# CK0048 - Métodos Numéricos II

Trabalho 5

Gabriel Freire do Vale - 418788
Pedro Ernesto de Oliveira Primo - 418465

13 de abril de 2020

## 1 Quadratura de Gauss-Legendre com 4 Pontos de Interpolação

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{x_f - x_i}{2} \cdot \left[\sum_{k=1}^{4} f(x(\alpha_k)) \cdot w_k\right] \\
&= \frac{x_f - x_i}{2} \cdot [f(x(\alpha_1)) \cdot w_1 + f(x(\alpha_2)) \cdot w_2 + f(x(\alpha_3)) \cdot w_3 + f(x(\alpha_4)) \cdot w_4]
\end{aligned} \tag{1}
$$

### 1.1 Quem são $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ e $\alpha_4$?

Os valores de $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ e $\alpha_4$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau 4, $P_3(\alpha)$. Temos:

$$
\begin{aligned}
P_3(\alpha) &= \frac{1}{2^4 \cdot 4!} \cdot \frac{d^4}{d\,\alpha^4} \cdot \left[(\alpha^2 - 1)^4\right] \\
&= \frac{1}{384} \cdot \frac{d^4}{d\,\alpha^4} \cdot \left[\alpha^8 - 4 \cdot \alpha^6 + 6 \cdot \alpha^4 - 4 \cdot \alpha^2 + 1\right] \\
&= \frac{1}{384} \cdot \left(1680 \cdot \alpha^4 - 1440 \cdot \alpha^2 + 144\right) \\
&= \frac{1}{8} \cdot \left(35 \cdot \alpha^4 - 30 \cdot \alpha^2 + 3\right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Resolvendo a equação abaixo, encontramos as raízes de $P_3(\alpha)$, com aproximação de 8 casas decimais:

$$P_3(\alpha) = \frac{1}{8} \cdot \left(35 \cdot \alpha^4 - 30 \cdot \alpha^2 + 3\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sqrt{\left(3 + 2 \cdot \sqrt{6/5}\right)/7} \approx 0.86113631, \\
\alpha_2 &= -\sqrt{\left(3 + 2 \cdot \sqrt{6/5}\right)/7} \approx -0.86113631, \\
\alpha_3 &= \sqrt{\left(3 - 2 \cdot \sqrt{6/5}\right)/7} \approx 0.33998104, \\
\alpha_4 &= -\sqrt{\left(3 - 2 \cdot \sqrt{6/5}\right)/7} \approx -0.33998104
\end{aligned} \tag{3}$$

Com essas informações, podemos calcular os valores correspondentes da variável x.

## 1.2 Cálculo de $x(\alpha_1)$, $x(\alpha_2)$, $x(\alpha_3)$ e $x(\alpha_4)$

Com os dados de entrada $x_i$ e $x_f$ e com os valores $\alpha_1 = 0.86113631$, $\alpha_2 = -0.86113631$, $\alpha_3 = 0.33998104$, $\alpha_4 = -0.33998104$, podemos usar a fórmula

$$x(\alpha_k) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \cdot \alpha_k \tag{4}$$

para obter

$$x(\alpha_1) = x(0.86113631) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \cdot (0.86113631) \tag{5}$$

$$x(\alpha_2) = x(-0.86113631) = \frac{x_i + x_f}{2} - \frac{x_f - x_i}{2} \cdot (-0.86113631) \tag{6}$$

$$x(\alpha_3) = x(0.33998104) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \cdot (0.33998104) \tag{7}$$

e

$$x(\alpha_4) = x(-0.33998104) = \frac{x_i + x_f}{2} - \frac{x_f - x_i}{2} \cdot (-0.33998104) \tag{8}$$

Por fim, precisamos calcular os valores dos pesos $w_1,\ w_2,\ w_3,$ e $w_4$.

### 1.3 Cálculo dos pesos $w_1,\ w_2,\ w_3,$ e $w_4$

Pela fórmula

$$w_k = \int_{-1}^{1} L_k(\alpha)\, d\alpha \tag{9}$$

vemos que o peso $w_k$ depende do polinômio interpolador de Lagrange $L_k(\alpha)$.

Sabemos que a área do polinômio $L_2(\alpha)$ é igual a de $L_1(\alpha)$ e a área de $L_4(\alpha)$ é igual a de $L_3(\alpha)$. Logo, $w_2 = w_1$ e $w_3 = w_4$.

Como os polinômios $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$, $L_3(\alpha)$ e $L_4(\alpha)$ passam por quatro pontos de interpolação, eles são polinômios do terceiro grau escritos como

$$\begin{aligned}
L_1(\alpha) &= \tfrac{(\alpha-\alpha_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)} \cdot \tfrac{(\alpha-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)} \cdot \tfrac{(\alpha-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_4)} \\
&= \tfrac{(\alpha+0.86113631)}{(2\cdot 0.86113631)} \cdot \tfrac{(\alpha-0.33998104)}{(0.86113631-0.33998104)} \cdot \tfrac{(\alpha+0.33998104)}{(0.86113631+0.33998104)} \qquad (10)\\
&= \tfrac{\alpha^3+0{,}86113631\cdot\alpha^2-0.11558711\cdot\alpha-0.09953626}{1{,}07808864}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3(\alpha) &= \tfrac{(\alpha-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_1)} \cdot \tfrac{(\alpha-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_2)} \cdot \tfrac{(\alpha-\alpha_4)}{(\alpha_3-\alpha_4)} \\
&= \tfrac{(\alpha-0.86113631)}{(0.33998104-0.86113631)} \cdot \tfrac{(\alpha+0.86113631)}{(0.33998104+0.86113631)} \cdot \tfrac{(\alpha+0.33998104)}{(2\cdot 0.33998104)} \qquad (11)\\
&= \tfrac{\alpha^3+0.33998104\cdot\alpha^2-0{,}74155574\cdot\alpha-0.25211489}{-0{,}42563494}
\end{aligned}$$

Substituindo (10) em (9), temos:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \tfrac{1}{1{,}07808864} \cdot \left(\int_{-1}^{1} \alpha^3\, d\alpha + 0{,}86113631 \cdot \int_{-1}^{1} \alpha^2\, d\alpha - 0.11558711 \cdot \int_{-1}^{1} \alpha\, d\alpha - \int_{-1}^{1} 0.09953626\, d\alpha\right) \\
&= \tfrac{1}{1{,}07808864} \cdot \left(0 + 0{,}86113631 \cdot \tfrac{2}{3} - 0.11558711 \cdot 0 - 0.19907252\right) \\
&= \tfrac{0.37501835}{1{,}07808864} = 0.34785484 = w_2
\end{aligned} \tag{12}$$

Agora, substituindo (11) em (9):

$$
\begin{aligned}
w_3 &= \tfrac{-1}{0{,}42563494} \cdot \left( \int_{-1}^{1} \alpha^3 \, d\alpha + 0.33998104 \cdot \int_{-1}^{1} \alpha^2 \, d\alpha - 0,74155574 \cdot \int_{-1}^{1} \alpha \, d\alpha - \int_{-1}^{1} 0.25211489 \, d\alpha \right) \\
&= \tfrac{-1}{0{,}42563494} \cdot \left(0 + 0.33998104 \cdot \tfrac{2}{3} - 0,74155574 \cdot 0 - 0.50422978\right) \\
&= \tfrac{0.27757575}{0{,}42563494} = 0.65214512 = w_4
\end{aligned} \tag{13}
$$

Dessa forma, temos todos os termos necessários para a Quadratura de Gauss-Legendre com 4 pontos de interpolação.