



考研数学---微积分 \LaTeX 笔记

作者: Gabriel Liu

时间: March 19, 2020

版本: 0.1

邮箱: jsrglsq@outlook.com: jsrglsq@outlook.com



你这个年龄段，你睡得着觉？有点出息没有！——汤家风

目录

1	极限与连续	1
1.1	极限的有关定义	1
1.2	极限的性质	2

第一章 极限与连续

1.1 极限的有关定义

定义 1.1. 数列极限

数列 $\{a_n\}$, 若对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad (1.1)$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A (或: 收敛于 A), 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad (1.2)$$



定义 1.2. 函数极限-1

函数 $f(x)$, 若对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.3)$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1.4)$$



笔记

1. 若 $x \rightarrow a$, 则 $x \neq a$. 如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $f(a)$ 无关。如: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$;
3. $x \rightarrow a$ 分为 $x \rightarrow a^+$ 和 $x \rightarrow a^-$;
4. 我们称 $0 < |x - a| < \delta$ 为 a 的去心邻域;
5. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \triangleq f(a-0)$ (左极限); $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \triangleq f(a+0)$ (右极限)。
★ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 $\iff f(a-0), f(a+0)$ 都存在且相等。

定义 1.3. 函数极限-2

函数 $f(x)$, 若对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > (<) 0$, 当 $x > X (< -X)$ 时, 有

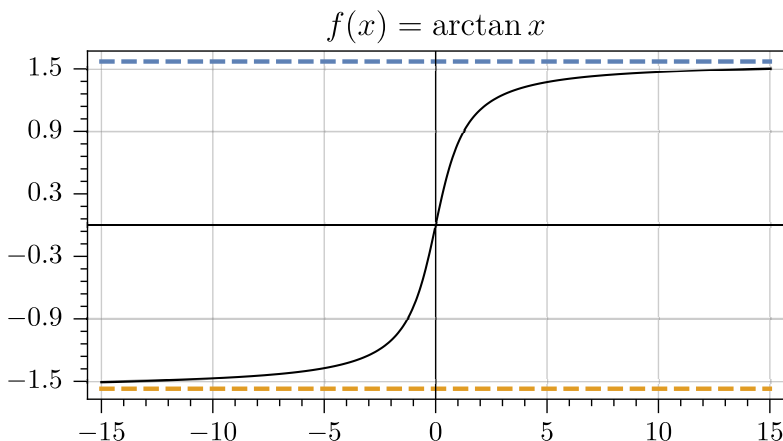
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.5)$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty (-\infty)} f(x) = A \quad (1.6)$$



如, 对于函数 $f(x) = \arctan x$ 有: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

图 1.1: $f(x) = \arctan x$ 的图像**定义 1.4. 无穷小**

若 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为无穷小。

**笔记**

- 0 是无穷小, 但无穷小不一定为 0;
- $\alpha(x) \neq 0$, $\alpha(x)$ 是否为无穷小与 x 的趋向有关; 如, $\alpha = 3(x-1)^2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = 0$, 则 $3(x-1)^2$ 当 $x \rightarrow 1$ 时是无穷小。
- 设 $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$, 有如下三种情形:
 - $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 称 β 为 α 的高阶无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
 - $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k (\neq \infty, 0)$, 称 β 为 α 的同阶无穷小, 记作 $\beta = O(\alpha)$ (特例: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 为等价无穷小, 记作 $\beta \sim \alpha$)。

1.2 极限的性质

下面我们开始介绍极限的有关性质, 并给出相关的证明。主要有: 唯一性、保号性 (重点) 两个性质。

1. 唯一性

性质 极限存在必唯一。

证明 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 又 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, 并不妨设 $A > B$ 。我们采用反证法来完成相关的证明。

取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$ 。因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 所以存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{A-B}{2}$, 也即 $\frac{A+B}{2} < f(x) < \frac{3A-B}{2} (*)$;

同理, 由第二个极限可以得出 $\frac{3B-A}{2} < f(x) < \frac{A+B}{2} (**)$ 。从而, 若我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 就有 $(*)$ 与 $(**)$ 同时成立。但

$f(x) > \frac{A+B}{2}$ 与 $f(x) < \frac{A+B}{2}$ 显然不可能同时成立, 矛盾, 从而假设不成立。

同理, 我们可以得到 $A < B$ 也不成立。故 $A = B$ 。

2. ★ 保号性

性质 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > (<)0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $f(x) > (<)0$ 。

证明 设 $A > 0$ 。取 $\varepsilon = \frac{1}{2}A > 0$ 。因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}$ 。展开可得 $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$ 。从而 $f(x) > 0$ 。

