CK0048 - Métodos Numéricos II

Trabalho 2

Gabriel Freire do Vale - 418788
Pedro Ernesto de Oliveira Primo - 418465

27 de março de 2020

1 Polinômio de Interpolação de Grau 4

$$g(s) = \sum_{k=0}^{n=4} \binom{s}{k} \cdot \Delta^k r_0 = \sum_{k=0}^{n=4} \frac{s!}{k!(s-k)!} \cdot \Delta^k r_0 \tag{1}$$

De (1), tiramos:

$$\begin{aligned} g(s) = \Delta^0 r_0 + s \cdot \Delta^1 r_0 + \frac{s \cdot (s-1)}{2} \cdot \Delta^2 r_0 + \\ + \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2)}{6} \cdot \Delta^3 r_0 + \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3)}{24} \cdot \Delta^4 r_0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} g(s) = \Delta^0 r_0 + s \cdot \Delta^1 r_0 + \frac{s \cdot (s-1)}{2} \cdot \Delta^2 r_0 + \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2)}{6} \cdot \Delta^3 r_0 + \\ + \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3)}{24} \cdot \Delta^4 r_0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} g(s) = r(0) \cdot \frac{1}{24} \cdot (24 - 50s + 35s^2 - 10s^3 + s^4) + \\ + r(1) \cdot \frac{1}{6} \cdot (24s - 26s^2 + 9s^3 - s^4) + \\ + r(2) \cdot \frac{1}{12} \cdot (-36s + 57s^2 - 24s^3 + 3s^4) + \\ + r(3) \cdot \frac{1}{6} \cdot (8s - 14s^2 + 7s^3 - s^4) + \\ + r(4) \cdot \frac{1}{24} \cdot (-6s + 11s^2 - 6s^3 + s^4) \end{aligned} \tag{4}$$

1.1 Abordagem Fechada

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f são obrigatórios. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_i)$, $f(x_f)$ e por três pontos intermediários de maneira que os cinco pontos do intervalo $[x_i \ , x_f]$ sejam igualmente espaçados.

Chamando essa distância entre os valores de x onde a função será interpolada de h, temos que

$$h = \frac{\Delta x}{4} \tag{5}$$

Assim, temos que

$$f(x_i) = f(x(s=0)) = g(0), f(x_i + h) = f(x(s=1)) = g(1)$$

e assim por diante. Concluimos que:

$$x(s) = x_i + s \cdot h \tag{6}$$

satisfaz as condições anteriores, pois

$$\begin{cases} x(0) = x_i + 0h = x_i \\ x(1) = x_i + 1h \\ x(2) = x_i + 2h \\ x(3) = x_i + 3h \\ x(4) = x_i + 4h = x_f \end{cases} \tag{7}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \int_0^4 g(s)\mathrm{d}s \tag{8}$$

Substituindo (1) em (8), temos:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \int_0^4 \Bigg(& r(0) \cdot \frac{1}{24} \cdot (24 - 50s + 35s^2 - 10s^3 + s^4) + \\ & + r(1) \cdot \frac{1}{6} \cdot (24s - 26s^2 + 9s^3 - s^4) + \\ & + r(2) \cdot \frac{1}{12} \cdot (-36s + 57s^2 - 24s^3 + 3s^4) + \\ & + r(3) \cdot \frac{1}{6} \cdot (8s - 14s^2 + 7s^3 - s^4) + \\ & + r(4) \cdot \frac{1}{24} \cdot (-6s + 11s^2 - 6s^3 + s^4) \Bigg) \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{9}$$

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left(g(0) \cdot \frac{14}{45} + g(1) \cdot \frac{64}{45} + g(2) \cdot \frac{24}{15} + g(3) \cdot \frac{64}{45} + g(4) \cdot \frac{14}{45} \right) \tag{10}$$

Portanto, obtemos a seguinte fórmula:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2h}{45} \cdot (7 \cdot f(x_i) + 32 \cdot f(x_i + h) + 12 \cdot f(x_i + 2h) + 32 \cdot f(x_i + 3h) + 7 \cdot f(x_f))$$

1.2 Abordagem Aberta

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f são proibidos. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$, de forma que os pontos $x_i, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ e x_f sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de x onde a função será interpolada de h, temos que

$$h = \frac{\Delta x}{6} \tag{11}$$

Assim, temos que

$$f(x_0) = f(x_i + h) = f(x(s = 0)) = g(0), f(x_i + 2h) = f(x(s = 1)) = g(1)$$

e assim por diante. Concluimos que:

$$x(s) = x_i + h + s \cdot h \tag{12}$$

satisfaz as condições anteriores, pois

$$\begin{cases} x(0) = x_i + h + 0h = x_0 \\ x(1) = x_i + h + 1h = x_1 \\ x(2) = x_i + h + 2h = x_2 \\ x(3) = x_i + h + 3h = x_3 \\ x(4) = x_i + h + 4h = x_4 \end{cases} \tag{13}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \int_{-1}^{5} g(s)\mathrm{d}s \tag{14}$$

Substituindo (1) em (14), temos:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \int_{-1}^{5} \Bigg(r(0) \cdot \frac{1}{24} \cdot (24 - 50s + 35s^2 - 10s^3 + s^4) + \\ + r(1) \cdot \frac{1}{6} \cdot (24s - 26s^2 + 9s^3 - s^4) + \\ + r(2) \cdot \frac{1}{12} \cdot (-36s + 57s^2 - 24s^3 + 3s^4) + \\ + r(3) \cdot \frac{1}{6} \cdot (8s - 14s^2 + 7s^3 - s^4) + \\ + r(4) \cdot \frac{1}{24} \cdot (-6s + 11s^2 - 6s^3 + s^4) \Bigg) \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{15}$$

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left(g(0) \cdot \frac{33}{10} + g(1) \cdot \frac{42}{10} + g(2) \cdot \frac{78}{10} + g(3) \cdot \frac{42}{10} + g(4) \cdot \frac{33}{10} \right) \tag{16}$$

Portanto, obtemos a seguinte fórmula:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{10} \cdot (11 \cdot f(x_i + h) - 14 \cdot f(x_i + 2h) + 26 \cdot f(x_i + 3h) - 14 \cdot f(x_i + 4h) + 11 \cdot f(x_i + 5h))$$