CK0048 - Métodos Numéricos II

Trabalho 9

Gabriel Freire do Vale - 418788

Pedro Ernesto de Oliveira Primo - 418465

21 de maio de 2020

1 Cálculo do Volume abaixo da Superfície do Paraboloide Hiperbólico

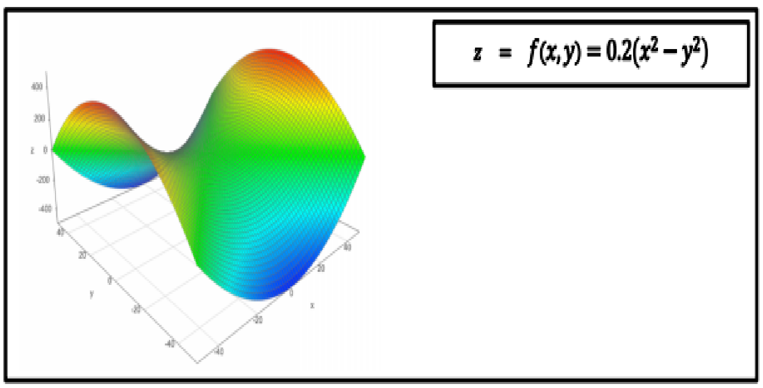


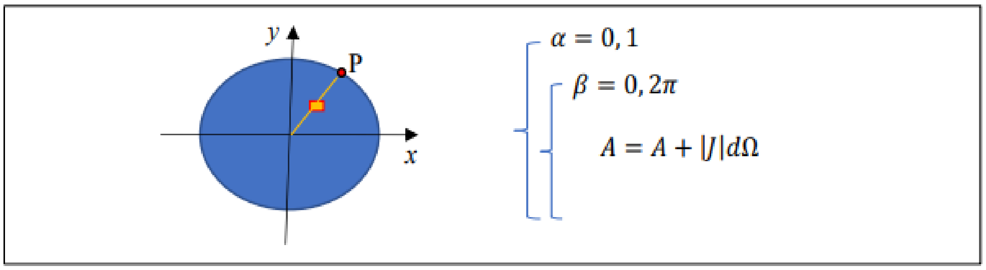
Figura 1: Paraboloide hiperbólico $z = f(x, y) = 0.2 \cdot (x^2 - y^2)$

1.1 Dados do Problema

A região $U \in x \cdot y$ é $U = \left\{(x, y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \leq 1\right\}$

1.2 Resolução

Sabemos que a área representada por U equivale à área de uma elipse de semi-eixos 40 e 20. Dessa forma, faremos uma primeira mudança de variável a fim de facilitar o processo de varredura da elipse, tal qual a figura abaixo:



1.2.1 Mudança de Variável 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 40 \cdot \cos\beta \\ 20 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot 20 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

Assim, temos que

$$dA = |J|\, d\Omega \tag{1}$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana e dΩ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

$$\begin{aligned} |J| &= \det \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \alpha} & \frac{\delta x}{\delta \beta} \\ \frac{\delta y}{\delta \alpha} & \frac{\delta y}{\delta \beta} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 40 \cdot \cos\beta & -\alpha \cdot 40 \cdot \sin\beta \\ 20 \cdot \sin\beta & \alpha \cdot 20 \cdot \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= 40 \cdot 20 \cdot \alpha \cdot (\cos^2\beta + \sin^2\beta) = 800 \cdot \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

e

$$d\Omega = d\alpha \cdot d\beta \tag{3}$$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, temos:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(0.2 \cdot \left((40 \cdot \alpha \cdot \cos\beta)^2 - (20 \cdot \alpha \cdot \sin\beta)^2 \right) \right) \cdot 800 \cdot \alpha \, d\alpha \right) d\beta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(80 \cdot \alpha^2 \cdot \left(4 \cdot \cos^2\beta - \sin^2\beta \right) \right) \cdot 800 \cdot \alpha \, d\alpha \right) d\beta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(64000 \cdot \alpha^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2\beta - \sin^2\beta \right) \right) d\alpha \right) d\beta
\end{aligned} \tag{4}$$

Para calcular o volume por meio da Quadratura de Gauss-Legendre, é necessário fazer outra mudança de variáveis, o que será feito na próxima seção.

1.2.2 Mudança de Variável 2

A Quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão

$$\begin{pmatrix} \alpha(\gamma,\theta) \\ \beta(\gamma,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot \gamma \\ \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2} \cdot \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma+1}{2} \\ \pi \cdot (\theta+1) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Assim,

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\delta\alpha}{\delta\gamma} & \frac{\delta\alpha}{\delta\theta} \\ \frac{\delta\beta}{\delta\alpha} & \frac{\delta\beta}{\delta\theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

e a mudança de variáveis na equação (4) fica:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(64000 \cdot \alpha^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2\beta - \sin^2\beta \right) \right) d\alpha \right) d\beta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(64000 \cdot \left(\tfrac{\gamma+1}{2} \right)^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2\left(\pi \cdot (\theta+1)\right) - \sin^2\left(\pi \cdot (\theta+1)\right) \right) \right) \cdot \tfrac{\pi}{2} \, d\gamma \right) d\theta \\
&= 4000 \cdot \pi \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left((\gamma+1)^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2\left(\pi \cdot (\theta+1)\right) - \sin^2\left(\pi \cdot (\theta+1)\right) \right) \right) d\gamma \right) d\theta
\end{aligned} \tag{7}$$

Logo, está feita a segunda mudança de variáveis. Devemos, então, aplicar a Quadratura de Legendre.

1.2.3 Quadratura de Gauss-Legendre

A fim de aplicar a Quadratura de Gauss-Legendre, podemos escrever a equação (7) como:

$$V = 4000\cdot\pi\cdot\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} w_j\cdot w_k\cdot\left((\gamma+1)^3\cdot\left(4\cdot\cos^2\left(\pi\cdot(\theta+1)\right)-\sin^2\left(\pi\cdot(\theta+1)\right)\right)\right) \tag{8}$$

Para a Quadratura, vamos considerar

$$g(\gamma_k,\theta_j) = \left((\gamma+1)^3\cdot\left(4\cdot\cos^2\left(\pi\cdot(\theta+1)\right)-\sin^2\left(\pi\cdot(\theta+1)\right)\right)\right) \tag{9}$$

A forma final na equação (8) indica que os termos entre parênteses têm de ser calculados nos nove pares ordenados (γ_k,θ_j). Na forma tabular temos

(γ_k,θ_j)	$w_j\cdot w_k$	$g(\gamma_k,\theta_j)$	$w_j\cdot w_k\cdot g(\gamma_k,\theta_j)$	$4000\pi\cdot$
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	0.02158503	0.00666205	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},0\right)$	$\frac{40}{81}$	0.04580796	0.02262122	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	0.02158503	0.00666205	
$\left(0,-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{40}{81}$	1.88482741	0.93077897	
$(0,0)$	$\frac{64}{81}$	4.0	3.16049383	
$\left(0,\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{40}{81}$	1.88482741	0.93077897	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	10.53344847	3.25106434	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}},0\right)$	$\frac{40}{81}$	22.35419204	11.03910718	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	10.53344847	3.25106434	
			22.59923293	283990.33660270

Esse resultado, porém, não está correto. Isso se deve ao fato de que a Quadratura de 3 pontos não é suficiente para cobrir a parte correspondente à variável angular β.

1.3 Resolução 2

Essa nova solução é baseada na forma da elipse, formada por 4 quadrantes simétricos. Assim, podemos calcular o volume V' de um quadrante (utilizaremos o quadrante correspondente a $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$) e depois multiplicá-lo por 4, isto é, $V = 4 \cdot V'$.

1.3.1 Mudança de Variável 1

Nessa mudança de variáveis, a equação encontrada é semelhante à encontrada na seção 1.2.1, mudando apenas o intervalo de integração de β. Assim, temos:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(64000 \cdot \alpha^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \beta\right)\right) d\alpha \right) d\beta \tag{10}$$

1.3.2 Mudança de Variável 2

A Quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão

$$\begin{pmatrix} \alpha(\gamma,\theta) \\ \beta(\gamma,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot \gamma \\ \frac{0+\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2} \cdot \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma+1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \cdot (\theta+1) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Assim,

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\delta\alpha}{\delta\gamma} & \frac{\delta\alpha}{\delta\theta} \\ \frac{\delta\beta}{\delta\alpha} & \frac{\delta\beta}{\delta\theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{8} \tag{12}$$

e a mudança de variáveis na equação (10) fica:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(64000 \cdot \alpha^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \beta\right)\right) d\alpha \right) d\beta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(64000 \cdot \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta+1)\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta+1)\right)\right)\right) \cdot \frac{\pi}{8}\, d\gamma \right) d\theta \\ &= 1000 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left((\gamma+1)^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta+1)\right) - \sin^2\left(\left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta+1)\right)\right)\right)\right) d\gamma \right) d\theta \end{aligned} \tag{13}$$

Logo, está feita a segunda mudança de variáveis. Devemos, então, aplicar a Quadratura de Legendre.

1.3.3 Quadratura de Gauss-Legendre

A fim de aplicar a Quadratura de Gauss-Legendre, podemos escrever a equação (7) como:

$$V = 1000 \cdot \pi \cdot \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} w_j \cdot w_k \cdot \left((\gamma + 1)^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta + 1) \right) - \sin^2 \left(\left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta + 1) \right) \right) \right) \right) \tag{14}$$

Para a Quadratura, vamos considerar

$$g(\gamma_k, \theta_j) = \left((\gamma + 1)^3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta + 1) \right) - \sin^2 \left(\left(\frac{\pi}{4} \cdot (\theta + 1) \right) \right) \right) \right) \tag{15}$$

A forma final na equação (8) indica que os termos entre parênteses têm de ser calculados nos nove pares ordenados (γ_k, θ_j). Na forma tabular temos

(γ_k, θ_j)	$w_j \cdot w_k$	$g(\gamma_k, \theta_j)$	$w_j \cdot w_k \cdot g(\gamma_k, \theta_j)$	$1000\pi \cdot$
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	0.04403210	0.01359015	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{40}{81}$	0.01717799	0.00848296	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	-0.00967613	-0.00298646	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{40}{81}$	3.84492966	1.89873070	
$(0, 0)$	$\frac{64}{81}$	1.5	1.18518519	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{40}{81}$	-0.84492966	-0.41724922	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	21.48757401	6.63196729	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{40}{81}$	8.38282201	4.13966519	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	-4.72192998	-1.45738580	
			12.0	37699.11184308

Assim, temos que $V' = 37699.11184308$ e $V = 4 \cdot V' = 4 \cdot 37699.11184308 = 150796.44737231$, o resultado correto.