



# 考研数学微积分 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 笔记

作者: Gabriel Liu

时间: March 31, 2020

版本: 0.1

邮箱: [jsrglsq@outlook.com](mailto:jsrglsq@outlook.com)



你这个年龄段，你睡得着觉？有点出息没有！——汤家风

# 目录

<b>1</b>	<b>极限与连续</b>	<b>1</b>
1.1	极限的有关定义 . . . . .	1
1.2	极限的性质 . . . . .	2
1.2.1	极限的一般性质 . . . . .	2
1.2.2	极限的存在性质 . . . . .	3
1.2.3	无穷小的性质 . . . . .	5
1.3	两个重要极限 . . . . .	6
1.3.1	准备工作 . . . . .	6
1.3.2	两个重要极限式 . . . . .	7
<b>2</b>	<b>导数与微分</b>	<b>8</b>

# 第一章 极限与连续

## 1.1 极限的有关定义

### 定义 1.1. 数列极限

数列  $\{a_n\}$ , 若对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad (1.1)$$

则称数列  $\{a_n\}$  的极限为  $A$  (或: 收敛于  $A$ ), 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad (1.2)$$



### 定义 1.2. 函数极限-1

函数  $f(x)$ , 若对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.3)$$

则称函数  $f(x)$  的极限为  $A$ , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1.4)$$



### 笔记

1. 若  $x \rightarrow a$ , 则  $x \neq a$ . 如:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  与  $f(a)$  无关。如:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ ;
3.  $x \rightarrow a$  分为  $x \rightarrow a^+$  和  $x \rightarrow a^-$ ;
4. 我们称  $0 < |x - a| < \delta$  为  $a$  的去心邻域;
5.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \triangleq f(a-0)$  (左极限);  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \triangleq f(a+0)$  (右极限)。  
★  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  存在  $\iff f(a-0), f(a+0)$  都存在且相等。

### 定义 1.3. 函数极限-2

函数  $f(x)$ , 若对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists X > (<) 0$ , 当  $x > X (< -X)$  时, 有

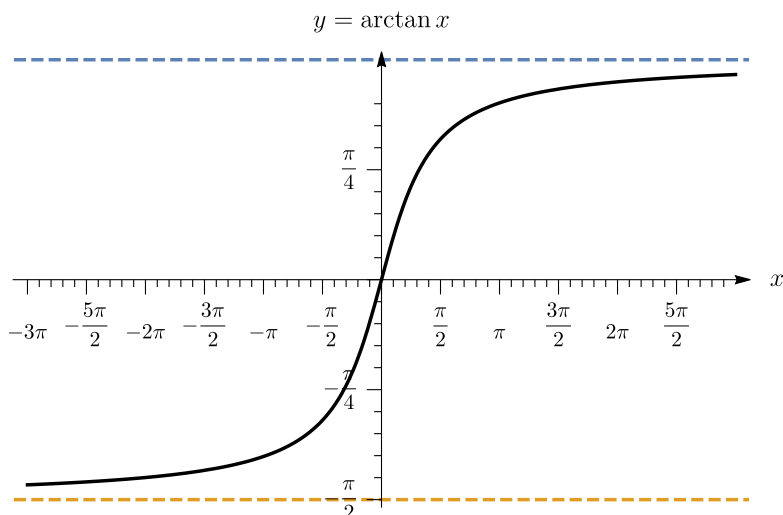
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.5)$$

则称函数  $f(x)$  的极限为  $A$ , 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty (-\infty)} f(x) = A \quad (1.6)$$



如, 对于函数  $f(x) = \arctan x$  有:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

图 1.1:  $f(x) = \arctan x$  的图像**定义 1.4. 无穷小**

若  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , 则称  $\alpha(x)$  当  $x \rightarrow a$  时为无穷小。

**笔记**

- 0 是无穷小, 但无穷小不一定为 0;
- $\alpha(x) \neq 0$ ,  $\alpha(x)$  是否为无穷小与  $x$  的趋向有关; 如,  $\alpha = 3(x-1)^2$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = 0$ , 则  $3(x-1)^2$  当  $x \rightarrow 1$  时是无穷小。
- 设  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ , 有如下三种情形:
  - $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 称  $\beta$  为  $\alpha$  的高阶无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ ;
  - $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k (\neq \infty, 0)$ , 称  $\beta$  为  $\alpha$  的同阶无穷小, 记作  $\beta = O(\alpha)$  (特例:  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 则称  $\beta$  与  $\alpha$  为等价无穷小, 记作  $\beta \sim \alpha$ )。

## 1.2 极限的性质

### 1.2.1 极限的一般性质

下面我们开始介绍极限的一般性质, 并给出相关的证明。主要有: 唯一性、保号性 (重点) 两个性质。

#### 1. 唯一性

**性质** 极限存在必唯一。

**证明** 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  又  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , 并不妨设  $A > B$ 。我们采用反证法来完成相关的证明。

取  $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$ 。因为  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 所以存在  $\delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x-a| < \delta_1$

时, 有  $|f(x) - A| < \frac{A - B}{2}$ , 也即  $\frac{A + B}{2} < f(x) < \frac{3A - B}{2}$  (\*);

同理, 由第二个极限可以得出  $\frac{3B - A}{2} < f(x) < \frac{A + B}{2}$  (\*\*). 从而, 若我们取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 就有 (\*) 与 (\*\*) 同时成立. 但  $f(x) > \frac{A + B}{2}$  与  $f(x) < \frac{A + B}{2}$  显然不可能同时成立, 矛盾, 从而假设不成立.

同理, 我们可以得到  $A < B$  也不成立. 故  $A = B$ .

## 2. ★ 保号性

**性质** 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > (<)0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $f(x) > (<)0$ .

**证明** 设  $A > 0$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}A > 0$ . 因为  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 故存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}$ . 展开可得  $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$ . 从而  $f(x) > 0$ .

**例 1.1** 若函数  $f(x)$  满足  $f(1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2$ , 则  $x = 1$  为什么点?

**解** 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = -2 < 0$ , 故根据保号性, 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 有  $\frac{f'(x)}{(x-1)^3} < 0$ . 于是, 当  $x \in (1 - \delta, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (1, 1 + \delta)$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $x = 1$  为极大值点.

## 1.2.2 极限的存在性质

下面介绍几个判定极限存在的性质.

### 性质

#### 1. 数列型

如果  $a_n \leq b_n \leq c_n$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ .

#### 2. 函数型

如果  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .

## 型一例题: $n$ 项和求极限

**例 1.2** 求极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

**解** 以上是非齐次的情形, 采取夹逼定理. 于是令  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ .

容易得到:  $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq b_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ ,

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = 1$ , 故得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 。

**例 1.3** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n})$ 。

**解** 令  $b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$ , 从而  $\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq b_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$ 。

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{左} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{右} = \frac{1}{2}$ 。故所求极限为  $\frac{1}{2}$ 。

**例 1.4** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n})$ 。

**解**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

**例 1.5** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2})$ 。

**解**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2+i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



**笔记** 对于  $n$  个数相加, 分子或分母不齐次的情况, 用夹逼定理;

对于分子、分母齐次且分母多一次的情况, 用定积分定义。

我们还有另一个著名的判定数列极限存在性的定理, 也即如下性质:

**性质** 单调有界数列必有极限。

这个性质可以分为两类来讨论, 一为单调递增有上界, 二为单调递减有下界。

## 型二例题: 极限存在性证明

**例 1.6** 已知,  $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 并求之。

**解** 显然,  $\{a_n\}$  单调递增, 现在我们证明  $a_n \leq 2$ , 采用数学归纳法:

首先,  $a_1 = \sqrt{2} < 2$ 。假设  $a_k \leq 2$ , 则  $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$ 。因此  $a_n \leq 2$ 。从而由单调有界定理知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在。下面求出这个极限:

设极限为  $A$ , 由  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ , 令  $n \rightarrow \infty$ , 两边平方有  $A^2 = A + 2$ , 解得  $A = 2$  或  $A = -1$ 。由于  $a_n > a_1 = \sqrt{2}$ , 故  $A = -1$  舍去。从而极限为 2。

**例 1.7** 已知  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 。证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在。

**解** 先证明  $a_n > 0$ : 由于  $a_1 > 0$ , 故设  $a_k > 0$ 。则  $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{a_k}) > 0$ 。于是根据均值不等式可以得到  $a_{n+1} \geq 1$ 。而  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) - a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} - a_{n+1})$ 。由于  $a_n \geq 1$ , 故  $\frac{1}{a_n} \leq a_n$ 。从而,  $a_{n+1} - a_n \leq 0$ 。于是数列  $\{a_n\}$  单调递减, 又有  $a_n \geq 1$ , 从而得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在。

### 1.2.3 无穷小的性质

#### (一) 一般性质

1. 若  $\alpha \rightarrow 0$  且  $\beta \rightarrow 0$ , 则:

$$\begin{cases} \alpha \pm \beta \rightarrow 0, \\ k\alpha \rightarrow 0, \\ \alpha\beta \rightarrow 0. \end{cases}$$

2. 若  $|\alpha| \leq M, \beta \rightarrow 0$ , 则  $\alpha\beta \rightarrow 0$ 。

3.  $\alpha \rightarrow 0, \lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ 。

#### (二) 等价性质

1. (a).  $\alpha \sim \alpha$ (自反性);

(b).  $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (对称性);

(c).  $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (传递性)。

2.  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \lim_{\alpha_1} \frac{\beta_1}{\alpha_1} = A$ , 则  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A$ 。

3. 当  $x \rightarrow 0$  时:

(a).  $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(x + 1)$ ;

(b).  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ;

(c).  $(1 + x)^a - 1 \sim ax$ 。

## 1.3 两个重要极限

### 1.3.1 准备工作

我们先证明如下结论：

当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时，有

$$\sin x < x < \tan x$$

**证明** 如图1.2所示，在单位圆中，当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时，有  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}r^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x = S_1$ ， $S_{\text{扇形}AOB} = \frac{1}{2}x = S_2$ ， $S_{\text{Rt}\triangle AOC} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \tan x = S_3$ 。

显然有

$$S_3 > S_2 > S_1$$

从而，

$$\frac{1}{2} \tan x > \frac{1}{2}x > \frac{1}{2} \sin x$$

于是， $\sin x < x < \tan x$  证明完毕。

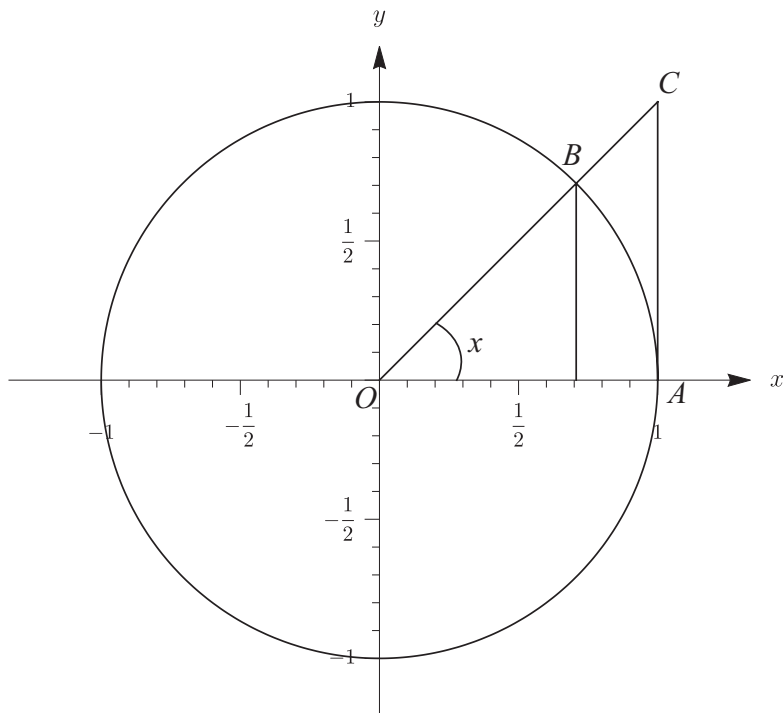


图 1.2: 单位圆



**笔记** 这里给出的证明并不够严谨，但更严密的证明需要引入幂级数对  $\sin x$  进行重新定义，这里不再阐述。



## 1.3.2 两个重要极限式

1.  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$
2.  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$



**笔记** 这里的  $\Delta$  表示一切具有趋于零状态的变量与表达式, 需要当作一个整体来进行处理。

## 型三例题: 不定型

所谓不定型, 就是指含有“无穷”与 0 的极限求解。包含  $\frac{0}{0}$  型,  $1^\infty$  型,  $\frac{\infty}{\infty}$  型,  $\infty \times \infty$  型,  $\infty - \infty$  型,  $\infty^0$  型与  $0^0$  型。

下面分类进行讲解。

1.  $\frac{0}{0}$  型

(a). 习惯:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x)^{v(x)} \Rightarrow e^{v(x) \ln u(x)}, \\ \ln(\quad) \Rightarrow \ln(1 + \Delta) \sim \Delta (\Delta \rightarrow 0), \\ (\quad) - 1 \Rightarrow \begin{cases} e^\Delta - 1 \sim \Delta; \\ (1 + \Delta)^a - 1 \sim a\Delta. \end{cases} \quad (\Delta \rightarrow 0) \\ x - \ln(1 + x) \Rightarrow \text{二阶无穷小}, \\ x, \sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x \Rightarrow \text{任意两个之差为三阶无穷小} \end{array} \right.$$

(b). 注意: 例如,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$

**例 1.8** 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 。

**解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(1 - \cos x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 第二章 导数与微分

