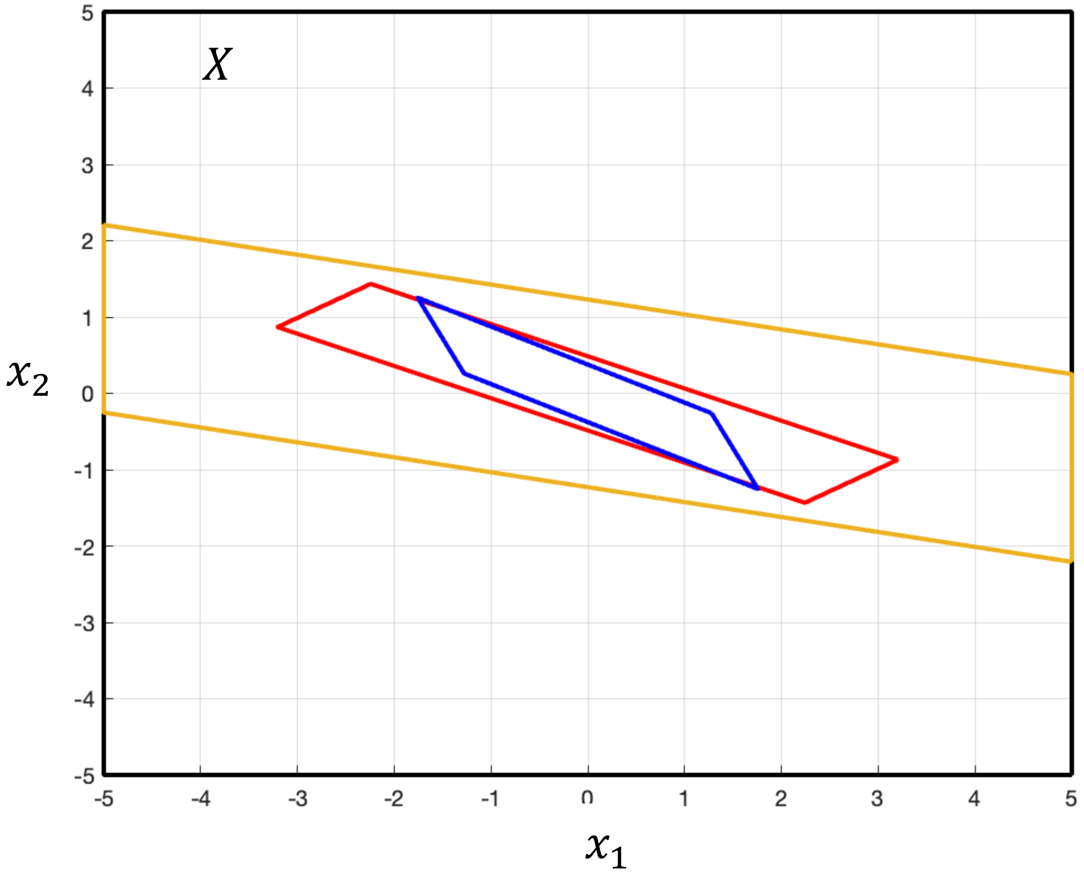


$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}$$

Questo è il maximal invariant set: $\mathcal{O}(\infty)$

Esempio

Notate che la forma e la dimensione del set dipende da K



$$\boxed{\mathcal{O}(\infty): [K, P] = dlqr(A, B, I, 1)}$$

$$K = [0.4345 \quad 1.0285]$$

$$\boxed{\mathcal{O}(\infty): [K, P] = dlqr(A, B, 100I, 1)}$$

$$K = [0.6609 \quad 1.3261]$$

$$\boxed{\mathcal{O}(\infty): [K, P] = dlqr(A, B, I, 100)}$$

$$K = [0.0796 \quad 0.4068]$$

Esempio

Il problema di controllo MPC da risolvere diventa quindi, con N=5:

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{5-1} ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2 + ||x(5)||_P^2$$

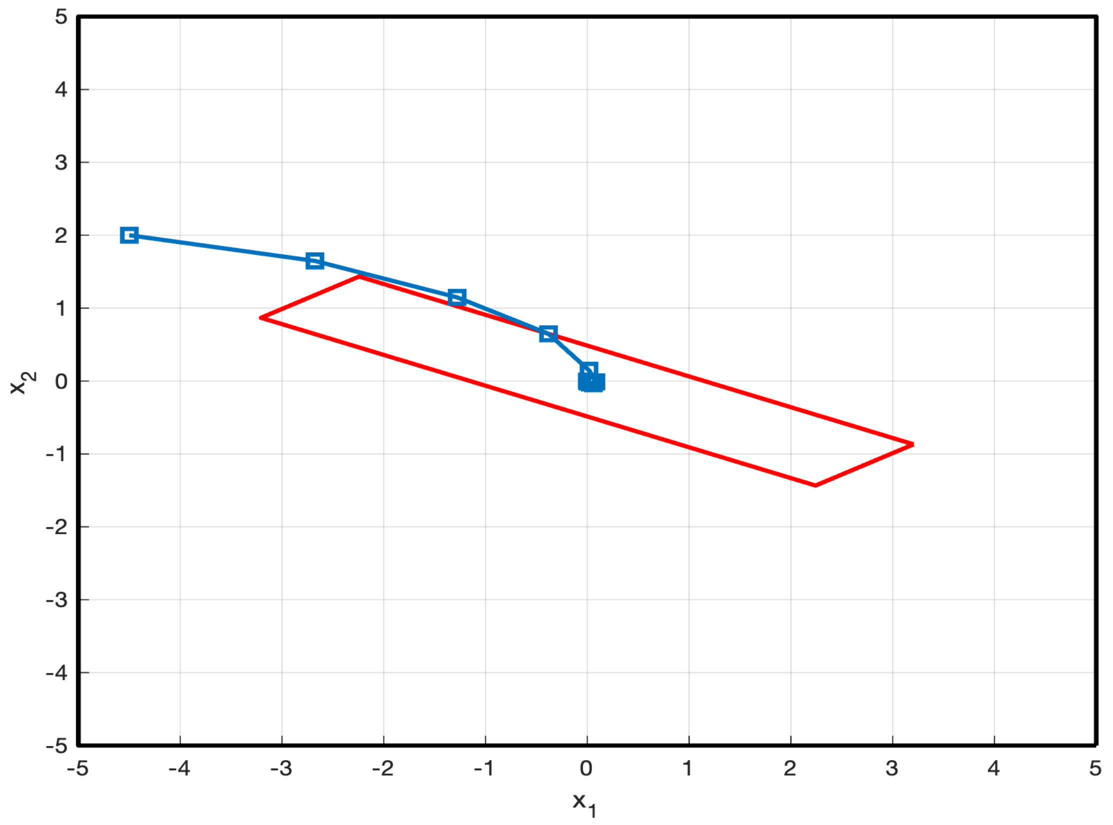
$$s.t. \qquad x(0) = x(k), \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

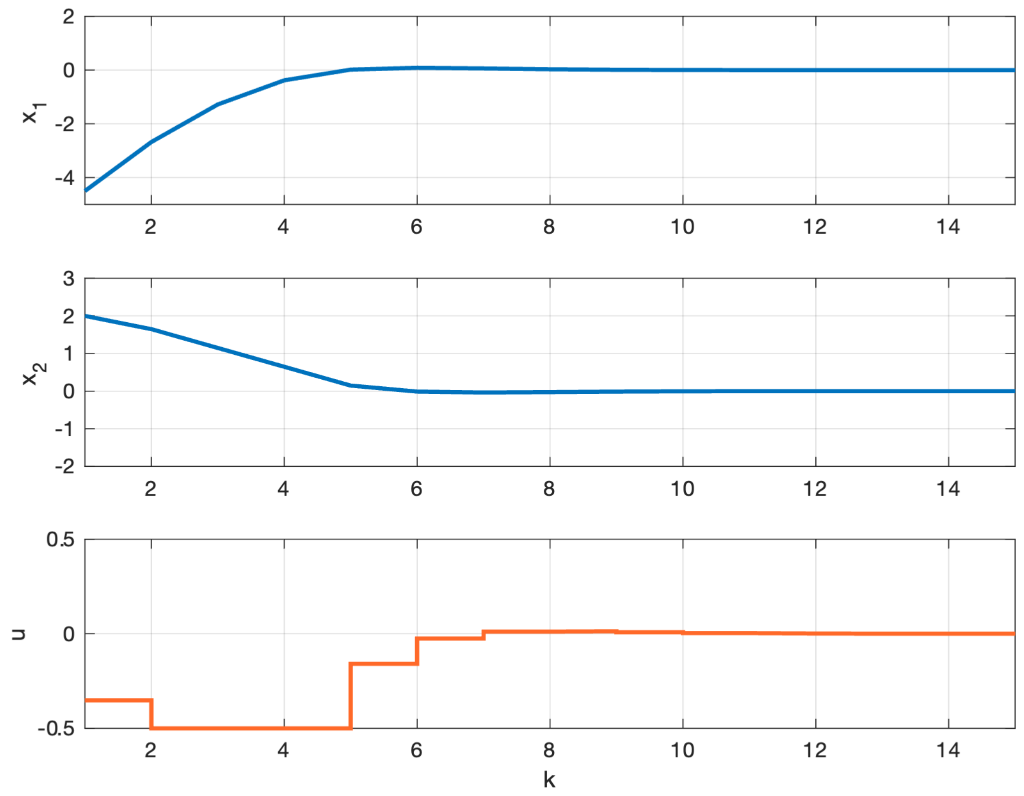
$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(j) \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},} \quad \boxed{\begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} x(5) \leq \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(j) \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.55 \end{bmatrix},}$$

Esempio

Vediamo il risultato di una simulazione di 15 steps con stato iniziale $x = (-4.5; 2)$





Approfondimento: dominio di attrazione

Una delle proprietà fondamentali del regolatore MPC è che se la condizione iniziale da cui viene fatto partire il sistema è fattibile (i.e. il problema di ottimizzazione è risolvibile partendo da lì), allora esisterà sempre una soluzione del problema MPC.

➢Questa proprietà è detta **recursive feasibility.**

Ma come sapere da dove partire? Dobbiamo calcolare quello che si definisce il **dominio di attrazione** del regolatore MPC.

$$\mathbb{X}_N = \left\{x \in \mathcal{X}\colon\ x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, x(N) \in \mathbb{X}_f\right\}$$

Approfondimento: dominio di attrazione

Dobbiamo calcolare quello che si definisce il **dominio di attrazione** del regolatore MPC.

$$\mathbb{X}_N = \{x \in \mathcal{X}\colon\ x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, x(N) \in \mathbb{X}_f\}$$

ovvero l'insieme degli stati del sistema per cui esiste una sequenza fattibile di azioni di controllo tale per cui l'evoluzione del sistema rispetta i vincoli e lo stato N-esimo appartiene al terminal invariant set.

Questo set, nel linguaggio della teoria del controllo, viene definito **come N-steps controllable set to $\mathbb{X}_f$.**

Approfondimento: dominio di attrazione

In generale, non è semplicissimo calcolare il set $\mathbb{X}_N$.

Nel caso di sistemi lineari esistono comunque algoritmi che sfruttando la definizione di **one-step set to $\mathbb{X}_f$** o $\mathcal{Q}(\mathbb{X}_f)$, riescono a calcolare $\mathbb{X}_N$.

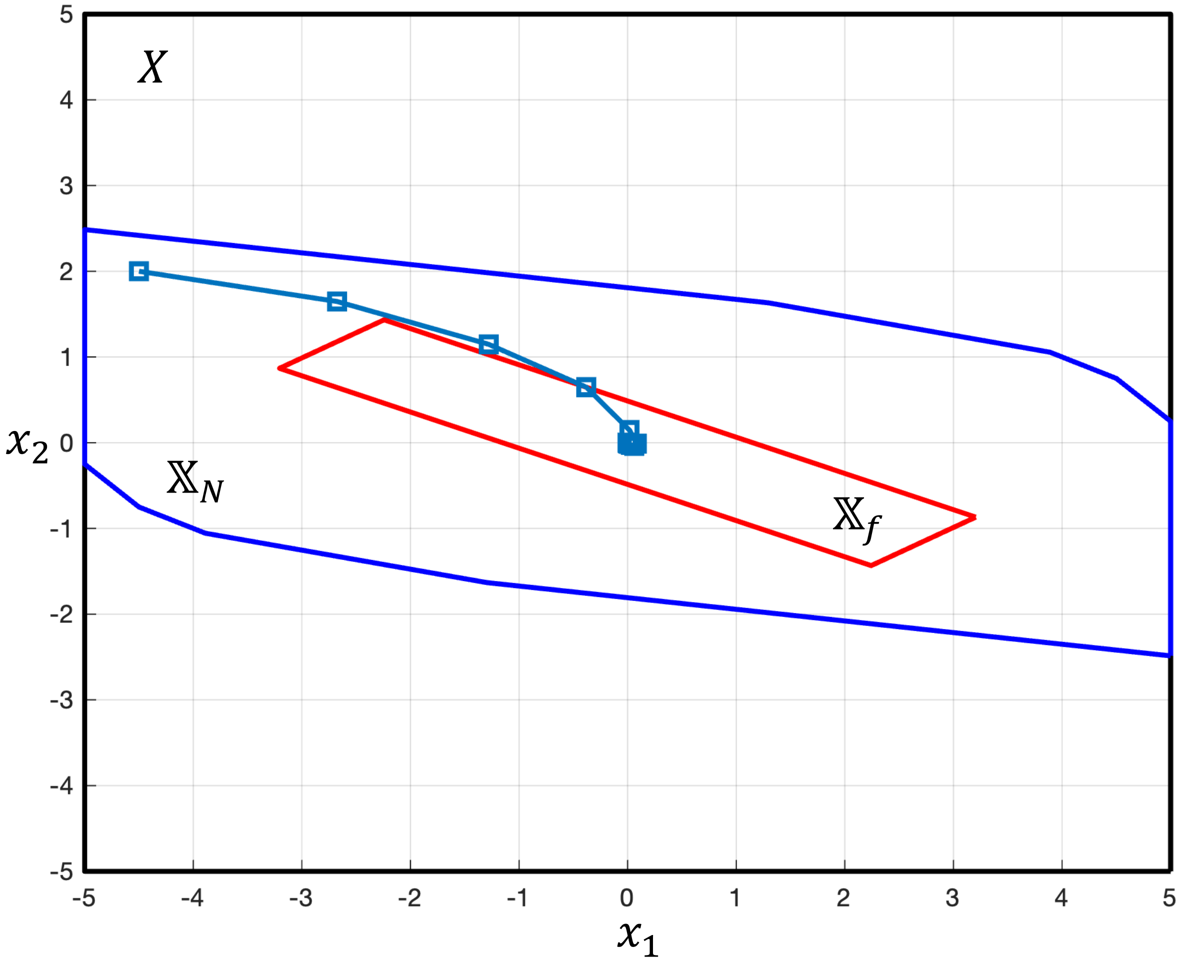
one-step set to $\mathbb{X}_f$ o $\mathcal{Q}(\mathbb{X}_f)$

$$\mathcal{Q}(\mathbb{X}_f) = \left\{x \in \mathcal{X}\colon \exists u \in \mathcal{U}, s.t. (Ax + Bu) \in \mathbb{X}_f\right\}$$

Iterando questa definizione N volte, otteniamo il set $\mathbb{X}_N$.

Esempio

Vediamo il set $\mathbb{X}_N$ nel caso del nostro esempio



Partendo da un qualsiasi punto al di fuori del set azzurro, il problema di ottimizzazione del MPC non ammette soluzione.

La dimensione di $\mathbb{X}_N$ dipende:

1. da N (maggiore N, più grande il set)
2. da quella di $\mathbb{X}_f$ (più grande è $\mathbb{X}_f$, più grande sarà $\mathbb{X}_N$).

Outline

1. Introduzione

2. Linear MPC

3. **Setpoint Tracking MPC**

Setpoint tracking MPC

Per setpoint tracking si intende il caso in cui si vuole regolare il sistema in un punto di equilibrio diverso dall'origine.

Come cambia la progettazione del regolatore MPC?

Sostanzialmente cambiano 2 cose:

1. Il funzionale di costo.
2. Il vincolo terminale.

Manteniamo lo stesso problema

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone accessibile. Sia (A, B) ***raggiungibile***.

Si assuma inoltre l'esistenza di vincoli su stato e controllo $x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$

$$x \in \mathcal{X} \Longrightarrow x_{min} \le x \le x_{max},$$

$$u \in \mathcal{U} \ \Longrightarrow \ u_{min} \le u \le u_{max}$$

Setpoint tracking cost function

Si voglia risolvere il problema di regolazione dello stato del sistema ad un generico equilibrio x_s

Per farlo, la cifra di merito quadratica, diventa

$$J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j) - x_s||_Q^2 + ||u(j) - u_s||_R^2 + ||x(N) - x_s\,||_P^2$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} (x(j) - x_s)'Q(x(j) - x_s) + (u(j) - u_s)'R(u(j) - u_s) + (x(N) - x_s)'P(x(N) - x_s)$$

Con $x_s = Ax_s + Bu_s$. Si noti che il caso di regolazione all'origine è un caso particolare di setpoint tracking, in cui $(x_s, u_s) = (0,0)$.

Enunciato del problema

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t.\;\; x(0) = x(k)$$ *Condizione iniziale = Feedback di stato*

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) \in \mathbb{X}_f(x_s)$$

Dove $\mathbb{X}_f(x_s)$ sta ad indicare che l'invariante terminale è calcolato rispetto al setpoint x_s

Vediamo un esempio.

Esempio

Si consideri il sistema precedente: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vincoli sullo stato e sugli ingressi: $x \in \mathcal{X}$ dato da $\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, -0.5 \leq u \leq 0.5$

Costruiamo un MPC per regolare il sistema al setpoint $x_s = (4,0)$ e $u_s = 0$.

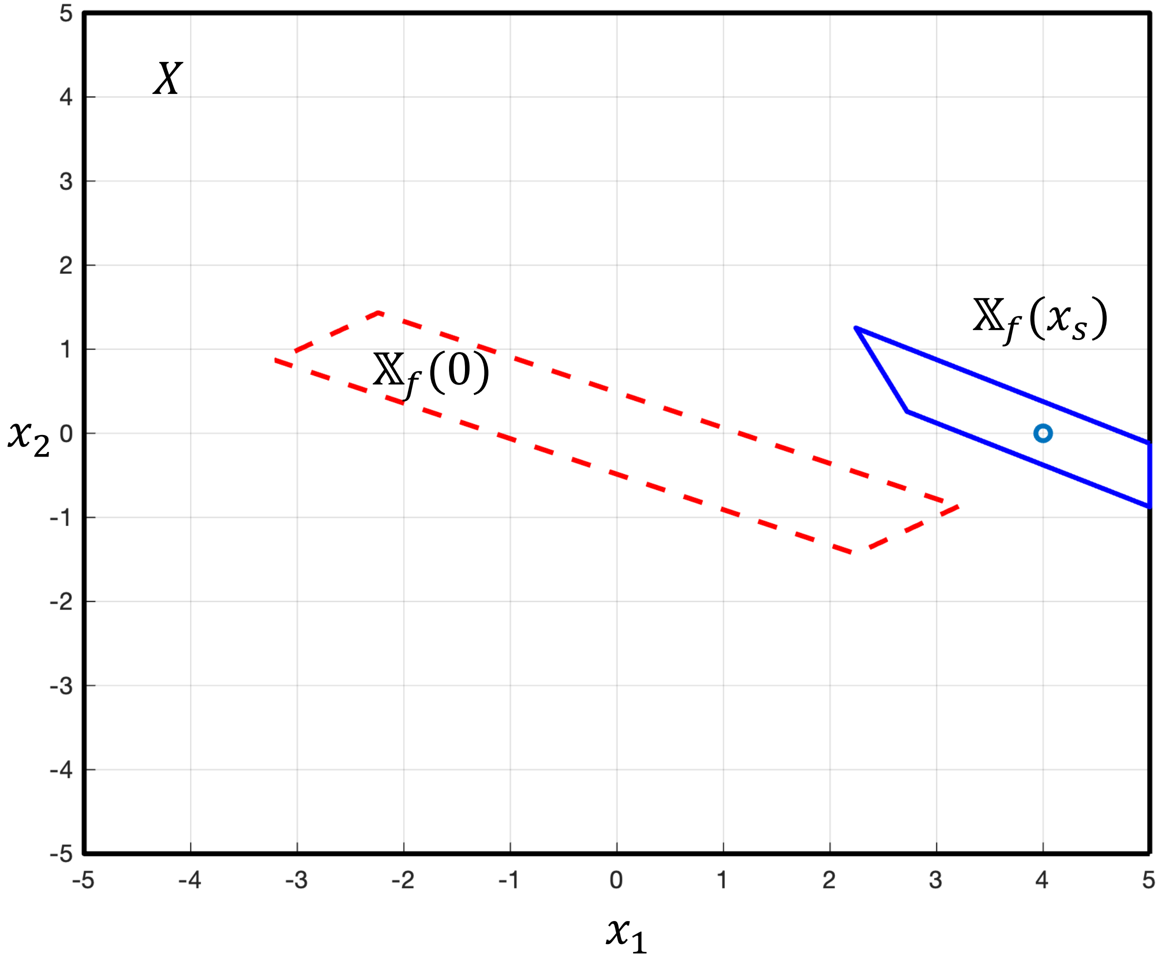
Manteniamo il setup precedente: $Q = I,\ R = 1, N = 5$. Con questa scelta di matrici avevamo ottenuto

$$K = \begin{bmatrix} 0.4345 & 1.0285 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2.3671 & 1.1180 \\ 1.1180 & 2.5875 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[K, P] = dlqr(A, B, Q, R)}$$

Esempio

Calcoliamo il terminal invariant set $\mathbb{X}_f(x_s)$

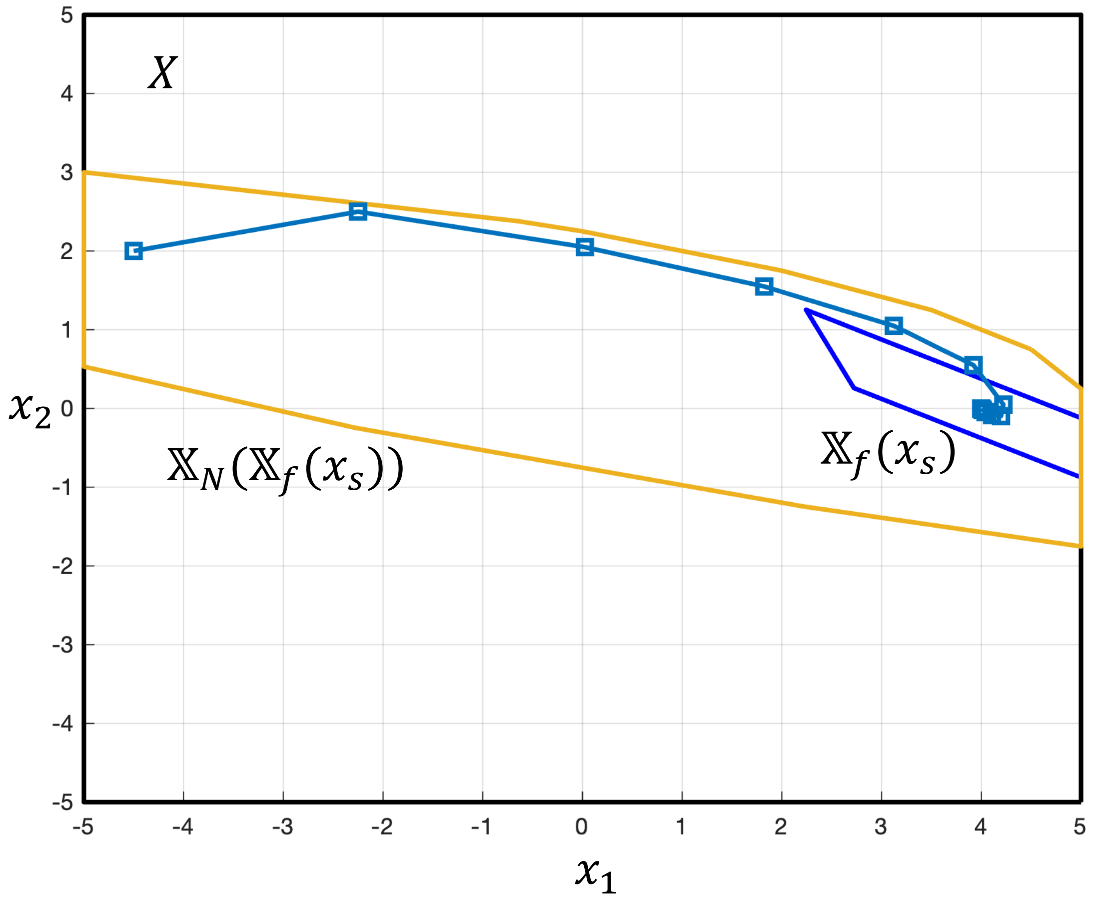


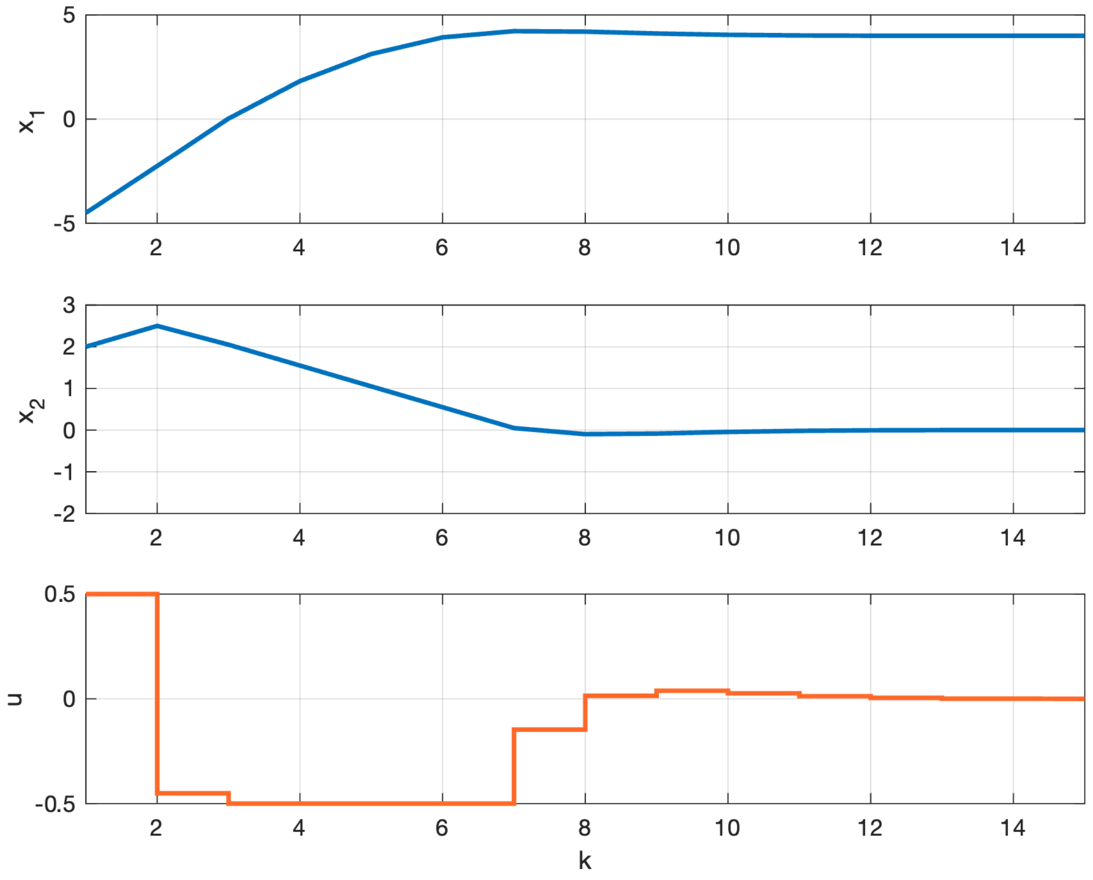
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.4460 & -0.8950 \\ 0.4460 & 0.8950 \\ -0.9004 & -0.4352 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 5 \\ -1.4467 \\ 2.1216 \\ -2.5638 \end{bmatrix}$$

Questo è il maximal invariant set: $\mathbb{X}_f(x_s)$

Esempio

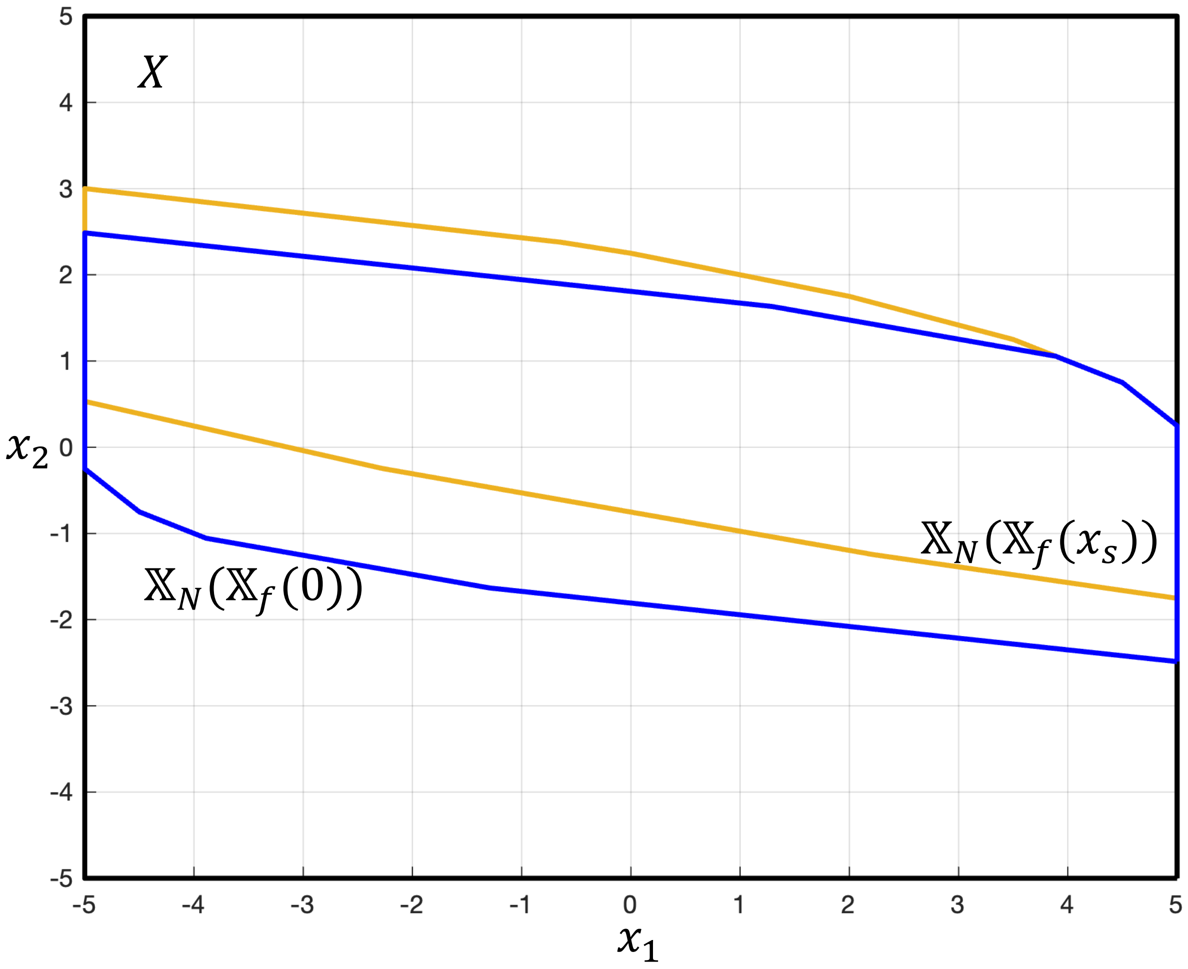
Vediamo il risultato di una simulazione di 15 steps con stato iniziale $x = (-4.5; 2)$





Esempio

Vediamo il confronto tra i set $\mathbb{X}_N$ nei due casi



Come detto precedentemente, la forma e la dimensione di $\mathbb{X}_N$ dipende:

1. da N (maggiore N, più grande il set)
2. da quella di $\mathbb{X}_f$ (più grande è $\mathbb{X}_f$, più grande sarà $\mathbb{X}_N$).

In questo caso, a parità di N, la diversa forma e dimensione di $\mathbb{X}_f$ determinano una diversa forma del dominio di attrazione.

Outline

1. Introduzione
2. Linear MPC
3. Setpoint Tracking MPC
4. **Stato non accessibile**

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BERGAMO

Dipartimento
di Ingegneria Gestionale,
dell'Informazione e della Produzione