NOME: GABRIEL FERREIRA DE SOUZA ARAUJO

NUSP: 12718100

RELATÓRIO EP1

PARTE 1:

Teorema do Ponto Fixo: $g \in C\{a,b\}$ e $a \leq g(x) \leq b \ \forall x \in [a,b] \rightarrow \exists\, x^* \in [a,b]$. E, adicionalmente, $\exists\, g'(x) \rightarrow \exists \rho < 1$: $|g'(x)| \leq \rho \ \forall x \in [a,b]$. Logo, x^* é único no intervalo.

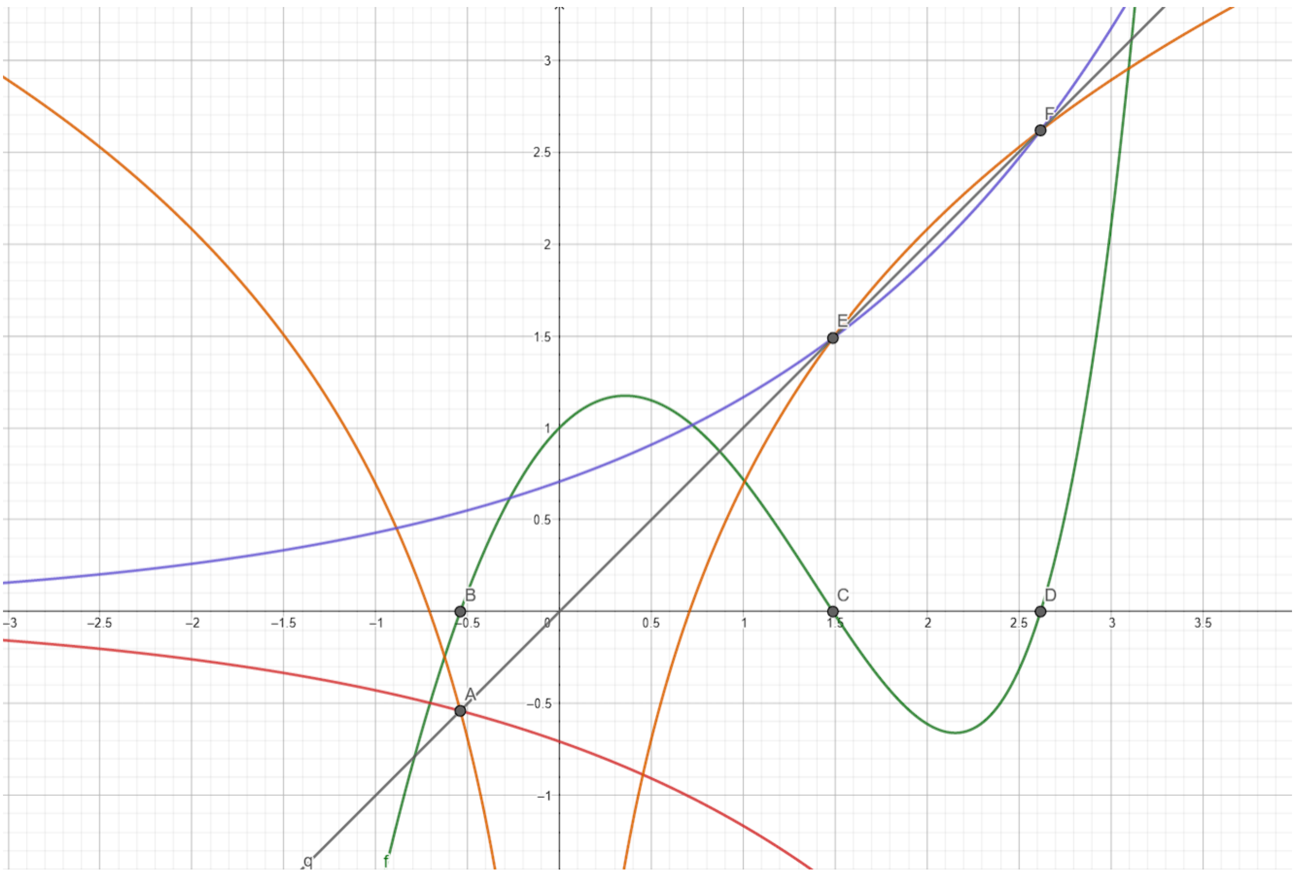
Dada a função do enunciado $f(x) = \exp(x) - 2x^2$, foi possível achar três funções $g(x) = x$ tal que $g(x)$ converge para x^*:

-> $g_1(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$

-> $g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$

-> $g_3(x) = \ln(2x^2)$

Foi gerado um gráfico no Geogebra 2D, para representar a função f , as $g(x)$, e uma reta $h(x) = x$ que intersecta os pontos de convergência ou raízes:



	$f(x) = e^x - 2x^2$
	$g1(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$
	$g3(x) = \log_e(2x^2)$
	$g2(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$
	$h(x) = x$
	A = Intersect(g1, h, (−0.5398352742718, −0.539835277613)) = (-0.5398352742718, -0.539835277613)
	B = Intersect(f, xAxis, (−0.5398352769033, 0)) = (-0.5398352769033, 0)
	C = Intersect(f, xAxis, (1.4879620654982, 0)) = (1.4879620654982, 0)
	D = Intersect(f, xAxis, (2.6178666104621, 0)) = (2.6178666104621, 0)
	E = Intersect(g2, h, (1.4879620655, 1.4879620654995)) = (1.4879620655, 1.4879620654995)
	F = Intersect(g2, h, (2.6178666128215, 2.6178666127457)) = (2.6178666128215, 2.6178666127457)

Com isso, podemos observar visualmente que todas as $g(x)$ escolhidas estão convergindo para x^*. Mas ainda podemos provar pelo teorema enunciado para cada g :

$$\rightarrow \; g_1(x) \; = \; \sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

Dado um intervalo arbitrário $[0,1]$ temos que: $g_1(x) \; \in \; C[0,1] \; e \; 0 \; \leq \; g_1(x) \; \leq \; 1 \; \forall x \in [0,1] \; \rightarrow \; \exists x^*$.

$$\rightarrow \; g_2(x) \; = \; -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$$

Dado um intervalo arbitrário $[-1,0]$ temos que:

$g_2(x) \; \in \; C[-1,0] \; e \; -1 \; \leq \; g_2(x) \; \leq \; 0 \; \forall x \in [-1,0] \; \rightarrow \; \exists x^*$.

$$\rightarrow \; g_3(x) \; = \; \ln(2x^2)$$

Dado um intervalo arbitrário $\left[1, \frac{1}{2}\right]$ temos que:

$$g_3(x) \; \in \; C\left[1, \frac{1}{2}\right] \; e \; 1 \; \leq \; g_1(x) \; \leq \; \frac{1}{2} \; \forall x \in \left[1, \frac{1}{2}\right] \; \rightarrow \; \exists x^*$$

Provamos, pelo teorema do ponto fixo, que as funções g escolhidas convergem para uma raiz de f .

Os Critérios de parada escolhidos foram: $|x_{k+1} - x_k| \; < \; \epsilon_1$ ou $|f(x_k)| \; < \; \epsilon_2$ para um ϵtão pequeno quanto se queira. Foram escolhidos os seguintes pontos iniciais:

```
raiz1 = procura_raizes_g1(1, epsilon1, epsilon2);
raiz2 = procura_raizes_g2(0, epsilon1, epsilon2);
raiz3 = procura_raizes_g3(1, epsilon1, epsilon2);
```

E a saída resultante foi:

```
As três raízes encontradas foram: 1.487956, -0.539834, 2.617870
```

Ao analisar as iterações do método de newton até chegar em uma aproximação válida de acordo com o critério de parada, foi possível notar a taxa de convergência quadrática a cada iteração.

PARTE 2:

Este experimento consiste em plotar as bacias de convergência de várias funções usando o método de Newton para encontrar suas raízes. A ideia é que cada cor na imagem represente uma das raízes da função, permitindo visualizar as regiões em que a função converge para cada uma dessas raízes.

O código foi implementado em linguagem C e usa a biblioteca Gnuplot para plotar as imagens. O programa pede ao usuário que escolha qual função deseja plotar e em seguida gera um arquivo de texto contendo as coordenadas x, y de cada ponto da imagem e a cor correspondente a cada ponto.

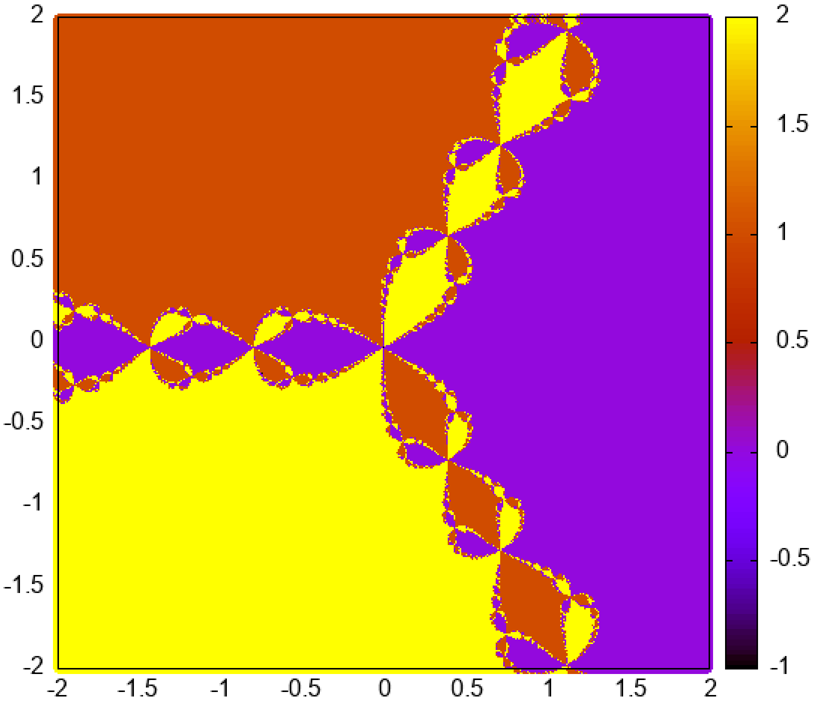
Observa-se que o método de Newton pode não convergir para todas as raízes de uma função, dependendo do ponto inicial escolhido. Assim, é possível que algumas raízes não apareçam na imagem ou que algumas regiões da imagem sejam coloridas erroneamente.

A seguir, apresentamos os resultados e observações obtidas para cada uma das funções.

Função $f(x) = x^3 - 1$

A bacia de convergência da função $f(x) = x^3 - 1$ é composta por três regiões, cada uma correspondendo a uma das raízes da função. A figura gerada mostra claramente essas regiões, com cores distintas para cada raiz.

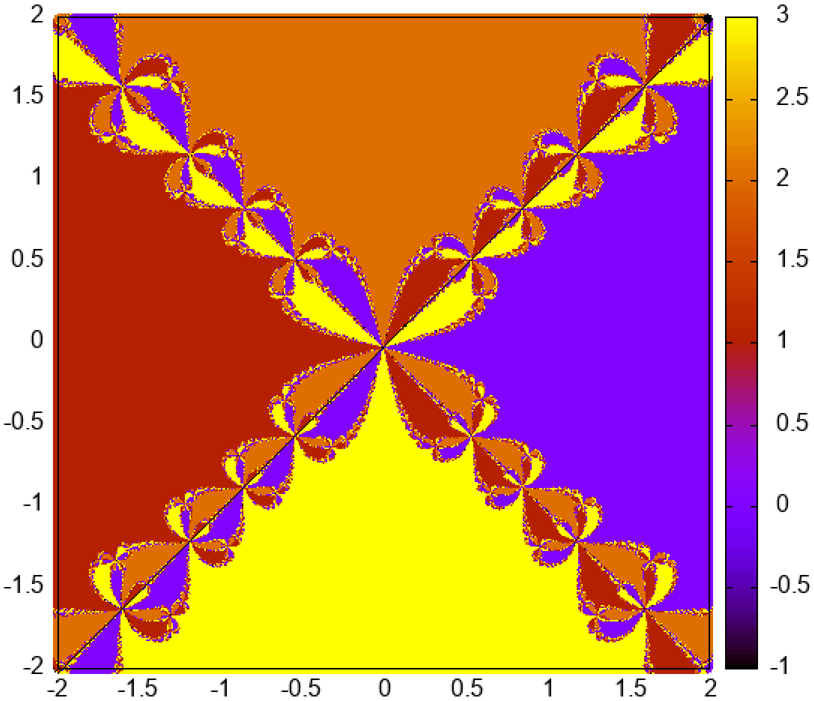
Observa-se que o método de Newton converge rapidamente para todas as raízes da função, independentemente do ponto inicial escolhido.



Função $f(x) = x^4 - 1$

A bacia de convergência da função $f(x) = x^4 - 1$ é composta por quatro regiões, cada uma correspondendo a uma das raízes da função. A figura gerada mostra essas regiões, com cores distintas para cada raiz.

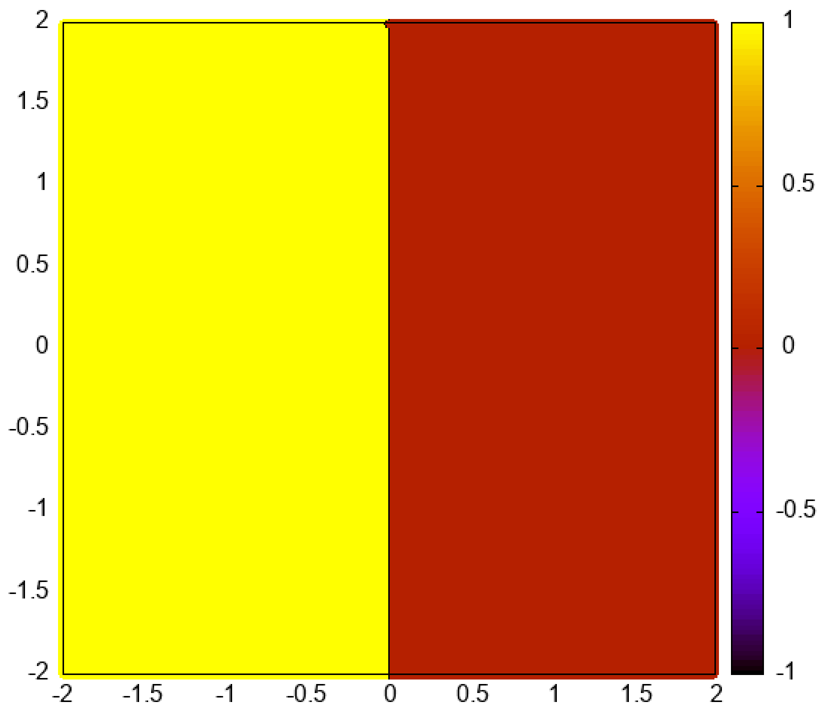
Observa-se que o método de Newton converge rapidamente para três das quatro raízes da função, independentemente do ponto inicial escolhido. No entanto, a raiz -1 não é encontrada em algumas regiões da imagem, indicando que o método de Newton não converge para essa raiz a partir desses pontos iniciais.



Função $f(x) = x^2 - 1$

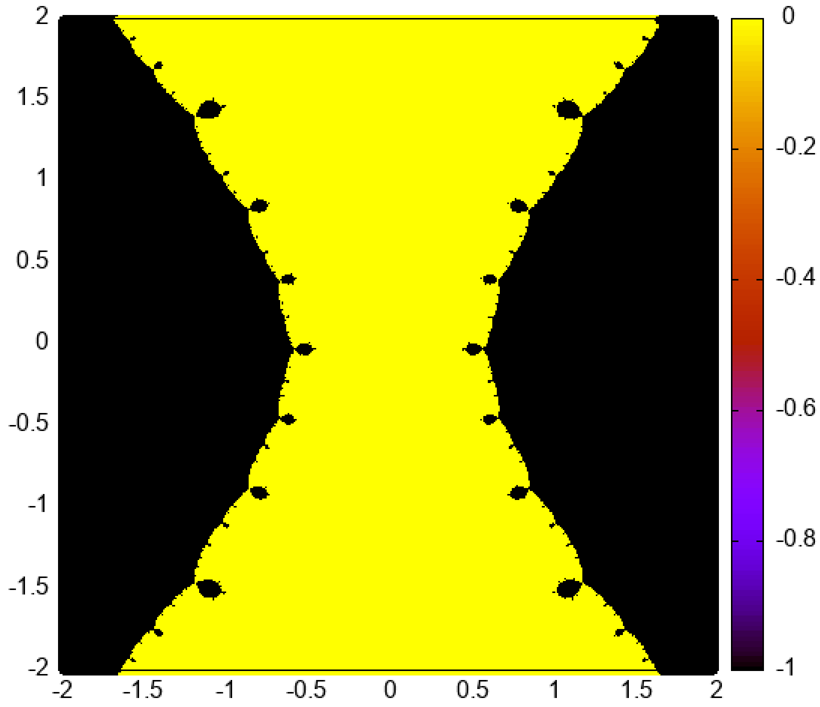
A bacia de convergência da função $f(x) = x^2 - 1$ é composta por duas regiões, cada uma correspondendo a uma das raízes da função. A figura gerada mostra claramente essas regiões, com cores distintas para cada raiz.

Observa-se que o método de Newton converge rapidamente para ambas as raízes da função, independentemente do ponto inicial escolhido.



Função $f(x) = x^3 - x$

A bacia de convergência da função x^3 - x é composta por três regiões, cada uma correspondendo a uma das raízes da função. A figura gerada mostra essas regiões, com cores distintas para cada raiz.



Função $f(x) = x^4 - 2$

A bacia de convergência da função $f(x) = x^4 - 2$ segue o mesmo comportamento da função $f(x) = x^4 - 1$, entretanto, ao diminuir uma unidade da constante é possível nota-se há uma alteração nas raízes e por consequência no arranjo das cores. Também as ‘folhas’ da imagem ficam mais achatadas indicando uma distância maior entre as raízes.

Observa-se que o método de Newton converge rapidamente para duas das três raízes da função, independentemente do ponto inicial escolhido. No entanto, a raiz 0 não é encontrada em algumas regiões da imagem, indicando que o método de Newton não converge para essa raiz a partir desses pontos iniciais.