

# Inteligência Artificial - MiniMax

ERZINGER Gabriel, TAETS Gabriel

5 de setembro de 2017

## 1 Definição

*Minimax* é um método usado na Teoria de Decisão e Teoria dos Jogos para minimizar a perda máxima possível, ou seja, num ambiente em que as situações podem causar *ganhos* ou *perdas* o algoritmo é utilizado para garantir que *a maior perda que possa ocorrer* seja minimizada.

O teorema foi demonstrado por Von Neumann, matemático considerado um dos pais da Teoria dos Jogos, em 1926.

A teoria dos jogos foi desenvolvida com a finalidade de analisar situações competitivas que envolvem interesses conflitantes. Nestas situações, existem dois ou mais agentes com intenções diferentes cujas ações influenciam, mas não determinam - *completamente* - o resultado do jogo.

Para estudar tal método, é necessário primeiro definir o que são jogos de soma zero. (Zero sum games).

### 1.1 Zero Sum Games

Um jogo de soma zero é definido como um jogo em que quando um dos jogadores ganha, o outro perde, isso define uma *soma zero*. Em tais jogos, a competitividade e estratégia é fator fundamental: não existe motivo para os jogadores colaborarem entre si. Formalmente, num jogo de soma zero com dois jogadores o ganho de um jogador é a perda do outro.

### 1.2 Teorema Minimax

O Teorema Minimax de Von Neumann assegurava que para todos os jogos de duas pessoas e soma zero existia uma estratégia mista ótima para cada “jogador” e se eles as utilizassem teriam o mesmo resultado médio esperado, que seria o melhor ganho que cada “jogador” poderia esperar se o adversário jogasse racionalmente.

Formalmente, o teorema minimax garante que, se atribuídos valores para cada conjunto de jogadas mistas, isto é, um valor para cada sequência ou decisão tomada pelos jogadores A e B, um movimento que *maximize* as chances do jogador A vencer, automaticamente *minimiza* as chances do jogador B vencer.

Dessa forma, temos - matematicamente - que: *Sejam  $X$  e  $Y$  estratégias mistas para os jogadores A e B, seja também a matriz A a matriz de ganho do jogo, então:*

$$\max_x(\min_y(X * A * Y)) = \min_y(\max_x(X * A * Y)) = v$$

Onde  $v$  é chamado do *valor do jogo* e  $X$  e  $Y$  são chamados de soluções. Além disso, também é provado que se existe mais de uma estratégia ótima, então existem infinitas estratégias ótimas. [2]

## 2 Aplicações e exemplos

O método minimax tem diversas aplicações em diversos campos de estudo - como a filosofia e a economia. Um dos exemplos mais simples e difundidos se trata da aplicação do minimax ao jogo da velha (*tic-tac-toe*.).

### 2.1 Jogo da velha

No famoso jogo da velha um jogador pode perder, empatar ou ganhar. Se o jogador A pode vencer com um movimento, esse é o seu melhor movimento.

Se o jogador B identifica que um movimento levará a uma situação em que o adversário pode ganhar no próximo movimento, e que existe outro movimento que poderá levar a uma situação em que o adversário pode, no máximo, empatar, então, este último é o melhor movimento para ele.

Após algumas rodadas, é fácil identificar qual é o melhor movimento. O algoritmo minimax ajuda a encontrar a melhor jogada, ao se caminhar pelas opções válidas, a partir do fim do jogo. A cada passo, assume-se que o jogador A está tentando maximizar as chances dele ganhar, enquanto na próxima rodada o jogador B está tentando minimizar as chances de isso acontecer (ao maximizar as chances de que ele próprio ganhe).

### 2.2 Competição de Empresas

Num artigo sobre teoria dos jogos, teorema minimax e equilíbrio de Nash, a matemática Cristiene dos Santos utiliza o seguinte exemplo: [1]

Duas redes de televisão competidoras, Mega e Plus, estão planejando levar ao ar programas de uma hora de duração para o mesmo horário. A rede Mega

pode escolher um entre os programas A e B e a rede Plus um entre os programas C e D. Nenhuma delas sabe qual o programa a outra vai levar ao ar. Ambas contratam o mesmo instituto de pesquisa de opinião para lhes dar uma estimativa de como as possibilidades de transmitir os dois programas vão dividir a audiência.

A solução deste problema é encontrar a melhor estratégia, chamada de estratégia ótima de cada rede, de forma a maximizar a audiência. Disso resulta que ambos os “jogadores” tomarão decisões que podemos classificar como de anti-risco, ou seja, aquelas que renunciam a alguns ganhos possíveis para evitarem incorrer em perdas desnecessárias. Ao generalizar esta análise, conclui-se que **o decisor racional procurará um modo de atuação que lhe dê o melhor ganho possível na pior situação, ou seja, o melhor ganho admitindo que o oponente fará o melhor contra movimento.**

### 2.3 Minimax de Condorcet

Em eleições que utilizam o método de Condorcet (no qual os eleitores classificam os candidatos em ordem de preferência), é possível utilizar o algoritmo Minimax para determinar o candidato vencedor. O Minimax de Condorcet seleciona como vencedor o candidato cujo maior taxa de derrota seja menor que a maior taxa de derrota de qualquer outro candidato, quando tomados em pares. [4]

### 2.4 Teoria da Decisão

O minimax também pode ser utilizado na Teoria da Decisão, mais precisamente na teoria da aversão ao arrependimento, ou arrependimento antecipado, que visa antecipar o arrependimento que uma decisão pode causar e assim mudar ou não a decisão, com o objetivo, portanto, de minimizar o máximo arrependimento possível. Isso pode ser utilizado em uma variedade de áreas como testes de hipóteses, predições, economia, entre outras. [5]

Em investimentos, por exemplo, adotar uma abordagem do tipo Maximin para evitar um grande prejuízo pode ser uma alternativa segura, no entanto em algumas circunstâncias pode não ser o melhor caminho visto que tomar um risco ligeiramente maior pode oferecer um ganho muito superior, caso no qual o arrependimento seria grande.

Desta forma, o algoritmo Minimax na Teoria do Arrependimento calcula as diferenças entre os retornos dos melhores possíveis retornos, montando uma tabela de arrependimento, com um valor para cada possibilidade. Aplicando o algoritmo Minimax nesta tabela de arrependimento irá retornar qual é o investimento com menor risco de arrependimento, em contraste com o algoritmo Maximin na tabela de retornos, que retorna qual é o investimento com menor

prejuízo no pior caso.

## 2.5 Teoria dos Grafos

O algoritmo Minimax também pode ser utilizado em Teoria dos Grafos para se calcular qual é a menor distância máxima entre dois pontos – não necessariamente o menor caminho, mas um caminho cuja maior aresta tem o menor valor possível. Uma das aplicações desta forma envolve logística de transportes. [6]

Neste problema, o algoritmo executa numa matriz de adjacências, analisando, para cada par de vértices, qual é o vértice intermediário que minimiza a maior aresta, caso exista. Pode ser facilmente implementado baseando-se no algoritmo de Floyd-Warshall, caso o problema seja pequeno o suficiente.

## 3 Algoritmo

### 3.1 Metodologia

O algoritmo será implementado em *Python* e em *C* seguindo o seguinte raciocínio: [3]

Considerando um jogo qualquer que possui *estados* que são alcançados após uma *sequência de movimentos* realizadas pelos jogadores A e B, cada estado do jogo irá possuir um valor associado a ele. Em um dado estado, se o jogador A possui a vantagem, este estado terá um valor positivo. Caso contrário, o estado terá um valor negativo. Neste cenário, o jogador A tenta maximizar os valores, enquanto o jogador B tentará minimiza-los.

Estes valores são calculados através de alguma heurística que é única para cada tipo de jogo ou situação.

Considerando um jogo com 4 estados finais possíveis representados numa árvore binária como a da figura abaixo, onde o primeiro jogador a jogar tem o objetivo de maximizar o resultado.

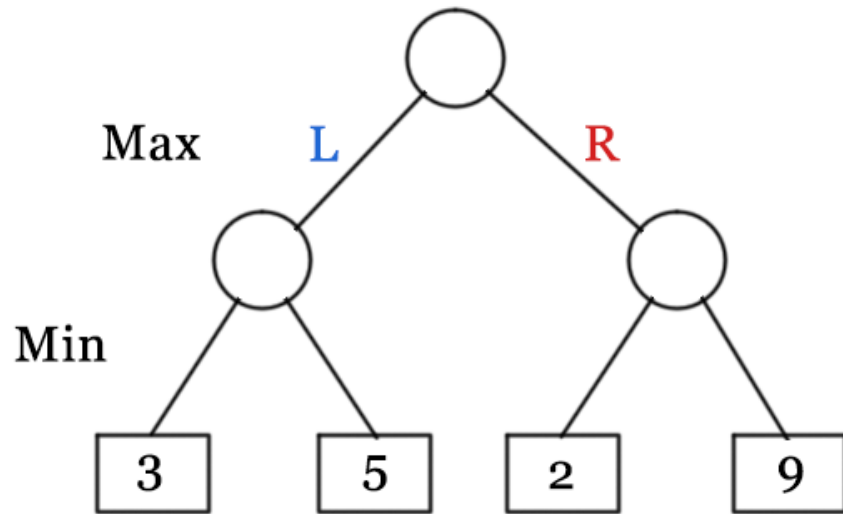


Figura 1: Árvore de Estados [3]

O algoritmo será implementado através de *Backtracking*, dessa forma, ele irá testar todos os movimentos possíveis e retornar o maior ganho. Os movimentos, considerando que o jogador B jogue de forma ótima são:

- Jogador A escolhe ir para a esquerda: Em seguida, o jogador B escolhe 3.
- Jogador A escolhe ir para a direita: Em seguida, o jogador B escolhe 2.

Dessa forma, o movimento ótimo para o jogador A é ir para a esquerda, uma vez que este movimento irá *minimizar a sua perda*, isto é, entre os dois valores finais prováveis [2 e 3], ele escolherá o maior. Isto pode ser representado pela segunda árvore de estados:

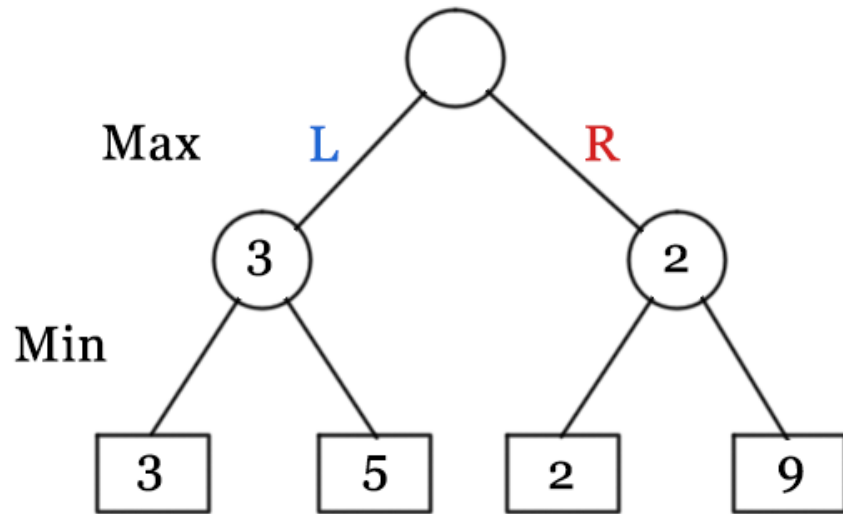


Figura 2: Árvore de Estados Final[3]

### 3.2 Implementação

Abaixo temos uma implementação em *python* do minimax para o jogo descrito previamente.

```

#Funcao minimax para o jogo Maximizer x Minimizer que define a
#pontuacao maxima que o Maximizer pode obter começando se ambos
#jogarem de forma otima.

import math

def minimax(profundidade, indice, jogador, placar, h):
    if (profundidade == h): # Se a profundidade chegou ao fim
        return placar[indice] # Retorna o placar deste indice

    #Se eh o jogador A ( maximizer )
    #Maximo entre ir pra Dir/Esq
    if(jogador == 1):
        return max(minimax(profundidade+1, indice*2, 0, placar, h),
                    minimax(profundidade+1, indice*2 + 1, 0, placar, h))

    #Se eh o jogador B ( minimizer )
    #Minimo entre ir pra Dir/Esq
    else:
        return min(minimax(profundidade+1, indice*2, 1, placar, h),
                    minimax(profundidade+1, indice*2 + 1, 1, placar, h))

```

```

21 placar = [3, 5, 2, 9, 12, 5, 23, 23] # Arvore
22 n = 8 # Numero de elementos
23 altura = (math.log(n)/math.log(2))
24 res = minimax(0,0,1,placar, altura)
25 s = 'O melhor valor alcancado por A eh ' + str(res)
26 print(s)

```

Uma implementação em C do jogo descrito:

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define INF 0x3f3f3f3f
#define max(a, b) ((a) > (b) ? (a) : (b))
#define min(a, b) ((a) < (b) ? (a) : (b))

int minimax(int profundidade, int indice, int jogador,
            int *placar, int h){
    if(profundidade == h) return placar[indice];
    if(jogador == 1){
        return max(minimax(profundidade+1, indice*2, 0, placar, h),
                   minimax(profundidade+1, indice*2+1, 0, placar, h));
    }
    else {
        return max(minimax(profundidade+1, indice*2, 1, placar, h),
                   minimax(profundidade+1, indice*2+1, 1, placar, h));
    }
}

int main(){
    int placar[] = {3, 5, 2, 9, 12, 5, 23, 23};
    int n = 8, altura = ceil(log(n)/log(2));
    int res = minimax(0,0,1,placar,altura);
    printf("O melhor valor alcancado por A eh %d\n",res);
    return 0;
}

```

## Referências

- [1] COSTA, Cristiene dos Santos - *TEORIA DOS JOGOS E A RELAÇÃO ENTRE O “TEOREMA MINIMAX” DE JOHN VON NEUMANN E O “EQUILÍBRIO DE NASH” DE JOHN NASH* <<https://repositorio.ucb.br/jspui/bitstream/10869/1549/1/Cristiene%20dos%20Santos%20Costa.pdf>> Acesso em 01/Setembro/2017.
- [2] Weisstein, Eric W. "Minimax Theorem." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MinimaxTheorem.html>

- [3] Minimax Algorithm in Game Theory | Set 1. From GeeksForGeeks <http://www.geeksforgeeks.org/minimax-algorithm-in-game-theory-set-1-introduction/>.
- [4] Levin, Jonathan, and Barry Nalebuff. 1995. "An Introduction to Vote-Counting Schemes." *Journal of Economic Perspectives*, 9(1): 3–26
- [5] Savage, L.J. (1951). "The theory of statistical decision." *Journal of the American Statistical Association*, vol. 46, pp. 55–67.
- [6] Berman, Oded; Handler, Gabriel Y. (1987), "Optimal Minimax Path of a Single Service Unit on a Network to Nonservice Destinations", *Transportation Science*, 21 (2): 115–122