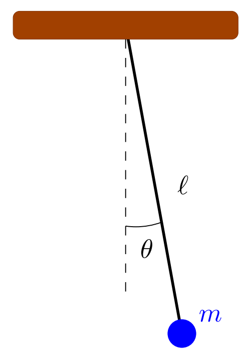
Introdução à Física Computacional - 7600017 - 2S/2023
Projeto 4 — Equações diferenciais e o movimento oscilatório
Prazo de entrega: 12/11

DESCRIÇÃO:

Este projeto tem por objetivo estudar a dinâmica de sistemas simples. Para isso, algumas técnicas de resolução de equações diferenciais serão apresentadas. Mais precisamente, usaremos os métodos de Euler e Euler-Cromer para estudar o movimento oscilatório de um pêndulo simples.

Para este projeto, todos os seus programas devem usar precisão real dupla (real*8).

O PÊNDULO SIMPLES



Considere o movimento de um pêndulo simples como mostrado na figura ao lado. A equação diferencial correspondente vem da segunda lei de Newton e se resume a

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\mathrm{sen}\theta, \tag{1}$$

onde g é a aceleração da gravidade, ℓ é o tamanho da haste rígida de massa desprezível que conecta o ponto de oscilação ao pêndulo de massa m. A energia mecânica (cinética + potencial) é dada por

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 + mg\ell\left(1 - \cos\theta\right), \tag{2}$$

onde

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}, \tag{3}$$

é a velocidade angular.

No limite de pequenas oscilações ($\theta_{\max} \ll 1$), a Eq. (1) se torna $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$ e, portanto, o movimento é harmônico com período $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ e

$$\theta\left(t\right) = \theta_{\max}\cos\left(\Omega_0 t + \phi\right). \tag{4}$$

A frequência natural de oscilação harmônica é $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. As constantes $\theta_{\max}$ e ϕ dependem das condições iniciais do problema.

Nosso objetivo é estudar o período T no caso geral. Para usar o método de Euler, devemos transformar a equação diferencial de segunda ordem Eq. (1) em duas de primeira ordem, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{\ell}\mathrm{sen}\theta \;\rightarrow\; \omega_{i+1} = \omega_i - \Omega_0^2\mathrm{sen}\theta_i\Delta t, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega \;\rightarrow\; \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t, \tag{6}$$

onde $t = i\Delta t$ é o tempo na i-ésima iteração do método.

Para $m = 1$ Kg, $\ell = 1$ m e $g = 9.8$ m/s^2. O período do movimento harmônico correspondente é $T = 2.00709$ s. Pare evitar casos particulares, é conveniente estudar o problema em variáveis adimensionais. Neste caso, é natural definir $\tau = \Omega_0 t$. Ou seja, τ mede o tempo em unidades do inverso da frequência natural de oscilação Ω_0. Como o ângulo θ está em radianos, não há necessidade de redefini-lo porque já é adimensional. A velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$, entretanto, deve ser substituída por $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$, que é equivalente a fazer $\omega \rightarrow \omega/\Omega_0$. Analogamente, devemos fazer $\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta}/\Omega_0^2$. Sendo assim, as Eqs. (1), (2), (4)–(6) simplificam para

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -\sin\theta, && (7)\\
\mathcal{E} = \frac{E}{mg\ell} &= 1-\cos\theta+\frac{1}{2}\omega^2, && (8)\\
\theta(\tau) &= \theta_{\max}\cos(\tau+\phi). && (9)\\
\omega_{i+1} &= \omega_i - \mathrm{sen}\theta_i\Delta\tau, && (10)\\
\theta_{i+1} &= \theta_i+\omega_i\Delta\tau. && (11)
\end{aligned}$$

1. **Aproximação harmônica:**

   (a) Escreva um programa que resolva o pêndulo simples na aproximação harmônica pelo método de Euler, ou seja, seu programa deve iterar a equação diferencial correspondente

   $$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \approx -\theta \;\rightarrow\; \omega_{i+1} = \omega_i - \theta_i\Delta\tau, \qquad (12)$$
   $$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega \;\rightarrow\; \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta\tau. \qquad (13)$$

   Mostre no mesmo gráfico $\theta(\tau)$ e a solução analítica (4).
   Mostre no mesmo gráfico a energia mecânica total $\mathcal{E}(\tau)$ (na aproximação harmônica) e sua solução analítica esperada.
   Discuta seus resultados.
   OBS.: Imponha que $-\pi \le \theta < \pi$. Ou seja, se ao longo das iterações θ_i ficar maior do que π em módulo, faça $\theta_i \rightarrow \theta_i \pm 2\pi$ (com o sinal adequado).

   (b) Uma alternativa para o método de Euler é o método de Euler-Cromer. Neste as Eqs. (12) e (13) são modificadas para

   $$\begin{aligned}
   \omega_{i+1} &= \omega_i - \theta_i\Delta\tau, && (14)\\
   \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_{i+1}\Delta\tau. && (15)
   \end{aligned}$$

   Repita as tarefas do item anterior para o método de Euler-Cromer.

2. **Período do pêndulo simples:**

   (a) Escreva um código FORTRAN que implemente o método de Euler-Cromer para o pêndulo simples (7). Soltando o pêndulo de alguns valores de θ_0 (com $\omega_0 = 0$), calcule o período de oscilação correspondente. Compare seus resultados com o valor obtido pela integral elíptica

   $$\mathcal{T} = \Omega_0 T = \sqrt{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

   Esta integral deve ser calculada numericamente utilizando um método de sua escolha. Cuidado com as singularidades nos limites de integração $\pm\theta_0$. (Faça uma tabela e um gráfico de $\mathcal{T}$ como função de θ_0.)

   (b) Considere valores pequenos de θ_0 e verifique que

   $$\mathcal{T} \approx 2\pi\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2\right).$$

3. **Pêndulo amortecido:**
   Na presença de uma força viscosa, a equação de movimento (1) é alterada para $\ddot{\theta} = -\Omega_0^2\mathrm{sen}\theta - b\dot{\theta}$, onde b é uma constante. (Caso o pêndulo seja uma esfera de raio R imerso num fluido de viscosidade η, a força viscosa é tal que $b = \frac{6\pi R\eta}{m}$.) Novamente, trabalhando com variáveis adimensionais, a equação diferencial se torna

   $$\ddot{\theta} = -\mathrm{sen}\theta - \gamma\dot{\theta}, \qquad (16)$$

   onde $\gamma = b/\Omega_0$ é o coeficiente de Stokes adimensional. Escreva um código FORTRAN que implemente o método de Euler-Cromer para o caso amortecido. Tomando $\gamma = \frac{1}{2}$, faça o gráfico de θ como função de τ e indique se o movimento é sub-, super- ou criticamente amortecido.

4. **Pêndulo amortecido e forçado:**
Além da força viscosa, desejamos estudar o caso em que há também uma força externa sobre o pêndulo. Uma maneira simples é considerar que há um torque externo sobre o pêndulo igual a $N_{\text{ext}}(t) = N_0 \sin(\Omega t)$. Neste caso, a equação de Newton para o ângulo do pêndulo é $\ddot{\theta} = -\Omega_0^2 \text{sen}\theta - b\dot{\theta} + \frac{N_0}{m\ell^2} \sin(\Omega t)$. Novamente, trabalhando com quantidades adimensionais, a equação de Newton se torna

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin\theta = \alpha \sin(\nu\tau), \tag{17}$$

onde $\nu = \Omega/\Omega_0$ é a frequência da força externa em unidades da frequência natural e $\alpha = \frac{N_0}{\Omega_0^2 m\ell^2}$ é uma constante adimensional que parametriza a intensidade do termo forçante. Escreva um código FORTRAN que implemente o método de Euler-Cromer para a Eq. (17) e faça as tarefas abaixo para $d\tau = 10^{-3}$, $\gamma = 0.05$ e $\nu = 0.7$ fixos, e tempo máximo de simulação $\tau_{\max} = 2\,000\pi$.

(a) Faça os gráficos de $\theta(\tau)$, $\omega(\tau)$ e $\mathcal{E}(\tau)$ para $\alpha = 0.4, 0.5, 0.6, \ldots, 1.0$ e condições iniciais $\theta_0 = \omega_0 = 0$. Em quais casos o sistema é periódico após um transiente τ_{trans}?

(b) Utilizando os mesmos dados do item anterior, faça os gráficos de $\omega(\theta)$.
OBS.: Para os casos periódicos, considere apenas o regime estacionário, i.e., tempos posteriores ao transiente ($\tau > \tau_{\text{trans}}$) e verifique a existência de "círculos limite".

(c) Faça as seções de Poincaré correspondentes. Para isso, repita o item anterior considerando apenas os instantes de tempo múltiplos do período do termo forçante $\mathcal{T}_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{\nu}$.
OBS.: Note que os círculos limites se reduzem a um conjunto finito de pontos. Para o caso não-periódico (que é caótico), a seção de Poincaré é um fractal (no caso, chamado de atrator estranho). Para uma boa visualização deste, agrupe outros pontos refazendo sua simulação para diversas outras condições iniciais.

(d) Para ajudar a quantificar a "caoticidade" do sistema, é comum calcular o expoente de Lyapunov. Refaça o item 4a com uma pequena diferença nas condições inicias, $\theta_0 = 0$ e $\omega_0 = 10^{-10}$, e calcule as novas trajetórias $\theta_{\text{new}}(\tau)$ e $\omega_{\text{new}}(\tau)$. A quantidade de interesse é a diferença entre as trajetórias. Mostre $\delta\theta(\tau) = |\theta(\tau) - \theta_{\text{new}}(\tau)|$ e $\delta\omega(\tau) = |\omega(\tau) - \omega_{\text{new}}(\tau)|$ num mesmo gráfico e obtenha o expoente de Lyapunov ajustando $\delta\theta \propto e^{\lambda_\theta \tau}$ e $\delta\omega \propto e^{\lambda_\omega \tau}$ aos seus dados. Faça uma tabela com os valores de α, λ_θ e λ_ω e verifique que $\lambda_\theta = \lambda_\omega = \lambda$. Quando o expoente de Lyapunov $\lambda > 0$, diz-se que o sistema é caótico, i.e., extremamente sensível às condições iniciais.
OBS.: Note que, para o caso periódico, o regime transiente é caótico.

BREVE DISCUSSÃO SOBRE A EXECUÇÃO DOS PROBLEMAS

Período do pêndulo

O nosso objetivo é obtermos a expressão para o período do pêndulo simples para qualquer amplitude de movimento. Sendo $\theta_{\max}$ a amplitude do movimento oscilatório, a energia mecânica total é $E = mg\ell\,(1-\cos\theta_{\max})$. A relação entre a velocidade angular $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ e o ângulo θ é obtida da conservação de energia:

$$mg\ell\,(1-\cos\theta_{\max}) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mg\ell\,(1-\cos\theta)\,,$$

donde obtemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}\,(\cos\theta-\cos\theta_{\max})}, \tag{18}$$

com o sinal $\pm$ se referindo aos instantes em que θ é positivo e negativo. Por simetria do movimento, $\frac{1}{4}T$ é o tempo necessário para θ ir de 0 até $\theta_{\max}$. Portanto, integrando a Eq. (18) sobre esse intervalo, temos que

$$\int_0^{\frac{T}{4}}\mathrm{d}t = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_{\max}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_{\max}}} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_{\max}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta_{\max}}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}}}. \tag{19}$$

Usando a seguinte mudança de variáveis

$$\mathrm{sen}u = \frac{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{k}, \tag{20}$$

onde $k = \mathrm{sen}\frac{\theta_{\max}}{2}$, e, consequentemente

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos u}{\cos\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}u = \frac{2k\cos u}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2u}}\mathrm{d}u, \tag{21}$$

temos então que

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2u}}. \tag{22}$$

Note que T não depende de m.

É interessante expandir essa integral para $k \ll 1$ (que corresponde limite harmônico de pequenas amplitudes $\theta_{\max} \ll 1$). Logo,

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2u}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{\mathrm{sen}^2u}{2}k^2+\frac{3\mathrm{sen}^4u}{8}k^4+\frac{5\mathrm{sen}^6u}{16}k^6+\dots\right)\mathrm{d}u \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\dots\right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_{\max}^2+\frac{1}{3\,072}\theta_{\max}^4+\frac{173}{737\,280}\theta_{\max}^6+\dots\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Vemos que, de fato, as primeiras correções do período com a amplitude são quadráticas e que no limite de pequenas oscilações recuperamos o resultado harmônico.

O método de Euler e de Euler-Cromer

No método de Euler Eqs. (5) e (6), a energia mecânica total é iterada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= \frac{1}{2}m\ell^2\omega_{i+1}^2 + mg\ell\,(1-\cos\theta_{i+1}) \\ &= E_i + \frac{1}{2}gm\left(\ell\omega_i^2\cos\theta_i + g\sin^2\theta_i\right)(\Delta t)^2 + \mathcal{O}\,(\Delta t)^3\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Dessa maneira, o ganho de energia em um período

$$\Delta E_T = E\left(t+T\right) - E\left(t\right) = \sum_i \Delta E_i, \tag{25}$$

onde $\Delta E_i = E_{i+1} - E_i$, é sempre positivo porque $\cos\theta_i$ é, na maioria das vezes, positivo num período. No caso em que $\theta_{\max} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta_i$ é sempre positivo. Em suma, a energia cresce em média no método de Euler.

Usando o análogo das Eqs. (5) e (6) para o método de Euler-Cromer ($\omega_{i+1} = \omega_i - \Omega_0^2 \text{sen}\theta_i \Delta t$ e $\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1}\Delta t$), a variação de energia de uma iteração para outra muda para

$$E_{i+1} = E_i + \frac{1}{2} gm \left(\ell\omega_i^2 \cos\theta_i - g\sin^2\theta_i\right)\left(\Delta t\right)^2 + \mathcal{O}\left(\Delta t\right)^3. \tag{26}$$

Em contraste com (24), ΔE_i não é necessariamente positivo. Na verdade, em um ciclo $\Delta E_T = 0$ até ordem quadrática em Δt. Esse resultado é fácil de ser mostrado no limite de pequenas oscilações onde podemos usar a aproximação harmônica de que $\theta\left(t\right) = \theta_{\max}\cos\left(\Omega_0 t\right)$ e $\omega\left(t\right) = -\theta_{\max}\Omega_0 \sin\left(\Omega_0 t\right)$. Logo,

$$\Delta E_T \to \sum_i \frac{1}{2} gm \left(\ell\omega_i^2 - g\theta_i^2\right)\left(\Delta t\right)^2 \propto \int_t^{t+T} \left(\omega^2 - \Omega_0^2\theta^2\right) \mathrm{d}t = 0, \tag{27}$$

dado que $\int_t^{t+T} \sin^2\left(\Omega_0 t\right) \mathrm{d}t = \int_t^{t+T} \cos^2\left(\Omega_0 t\right) \mathrm{d}t$. Em suma, no método de Euler-Cromer, a energia é conservada em média desde de que Δt seja suficientemente pequeno.