考研数学---微积分 LaTeX 笔记

作者：Gabriel Liu

时间：March 19, 2020

版本：0.1

邮箱:：*jsrglsq@outlook.com*

ElegantLaTeX Program

你这个年龄段，你睡得着觉？有点出息没有！— 汤家凤

目录

第一章 极限与连续

1.1 极限的有关定义

定义 1.1. 数列极限

数列 $\{a_n\}$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-A|<\varepsilon \tag{1.1}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A（或：收敛于 A），记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \tag{1.2}$$

♣

定义 1.2. 函数极限-1

函数 $f(x)$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{1.3}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \tag{1.4}$$

♣

笔记

1. 若 $x\to a$，则 $x\neq a$. 如：$\lim\limits_{x\to0}\frac{0}{x^3}=0$；
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $f(a)$ 无关。如：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$；
3. $x\to a$ 分为 $x\to a^+$ 和 $x\to a^-$；
4. 我们称 $0<|x-a|<\delta$ 为 a 的去心邻域；
5. $\lim\limits_{x\to a^-}\triangleq f(a-0)$（左极限）；$\lim\limits_{x\to a^+}\triangleq f(a+0)$（右极限）。

   ★$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\iff$ $f(a-0),f(a+0)$ 都存在且相等。

定义 1.3. 函数极限-2

函数 $f(x)$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>(<)0$，当 $x>X(<-X)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{1.5}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}f(x)=A \tag{1.6}$$

♣

如，对于函数 $f(x)=\arctan x$ 有：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}$

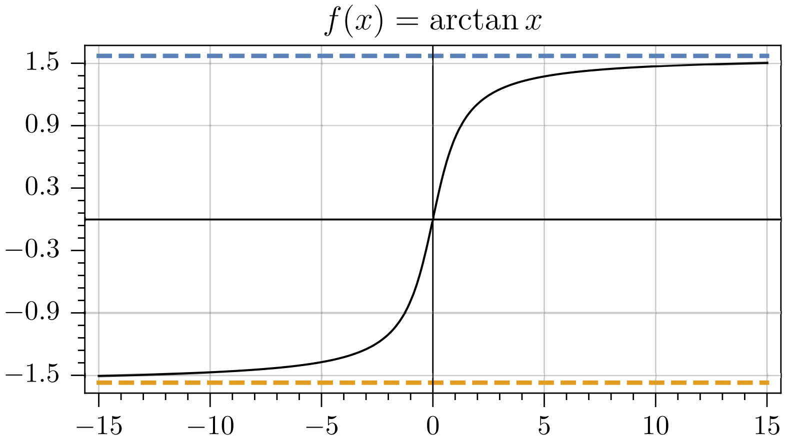

图 1.1: $f(x) = \arctan x$ 的图像

定义 1.4. 无穷小

若 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$，则称 $\alpha(x)$ 当 $x \to a$ 时为无穷小。

笔记

1. 0 是无穷小，但无穷小不一定为 0;
2. $\alpha(x) \neq 0$，$\alpha(x)$ 是否为无穷小与 x 的趋向有关；如，$\alpha = 3(x-1)^2$，而 $\lim\limits_{x\to 1}\alpha = 0$，则 $3(x-1)^2$ 当 $x \to 1$ 时是无穷小。
3. 设 $\alpha \to 0, \beta \to 0$, 有如下三种情形：
   (a) $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$;
   (b) $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = k(\neq \infty, 0)$，称 β 为 α 的同阶无穷小，记作 $\beta = O(\alpha)$（特例：$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$=1，则称 β 与 α 为等价无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$）。

1.2 极限的性质

1.2.1 极限的一般性质

下面我们开始介绍极限的一般性质，并给出相关的证明。主要有：唯一性、保号性（重点）两个性质。

1. 唯一性

   性质 极限存在必唯一。

   证明 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 又 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$，并不妨设 $A > B$。我们采用反证法来完成相关的证明。

   取 $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2} > 0$。因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，所以存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_1$ 时，有 $|f(x) - A| < \dfrac{A-B}{2}$，也即 $\dfrac{A+B}{2} < f(x) < \dfrac{3A-B}{2}(*)$;

同理，由第二个极限可以得出 $\frac{3B-A}{2} < f(x) < \frac{A+B}{2}(**)$。从而，若我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，就有 $(*)$ 与 $(**)$ 同时成立。但 $f(x) > \frac{A+B}{2}$ 与 $f(x) < \frac{A+B}{2}$ 显然不可能同时成立，矛盾，从而假设不成立。

同理，我们可以得到 $A < B$ 也不成立。故 $A = B$。

2. ★ 保号性

性质 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > (<)0$，则存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $f(x) > (<)0$。

证明 设 $A > 0$。取 $\varepsilon = \frac{1}{2}A > 0$。因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，故存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}$。展开可得 $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$。从而 $f(x) > 0$。

例 1.1 若函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0, \lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2$，则 $x = 1$ 为什么点？

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2 < 0$，故根据保号性，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $\frac{f'(x)}{(x-1)^3} < 0$。于是，当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时，$f'(x) < 0$。故 $x = 1$ 为极大值点。

1.2.2 极限的存在性质

下面介绍几个判定极限**存在**的性质。

性质

1. 数列型

如果 $a_n \le b_n \le c_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$。

2. 函数型

如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$。

型一例题:n 项和求极限

例 1.2 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 以上是非齐次的情形，采取夹逼定理。于是令 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$。

容易得到：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le b_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} =$

1，故得到 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$。