

COMPRESSED SENSING

PROJET DE FIN DE SEMESTRE

Gabriel Kasmi, Hugo Thimonier

ENSAE 3A - 2019-2020

Résumé

Ce rapport synthétise les articles Bora et al. (2017) et Dhar et al. (2018) et présente leurs contributions à la littérature en compressed sensing. La section 1 introduit l’approche générative, les sections 2 et 3 motivent et présentent les contributions des articles étudiés. La section 4 introduit quelques extensions pratiques rendues possibles par les méthodes génératives et la section 5 commente les contributions articles étudiés à l’aune de la littérature existante. Enfin, l’annexe C reproduit quelques démonstrations des résultats théoriques.

Les répliques des expériences des deux papiers sont accessibles dans le notebook jupyter `cs_replication_mnist` joint au présent rapport. L’annexe A introduit quelques rappels concernant l’approche sparse et l’annexe B des rappels concernant les GANs.

1 Présentation de l’approche générative

L’approche générative consiste à formuler une hypothèse de structure alternative sur le vecteur que l’on cherche à reconstruire x^* . Au lieu de supposer que ce dernier est s -sparse, on considère qu’il est généré par un *modèle génératif* et par conséquent qu’il appartient à l’ensemble image du générateur G , que l’on note dans la suite $Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^n$

Définition 1. *Un modèle génératif est une application $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ déterministe qui, à tout vecteur aléatoire $z \sim P_Z$ de $L \subseteq \mathbb{R}^k$ associe une image $G(z) \in Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^n$*

Remarque En pratique, le générateur G est souvent paramétrisé. On a ainsi $G \equiv G(\theta, \bullet)$ où $\theta \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur de paramètres. Dans le cas d’un réseau de neurones, θ contiendra ainsi les poids et les biais des différentes couches. La dépendance en les paramètres du générateur sera explicitée si nécessaire.

L’ensemble de définition du générateur $L \subseteq \mathbb{R}^k$ est appelé espace *latent* du générateur et typiquement, $k \ll n$. Les modèles génératifs ont été introduits par Goodfellow et al. (2014) et la fonction $G \equiv G(\cdot, \theta)$ formalise un réseau de neurones où les paramètres sont encodés dans le vecteur θ .

L’intuition derrière l’approche générative est la suivante : on considère que le vecteur que l’on cherche à reconstruire est issu d’un modèle génératif et l’objectif va être de trouver le vecteur z de l’espace latent minimisant l’erreur de reconstruction. On réécrit donc l’équation (7) en considérant que $x^* = G(z^*)$. Le modèle (prenant en compte le bruit d’observation) peut se réécrire comme suit :

$$y = AG(z^*) + \eta \quad (1)$$

Où comme pour (7), $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice de mesures, $y \in \mathbb{R}^m$ et $\eta \in \mathbb{R}^m$ est un bruit d’observation. Le

problème de reconstruction du signal dès lors être formalisé comme suit :

$$\min_z \|AG(z) - y\|_2^2 \quad (2)$$

L'approche générative a été introduite par Bora et al. (2017). Les auteurs ont également introduit des méthodes computationnelles pour procéder en pratique à la reconstruction du signal. Nous allons voir que les résultats théoriques démontrés sont analogues à ceux développés dans le cadre de l'approche sparse. Intuitivement, les matrices de mesure Gaussiennes satisfont la propriété $S - REC$, qui généralise la propriété REC et implique une reconstruction minimisant l'erreur de reconstruction pour un nombre minimal de mesures. Ces résultats sont valables pour deux classes de générateurs très larges et très utilisés en pratique, les générateurs Liptschitz et ReLU. Dhar et al. (2018) palient les limites de l'approche générative en introduisant une méthode qu'ils présentent comme une généralisation de l'approche sparse. Les garanties théoriques qu'ils obtiennent sont analogues à celles démontrées par Bora et al. (2017), dans un cadre identique (générateurs lipschitziens ou ReLU). Du point de vue appliqué, leur contribution permet également d'introduire l'approche *transfer CS*. Les démonstrations des résultats sont présentées en annexe.

2 Bora et al. : introduction de la méthode et extensions théoriques

L'approche générative est une hypothèse de structure alternative aux données : on suppose que l'on dispose d'un générateur G et que le signal que l'on cherche à reconstruire est issue d'une loi P_G sur \mathbb{R}^n où P_G désigne la loi de $G(z)$ pour $z \sim P_Z$. Un point important est que l'on considère que le générateur est **pré-entraîné**, et donc donné.

2.1 Résultats théoriques

La première contribution est l'introduction de la notion de matrice $S - REC$ (set-restricted eigenvalue condition). La motivation pour l'introduction de cette condition est que la condition REC ne permet pas d'avoir un contrôle de la distance entre la différence de deux vecteurs "naturels" et $Ker(A)$ dans le cadre génératifs. Dans le cas sparse en effet, la différence entre deux vecteurs s sparse est approximativement sparse (jusqu'à $2s$), mais cette propriété est propre aux vecteurs sparse et ne s'applique pas dans le cadre de vecteurs "naturels". Les auteurs définissent un vecteur "naturel" spécifique au problème considéré.

La notion de $S - REC$ s'applique ainsi à la différence entre deux vecteurs sur un ensemble S donné et permet de s'assurer que cette différence est éloignée de $Ker(A)$ (la motivation de la condition $S - REC$ est par conséquent analogue à celle qui motivait l'introduction de la condition REC). La définition est donnée ci-après :

Définition 2. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Etant donnés des paramètres $\gamma > 0$ et $\delta \geq 0$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfait la condition $S - REC(S, \gamma, \delta)$ si $\forall x_1, x_2 \in S$,

$$\|A(x_1 - x_2)\| \geq \gamma \|x_1 - x_2\| - \delta$$

Le terme δ est ajouté de manière à garantir l'existence d'une matrice A pouvant satisfaire la condition $S - REC$ même lorsque l'on ne connaît pas le comportement de S à des échelles arbitrairement petites.

Comme pour le cas sparse, on peut se demander s'il existe une classe de matrice qui satisfait la condition $S - REC$. Contrairement au cas sparse, on ne peut pas considérer tout ensemble arbitraire de générateurs. Par ailleurs, pour coller le mieux possible au cas sparse, on souhaiterait idéalement que les matrices gaussiennes satisfassent la condition $S - REC$.

Les auteurs montrent que pour deux classes de générateurs (Lipschitz et ReLU), les matrices Gaussiennes satisfont la propriété $S - REC$ avec grande probabilité. C'est l'objet des lemmes 1 et 2.

Lemme 1. Soit $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ L -Lipschitz et soit $B^k(r)$ la boule ℓ_2 dans \mathbb{R}^k définie comme suit :

$$B^k(r) = \{z : z \in \mathbb{R}^k, \|z\| \geq r\}$$

Pour $\alpha < 1$, si

$$m = \Omega\left(\frac{k}{\alpha^2} \log \frac{Lr}{\delta}\right)$$

Alors avec une probabilité $1 - \exp(-\Omega(\alpha^2 m))$, toute matrice aléatoire $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dont les entrées $a_{ij} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$ (pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$) satisfait la condition $S - REC(G(B^k(r)), 1 - \alpha, \delta)$

Ce lemme se généralise pour tout compact K . On peut remarquer que l'espace latent doit être borné (en l'occurrence $B^k(r)$)

Le lemme 2 considère une classe plus large que les générateurs avec une fonction d'activation ReLU (on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ReLU(x) = \max(0, x)$) mais à la classe des fonctions qui contiennent un point de non linéarité (0 dans le cas de la fonction ReLU)

Lemme 2. Soit $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ un réseau de neurones contenant d couches, où la fonction d'activation de chaque en sortie de chaque couche applique une non-linéarité avec au plus deux points de non-différentiabilité à une combinaison linéaire des données d'entrée de la couche. Supposons qu'il y a au plus c neurones par couche. Soit

$$m = \Omega\left(\frac{1}{\alpha^2} kd \log c\right)$$

Pour $\alpha < 1$. Alors avec une probabilité $1 - \exp(-\Omega(\alpha^2 m))$, toute matrice aléatoire $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dont les entrées $a_{ij} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$ (pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$) satisfait la condition $S - REC(\mathbb{R}^k, 1 - \alpha, 0)$

Ces deux lemmes garantissent l'existence d'une matrice satisfaisant la condition $S - REC$ pour deux classes de générateurs largement utilisés en pratique. Ces résultats montrent également que les matrices aléatoires gaussiennes satisfont les conditions $S - REC$ avec grande probabilité pour un nombre de mesures m de l'ordre de $\frac{k}{\alpha^2} \log \frac{Lr}{\delta}$ pour le lemme 1 et $\frac{1}{\alpha^2} kd \log c$ pour le lemme 2.

La dernière brique nécessaire est une garantie de "bonne reconstruction" par la condition $S - REC$, c'est-à-dire que les normes entre deux vecteurs doivent être préservées avec grande probabilité par une matrice satisfaisant une condition $S - REC$. Cela permet en effet de formuler la garantie en norme ℓ_2 dans l'espace \mathbb{R}^n plutôt que dans l'espace des mesures \mathbb{R}^m . Les matrices gaussiennes satisfont ces propriétés, comme assuré par le lemme 3.

Lemme 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice aléatoire échantillonnée à partir d'une distribution satisfaisant :

1. La condition $S - REC(S, \gamma, \delta)$ avec probabilité $1 - p$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, $\|Ax\| \leq 2\|x\|$ avec probabilité $1 - p$

Pour tout $x^* \in \mathbb{R}^n$ fixé, soit $y = Ax^* + \eta$. Soit \hat{x} tel que \hat{x} minimise $\|y - Ax\|$ sur S , i.e.

$$\|y - A\hat{x}\| \leq \min_{x \in S} \|y - Ax\| + \varepsilon$$

Alors, avec probabilité $1 - 2p$,

$$\|\hat{x} - x^*\| \leq \left(\frac{4}{\gamma} + 1\right) \min_{x \in S} \|x^* - x\| + \frac{1}{\gamma}(2\|\eta\| + \varepsilon + \delta)$$

Ces trois lemmes permettent de formuler les deux théorèmes de l'article. Ces deux théorèmes consistent en une majoration de l'erreur de reconstruction dans le cadre du modèle génératif pour deux classes de générateurs, les générateurs lipschitz (théorème 1) et les générateurs ReLU (théorème 2). Plus précisément, la combinaison des lemmes 1 et 3 donne le théorème 1 :

Théorème 1. Soient $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ L -Lipschitz et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice aléatoire Gaussienne pour $m = O\left(k \log \frac{Lr}{\delta}\right)$ telle que ses entrées sont $a_{ij} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$. Pour tout $x^* \in \mathbb{R}^n$ et toute observation $y = Ax^* + \eta$, soit $\hat{z} = \arg \min_z (\|y - AG(z)\|_2 + \varepsilon)$ tel que $\|\hat{z}\|_2 \leq r$. Alors, avec probabilité $1 - \exp(-\Omega(m))$,

$$\|G(\hat{z}) - x^*\|_2 \leq 6 \min_{z^* \in \mathbb{R}^k, \|z^*\|_2 \leq r} \|G(z^*) - x^*\|_2 + 3\|\eta\|_2 + 2\varepsilon + 2\delta$$

Tandis qu'en combinant les lemmes 2 et 3, on obtient le théorème 2 :

Théorème 2. Soit $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ un modèle génératif issu d'un réseau de neurones à d couches utilisant des fonctions d'activation ReLU. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice aléatoire Gaussienne pour $m = O(kd \log n)$ telle que ses entrées sont $a_{ij} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$. Alors pour tout $x^* \in \mathbb{R}^n$ et toute observation $y = Ax^* + \eta$, soit $\hat{z} = \arg \min_z (\|y - AG(z)\|_2 + \varepsilon)$, avec probabilité $1 - \exp(-\Omega(m))$,

$$\|G(\hat{z}) - x^*\|_2 \leq 6 \min_{z^* \in \mathbb{R}^k} \|G(z^*) - x^*\|_2 + 3\|\eta\|_2 + 2\varepsilon$$

2.2 Méthodes algorithmiques et expérimentations

La méthode proposée consiste à tirer un $z \sim P_Z$ dans l'espace latent puis à minimiser l'erreur de mesure $loss(z) := \|AG(z) - y\|^2$. En pratique, cela se fait par des méthodes de descente de gradient et de rétropropagation. Cependant, compte tenu de la forme complexe de G , la fonction objective $loss(z)$ n'est pas convexe. Elle est cependant différentiable sur presque tout son ensemble de définition. Même si les garanties théoriques de convergence des méthodes de gradient ne sont plus assurées, en pratique un bon contrôle de l'erreur de reconstruction $\|G(z) - x^*\|^2$ peut être obtenu en utilisant ces méthodes. L'algorithme 1 formalise la procédure implémentée.

Algorithm 1 Descente de gradient implémentée pour minimiser l'erreur de reconstruction

$\alpha > 0$

$\triangleright \alpha$ est le learning rate de l'algorithme

Initialisation $z_0 \sim P_Z$

A l'étape $t = 1, \dots, T$:

$$z_t \leftarrow z_{t-1} - \alpha \frac{\partial \|G(z_t) - x^*\|^2}{\partial z_t}$$

Remarque Il est possible d'ajuster le nombre d'étapes t pour que la solution trouvée par l'algorithme soit égale au vrai optimum à un facteur ε près.

Les auteurs utilisent deux types de modèles génératifs : des GANs et des VAE et modifient la fonction objectif en lui ajoutant une régularisation $L(z) = \lambda \|z\|^2$ de manière à "forcer" l'algorithme à explorer davantage les régions où la distribution P_G du modèle génératif concentre le plus de masse. Deux bases de données sont utilisées, MNIST et celebA et le modèle LASSO (ou sparse) est utilisé comme point de référence.

Pour compléter le modèle, les matrices de mesures considérées sont des matrices aléatoires gaussiennes et le bruit d'observation η est supposé gaussien.

Le principal résultat est que la reconstruction avec un faible nombre de mesures est beaucoup plus performante avec les méthodes génératives qu'avec le LASSO. Ces résultats se vérifient pour les GAN ou les VAE, que l'on considère les données celebA ou MNIST. La raison pour une telle amélioration des performances est que le modèle génératif peut être vu comme un *a priori* sur la distribution des données plus informatif que l'*a priori* sparse. Par conséquent, moins d'information additionnelle provenant des données (i.e. les mesures) est requis pour obtenir une bonne reconstruction dans le cas génératif que dans le cas sparse.

Les expériences mettent également en avant le fait que la performance des algorithmes plafonne lorsque le nombre de mesures se rapproche de la dimension de l'espace latent. Par ailleurs, ils mettent en avant le fait que l'erreur dominante parmi les sources d'erreur possible (optimization, mesure et représentation) est l'erreur de représentation. Cela signifie que les performances du modèle seront d'autant plus dégradées que le signal que l'on cherche à reconstruire sera éloigné de l'ensemble image du générateur. Une solution évoquée pour endiguer l'erreur de représentation est de combiner plusieurs modèles génératifs de sorte à obtenir un ensemble image "global" plus vaste. Dhar et al. (2018) propose une approche alternative.

3 Dhar *et. al.* : lien entre l'approche générative et l'approche sparse

La principale limite de la méthode générative développée par Bora et al. (2017) est le fait que l'erreur de reconstruction est importante lorsque le signal à reconstruire n'appartient pas à l'ensemble image du générateur. En pratique, ce problème peut-être problématique. En effet, les modèles génératifs requièrent d'importantes quantités de données pour pouvoir être entraînés. Ainsi, en l'état, l'approche générative de Bora et al. (2017) nécessite de disposer d'importantes données non comprimées pour pouvoir entraîner les générateurs avant de pouvoir les utiliser dans le cadre de la reconstruction de signal. Cela peut potentiellement freiner le développement en pratique de l'utilisation de telles approches.

La contribution principale de Dhar et al. (2018) est de proposer un cadre théorique ainsi qu'une méthode algorithmique permettant de juguler cette faiblesse de l'approche générative en la combinant avec le paradigme sparse. leur modèle est une combinaison des modèles (7) et (1) en ce sens que le signal qu'ils considère que le signal est issu d'un modèle génératif mais a aussi une composante sparse. Les auteurs appellent leur approche *sparse-gen*. On écrit ainsi :

$$y = A(G(z^*) + \nu) + \eta \quad (3)$$

Ainsi $x^* = G(z^*) + \nu$ (sous réserve d'existence d'un tel $z^* \in \mathbb{R}^k$) et où $\nu \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur s -sparse. G est un générateur défini par 1. Enfin, $\eta \in \mathbb{R}^m$ est un bruit d'observation et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice de mesures.

Les garanties théoriques qu'ils obtiennent sur la reconstruction du signal ainsi que sur l'existence d'une matrice de mesure permettant une reconstruction minimisant l'erreur ℓ_p , $p \in \{1, 2, \infty\}$ de reconstruction peuvent être vues comme une généralisation des résultats établis par Bora et al. (2017). On peut remarquer que cette approche est surtout une généralisation du cadre sparse dans la mesure où si le générateur G est tel que $\forall z \in \mathbb{R}^k, G(z) = 0$, alors on se retrouve dans le cadre sparse défini par (7).

3.1 Résultats théoriques

3.1.1 Formalisation et notations

On rappelle que l'ensemble des vecteurs s -sparse de \mathbb{R}^n est noté $\Sigma_s := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_0 \leq s\}$ ¹. On note S_G le **domaine** du générateur G , c'est-à-dire que

$$S_G = \{G(z) : z \in \mathbb{R}^k\}$$

Formellement, l'espace dans lequel s'effectue la reconstruction du signal dans l'approche sparse-gen est l'ensemble des déviations sparse de l'ensemble image de G . En notant $\Sigma_s(x)$ l'ensemble des *déviations* sparse en x , le domaine considéré par l'approche sparse-gen s'écrit donc

$$S_{s,G} = \bigcup_{z \in \text{Dom}(G)} \Sigma_s(G(z))$$

Où $\Sigma_s(G(z))$ correspond à l'ensemble des vecteurs s -sparse centrés en $G(z)$ et $\text{Dom}(G)$ le domaine de définition de G , sous ensemble de l'espace latent \mathbb{R}^k .

Dans la suite, on note $\sigma_{s,G}(x) := \inf_{\hat{x} \in S_{s,G}} \|x - \hat{x}\|_2$ le vecteur le plus proche de x dans le domaine sparse-gen. On suppose enfin que $\|\eta\|_2 \leq \eta_{\max}$.

3.1.2 Lemmes

Les garanties théoriques s'appuient sur deux lemmes, l'un garantissant l'existence d'un décodeur pour le modèle, c'est-à-dire l'existence d'une fonction $\Delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ permettant de reconstruire le vrai signal x à partir des mesures y .

Lemme 4. Soient $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ et un bruit d'observation η tel que $\|\eta\|_2 \leq \eta_{\max}$. Soit A une matrice satisfaisant la condition $S\text{-}REC(S_{1,5s,G}, 1-\alpha, \delta)$ et $RIP(2s, \alpha)$ pour $\alpha \in (0, 1)$ et $s > 0$. Alors, il existe un décodeur $\Delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - \Delta(Ax + \eta)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2s}} C_0 \sigma_{s,G}(x) + C_1 \eta_{\max} + \delta'$$

où où $C_0 = 2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 1 \right)$, $C_1 = \frac{2}{1-\alpha} + 1$ et $\delta' = \frac{\delta}{1-\alpha}$

Le lemme 5 garantit quant à lui l'existence d'une matrice de reconstruction minisant l'erreur de reconstruction pour un nombre de mesures minimales dans le cadre sparse-gen. Nous avons en effet vu que le cadre génératif une condition nécessaire pour garantir une "bonne" reconstruction est de satisfaire la condition $S\text{-}REC$ tandis que dans le cadre sparse il faut satisfaire la condition REC . Ce lemme établit que les matrices aléatoires gaussiennes satisfont les deux conditions *simultanément* dans le cadre sparse-gen. Ce résultat s'applique pour la classe des générateurs Lipschitz.

Lemme 5. Soit $G : B^k(r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ L -Lipschitz. Pour $\alpha \in (0, 1)$, si

$$m = O \left(\frac{1}{\alpha^2} \left(k \log \frac{Lr}{\delta} + s \log \frac{n}{s} \right) \right)$$

Alors toute matrice aléatoire Gaussienne $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec des entrées $a_{ij} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{m} \right)$ satisfait, avec probabilité $1 - \exp(-\Omega(\alpha^2 m))$, les conditions $S\text{-}REC(S_{1,5s,G}, 1-\alpha, \delta)$ et $RIP(2s, \alpha)$.

1. Dans les applications pratiques, on peut légèrement relacher cette hypothèse et considérer que le vecteur est *approximativement* sparse. Cela ne change cependant pas le formalisme.

3.1.3 Théorèmes

Comme dans le cadre de Bora et al. (2017) voire de Bickel et al. (2009), la question principale est d'établir des garanties sur l'erreur de reconstruction pour un nombre minimal de mesures. Les deux théorèmes ci-après sont analogues aux théorèmes 1 et 2 et permettent de contrôler l'erreur de reconstruction avec grande probabilité et un nombre minimal de mesures.

Théorème 3. Soit $G : B^k(r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ L -Lipschitz. Soient $\alpha \in (0, 1)$, $s > 0$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice aléatoire Gaussienne telle que

$$m = O\left(\frac{1}{\alpha^2} \left(k \log \frac{Lr}{\delta} + s \log \frac{n}{s}\right)\right)$$

satisfaisant la condition $S - REC(S_{1,5s,G}, 1 - \alpha, \delta)$ et $RIP(2s, \alpha)$ (condition garantie par le lemme 5.) Soit Δ un décodeur satisfaisant le lemme 4. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec probabilité $1 - \exp(-\Omega(\alpha^2 m))$, on a

$$\|x - \Delta(Ax + \varepsilon)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2s}} C_0 \sigma_{s,G}(x) + C_1 \eta_{max} + \delta'$$

où $C_0 = 2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 1 \right)$, $C_1 = \frac{2}{1-\alpha} + 1$ et $\delta' = \frac{\delta}{1-\alpha}$

Enfin le théorème 4 établit un résultat similaire dans le cas de générateurs ReLU. On peut remarquer que comme pour le théorème 2, la structure du réseau de neurones (donnée par les paramètres d et c) contribue explicitement à la détermination du nombre minimal de mesures.

Théorème 4. Soit $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ un réseau de neurones avec d couches, au plus c noeuds par couche et des activations ReLU. Soient $\alpha \in (0, 1)$, $s > 0$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice aléatoire Gaussienne telle que

$$m = O\left(\frac{1}{\alpha^2} \left((k+s)d \log c + (k+s) \log \frac{n}{s}\right)\right)$$

satisfaisant la condition $S - REC(S_{1,5s,G}, 1 - \alpha, \delta)$ et $RIP(2s, \alpha)$ (condition garantie par le lemme par 5). Soit Δ un décodeur satisfaisant le lemme 4. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec probabilité $1 - \exp(-\Omega(\alpha^2 m))$, on a

$$\|x - \Delta(Ax + \varepsilon)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2s}} C_0 \sigma_{s,G}(x) + C_1 \eta_{max} + \delta'$$

où $C_0 = 2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 1 \right)$, $C_1 = \frac{2}{1-\alpha} + 1$ et $\delta' = \frac{\delta}{1-\alpha}$

3.2 Méthodes algorithmiques et expérimentations

Pour reconstruire le vecteur $x^* = G(z^*) + \nu$ en utilisant le signal y tel que présenté dans l'équation (3), il est possible de formuler le problème en termes de minimisation ℓ_0 :

$$\begin{aligned} \min_{z, \nu} \|\nu\|_0 \\ \text{s. t. } A(G(z) + \nu) = y \end{aligned} \tag{4}$$

Le problème (4) est non convexe et non différentiable, on lui substitue donc en pratique sa relaxation convexe et on considère le problème suivant :

$$\min_{z, \nu} \|\nu\|_1 + \lambda \|A(G(z) + \nu) - y\|_2^2 \tag{5}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte. La minimisation est menée par rapport à ν et z . Concernant la minimisation par rapport à $\nu \in S_{s,G}$, le problème est convexe et les techniques classiques de descente

de gradient fonctionnent. Concernant la minimisation par rapport à $z \in \text{Dom}(G)$, on retrouve le même problème que dans le cadre génératif, à savoir que G n'est en général pas convexe. Cependant, s'il s'agit d'un réseau de neurones, l'utilisation de la rétropropagation permet en pratique d'obtenir de bons résultats. La procédure pour z est ainsi aussi une descente de gradient, selon une méthode analogue à celle décrite dans l'algorithme 1. Notons enfin qu'il est possible de définir de manière équivalente le problème à une matrice de changement de base $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ près.

Le cadre expérimental pour évaluer les performances de la méthode est analogue à celui de la section 2.2. Les auteurs considèrent un VAE pré-entraîné et deux bases de données, MNIST et Omniglot. Les résultats sont comparés avec ceux de la reconstruction sparse (LASSO) et de la reconstruction à partir du modèle génératif. Des expérimentations complémentaires sont conduites sur la base de données celebA avec un GAN. La matrice de mesure est gaussienne et le bruit d'observation est généré à partir d'une loi normale avec une variable de 0.01. Les résultats rapportés par les auteurs rapportent les erreurs de reconstructions $\|\hat{x} - x\|_p$, $p \in \{1, 2, \infty\}$ en fonction du nombre de mesures $m \in \{50, 750\}$.

Les résultats mettent en avant le comportement hybride dans le cadre sparse-gen : lorsque le nombre de mesures est faibles, l'erreur de reconstruction est identique à celle obtenue avec la méthode générative mais à la différence de cette dernière, la performance ne plafonne plus lorsque le nombre de mesures devient égal à la dimension de l'espace latent ; à partir de ce moment l'information apportée par la spécification sparse du modèle permet au modèle de se comporter comme le LASSO. Visuellement, la courbe d'erreur de la méthode sparse-gen correspond au "minimum" entre l'erreur du modèle génératif et celle du LASSO.

4 Champs d'applications des méthodes génératives

La méthode générative, et son extension sparse-gen qui permettent, on l'a vu, de faire le lien entre le cadre sparse et le cadre génératif, permet une amélioration des performances de reconstruction lorsque le nombre de mesures est faible. Cependant les méthodes développées par Bora et al. (2017) et Dhar et al. (2018) permettent également d'envisager d'autres applications.

Super résolution La super résolution consiste à générer une image de haute résolution à partir d'un signal en faible résolution de cette même image. Ainsi chaque pixel de la mesure y peut être vu comme une moyenne locale de l'intensité des pixels environnants. La tâche est donc, à partir de cette moyenne locale, de reconstruire des intensités différentes pour chacun des pixels.

Bora et al. (2017) appliquent leur méthode générative pour reconstruire des images à partir d'observations de faible résolution et obtiennent des résultats empiriques satisfaisants. Il est néanmoins à souligner que la matrice de reconstruction A qu'ils ont utilisé ne satisfait pas la condition $S - REC$, aussi les garanties théoriques sur l'erreur de reconstruction dans le cas de la super résolution ne sont-elles plus assurées.

Transfer compressed sensing Une application prometteuse de la méthode développée par Dhar et al. (2018) est le transfer compressed sensing. La motivation est la suivante : dans de nombreux domaines, coût d'acquisition de données de bonne qualité peut être prohibitif (par exemple en imagerie médicale, compte tenu des contraintes que cela implique pour les patients). Ce faisant, il est impossible d'entraîner un générateur sur un jeu de données identiques aux données que l'on cherchera ensuite à reconstruire.

Etant donné que l'approche sparse-gen permet d'obtenir une reconstruction optimale y compris lorsque le signal que l'on cherche à reconstruire n'est pas dans l'ensemble image du générateur, autrement dit qu'il est possible de considérer un générateur entraîné sur des données analogues mais non identiques, l'idée est donc d'entraîner un générateur dans un domaine *data rich* pour ensuite l'appliquer à la reconstruction de signal dans un domaine *data*

scarce. La méthode s’inspire du transfer learning en deep learning où en raison des coûts computationnels toutes les couches d’un réseau de neurones ne sont pas réentraînées lorsque l’on cherche à appliquer des méthodes neuronales sur des données analogues, le transfer CS se propose d’utiliser un générateur entraîné sur des données proches du domaine pour lequel on cherche à faire de la reconstruction de signal.

Dhar et al. (2018) utilisent les données Omniglot et MNIST pour tester cette approche de transfer CS. Dans un cas, le générateur est entraîné sur MNIST et les signaux à reconstruire sont issu d’Omniglot, et vice versa. Les garanties théoriques quant à la reconstruction du signal sont valides tant que le générateur est Liptschitz ou ReLU (ce qui est le cas). Seul le terme $\sigma_{s,G}(x)$ entrant dans la définition de la borne des théorèmes 3 et 4 est nécessairement plus grand étant donné sur le signal est situé plus "loin" (voire en dehors) de l’ensemble image du générateur. Expérimentalement, l’erreur de reconstruction (ℓ_2 est deux fois plus importante en transfer CS que dans l’approche standard), néanmoins le modèle sparse-gen exhibe toujours un comportement hybride, aussi performant que le modèle génératif avec peu de mesures et aussi performant que le LASSO lorsque le nombre de mesures augmente.

5 Discussion et prolongements

5.1 Bilan des contributions des approches génératives

L’approche générative consiste à formuler une hypothèse de structure alternative à l’hypothèse de sparsité sur le vecteur que l’on cherche à reconstruire. Les résultats théoriques concernant la reconstruction sous cette hypothèse ont notamment été établis par Donoho (2006), Candès et al. (2006) ou Bickel et al. (2009) par exemple. La contribution de Bora et al. (2017) est de proposer une extension des garanties théoriques, en généralisant les conditions de design sur les matrices de reconstructions. En découlent des résultats similaires quant au contrôle de l’erreur de reconstruction : les résultats des théorèmes 1 et 2 sont analogues au théorème 6.1 de Bickel et al. (2009) pour l’estimateur LASSO. En effet, les auteurs obtiennent également une inégalité d’oracle : en particulier si $G(z^*) = x^*$, alors la reconstruction est parfaite, au pas ε de précision de l’algorithme et à la norme ℓ_2 de η près. En d’autres termes, les garanties théoriques de précision de la reconstruction sont analogues à celles obtenues dans le paradigme sparse.

Dhar et al. (2018) proposent des résultats analogues à ceux de Bora et al. (2017) dans un cadre hybride ; sur le plan théoriques les contributions font ainsi le lien entre les résultats dans le cas sparse et ceux dans le cas génératif. En particulier, les auteurs montrent que les matrices aléatoires gaussiennes peuvent satisfaire avec grande probabilité la condition *REC* et la condition *S – REC*. Les garanties des théorèmes 3 et 4 sont ainsi les stricts analogues aux résultats des théorèmes 1 et 2.

Sur le plan théorique, on peut soulever les points suivants :

- Le paramètre de sparsité s est remplacé dans les ordres de grandeur du nombre de mesure par la dimension de l’espace latent k ,
- Dans le cas lipschitzien, le terme logarithmique ne dépend pas de la dimension de l’espace du signal n
- Le nombre minimal de mesures dans l’approche sparse-gen est plus important que dans le cas génératif ; ainsi dans le cas lipschitzien le terme $s \log \frac{n}{s}$ réapparaît.
- Dans le cas sparse-gen, comme pour la borne d’oracle du théorème 6.1 de Bickel et al. (2009), la borne dépend de la sparsité.

5.2 Liens avec d’autres approches

Deep compressed sensing (DCS) Une question naturelle soulevée par l’approche générative concerne l’entraînement des générateurs : jusqu’à présent, nous avons considéré les générateurs comme donnés, c’est-à-dire que leur apprentissage se fait de manière séparée. On peut cependant se demander s’il est possible d’intégrer l’apprentissage des générateurs au cadre du compressed sensing, c’est-à-dire simultanément apprendre les paramètres θ du générateur $G(\theta, z)$ et minimiser la perte de reconstruction par rapport à z . Wu et al. (2019) montrent qu’il est possible de réaliser les deux tâches simultanément.

L’idée consiste, après avoir minimisé la perte $\|AG(\theta, z) - x^*\|$ par rapport à z d’optimiser le générateur G par rapport à θ et ainsi d’ajuster la distribution P_G . En pratique, cela est fait en échantillonnant des fausses observations $x_{fake} = G(z)$ où $z \sim P_Z$ et $x_{true} \sim P_X$ où P_X désigne la vraie distribution des signaux dans \mathbb{R}^n que le générateur cherche à approcher². Les résultats expérimentaux mettent en avant un gain de performance en termes de reconstruction par rapport à l’approche générative de Bora et al. (2017). Par ailleurs, l’optimisation pour la reconstruction est plus rapide lorsque le générateur est entraîné conjointement. Ce résultat apparaît comme peu surprenant dans la mesure où le générateur, étant entraîné sur des données qui sont ensuite reconstruites, est plus adéquat pour les données considérées qu’un réseau qui aurait été entraîné en amont (la distribution P_G est ajustée de manière à converger vers celle P_X des données, tandis que les deux distributions n’ont aucune raison de converger si le générateur a été pré-entraîné). En d’autres termes, le paradigme DCS permet de supprimer l’erreur de représentation. Néanmoins, le problème de disponibilité des données tel que soulevé par Dhar et al. (2018) demeure.

Bayesian compressed sensing Il est possible de voir l’hypothèse de structure comme un *a priori* sur les données. Ainsi la meilleure performance *locale*, c’est-à-dire lorsque le signal appartient à l’ensemble image du générateur, des techniques génératives pouvait être vue comme la conséquence d’un *a priori* plus informatif sur le vecteur que l’on cherche à reconstruire que l’*a priori* sparse.

L’approche bayésienne en compressed sensing a été introduite par Ji et al. (2008). Les auteurs soulignent notamment le fait que les approches bayésiennes permettent de spécifier la distribution complète *a posteriori* de \hat{x} , et ainsi de quantifier le degré d’incertitude de la reconstruction. Pour les vecteurs sparse, les *a priori* de Laplace sont courants et Babacan et al. (2009) a proposé une méthode de reconstruction du signal en utilisant de tels *a prioris*. L’intérêt de l’approche bayésienne est qu’elle permet de modéliser la structure et d’estimer les coefficients d’un vecteur pour lequel on suppose qu’il est sparse.

Prolongements L’approche bayésienne est également appliquée depuis quelques années avec succès aux réseaux de neurones (voir par exemple Polson et al. (2017)) . D’un point de vue théorique, il semble d’après Mescheder et al. (2017) possible d’unifier VAE et GANs (les deux types de réseaux génératifs utilisés par Bora et al. (2017)). Tout comme le point de vue bayésien permet d’enrichir l’approche sparse, on peut se demander dans quelle mesure les approches bayésiennes en deep learning ne peuvent pas être prises en compte dans le cadre du compressed sensing. Concernant la partie générative, l’approche bayésienne développée par Saatci and Wilson (2017) permettent d’éviter les problèmes de *mode collapse*, c’est-à-dire des situations dans lesquelles le générateur apprend seulement à tromper le discriminant. L’approche développée par Saatci and Wilson (2017) permet de déduire une distribution *a posteriori* sur les paramètres θ du générateurs ; là où l’approche générative classique peut être vue comme une estimation du maximum de vraisemblance. Par conséquent, l’ensemble de définition du générateur est plus riche (puisqu’on dispose d’une distribution sur la distribution), ce qui permet d’éviter le problème de restriction à l’ensemble image du générateur sans avoir à entraîner plusieurs générateurs comme Bora et al. (2017) le proposaient.

2. Voir la section B pour des précisions concernant l’implémentation des réseaux génératifs adversariaux

Références

- Babacan, S. D., Molina, R., and Katsaggelos, A. K. (2009). Bayesian compressive sensing using laplace priors. *IEEE Transactions on image processing*, 19(1) :53–63.
- Bickel, P. J., Ritov, Y., Tsybakov, A. B., et al. (2009). Simultaneous analysis of Lasso and Dantzig selector. *The Annals of Statistics*, 37(4) :1705–1732.
- Bora, A., Jalal, A., Price, E., and Dimakis, A. G. (2017). Compressed sensing using generative models. In *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning-Volume 70*, pages 537–546. JMLR. org.
- Candès, E. J., Romberg, J., and Tao, T. (2006). Robust uncertainty principles : Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on information theory*, 52(2) :489–509.
- Dhar, M., Grover, A., and Ermon, S. (2018). Modeling sparse deviations for compressed sensing using generative models. *arXiv preprint arXiv :1807.01442*.
- Donoho, D. L. (2006). Compressed sensing. *IEEE Transactions on information theory*, 52(4) :1289–1306.
- Goodfellow, I., Pouget-Abadie, J., Mirza, M., Xu, B., Warde-Farley, D., Ozair, S., Courville, A., and Bengio, Y. (2014). Generative adversarial nets. In *Advances in neural information processing systems*, pages 2672–2680.
- Ji, S., Xue, Y., and Carin, L. (2008). Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on signal processing*, 56(6) :2346–2356.
- Mescheder, L., Nowozin, S., and Geiger, A. (2017). Adversarial variational bayes : Unifying variational autoencoders and generative adversarial networks. In *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning-Volume 70*, pages 2391–2400. JMLR. org.
- Polson, N. G., Sokolov, V., et al. (2017). Deep learning : a bayesian perspective. *Bayesian Analysis*, 12(4) :1275–1304.
- Saatci, Y. and Wilson, A. G. (2017). Bayesian gan. In *Advances in neural information processing systems*, pages 3622–3631.
- Wu, Y., Rosca, M., and Lillicrap, T. (2019). Deep compressed sensing. *arXiv preprint arXiv :1905.06723*.

A Généralités sur l'approche sparse

L'objectif du compressed sensing consiste en la reconstruction d'un signal x^* à partir d'un vecteur y de m mesures linéaires de ce signal. On considère usuellement que $x^* \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ où $m \ll n$. Le modèle s'écrit donc de la manière suivante :

$$y = Ax^* \quad (6)$$

On peut également considérer la variante *bruitée* du modèle présenté ci dessus, où $\eta \in \mathbb{R}^m$ est un bruit d'observation :

$$y = Ax^* + \eta \quad (7)$$

Où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice de mesure. Compte-tenu du fait que $m \ll n$, le système linéaire (6) (ou (7)) est sous déterminé, ce qui impose de formuler une hypothèse de structure sur le signal x^* . L'hypothèse la plus courante consiste à considérer que x^* est s -sparse, c'est-à-dire qu'il existe au plus s coordonnées du vecteur x^* qui sont non-nulles. Ces coordonnées peuvent être les coordonnées dans la base canonique ou bien dans une base quelconque de l'espace considéré (une base souvent considérée est la base d'ondelettes par exemple).

On note $\Sigma_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_0 \leq s\}$ l'ensemble des vecteurs x de \mathbb{R}^n s -sparse. On suppose que $s \leq m$, de sorte qu'avec cette hypothèse, il est possible de trouver une unique solution x^* à (6) (ou (7)).

Le problème que l'on cherche à résoudre est appelé *minimisation ℓ_0* et se formule comme suit :

$$\hat{x}_0 \in \arg \min_{t \in \mathbb{R}^n, At=y} \|t\|_0 \quad (8)$$

On peut cependant montrer que le problème (8) est NP-hard. On lui préfère donc sa *relaxation convexe* qui consiste, plutôt que de minimiser la norme ℓ_0 cherche à minimiser la norme ℓ_1 (qui est l'enveloppe convexe sur l'ensemble des solutions (en l'occurrence la boule ℓ_1 de \mathbb{R}^n dans notre cas). Le problème est reformulé comme suit :

$$\hat{x}_0 \in \arg \min_{t \in \mathbb{R}^n, At=y} \|t\|_1 \quad (9)$$

Lorsque l'on écrit le Lagrangien du problème (9), on se rapproche de la formulation du LASSO.

Une question naturelle est celle de savoir quel est le nombre minimal de mesures nécessaire pour assurer une reconstruction parfaite du signal, ou bien dans le cas bruité une reconstruction minimisant l'erreur de reconstruction (mesurée par exemple par la norme ℓ_2). Pour (8), le nombre de minimal de mesures est $2s$, contre un nombre de mesures de l'ordre de $\sim s \log\left(\frac{en}{s}\right)$ pour (9). Pour ce dernier cas, on dit que la matrice de mesures A satisfait la condition de reconstruction exacte d'ordre s , notée $RE(s)$.

Une question naturelle est de savoir si en pratique de telles matrices existent et si oui comment les construire. On peut montrer que si une matrice satisfait la condition *RIP* (*restricted isometry property*) d'ordre $65s$, alors elle satisfait la propriété $RE(s)$ et les matrices aléatoires gaussiennes, c'est-à-dire des matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que toutes leurs entrées $a_{ij} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ satisfont la condition *RIP* (avec grande probabilité puisqu'il s'agit d'une matrice aléatoire). Nous rappelons la définition de la condition $RIP(s, \alpha)$ ci-après³ :

Définition 3. Soit $\Sigma_s \subseteq \mathbb{R}^n$ l'ensemble des vecteurs s -sparse de \mathbb{R}^n . Pour $\gamma > 0$, on dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

3. Remarque : la définition 3 que nous proposons est issue de Dhar et al. (2018) et introduit un paramètre α . Dans le cours, nous avons considéré la condition $RIP\left(s, \frac{1}{2}\right)$

satisfait la condition $RIP(l, \alpha)$ si pour tout $x \in \Sigma_s$,

$$(1 - \alpha) \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq (1 + \alpha) \|x\|_2$$

Dans le cas du modèle bruité (7), la question de savoir s'il existe des matrices de mesures satisfaisant une condition de reconstruction minimisant l'erreur de reconstruction ℓ_2 pour un nombre minimal de mesures. De manière analogue au cas de la reconstruction exacte, Bickel et al. (2009) montrent que les matrices satisfaisant la condition REC (*restricted eigenvalue condition*) permettent une reconstruction minimisant l'erreur ℓ_2 pour un nombre minimal de mesures. Les matrices gaussiennes satisfont cette condition avec grande probabilité. La condition REC est définie comme suit :

Définition 4. Soit $\Sigma_s \subseteq \mathbb{R}^n$ l'ensemble des vecteurs s -sparse de \mathbb{R}^n . Pour $\gamma > 0$, on dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfait la condition $REC(s, \gamma)$ si pour tout $x \in \Sigma_s$,

$$\|Ax\|_2 \geq \gamma \|x\|_2$$

B Rappels sur les GANs

Un réseau génératif adversarial (GAN) cherche à entraîner un générateur paramétrisé $G(\theta, \bullet)$ à tromper un discriminateur D_ϕ dont l'objectif est de distinguer des données simulées engendrées par le générateur des données réelles. Le générateur est une application qui a un vecteur $z \sim P_Z$ dans un espace latent, sous ensemble de \mathbb{R}^k associe une image $G(\theta, Z) \sim P_G$. Idéalement, on souhaiterait que la distribution engendrée par le générateur P_G corresponde exactement à la distribution des données P_Z (rendant ainsi les vraies et les fausses données indiscernables). La méthode introduite par Goodfellow et al. (2014) peut se résumer ainsi :

$$\min_{G(\theta, \bullet)} \max_{D_\phi} V(G(\theta, \bullet), D_\phi) = \mathbb{E}_{x \sim P_X} [\log D_\phi(x)] + \mathbb{E}_{z \sim P_Z} [\log(1 - D_\phi(G(\theta, z)))] \quad (10)$$

C Démonstration des résultats

Nous reproduisons dans cette section les preuves des lemmes 1 et 3.

C.1 Preuve du lemme 1

On rappelle l'énoncé du lemme :

Soit $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ L -Lipschitz et soit $B^k(r)$ la boule ℓ_2 dans \mathbb{R}^k définie comme suit :

$$B^k(r) = \{z : z \in \mathbb{R}^k, \|z\| \geq r\}$$

Pour $\alpha < 1$, si

$$m = \Omega \left(\frac{k}{\alpha^2} \log \frac{Lr}{\delta} \right)$$

Alors avec une probabilité $1 - \exp(-\Omega(\alpha^2 m))$, toute matrice aléatoire $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dont les entrées $a_{ij} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$ (pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$) satisfait la condition $S-REC(G(B^k(r)), 1 - \alpha, \delta)$

Lemme 6. Si une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfait la condition $S-REC(S, \gamma, \delta)$ alors $\forall x_1, x_2 \in S$ tels que $\|Ax_1 - y\| \leq \varepsilon_1$ and $\|Ax_2 - y\| \leq \varepsilon_2$, on a $\|x_1 - x_2\| \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \delta}{\gamma}$

Preuve.

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{\gamma}(\|Ax_1 - Ax_2\| + \delta) \leq \frac{1}{\gamma}(\|Ax_1 - y\| + \|Ax_2 - y\| + \delta) \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \delta}{\gamma}$$

□

Lemme 7. Soit $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ L -Lipschitz, M un $\frac{\delta}{L}$ -net sur $B^k(r)$ tel que $|M| \leq k \log(\frac{4Lr}{\delta})$. Soit $A \in^{m \times n}$ telle que $\forall i, j, a_{ij} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$.

Si $m = O(k \log(\frac{Lr}{\delta}))$ alors pour tout $x \in S$, si $x' = \arg \min_{x \in \tilde{G}(M)} \|x - \tilde{x}\|$, on a $\|A(x - x')\| = O(\delta)$ avec probabilité $1 - e^{-\Omega(m)}$.

Preuve. En remarquant que $\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}$ est sous- gamma, $\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{m}\right)$, alors, pour $f > 0$,

$$\varepsilon \geq 2 + \frac{4}{m} \log \frac{2}{f} \geq \max \left(\sqrt{\frac{2}{m} \log \frac{2}{f}}, \frac{2}{m} \log \frac{2}{f} \right)$$

ce qui donne $P(\|Ax\| \geq (1 + \varepsilon) \|x\|) \leq f$

Soit $M = M_0 \subset \dots \subset M_t$ une chaine de ε -nets de $B^k(r)$ tels que M_i est un δ_i/L -net et $\delta_i = \frac{\delta_0}{2^i}$, $\delta_0 = \delta$. On sait qu'il existe un réseau tel que $\log |M_i| \leq k \log \left(\frac{4Lr}{\delta_i} \right) \leq ik + k \log \left(\frac{4Lr}{\delta_0} \right)$.

Soit $N_i = G(M_i)$. G est L -Lipschitz, donc N_i est un δ_i -net pour $S = G(B^k(r))$, avec $|N_i| = |M_i|$.

Pour $1 \leq i \leq l-1$ On pose $T_i := \{x_{i+1} - x_i | x_{i+1} \in N_{i+1}, x_i \in N_i\}$

Ainsi, $|T_i| \leq |N_{i+1}| |N_i|$ d'où $\log |T_i| \leq \log |N_{i+1}| + \log |N_i| \leq (2i+1)k + 2k \log \left(\frac{4Lr}{\delta_0} \right) \leq 3ik + 2k \log \left(\frac{4Lr}{\delta_0} \right)$.

De plus, on suppose que $m = 3k \log \left(\frac{4Lr}{\delta_0}, \log(f_i) \right) = -(m+4ik)$ et $\varepsilon_i = 2 + \frac{4}{m} \log \frac{2}{f_i} = 2 + \frac{4}{m} \log 2 + 4 + \frac{16ik}{m} = (1) + \frac{16ik}{m}$.

On a donc $\forall i \in \{1, \dots, l-1\}, \forall t \in T_i, P(\|At\| > (1 + \varepsilon_i) \|t\|) \leq f_i$, ce qui donne $P(\|At\| \leq (1 + \varepsilon_i) \|t\| \mid \forall i, \forall t \in T_i) \geq$

$$1 - \sum_{i=0}^{t-1} |T_i| f_i.$$

De plus,

$$\log(|T_i| f_i) = \log |T_i| + \log f_i \leq -k \log \left(\frac{4Lr}{\delta_0} \right) - ik = -m/3 - ik$$

$$\text{ainsi } \sum_{i=0}^{t-1} |T_i| f_i \leq e^{-m/3} \sum_{i=0}^{t-1} e^{-ik} \leq e^{-m/3} \left(\frac{1}{1 - e^{-1}} \right) \leq 2e^{-m/3}$$

Posons $x_f = x - x_l$. Ainsi, $x - x_0 = \sum_{i=0}^{l-1} (x_{i+1} - x_i) + x_f$, avec $x_i \in N_i$

Vu que chaque $x_{i+1} - x_i \in T_i$, on a avec probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-m/3}$ que :

$$\sum_{i=0}^{l-1} \|A(x_{i+1} - x_i)\| = \sum_{i=0}^{l-1} (1 + \varepsilon_i) \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^{l-1} (1 + \varepsilon_i) \delta_i = \delta_0 \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{2^i} \left(O(1) + \frac{16ik}{m} \right) = O(\delta_0) + \delta_0 \frac{16k}{m} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{i}{2^i} + O(\delta_0)$$

De plus, $\|x_f\| = \|x - x_l\| \leq d_l = \frac{\delta_0}{2^l}$, et $\|x_{i+1} - x_i\| \leq \delta_i$ vu les propriétés des ε -nets. On sait que $\|A\| \leq 2 + \sqrt{n/m}$ avec probabilité au moins $1 - 2e^{-m/2}$.

En posant $l = \log(n)$, on obtient que $\|A\| \|x_f\| \leq \left(2 + \sqrt{n/m} \right) \frac{\delta_0}{2^i} = \mathcal{O}(\delta_0)$ avec probabilité $\geq 1 - 2e^{-m/2}$.

En combinant ces deux résultats et en remarquant qu'il est possible de choisir $x' = x_0$, on obtient avec probabilité

$$1 - e^{-\Omega(m)},$$

$$\|A(x - x')\| = \|A(x - x_0)\| \leq \sum_{i=0}^{l-1} \|A(x_{i+1} - x_i)\| + \|Ax_f\| = O(\delta_0) + \|A\| \|x_f\| = O(\delta)$$

□

Lemme 8. Soit $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, L -Lipschitz. Si $m = \Omega\left(\frac{k}{\alpha^2} \log \frac{Lr}{\delta}\right)$, alors A satisfait la condition $S-REC(B^k(r), 1 - \alpha, \delta)$ avec probabilité $1 - e^{-\Omega(\alpha^2 m)}$.

Preuve. On construit un $\frac{\delta}{L}$ -net N sur $B^k(r)$. Il existe un tel réseau N tel que $\log|N| \leq k \log \frac{4Lr}{\delta}$.

Vu que N est un $\frac{\delta}{L}$ -covering de $B^k(r)$, en utilisant le fait que G soit L -Lipschitz on obtient que $G(N)$ est un δ -covering de $G(B^k(r))$. On note T les différences deux-à-deux des éléments de $G(N)$, i.e :

$$T = \{G(z_1) - G(z_2) | z_1, z_2 \in N\}$$

$$\text{Ainsi, } |T| \leq |N|^2 \Rightarrow \log|T| \leq 2 \log|N| \leq 2k \log \frac{4Lr}{\delta}.$$

Pour tous $z, z' \in B^k, \exists z_1, z_2 \in N; G(z_1), G(z_2)$ sont δ -proche de $G(z)$ et $G(z')$ respectivement. Ainsi :

$$\|G(z) - G(z')\| \leq \|G(z) - G(z_1)\| + \|G(z_1) - G(z_2)\| + \|G(z_2) - G(z')\| \leq \|G(z_1) - G(z_2)\| + 2\delta$$

$$\|AG(z_1) - AG(z_2)\| \leq \|AG(z_1) - AG(z)\| + \|AG(z) - AG(z')\| + \|AG(z') - AG(z_2)\|$$

En utilisant le lemme précédent, $1 - e^{-\Omega(m)}$, $\|AG(z_1) - AG(z)\| = O(\delta)$ et $\|AG(z') - AG(z_2)\| = O(\delta)$, ainsi $\|AG(z_1) - AG(z_2)\| = \|AG(z) - AG(z')\| + O(\delta)$.

En utilisant le lemme de Johnson-Lindenstrauss, pour un $x \in \mathbb{R}^n$ donné, $P(\|Ax\|^2 < (1 - \alpha)\|x\|^2) < e^{-\alpha^2 m}$.

Ainsi par la borne d'union sur tous les vecteurs dans T on obtient

$$P(\|Ax\|^2 \geq (1 - \alpha)\|x\|^2 \forall x \in T) \geq 1 - e^{-\Omega(\alpha^2 m)}$$

Vu que $\alpha < 1$ et $z_1, z_2 \in N, G(z_1) - G(z_2) \in T$, on a

$$(1 - \alpha) \|G(z_1) - G(z_2)\| \leq \sqrt{1 - \alpha} \|G(z_1) - G(z_2)\| \leq \|AG(z_1) - AG(z_2)\|$$

En combinant ces trois résultats on obtient avec probabilité $1 - e^{-\Omega(\alpha^2 m)}$ que

$$(1 - \alpha) \|G(z) - G(z')\| \leq (1 - \alpha) \|G(z_1) - G(z_2)\| + 0(\delta) \leq \|AG(z_1) - AG(z_2)\| + 0(\delta) \leq \|AG(z) - AG(z')\| + 0(\delta)$$

Et donc A satisfait la condition $S-REC(S, 1 - \alpha, \delta)$ avec probabilité $1 - e^{-\Omega(\alpha^2 m)}$. □

C.2 Preuve du lemme 3

On rappelle l'énoncé du lemme :

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice aléatoire échantillonnée à partir d'une distribution satisfaisant :

1. La condition $S-REC(S, \gamma, \delta)$ avec probabilité $1 - p$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, $\|Ax\| \leq 2\|x\|$ avec probabilité $1 - p$

Pour tout $x^* \in \mathbb{R}^n$ fixé, soit $y = Ax^* + \eta$. Soit \hat{x} tel que \hat{x} minimise $\|y - Ax\|$ sur S , i.e.

$$\|y - A\hat{x}\| \leq \min_{x \in S} \|y - Ax\| + \varepsilon$$

Alors, avec probabilité $1 - 2p$,

$$\|\hat{x} - x^*\| \leq \left(\frac{4}{\gamma} + 1\right) \min_{x \in S} \|x^* - x\| + \frac{1}{\gamma}(2\|\eta\| + \varepsilon + \delta)$$

Preuve. Soit $\bar{x} = \operatorname{argmin}_{x \in S} \|x - x^*\|$. Alors, par le lemme 6 et par l'hypothèse sur \hat{x} que :

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \hat{x}\| &\leq \frac{\|A\bar{x} - y\| + \|A\hat{x} - y\| + \delta}{\gamma} \\ &\leq \frac{2\|A\bar{x} - y\| + \varepsilon + \delta}{\gamma} \\ &\leq \frac{2\|A(\bar{x} - x^*)\| + 2\|\eta\|\varepsilon + \delta}{\gamma} \end{aligned}$$

tant que A satisfait la condition $S - REC$, ce qui est le cas avec probabilité $1 - p$.

Maintenant, étant donné que x et x^* sont indépendants de A , nous avons aussi par hypothèse que $\|A(\bar{x} - x^*)\| \leq 2\|\bar{x} - x^*\|$ avec probabilité $1 - p$. Ainsi,

$$\|\hat{x} - x^*\| \leq \|\bar{x} - x^*\| + \frac{4\|\bar{x} - x^*\|2\|\eta\|\varepsilon + \delta}{\gamma}$$

ce qui clot la démonstration. □