MAC0210 - 1ª Lista de Exercícios - Data de entrega: 31/03/2024

Instruções: as questões em papel devem ser resolvidas à mão e escaneadas; as demais questões devem ser implementadas em Octave. Use os nomes `questaoX[itemY]` para facilitar a identificação e entregue um único arquivo (tgz/zip) no e-disciplinas até as 23:55 do dia 31/03/2024.

$\boxed{\text{Questão 1}}$

(a) (em papel) Realize a dedução e os cálculos análogos aos do exemplo 1.2 usando a expressão

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

para aproximar a primeira derivada $f'(x_0)$. Mostre que o erro é $\mathcal{O}(h^2)$, verificando que o termo dominante do erro é $-\frac{h^2}{6}f'''(x_o)$ quando $f'''(x_o) \neq 0$.

(b) Escreva um código em Octave para produzir uma tabela similar à do exemplo 1.2, com os erros absolutos da aproximação proposta no item(a), e compare-os aos erros da tabela original, através de comentários no código.

(c) Adapte o código do exemplo 1.3 para produzir um gráfico similar ao da figura 1.3, mas correspondente à aproximação do item (a). Discuta (em comentários no código) as diferenças e similaridades do seu gráfico com o da figura 1.3.

$\boxed{\text{Questão 2}}$ (em papel)

De maneira análoga ao exemplo 1.5, verifique o condicionamento do problema de avaliar a função

$$g(x) = \tanh(cx) = \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}$$

perto de $x = 0$ em função do parâmetro $c > 0$ (considere os casos $c = 10^{-2}$, $c = 1$ e $c = 10^{10}$). Dica: use a aproximação de Taylor de primeira ordem de e^x na origem.

$\boxed{\text{Questão 3}}$ (em papel)

Considere o problema do exemplo 1.6, onde vimos um algoritmo numericamente instável (do ponto de vista do acúmulo dos erros de arredondamento).

(a) Deduza uma fórmula para calcular essas integrais na sequência inversa, ou seja, para obter y_{n-1} em função de y_n.

(b) Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ e n inteiro positivo, é possível escolher um $m > n$ tal que, inicializando o algoritmo com $y_m = 0$, obtém-se y_n com erro absoluto menor do que ε. Dica: considere que o erro da inicialização $y_m = 0$ sempre será limitado por $\frac{1}{10}$ (pois em geral $|y_m| < \frac{1}{10}$).

(c) Explique (sucintamente) como o algoritmo gerado pela escolha acima e pela fórmula do item (a) resolve o problema de instabilidade numérica do algoritmo original.

$\boxed{\text{Questão 4}}$ A função $f_1(x_0, h) = \sin(x_o+h)-\sin(x_0)$ pode ser transformada em outra forma $f_2(x_0, h)$ usando a identidade trigonométrica

$$\sin(\phi)-\sin(\psi) = 2\cos\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)$$

de tal forma que $f_2(x_0, h) = f_1(x_0, h)$, $\forall x_0 \forall h$ (em aritmética exata).

Implemente em Octave uma fórmula alternativa que evite os erros de cancelamento ao computar a aproximação $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ para a derivada de $f(x) = \sin(x)$ em $x = x_0$, e use essa fórmula para computar aproximações de $f'(1.2)$ para $h = 1, 0.1, \ldots, 10^{-19}, 10^{-20}$. Explique, através de comentários no código, a diferença de acurácia dos seus resultados em relação aos resultados do exemplo 1.3.

Questão 5

(a) Escreva uma função em Octave que receba como entrada dois parâmetros x e n, e devolva x arredondado para n dígitos decimais, usando apenas operações aritméticas elementares (incluindo exponenciação). Considere que x pode ser escalar, vetor ou matriz, e devolva uma estrutura correspondente (com todas as componentes arredondadas usando n dígitos decimais).

(b) Adapte o código do exemplo 2.2 para testar sua função, refazendo o gráfico da figura 2.2 para ilustrar os erros de arredondamento no cálculo da função $g(t) = e^{-t}(\sin(2\pi t) + 2)$ para $t \in [0, 1]$ usando $n = 5$ casas decimais. Comente no código a relação entre a escala vertical do gráfico e o parâmetro n utilizado, e corrija a última linha que calcula o erro relativo, colocando a expressão correta nesse caso para a unidade de arredondamento η.