CK0048 - Métodos Numéricos II

Trabalho 10

Gabriel Freire do Vale - 418788

Pedro Ernesto de Oliveira Primo - 418465

27 de junho de 2020

1 Cálculo de Autovalores e Autovetores

1.1 Matriz 1

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Para calcularmos os pares de autovalor e autovetor (λ, x), devemos fazer $M_1 \cdot x - (\lambda \cdot I) \cdot x = 0$, sendo I uma matriz-identidade 3x3. Logo, pondo x em evidência, temos:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

Para termos um autovetor diferente de (0,0,0), o sistema representado em (2) deve ser possível e indeterminado. Para isso, a determinante da matriz de coeficientes deve ser igual a 0. Logo:

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

1.1.1 Cálculo dos Autovalores

$$
\begin{aligned}
(5-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)+2+2-((3-\lambda)+4\cdot(2-\lambda)+(5-\lambda)=0 \\
(15-8\cdot\lambda+\lambda^2)\cdot(2-\lambda)+4-3+\lambda-8+4\cdot\lambda-5+\lambda=0 \\
(30-31\cdot\lambda+10\cdot\lambda^2-\lambda^3)-12+6\cdot\lambda=0 \\
-\lambda^3+10\cdot\lambda^2-25\cdot\lambda+18=0 \\
(\lambda-2)\cdot(-\lambda^2-2\cdot\lambda-9)=0 \\
[\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3\,]=\left[\,2,\,4+\sqrt{7},\,4-\sqrt{7}\,\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

1.1.2 Cálculo dos Autovetores

Para $\lambda_1 = 2$:

$$
\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{5}
$$

De (5), temos que

$$
x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = -x_2 \tag{6}
$$

e

$$
2\cdot x_1+x_2+x_3=0 \longrightarrow -2\cdot x_2+x_2+x_3=0 \longrightarrow -x_2+x_3=0 \longrightarrow x_2=x_3 \tag{7}
$$

Portanto, fazendo $x_3 = 1$, temos que o autovalor x é:

$$
x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}
$$

Para $\lambda_1 = 4 + \sqrt{7}$:

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{7} & 2 & 1 \\ 2 & -(\sqrt{7}+1) & 1 \\ 1 & 1 & -(\sqrt{7}+2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

De (9), temos que

$$x_3 = -(1-\sqrt{7}) \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \tag{10}$$

e

$$x_3 = -2 \cdot x_1 + (\sqrt{7}+1) \cdot x_2 \tag{11}$$

Portanto, fazendo (10) = (11), temos:

$$\begin{gathered} -(1-\sqrt{7}) \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = -2 \cdot x_1 + (\sqrt{7}+1) \cdot x_2 \\ (1+\sqrt{7}) \cdot x_1 = (3+\sqrt{7}) \cdot x_2 \\ \tfrac{1+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} \cdot x_1 = x_2 \end{gathered} \tag{12}$$

Fazendo $x_1 = 3 + \sqrt{7}$, temos que $x_2 = 1 + \sqrt{7}$. Para encontrar x_3, podemos fazer as substituições necessárias na equação (11):

$$\begin{gathered} x_3 = -2 \cdot (3+\sqrt{7}) + (\sqrt{7}+1)^2 \\ x_3 = -6 - 2 \cdot \sqrt{7} + (7 + 2 \cdot \sqrt{7} + 1) \\ x_3 = -6 - 2 \cdot \sqrt{7} + 8 + 2 \cdot \sqrt{7} \\ x_3 = 2 \end{gathered} \tag{13}$$

Portanto, temos:

$$x = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{7} \\ 1+\sqrt{7} \\ 2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Para $\lambda_1 = 4 - \sqrt{7}$:

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 & 1 \\ 2 & \sqrt{7}-1 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{7}-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

De (15), temos que

$$x_3 = -(1+\sqrt{7}) \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \tag{16}$$

e

$$x_3 = -2 \cdot x_1 - (\sqrt{7}-1) \cdot x_2 \tag{17}$$

Portanto, fazendo (16) = (17), temos:

$$\begin{gathered} -(1+\sqrt{7}) \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = -2 \cdot x_1 - (\sqrt{7}-1) \cdot x_2 \\ (1-\sqrt{7}) \cdot x_1 = (3-\sqrt{7}) \cdot x_2 \\ \tfrac{1-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} \cdot x_1 = x_2 \end{gathered} \tag{18}$$

Fazendo $x_1 = 3 - \sqrt{7}$, temos que $x_2 = 1 - \sqrt{7}$. Para encontrar x_3, podemos fazer as substituições necessárias na equação (17):

$$\begin{gathered} x_3 = -2 \cdot (3-\sqrt{7}) - (\sqrt{7}-1) \cdot (1-\sqrt{7}) \\ x_3 = -6 + 2 \cdot \sqrt{7} - (2 \cdot \sqrt{7} - 8) \\ x_3 = -6 + 2 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{7} + 8 \\ x_3 = 2 \end{gathered} \tag{19}$$

Portanto, temos:

$$x = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{7} \\ 1-\sqrt{7} \\ 2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

1.2 Matriz 2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

1.2.1 Cálculo dos Autovalores

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

Daí, temos:

$$\begin{gathered} \left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right)^3 + 2 \cdot \left(-\tfrac{8}{27}\right) - \left[3 \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right)\right] = 0 \\ \left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right)^3 - \left(\tfrac{16}{27}\right) - \left(\tfrac{4}{3}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right) = 0 \\ -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \\ -(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0 \end{gathered} \tag{23}$$

Logo, temos $\lambda = 1$ com multiplicidade 2 e $\lambda = -1$.

1.2.2 Cálculo dos Autovetores

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{24}$$

Fazendo $x_1 = 1$, temos que

$$-\frac{2}{3} \cdot (x_2 + x_3) = \frac{2}{3} \longrightarrow x_2 + x_3 = -1$$

Como temos 2 autovetores para $\lambda = 1$, podemos escolher:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Para $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{26}$$

Fazendo $x_1 = 1$, temos

$$-\frac{2}{3} \cdot (x_2 + x_3) = -\frac{4}{3} \longrightarrow x_2 + x_3 = 2$$

Podemos fazer $x_2 = x_3 = 1$, tendo portanto:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

1.3 Matriz 3

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{28}$$

1.3.1 Cálculo dos Autovalores

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{29}$$

Daí, temos:

$$\begin{gathered} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) - \left[3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\right] = 0 \\ \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^3 - \left(\frac{2}{27}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) = 0 \\ -\lambda^3 + 2 \cdot \lambda^2 - \lambda = 0 \\ -\lambda \cdot (\lambda - 1)^2 = 0 \end{gathered} \tag{30}$$

Logo, temos $\lambda = 1$ com multiplicidade 2 e $\lambda = 0$.

1.3.2 Cálculo dos Autovetores

Para $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{31}$$

Fazendo $x_1 = 1$, temos $x_2 + x_3 = 2$. Podemos então fazer $x_2 = x_3 = 1$. Logo, temos:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{33}$$

Fazendo $x_1 = 1$, temos $x_2 + x_3 = -1$. Como a multiplicidade é igual a 2, temos os autovetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

1.4 Matriz 4

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

1.4.1 Cálculo dos Autovalores

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{36}$$

Daí, temos:

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{27}\right) - \left[3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\right] = 0 \\ \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^3 + \left(\frac{2}{27}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \lambda\right) = 0 \\ -\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \\ -\lambda^2 \cdot (\lambda - 1) = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

Logo, temos $\lambda = 0$ com multiplicidade 2 e $\lambda = 1$.

1.4.2 Cálculo dos Autovetores

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Fazendo $x_1 = 1$, temos $x_2 + x_3 = 2$. Podemos então fazer $x_2 = x_3 = 1$. Logo, temos:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Para $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{40}$$

Fazendo $x_1 = 1$, temos $x_2 + x_3 = -1$. Como a multiplicidade é igual a 2, temos os autovetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$