LISTA DE EXERCÍCIOS 1

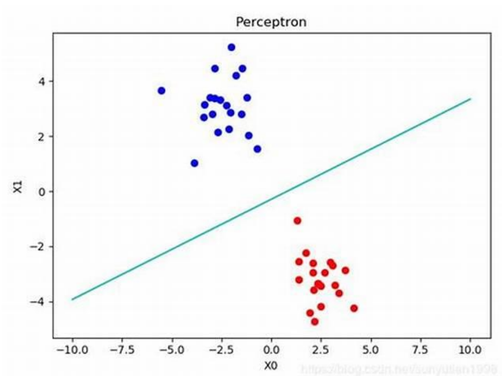
NOME: GABRIEL FERREIRA DE SOUZA ARAUJO

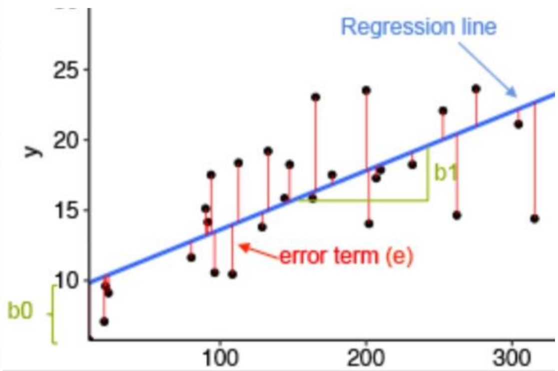
NUSP: 12718100

1. O *espaço de hipóteses* H contém a classe de funções consideradas por um *algoritmo de aprendizagem*, que irá escolher a função h(x) baseado em uma *função de erro* calculada em um conjunto de treinamento. A junção destas três partes é chamada de *modelo de aprendizagem*. O espaço de hipóteses que define a complexidade de um modelo e, consequentemente sua capacidade de generalização. Também, podemos interpretar o espaço de hipóteses como o hiperplano formado por todos possíveis valores dos parâmetros, ak, $\forall k$. Segue abaixo alguns exemplos de espaços de hipóteses; Hipóteses para os modelos Perceptron, regressão linear e regressão logística respectivamente:

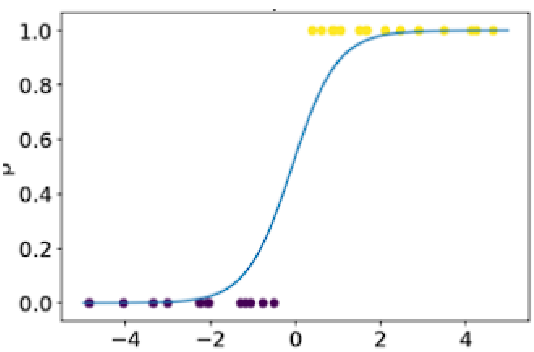
$$h(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} w_i x_i\right) - \text{threshold}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{K} a_i\, x_i.$$



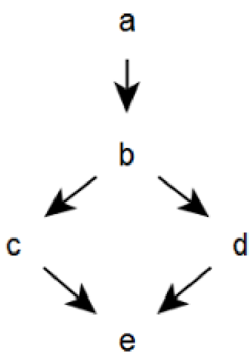


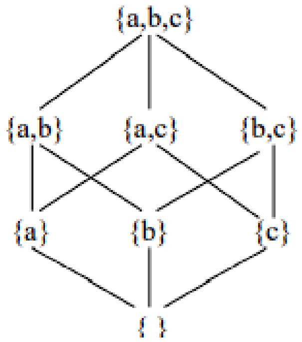
$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

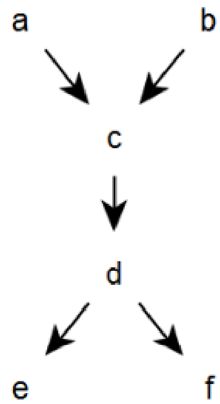


$$\begin{aligned}
&\text{logit}(P(y=1)) = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \\
&\implies P(y=1) = \sigma(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n) \\
&\implies P(y=1) = \frac{1}{1+e^{-(w_0+w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n)}}, \\
&\quad \text{onde } \sigma(a) = \frac{e^a}{1+e^a} = \frac{1}{1+e^{-a}}.
\end{aligned}$$

2. Um conjunto booleano (A, + , · , -, 0, 1) não vazio A com R ⊆ AxA parcialmente ordenado pela relação de ordem ≼ cumprindo com as propriedades de reflexão (x ≤ x, para todo x ∈ A), antissimétrica (se x ≤ y e y ≤ x, então x = y, para todo x, y ∈ A) e transitividade (se x ≤ y e y ≤ z então x ≤ z, para todo x, y, z ∈ A); (R, ≼) e dito reticulado se para quaisquer x, y ∈ R existem o supremo e o ínfimo de {x, y}. Em um diagrama de Hasse, por exemplo, os elementos menores (com relação a ordem parcial) são em geral desenhados abaixo dos elementos maiores. Segue três exemplos de reticulados:







5. Um operador de imagem é uma função que toma como entrada uma imagem e saída outra imagem. Operadores complexos de imagem geralmente são construídos através da combinação de operadores básicos, como dilatações, erosões e convoluções. Um operador de imagens é uma função que transforma uma imagem em outra imagem diferente. Logo, um operador ψ é um elemento de F*un[Fun[E,k],Fun[E,k]]* e é tanto uma função entre reticulados quanto um elemento não reticulado dos operadores. Um operador de imagem ψ é um operador w se e somente se cumprir com as seguintes duas propriedades: invariante à translação: *ψ(t(i,p))=t(ψ(i),p)*, onde *t(i,p)* representa a tradução da imagem i por p∈z2; Localmente definido: existe uma janela w∈z2 tal que ψ(i)*(p)=ψ(i(C)P), ∀ i∈ Fun[E,k],p∈z. Ψ* é um operador entre um reticulado *(Fun[w,k])* e uma cadeia *(k)*, pode ser expresso usando uma decomposição canônica:

$$\psi(I)(p) = \sum_{y=0}^{m} \vee \{\lambda[A,B](I_p^{(W)} : [A,B] \in \mathbf{B}_\psi(k)\}.$$

Pequenos recortes de pixels selecionando os pixels que pertencem à imagem, ou seja, como imagens-janela, de um pixel são fun[w,k], onde w⊂2 é um conjunto de pontos que definem uma vizinhança considerada. A imagem janela iz(w) pode centralizar a janela no pixel z∈z2 na imagem i é dada por:

$$I_z^{(W)}(p) = I(z+p)\forall p \in W.$$

Dado que o conjunto de funções booleanas $\{0,1\}^{\wp(w)}$ é uma rede booleana que herda a estrutura de rede $(\{0,1\}, \leq)$, notamos que $(\{0,1\}, \leq) \forall \psi \in \psi_W$, então temos: $h \in \psi(x) \Leftrightarrow h \in \psi(X \cap W_h) \Leftrightarrow h - h = o \in [\psi(X \cap W_h)]_{-h} \Leftrightarrow o \in \psi([X \cap W_h]_{-h}) \Leftrightarrow o \in \psi(X_{-h} \cap W)$.
Logo, podemos definir que: $\forall X \in \wp(W)$, $\psi \in \psi_w$ temos T: $\psi_w \to \{0,1\}^{\wp(w)}$ definida como:$f_\psi(X) = [T(\psi)](X) = \left\{\frac{1, se\ o \in \psi(x)}{0, caso\ contrário}\right\}$. $\forall X \in \wp(E)$, $h \in E$, $f \in \{0,1\}^{\wp(W)}$ temos T^{-1}: $\{0,1\}^{P(W)} \to \psi_w$ com $\psi_f = T^{-1}(f)$, definida como: $h \in \psi_f(X) \Leftrightarrow f(X_{-h} \cap W) = 1$. Portanto provamos que o espaço de hipóteses H de W-operadores é isomórfico ao espaço de funções Booleanas do conjunto potência de W em {0,1}.