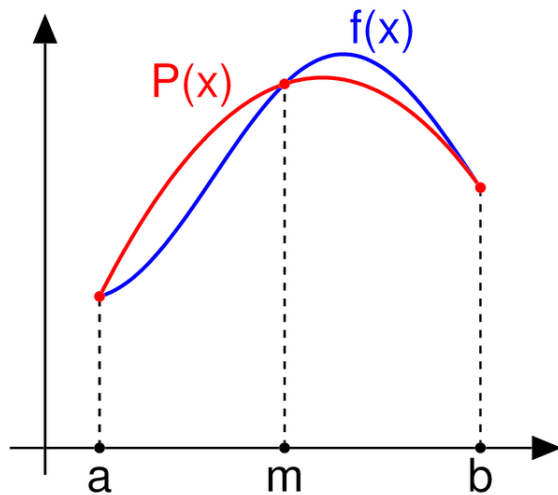


Regla de Simpson



La función $f(x)$ (azul) es aproximada por una función cuadrática $P(x)$ (rojo).

En análisis numérico, la **regla o método de Simpson**, nombrada así en honor a **Thomas Simpson** (y a veces llamada regla de Kepler), es un método de **integración numérica** para obtener el valor aproximado de **integrales definidas**; específicamente es la aproximación:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

A comparación de la **regla del trapecio**, este método de integración resulta ser más exacto, ya que se utilizan polinomios de segundo o tercer grado para su aproximación.

1 Introducción

En integración numérica, una forma de aproximar una integral definida en un intervalo $[a, b]$ es mediante la **regla del trapecio**, es decir, que sobre cada subintervalo en el que se divide $[a, b]$ se aproxima una función $f(x)$ por un polinomio de **primer grado**, para luego calcular la integral como suma de las áreas de los trapecios formados en esos subintervalos. El método utilizado para la regla de Simpson sigue la misma idea, pero aproximando los subintervalos de $f(x)$ mediante polinomios de segundo grado para la regla de 1/3 y polinomios de tercer grado para la regla de 3/8.

2 Historia

La fórmula fue utilizada por primera vez por **Evangelista Torricelli**, pero debe su nombre al matemático Inglés **Thomas Simpson**. Corresponde a la regla del tonel que **Johannes Kepler** ya había formulado en 1615.

Sobre la historia de su surgimiento, Kepler la describe en la dedicatoria de su publicación posterior. Después de que la primera esposa de Kepler había muerto en **Praga** en 1611, Kepler se casó nuevamente -en Linz, donde ahora trabajaba- en 1613. Para la boda compró algunos **toneles de vino**. Puesto ya el vino en la bodega, el vendedor concurre con una vara de medir y determinó el contenido para todos los barriles sin calcular, utilizando un mismo método, consistente en introducir la punta de metal de la vara de medir a través de la piquera, en diagonal hacia los bordes de ambos fondos, la marca en la piquera arrojaba la medida del volumen del contenido. Kepler se sorprendió con aquello de que una diagonal a través del medio del barril pudiera dar una medida sobre el volumen contenido y puso en duda la exactitud de este método, debido a que, por ejemplo, un barril muy bajo que tuviera una base algo más ancha y por eso un volumen contenido mucho menor podría tener el mismo radio a la vista.^[1]

A raíz de esto, Kepler formuló en 1615 el escrito *Nova Stereometria doliorum vinariorum* ("Nuevo cálculo del contenido de barriles de vino"), en el que buscaba métodos verificables para el cálculo del contenido de los toneles de vino. Uno de estos métodos consistió en aproximar la curvatura del barril por una **parábola**, dado que los cálculos con ayuda de parábolas ya se podían realizar muy exactamente desde **Arquímedes**.^[2]

Entre otras cosas, Kepler describió en ese texto una fórmula para el cálculo de la capacidad (más precisamente, del volumen) de barriles de vino con formas irregulares. Esta fórmula arroja valores exactos para el **tronco** de la pirámide (incluida la **pirámide**), la **esfera**, el **paraboloide elíptico**, el **hiperboloide de una hoja** y todas las demás superficies de un cuerpo que pueden ser generadas por secciones planas perpendiculares al eje del cuerpo.

3 Regla de Simpson 1/3 Simple

Dado que la regla de Simpson realiza su aproximación mediante **funciones cuadráticas**, consideramos el **polinomio interpolante** de segundo orden $P_2(x)$, que aproxima la integral $\int_a^b f(x)$ y además tomando en cuen-

ta que $h = (b - a)/2$, tenemos que la expresión de ese polinomio interpolante expresado a través de la interpolación polinómica de Lagrange es:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx \\ \approx \int_a^b \left[\frac{(x-h)(x-b)}{(a-h)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(h-a)(h-b)} f(h) + \frac{(x-a)(x-h)}{(b-a)(b-h)} f(b) \right] dx$$

Así, la integral buscada es equivalente a:

$$I \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)]$$

Se conoce como la regla de Simpsons 1/3 porque en la ecuación resultante h está dividida por 3.

3.1 Cálculo del error

Al ser una estimación de la respuesta verdadera, esta regla tiene un margen de error que viene dado por:

$$E_v = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

donde ξ es un valor perteneciente al intervalo $[a, b]$, generalmente el valor medio.

Podemos notar que para el cálculo del error es necesario obtener la cuarta derivada de la función, pero, si la función fuera un polinomio de tercer grado esta derivada sería 0, entonces el error también sería del 0%, por lo tanto **la regla de Simpsons obtiene la integral exacta para polinomios de tercer grado.**

4 Regla de Simpson 1/3 Compuesta

En el caso de que el intervalo $[a, b]$ no sea lo suficientemente pequeño, el error al calcular la integral puede ser muy grande. Para ello, se recurre a la fórmula compuesta de Simpson o de segmentos múltiples, que consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales (con n par), de manera que $h = (b - a)/n$. Entonces la regla compuesta viene dada por:

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_n)] \approx \frac{3h}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{i=1,4,7,\dots}^{n-2} f(x_i) + 3 \sum_{i=2,5,8,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=3,6,9,\dots}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

O en su forma general:

$$I \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

4.1 Cálculo del error

$$E_v = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

ξ se debe encontrar dentro del intervalo $[a, b]$.

5 Regla de Simpson 3/8 Simple

Esta forma es muy similar a la regla de Simpson de 1/3, pero se usa polinomios de Lagrange de tercer orden. Se tiene en consideración que ahora $h = (b - a)/3$ se define la siguiente regla:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_3(x)dx \\ \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

5.1 Cálculo del error

El error al usar la regla de Simpson de 3/8 se puede obtener usando:

$$E_v = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

donde ξ se encuentra dentro del intervalo $[a, b]$.

6 Regla de Simpson 3/8 Compuesta

Es mas exacto que la Regla de Simpson 3/8 Simple, ya que divide el intervalo de integración en subintervalos. Se expresa de la siguiente forma:

$$I \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + \dots + f(x_n)]$$

O de la siguiente manera, tomando $h = (b - a)/n$ donde n es el número de subintervalos, con la condición de que sean múltiplo de 3 y que en cada sumatoria se tomen los valores de $i = i + 3$.

6.1 Cálculo del error

Se obtiene la cuarta derivada de la función y tomando en cuenta que ξ debe pertenecer al intervalo de integración, se aplica la siguiente fórmula:

$$E_v = \frac{n}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$


7 Véase también

- Regla del trapecio
- Fórmulas de Newton–Cotes

8 Referencias

- [1] Wussing, Hans (1998), *Lecciones de historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España Editores, pp. 141-142, ISBN 9788432309663, http://books.google.es/books?id=IG3_b5Xm8PMC&lpg=PA141&dq=Kepler%20barril&pg=PA142#v=onepage&q&f=false, consultado el 20 de junio de 2011
- [2] Kepler, Johannes (1908). *Neue Stereometrie der Fässer* (en alemán, traducción desde el latín por R. Klug. W. Engelmann). Leipzig.

9 Enlaces externos

-  Wikisource contiene obras originales sobre la **Generalización de la fórmula de Simpson**. Wikisource
- Weisstein, Eric W. «Simpson's rule». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

10 Origen del texto y las imágenes, colaboradores y licencias

10.1 Texto

- **Regla de Simpson** *Fuente:* https://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Simpson?oldid=86491129 *Colaboradores:* Yawmogh, Meruelo, Chobot, YurikBot, GermanX, Tomatejc, Jgomez53, CEM-bot, Kojie, Ggenellina, Thijs!bot, Guille, TXiKiBoT, Urdangaray, Shooke, Muro Bot, BotMultichill, SieBot, Drinibot, Antón Francho, Leonpolanco, Mar del Sur, Juan Mayordomo, Raulshc, UA31, MastiBot, Diegusjaimes, Luckas-bot, Amirobot, Nixón, ArthurBot, SuperBraulio13, Halfdrag, PatruBOT, Pineiden, Africanus, KLBOT2, Invadibot, Acratta, Eiji-chem, Fremole, RosenJax, Mgyugcha, JacobRodrigues, Orlandopr97 y Anónimos: 54

10.2 Imágenes

- **Archivo:Simpsons_method_illustration.png** *Fuente:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Simpsons_method_illustration.png *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Transferido desde en.wikipedia a Commons. *Artista original:* Oleg Alexandrov de Wikipedia en inglés
- **Archivo:Wikisource-logo.svg** *Fuente:* <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Wikisource-logo.svg> *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* Rei-artur *Artista original:* Nicholas Moreau

10.3 Licencia del contenido

- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0