



GABRIEL HARTMANN DE AZEREDO

MORGANA GABRIELLE FORLIN DUMKE

CIRO IGOR GONÇALVES DA SILVA

ISRAEL BARDINI SCHÜLTER

LUIZ GUSTAVO DAL MAGRO

EMC5140 - CONTROLE DE VIBRAÇÕES

RELATÓRIO

FLORIANÓPOLIS

DEZEMBRO/2022

1. INTRODUÇÃO

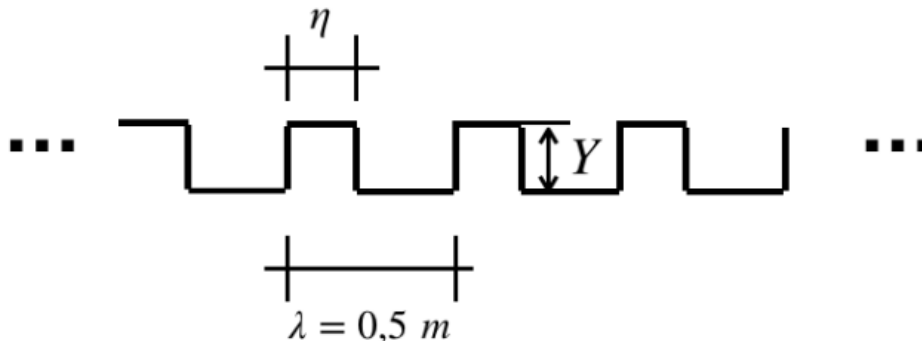
Dentro do capítulo 4 do livro texto, foram estudados métodos para a obtenção da resposta de um sistema com um grau de liberdade submetido a funções forçantes gerais. Sabendo que:

Uma função forçante pode ser periódica ou não periódica. Uma função forçante não periódica pode agir durante um tempo curto, longo ou infinito. Se a duração da função forçante ou excitação for pequena em comparação ao período natural do sistema, a função forçante é denominada como choque (RAO, 2009, p. 140).

O movimento de um automóvel, quando transita sobre uma superfície irregular, é um exemplo de uma função forçante geral e periódica.

Neste relatório, o grupo apresentará a resolução de um sistema de um grau de liberdade (1 GDL) submetido a ação de uma função forçante geral. O caso analisado, trata de um automóvel que trafega sobre um solo irregular, com as características ilustradas na Figura 1 e dados fornecidos em etapas posteriores, durante a exposição do desenvolvimento. O objetivo principal é determinar e discutir a resposta permanente vertical do automóvel durante a sua passagem sobre as irregularidades da superfície descrita, para diferentes velocidades, em especial as velocidade de 2km/h , 10km/h e 72km/h .

Figura 1: Representação das irregularidades do solo.



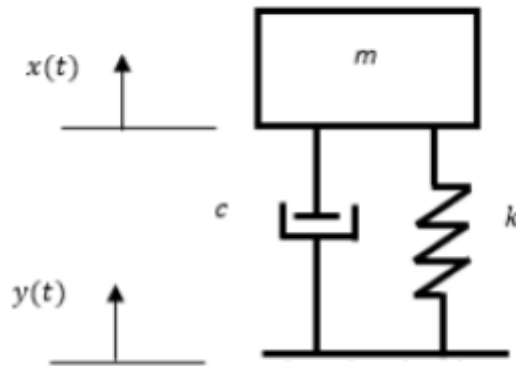
Fonte: Roteiro do problema.

Desta forma, será apresentado neste relatório o desenvolvido das soluções obtidas para cada questão e na sequência, os resultados destes desenvolvimentos, que foram compilados em um programa computacional, por meio de um código em linguagem Python, que se encontra no Anexo A. No final do anexo A, a seção “método antigo” se refere ao primeiro código desenvolvido, onde as questões 1 e 2 apresentaram os mesmos resultados encontrados no método novo, no entanto, a forma com que o código foi desenvolvido impossibilitou a resolução da questão 3, o que levou ao desenvolvimento do novo método mais veloz e generalizado para descrever qualquer velocidade desejada.

2. QUESTÃO 1

A primeira questão trata de desenvolver de forma explícita a equação do movimento do sistema proposto. Para tal, foram fornecidos inicialmente os dados: massa m do automóvel, onde $m = 1000 \text{ kg}$, e para sua suspensão, uma constante elástica da mola $k = 196 \text{ kN/m}$ e fator de amortecimento $\zeta = 0,1$. Para iniciar a resolução do sistema apresentado, desenvolveu-se um esquema massa, mola e amortecedor, visando a construção de um Diagrama de Corpo Livre (DCL) representativo de todas as componentes de força agindo no sistema, para que se possa fundamentar a obtenção das equações do movimento.

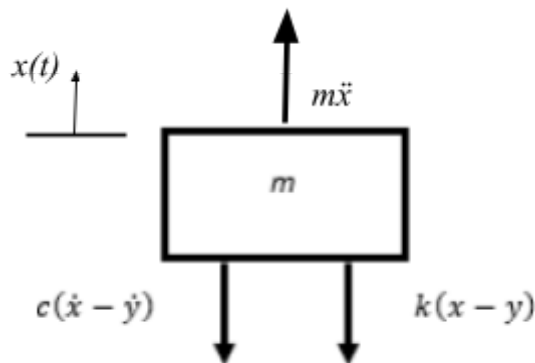
Figura 2: Representação do sistema analisado



Fonte: Autores (2022)

Procedendo na construção de um DCL, como indicado na Figura 3, pode-se extrair as componentes de força para realizar a montagem da equação que deve ser analisada.

Figura 3: Diagrama de Corpo Livre



Fonte: Autores (2022)

Usando a segunda lei do movimento de Newton e realizando o somatório de forças no eixo x, é possível obter a equação que representa o movimento do automóvel.

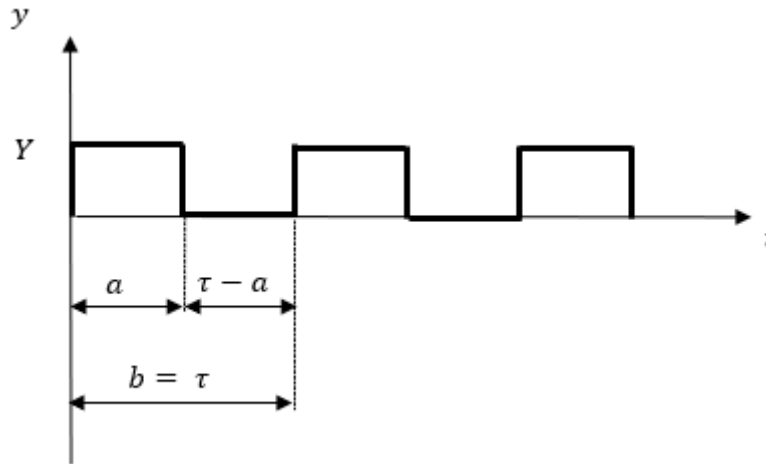
$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky = F(t) \quad (3)$$

São analisadas então as irregularidades do solo, conforme indicado pelo sinal de excitação visto na Figura 1. Primeiramente, é necessário encontrar uma série de Fourier que represente a irregularidade do solo $y(t)$, e posteriormente a derivada da mesma, para que possam ser substituídas na equação (3) e a equação do movimento seja determinada. O gráfico fornecido pelo problema foi adaptado para que fosse visto em função do tempo ao invés de distância, como pode ser visto na Figura 4.

Figura 4: Irregularidades do solo em função da velocidade



Fonte: Autores (2022)

Considerando v em (4) e (5), como sendo a velocidade em que o automóvel se encontra ao transitar sobre a superfície analisada, é possível determinar as condições para a função forçante, destacada em (6).

$$a = \frac{\eta}{v} \quad (4)$$

$$b = \frac{\lambda}{v} \quad (5)$$

$$y(t) = \begin{cases} Y, & 0 < t < a \\ 0, & a < t < b \end{cases} \quad (6)$$

Considerando a função $y(t)$ como periódica, não harmônica e infinita, é possível expandir esta função em uma série de Fourier, em que seus coeficientes são números que variam de acordo com a função analisada. Para a série de Fourier, tem-se os coeficientes a_0 , a_n e b_n :

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) dt \quad (7)$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) \cos(n\omega t) dt \quad (8)$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) \sin(n\omega t) dt \quad (9)$$

Desta forma, tem-se:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (10)$$

Considerando (4) e (5), podemos resolver a série de Fourier e encontrar os seus coeficientes. O primeiro passo é encontrar o coeficiente a_0 .

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \left[\int_0^a Y dt + \int_a^b 0 dt \right] \quad (11)$$

$$a_0 = \frac{2aY}{\tau} \quad (12)$$

Para o coeficiente a_n , temos:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \left[\int_0^a Y \cos(n\omega t) dt \right] \quad (13)$$

$$a_n = \left(\frac{2Y}{\tau n\omega} \right) \sin(n\omega a) \quad (14)$$

Para o coeficiente b_n , temos:

$$b_n = \frac{2}{\tau} \left[\int_0^a Y \sin(n\omega t) dt \right] \quad (15)$$

$$b_n = \frac{-2Y}{\tau n\omega} [\cos(n\omega a) - 1] \quad (16)$$

Agora, derivando (10), obtem-se:

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n n\omega \sin(n\omega t) + b_n n\omega \cos(n\omega t)] \quad (17)$$

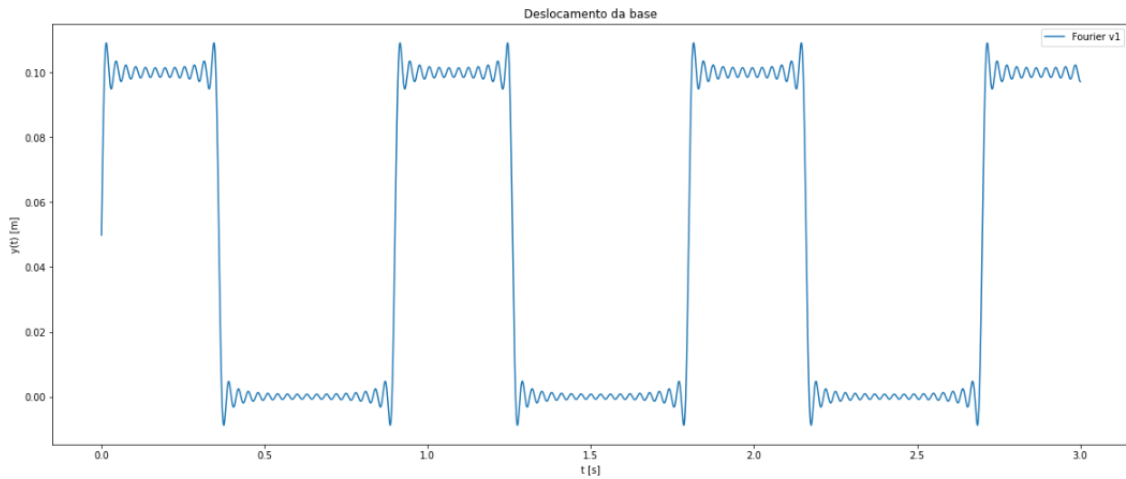
Finalmente, a equação do movimento pode ser escrita de forma explícita, em que o lado direito, a função forçante (18), pode ser reescrita como (19):

$$F(t) = ky + c\dot{y} \quad (18)$$

$$F(t) = \frac{ka_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(ka_n + cb_n n\omega) \cos(n\omega t) + (kb_n - ca_n n\omega) \sin(n\omega t)] \quad (19)$$

Obtido o desenvolvimento das equações desejadas, a atenção se volta para a aplicação destas informações no algoritmo desenvolvido. Inicia-se com a inserção dos dados fornecidos para a caracterização da superfície analisada, onde: $\eta = 0,2 \text{ m}$ e $Y = 0,1 \text{ m}$. Desta forma, obtém-se inicialmente um gráfico que representa a superfície irregular, que é objeto de análise no movimento do automóvel para diferentes velocidades. O gráfico característico da primeira velocidade, correspondente a 2 km/h , pode ser visto na Figura 5.

Figura 5: Irregularidades do solo com dados fornecidos, com 30 termos.

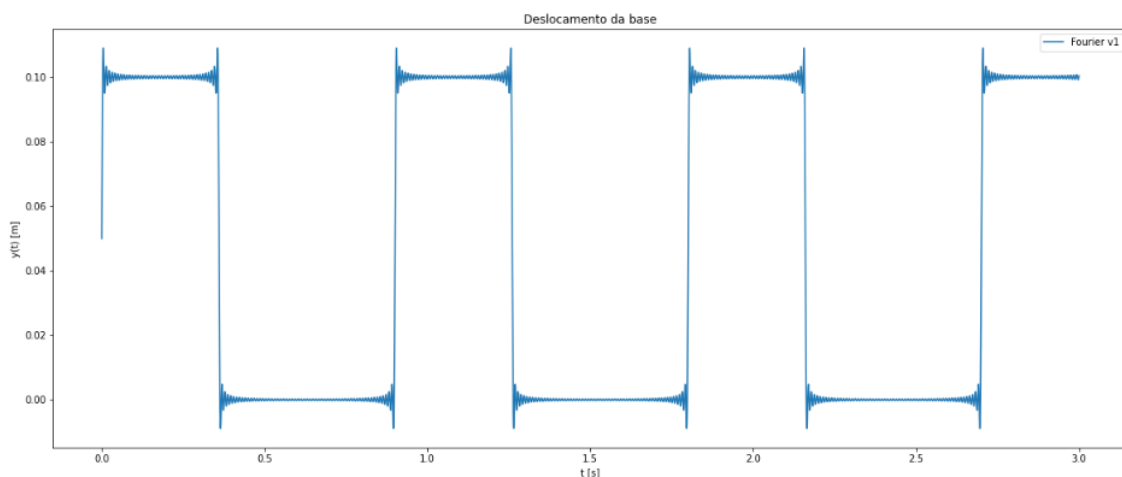


Fonte: Autores (2022)

Na figura 5, fica evidenciado que próximo a descontinuidade da função, ou seja, nos pontos em que a irregularidade começa ou termina, ocorre uma descontinuidade de salto no valor da função, ou seja, a soma parcial de Fourier excede a função no ponto de descontinuidade. Esse fenômeno é conhecido como fenômeno de Gibbs, e trata-se de uma peculiaridade das séries de Fourier. Trata-se de uma dificuldade de aproximar funções descontínuas através uma série finita de senos e cossenos.

Os gráficos para as demais velocidades terão o mesmo formato, porém em frequências diferentes, pois as velocidades são diferentes, os mesmos podem ser averiguados no anexo 1. Para a obtenção da figura 5, foram utilizados 30 termos da série de Fourier, caso mais termos fossem adicionados, menos perceptíveis seriam as oscilações no gráfico, como se pode observar na Figura 6 utilizando 100 termos da série.

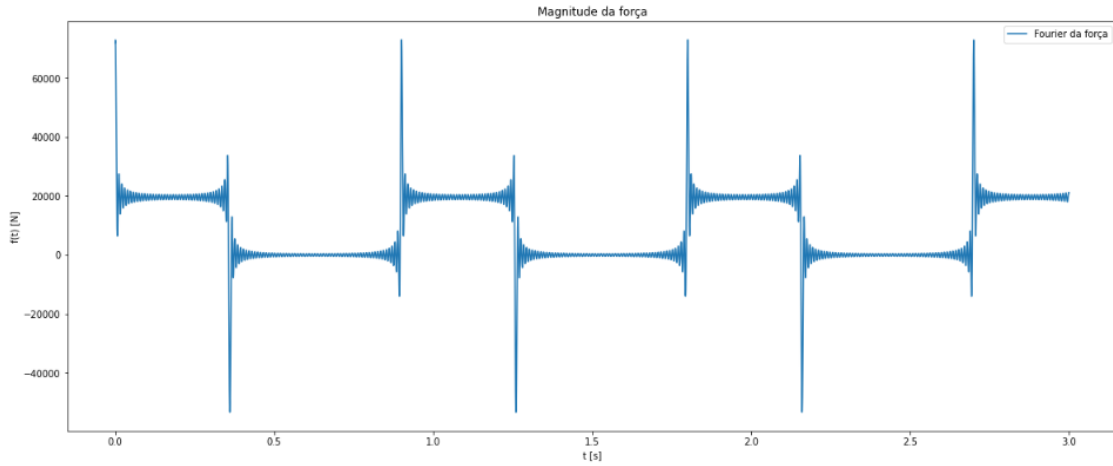
Figura 6: Irregularidades do solo com dados fornecidos, com 100 termos.



Fonte: Autores (2022)

Como visto no desenvolvimento das equações, uma função forçante periódica e infinita pode ser substituída por uma soma de funções harmônicas, por meio do procedimento de análise harmônica, onde a resposta do sistema será obtida pela superposição das respostas às funções forçantes harmônicas individuais, via aplicação da série de Fourier. Desta forma, implementando o resultado para série de Fourier da força aplicada no algoritmo, considerando 100 termos para a série de Fourier, obtém-se o resultado para a função forçante, visto na Figura 7.

Figura 7: Resultado da série de Fourier para a força.



Fonte: Autores (2022).

Assim como para o formato em função do tempo, as três velocidades apresentarão o mesmo formato, em frequências diferentes, as demais podem ser também averiguadas no anexo.

3. QUESTÃO 2

A partir dos resultados encontrados na questão anterior, pode-se então desenvolver a resposta permanente da carroceria do automóvel ao se deslocar em diferentes velocidades, sobre a superfície descrita. Para isso, primeiro é feita a manipulação da função forçante, que atua na equação do movimento do automóvel. A equação para obter a resposta permanente a partir de uma força periódica não harmônica é dada como segue:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_j}{k}\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{b_j}{k}\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j)$$

Em que a_j e b_j (a_n e b_n) são obtidos a partir da força $F(t)$ encontrada no item anterior. Nesse caso, todos os termos que multiplicam o cosseno na série de Fourier da força serão o novo a_n (a_n') corresponde da resposta permanente, os termos que multiplicam o seno serão o novo b_n (b_n') e o termo independente que é dividido por 2 será o novo a_0 (a_0'). No código, os novos termos são identificados como a_{nn} , b_{nn} e a_{00} .

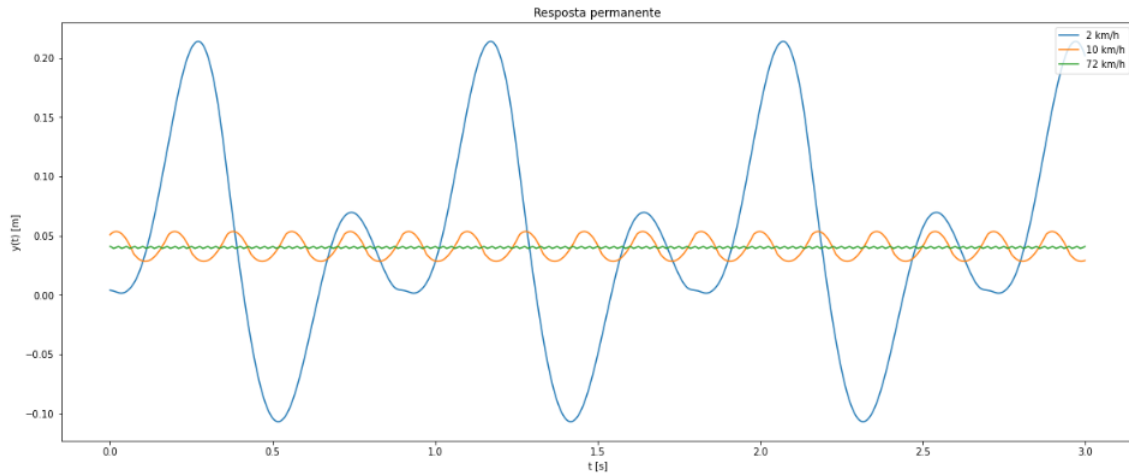
$$a_0' = ka_0 \quad (20)$$

$$a_n' = ka_n + cb_n n\omega \quad (21)$$

$$b_n' = kb_n - ca_n n\omega \quad (22)$$

Com as equações obtidas durante o desenvolvimento apresentado, podemos alimentar o algoritmo, com o intuito de gerar um gráfico que representa a resposta permanente da carroceria do automóvel durante seu trânsito. A análise de três velocidades foi requerida, sendo elas: 2 km/h , 10 km/h e 72 km/h . O resultado para o trânsito em diferentes velocidades pode ser visto na Figura 8.

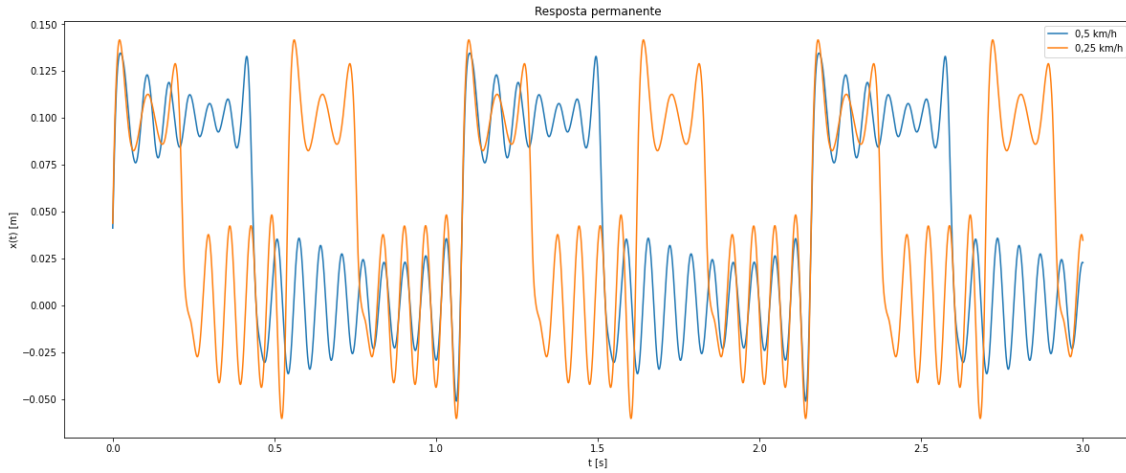
Figura 8: Respostas permanentes para cada velocidade.



Fonte: Autores (2022)

Na Figura 8, a resposta permanente para velocidade de 2 km/h (em azul) destaca-se por apresentar outras oscilações de menor amplitude, enquanto que as outras respostas aparentemente não apresentam esse comportamento. Isso pode ser explicado pelo fato de que a excitação pela onda quadrada apresenta um intervalo de tempo em que nenhuma força age na massa. Durante esse intervalo, o corpo oscila livremente em sua frequência natural amortecida como efeito da excitação anterior. Isso fica claro ao se observar a resposta permanente para baixas velocidades, conforme a Figura 9. Nela, a onda da velocidade $0,25 \text{ km/h}$ (em laranja) apresenta seus picos principais (amplitude de $0,1 \text{ m}$) com o dobro da frequência que da velocidade de $0,5 \text{ km/h}$ (onda em azul) pois sua velocidade é o dobro, logo a frequência de excitação também dobra conforme a equação 23. Todavia a frequência natural amortecida permanece a mesma pois está é caracterizada unicamente pelo corpo em vibração, o que fica evidente ao observar a frequência idêntica das oscilações em menor amplitude.

Figura 9: respostas permanentes para baixas velocidades.



Fonte: Autores (2022)

$$\omega = \frac{2\pi V}{\tau} \quad (23)$$

Esse comportamento é semelhante ao de um corpo excitado por um pulso retangular, conforme exemplo 4.8 da literatura (RAO, 2009, p. 149). A resposta permanente para esse tipo de excitação está exposto na equação (24), em que fica evidente a oscilação na frequência natural amortecida do sistema.

$$x(t) = \frac{F_o e^{-\xi \omega_n t}}{k(1-\xi^2)^{1/2}} \left[-\cos(\omega_d t - \varphi) + e^{\xi \omega_n t_0} \cos\{\omega_d(t - t_0) - \varphi\} \right] \quad (24)$$

4. QUESTÃO 3

Nesta seção, o objetivo é gerar um gráfico para representar a magnitude de deslocamento da carroceria em função da velocidade em que o automóvel se desloca sobre a superfície descrita. Para isso, a amplitude da resposta deve ser calculada, conforme apresentado na equação (28). A resposta pode então ser reescrita como mostrado na equação (27).

$$n\omega t = n \frac{2\pi}{\tau} t = n \frac{2\pi}{\lambda} vt \quad (25)$$

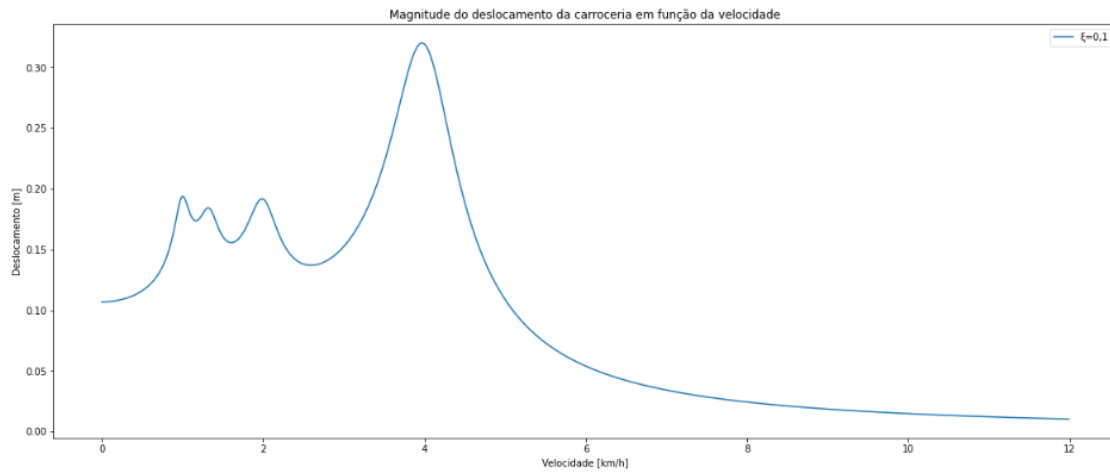
$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{a'_n}{k}}{[(1 - (nr)^2)^2 + (2n\xi r)^2]^{\frac{1}{2}}} \cos(n\omega t - \varphi_n) + \frac{\frac{b'_n}{k}}{[(1 - (nr)^2)^2 + (2n\xi r)^2]^{\frac{1}{2}}} \text{sen}(n\omega t - \varphi_n) \right] \quad (26)$$

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[d_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \right] \quad (27)$$

$$d_n = \sqrt{\left(\frac{\frac{a'_n}{k}}{\left[(1-(nr)^2)^2 + (2n\xi r)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{b'_n}{k}}{\left[(1-(nr)^2)^2 + (2n\xi r)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \quad (28)$$

$$\varphi'_n = \arctg\left(\frac{b'_n}{a'_n}\right) \quad (29)$$

Figura 10: Comportamento do automóvel para diferentes velocidades.



Fonte: Autores (2022)

A frequência natural do sistema corresponde aproximadamente à velocidade de 4 km/h, onde se pode observar o pico no gráfico da figura 10. Em contraste com o que ocorre em sistemas de 1 grau de liberdade com excitação harmônica, nesse caso tem-se mais de um pico de deslocamento no gráfico para frequências inferiores à frequência natural. Isso ocorre porque ao fazermos a sobreposição dos termos da série Fourier, estamos adicionando termos com frequências multiplicadas pelos inteiros n conforme a equação 26. Assim, por mais que a frequência de excitação esteja abaixo da frequência natural do sistema, seu múltiplo por n pode coincidir com a frequência natural e portanto haver esses picos. Todavia, o maior pico ocorrerá sempre na ressonância, conforme a Figura 10.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, a série de Fourier foi utilizada para obter a resposta da carroceria de um automóvel trafegando sobre um solo irregular. Trata-se de um sistema com um grau de liberdade submetido a funções forçantes gerais, em que o perfil do solo é periódico e não harmônico, que resultou em uma força também periódica e não harmônica, que pode ser aproximada por uma soma de funções harmônicas (série de Fourier), onde foi observado também o fenômeno de Gibbs. Obtidos os perfis da irregularidade do solo e da força correspondente na forma de séries de Fourier, a resposta permanente do sistema pode ser encontrada para as velocidades especificadas, aplicando-se as equações referentes a resposta à força periódica geral.

Posteriormente, o comportamento do automóvel foi plotado para as três velocidades propostas, de 2km/h, 10km/h e 72km/h, e os gráficos mostraram que quanto maior a velocidade do veículo, maior a frequência de excitação e menor a amplitude do deslocamento. Como se trata de uma excitação não harmônica, tem-se que a resposta é uma soma de várias respostas em diversas frequências de excitação diferentes, o que justifica o formato das respostas não ser harmônico.

Plotando-se então o gráfico de magnitude do deslocamento da carroceria em função da velocidade do automóvel, pode-se perceber que há mais de um pico de deslocamento, o que não ocorre em sistemas de 1 grau de liberdade sob ação de forças harmônicas, onde se tem apenas um pico em torno da frequência natural do sistema. Esse fenômeno pode ser explicado pela excitação do sistema ser a sobreposição dos n termos da série de Fourier, o que por consequência apresenta n múltiplos da frequência principal de excitação e que coincide com a frequência natural do sistema. Como os múltiplos n são apenas inteiros, esse fenômeno não acontece para frequências superiores à frequência natural.

Dessa forma, o presente trabalho possibilitou avaliar a resposta permanente de um sistema amortecido com um grau de liberdade, quando submetido a uma excitação pela base ao transcorrer um solo irregular com perfil de onda quadrada. Além disso, peculiaridades particulares de uma função descontínua foram analisadas, assim como o fenômeno de sobreposição de respostas, e o comportamento do sistema quando submetido a frequências inferiores a sua frequência natural.

6. REFERÊNCIAS

RAO, SINGIRESU. Vibrações Mecânicas. 2009. 4 Edição. Editora Pearson.

NAZARI, Luiz Fernando. SÉRIES DE FOURIER E O FENÔMENO DE GIBBS. 2008. Universidade Federal de Santa Catarina.

ANEXO A

```
#Adicionar bibliotecas relevantes
%matplotlib inline
#!pip install -U -q symfit
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import quad, simps
import scipy.signal as ss
```

Dados de entrada

```
# Dados de entrada
m = 1000          # Massa do automóvel [kg]
k = 196*1000      # Constante elástica [N/m]
xi = 0.1          # Fator de amortecimento [adimensional]
neta = 0.2        # Largura da parte do solo com altura Y [m]
Y = 0.1           # Amplitude da irregularidade do solo [m]
Lambda = 0.5      # Comprimento da irregularidade correspondente a um período [m]

# Dados a serem calculados
w_n = math.sqrt(k/m)          # Frequência natural do sistema [rad/s]
c = 2*xi*m*w_n                # Constante de amortecimento [N*s/m]
cc = (c)/(2*m*w_n)            # Constante de amortecimento crítica [N*s/m]
w_d = w_n*math.sqrt(1-xi*xi)  # Frequência amortecida do sistema

# Definindo as velocidades
V_kmh1 = 2                  # Velocidade [km/h]
V_ms1 = V_kmh1/3.6         # Velocidade [m/s]
V_kmh2 = 10                 # Velocidade [km/h]
V_ms2 = V_kmh2/3.6         # Velocidade [m/s]
V_kmh3 = 72                 # Velocidade [km/h]
V_ms3 = V_kmh3/3.6         # Velocidade [m/s]

# Com base nas velocidades
tau1 = Lambda/V_ms1        # Período para a velocidade 1 [s]
tau2 = Lambda/V_ms2        # Período para a velocidade 2 [s]
tau3 = Lambda/V_ms3        # Período para a velocidade 3 [s]
tt1 = neta/V_ms1           # Tempo para percorrer a parte elevada na velocidade 1 [s]
tt2 = neta/V_ms2           # Tempo para percorrer a parte elevada na velocidade 2 [s]
tt3 = neta/V_ms3           # Tempo para percorrer a parte elevada na velocidade 3 [s]

# Frequências de excitação com base na velocidade
```

```

w1 = 2*np.pi*V_ms1/Lambda # Frequência para velocidade 1 [rad/s]
w2 = 2*np.pi*V_ms2/Lambda # Frequência para velocidade 2 [rad/s]
w3 = 2*np.pi*V_ms3/Lambda # Frequência para velocidade 3 [rad/s]

# Razão entre frequência de excitação e frequência natural
r1 = w1 / w_n # Razão de excitação para velocidade 1 [adimensional]
r2 = w2 / w_n # Razão de excitação para velocidade 2 [adimensional]
r3 = w3 / w_n # Razão de excitação para velocidade 3 [adimensional]

```

METÓDO NOVO

Questão 2

```

def solver(V_kmh, nf=40, t_max=3, plot=False):
    '''
    nf = número de termos das séries de Fourier
    V_kmh = Velocidade [km/h]
    t_max = tempo em segundos
    plot = [bool] plotar ou não os gráficos
    '''

    # Definindo as velocidades
    V_ms = V_kmh/3.6 # Velocidade [m/s]
    # Com base nas velocidades
    w = 2*np.pi*V_ms/Lambda # Frequência de excitação [rad/s]
    r = w / w_n # Razão entre frequência de excitação e frequência natural
    [adimensional]

    tau = Lambda/V_ms if V_ms else 0 # Período para a velocidade 3 [s]
    tt = neta/V_ms if V_ms else 0 # Tempo para percorrer a parte elevada na
    velocidade 1 [s]

    y = 0
    F = 0
    xp = 0
    Xn = 0

    t = np.linspace(0, t_max, 10000)

    for n in range(1,nf+1):

        # Deslocamento da base y(t)
        an = ((2*Y)/(n*tau*w))*np.sin(n*w*tt)
        bn = (-(2*Y)/(n*tau*w))*(np.cos(n*w*tt)-1)
        y += an*np.cos(n*w*t) + bn*np.sin(n*w*t)

        # Força F(t) = cy' + ky oriunda da equação do movimento
        ann = k*an + c*bn*n*w
        bnn = k*bn - c*an*n*w
        F += ann*np.cos(n*w*t) + bnn*np.sin(n*w*t)

        # Resposta permanente
        sigma_n = np.arctan((2*xi*n*r)/(1-(n*r)**2))
        annn = (ann/k)/(np.sqrt(((1-(n*r)**2)**2)+((2*n*r*xi)**2)))
        bnnn = (bnn/k)/(np.sqrt(((1-(n**2)*(r**2))**2)+ (2*n*r*xi)**2))
        xp += (annn*np.cos(n*w*t - sigma_n)) + (bnnn*np.sin(n*w*t - sigma_n))

        # Amplitude da resposta permanente
        Xn += np.sqrt((annn**2) + (bnnn**2))

    a0 = 2*Y*neta/Lambda
    a00 = a0*k

    y += a0/2

```

```

F += a00/2
xp += a00/(2*k)

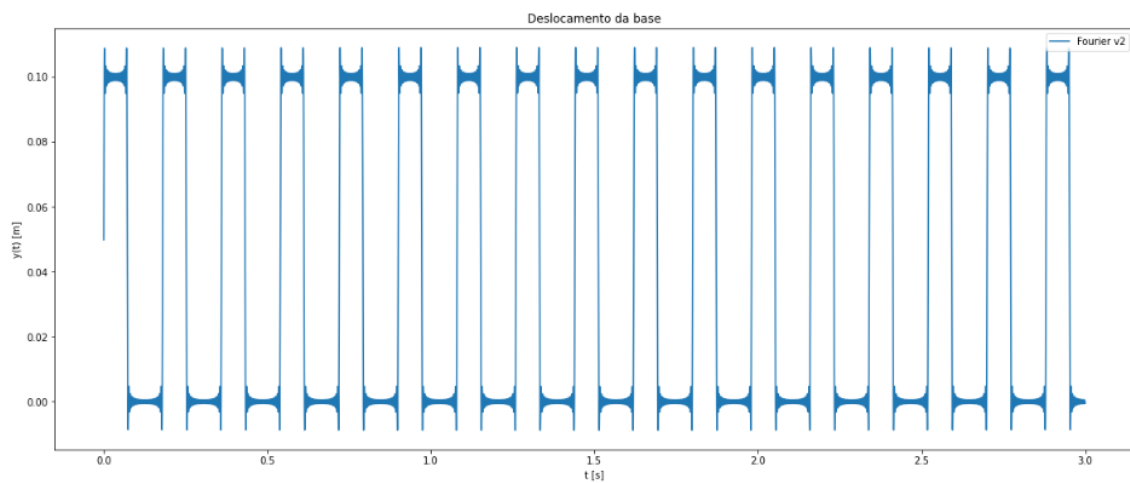
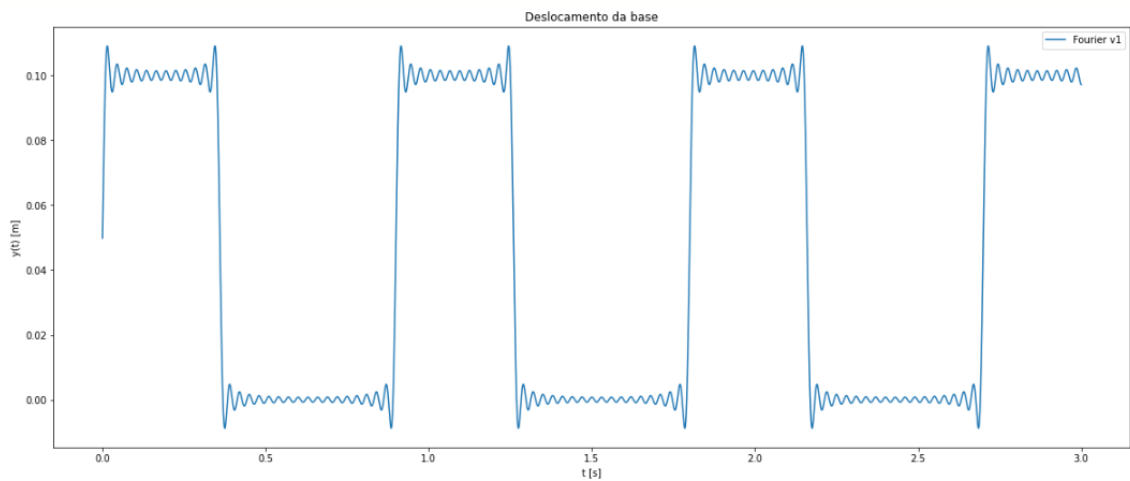
if plot:
    plot_graph(x=t, y=y, label='Fourier v1', label_x='t [s]', label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')
    plot_graph(x=t, y=F, label='Fourier da força', label_x='t [s]', label_y='f(t) [N]', title='Magnitude da força')
    plot_graph(x=t, y=xp, label='ξ=0,1', label_x='t [s]', label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')

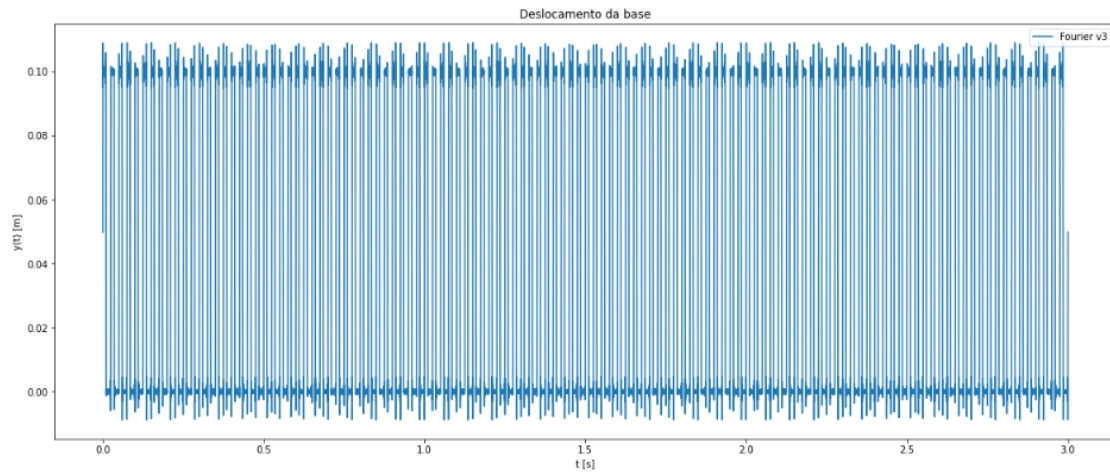
return t, y, F, xp, Xn

t, y1, F1, xp1, _ = solver(V_kmh=2)
_, y2, F2, xp2, _ = solver(V_kmh=10)
_, y3, F3, xp3, _ = solver(V_kmh=72)

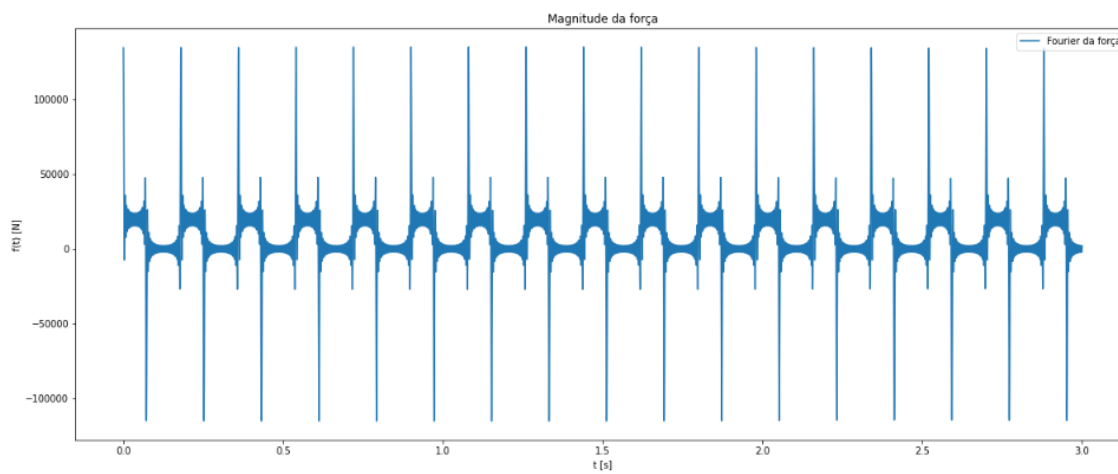
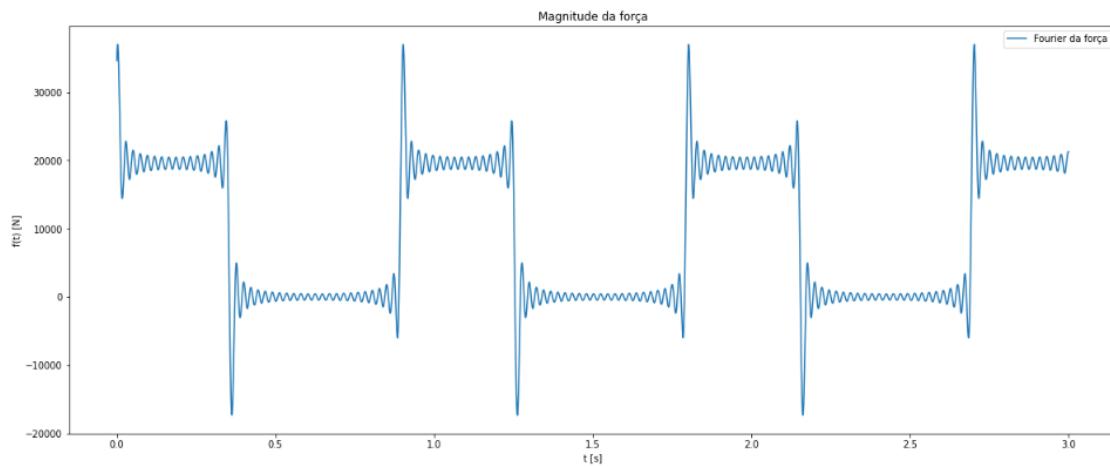
# Plotting deslocamento da base
plot_graph(x=t, y=y1, label='Fourier v1', label_x='t [s]', label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')
plot_graph(x=t, y=y2, label='Fourier v2', label_x='t [s]', label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')
plot_graph(x=t, y=y3, label='Fourier v3', label_x='t [s]', label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')

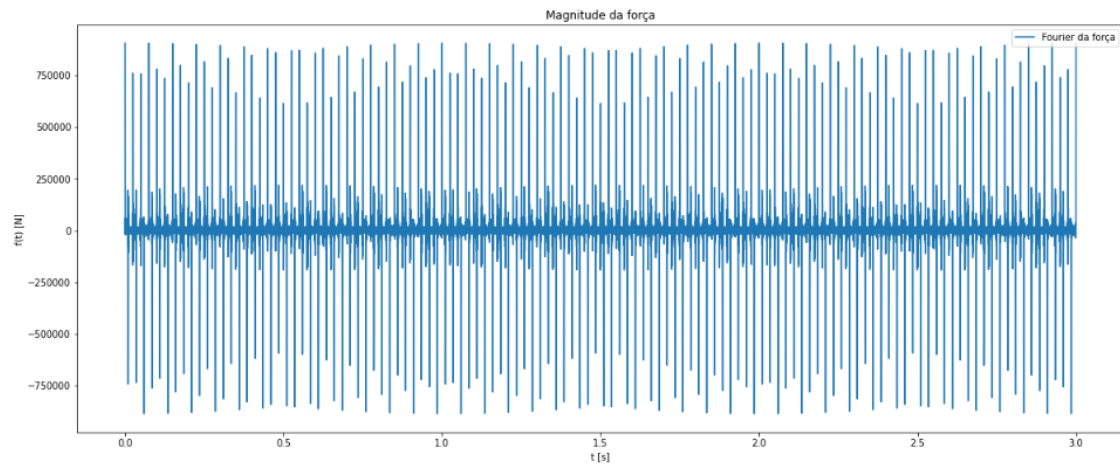
```



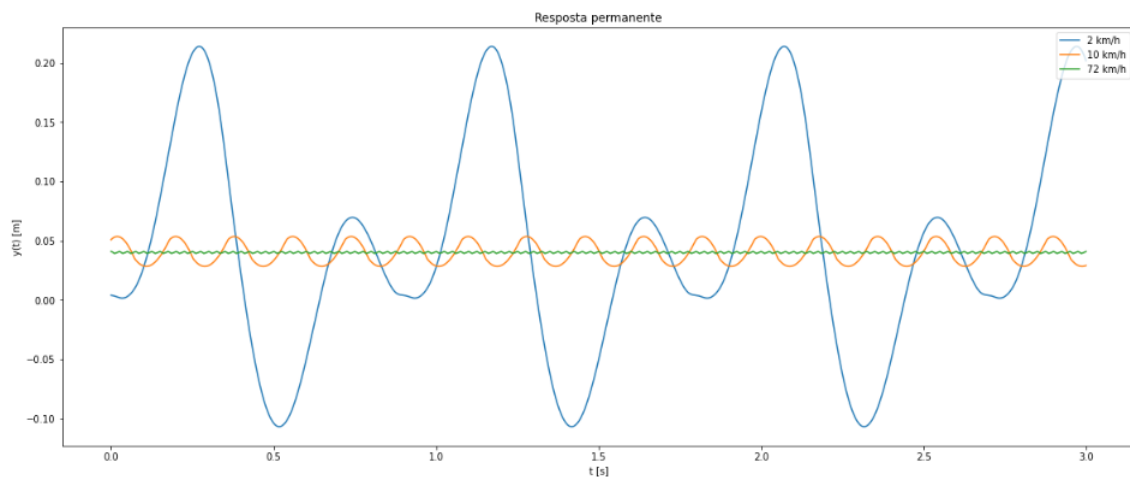


```
# Plotting magnitude da força
plot_graph(x=t, y=F1, label='Fourier da força', label_x='t [s]', label_y='f(t) [N]', title='Magnitude da força')
plot_graph(x=t, y=F2, label='Fourier da força', label_x='t [s]', label_y='f(t) [N]', title='Magnitude da força')
plot_graph(x=t, y=F3, label='Fourier da força', label_x='t [s]', label_y='f(t) [N]', title='Magnitude da força')
```





```
# Plotting resposta permanente
plt.figure(figsize=(20, 8))
plt.plot(t, xp1, label="2 km/h")
plt.plot(t, xp2, label="10 km/h")
plt.plot(t, xp3, label="72 km/h")
plt.xlabel("t [s]")
plt.ylabel("x(t) [m]")
plt.legend(loc='upper right', prop={'size':10})
plt.title("Resposta permanente")
plt.show()
```

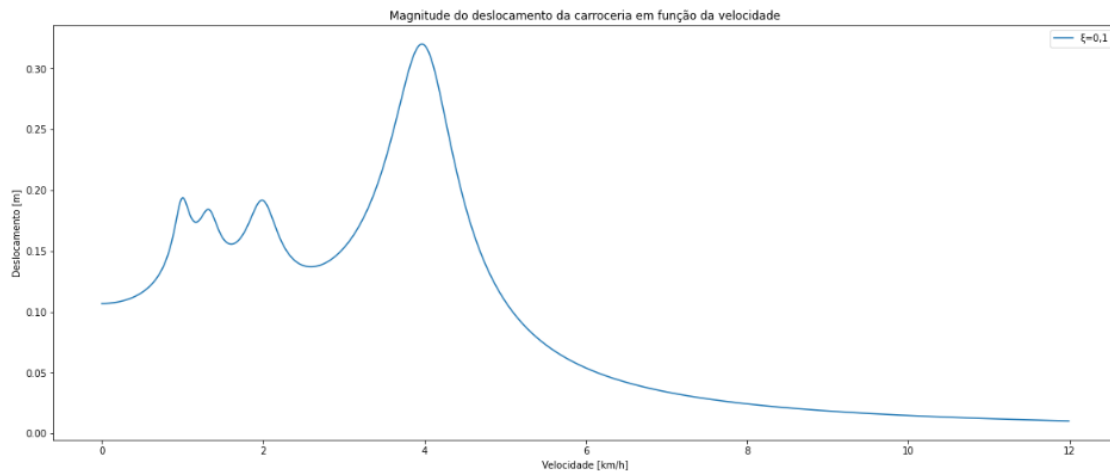


Questão 3

```
velocidade = np.linspace(0.00000001, 12, 1000, endpoint=False)

amp_array = []
for vel in velocidade:
    _, _, _, _, amp = solver(V_kmh=vel, nf=5)
    amp_array.append(amp)

plot_graph(x=velocidade, y=amp_array, label="ξ=0,1", label_x='Velocidade [km/h]',
            label_y="Deslocamento [m]", title='Magnitude do deslocamento da carroceria em função da velocidade')
```



Método antigo

```
def plot_graph(x, y, label, label_x, label_y, title):
    plt.figure(figsize=(20, 8))
    plt.plot(x,y,label=label)
    plt.xlabel(label_x)
    plt.ylabel(label_y)
    plt.legend(loc='upper right',prop={'size':10})
    plt.title(title)
    plt.show()
# Dados para as séries de Fourier

def fourier_y1(y1, an1, bn1, n, w1, t):
    return y1 + an1*np.cos(n*w1*t) + bn1*np.sin(n*w1*t)
def fourier_y2(y2, an1, bn1, n, w2, t):
    return y2 + an1*np.cos(n*w2*t) + bn1*np.sin(n*w2*t)
def fourier_y3(y3, an1, bn1, n, w3, t):
    return y3 + an1*np.cos(n*w3*t) + bn1*np.sin(n*w3*t)

def fourier_F1(F1, ann1, bnn1, n, w1, t):
    return F1 + ann1*np.cos(n*w1*t) + bnn1*np.sin(n*w1*t)
def fourier_F2(F2, ann2, bnn2, n, w2, t):
    return F2 + ann2*np.cos(n*w2*t) + bnn2*np.sin(n*w2*t)
def fourier_F3(F3, ann3, bnn3, n, w3, t):
    return F3 + ann3*np.cos(n*w3*t) + bnn3*np.sin(n*w3*t)

def xp_1_f(xp_1, t, ann1, bnn1, n, w1, sigma_n1, xi, r1):
    '''
    Resposta permanente xp(t)
    xp_1 = somatório para n = n-1
    ann1 = ann para velocidade 1
    bnn1 = bnn para velocidade 1
    '''
    an_atual = (ann1/k)/(np.sqrt(((1-(n*r1)**2)**2)+((2*n*r1*xi)**2)))
    bn_atual = (bnn1/k)/(np.sqrt(((1-(n**2)*(r1**2))**2)+ (2*n*r1*xi)**2))
    return xp_1 + (an_atual*np.cos(n*w1*t - sigma_n1)) +
    (bn_atual*np.sin(n*w1*t - sigma_n1))
def xp_2_f(xp_2, t, ann2, bnn2, n, w2, sigma_n2, xi, r2):
    an_atual = (ann2/k)/(np.sqrt(((1-(n*r2)**2)**2)+((2*n*r2*xi)**2)))
    bn_atual = (bnn2/k)/(np.sqrt(((1-(n**2)*(r2**2))**2)+ (2*n*r2*xi)**2))
    return xp_2 + (an_atual*np.cos(n*w2*t - sigma_n2)) +
    (bn_atual*np.sin(n*w2*t - sigma_n2))
def xp_3_f(xp_3, t, ann3, bnn3, n, w3, sigma_n3, xi, r3):
    an_atual = (ann3/k)/(np.sqrt(((1-(n*r3)**2)**2)+((2*n*r3*xi)**2)))
    bn_atual = (bnn3/k)/(np.sqrt(((1-(n**2)*(r3**2))**2)+ (2*n*r3*xi)**2))
```

```

        return xp_3 + (an_atual*np.cos(n*w3*t - sigma_n3)) +
        (bn_atual*np.sin(n*w3*t - sigma_n3))

nf = 20 # Número de termos da série de Fourier

y1 = 0
y2 = 0
y3 = 0
F1 = 0
F2 = 0
F3 = 0
xp_1 = 0
xp_2 = 0
xp_3 = 0

Y_f1 = [] # lista com os valores do deslocamento fouries em cada instante
de tempo para velocidade 1
Y_f2 = [] # lista com os valores do deslocamento fouries em cada instante
de tempo para velocidade 2
Y_f3 = [] # lista com os valores do deslocamento fouries em cada instante
de tempo para velocidade 3

F_f1 = [] # lista com os valores da força fouries em cada instante de tempo
para velocidade 1
F_f2 = [] # lista com os valores da força fouries em cada instante de tempo
para velocidade 2
F_f3 = [] # lista com os valores da força fouries em cada instante de tempo
para velocidade 3

X_f1 = [] # lista com os valores da resposta permanente em cada instante de
tempo para velocidade 1
X_f2 = [] # lista com os valores da resposta permanente em cada instante de
tempo para velocidade 2
X_f3 = [] # lista com os valores da resposta permanente em cada instante de
tempo para velocidade 3

tempos = [] # lista com os instantes de tempo

t_max = 3 # tempo em segundos

for t in np.linspace(0, t_max, 10000):
    for n in range(1,nf+1):

        # Deslocamento da base y(t)
        an1 = ((Y)/(n*np.pi))*np.sin(2*n*neta*np.pi/Lambda)
        bn1 = ((Y)/(n*np.pi))*(1-np.cos(2*n*neta*np.pi/Lambda))
        y1 = fourier_y1(y1, an1, bn1, n, w1, t)
        y2 = fourier_y2(y2, an1, bn1, n, w2, t)
        y3 = fourier_y3(y3, an1, bn1, n, w3, t)

        # Força F(t) = cy' + ky oriunda da equação do movimento
        ann1 = k*an1 + c*bn1*n*w1
        bnn1 = k*bn1 - c*an1*n*w1
        ann2 = k*an1 + c*bn1*n*w2
        bnn2 = k*bn1 - c*an1*n*w2
        ann3 = k*an1 + c*bn1*n*w3
        bnn3 = k*bn1 - c*an1*n*w3
        F1 = fourier_F1(F1, ann1, bnn1, n, w1, t)
        F2 = fourier_F2(F2, ann2, bnn2, n, w2, t)
        F3 = fourier_F3(F3, ann3, bnn3, n, w3, t)

        # Resposta permanente
        sigma_n1 = np.arctan((2*xi*n*r1)/(1-(n*r1)**2))
        sigma_n2 = np.arctan((2*xi*n*r2)/(1-(n*r2)**2))
        sigma_n3 = np.arctan((2*xi*n*r3)/(1-(n*r3)**2))

        xp_1 = xp_1_f(xp_1, t, ann1, bnn1, n, w1, sigma_n1, xi, r1)
        xp_2 = xp_2_f(xp_2, t, ann2, bnn2, n, w2, sigma_n2, xi, r2)

```

```

        xp_3 = xp_3_f(xp_3, t, ann3, bnn3, n, w3, sigma_n3, xi, r3)

a0 = 2*Y*neta/Lambda
a00 = a0*k

Y_f1.append(y1 + a0/2)
Y_f2.append(y2 + a0/2)
Y_f3.append(y3 + a0/2)

F_f1.append(F1 + a00/2)
F_f2.append(F2 + a00/2)
F_f3.append(F3 + a00/2)

X_f1.append(xp_1 + a00/(2*k))
X_f2.append(xp_2 + a00/(2*k))
X_f3.append(xp_3 + a00/(2*k))

y1=0
y2=0
y3=0
F1=0
F2=0
F3=0
xp_1=0
xp_2=0
xp_3=0

tempos.append(t)

# Plotting deslocamento da base
plot_graph(x=tempos, y=Y_f1, label='Fourier v1', label_x='t [s]',
label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')
plot_graph(x=tempos, y=Y_f2, label='Fourier v2', label_x='t [s]',
label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')
plot_graph(x=tempos, y=Y_f3, label='Fourier v3', label_x='t [s]',
label_y='y(t) [m]', title='Deslocamento da base')

# Plotting magnitude da força
plot_graph(x=tempos, y=F_f1, label='Fourier da força', label_x='t [s]',
label_y='f(t) [N]', title='Magnitude da força')
plot_graph(x=tempos, y=F_f2, label='Fourier da força', label_x='t [s]',
label_y='f(t) [N]', title='Magnitude da força')
plot_graph(x=tempos, y=F_f3, label='Fourier da força', label_x='t [s]',
label_y='f(t) [N]', title='Magnitude da força')

# Plotting resposta permanente
plt.figure(figsize=(20, 8))
plt.plot(tempos,X_f1,label="2 km/h")
plt.plot(tempos,X_f2,label="10 km/h")
plt.plot(tempos,X_f3,label="72 km/h")
plt.xlabel("t [s]")
plt.ylabel("y(t) [m]")
plt.legend(loc='upper right',prop={'size':10})
plt.title("Resposta permanente")
plt.show()

```