Prova 2

Gabriella mendonça santa clara

Questão 1: Encontrando a Antitransformada temos:

$$G_p(s) = K_pA\,\frac{-T_1s+1}{T_2s+1}\cdot\frac{1}{s} \Rightarrow K_pA\left[\underbrace{\frac{-T_1s+1}{s(T_2s+1)}}_{Q}\right]$$

Aplicando Frações parciais:

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{T_2s+1} = \frac{A(T_2s+1)+B(s)}{s(T_2s+1)} =$$

$$= \frac{A(T_2s+1)+B(s)}{\cancel{s(T_2s+1)}} = \frac{-T_1s+1}{\cancel{s(T_2s+1)}}$$

manipulando as equações temos que:

$$B = -T_1 - T_2 \quad e \quad A = 1$$

$$Gp(s) = KpA\left[\frac{1}{s} + \left(\frac{-T_1-T_2}{(T_2s+1)}\right)\right]$$

Aplicando a transformada inversa:

$$y(t) = KpA\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-T_1-T_2}{(T_2s+1)}\right\}\right]$$

$$y(t) = KpA\left[1 + \left(-\frac{T_1-T_2}{T_2}\right)\cdot e^{-t/T_2}\right]$$

$$y(t) = KpA\left[\left(\frac{-T_1}{T_2} - 1\right)e^{-t/T_2} + 1\right]$$

Prova 2

Gabriella Mendonça Santa Clara

Questão 1) Dado o enunciado temos que estimar τ_1 e τ_2 tendo $K_p = 2$. Agora trabalhamos com fase não mínima.

Aplicando a antitransformada semelhante ao caso anterior no enunciado:

$$Y(t) = K_p . A \left[\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 \right) . e^{\frac{-\tau_1}{\tau_1}} + 1 \right]$$

→ Para $t=0$ temos que

$$Y(0) = K_p . A \left[\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 \right) . e^0 + 1 \right]$$

$$Y(0) = K_p . A \left[\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 + 1 \right) \right] = K_p . A \left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) =$$

$$Y(0) = -K_p . A \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

Como $K_p = 2$ e $A = 1$, temos:

$$-2\frac{\tau_1}{\tau_2} = -4$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 2$$

→ Agora para $t = \tau_2$

Usando a equação da antitransformada novamente:

$$Y(\tau_2) = K_p . A \left[\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 \right) . e^{\frac{-\tau_2}{\tau_2}} + 1 \right]$$

$$Y(\tau_2) = K_p . A \left[\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 \right) . e^{-1} + 1 \right]$$

Sabendo que $\frac{\tau_1}{\tau_2} = 2$, tem-se que:

$$Y(\tau_2) = K_p . A \left[(-2 - 1) . 0,367 + 1 \right]$$

$$Y(\tau_2) = K_p . A \left[-0,101 \right]$$

→ Sabendo que $K_p = 2$ e $A = 1$, temos que:

$$Y(\tau_2) = 2 \left[-0,101 \right] = 0,202$$

Pela figura 2 buscando o tempo correspondente da saída 0,202, temos:

$$\tau_2 \approx 1\,s$$

Então:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 2 \Rightarrow \frac{\tau_1}{1} = 2 \Rightarrow \tau_1 = 2\,s$$

A função de transferência:

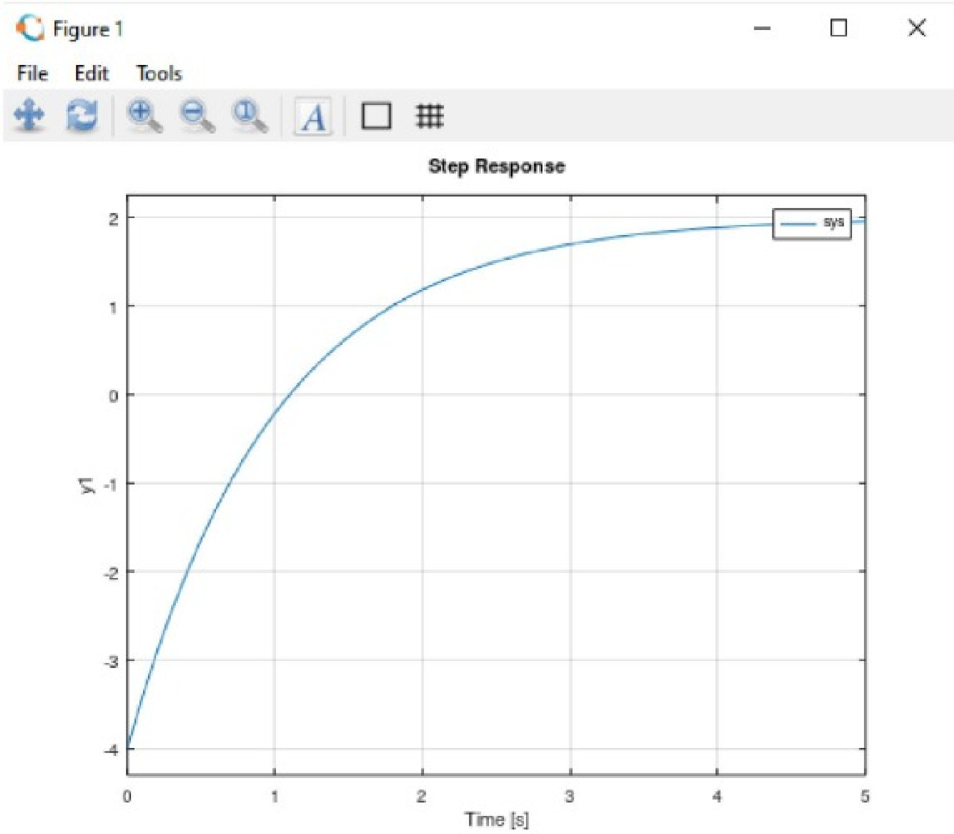
$$G_p(s) = K_p \frac{-\tau_1 . s + 1}{\tau_2 . s + 1}$$

$$G(s) = 2 \left| \frac{-2s + 1}{s + 1} \right|$$

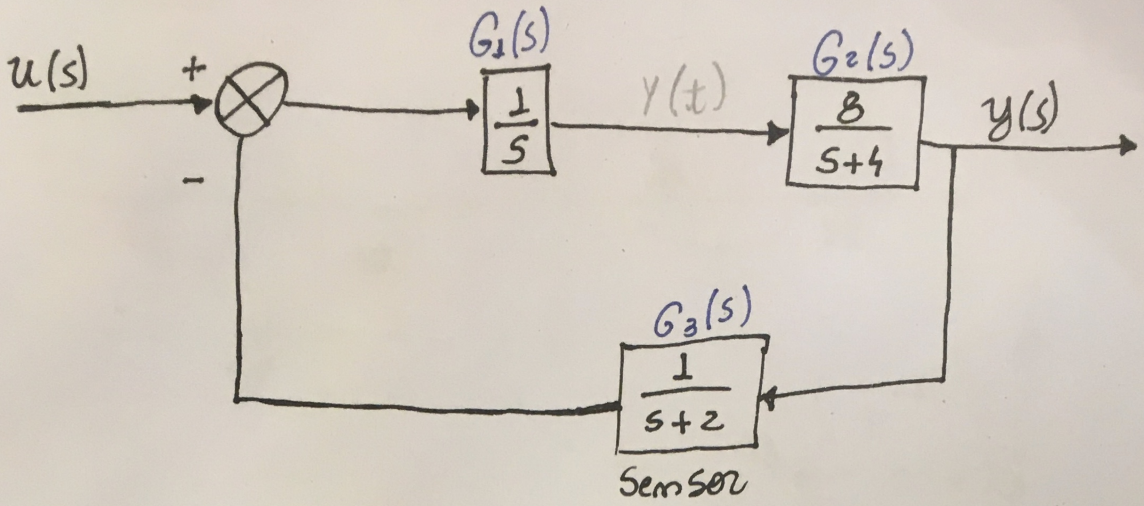
Plotando a resposta do degrau unitário do modelo através do Octave percebemos que o comportamento da curva é semelhante ao apresentado no enunciado. Abaixo o Script do Octave para a construção do modelo e o gráfico resultante:

prova2.m

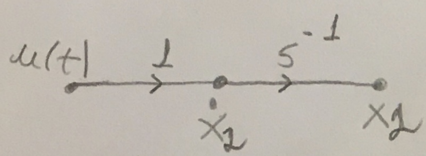
```
%pkg load control
num = [-4 2]
den = [1 1]
sys = tf(num,den)
step(sys)
```



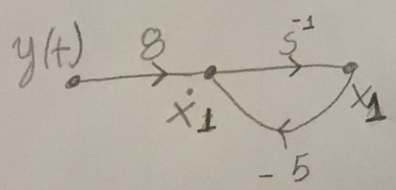
Questão 2)



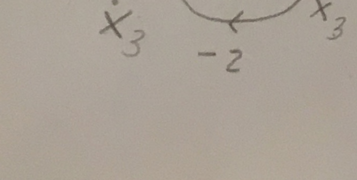
Para o $G_1(s) = \frac{1}{s}$



Para o $G_2(s) = \frac{8}{s+4}$



Para $G_3(s)$: $\frac{1}{s+2}$



Para A solução consideramos que:

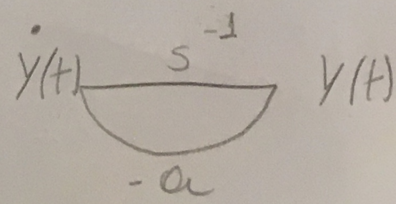
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s+a}$$

$$= Y(s)s + aY(s) = bU(s) \quad \mathcal{L}^{-1}$$

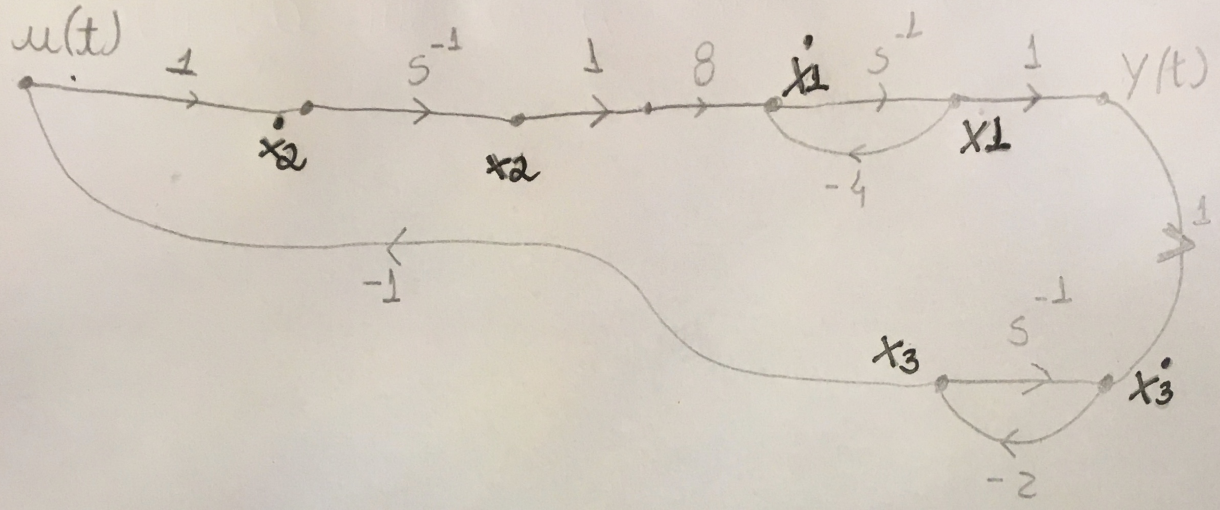
$$\dot{Y}(t) + ay(t) = bu(t)$$

$$\underline{\dot{Y}(t) = bu(t) - ay(t)}$$

temos que



Integração dos três componentes:



Pela tecnica de Inspenção

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\vec{b}} u(t)$$

$$y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\vec{C}^T} \vec{X}$$

Questão 3)

$$m\ddot{x} + b\ddot{x} + Kx = f(t)$$

a) Considerando que m, b e K unitarios. Caracterizar o comportamento do sistema:

Aplicando Laplace na equação:

$$mXs^2 + bXs + KX = F$$

Substituindo os valores dos parametros

$$Xs^2 + Xs + X = F$$

manipulando a equação:

$$X(s^2 + s + 1) = F$$

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{s^2+s+1} = G(s)$$

Então:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

Por associação:

$$2\xi w_n = 1$$

$$\xi w_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{porém } w_n^2 = 1 = \sqrt{1}$$

$$w_n = 1$$

$$\xi = \frac{1}{2}$$

Resp.: Como o valor de ξ está entre $0 < \xi < 1$ o sistema é sub amortecido.

a) Para encontrar os Pólos

Pela equação:

$$s^2 + s + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = -3$$

Como $\Delta < 0$ as respostas serão complexas:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{3i}}{2} \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{3i}}{2} \\[2ex] X_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3i}}{2} \end{cases}$$

Resp.: A resposta ao degrau vai decrescer com o tempo (pela natureza de pólos complexos conjugados.

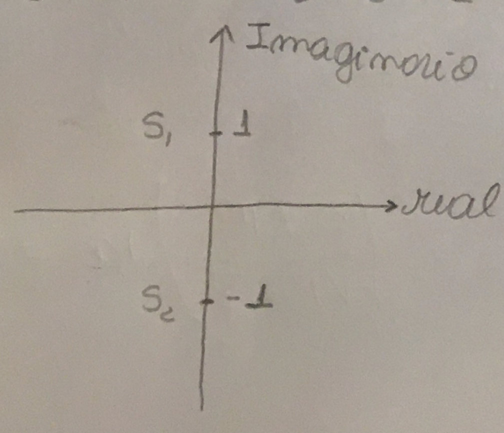
b) Supondo um amortecimento nulo:

Então por associação teremos $\xi = 0$, e agora substituindo pela função de transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 0\,\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Pela equação $s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s^2 = 1 \Rightarrow s = \pm 1$ $\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = -1 \end{cases}$

temos:



Res.: O sistema tem comportamento estável e cresce como uma exponencial positiva

e) Considerando o amortecimento muito alta:

$2\xi\omega_n \to \infty$. Então:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \infty + 1}$$

Pela equação: $s^2 + \infty + 1$

$$\Delta = 4\infty - ac = \infty$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\infty \pm \sqrt{\infty}}{2}$$

$X_1 = +\infty$

$X_2 = -\infty$

Resp.: Quando ξ tende ao infinito é observavel que um polo tende a 0 e outro a $-\infty$

d) dados do problema:

$\xi = 0,7$ e $\omega n = 1$

- Para T_s

$$T_s = \frac{4}{\xi \omega n} = \frac{4}{0,7} = \underline{5,71}$$

- Para T_r

$$T_r = \frac{1}{\omega d}\left(\pi - tg^{-1}\left(\frac{\omega d}{\xi}\right)\right) = \frac{1}{1\sqrt{1-0,7}}\left(\pi - tg^{-1}\left(\frac{1\sqrt{1-0,7^2}}{0,1 \cdot 1}\right)\right) =$$

$T_r = 3,42$

- Para MP:

$$Mp = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi}}\right)} \cdot 100 = e^{-\left(\frac{0,7\pi}{\sqrt{1-0,7}}\right)} \cdot 100 = 4,59\%$$