CK0048 - Métodos Numéricos II

Trabalho 4

Gabriel Freire do Vale - 418788
Pedro Ernesto de Oliveira Primo - 418465

31 de março de 2020

1 Estimativa do Erro para a Fórmula Aberta com Polinômio de Substituição de Grau 2

$$I_f = \frac{\Delta x}{3} \cdot \left(2 \cdot f\left(a + \frac{\Delta x}{4}\right) - f\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) + 2 \cdot f\left(a + \frac{3 \cdot \Delta x}{4}\right) \right) \tag{1}$$

Nesta fórmula, $\Delta x = 2 \cdot h$. Usando a Série de Taylor para os pontos de interpolação, temos

$$f\left(a + \frac{\Delta x}{4}\right) = f\left(\bar{x} + \left(-\frac{h}{2}\right)\right) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2!} \cdot f''(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!} \cdot f'''(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^4 - \frac{1}{5!} \cdot f^{(v)}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \cdots \tag{2}$$

$$f\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) = f\left(\bar{x}\right) \tag{3}$$

$$f\left(a + \frac{3 \cdot \Delta x}{4}\right) = f\left(\bar{x} + \left(\frac{h}{2}\right)\right) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2!} \cdot f''(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot f'''(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \frac{1}{5!} \cdot f^{(v)}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^5 + \cdots \tag{4}$$

Substituindo-se de (2) a (4) em (1), obtemos

$$I_f = \frac{2 \cdot h}{3} \cdot \left(3 \cdot f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \cdot f''(\bar{x}) \cdot (h)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4!} \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot (h)^4 \right) + \cdots \right) \tag{5}$$

Além disso, temos que

$$I_e = h \cdot \left(2 \cdot f(\bar{x}) + \frac{(h)^2}{2!} \cdot f''(\bar{x}) \cdot \frac{2}{3} + \frac{(h)^4}{4!} \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot \frac{2}{5} + \cdots\right) \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) na equação do erro absoluto $E_a = I_e - I_f$, temos

$$\begin{split} E_a = I_e - I_f = h \cdot \left(2 \cdot f(\bar{x}) + \frac{(h)^2}{2!} \cdot f''(\bar{x}) \cdot \frac{2}{3} + \frac{(h)^4}{4!} \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot \frac{2}{5} + \cdots\right) \\ - \frac{2 \cdot h}{3} \cdot \left(3 \cdot f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \cdot f''(\bar{x}) \cdot (h)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4!} \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot (h)^4\right) + \cdots\right) \end{split} \tag{7}$$

Retendo-se apenas o termo dominante, a estimativa do erro fica

$$\begin{split} E_a = I_e - I_f = \frac{1}{4!} \cdot h^5 \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24} \cdot h^5 \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{7}{30}\right) \\ = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{4}{2} \cdot \frac{\Delta x}{4}\right)^5 \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{7}{30}\right) = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 16}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 16} \cdot \left(\frac{\Delta x}{4}\right)^5 \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \\ = \frac{14}{45} \cdot \left(\frac{\Delta x}{4}\right)^5 \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \end{split} \tag{8}$$

Portanto, a estimativa de erro é

$$\frac{14}{45} \cdot \left(\frac{\Delta x}{4}\right)^5 \cdot f^{(iv)}(\bar{x}) \tag{9}$$