CK0048 - Métodos Numéricos II

Tarefa 18 - Método Preditor-Corretor de Quarta Ordem

Gabriel Freire do Vale - 418788
Pedro Ernesto de Oliveira Primo - 418465

3 de outubro de 2020

1 Método Preditor-Corretor de Quarta Ordem

Neste método, k = 2. Portanto, os pontos $(t_{i-3}, F(S_{i-3}, t_{i-3}))$, $(t_{i-2}, F(S_{i-2}, t_{i-2}))$, $(t_{i-1}, F(S_{i-1}, t_{i-1}))$ e $(t_i, F(S_i, t_i))$ serão usados para construir a função $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} \approx g(t)$ que será usada como integrando na equação

$$S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

Neste caso, a função $g(t)$ é um polinômio de terceiro grau. A integral que aparece na equação (1) fica mais fácil de calcular se for feita uma mudança de variáveis como no caso do desenvolvimento das fórmulas de integração de Newton-Cotes. Assim,

$$I = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\mathrm{d}t = \int_3^4 g(t(r))\frac{\mathrm{d}t(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \int_3^4 \hat{g}(r)\frac{\mathrm{d}t(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r, \tag{2}$$

onde $\hat{g}(r)$ é o polinômio de interpolação de Newton de terceiro grau na variável r com os pontos de interpolação $F(S_{i-3}, t_{i-3})$, $F(S_{i-2}, t_{i-2})$, $F(S_{i-1}, t_{i-1})$ e $F(S_i, t_i)$, e $t(r)$ é a parametrização da variável t como função da nova variável r em que $r = 0$ corresponde a t_{i-3}. Assim, tem-se:

$$t(r) = t_{i-3} + r \cdot \Delta t \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}t(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \Delta t \tag{4}$$

$$\hat{g}(r) = \sum_{i=0}^{3} \Delta_0^i F_{i-3} \cdot \frac{r!}{i! \cdot (r-i)!} \tag{5}$$

$$\Delta_0 F_{i-3} = F_{i-3}, \tag{6}$$

$$\Delta_0^1 F_{i-3} = F_{i-2} - F_{i-3}, \tag{7}$$

$$\Delta_0^2 F_{i-3} = F_{i-1} - 2 \cdot F_{i-2} + F_{i-3}, \tag{8}$$

$$\Delta_0^3 F_{i-3} = F_i - 3 \cdot F_{i-1} + 3 \cdot F_{i-2} - F_{i-3}. \tag{9}$$

Portanto, substituindo-se as equações (4) e (5) em (2), obtém-se

$$\begin{aligned}
I &= \int_3^4 \hat{g}\left(r\right) \frac{\mathrm{d}t\left(r\right)}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r \\
&= \Delta t \cdot \int_3^4 \Delta_0 F_{i-3} \mathrm{d}r + \Delta t \cdot \int_3^4 \Delta_0^1 F_{i-3} \cdot r \mathrm{d}r + \Delta t \cdot \int_3^4 \frac{1}{2} \cdot \Delta_0^2 F_{i-3} \cdot \left(r^2 - r\right) \mathrm{d}r + \\
&+ \int_3^4 \frac{1}{6} \cdot \Delta_0^3 F_{i-3} \cdot \left(r^3 - 3 \cdot r^2 + 2 \cdot r\right) \mathrm{d}r \\
&= \Delta t \cdot \left[\Delta_0 F_{i-3} + \frac{7}{2} \cdot \Delta_0^1 F_{i-3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{53}{6} \cdot \Delta_0^2 F_{i-3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{55}{4} \cdot \Delta_0^3 F_{i-3}\right]
\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$I = \Delta t \cdot \left[\Delta_0 F_{i-3} + \frac{7}{2} \cdot \Delta_0^1 F_{i-3} + \frac{53}{12} \cdot \Delta_0^2 F_{i-3} + \frac{55}{24} \cdot \Delta_0^3 F_{i-3}\right] \tag{10}$$

Substituindo-se (6) a (9) em (10), tem-se

$$\begin{aligned}
I &= \Delta t \cdot \left[F_{i-3} + \frac{7}{2} \cdot \left(F_{i-2} - F_{i-3}\right) + \frac{53}{12} \cdot \left(F_{i-1} - 2 \cdot F_{i-2} + F_{i-3}\right) + \frac{55}{24} \cdot \left(F_i - 3 \cdot F_{i-1} + 3 \cdot F_{i-2} - F_{i-3}\right)\right] \\
&= \Delta t \cdot \left[F_{i-3} \cdot \left(1 - \frac{7}{2} + \frac{53}{12} - \frac{55}{24}\right) + F_{i-2} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{53}{6} + \frac{55}{8}\right) + F_{i-1} \cdot \left(\frac{53}{12} - \frac{55}{8}\right) + \frac{55}{24} \cdot F_i\right] \\
&= \Delta t \cdot \left(-\frac{9}{24} \cdot F_{i-3} + \frac{37}{24} \cdot F_{i-2} - \frac{59}{24} \cdot F_{i-1} + \frac{55}{24} \cdot F_i\right)
\end{aligned}$$

Assim, a fórmula de predição é:

$$\bar{S}_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24} \cdot \left(-9 \cdot F_{i-3} + 37 \cdot F_{i-2} - 59 \cdot F_{i-1} + 55 \cdot F_i\right) \tag{11}$$

Agora que se tem uma estimativa de $\bar{S}_{i+1}$ calculada a partir da história formada pelos três últimos estados, pode-se repetir o processo, construindo $g(t)$ a partir dos pontos $F\left(S_{i-2}, t_{i-2}\right)$, $F\left(S_{i-1}, t_{i-1}\right)$ e $F\left(S_i, t_i\right)$ e $F\left(S_{i+1}, t_{i+1}\right)$. Assim

$$\hat{g}\left(r\right) = \sum_{i=0}^{3} \Delta_0^i F_{i-2} \cdot \frac{r!}{i! \cdot (r-i)!} \tag{12}$$

$$\Delta_0 F_{i-2} = F_{i-2}, \tag{13}$$

$$\Delta_0^1 F_{i-2} = F_{i-1} - F_{i-2}, \tag{14}$$

$$\Delta_0^2 F_{i-2} = F_i - 2 \cdot F_{i-1} + F_{i-2}, \tag{15}$$

$$\Delta_0^3 F_{i-2} = F_{i+1} - 3 \cdot F_i + 3 \cdot F_{i-1} - F_{i-2}. \tag{16}$$

Como o ponto r = 0 da nova parametrização corresponde agora ao ponto t_{i-2}, integral da equação 1 fica:

$$\int_2^3 \hat{g}\left(r\right) \frac{\mathrm{d}t\left(r\right)}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r \tag{17}$$

Fazendo as substituições de (4) e (12), tem-se:

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 \hat{g}\left(r\right) \frac{\mathrm{d}t\left(r\right)}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r \\
&= \Delta t \cdot \int_2^3 \Delta_0 F_{i-2} \mathrm{d}r + \Delta t \cdot \int_2^3 \Delta_0^1 F_{i-2} \cdot r \mathrm{d}r + \Delta t \cdot \int_2^3 \frac{1}{2} \cdot \Delta_0^2 F_{i-2} \cdot \left(r^2 - r\right) \mathrm{d}r + \\
&+ \int_2^3 \frac{1}{6} \cdot \Delta_0^3 F_{i-2} \cdot \left(r^3 - 3 \cdot r^2 + 2 \cdot r\right) \mathrm{d}r \\
&= \Delta t \cdot \left[\Delta_0 F_{i-2} + \frac{5}{2} \cdot \Delta_0^1 F_{i-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{6} \cdot \Delta_0^2 F_{i-2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} \cdot \Delta_0^3 F_{i-2}\right]
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$I = \Delta t \cdot \left[\Delta_0 F_{i-2} + \frac{5}{2} \cdot \Delta_0^1 F_{i-2} + \frac{23}{12} \cdot \Delta_0^2 F_{i-2} + \frac{9}{24} \cdot \Delta_0^3 F_{i-2}\right] \tag{18}$$

Substituindo-se (13) a (16) em (18), tem-se:

$$\begin{aligned}
I &= \Delta t \cdot \left[F_{i-2} + \frac{5}{2} \cdot \left(F_{i-1} - F_{i-2}\right) + \frac{23}{12} \cdot \left(F_i - 2 \cdot F_{i-1} + F_{i-2}\right) + \frac{9}{24} \cdot \left(F_{i+1} - 3 \cdot F_i + 3 \cdot F_{i-1} - F_{i-2}\right)\right] \\
&= \Delta t \cdot \left[F_{i-2} \cdot \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{23}{12} - \frac{9}{24}\right) + F_{i-1} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{23}{6} + \frac{9}{8}\right) + F_i \cdot \left(\frac{23}{12} - \frac{9}{8}\right) + \frac{9}{24} \cdot F_{i+1}\right]
\end{aligned}$$

Portanto:

$$I = \Delta t \left(\frac{1}{24} \cdot F_{i-2} - \frac{5}{24} \cdot F_{i-1} + \frac{19}{24} \cdot F_i + \frac{9}{24} \cdot F_{i+1}\right) \tag{19}$$

Substituindo (19) em (1), tem-se a chamada fórmula de correção:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24} \cdot (F_{i-2} - 5 \cdot F_{i-1} + 19 \cdot F_i + 9 \cdot F_{i+1}) \tag{20}$$

Para usar a fórmula de predição (equação (11)), são necessários os estados dos instantes t_i, t_{i-1}, t_{i-2} e t_{i-3}. Portanto, (11) só pode começar a ser usada a partir de $i = 3$.Portanto, os estados S_1, S_2 e S_3 devem ser obtidos por um método de passo simples equivalente (quarta ordem), como Runge-Kutta de quarta ordem.

Resumo:

1. **Inicialização:** Obter os estados S_1, S_2 e S_3 pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.

2. **Fase de predição:** Estimar o estado S_{i+1}

$$\bar{S}_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24} \cdot (-9 \cdot F_{i-3} + 37 \cdot F_{i-2} - 59 \cdot F_{i-1} + 55 \cdot F_i)$$

3. **Fase de correção:** Atualizar o estado S_{i+1}

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24} \cdot (F_{i-2} - 5 \cdot F_{i-1} + 19 \cdot F_i + 9 \cdot F_{i+1})$$

2 Tabela do Trabalho 17 utilizando Método Preditor-Corretor

Δt	Y_{max}	T_{max}	T_{total}	$V_{impacto}$
0.1	201.134429	0.6000	7.8000	-47.938653
0.01	201.200117	0.4900	7.7900	-47.898548
0.001	201.200237	0.4860	7.7900	-47.898548
0.0001	201.200242	0.4851	7.7898	-47.897746