



考研数学微积分 L^AT_EX 笔记

作者: Gabriel Liu

时间: April 3, 2020

版本: 0.1

邮箱: jsrglsq@outlook.com



你这个年龄段，你睡得着觉？有点出息没有！——汤家风

目录

1	极限与连续	1
1.1	极限的有关定义	1
1.2	极限的性质	2
1.2.1	极限的一般性质	2
1.2.2	极限的存在性质	3
1.2.3	无穷小的性质	5
1.3	两个重要极限	6
1.3.1	准备工作	6
1.3.2	两个重要极限式	7
2	导数与微分	10

第一章 极限与连续

1.1 极限的有关定义

定义 1.1. 数列极限

数列 $\{a_n\}$, 若对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad (1.1)$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A (或: 收敛于 A), 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad (1.2)$$



定义 1.2. 函数极限-1

函数 $f(x)$, 若对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.3)$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1.4)$$



笔记

1. 若 $x \rightarrow a$, 则 $x \neq a$. 如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $f(a)$ 无关。如: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$;
3. $x \rightarrow a$ 分为 $x \rightarrow a^+$ 和 $x \rightarrow a^-$;
4. 我们称 $0 < |x - a| < \delta$ 为 a 的去心邻域;
5. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \triangleq f(a - 0)$ (左极限); $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \triangleq f(a + 0)$ (右极限)。
★ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 $\iff f(a - 0), f(a + 0)$ 都存在且相等。

定义 1.3. 函数极限-2

函数 $f(x)$, 若对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > (<) 0$, 当 $x > X (< -X)$ 时, 有

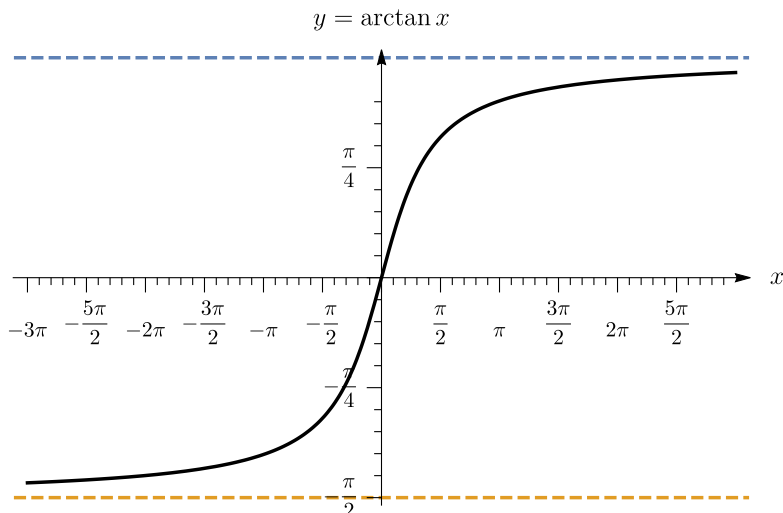
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.5)$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty (-\infty)} f(x) = A \quad (1.6)$$



如, 对于函数 $f(x) = \arctan x$ 有: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

图 1.1: $f(x) = \arctan x$ 的图像**定义 1.4. 无穷小**

若 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为无穷小。

**笔记**

- 0 是无穷小, 但无穷小不一定为 0;
- $\alpha(x) \neq 0$, $\alpha(x)$ 是否为无穷小与 x 的趋向有关; 如, $\alpha = 3(x-1)^2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = 0$, 则 $3(x-1)^2$ 当 $x \rightarrow 1$ 时是无穷小。
- 设 $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$, 有如下三种情形:
 - $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 称 β 为 α 的高阶无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
 - $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k (\neq \infty, 0)$, 称 β 为 α 的同阶无穷小, 记作 $\beta = O(\alpha)$ (特例: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 为等价无穷小, 记作 $\beta \sim \alpha$)。

1.2 极限的性质

1.2.1 极限的一般性质

下面我们开始介绍极限的一般性质, 并给出相关的证明。主要有: 唯一性、保号性 (重点) 两个性质。

1. 唯一性

性质 极限存在必唯一。

证明 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 又 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, 并不妨设 $A > B$ 。我们采用反证法来完成相关的证明。

取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$ 。因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 所以存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta_1$

时, 有 $|f(x) - A| < \frac{A - B}{2}$, 也即 $\frac{A + B}{2} < f(x) < \frac{3A - B}{2}$ (*);

同理, 由第二个极限可以得出 $\frac{3B - A}{2} < f(x) < \frac{A + B}{2}$ (**). 从而, 若我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 就有 (*) 与 (**) 同时成立. 但 $f(x) > \frac{A + B}{2}$ 与 $f(x) < \frac{A + B}{2}$ 显然不可能同时成立, 矛盾, 从而假设不成立.

同理, 我们可以得到 $A < B$ 也不成立. 故 $A = B$.

2. ★ 保号性

性质 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > (<)0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $f(x) > (<)0$.

证明 设 $A > 0$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}A > 0$. 因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}$. 展开可得 $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$. 从而 $f(x) > 0$.

例 1.1 若函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2$, 则 $x = 1$ 为什么点?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2 < 0$, 故根据保号性, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有 $\frac{f'(x)}{(x-1)^3} < 0$. 于是, 当 $x \in (1 - \delta, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, 1 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$. 故 $x = 1$ 为极大值点.

1.2.2 极限的存在性质

下面介绍几个判定极限存在的性质.

性质

1. 数列型

如果 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

2. 函数型

如果 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

型一例题: n 项和求极限

例 1.2 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

解 以上是非齐次的情形, 采取夹逼定理. 于是令 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$.

容易得到: $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq b_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = 1$, 故得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 。

例 1.3 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n})$ 。

解 令 $b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$, 从而 $\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq b_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$ 。

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{左} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{右} = \frac{1}{2}$ 。故所求极限为 $\frac{1}{2}$ 。

例 1.4 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n})$ 。

解

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

例 1.5 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2})$ 。

解

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2+i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



笔记 对于 n 个数相加, 分子或分母不齐次的情况, 用夹逼定理;

对于分子、分母齐次且分母多一次的情况, 用定积分定义。

我们还有另一个著名的判定数列极限存在性的定理, 也即如下性质:

性质 单调有界数列必有极限。

这个性质可以分为两类来讨论, 一为单调递增有上界, 二为单调递减有下界。

型二例题: 极限存在性证明

例 1.6 已知, $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求之。

解 显然, $\{a_n\}$ 单调递增, 现在我们证明 $a_n \leq 2$, 采用数学归纳法:

首先, $a_1 = \sqrt{2} < 2$ 。假设 $a_k \leq 2$, 则 $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$ 。因此 $a_n \leq 2$ 。从而由单调有界定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。下面求出这个极限:

设极限为 A , 由 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, 令 $n \rightarrow \infty$, 两边平方有 $A^2 = A + 2$, 解得 $A = 2$ 或 $A = -1$ 。由于 $a_n > a_1 = \sqrt{2}$, 故 $A = -1$ 舍去。从而极限为 2。

例 1.7 已知 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

解 先证明 $a_n > 0$: 由于 $a_1 > 0$, 故设 $a_k > 0$ 。则 $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{a_k}) > 0$ 。于是根据均值不等式可以得到 $a_{n+1} \geq 1$ 。而 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) - a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} - a_{n+1})$ 。由于 $a_n \geq 1$, 故 $\frac{1}{a_n} \leq a_n$ 。从而, $a_{n+1} - a_n \leq 0$ 。于是数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 又有 $a_n \geq 1$, 从而得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

1.2.3 无穷小的性质

(一) 一般性质

1. 若 $\alpha \rightarrow 0$ 且 $\beta \rightarrow 0$, 则:

$$\begin{cases} \alpha \pm \beta \rightarrow 0, \\ k\alpha \rightarrow 0, \\ \alpha\beta \rightarrow 0. \end{cases}$$

2. 若 $|\alpha| \leq M, \beta \rightarrow 0$, 则 $\alpha\beta \rightarrow 0$ 。

3. $\alpha \rightarrow 0, \lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ 。

(二) 等价性质

1. (a). $\alpha \sim \alpha$ (自反性);

(b). $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (对称性);

(c). $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (传递性)。

2. $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \lim_{\alpha_1} \frac{\beta_1}{\alpha_1} = A$, 则 $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = A$ 。

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时:

(a). $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(x + 1)$;

(b). $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

(c). $(1 + x)^a - 1 \sim ax$ 。

1.3 两个重要极限

1.3.1 准备工作

我们先证明如下结论：

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\sin x < x < \tan x$$

证明 如图1.2所示，在单位圆中，当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}r^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x = S_1$ ， $S_{\text{扇形}AOB} = \frac{1}{2}x = S_2$ ， $S_{\text{Rt}\triangle AOC} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \tan x = S_3$ 。

显然有

$$S_3 > S_2 > S_1$$

从而，

$$\frac{1}{2} \tan x > \frac{1}{2}x > \frac{1}{2} \sin x$$

于是， $\sin x < x < \tan x$ 证明完毕。

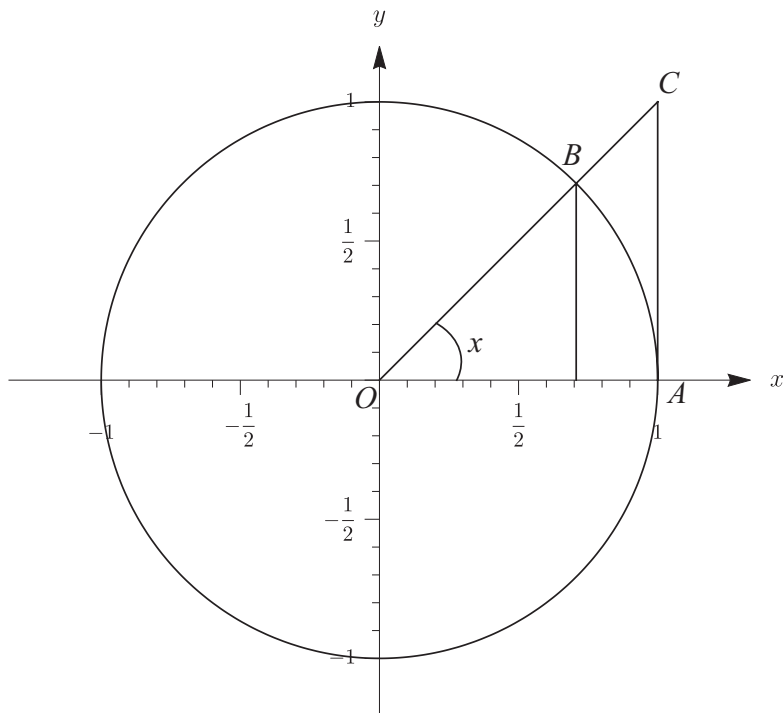


图 1.2: 单位圆



笔记 这里给出的证明并不够严谨，但更严密的证明需要引入幂级数对 $\sin x$ 进行重新定义，这里不再阐述。

1.3.2 两个重要极限式

1. $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$
2. $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$



笔记 这里的 Δ 表示一切具有趋于零状态的变量与表达式, 需要当作一个整体来进行处理。

型三例题: 不定型

所谓不定型, 就是指含有“无穷”与 0 的极限求解。包含 $\frac{0}{0}$ 型, 1^∞ 型, $\frac{\infty}{\infty}$ 型, $\infty \times \infty$ 型, $\infty - \infty$ 型, ∞^0 型与 0^0 型。

下面分类进行讲解。

1. $\frac{0}{0}$ 型

(a). 习惯:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x)^{v(x)} \Rightarrow e^{v(x) \ln u(x)}, \\ \ln(\quad) \Rightarrow \ln(1 + \Delta) \sim \Delta (\Delta \rightarrow 0), \\ (\quad) - 1 \Rightarrow \begin{cases} e^\Delta - 1 \sim \Delta; \\ (1 + \Delta)^a - 1 \sim a\Delta. \end{cases} \quad (\Delta \rightarrow 0) \\ x - \ln(1 + x) \Rightarrow \text{二阶无穷小}, \\ x, \sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x \Rightarrow \text{任意两个之差为三阶无穷小} \end{array} \right.$$

(b). 注意: 例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$

例 1.8 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(1 - \cos x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 1.9 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)^{\sin x} - 1}{x^2 \ln(1 + 2x)}$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \ln(1 + x^2)} - 1}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{2x^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 1.10 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1 + \cos x}{2})^x - 1}{x^3}$ 。

解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \frac{1+\cos x}{2}} - 1}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+\cos x}{2}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\cos x - 1}{2})}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{2}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

2. 1^∞ 型:主要有两种方法: 一是凑出 $(1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ 的形式, 二是恒等变形。例 1.11 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \sin x)^{\frac{1}{x - \ln(1+x)}}$ 。

解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-x \sin x))^{-\frac{1}{x \sin x} \cdot -\frac{x \sin x}{x - \ln(1+x)}} \\
 &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x - \ln(1+x)}} \\
 &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \ln(1+x)}} \\
 &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x}} \\
 &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} 2(x+1)} = e^{-2}
 \end{aligned}$$

例 1.12 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x})^{x^2}$ 。

解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos \frac{1}{x} - 1)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x} - 1} x^2 (\cos \frac{1}{x} - 1)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\cos \frac{1}{x} - 1)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x^2}}} \\
 &\stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t^2}} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

例 1.13 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1 + \sin x}{x - \sin x}} \right]^{\frac{x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{x^3}} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\&= e^{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

3. $\infty - \infty$ 型:

第二章 导数与微分

