UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

LX: Stabilità del Model Predictive Control

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**

    1.1 Equilibrio

    1.2 Stabilità

    1.3 Teorema di Lyapunov

2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**

    1.1 Controllabilità

    1.2 Osservabilità

    1.3 Poli e zeri invarianti

3. **Analisi dei sistemi multivariabili**

    3.1 Anello aperto

    3.2 Anello chiuso

4. **Controllo ottimo**

    7.1 Controllo Lineare Quadratico LQR

    7.2 Proprietà

    7.3 Esempi

5. **Controllo predittivo MPC**

    8.1 Formulazione

    8.2 Proprietà

    8.3 Stabilità

6. **Esempi di applicazioni**

    9.1 Pancreas Artificiale

    9.2

Outline

1. Introduzione

2. Prova fondamentale di stabilità

3. Formulazione alternativa

Outline

1. **Introduzione**
2. Prova fondamentale di stabilità
3. Formulazione alternativa

Introduzione

Il **Model Predictive Control (MPC)** è una strategia di controllo in cui il movimento ottimo si ottiene dalla soluzione ad ogni istante di tempo di un problema di ottimizzazione in anello aperto.

Tale ottimizzazione porta ad ottenere una sequenza di azioni di controllo ottime (in anello aperto) ma solo il **primo elemento** della sequenza è applicato al sistema che si desidera controllare.

Il principio del **Receeding Horizon** garantisce la chiusura del loop di controllo.

Receeding Horizon

Goal: trovare la miglior sequenza di N azioni di controllo all'istante k

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{N-1} ||x_j - r(k)||_Q^2 + ||u_j - u_r(j)||_R^2$$

$s.t.$

$$x(j+1) = f(x(j), u(j))$$
$$y(j) = g(x(j))$$

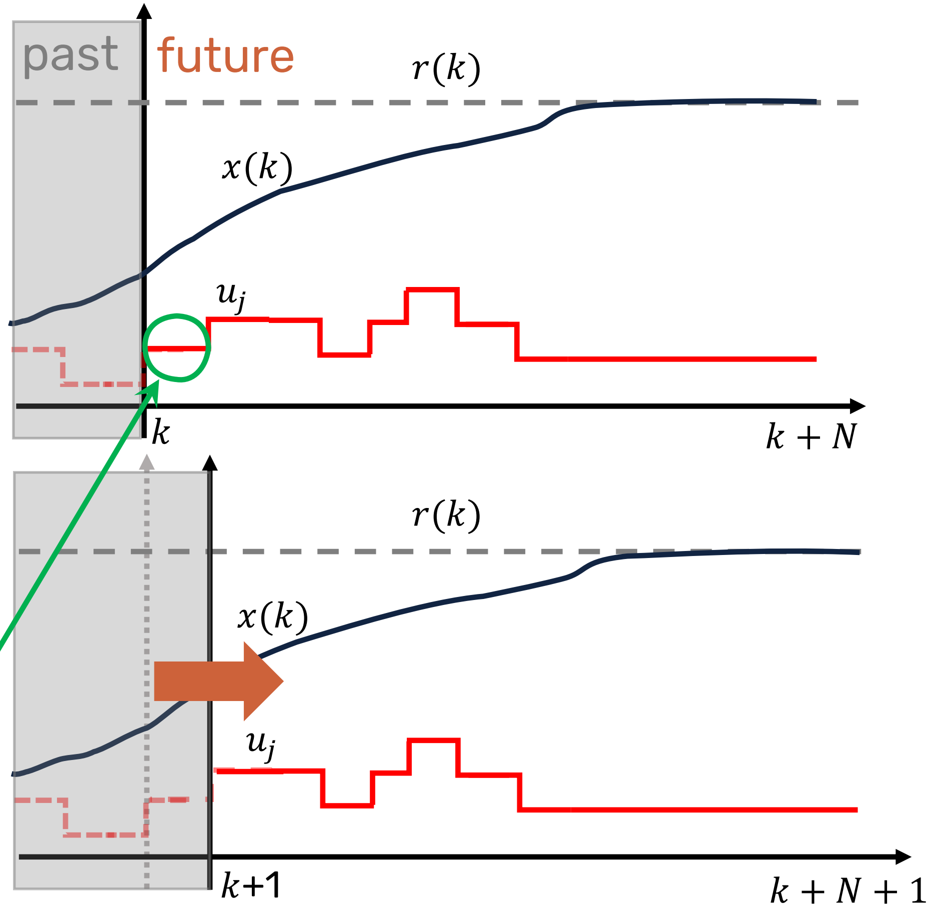
modello

$$u_{min} \le u_j \le u_{max}$$
$$x_{min} \le x_j \le x_{max}$$

vincoli

$$x_0 = x(k)$$

Feedback di stato



Ad ogni istante di tempo k:

1. Ottieni la nuova misura dello stato $x(k)$
2. Risolvi il proble di ottimizzazione e trova $\boldsymbol{u} = \{u(j), \dots, u(N-1)\}$
3. Applica solo il primo elemeno della sequeza, $u(k) = u_0^*$

Introduzione

Il **Model Predictive Control (MPC)** differisce da altre tecniche di controllo tradizionali, in cui la legge di controllo è calcolata esplicitamente offline.

Abbiamo tuttavia visto come l'MPC permetta di ottenere una legge di controllo implicita: seppur risultato di un problema di ottimizzazione in open-loop da risolvere online, il controllo ottimo da applicare al sistema è una funzione dello stato misurato:

$$\boldsymbol{u}^{MPC}(k) = \kappa(x(k))$$

A differenza del controllo ottimo, che calcola l'intera sequenza ottima in closed-loop, MPC calcola solo il primo elemento da applicare, rendendo tuttavia possibile la soluzione del problema di ottimizzazione mediante algoritmi specifici.

Introduzione

Come per ogni strategia di controllo, si desidera che il sistema in anello chiuso con MPC sia **asintoticamente stabile.**

L'obiettivo di questa lezione è vedere come il regolatore MPC deve essere progettato in modo da garantire questa proprietà.

Per dimostrare asintotica stabilità useremo il già visto **Teorema di Lyapunov.**

Vedremo quali **ingredienti** devono essere usati in modo da poter utilizzare tale teorema.

Outline

1. Introduzione
2. **Prova fondamentale di stabilità**
3. Formulazione alternativa

Teorema di Lyapunov

Si consideri il sistema non lineare

$$x(k) = f(x(k))$$

Con $f(x(k))$ continua. Sia $\bar{x}$ un equilibrio del sistema.

Teorema

Se esiste una funzione continua $V(x)$, definita positiva in $\bar{x}$, e tale per cui la sua variazione rispetto alla traiettoria del sistema $\Delta V(x)$ sia semidefinita negativa in $\bar{x}$, ovvero

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$$

allora $\bar{x}$ è un punto d'equilibrio **stabile** del sistema.

Inoltre se $\Delta V(x)$ è definita negativa in $\bar{x}$, ovvero $\Delta V(x) < 0$, allora $\bar{x}$ è un punto d'equilibrio **asintoticamente stabile** del sistema.

Enunciato del problema

Caso generale: si consideri il sistema (lineare o non lineare) a tempo discreto

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$
$$y(k) = g(x(k), u(k))$$

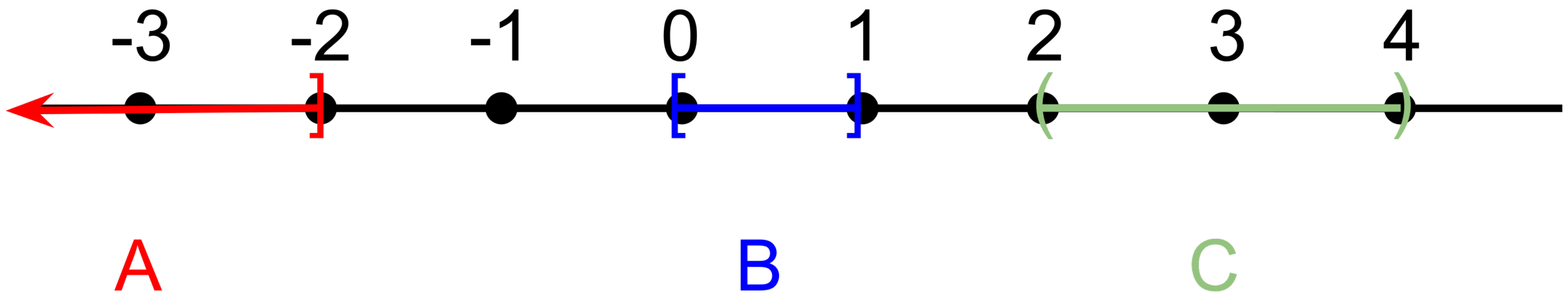
In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone accessibile. $f(x(k), u(k))$ è continua, derivabile e tale che $f(0,0) = 0$.

Si assuma inoltre l'esistenza di vincoli su stato e controllo $x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$, con $\mathcal{X}$ e $\mathcal{U}$ chiusi e limitati, contenenti l'origine nel loro interiore.

Nota: un insieme chiuso e limitato si dice compatto.

Nota: insieme compatto

Un insieme chiuso e limitato si dice compatto.



- $A = (-\infty, -2]$ non è compatto perché **non è limitato** (a sinistra è infinito)
- $C = (2,4)$ non è compatto perché **non è chiuso** (non contiene la frontiera)
- $B = [0,1]$ è compatto perché è **chiuso e limitato.**

Enunciato del problema

Si voglia risolvere, senza perdità di generalità il problema di regolazione dello stato del sistema all'origine, ovvero $\bar{x} = 0$.

Per farlo, si assuma una cifra di merito del tipo

$$J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell\big(x(j), u(j)\big) + V_f(x(N))$$

Con $\ell(x, u)$e $V_f(x)$ funzioni definite positive e tali che $\ell(0,0) = 0$ e $V_f(0) = 0$. Una scelta ragionevole è

$$\ell\big(x(j), u(j)\big) \; = ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2$$

Con $Q = Q' \geq 0, R = R' > 0$. Vedremo poi come scegliere $V_f(x)$.

Enunciato del problema

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t.\ \ x(0) = x(k)$$ *Condizione iniziale = Feedback di stato*

$$x(j+1) = f(x(j), u(j))$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

Idea 1 per la dimostrazione: se MPC ammette una funzione di Lyapunov, allora il sistema in closed-loop con MPC sará asintoticamente stabile.

Idea 2 per la dimostrazione: dimostrare che il costo ottimo di MPC $J^0(x(k)) = J(x(k), \boldsymbol{u}^0(x))$ è una funzione di Lyapunov.

Analisi

Innanzitutto ricordiamo le proprietà che deve possedere una funzione di Lyapunov $V(x)$:

1. Deve essere definita positiva, ovvero
   1. $V(x) > 0 \; \forall x \neq 0.$
   2. $V(0) = 0$

2. La sua variazione rispetto alla traiettoria del sistema $\Delta V(x)$ deve essere definita negativa, ovvero
$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) < 0$$

La prima proprietà è garantita della scelta del costo: $\ell(x, u)$ e $V_f(x)$ funzioni definite positive e tali che $\ell(0,0) = 0$ e $V_f(0) = 0$.

Analisi

Dimostriamo la seconda proprietà. Per semplicità ignoriamo i vincoli sugli stati.

Supponiamo quindi che al tempo k abbiamo risolto il problema di ottimizzazione ottenendo la sequenza ottima

$$\boldsymbol{u}^0(x) = \{u^0(0; x), u^0(1; x) \dots, u^0(N-1; x)\}$$

Che produce la sequenza di predizioni ottime, in base all'equazione del modello del sistema $x(j+1) = f(x(j), u(j))$

$$\boldsymbol{x}^0(x) = \{x^0(0; x), x^0(1; x) \dots, x^0(N-1; x), x^0(N; x)\}$$

In cui $x^0(0; x) = x(k)$, $x^0(1; x) = f(x(k), \kappa(x(k)))$, con $\kappa\big(x(k)\big) = u^0(0; x)$, e completando le iterazioni $x^0(N; x) = f(x^0(N-1; x), u^0(N-1; x))$.

Analisi

Queste due sequenze ottime producono il costo ottimo al tempo k

$$J^0(x(k)) = J(x(k), \boldsymbol{u}^0(x)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell\big(x^0(j;x), u^0(j;x)\big) + V_f(x^0(N;x))$$

Ricordiamoci che vogliamo dimostrare che $\Delta J(x) = J^0(f(x,u)) - J^0(x) \leq 0.$

Per poterlo dimostrare abbiamo bisogno del costo ottimo all'istante di tempo successivo, ovvero al tempo $k+1$

Ma all'istante di tempo k (dove siamo) ancora non conosciamo il risultato dell'ottimizzazione al tempo $k+1$

Come facciamo?

Analisi

L'idea è questa: visto che non conosco

$$\boldsymbol{u}^0(x^+) = \{u^0(0; x^+), u^0(1; x^+) \dots, u^0(N-1; x^+)\}$$

$\boxed{x^+ = x(k+1)}$

Scelgo una **soluzione possibile (ma non ottima**) del problema di ottimizzazione al tempo $k+1$, definiamola $\tilde{\boldsymbol{u}}$, e calcolo il costo generato da questa sequenza per confrontarlo con il costo ottimo al tempo k.

Tenendo ben presente che, essendo $\tilde{\boldsymbol{u}}$ non ottima, si verifica che

$$J^0(x^+) = J(x^+, \boldsymbol{u}^0(x^+)) \leq J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}})$$

Trucco: prendiamo $\tilde{\boldsymbol{u}} = \{u^0(1; x), u^0(2; x) \dots, u^0(N-1; x), v\}$, con v da definire.

Analisi

La sequenza $\tilde{\boldsymbol{u}} = \{u^0(1;x), u^0(2;x) \dots, u^0(N-1;x), v\}$ è fattibile (rispetta i vincoli sugli ingressi) se $v \in U$ e produce la sequenza di predizioni:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \{x^0(1;x), x^0(2;x) \dots, x^0(N;x), f(x^0(N;x), v)\}$$

In cui $x^0(1;x) = f\big(x, \kappa(x)\big) = x^+$.

Dato che stiamo ingorando i vincoli, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ è una soluzione fattibile (rispetta il problema MPC).

Usiamo queste sequenze fattibili per calcolare $J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}})$

Analisi

Si noti che $\boldsymbol{x}^0(x)$ e $\tilde{\boldsymbol{x}}$, e $\boldsymbol{u}^0(x)$ e $\tilde{\boldsymbol{u}}$ sono esattamente uguali tranne che nei rispettivi primo e ultimo elemento

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \{x^0(1;x), x^0(2;x) \dots, x^0(N;x), f(x^0(N;x), v)\}$$

$$\boldsymbol{x}^0(x) = \{x^0(0;x), x^0(1;x) \dots, x^0(N-1;x), x^0(N;x)\}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \{u^0(1;x), u^0(2;x) \dots, u^0(N-1;x), \boldsymbol{v}\}$$

$$\boldsymbol{u}^0(x) = \{u^0(0;x), u^0(1;x) \dots, u^0(N-1;x)\}$$

I rispettivi costi saranno quindi:

$$J^0\big(x(k)\big) = \ell\big(x^0(0;x), u^0(0;x)\big) + \sum_{j=1}^{N-1} \ell\big(x^0(j;x), u^0(j;x)\big) + V_f(x^0(N;x))$$

$$J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}}) = \sum_{j=1}^{N-1} \ell\big(x^0(j;x), u^0(j;x)\big) + \ell(x^0(N;x), \boldsymbol{v}) + V_f(f(x^0(N;x), v))$$

Analisi

La differenza tra questi due costi sarà quindi:

$$J(x^+,\tilde{\boldsymbol{u}}) - J^0\left(x(k)\right) = \ell(x^0(N;x),\boldsymbol{v}) + V_f(f(x^0(N;x),v)) - \ell\left(x^0(0;x),u^0(0;x)\right) - V_f(x^0(N;x))$$

Tenendo ben presente che, essendo $\tilde{\boldsymbol{u}}$ non ottima, si verifica che $J^0(x^+) \leq J(x^+,\tilde{\boldsymbol{u}})$, da cui

$$\begin{aligned}
\Delta J(x) &= J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right) \\
&\leq J(x^+,\tilde{\boldsymbol{u}}) - J^0\left(x(k)\right) \\
&\leq \ell(x^0(N;x),\boldsymbol{v}) + V_f(f(x^0(N;x),v)) - \ell\left(x^0(0;x),u^0(0;x)\right) - V_f(x^0(N;x))
\end{aligned}$$

Analisi

$\Delta J(x) = J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right)$ sarà negativa se esiste $v \in U$ tale che:

$$\ell\left(x^0(N;x), v\right) + V_f(f(x^0(N;x), v)) - V_f(x^0(N;x)) \leq 0$$

Una funzione continua e definita positiva tale per cui

$$V_f(f(x,v)) - V_f(x) \leq -\ell(x,v)$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ è una **funzione di Lyapunov di controllo (CLF)** globale.

- Se progettiamo il costo MPC in maniera tale che $V_f(x)$ sia una CLF, la decrescita del costo da noi desiderata sarà garantita.
- Se $V_f(x)$ è una CLF globale , allora il sistema in closed-loop con MPC è asint. stabile.

Analisi

L'incremento del costo $\Delta J(x)$ è dato da

$$\Delta J(x) = J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right)$$
$$\leq \ell(x^0(N;x), v) + V_f(f(x^0(N;x), v)) - \ell\left(x^0(0;x), u^0(0;x)\right) - V_f(x^0(N;x))$$

Se progettiamo il costo MPC in maniera tale che $V_f(x)$ sia una CLF, dalla slide precedente sappiamo che la parte in rosso è tale che

$$V_f(f(x^0(N;x), v)) - V_f(x^0(N;x)) \leq -\ell(x^0(N;x), v)$$

Possiamo quindi concludere la prova:

$$\Delta J(x) = J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right) \leq -\ell\left(x^0(0;x), u^0(0;x)\right)$$

QED

Caso vincolato

- Nel caso di avere vincoli sullo stato, una CLF globale è quasi impossibile da trovare.
- Per questo motivo dobbiamo essere meno ambiziosi e cercare una **CLF locale**, ovvero una CLF definita solo per $x \in \mathbb{X}_f \subseteq \mathcal{X}$
- Visto che $V_f(x)$ è valutata sullo stato terminale, dobbiamo di conseguenza forzare $x(N) \in \mathbb{X}_f$.

Ipotesi base di stabilità: esiste una legge di controllo locale $\kappa_f(x) \in U$ tale che:

1. $\forall x \in \mathbb{X}_f$, allora $f(x, \kappa_f(x)) \in \mathbb{X}_f$ (diciamo che $\mathbb{X}_f$ è un control invariant set).
2. $V_f(f(x, \kappa_f(x))) - V_f(x) \leq -\ell\left(x, \kappa_f(x)\right)$ (CLF locale)

Caso vincolato

Il problema di ottimizzazione nel caso vincolato diventa quindi:

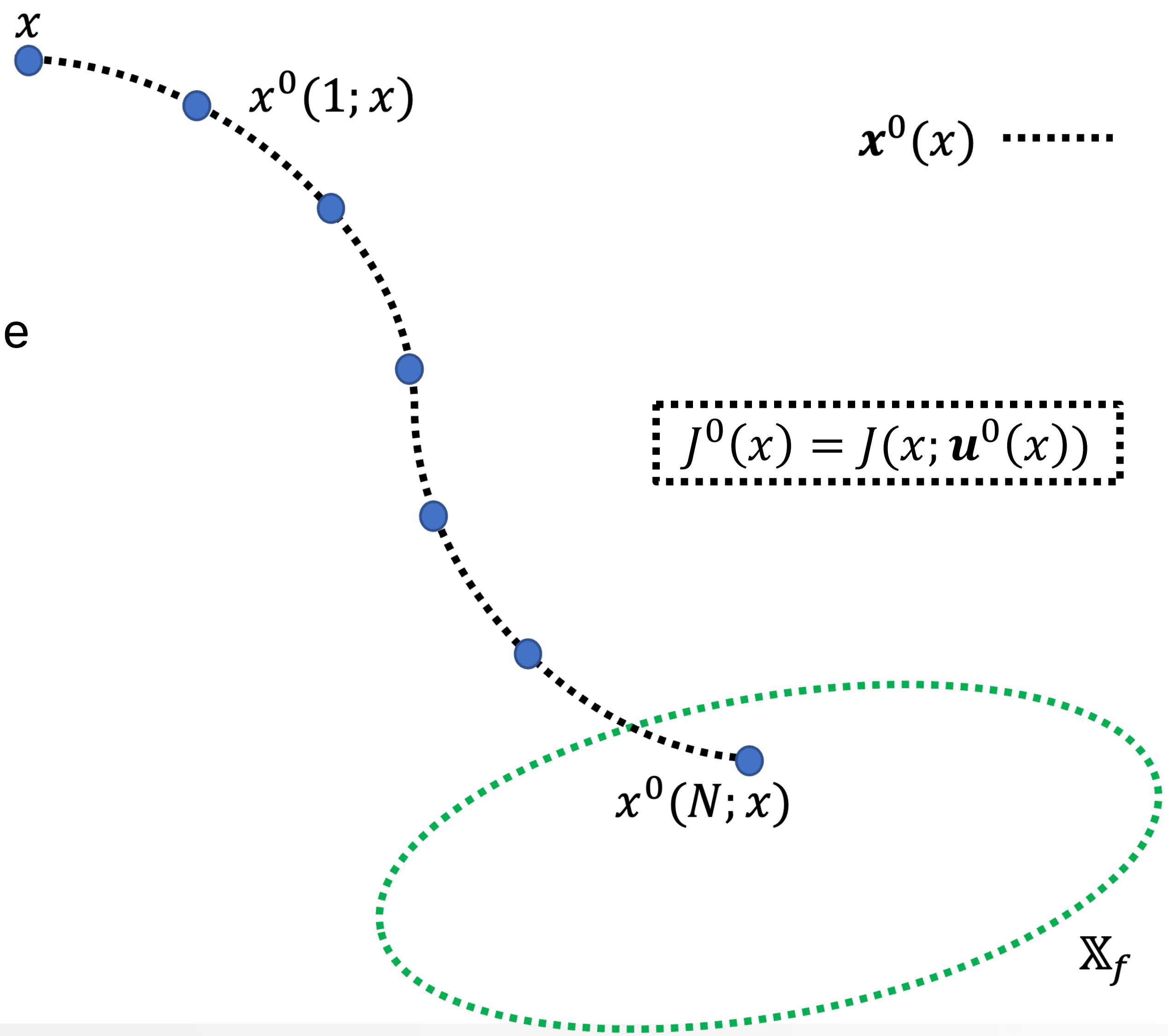
$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell\big(x(j), u(j)\big) + V_f(x(N))$$

$$\begin{aligned} s.t.\ \ & x(0) = x(k) \\ & x(j+1) = f(x(j), u(j)) \\ & x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U} \\ & x(N) \in \mathbb{X}_f \end{aligned}$$

L'idea della prova di stabilità è esattamente la stessa del caso non vicolato, ovviamente assumendo l'ipotesi base di stabilità.

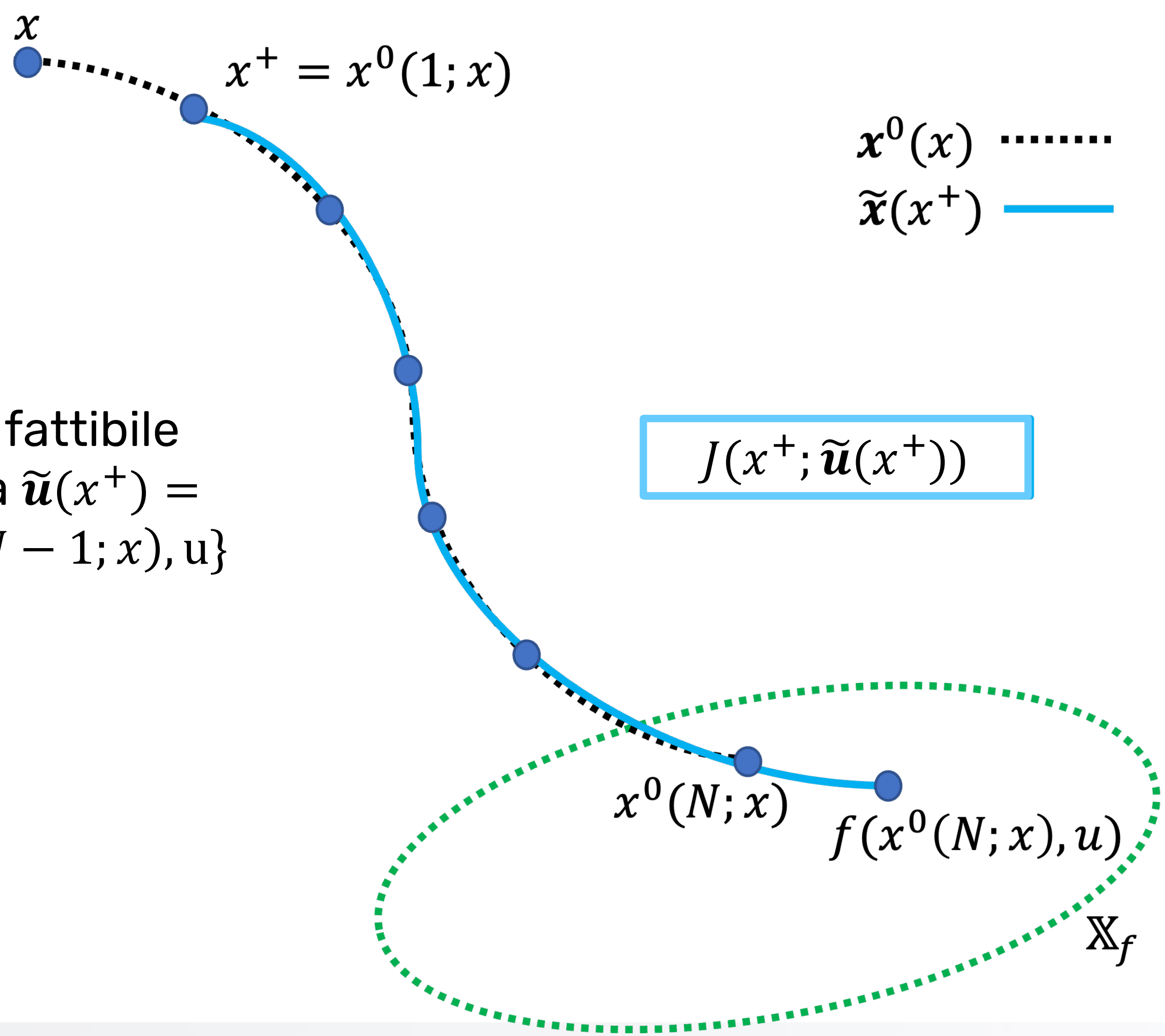
Prova grafica

1. Sia $\boldsymbol{u}^0(x)$ la soluzione ottima al tempo k



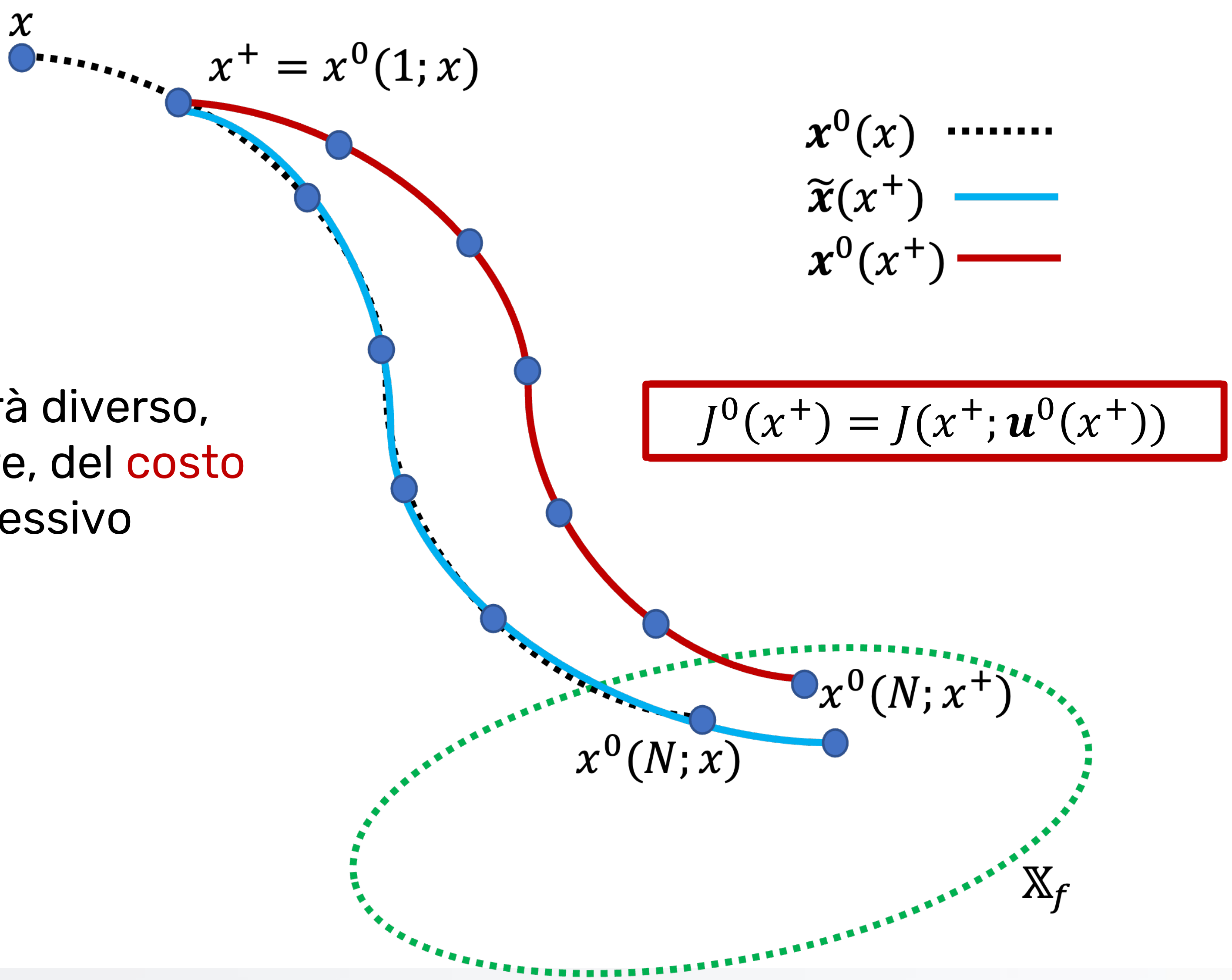
Prova grafica

2. Consideriamo il costo fattibile generato dalla sequenza $\tilde{\boldsymbol{u}}(x^+) = \{u^0(1;x), u^0(2;x) \ldots, u^0(N-1;x), \mathrm{u}\}$

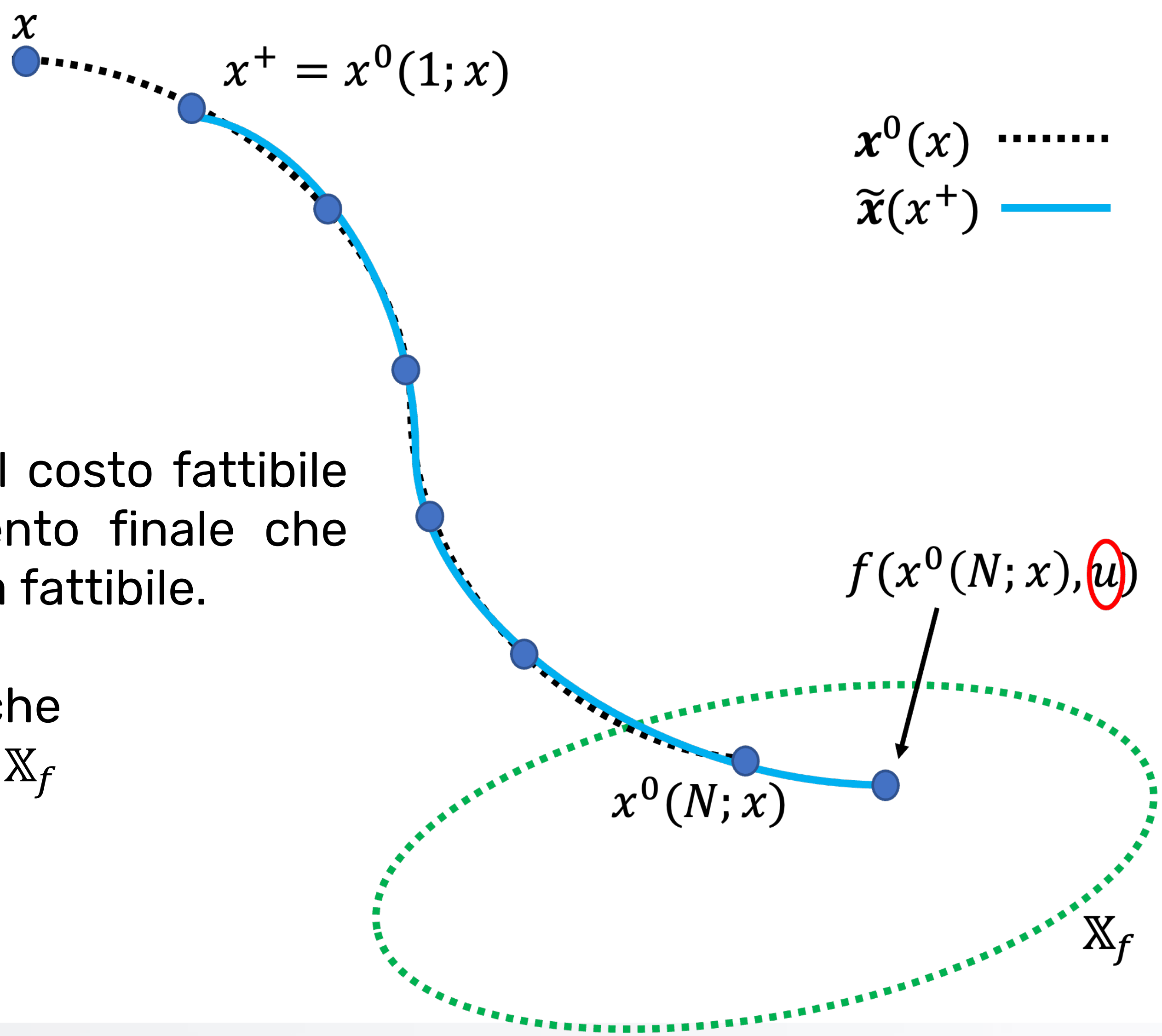


Prova grafica

3. Il costo fattibile sarà diverso, sicuramente maggiore, del costo ottimo al tempo successivo



Prova grafica

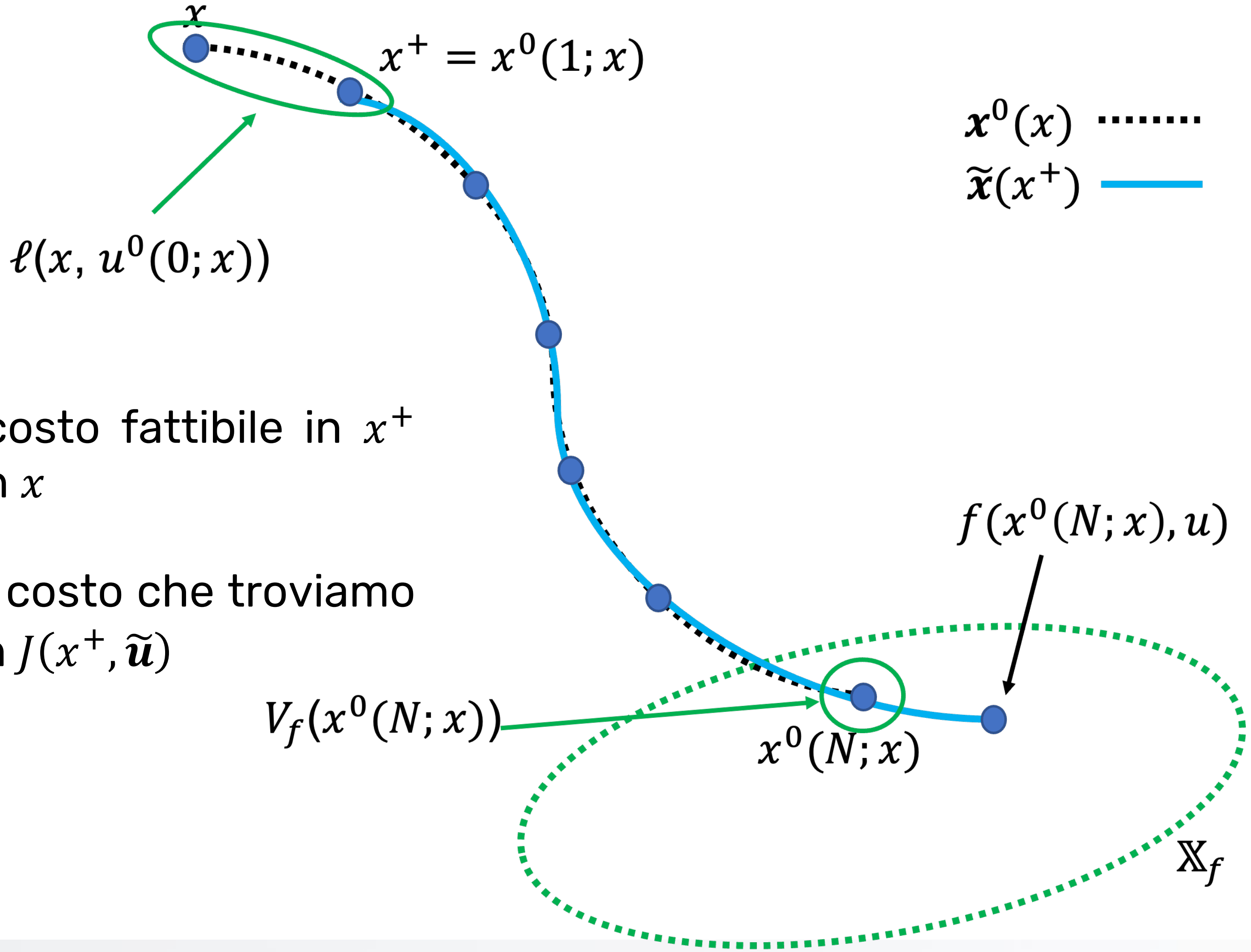


4. Lo stato terminale del costo fattibile è generato dal movimento finale che scegliamo noi, purchè sia fattibile.

In particolare volgliamo che

$$f(x(N), u) \in \mathbb{X}_f$$

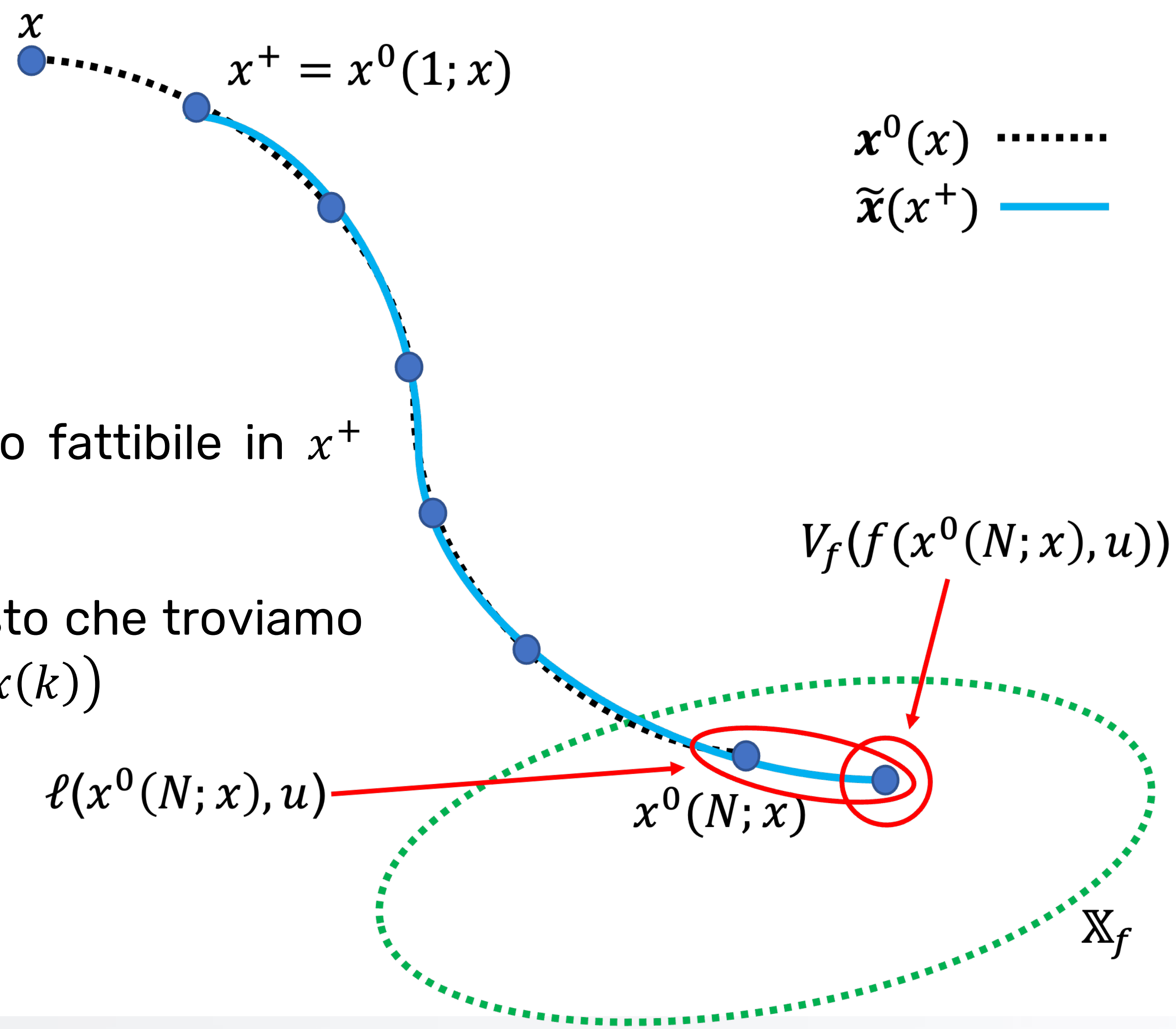
Prova grafica



5. Confrontiamo il costo fattibile in x^+ con il costo ottimo in x

In verde i «pezzi» di costo che troviamo in $J^0\big(x(k)\big)$ ma non in $J(x^+, \widetilde{\boldsymbol{u}})$

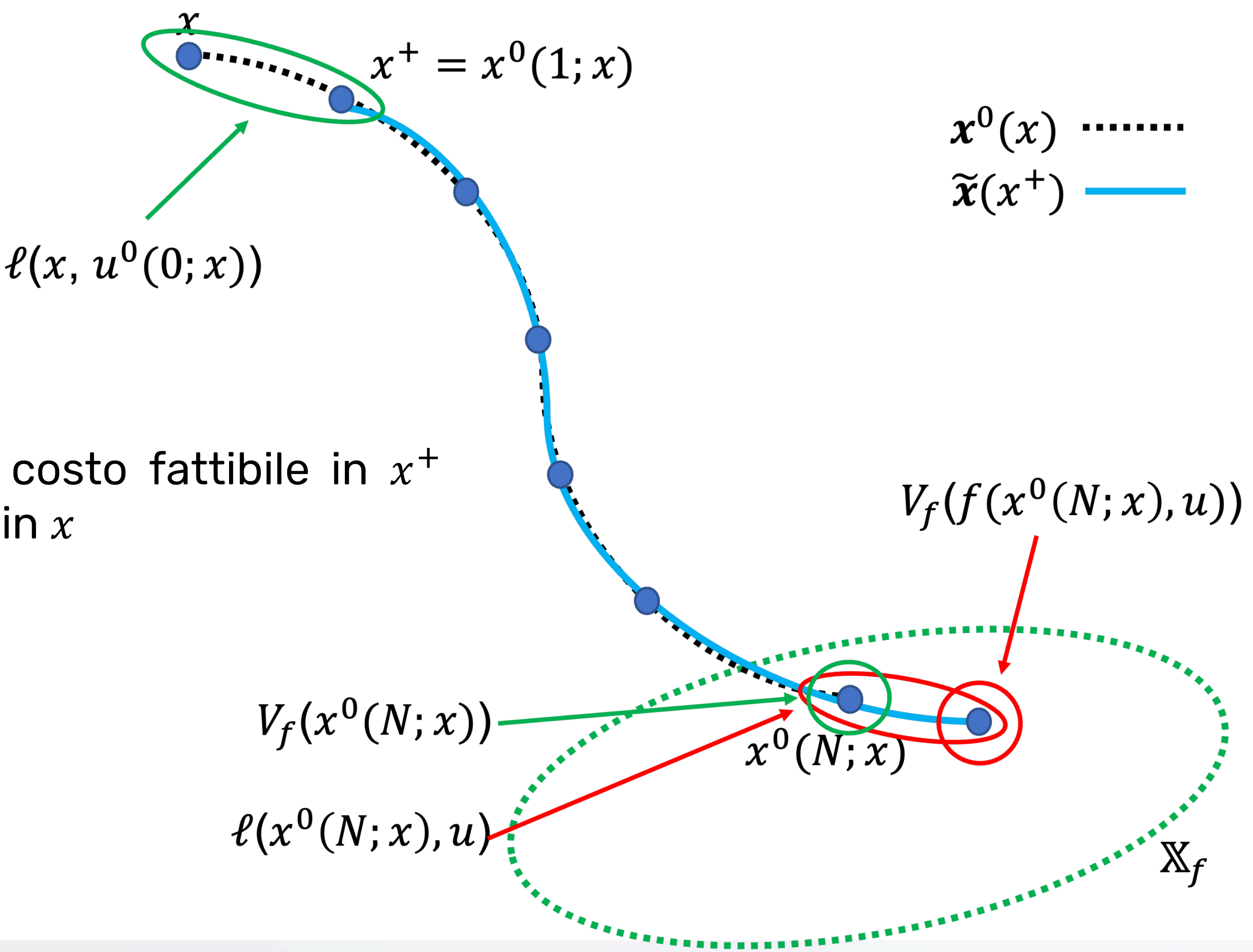
Prova grafica



6. Confrontiamo il costo fattibile in x^+ con il costo ottimo in x

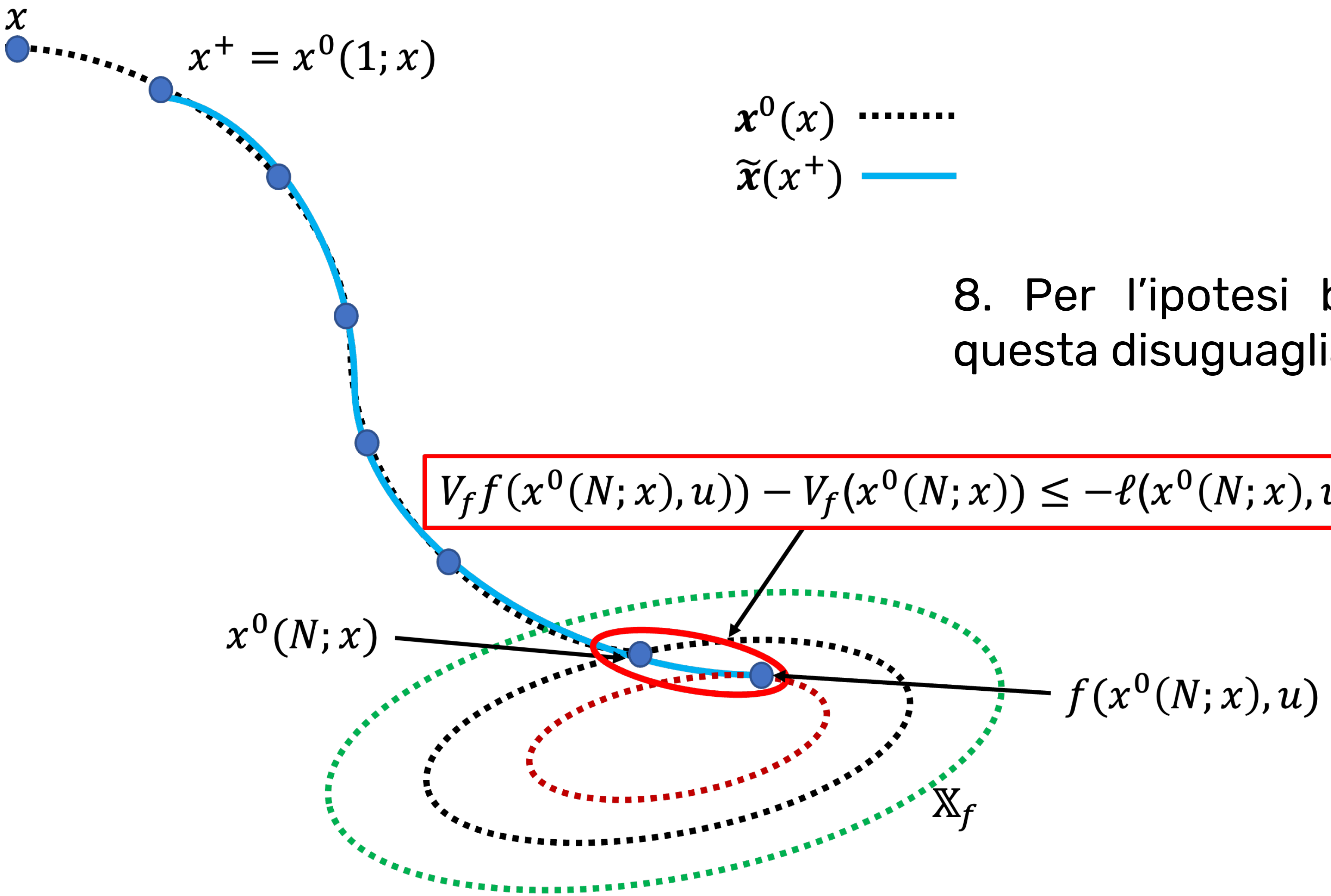
In rosso i «pezzi» di costo che troviamo in $J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}})$ ma non in $J^0(x(k))$

Prova grafica



7. Confrontiamo il costo fattibile in x^+ con il costo ottimo in x

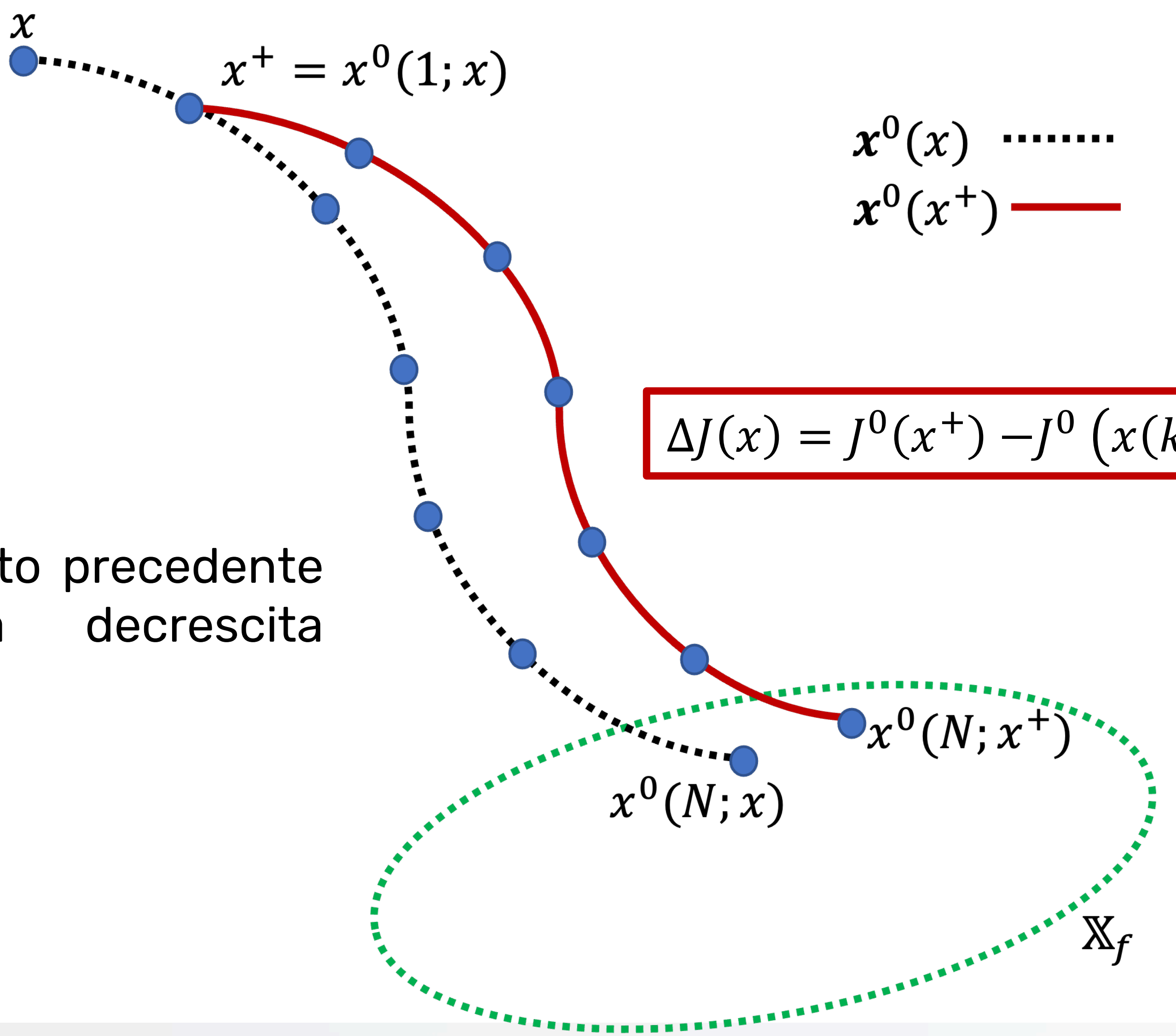
Prova grafica



8. Per l'ipotesi base di stabilità vale questa disuguaglianza.

$$\boxed{V_f f(x^0(N; x), u)) - V_f(x^0(N; x)) \le -\ell(x^0(N; x), u)}$$

Prova grafica



$$\boxed{\Delta J(x) = J^0(x^+) - J^0\big(x(k)\big) \leq -l\big(x^0(0;x), u^0(0;x)\big)}$$

9. In base al punto precedente concludiamo la decrescita totale del costo

Ricapitolando

Ingredienti che devono essere usati nella progettazione di un MPC in modo da garantire che il sistema in anello chiuso con il regolatore MPC sia **asintoticamente stabile** secondo il Teorema di Lyapunov.

Ingrediente	Descrizione
1	$f(x,u)$ e $\ell(x,u)$ continue
2	Set dei vincoli compatti
3	$\ell(x,u)$ e $V_f(x)$ definiti positivi
4	Ipotesi base di stabilità: esistenza della CLF
5	Ipotesi di invarianza: esistenza di un control invariant set

Outline

Vincolo terminale di uguaglianza

In taluni casi è difficile trovare una CLF (anche locale) o un control invariant set che funga da vincolo terminale.

Siamo quindi spacciati?

- No, esiste una formulazione alternativa che prevede di imporre $x(N) = 0$ come vincolo terminale.

- In questo caso non sarà necessario trovare una CLF, dato che, essendo $V_f(x)$ valutata sullo stato terminale, imporre $x(N) = 0$ implicitamente implica che $V_f\big(x(N)\big) = 0$.

- Si noti inoltre che imporre $x(N) = 0$ implica implicitamente che l'invariant set terminale è il solo punto $\mathbb{X}_f = \{0\}$.

Vincolo terminale di uguaglianza

Il problema di ottimizzazione in questo caso diventa quindi:

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell\big(x(j), u(j)\big)$$

$$\begin{aligned} s.t.\ \ & x(0) = x(k) \\ & x(j+1) = f(x(j), u(j)) \\ & x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U} \\ & x(N) = 0 \end{aligned}$$

L'idea della prova di stabilità è esattamente la stessa del caso anteriore, e il suo sviluppo è molto semplice.

Analisi

Supponiamo quindi che al tempo k abbiamo risolto il problema di ottimizzazione ottenendo la sequenza ottima

$$\boldsymbol{u}^0(x) = \{u^0(0;x), u^0(1;x) \ldots, u^0(N-1;x)\}$$

Che produce la sequenza di predizioni ottime, in base all'equazione del modello del sistema $x(j+1) = f(x(j), u(j))$

$$\boldsymbol{x}^0(x) = \{x^0(0;x), x^0(1;x) \ldots, x^0(N-1;x), 0\}$$

In cui $x^0(N;x) = 0$ in virtú del vincolo terminale imposto al problema. Il costo ottimo è dunque

$$J^0(x(k)) = J(x(k), \boldsymbol{u}^0(x)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell\left(x^0(j;x), u^0(j;x)\right)$$

Analisi

Per fare il confronto con il costo successivo usiamo la stessa idea: visto che non conosco

$$\boldsymbol{u}^0(x^+) = \{u^0(0;x^+), u^0(1;x^+) \dots, u^0(N-1;x^+)\}$$

$\boxed{x^+ = x(k+1)}$

Scelgo una **soluzione possibile (ma non ottima**) del problema di ottimizzazione al tempo $k+1$, definiamola $\tilde{\boldsymbol{u}}$, e calcolo il costo generato da questa sequenza per confrontarlo con il costo ottimo al tempo k.

Trucco: prendiamo $\tilde{\boldsymbol{u}} = \{u^0(1;x), u^0(2;x) \dots, u^0(N-1;x), 0\}$.

Questa sequenza è fattibile (rispetta i vincoli) e produce la sequenza di predizioni fattibili:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \{x^0(1;x), x^0(2;x) \dots, 0, 0\}$$

$\boxed{f(0,0) = 0}$

Analisi

Confrontiamo $\boldsymbol{x}^0(x)$ con $\tilde{\boldsymbol{x}}$, e $\boldsymbol{u}^0(x)$ con $\tilde{\boldsymbol{u}}$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \{x^0(1;x), x^0(2;x) \ldots, 0, 0\}$$

$$\boldsymbol{x}^0(x) = \{x^0(0;x), x^0(1;x) \ldots, x^0(N-1;x), 0\}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \{u^0(1;x), u^0(2;x) \ldots, u^0(N-1;x), 0\}$$

$$\boldsymbol{u}^0(x) = \{u^0(0;x), u^0(1;x) \ldots, u^0(N-1;x)\}$$

I rispettivi costi saranno quindi:

$$J^0\big(x(k)\big) = \ell\big(x^0(0;x), u^0(0;x)\big) + \sum_{j=1}^{N-1} \ell\big(x^0(j;x), u^0(j;x)\big)$$

$$J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}}) = \sum_{j=1}^{N-1} \ell\big(x^0(j;x), u^0(j;x)\big) + \ell(0,0)$$

$$\boxed{\ell(0,0) = 0}$$

Analisi

La differenza tra questi due costi sarà quindi:

$$J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}}) - J^0\left(x(k)\right) = -\ell\left(x^0(0;x), u^0(0;x)\right)$$

Dato che, essendo $\tilde{\boldsymbol{u}}$ non ottima, si verifica che $J^0(x^+) \leq J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}})$, si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta J(x) &= J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right)\\ &\leq J(x^+, \tilde{\boldsymbol{u}}) - J^0\left(x(k)\right) \leq -\ell\left(x^0(0;x), u^0(0;x)\right)\end{aligned}$$

Questo risultato conclude la prova. **QED**

Analisi

L'incremento del costo $\Delta J(x)$ è dato da

$$\Delta J(x) = J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right)$$
$$\leq \ell(x^0(N;x), v) + V_f(f(x^0(N;x), v)) - \ell\left(x^0(0;x), u^0(0;x)\right) - V_f(x^0(N;x))$$

Se progettiamo il costo MPC in maniera tale che $V_f(x)$ sia una CLF, dalla slide precedente sappiamo che la parte in rosso è tale che

$$V_f(f(x^0(N;x), v)) - V_f(x^0(N;x)) \leq -\ell(x^0(N;x), v)$$

Possiamo quindi concludere la prova:

$$\Delta J(x) = J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right) \leq -\ell\left(x^0(0;x), u^0(0;x)\right)$$

QED

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BERGAMO

Dipartimento
di Ingegneria Gestionale,
dell'Informazione e della Produzione