考研数学微积分 LaTeX 笔记

作者：Gabriel Liu

时间：March 28, 2020

版本：0.1

邮箱：*jsrglsq@outlook.com*

ElegantLaTeX Program

你这个年龄段，你睡得着觉？有点出息没有！— 汤家凤

目录

1 极限与连续 **1**

1.1 极限的有关定义 1

1.2 极限的性质 2

1.2.1 极限的一般性质 2

1.2.2 极限的存在性质 3

1.2.3 无穷小的性质 5

1.3 两个重要极限 6

2 导数与微分 **7**

第一章 极限与连续

1.1 极限的有关定义

定义 1.1. 数列极限

数列 $\{a_n\}$，若对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon \tag{1.1}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A（或：收敛于 A），记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \tag{1.2}$$

♣

定义 1.2. 函数极限-1

函数 $f(x)$，若对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1.3}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \tag{1.4}$$

♣

笔记

1. 若 $x \to a$，则 $x \neq a$. 如：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0$；
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 与 $f(a)$ 无关。如：$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$；
3. $x \to a$ 分为 $x \to a^+$ 和 $x \to a^-$；
4. 我们称 $0 < |x-a| < \delta$ 为 a 的去心邻域；
5. $\lim\limits_{x\to a^-} \triangleq f(a-0)$（左极限）；$\lim\limits_{x\to a^+} \triangleq f(a+0)$（右极限）。

   ★$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在 $\iff$ $f(a-0), f(a+0)$ 都存在且相等。

定义 1.3. 函数极限-2

函数 $f(x)$，若对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > (<)0$，当 $x > X(< -X)$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1.5}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to +\infty(-\infty)} f(x) = A \tag{1.6}$$

♣

如，对于函数 $f(x) = \arctan x$ 有：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

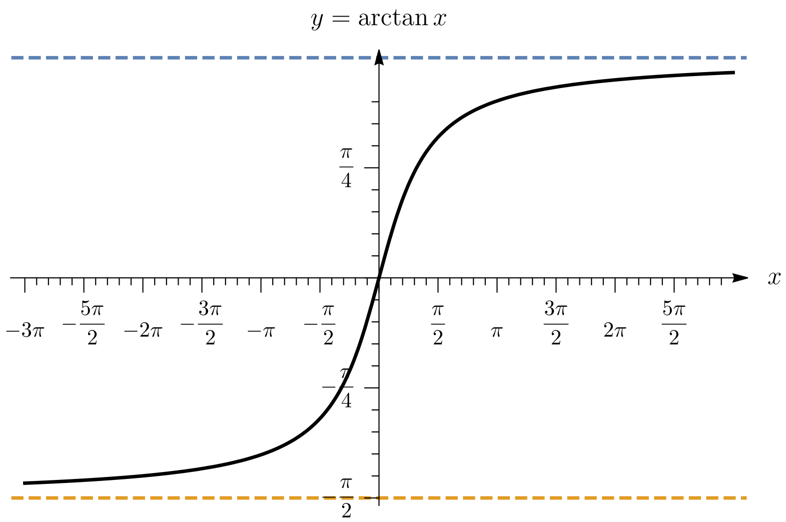

图 **1.1:** $f(x) = \arctan x$ 的图像

定义 1.4. 无穷小

若 $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$，则称 $\alpha(x)$ 当 $x \to a$ 时为无穷小。 ♣

笔记

1. 0 是无穷小，但无穷小不一定为 0;
2. $\alpha(x) \neq 0$，$\alpha(x)$ 是否为无穷小与 x 的趋向有关；如，$\alpha = 3(x-1)^2$，而 $\lim\limits_{x\to 1} \alpha = 0$，则 $3(x-1)^2$ 当 $x \to 1$ 时是无穷小。
3. 设 $\alpha \to 0, \beta \to 0$, 有如下三种情形：
   (a) $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$;
   (b) $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = k(\neq \infty, 0)$，称 β 为 α 的同阶无穷小，记作 $\beta = O(\alpha)$（特例：$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$=1，则称 β 与 α 为等价无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$）。

1.2 极限的性质

1.2.1 极限的一般性质

下面我们开始介绍极限的一般性质，并给出相关的证明。主要有：唯一性、保号性（重点）两个性质。

1. 唯一性

   性质 极限存在必唯一。

   证明 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 又 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$，并不妨设 $A > B$。我们采用反证法来完成相关的证明。

   取 $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$。因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，所以存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_1$

时，有 $|f(x)-A|<\frac{A-B}{2}$，也即 $\frac{A+B}{2}<f(x)<\frac{3A-B}{2}(*)$;
同理，由第二个极限可以得出 $\frac{3B-A}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2}(**)$。从而，若我们取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有 $(*)$ 与 $(**)$ 同时成立。但 $f(x)>\frac{A+B}{2}$ 与 $f(x)<\frac{A+B}{2}$ 显然不可能同时成立，矛盾，从而假设不成立。
同理，我们可以得到 $A<B$ 也不成立。故 $A=B$。

2. ★ 保号性

性质 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>(<)0$，则存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>(<)0$。

证明 设 $A>0$。取 $\varepsilon=\frac{1}{2}A>0$。因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，故存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2}$。展开可得 $\frac{A}{2}<f(x)<\frac{3}{2}A$。从而 $f(x)>0$。

例 1.1 若函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0,\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{(x-1)^3}=-2$, 则 $x=1$ 为什么点？

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{(x-1)^3}=-2<0$, 故根据保号性, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $\frac{f'(x)}{(x-1)^3}<0$。于是，当 $x\in(1-\delta,1)$ 时，$f'(x)>0$; 当 $x\in(1,1+\delta)$ 时，$f'(x)<0$。故 $x=1$ 为极大值点。

1.2.2 极限的存在性质

下面介绍几个判定极限**存在**的性质。

性质

1. 数列型

   如果 $a_n\le b_n\le c_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$。

2. 函数型

   如果 $f(x)\le g(x)\le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$。

型一例题:n 项和求极限

例 1.2 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

解 以上是非齐次的情形，采取夹逼定理。于是令 $b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$。

容易得到：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le b_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}=1$，故得到 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$。

例 1.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$。

解 令 $b_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$，从而 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\le b_n\le\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$。则 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 左 $=\lim\limits_{n\to\infty}$ 右 $=\dfrac{1}{2}$。故所求极限为 $\dfrac{1}{2}$。

例 1.4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2\end{aligned}$$

例 1.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

笔记 对于 n 个数相加，分子或分母不齐次的情况，用夹逼定理；
对于分子、分母齐次且分母多一次的情况，用定积分定义。

我们还有另一个著名的判定数列极限存在性的定理，也即如下性质：

性质 单调有界数列必有极限。

这个性质可以分为两类来讨论，一为单调递增有上界，二为单调递减有下界。

型二例题：极限存在性证明

例 1.6 已知，$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求之。

解 显然，$\{a_n\}$ 单调递增，现在我们证明 $a_n \leq 2$，采用数学归纳法：

首先，$a_1 = \sqrt{2} < 2$。假设 $a_k \leq 2$，则 $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} \leq \sqrt{2+2} = 2$。因此 $a_n \leq 2$。从而由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。下面求出这个极限：

设极限为 A，由 $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$，令 $n \to \infty$，两边平方有 $A^2 = A+2$，解得 $A = 2$ 或 $A = -1$。由于 $a_n > a_1 = \sqrt{2}$，故 $A = -1$ 舍去。从而极限为 2。

例 1.7 已知 $a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n})$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

解 先证明 $a_n > 0$: 由于 $a_1 > 0$, 故设 $a_k > 0$。则 $a_{k+1} = \dfrac{1}{2}(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}) > 0$。于是根据均值不等式可以得到 $a_{n+1} \geq 1$。而 $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}) - a_n = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a_n} - a_{n+1})$。由于 $a_n \geq 1$，故 $\dfrac{1}{a_n} \leq a_n$。从而，$a_{n+1} - a_n \leq 0$。于是数列 $\{a_n\}$ 单调递减，又有 $a_n \geq 1$，从而得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

1.2.3 无穷小的性质

（一）一般性质

1. 若 $\alpha \to 0$ 且 $\beta \to 0$，则：
$$\begin{cases} \alpha \pm \beta & \to 0, \\ k\alpha & \to 0, \\ \alpha\beta & \to 0. \end{cases}$$
2. 若 $|\alpha| \leq M, \beta \to 0$，则 $\alpha\beta \to 0$。
3. $\alpha \to 0, \lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$。

（二）等价性质

1. (a). $\alpha \sim \alpha$(自反性);
   (b). $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$(对称性);
   (c). $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$(传递性)。
2. $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \lim \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = A$，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = A$。
3. **当 $x \to 0$ 时：**
   (a). $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(x+1)$;
   (b). $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$;
   (c). $(1+x)^a - 1 \sim ax$。

1.3 两个重要极限

我们先证明如下结论：

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$\sin x < x < \tan x$$

证明 如图1.2所示，在单位圆中，当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}r^2 \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x = S_1$，$S_{扇形AOB} = \dfrac{1}{2}x = S_2$，$S_{\mathrm{Rt}\triangle AOC} = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\tan x = S_3$。

显然有

$$S_3 > S_2 > S_1$$

从而，

$$\frac{1}{2}\tan x > \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}\sin x$$

于是，$\sin x < x < \tan x$ 证明完毕。

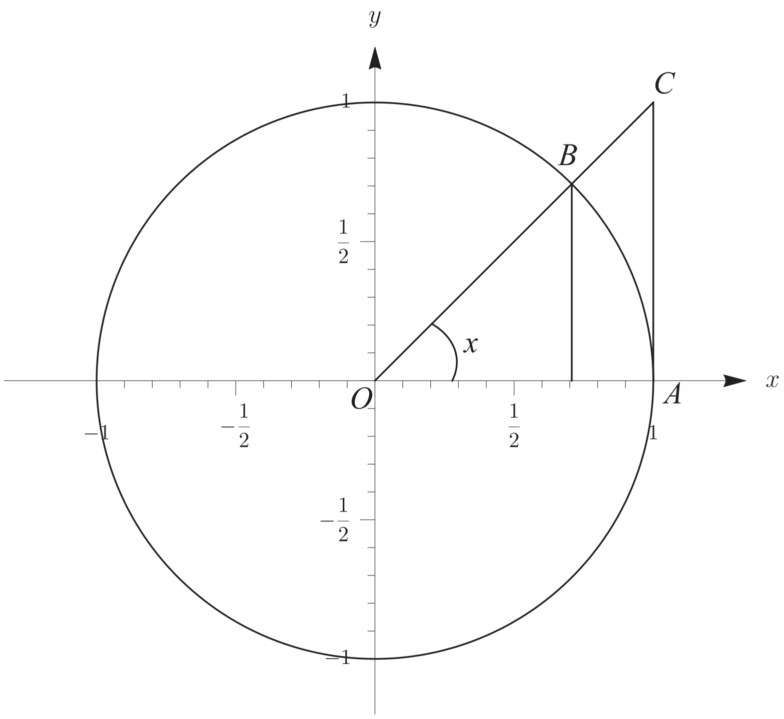

图 1.2: 单位圆

笔记 这里给出的证明并不够严谨，但更严密的证明需要引入幂级数对 $\sin x$ 进行重新定义，这里不再阐述。

第 二 章　导数与微分