CK0048 - Métodos Numéricos II

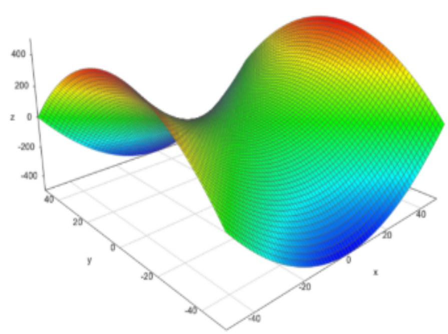
Trabalho 8

Gabriel Freire do Vale - 418788

Pedro Ernesto de Oliveira Primo - 418465

18 de maio de 2020

1 Cálculo da área da superfície do Paraboloide Hiperbólico



$$z = f(x,y) = 0.2(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0.4x$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -0.4y$$

Figura 1: Paraboloide hiperbólico $z = f(x, y) = 0.2 \cdot (x^2 - y^2)$

1.1 Dados do Problema

A região $U \in x \cdot y$ é $U = \left\{(x, y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{1600} \leq 1\right\}$

1.2 Resolução

Vamos generalizar a inequação da região U dada no problema para melhor racionalizar acerca dos dados.

$$\frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{1600} \leq 1$$

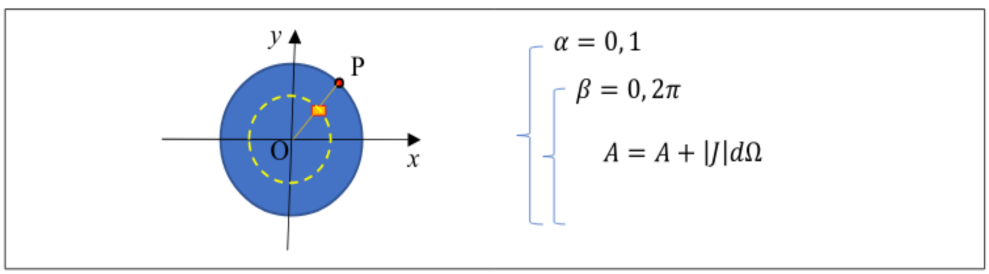
$$\frac{x^2}{(40)^2} + \frac{y^2}{(40)^2} \leq 1$$

Relacionando com a equação geral da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Temos que $a = 40$ e $b = 40$. Como ambos os eixos são idênticos, temos um caso específico de elipse que caracteriza uma circunferênia de raio $r = 40$.

Dessa forma, faremos uma primeira mudança de variável a fim de facilitar o processo de varredura do círculo, tal qual a figura abaixo:



1.2.1 Mudança de Variável 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 40 \cdot \cos\beta \\ 40 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot 40 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

Assim, temos que

$$dA = |J|\, d\Omega \tag{1}$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana e dΩ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

$$\begin{aligned} |J| &= \det \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \alpha} & \frac{\delta x}{\delta \beta} \\ \frac{\delta y}{\delta \alpha} & \frac{\delta y}{\delta \beta} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 40 \cdot \cos\beta & -\alpha \cdot 40 \cdot \sin\beta \\ 40 \cdot \sin\beta & \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= 40^2 \cdot \alpha \cdot (\cos^2\beta + \sin^2\beta) = 1600 \cdot \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

e

$$d\Omega = d\alpha \cdot d\beta \tag{3}$$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, temos:

$$\begin{aligned} A &= \int_u \left(\sqrt{(0.4x)^2 + (0.4y)^2 + 1} \right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{(0.4 \cdot 40 \cdot \alpha\ \cos\beta)^2 + (0.4 \cdot\ 40 \cdot\ \alpha\ \ \sin\beta\ )^2 + 1})\ 40^2 \alpha \cdot d\alpha \cdot d\beta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{(16\ \alpha\ \cos\ \beta\ )^2 + (16\ \alpha\ \sin\ \beta\ \ )^2 + 1})\ 1600\ \alpha\ d\alpha \cdot d\beta \end{aligned} \tag{4}$$

Para calcular o volume por meio da Quadratura de Gauss-Legendre, é necessário fazer outra mudança de variáveis, o que será feito na próxima seção.

1.2.2 Mudança de Variável 2

A Quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão

$$\begin{pmatrix} \alpha(\gamma, \theta) \\ \beta(\gamma, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot \gamma \\ \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2} \cdot \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma+1}{2} \\ \pi \cdot (\theta + 1) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Assim,

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\delta \alpha}{\delta \gamma} & \frac{\delta \alpha}{\delta \theta} \\ \frac{\delta \beta}{\delta \alpha} & \frac{\delta \beta}{\delta \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

e a mudança de variáveis na equação (4) temos:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} (\sqrt{(16\,\alpha\,\cos\beta\,)^2 + (16\,\alpha\,\sin\beta\,^2) + 1})\, 1600\,\alpha\, d\alpha) d\beta \\
&= \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} (\sqrt{(16\cdot(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\gamma)\cdot\cos(\pi+\pi\theta))^2 + (16\cdot(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\gamma)\cdot\sin(\pi+\pi\theta))^2 + 1}) \\
&\qquad \cdot 1600\cdot(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\gamma)\, d\gamma)\, \tfrac{\pi}{2} d\theta \\
&= 800\pi \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{\begin{array}{l}(16\cdot(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\gamma)\cdot\cos(\pi+\pi\theta))^2 + \\ (16\cdot(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\gamma)\cdot\sin(\pi+\pi\theta))^2 + 1\end{array}}\right) \cdot (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\gamma)\, d\gamma)\, d\theta
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Logo, está feita a segunda mudança de variáveis. Devemos, então, aplicar a Quadratura de Legendre.

1.2.3 Quadratura de Gauss-Legendre

A fim de aplicar a Quadratura de Gauss-Legendre, podemos escrever a equação (7) como:

$$
A = 800\pi \cdot \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} w_i \cdot w_j \left(\sqrt{\begin{array}{l}(16\cdot(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\gamma)\cdot\cos(\pi+\pi\theta))^2 + \\ (16\cdot(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\gamma)\cdot\sin(\pi+\pi\theta))^2 + 1\end{array}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma\right)
\tag{8}
$$

Para a Quadratura, vamos considerar

$$
g(\gamma_j, \theta_i) = \left(\sqrt{\begin{array}{l}(16\cdot(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\gamma_j)\cdot\cos(\pi+\pi\theta_i))^2 + \\ (16\cdot(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\gamma_j)\cdot\sin(\pi+\pi\theta_i))^2 + 1\end{array}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma_j\right)
\tag{9}
$$

A forma final na equação (8) indica que os termos entre parênteses têm de ser calculados nos nove pares ordenados (γ_j, θ_i). Na forma tabular temos

(γ_j, θ_i)	$w_j w_i$	$g(\gamma_j, \theta_i)$	$w_j w_i \cdot g(\gamma_j, \theta_i)$	$\cdot 800\pi$
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	0.23238488	0.07172373	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{40}{81}$	4.03112887	1.99068092	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	12.62798468	3.89752613	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{40}{81}$	0.23238488	0.11475796	
$(0, 0)$	$\frac{64}{81}$	4.03112887	3.18508948	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{40}{81}$	12.62798468	6.23604182	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	0.23238488	0.07172373	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{40}{81}$	4.03112887	1.99068092	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{25}{81}$	12.62798468	3.89752613	
			21.45575082	53924.18332269

Logo, com o somatório de $w_j w_i \cdot g(\gamma_j, \theta_i) = 21.45575082$, e por fim multiplicando por 800π, temos

$$A = 53924.18332269 \tag{10}$$