考研数学微积分笔记

作者：Gabriel Liu

时间：January 8, 2021

版本：1.0

邮箱：jsrglsq@outlook.com

荣耀的背后刻着一道孤独——周杰伦《以父之名》

目录

第一章 极限与连续

1.1 极限的有关定义

定义 1.1. 数列极限

数列 $\{a_n\}$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon \tag{1.1}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A（或：收敛于 A），记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \tag{1.2}$$

♣

定义 1.2. 函数极限-1

函数 $f(x)$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1.3}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \tag{1.4}$$

♣

笔记

1. 若 $x \to a$，则 $x \neq a$. 如：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0$；
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 与 $f(a)$ 无关。如：$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$；
3. $x \to a$ 分为 $x \to a^+$ 和 $x \to a^-$；
4. 我们称 $0 < |x-a| < \delta$ 为 a 的去心邻域；
5. $\lim\limits_{x\to a^-} \triangleq f(a-0)$（左极限）；$\lim\limits_{x\to a^+} \triangleq f(a+0)$（右极限）。

★$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在 $\iff$ $f(a-0), f(a+0)$ 都存在且相等。

定义 1.3. 函数极限-2

函数 $f(x)$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>(<)0$，当 $x>X(<-X)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{1.5}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} f(x)=A \tag{1.6}$$

♣

如，对于函数 $f(x)=\arctan x$ 有：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$

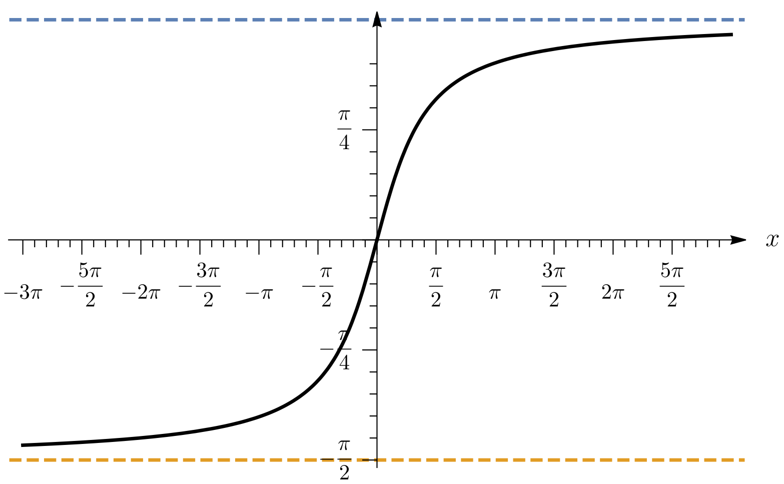

图 1.1: $f(x)=\arctan x$ 的图像

定义 1.4. 无穷小

若 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷小。

♣

笔记

1. 0 是无穷小，但无穷小不一定为 0;
2. $\alpha(x)\neq 0$，$\alpha(x)$ 是否为无穷小与 x 的趋向有关；如，$\alpha=3(x-1)^2$，而 $\lim\limits_{x\to 1}\alpha=0$，则 $3(x-1)^2$ 当 $x\to 1$ 时是无穷小。
3. 设 $\alpha\to 0,\beta\to 0$, 有如下三种情形：
   (a) $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$;
   (b) $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=k(\neq\infty,0)$，称 β 为 α 的同阶无穷小，记作 $\beta=O(\alpha)$（特例：$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$=1，则称 β 与 α 为等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$）。

1.2 极限的性质

1.2.1 极限的一般性质

下面我们开始介绍极限的一般性质，并给出相关的证明。主要有：唯一性、保号性（重点）两个性质。

1. 唯一性

性质 极限存在必唯一。

证明 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 又 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$，并不妨设 $A > B$。我们采用反证法来完成相关的证明。

取 $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$。因为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，所以存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_1$ 时，有 $|f(x) - A| < \dfrac{A-B}{2}$，也即 $\dfrac{A+B}{2} < f(x) < \dfrac{3A-B}{2}(*)$;

同理，由第二个极限可以得出 $\dfrac{3B-A}{2} < f(x) < \dfrac{A+B}{2}(**)$。从而，若我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，就有 $(*)$ 与 $(**)$ 同时成立。但 $f(x) > \dfrac{A+B}{2}$ 与 $f(x) < \dfrac{A+B}{2}$ 显然不可能同时成立，矛盾，从而假设不成立。

同理，我们可以得到 $A < B$ 也不成立。故 $A = B$。 □

2. ★ 保号性

性质 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > (<)0$，则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $f(x) > (<)0$。

证明 设 $A > 0$。取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}A > 0$。因为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon = \dfrac{A}{2}$。展开可得 $\dfrac{A}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}A$。从而 $f(x) > 0$。 □

例 1.1 若函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0, \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2$, 则 $x = 1$ 为什么点？

解 因为 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2 < 0$, 故根据保号性, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $\dfrac{f'(x)}{(x-1)^3} < 0$。于是，当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时，$f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时，$f'(x) < 0$。故 $x = 1$ 为极大值点。

1.2.2 极限的存在性质

下面介绍几个判定极限**存在**的性质。

性质

1. 数列型

   如果 $a_n \le b_n \le c_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$。

2. 函数型

   如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$。

型一:n 项和求极限

例 1.2 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

解 以上是非齐次的情形，采取夹逼定理。于是令 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$。

容易得到：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le b_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = 1$，故得到 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$。

例 1.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n})$。

解 令 $b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$，从而 $\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \le b_n \le \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$。则 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 左 $= \lim\limits_{n\to\infty}$ 右 $= \frac{1}{2}$。故所求极限为 $\frac{1}{2}$。

例 1.4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n})$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2\end{aligned}$$

例 1.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

笔记 对于 n 个数相加，分子或分母不齐次的情况，用夹逼定理；

对于分子、分母齐次且分母多一次的情况，用定积分定义。

我们还有另一个著名的判定数列极限存在性的定理，也即如下性质：

性质 单调有界数列必有极限。

这个性质可以分为两类来讨论，一为单调递增有上界，二为单调递减有下界。

型二: 极限存在性证明

例 1.6 已知，$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求之。

解 显然，$\{a_n\}$ 单调递增，现在我们证明 $a_n\le 2$，采用数学归纳法：

首先，$a_1=\sqrt{2}<2$。假设 $a_k\le 2$，则 $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}\le\sqrt{2+2}=2$。因此 $a_n\le 2$。从而由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。下面求出这个极限：

设极限为 A，由 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，令 $n\to\infty$，两边平方有 $A^2=A+2$，解得 $A=2$ 或 $A=-1$。由于 $a_n>a_1=\sqrt{2}$，故 $A=-1$ 舍去。从而极限为 2。

例 1.7 已知 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

解 先证明 $a_n>0$: 由于 $a_1>0$, 故设 $a_k>0$。则 $a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+\frac{1}{a_{k+1}})>0$。于是根据均值不等式可以得到 $a_{n+1}\geq 1$。而 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_{n+1}})-a_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-a_{n+1})$。由于 $a_n\geq 1$，故 $\frac{1}{a_n}\leq a_n$。从而，$a_{n+1}-a_n\leq 0$。于是数列 $\{a_n\}$ 单调递减，又有 $a_n\geq 1$，从而得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

1.2.3 无穷小的性质

（一）一般性质

1. 若 $\alpha\to 0$ 且 $\beta\to 0$，则：
$$\begin{cases}\alpha\pm\beta\to 0,\\ k\alpha\to 0,\\ \alpha\beta\to 0.\end{cases}$$
2. 若 $|\alpha|\leq M, \beta\to 0$，则 $\alpha\beta\to 0$。
3. $\alpha\to 0, \lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$。

（二）等价性质

1. (a). $\alpha\sim\alpha$(自反性)；
   (b). $\alpha\sim\beta\Rightarrow\beta\sim\alpha$(对称性)；
   (c). $\alpha\sim\beta, \beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma$(传递性)。
2. $\alpha\sim\alpha_1, \beta\sim\beta_1, \lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}=A$，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=A$。
3. 当 $x\to 0$ 时：
   (a). $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim \mathrm{e}^x-1\sim\ln(x+1)$；
   (b). $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；
   (c). $(1+x)^a-1\sim ax$。

1.3 两个重要极限

1.3.1 准备工作

我们先证明如下结论：

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\sin x < x < \tan x$$

证明 如图1.2所示，在单位圆中，当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}r^2\sin x = \frac{1}{2}\sin x = S_1$，$S_{\text{扇形}AOB} = \frac{1}{2}x = S_2$，$S_{\text{Rt}\triangle AOC} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\tan x = S_3$。

显然有

$$S_3 > S_2 > S_1$$

从而，

$$\frac{1}{2}\tan x > \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}\sin x$$

于是，$\sin x < x < \tan x$ 证明完毕。 □

笔记 这里给出的证明并不够严谨，但更严密的证明需要引入幂级数对 $\sin x$ 进行重新定义，这里不再阐述。

1.3.2 两个重要极限式

1. $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\sin\Delta}{\Delta} = 1$
2. $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = \mathrm{e}$

笔记 这里的 Δ 表示一切具有趋于零状态的变量与表达式，需要当作一个整体来进行处理。

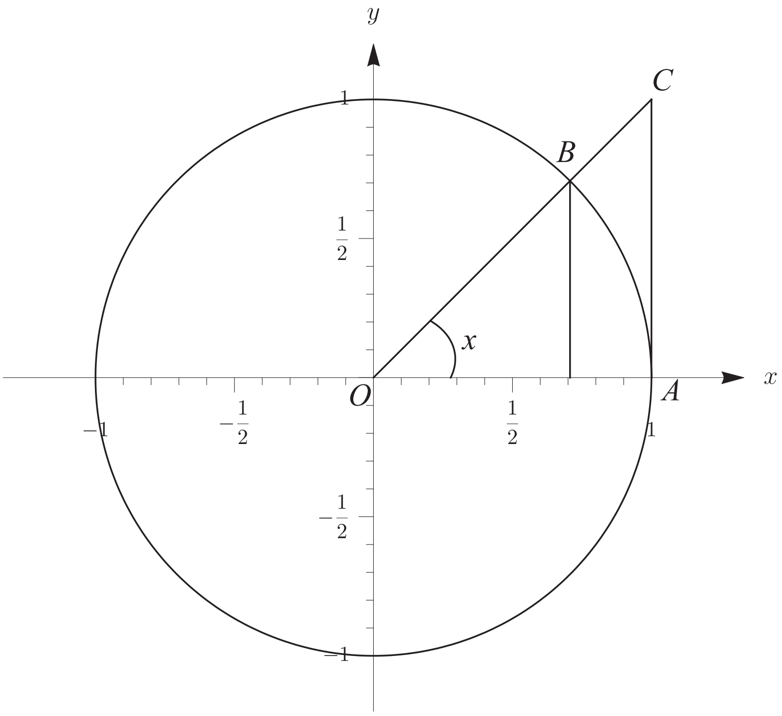

图 **1.2**: 单位圆

型三: 不定型

所谓不定型，就是指含有“无穷”与 0 的极限求解。包含 $\frac{0}{0}$ 型，1^∞ 型，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，$\infty \times \infty$ 型，$\infty - \infty$ 型，∞^0 型与 0^0 型。

下面分类进行讲解。

1. $\dfrac{0}{0}$ 型

   (a). 习惯：

$$\begin{cases} u(x)^{v(x)} \Rightarrow \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}, \\ \ln(\quad) \Rightarrow \ln(1+\Delta) \sim \Delta(\Delta \to 0), \\ (\quad) - 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{\Delta} - 1 \sim \Delta; \\ (1+\Delta)^a - 1 \sim a\Delta. \end{cases} \quad (\Delta \to 0) \\ x - \ln(1+x) \Rightarrow \text{二阶无穷小}, \\ x, \sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x \Rightarrow \text{任意两个之差为三阶无穷小} \end{cases}$$

   (b). 注意：例如，$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0$

例 1.8 求极限：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$。

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(1-\cos x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例 1.9 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\sin x}-1}{x^2\ln(1+2x)}$。

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x\ln(1+x^2)}-1}{2x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{2x^3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例 1.10 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1+\cos x}{2})^x-1}{x^3}$。

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-1}{2}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

2. 1^∞ 型:

主要有两种方法：一是凑出 $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ 的形式，二是恒等变形。

例 1.11 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$。

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}(1+(-x\sin x))^{-\frac{1}{x\sin x}\cdot-\frac{x\sin x}{x-\ln(1+x)}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x-\ln(1+x)}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{x}{1+x}}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}2(x+1)} = \mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}
$$

例 1.12 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$。

解

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to\infty}(1+\cos\frac{1}{x}-1)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}x^2(\cos\frac{1}{x}-1)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\cos\frac{1}{x}-1)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}} \\
&\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

例 1.13 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

解

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{x-\sin x}}\right]^{\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\frac{1}{x^3}} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin x}\frac{x-\sin x}{x^3}} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{6}}
\end{aligned}
$$

3. $\infty-\infty$ 型：

例 1.14 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(\tan x)^2})$

解

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0}(\frac{(\tan x)^2-x^2}{(\tan x)^2x^2}) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^2-x^2}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\times\frac{\tan x-x}{x^3} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{(\sec x)^2-1}{3x^2} \\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^2}{x^2}=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

例 1.15 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x+8}-x)$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+8}{\sqrt{x^2-4x+8}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4+\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}}+1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

4. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型:

(a).

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}
\begin{cases}
=0, & m<n \\
=\frac{b_m}{a_m}, & m=n \\
=\infty, & m>n
\end{cases}
$$

例 1.16 已知：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2019}}{(n+1)^a-n^a}=k(\neq 0,\neq\infty)$，求 a,k。

解

$$
\begin{aligned}
(n+1)^a &= \mathrm{C}_a^0 n^a + \mathrm{C}_a^1 n^{a-1} + \cdots + \mathrm{C}_a^a \\
&= n^a + a n^{a-1} + A
\end{aligned}
$$

所以，$(n+1)^a - n^a = an^{a-1}+A$。从而，$a-1=2019 \Rightarrow a=2020$，则 $k=\dfrac{1}{2020}$。

例 1.17 求极限：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x^4+3x+1)}$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2(1+\frac{3}{x^2})}{\ln x^2(1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+\ln(1+\frac{3}{x^3})}{4\ln x+\ln(1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4})} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(b). 洛必达法则

例 1.18 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\mathrm{e}^x}=0$

例 1.19 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

5. $0\times\infty$ 型

可以化成如下两种情形：

$$\begin{cases} \frac{0}{\frac{1}{\infty}} & \text{即}\frac{0}{0}\text{型} \\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}} & \text{即}\frac{\infty}{\infty}\text{型} \end{cases}$$

例 1.20 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)^2\sin\frac{1}{x^2}$。

解

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2}\times\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 4$$

例 1.21 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))$。

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}x^2(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} \\ &\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} \\ &= \lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{t+1}}{2t} \\ &= \lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{t+1}}{2t} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. 0^0 型和 ∞^0 型

这两种都可以化成 $\mathrm{e}^{\ln}$ 的形式。

例 1.22 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x = \lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{x\ln x} = \lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{1/x}} = \lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = 0$

型四: 左右极限

★$a^{\overset{?}{\overline{x-b}}}$ 或 $a^{\overset{?}{\overline{b-x}}}$ 当 $x\to b$ 时一定分左右。

例 1.23 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{x-2}}$，求极限 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$。

解 因为 $f(2-0)=0, f(2+0)=+\infty$，故该极限不存在。

例 1.24 $f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$，求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$。

解 因为 $f(1-0)=\dfrac{1}{1}=1, f(1+0)=\dfrac{1-\infty}{1+\infty}=-1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在。

这个函数的图像如下图所示：

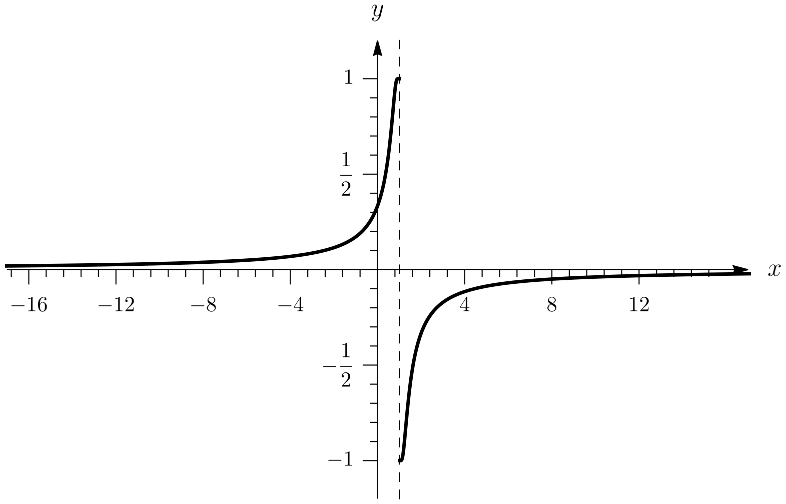

图 1.3: $f(x)$ 的图像

1.4 连续与间断

1.4.1 相关定义

1. 连续

   (a). 一点连续：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ 或 $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$，则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续。

   (b). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $f(a) = f(a+0), f(b) = f(b-0)$。则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，记为 $f(x) \in C[a,b]$。

2. 间断: 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

   分类：

   (a). 第一类：$f(a+0), f(a-0)$ 均存在。

   若 $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$，则称为可去间断点；

   若 $f(a-0) \neq f(a+0)$，则称为跳跃间断点。

   (b). 第二类：$f(a-0), f(a+0)$ 至少一个不存在。

型六: 间断点及分类

例 1.25 求函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点。

解 容易看出，$x=0, x=\pm 1$ 为间断点。又因为 $f(0-0)=0$ 且 $f(0+0)=-\infty$，故 $x=0$ 为第二类间断点。而 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1}e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}e$，所以可以得到 $x=-1$ 为第二类间断点，而 $x=1$ 为可去间断点。

例 1.26 求函数 $f(x)=\dfrac{xe^{\frac{1}{x-1}}}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点。

解 容易看出，$x=0, x=1$ 为间断点。因为 $x\to 0$ 时，$1-e^{\frac{x}{x-1}} \sim \dfrac{x}{1-x}$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x-1}} \times \dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-1} \times \dfrac{x}{\frac{x}{1-x}} = e^{-1}$，从而 $x=0$ 为可去间断点。而 $f(1-0)=0 \neq f(1+0) = -\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1-x}{x-1}} = -e^{-1}$，从而 $x=1$ 为跳跃间断点。

1.4.2 函数在区间上连续

1. 最值

   若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在最小值 m 与最大值 M；

2. 有界

   若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $k>0$，使得 $|f(x)|\leq k$；

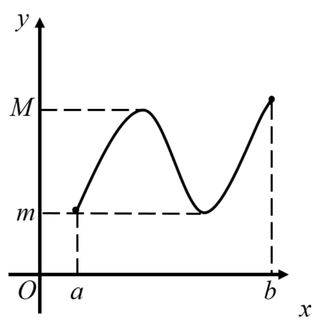

图 1.4: $f(x)$ 的图像

3. 零点定理

   若 $f(x)\in[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists c\in[a,b]$, 使得 $f(c)=0$。

4. 介值定理

   $f(x)\in C[a,b]$，则 $\forall \eta \in [m,M], \exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi)=\eta$。（位于最小值 m 和最大值 M 之间的任何值皆可被 $f(x)$ 取到）。

例 1.27 证明：方程 $x^5-4x+1=0$ 至少有一个正根。

解 令 $f(x)=x^5-4x+1$。由于 $f(0)=1>0, f(1)=1-4+1<0$，故根据零点

定理，存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x)=0$，也即方程 $x^5-4x+1=0$ 至少有一个正根。 $\square$

例 1.28 $f(x) \in C[a,b], p, q > 0$，且 $p+q=1$。

证明：存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = pf(a) + qf(b)$。

解 由于 $f(x) \in C[a,b]$，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最小值 m 和最大值 M。而 $pf(a)+qf(b) \le pM+qM = M$，且 $pf(a)+qf(b) \ge pm+qm = m$，从而 $pf(a)+qf(b) \in [m,M]$。根据介值定理，存在 $\xi \in [a,b]$，$f(\xi) = pf(a)+qf(b)$。$\square$

例 1.29 $f(x) \in C[0,2], f(0)+2f(1)+3f(2) = 6$。证明：$\exists c \in [0,2]$, 使得 $f(c)=1$。

解 由于 $f(x) \in C[0,2]$，故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上存在最小值 m 和最大值 M。于是 $6m \le f(0)+2f(1)+3f(2) \le 6M$，故 $m \le 1 \le M$。根据介值定理，存在 $c \in [0,2]$，$f(c)=1$。 $\square$

第二章 导数与微分

2.1 导数的有关定义

定义 2.1. 导数

设函数 $y=f(x), x\in D$。现有一点 $x_0\in D$ 且 $x_0+\Delta x\in D$。定义 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.1}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数。记作

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\triangleq f'(x_0) \tag{2.2}$$

♣

笔记

1. 等价定义：

   由于当 $x\to x_0$ 时，有 $f(x)\to f(x_0)$，而 $\Delta x = x-x_0$，$\Delta y = f(x)-f(x_0)$，从而导数又可以表示为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\triangleq f'(x_0) \tag{2.3}$$

2. 左右导数

   $\Delta x\to 0$ 分为两种情况：$\Delta x\to 0^-$ 以及 $\Delta x\to 0^+$；同理，$x\to a$ 也分为两种情况：$x\to a^-$ 以及 $x\to a^+$。从而我们可以类似地得到：

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\triangleq f'_-(x_0) \tag{2.4}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \triangleq f'_+(x_0) \tag{2.5}$$

并且，可以给出一点导数存在的充要条件，也即：

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 均存在且相等。

3. 可导性与连续性

$f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，反之则不然。证明从略。

例 **2.1** 设

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0, \\ \ln(1+2x), & x \geq 0 \end{cases}$$

,

求 $f'(0)$。

解 先考虑连续性。

由于 $f(0-0) = 0 = f(0+0)$，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

再考虑可导性。

由于 $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0_-} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0_-} \frac{e^x-1}{x} = 1$，

$f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0_+} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0_-} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \neq f'_-(0)$，

故 $f'(0)$ 不存在。

4. 已知 $f(x)$ 连续，

若 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-b}{x-a} = A$，则 $f(a) = b, f'(a) = A$。

这是因为当 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-b}{x-a} = A$ 时，由于分母为 0，则分子必须也为 0 才能存在极限；根据导数定义又能推出 $f'(a) = A$。

2.2 可微

定义 2.2. 可微

设函数 $y = f(x), x \in D$。现有一点 $x_0 \in D$ 且 $x_0 + \Delta x \in D$。定义 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$。若 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 可微。♣