考研数学微积分 LaTeX 笔记

作者：Gabriel Liu

时间：May 14, 2020

版本：0.1

邮箱：*jsrglsq@outlook.com*

ElegantLaTeX Program

你这个年龄段，你睡得着觉？有点出息没有！— 汤家凤

目录

1 极限与连续 **1**

1.1 极限的有关定义 1

1.2 极限的性质 2

1.2.1 极限的一般性质 2

1.2.2 极限的存在性质 3

1.2.3 无穷小的性质 5

1.3 两个重要极限 6

1.3.1 准备工作 6

1.3.2 两个重要极限式 7

1.4 连续的有关定义 11

2 导数与微分 **13**

第一章 极限与连续

1.1 极限的有关定义

定义 1.1. 数列极限

数列 $\{a_n\}$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-A|<\varepsilon \tag{1.1}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A（或：收敛于 A），记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \tag{1.2}$$

♣

定义 1.2. 函数极限-1

函数 $f(x)$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{1.3}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \tag{1.4}$$

♣

笔记

1. 若 $x\to a$，则 $x\neq a$. 如：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^3}=0$；
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $f(a)$ 无关。如：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$；
3. $x\to a$ 分为 $x\to a^+$ 和 $x\to a^-$；
4. 我们称 $0<|x-a|<\delta$ 为 a 的去心邻域；
5. $\lim\limits_{x\to a^-}\triangleq f(a-0)$（左极限）；$\lim\limits_{x\to a^+}\triangleq f(a+0)$（右极限）。

   ★$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\iff$ $f(a-0),f(a+0)$ 都存在且相等。

定义 1.3. 函数极限-2

函数 $f(x)$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>(<)0$，当 $x>X(<-X)$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{1.5}$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}f(x)=A \tag{1.6}$$

♣

如，对于函数 $f(x)=\arctan x$ 有：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$

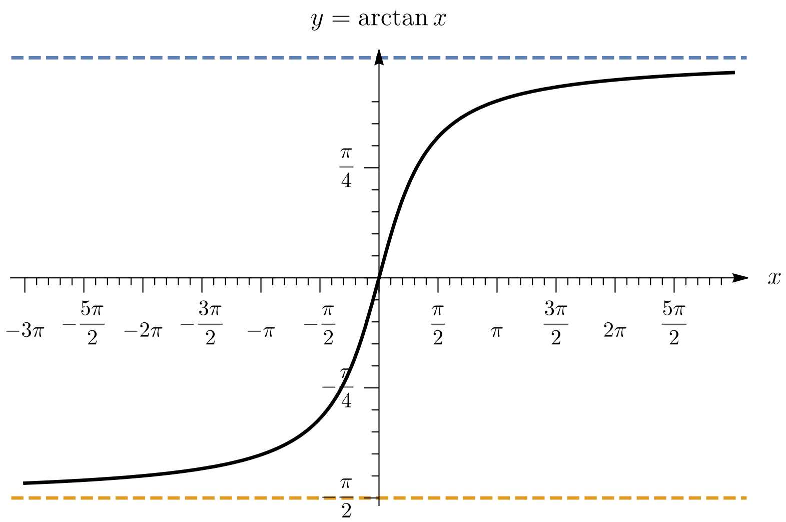

图 1.1: $f(x) = \arctan x$ 的图像

定义 1.4. 无穷小

若 $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$，则称 $\alpha(x)$ 当 $x \to a$ 时为无穷小。♣

笔记

1. 0 是无穷小，但无穷小不一定为 0;
2. $\alpha(x) \neq 0$，$\alpha(x)$ 是否为无穷小与 x 的趋向有关；如，$\alpha = 3(x-1)^2$，而 $\lim\limits_{x\to 1} \alpha = 0$，则 $3(x-1)^2$ 当 $x \to 1$ 时是无穷小。
3. 设 $\alpha \to 0, \beta \to 0$, 有如下三种情形：
   (a) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$;
   (b) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k(\neq \infty, 0)$，称 β 为 α 的同阶无穷小，记作 $\beta = O(\alpha)$（特例：$\lim \frac{\beta}{\alpha}$=1，则称 β 与 α 为等价无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$）。

1.2 极限的性质

1.2.1 极限的一般性质

下面我们开始介绍极限的一般性质，并给出相关的证明。主要有：唯一性、保号性（重点）两个性质。

1. 唯一性

   性质 极限存在必唯一。

   证明 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 又 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$，并不妨设 $A > B$。我们采用反证法来完成相关的证明。

   取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$。因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，所以存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_1$

时，有 $|f(x)-A|<\frac{A-B}{2}$，也即 $\frac{A+B}{2}<f(x)<\frac{3A-B}{2}(*)$;
同理，由第二个极限可以得出 $\frac{3B-A}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2}(**)$。从而，若我们取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有 $(*)$ 与 $(**)$ 同时成立。但 $f(x)>\frac{A+B}{2}$ 与 $f(x)<\frac{A+B}{2}$ 显然不可能同时成立，矛盾，从而假设不成立。
同理，我们可以得到 $A<B$ 也不成立。故 $A=B$。 □

2. ★ 保号性

性质 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>(<)0$，则存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>(<)0$。

证明 设 $A>0$。取 $\varepsilon=\frac{1}{2}A>0$。因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，故存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2}$。展开可得 $\frac{A}{2}<f(x)<\frac{3}{2}A$。从而 $f(x)>0$。 □

例 1.1 若函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0, \lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(x-1)^3}=-2$, 则 $x=1$ 为什么点？

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(x-1)^3}=-2<0$, 故根据保号性, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $\frac{f'(x)}{(x-1)^3}<0$。于是，当 $x\in(1-\delta,1)$ 时，$f'(x)>0$; 当 $x\in(1,1+\delta)$ 时，$f'(x)<0$。故 $x=1$ 为极大值点。

1.2.2 极限的存在性质

下面介绍几个判定极限**存在**的性质。

性质

1. 数列型

   如果 $a_n\le b_n\le c_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$。

2. 函数型

   如果 $f(x)\le g(x)\le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$。

型一:n 项和求极限

例 1.2 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 以上是非齐次的情形，采取夹逼定理。于是令 $b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$。

容易得到：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le b_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}=1$，故得到 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$。

例 1.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})$。

解 令 $b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$，从而 $\frac{1}{2}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\leq b_n\leq\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$。则 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 左 $=\lim\limits_{n\to\infty}$ 右 $=\frac{1}{2}$。故所求极限为 $\frac{1}{2}$。

例 1.4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2\end{aligned}$$

例 1.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

笔记 对于 n 个数相加，分子或分母不齐次的情况，用夹逼定理；

对于分子、分母齐次且分母多一次的情况，用定积分定义。

我们还有另一个著名的判定数列极限存在性的定理，也即如下性质：

性质 单调有界数列必有极限。

这个性质可以分为两类来讨论，一为单调递增有上界，二为单调递减有下界。

型二：极限存在性证明

例 1.6 已知，$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$

证明 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求之。

解 显然，$\{a_n\}$ 单调递增，现在我们证明 $a_n \leq 2$，采用数学归纳法：

首先，$a_1 = \sqrt{2} < 2$。假设 $a_k \leq 2$，则 $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \leq \sqrt{2+2} = 2$。因此 $a_n \leq 2$。从而由单调有界定理知 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。下面求出这个极限：

设极限为 A，由 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$，令 $n \to \infty$，两边平方有 $A^2 = A + 2$，解得 $A = 2$ 或 $A = -1$。由于 $a_n > a_1 = \sqrt{2}$，故 $A = -1$ 舍去。从而极限为 2。

例 1.7 已知 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$。证明：$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。

解 先证明 $a_n > 0$: 由于 $a_1 > 0$, 故设 $a_k > 0$。则 $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) > 0$。于是根据均值不等式可以得到 $a_{n+1} \geq 1$。而 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) - a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} - a_{n+1})$。由于 $a_n \geq 1$，故 $\frac{1}{a_n} \leq a_n$。从而，$a_{n+1} - a_n \leq 0$。于是数列 $\{a_n\}$ 单调递减，又有 $a_n \geq 1$，从而得到 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。

1.2.3 无穷小的性质

（一）一般性质

1. 若 $\alpha \to 0$ 且 $\beta \to 0$，则：
$$\begin{cases} \alpha \pm \beta \to 0, \\ k\alpha \to 0, \\ \alpha\beta \to 0. \end{cases}$$
2. 若 $|\alpha| \leq M, \beta \to 0$，则 $\alpha\beta \to 0$。
3. $\alpha \to 0, \lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$。

（二）等价性质

1. (a). $\alpha \sim \alpha$(自反性);
   (b). $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$(对称性);
   (c). $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$(传递性)。
2. $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = A$，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A$。
3. **当 $x \to 0$ 时：**
   (a). $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(x+1)$;
   (b). $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;
   (c). $(1+x)^a - 1 \sim ax$。

1.3 两个重要极限

1.3.1 准备工作

我们先证明如下结论：

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$\sin x < x < \tan x$$

证明 如图1.2所示，在单位圆中，当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}r^2 \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x = S_1$，$S_{\text{扇形}AOB} = \dfrac{1}{2}x = S_2$，$S_{\text{Rt}\triangle AOC} = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\tan x = S_3$。

显然有

$$S_3 > S_2 > S_1$$

从而，

$$\frac{1}{2}\tan x > \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}\sin x$$

于是，$\sin x < x < \tan x$ 证明完毕。 □

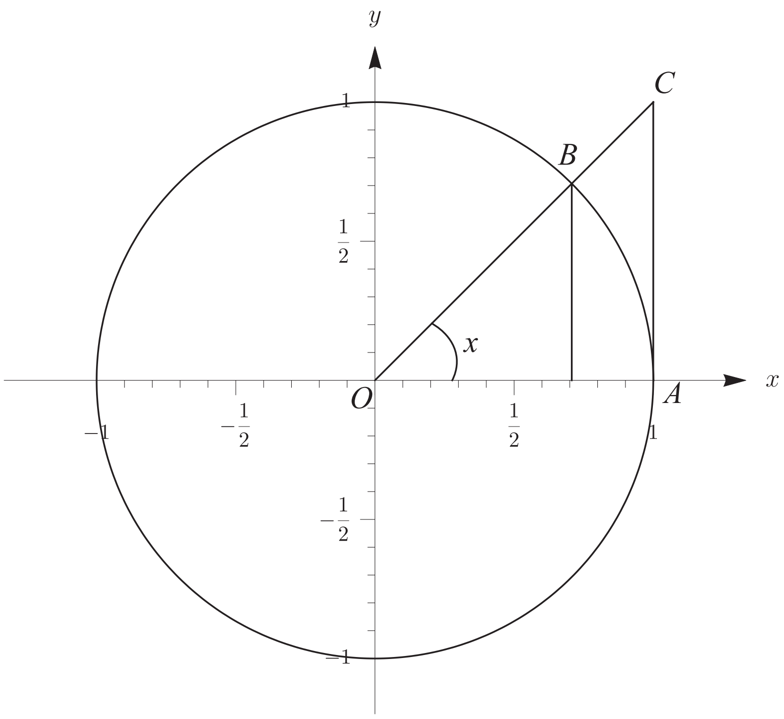

图 1.2: 单位圆

笔记 这里给出的证明并不够严谨，但更严密的证明需要引入幂级数对 $\sin x$ 进行重新定义，这里不再阐述。

1.3.2 两个重要极限式

1. $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$
2. $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\mathrm{e}$

笔记 这里的 Δ 表示一切具有趋于零状态的变量与表达式，需要当作一个整体来进行处理。

型三：不定型

所谓不定型，就是指含有“无穷”与 0 的极限求解。包含 $\frac{0}{0}$ 型，1^{∞} 型，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，$\infty\times\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，∞^0 型与 0^0 型。

下面分类进行讲解。

1. $\dfrac{0}{0}$ 型

   (a). 习惯：

$$\begin{cases} u(x)^{v(x)}\Rightarrow \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}, \\ \ln(\quad)\Rightarrow \ln(1+\Delta)\sim\Delta(\Delta\to 0), \\ (\quad)-1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^{\Delta}-1\sim\Delta; \\ (1+\Delta)^a-1\sim a\Delta.\end{cases}\quad(\Delta\to 0) \\ x-\ln(1+x)\Rightarrow \text{二阶无穷小}, \\ x,\sin x,\tan x,\arcsin x,\arctan x\Rightarrow \text{任意两个之差为三阶无穷小} \end{cases}$$

   (b). 注意：例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

例 1.8 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(1-\cos x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 1.9 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\sin x}-1}{x^2\ln(1+2x)}$。

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x\ln(1+x^2)}-1}{2x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{2x^3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 1.10 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1+\cos x}{2})^x-1}{x^3}$。

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-1}{2}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2. 1^∞ 型:

主要有两种方法：一是凑出 $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ 的形式，二是恒等变形。

例 1.11 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$。

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}(1+(-x\sin x))^{-\frac{1}{x\sin x}\cdot -\frac{x\sin x}{x-\ln(1+x)}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x-\ln(1+x)}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{x}{1+x}}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0}2(x+1)} = \mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}$$

例 1.12 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$。

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\cos\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}x^2(\cos\frac{1}{x}-1)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\cos\frac{1}{x}-1)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}} \\
&\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

例 1.13 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{x-\sin x}}\right]^{\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\frac{1}{x^3}} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin x}\frac{x-\sin x}{x^3}} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{6}}
\end{aligned}
$$

3. $\infty-\infty$ 型：

例 1.14 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(\tan x)^2})$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}(\frac{(\tan x)^2-x^2}{(\tan x)^2x^2}) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^2-x^2}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\times\frac{\tan x-x}{x^3} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{(\sec x)^2-1}{3x^2} \\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^2}{x^2}=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

例 1.15 求极限：$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x+8}-x)$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x+8}{\sqrt{x^2-4x+8}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}}+1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

4. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型:

(a).

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}\begin{cases} =0, & m<n \\ =\frac{b_m}{a_m}, & m=n \\ =\infty, & m>n \end{cases}
$$

例 1.16 已知：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2019}}{(n+1)^a-n^a}=k(\neq 0,\neq\infty)$，求 a,k。

解

$$
\begin{aligned}
(n+1)^a &= \mathrm{C}_a^0n^a+\mathrm{C}_a^1n^{a-1}+\cdots+\mathrm{C}_a^a \\
&= n^a+an^{a-1}+A
\end{aligned}
$$

所以，$(n+1)^a-n^a=an^{a-1}+A$。从而，$a-1=2019\Rightarrow a=2020$，

则 $k=\dfrac{1}{2020}$。

例 1.17 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+3)}{\ln(x^4+3x+1)}$

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2(1+\frac{3}{x^2})}{\ln x^2(1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4})}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln(1+\frac{3}{x^3})}{4\ln x+\ln(1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4})}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b). 洛必达法则

例 1.18 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=6$

例 1.19 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$

5. $0\times\infty$ 型

可以化成如下两种情形：

$$\begin{cases}\frac{0}{\frac{1}{\infty}} & \text{即}\frac{0}{0}\text{型}\\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}} & \text{即}\frac{\infty}{\infty}\text{型}\end{cases}$$

例 1.20 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)^2\sin\frac{1}{x^2}$。

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2}\times\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=4$$

例 1.21 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))$。

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}x^2(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x}))\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}\\
&\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\\
&= \lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{t+1}}{2t}\\
&= \lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{t+1}}{2t}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6. 0^0 型和 ∞^0 型

这两种都可以化成 $e^{\ln}$ 的形式。

例 1.22 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln x}{1/x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1/x}{-1/x^2}}=0$

型四: 左右极限

★$a^{\overline{x-b}^{?}}$ 或 $a^{\overline{b-x}^{?}}$ 当 $x \to b$ 时一定存在。

例 1.23 已知 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x-2}}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。

解 因为 $f(2-0) = 0, f(2+0) = +\infty$，故该极限不存在。

例 1.24 $f(x) = \dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

解 因为 $f(1-0) = \dfrac{1}{1} = 1, f(1+0) = \dfrac{1-\infty}{1+\infty} = -1$，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在。

这个函数的图像如下图所示：

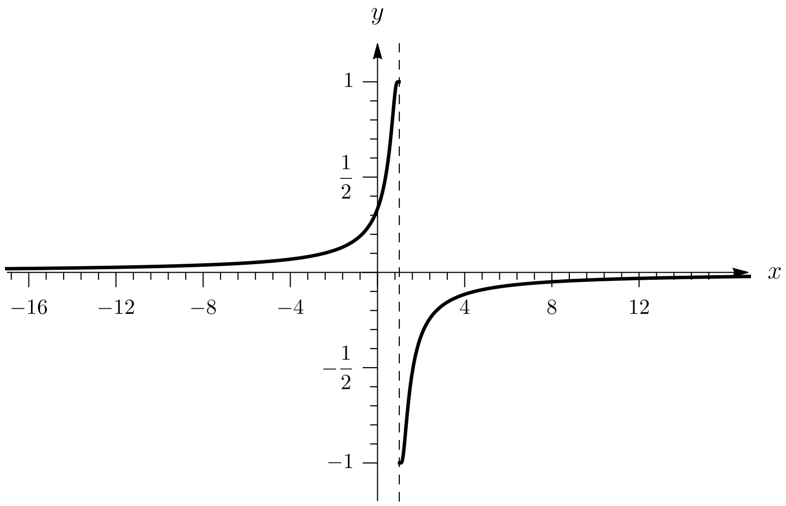

图 1.3: $f(x)$ 的图像

1.4 连续的有关定义

1. 连续
   (a). 一点连续: If $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ 或 $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$，则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续。
   (b). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续: If $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，且 $f(a) = f(a+0), f(b) = f(b-0)$。则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，记为 $f(x) \in C[a, b]$。
2. 间断:If $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ 分类：
   (a). 第一类：$f(a+0), f(a-0)$ 均存在。
   若 $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$，则称为可去间断点；
   若 $f(a-0) \neq f(a+0)$，则称为跳跃间断点。
   (b). 第二类：$f(a-0), f(a+0)$ 至少一个不存在。

型六: 间断点及分类

例 1.25 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点。

解 容易看出，$x=0, x=\pm 1$ 为间断点。

第 二 章 导数与微分