

# Introdução ao MPI

Aleardo Manacero Jr.



Ambientes de troca de mensagens

A programação paralela em sistemas multicomputadores pode ser feita através de vários mecanismos

Um desses mecanismos faz uso de bibliotecas de trocas de mensagens, como o MPI



#### O MPI



Message Passing Interface, ou MPI, foi desenvolvido por um fórum com o objetivo de ser um padrão entre os ambientes de troca de mensagens

Com esse objetivo, MPI pode ser usado na programação de clusters, redes e até mesmo em máquinas massivamente paralelas

#### O MPI



Desenvolvido a partir de outras bibliotecas, como o PVM

No MPI o paralelismo está restrito ao modelo SPMD SPMD significa Single Program Multiple Data

Pode ser usada em programas C, C++, Fortran (ou Java, python, R, etc)

# Escopo de programação



Num programa paralelo as funções do MPI podem ser usadas dentro do intervalo marcado pelas instruções

MPI\_Init (&argc, &argv)

e

MPI Finalize



#### Iniciando o MPI



MPI\_Init recebe uma cópia dos argumentos passados na chamada do programa (*argc* e *argv*)

Durante sua chamada inicializa a variável MPI\_COMM\_WORLD, que armazena os dados sobre os processos disparados





#### Funções de controle

```
MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &size)
/* retorna o número de processos disparados */
MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &myid)
/* retorna a identidade (rank) do processo */
```

MPI\_Cart\_create(COMM,dims,dsize,wrap,reorder,cart)

/\*cria uma topologia cartesiana de <u>dims</u> dimensões, sendo que <u>wrap</u> diz se é fechada e <u>reorder</u> se pode reordenar os comunicadores em <u>cart</u> \*/



#### Funções de controle

/\* recupera a topologia \*/

```
MPI_Cart_coords(cart, myrank, dims, coords)

/* retorna as coordenadas numa topologia de dims dimensões (coords é um vetor) */

MPI_Cart_shift(cart, dim, displ, &src, &dst)

/* retorna ranks dos vizinhos (a uma distância displ) na topologia */

MPI_Cart_get(cart, ndims, dims, periods, coords)
```

-



#### Funções de comunicação simples

```
MPI Send(msg, length, type, id, tag, comm)
/* envia msg para processo id */
MPI Recv(msg, length, type, id, tag, comm, status)
/* recebe msq do processo id */
MPI Sendrecv(smsg, slength, stype, dest, stag, rmsg,
rlength, rtype, source, rtag, comm, status)
/* envia smsg para processo dest e recebe rmsg do
processo source */
```

**GSPD** 

Identificação dos parâmetros de comunicação

msg é a informação (em um buffer)
length é o tamanho da informação
type identifica o tipo dos dados
id identifica os processos comunicantes
tag identifica a mensagem
status armazena o resultado da comunicação

# Tipos de dados pré-definidos



#### Predefined MPI datatypes

MPI datatype	C datatype
MPI_CHAR MPI_SHORT MPI_INT MPI_LONG MPI_UNSIGNED_CHAR MPI_UNSIGNED_SHORT MPI_UNSIGNED MPI_UNSIGNED MPI_UNSIGNED MPI_LONG MPI_FLOAT MPI_DOUBLE MPI_LONG_DOUBLE MPI_BYTE MPI_PACKED	signed char signed short int signed int signed long int unsigned char unsigned short int unsigned int unsigned long int float double long double



### Mais funções de comunicação

MPI\_Barrier(group)

/\* faz processos em *group* esperarem pelos demais \*/

MPI\_Bcast(msg, count, type, root, comm)

/\* Comunicação por broadcast, disparado pelo processo com rank *root*, devendo existir em todos os processos do grupo *comm* \*/





#### Continuando ....

MPI\_Scatter(msg, count, type, rmsg, rcount, rtype, root, comm)

/\* envia um segmento (de tamanho count) de msg para cada processo em comm, que o recebe em rmsg \*/

MPI\_Gather(msg, count, type, rmsg, rcount, rtype, root, comm)

/\* recebe um segmento (msg) de cada processo e o coloca em rmsg ) \*/





#### Mais funções

MPI\_Reduce(operand,result,count,type,op,root,comm)

/\* faz como MPI\_Gather, porém realizando uma operação (op) entre todos os dados enviados \*/

MPI\_Allreduce(operand, result, count, type, op, comm)

/\* mesmo que MPI\_Reduce, porém retornando o resultado final a todos os processos \*/

op pode ser uma das operações de redução apresentadas na próxima tabela

# Operadores de redução



#### Predefined reduction operators in MPI

Operation Name	Meaning
MPI_MAX	Maximum
MPI_MIN	Minimum
MPI_SUM	Sum
MPI_PROD	Product
MPI_LAND	Logical and
MPI_BAND	Bitwise and
MPI_LOR	Logical or
MPI_BOR	Bitwise or
MPI_LXOR	Logical exclusive or
MPI_BXOR	Bitwise exclusive or
MPI_MAXLOC	Maximum and location of maximum
MPI_MINLOC	Minimum and location of minimum

# Outras funções



Além dessas funções básicas existem funções para:

Definição de grupos de processos comunicantes (communicators)

Manipulação de topologia dos comunicadores

Comunicação síncrona e assíncrona

Definição de tipos de dados estruturados

#### Referências



http://www.open-mpi.org página oficial para o openMPI (usado neste curso)

http://www.mcs.anl.gov/mpi página do MPI no Argonne Natl Lab, com muita informação adicional

http://www.usfca.edu/~peter/ppmpi contém fontes dos programas do livro "Parallel Programming with MPI" de P. Pacheco

# Exemplo de implementação

Como exemplo do uso de MPI temos o problema de transferência de calor, enunciado da seguinte forma:

Suponha uma chapa em que as bordas são mantidas em temperatura constante, assim como pontos isolados da chapa

Como determinar a temperatura em um ponto qualquer da chapa?



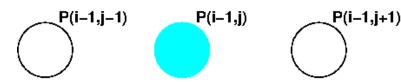


Pode-se usar algoritmos de aproximações sucessivas, como o chamado algoritmo red & black

Nesse caso, cada ponto da chapa tem sua temperatura, numa iteração, como sendo a média das temperaturas de seus vizinhos e de sua própria na iteração anterior



Os pontos a serem considerados como vizinhos em cada iteração são os vizinhos na vertical e na horizontal, como em:



$$P(i,j-1)$$
  $P(i,j)$ 

$$P(i+1,j-1)$$
  $P(i+1,j)$   $P(i+1,j+1)$ 

$$P'(i,j) = \frac{P(i,j) + P(i,j-1) + P(i,j+1) + P(i-1,j) + P(i+1,j)}{5}$$

Assim, a chapa pode ser vista como uma enorme matriz, em que cada elemento é o valor da temperatura da chapa num ponto

Os valores de contorno e constantes são também considerados elementos da matriz



O algoritmo Red & Black faz o cálculo das temperaturas numa iteração considerando valores da matriz red, armazenando os novos resultados na matriz black

Na iteração seguinte a matriz red passa a ser o destino dos resultados calculados a partir da matriz black (daí o nome do algoritmo!)



A programação desse algoritmo em paralelo pode ser feita dividindo-se a matriz em vários grupos de linhas ou colunas (dependendo da linguagem usada), destinando cada grupo para um dos processos paralelos

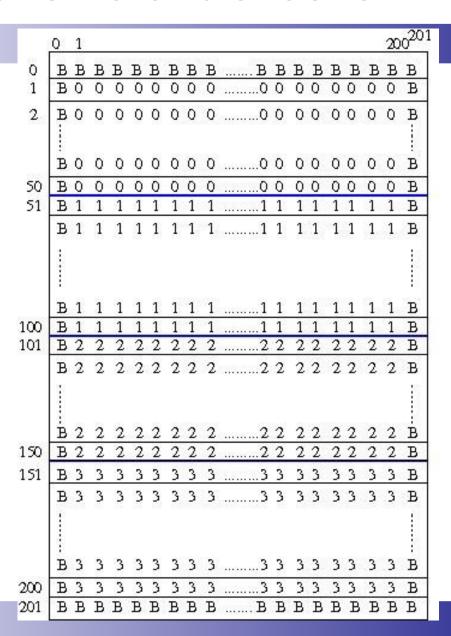
Algumas dessas linhas (ou colunas), que estão nas fronteiras entre grupos, são compartilhadas entre pares de processos (vizinhos dentro da matriz)



A operação em SPMD ocorre pela criação de barreiras de sincronismo entre cada iteração

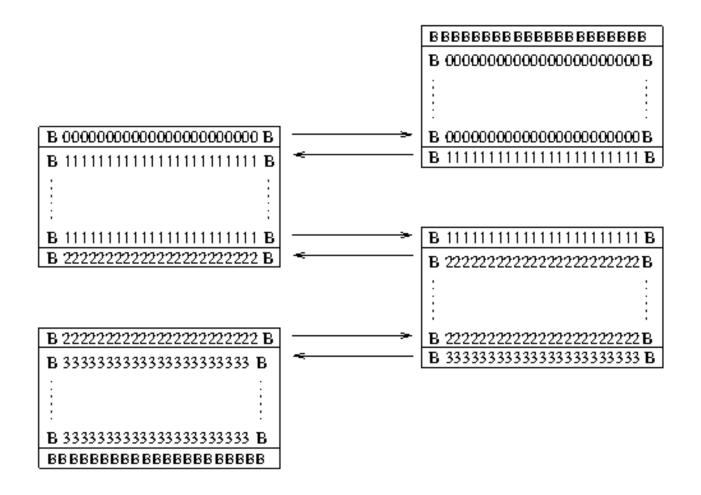
As barreiras podem ser criadas através de primitivas bloqueantes de comunicação, como a função MPI\_Sendrecv()

As informações sobre as linhas compartilhadas são trocadas entre os processos vizinhos a cada iteração



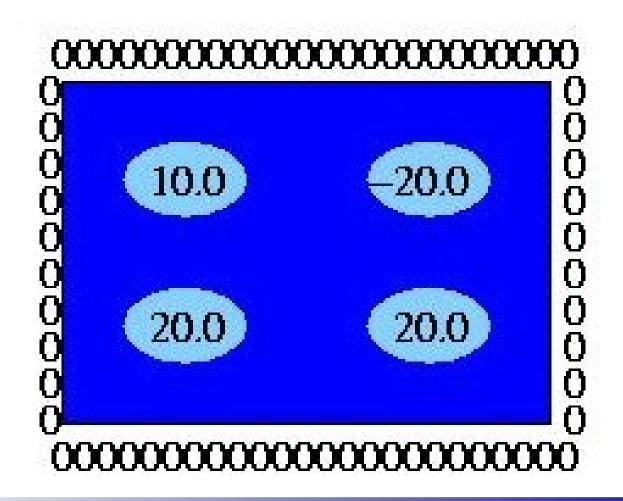






# Exemplo de chapa







# OBSERVAÇÕES



Para os dois programas se usou a implementação open-mpi

A compilação é feita usando o comando mpicc -o arqexec arqfonte.c

A execução é feita usando o comando mpirun -np numproc arqexec



### Versão 1



Nesta versão usaremos as primitivas simples de comunicação, ou seja, MPI\_Send, MPI\_Recv e MPI\_Sendrecv

Usaremos também o modelo SPMD puro, típico do MPI



double black[rows+2][cols+2];



```
#include "stdio.h"
#include <mpi.h>
#define maxtime 100000
/* Simulação é executada com MINPROC processos, podendo
* ser igual a 1 para testes. Para uma matriz maior é
* preciso ajustar MINPROC p/ o numero real de nós */
#define MINPROC 4
#define cols 200
#define totrows 200
#define rows totrows/MINPROC + 2
```



```
void storeconst(int s, int e, int row, int col, double val)
{ if (row >= s && row <= e)
      black[row-s][col] = val; }
int main(int argc, char **argv)
{double red[rows+2][cols+2];
 int s, e, mylen, r, c, tick;
 int inum, nproc, dims, coords, ndim = 1;
 int periods, reorder; // usadas como booleanas
 int upproc, downproc;
 int comm1d;
 MPI Status status;
```



```
// Chamando MPI INIT
  MPI Init (&argc, &argv);
// Recebendo o número de processos em paralelo
  MPI Comm size (MPI COMM WORLD, &nproc);
  dims = nproc;
  periods = 0; // significa um valor falso
   reorder = 1; // significa um valor verdade
```



```
// cria grupo cartesiano unidimensional de processos
  MPI Cart create (MPI COMM WORLD, ndim, &dims,
                      &periods, reorder, &commld);
// Pega valor de rank dentro do grupo de comunicadores
  MPI Comm rank (comm1d, &inum);
// Pega a topologia do grupo COMM1D e o lugar
// desse processo dentro dessa topologia
  MPI Cart get (comm1d, ndim, &dims, &periods, &coords);
```

```
Retorna os vizinhos de distância 1 acima e abaixo,
sendo que os das extremidades terão apenas um deles */
MPI Cart shift (comm1d, 0, 1, &upproc, &downproc);
s = totrows/nproc*inum;
e = totrows/nproc*(inum+1);
mylen = (e - s) + 1;
if (mylen > rows)
  { printf("No space, need %d, have %d\n", mylen, rows);
    printf("%d %d %d %d %d\n", totrows, nproc, inum, s, e);
printf ("%d %d %d %d %d %d \n", inum, nproc, coords,
                             upproc, downproc, s, e);
```



```
// Começa frio (todos os pontos em 0 \circ C)
   for (r=0; r \le mylen+1; r++)
     for (c=0; c \le cols+1; c++)
            black[r][c] = 0.0;
// Inicia a execução das iterações
   for (tick = 1; tick <= maxtime; tick++) {
// Inicia valores das fontes constantes de calor
      storeconst(s, e, totrows/3, cols/3, 10.0);
      storeconst(s, e, 2*totrows/3, cols/3, 20.0);
      storeconst(s, e, totrows/3, 2*cols/3, -20.0);
      storeconst(s, e, 2*totrows/3, 2*cols/3, 20.0);
```



```
Envia para vizinho de cima e recebe do vizinho abaixo
      MPI Send(&black[1][0], cols, MPI DOUBLE, upproc,
                                        1, comm1d);
      MPI Recv(&black[mylen+1][0], cols, MPI DOUBLE,
                         downproc, 1, comm1d, &status);
// Envia para baixo e recebe de cima num único comando
      MPI Sendrecv (&black[mylen][0], cols, MPI DOUBLE,
           downproc, 2, &black[0][0], cols, MPI DOUBLE,
                     upproc, 2, MPI COMM WORLD, &status);
```



```
/* Calcula-se as temperaturas nessa iteração */
   for (r=1; r \leq mylen; r++)
     for (c=1; c \le cols; c++)
        red[r][c] = (black[r][c] +
                     black[r][c-1] +
                     black[r-1][c] +
                     black[r+1][c] +
                     black[r][c+1] )
                               / 5.0;
```



```
/* Copia a matriz - Normalmente faríamos a
 fase vermelha do laço, mas assim diminuímos
 o tamanho do exemplo */
     for (r=1; r \leq mylen; r++)
       for (c=1; c \le cols; c++)
          black[r][c] = red[r][c];
} /* Final do laço principal
 "for (tick = 1; tick <= maxtime; tick++)"
  * /
```



```
// Imprime parte da matriz do processo 1
if (inum==1)
    { for (r=12; r \le 22; r++) {
        for (c=62; c \le 70; c++)
          printf("%lf ",black[r][c]);
      puts(" "); }
 MPI Finalize();
```



#### Versão 1



No código apresentado ainda falta fazer a junção das matrizes parciais

Isso pode ser feito fazendo com que todos os processos enviem a sua matriz para o processo 0 (em vez de se imprimir parte de uma das matrizes)



#### Versão 2



Nesta segunda versão faremos uso de primitivas de comunicação em grupos, como MPI Bcast

Em particular, nesse caso teremos uma estrutura de programação tipo Mestre-Escravo





```
#include "stdio.h"
#include <mpi.h>
#define MINPROC 4
#define cols 200
#define rows 200
#define maxtime 100000
int main(int argc, char **argv)
{double red[rows+2][cols+2], black[rows+2][cols+2];
 int s, e, ls, le, mylen, i, r, c, tick;
 int inum, nproc, src, dest, tag;
MPI Status status;
```



```
puts ("Chamando MPI INIT");
   MPI Init (&argc, &argv);
  MPI Comm size (MPI COMM WORLD, &nproc);
   MPI Comm rank (MPI COMM WORLD, &inum);
   s = 1 + inum*(rows/nproc);
   e = s + (rows/nproc) - 1;
// Começa frio (todos os pontos em 0 \circ C)
   if (inum==0)
     for (r=0; r \le mylen+1; r++)
        for (c=0; c \le cols+1; c++)
            black[r][c] = 0.0;
```



```
// Inicia a execução das iterações
   for (tick = 1; tick <= maxtime; tick++) {
// Inicia valores das fontes constantes de calor
      black[rows/3][cols/3] = 10.0;
      black[2*rows/3][cols/3] = 20.0;
      black[rows/3][2*cols/3] = -20.0;
      black[2*rows/3][2*cols/3] = 20.0;
// Faz o broadcast da matriz aos demais processos
     MPI Bcast(black, (rows+2)*(cols+2), MPI DOUBLE,
                                    O, MPI COMM WORLD);
```



```
// Processo mestre recolhe os resultados na matriz BLA
if (inum == 0)
  { for (r=s; r<=e; r++)
      for (c=1; c \le rows; c++)
          black[r][c] = red[r][c];
    for (i=1; i<=nproc-1; i++)
     { ls = 1 + i * (rows/nproc);
       le = ls + (rows/nproc) - 1;
       mylen = (le - ls) + 1; \qquad src = i; \qquad tag = 0;
       MPI Recv(&black[ls][0], mylen*(cols+2), MPI DOUBLE,
                src, tag, MPI COMM WORLD, &status);
  } // final do "then" para "if (inum==0)" ;
```





```
if (inum==0) // imprime parte da matriz
{ for (r=62; r <= 72; r++) {
    for (c=62; c <= 70; c++)
        printf("%lf ",black[r][c]);
    puts(" "); }
}
MPI_Finalize();</pre>
```

### Comparação entre versões

A versão mestre-escravo é um pouco mais intuitiva (alguém controla os demais)

A versão SPMD é mais eficiente por diminuir o tamanho das mensagens

Nas medições feitas a versão SPMD foi pelo menos três vezes mais rápida (menos iterações)



# Medições? O que é isso?



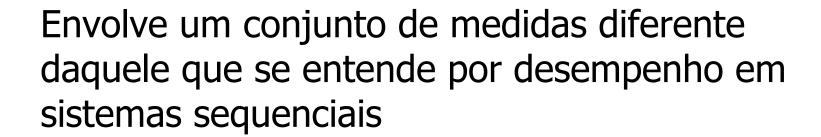
O objetivo de computação paralela é acelerar a execução de programas

Isso implica em saber se a aceleração é eficiente ou não, ou saber o desempenho do programa

A determinação do desempenho envolve técnicas de medição (benchmarking)



#### Desempenho em sistemas paralelos



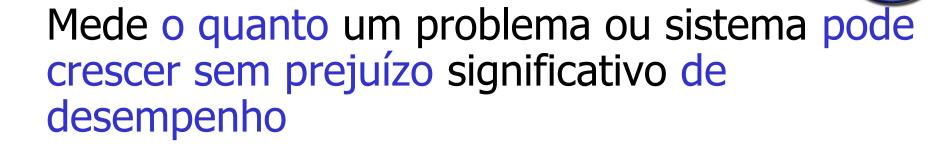
Em sistemas paralelos as principais medidas são:

Ganho de velocidade (*speedup*)

Capacidade de crescimento (scalability)



#### Escalabilidade



Depende de características do ambiente (hardware e software), como:

Granulação (ou granulosidade)

Custo de comunicação

Necessidade de comunicação



#### Escalabilidade

Por medir a capacidade de crescimento é de especial interesse a quem paga pelo ambiente paralelo

Não é uma indicação de ganho máximo de velocidade, mas sim de quando esse ganho passa a crescer menos que o necessário (ou desejável)



# Ganho de velocidade (speedup)



#### **Teórico**

tamanho fixo tempo fixo

#### Medido

pelo sequencial pelo paralelo monoprocessado



# Speedups teóricos



Lei de Amdahl, que trata o problema de tamanho fixo

Lei de Gustafson, que trata o problema de tempo fixo



#### Lei de Amdahl



Define α como sendo a probabilidade de processamento sequencial

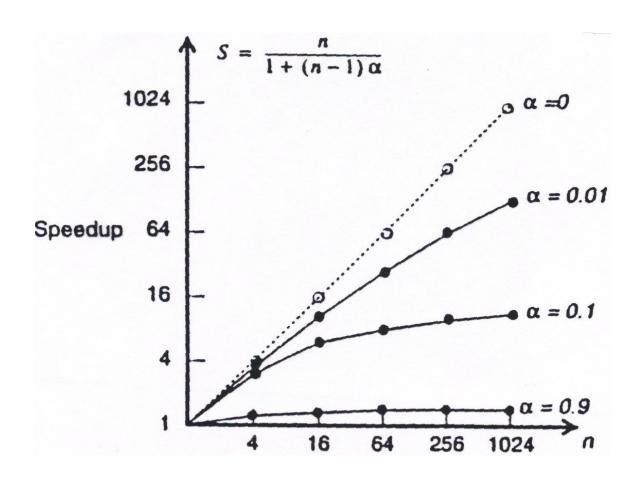
Então, o *speedup* para N elementos paralelos resulta em:

$$S_n = \frac{n}{1 + (n-1) \cdot \alpha}$$



### Curvas de speedup





### Problemas com medição



Antes de medir é preciso definir várias coisas, ou melhor dizendo, responder às seguintes questões:

O que medir?

Como medir?

Por que medir?

#### Problemas da medição



A solução das questões sobre o que e como medir partem da resposta sobre porque medir.

Identificar precisamente o motivo de se estar medindo ajuda a identificação dos outros problemas (*não necessariamente sua solução*).



# Por que medir?



#### Respostas possíveis:

Medida do desempenho global

Informações para melhorar o desempenho global

Informações sobre partes específicas do sistema

etc.

# O que medir?

Partindo da escolha anterior, a resposta pode ficar entre:

Tempo de execução

Tempo de CPU

Tempo gasto em certas atividades

Ganhos de velocidade em sistemas paralelos

Eficiência na utilização de recursos

etc., etc., etc.

#### Como medir?



#### Monitoração por hardware

Uso de analisadores lógicos e outros equipamentos

#### Monitoração por software

Uso de interrupções do sistema operacional

#### Modificação de código

Inserção de código, **fonte, objeto ou executável**, para medição



## Monitoração X Modificação



#### Monitoração

é mais precisa

exige conhecimentos sobre hardware e sistema operacional

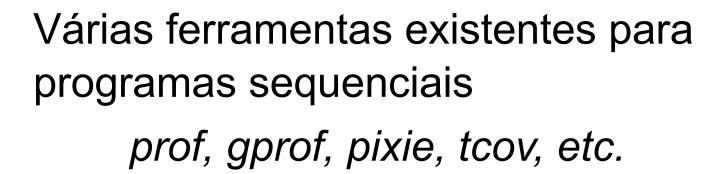
#### Modificação de código

é feita com o uso de ferramentas prontas

usa técnicas como profiling e extração de eventos



## Profiling / extração de eventos

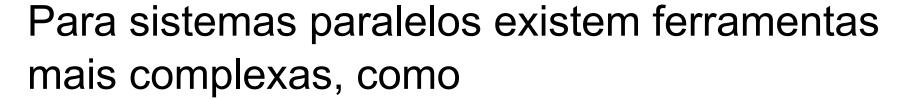


#### **Problemas:**

Precisão da amostragem Não tratam paralelismo



### Profiling / extração de eventos



Tau

Totalview

Vampir

Ferramentas de fabricantes



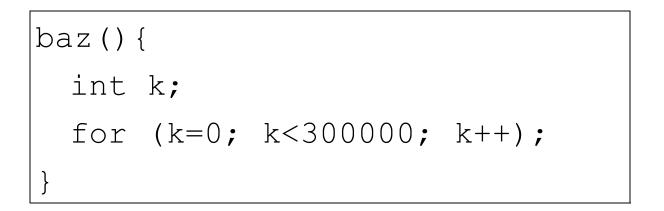
```
main() {
  int 1;
  for (l=0; 1 < 10000; l++) {
    if (1\%2 == 0) foo();
    bar();
    baz();
```



```
foo() {
  int j;
  for (j=0; j<200000; j++);
}</pre>
```

```
bar() {
  int i;
  for (i=0; i<200000; i++);
}</pre>
```





```
$[1] gcc -pg loops.c -o loops
$[2] ./loops
$[3] gprof > loops.prof
$[4] more loops.prof
```





Each sample counts as 0.01 seconds.

% c	umulative	self	self total				
time	seconds	seconds	calls	us/call	us/call	name	
53.89	80.0	0.08	10000	8.08	8.08	baz	
33.68	0.13	0.05	10000	5.05	5.05	bar	
13.47	0.15	0.02	5000	4.04	4.04	foo	



dex	% time	self	children	ı called	name
					<spontaneous></spontaneous>
[1]	100.0	0.00	0.15		main [1]
		0.08	0.00	10000/10000	baz [2]
		0.05	0.00	10000/10000	bar [3]
		0.02	0.00	5000/5000	foo [4]
		0.08	0.00	10000/10000	main [1]
[2]	53.3	0.08	0.00	10000	baz [2]
		0.05	0.00	10000/10000	main [1]
[3]	33.3	0.05	0.00	10000	bar [3]
		0.02	0.00	5000/5000	main [1]
[4]	13.3	0.02	0.00	5000	foo [4]

This table describes the call tree of the program, and was sorted by the total amount of time spent in each function and its children.

### Modificação de código fonte



O programador insere chamadas de funções para contagem de tempo (instrumentação) dentro de seu código.

A medição, portanto, depende da existência de acesso ao código fonte do programa.

Problemas de precisão e amostragem.



#### Modificação de código fonte



```
#include <time.h>
#include <sys/times.h>
#include "stdio.h"
float etime ()
{struct tms local;
times (&local);
 return ((float)local.tms utime/100.0 +
  (float) local.tms stime/100.0);
```



#### Modificação de código fonte



```
GSPD
```

```
main()
{float Duration;
   Duration = etimes();
     do whatever has to be measured();
   Duration = etimes() - Duration;
   printf ("Work took %f seconds\n", Duration);
```



## Modificação de código fonte

Com MPI é possível usar MPI\_Wtime para obter tempos de execução em trechos específicos do programa, como em:

```
double start, finish;
    MPI_Barrier(comm);
    start = MPI_Wtime();
    ...
    MPI_Barrier(comm);
    Finish = MPI_Wtime();
    If (myrank == 0) printf ("spent %e sec\n", finish - start);
```



## Modificação do executável

Pode ser feita por instrumentação *off-line*, como fazem *prof* e similares

Ou por instrumentação dinâmica, como faz o Paradyn (através do Dyninst)

Também pode ser feito por extração de características do programa, que então são simuladas *off-line* 

#### Problemas de benchmarks



#### Definição da carga de trabalho

Qual será a carga, como ela será aplicada ao sistema, que padrão estatístico ela terá?

#### Definição dos padrões de medida

O que será medido, qual o arranjo de memórias, processadores, rede de comunicação, compiladores, etc.



# E o que fazer com as medidas?

Com as medidas em mãos passa-se para a fase de otimização.

Para essa fase podem ser usadas algumas ferramentas automáticas e, principalmente, alterações de estilo de programação.

#### Gargalos de software



Os pontos críticos para a melhoria de desempenho são chamados gargalos.

Podem ser de três tipos:

Linguagem (ou estruturas utilizadas)

**Funções** 

Blocos de repetição



# Gargalos de linguagem



A escolha da linguagem de programação deve levar em consideração:

Favorecimento de estruturas simples e estáticas

Não uso de ponteiros e estruturas dinâmicas

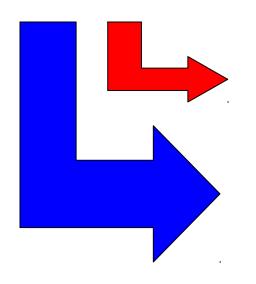


# Gargalos de linguagem



#### Um exemplo:

Montagem de um grafo de +/- 70 mil vértices



2 horas com ponteiros

Menos que 30 segundos com vetores



# Gargalos em funções



Programação estruturada é elegante e deve ser sempre buscada.

entretanto.....

Sobrecarrega o sistema com excessos de modularização e estruturação do código fonte



# Gargalos em funções

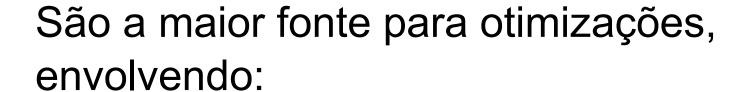


Para obter desempenho deve-se evitar o uso de funções curtas (muito antigamente economizava-se memória com elas).

Deve-se usar alinhamento de funções (*function inlining*) no lugar de suas chamadas.



#### Gargalos em blocos de repetição



Desdobramento de código

Remoção de testes desnecessários

Inversão de aninhamentos

Fissão ou fusão de laços



#### Desdobramento de laços

# GSPD

#### Desdobramentos

DO I=1, N

A(I) = A(I) + B(I) \* C  
ENDDO  
DO I=1,N,4  

$$K=I+1$$
  
.....  
A(I) = A(I) + B(I) \* C  
A(k) = A(k) + B(k) \* C  
A(L) = A(L) + B(L) \* C  
A(M) = A(M) + B(M) \* C

ENDDO



#### Condições de paralelismo



Embora a solução para a computação de alto desempenho seja o paralelismo, nem tudo pode ser paralelizado e mesmo quando isso é possível, existem restrições na forma em que isso ocorre.

Essas restrições estão bem definidas através das chamadas condições de paralelismo.



## Condições de paralelismo



#### São três:

Dependência de dados (ou Condições de Bernstein)

Dependência de controle

Dependência de recursos

#### Dependência de recursos



É bastante natural, restringindo o paralelismo ao volume de recursos que podem ser simultaneamente utilizados.

Trata de recursos como registradores, memória, canais de conexão, acesso a arquivos, etc.



#### Dependência de controle



Ocorre quando as instruções que devem ser executadas (e portanto paralelizadas) dependem de resultados que serão conhecidos apenas em tem po de execução

Não se pode contornar essa dependência quando ela ocorre.



#### Dependência de dados



#### Assume três formas:

Fluxo

Antidependência

Saída

#### Dependência de fluxo de dados

Ocorre quando o resultado (saída) de um grupo de instruções (S1) é necessário (entrada) para a execução de um segundo grupo de instruções (S2)

$$A = X + Y$$

$$B = A + C$$

$$D = B * 2$$



## Antidependência





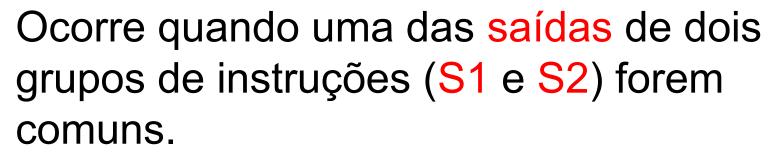
Ocorre quando a saída de um grupo de instruções (S2) for entrada para um grupo de instruções (S1), que o anteceda numa execução sequencial.

$$A = 2$$

$$X = A + 1$$



## Dependência de saída de dados



$$A = 2$$

$$X = A + 1$$

$$A = 5$$



#### Condições de Bernstein

Formalizam as dependências de fluxo de dados.

Algumas definições:

**Processo** ⇒ fragmento de um programa

Conjunto de entrada (I<sub>i</sub>) ⇒ entradas necessárias para executar P<sub>i</sub>

Conjunto de saída (O<sub>i</sub>) ⇒ saídas produzidas pela execução de P<sub>i</sub>



#### Condições de Bernstein



Dois processos podem executar em paralelo (Pi // Pk ; i<k) se:

$$I_i \cap O_k = \emptyset \Rightarrow$$
 antidependência

$$I_k \cap O_i = \emptyset \Rightarrow fluxo$$

$$O_i \cap O_k = \emptyset \Rightarrow saída$$



#### Condições de Bernstein



Ampliando-se tais condições para *n* processos temos:

 $P_1 // P_2 // P_3 // ... // P_n$  se e somente se:

 $P_i // P_j$  para todo i,j = 1...n e  $i \neq j$ 



#### Voltando ao nosso exemplo



O que pode ser modificado para melhorar sua execução?

Como será mais conveniente particionar os elementos da matriz?

Qual seria o número adequado de processos em paralelo?

Isso muda se mudarmos o grau de discretização da chapa?



#### Voltando ao nosso exemplo



E o que acontece se precisarmos de mais precisão nos resultados?

Como, por exemplo, calcular π com 500 dígitos de precisão?

