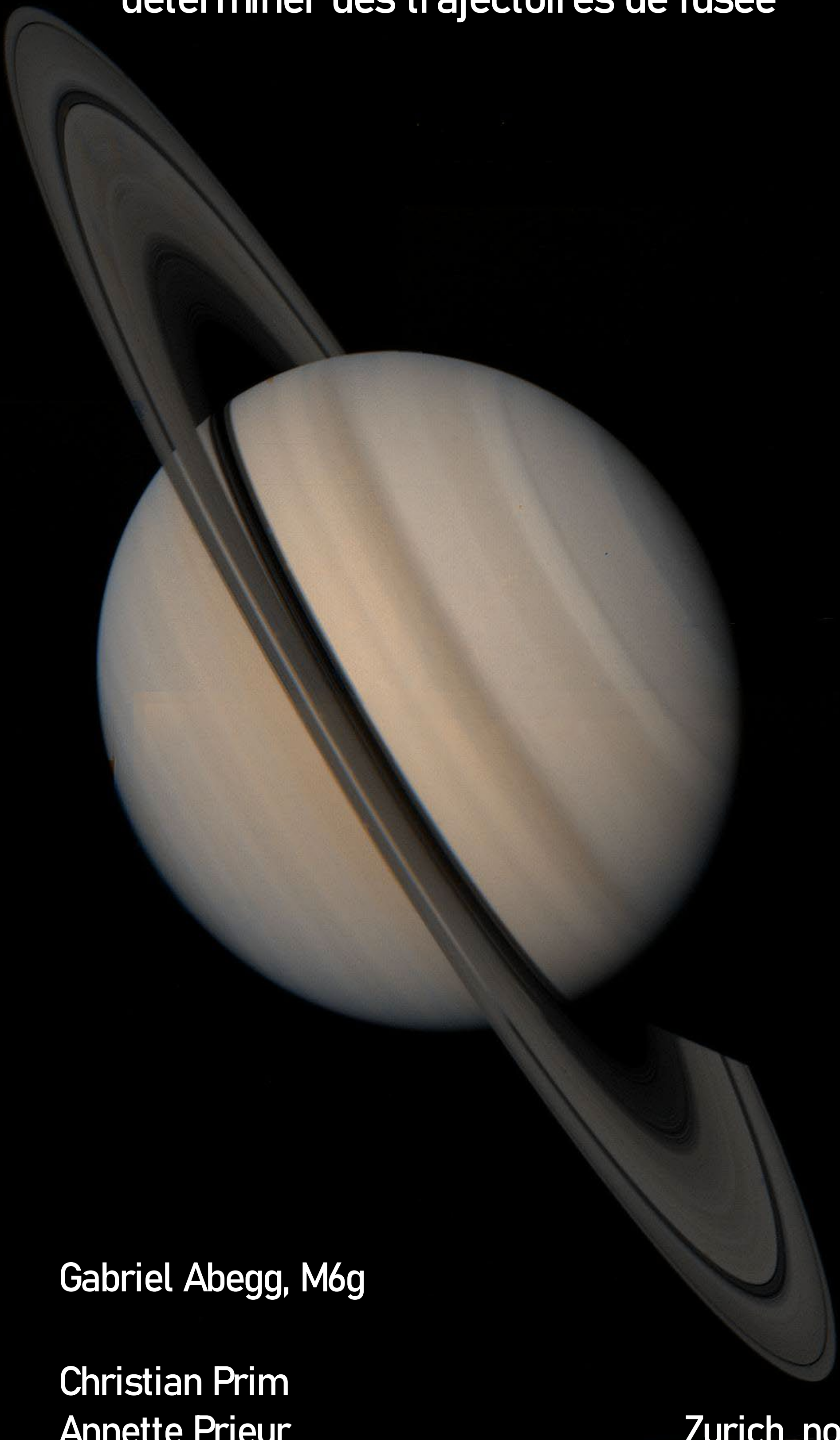
Travail de Maturité à la Kantonsschule Zürich Nord

En route vers les planètes

La programmation d'un outil pour déterminer des trajectoires de fusée



Auteur Gabriel Abegg, M6g

Mentor Christian Prim

Experte Annette Prieur

Zurich, novembre 2024

Table des matières

Préface

J'avais toujours une fascination indescriptible pour tout ce qui est hors de mes connaissances. Le fait de pouvoir m'immerger dans un sujet de mon choix était donc une occasion me promettant de pouvoir, non pas entièrement, mais mieux comprendre les lois de l'univers. L'astrodynamique m'a particulièrement beaucoup intéressé : c'est ce domaine scientifique qui est la base de l'exploration de l'espace.

Lors de mon travail, j'étais surpris par l'accessibilité des sujets abordés. Souvent, il y avait plusieurs livres contenant des réponses à mes questions. J'exprime ma gratitude envers la NASA qui met librement à disposition d'énormes quantités de données sur de nombreux corps célestes de notre système solaire [1]. Sans leur générosité de partager des données et connaissances avec le public, ce projet n'aurait jamais été possible. Le livre «Fundamentals of Astrodynamics» par Roger R. Bate, Donald D. Mueller, Jerry E. White et William W. Saylor m'a particulièrement bien aidé.

Une grande partie de la recherche et du programme a été réalisée à Carouge, Genève, lors de mon séjour linguistique d'un semestre. La finalisation et l'optimisation de mon programme ainsi que la rédaction ont largement eu lieu à Zurich. Quand j'ai commencé ce travail, je n'aurais jamais pu imaginer le progrès dans la compréhension de la mécanique newtonienne, ni que je travaillerai plus de 400 heures dessus. Je suis infiniment reconnaissante à mes parents de m'avoir soutenue émotionnellement lorsque le programme ne fonctionnait pas encore.

1 Introduction

1.1 But

Je souhaite créer un logiciel qui détermine une trajectoire de fusée à partir de la Terre jusqu'à une planète cible, en utilisant une approximation par tronçons de coniques. Il nous fournira une date de départ et d'arrivée, ainsi qu'une vitesse et une position permettant d'initier la trajectoire ciblée. Le $\Delta\vec{v}$ nécessaire pour établir une orbite stable autour de la planète sera ensuite calculé. Pour atteindre les planètes Saturne, Uranus et Neptune, une assistance gravitationnelle est utilisée au niveau de Jupiter.

1.2 Outils et Méthodes

Le logiciel sera entièrement programmé dans la version 3.10.12 de Python, un langage à la fois flexible et compréhensible. Toutefois, Python peut être très lent par rapport à d'autres langages de programmation. Pour contrebalancer cela, j'ai essayé d'utiliser les tableaux à n dimensions du module NumPy version 1.26.4 (ndarrays), permettant de rendre le processus plus efficace [2].

La visualisation des données a été réalisée à l'aide de MatPlotLib [3], [4]. Pour pouvoir estimer le temps d'exécution d'un programme, le module tqdm [5] a été utilisé. Les tests ont été réalisés sur le « Windows Subsystem for Linux » version 2 qui utilise Ubuntu version 22.04.

1.3 Questions directrices

1. Lesquelles des méthodes qui sont utilisées dans la communauté aérospatiale pour planifier une trajectoire interplanétaire, pourrais-je utiliser ? Quelles modifications doivent être apportées pour rester dans le cadre d'un travail de maturité ?
2. Quel est l'écart de l'approximation par tronçons de coniques par rapport à la simulation à N corps ?
3. Comment réaliser une telle simulation ?
4. Comment et avec quelle précision peut-on obtenir les données nécessaires pour la simulation ? Est-ce qu'elles sont précises ?
5. Est-ce qu'il est possible d'obtenir accès à une simulation d'une agence spatiale ?
6. Quel est l'écart de ma simulation ?

2 Théorie et réalisation

2.1 Planifier la trajectoire

2.1.1 Approximations

La planification d'une trajectoire de fusée réaliste est une tâche très complexe. Même en négligeant des effets perturbateurs tels que la pression de radiation solaire, le fait que les planètes ne sont pas des sphères parfaites et des effets relativistes, nous devons toujours trouver une trajectoire de vol dans un système à N corps [6]. Une approximation simple et probablement l'une des seules réalisables dans le cadre d'un travail de maturité est l'approximation par tronçons de coniques. Cette approche consiste à définir des régions sphériques dans lesquelles uniquement l'influence d'une seule planète est prise en compte, ce qui nous permet d'utiliser la solution analytique du problème à deux corps [7]. Le rayon de cette «sphère d'influence» est dérivé dans la section 2.2. Dans les simulations permettant de calculer la trajectoire des planètes et de la fusée, toute masse de planète avec ses lunes est considérée comme concentrée sur leur barycentre commun. Seules les accélérations dues à la gravitation newtonienne sont prises en compte.

2.1.2 Développement du problème à deux corps

Équation du mouvement relatif [8]

Nous allons considérer que nous disposons de la position de deux objets dans un système de coordonnées inertiel. Les positions $\vec{r_M}$ et $\vec{r_m}$ des objets M et m sont données. $\vec{r}$ désigne un vecteur de M à m. Selon la loi universelle de la gravitation de Newton, les accélérations $\ddot{\vec{r_m}}$ agissant sur m et $\ddot{\vec{r_M}}$ agissant sur M sont :

$$\ddot{\vec{r_m}} = -\frac{G \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r}$$
$$\ddot{\vec{r_M}} = \frac{G \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Vu que $\ddot{\vec{r_m}} - \ddot{\vec{r_M}}$ est généralement équivalent à $\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r_m} - \vec{r_M})$, nous pouvons simplement soustraire les deux équations pour obtenir l'accélération de m relative à M :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Pour rendre cette équation plus jolie, la constante μ nommée paramètre gravitationnel est introduite. Dans tous les cas où $M \gg m$ nous pouvons utiliser la valeur $\mu \equiv GM$. Dans des cas où la masse m n'est pas négligeable, $\mu \equiv G(M+m)$ doit être utilisé. On obtient :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} \tag{1}$$

Note sur les vecteurs

Des élèves qui ne sont pas encore familiarisés avec les vecteurs, comme c'était mon cas au début du travail, peuvent penser que $\dot{r} = v$ ce qui peut créer de la confusion. r désigne la magnitude du vecteur de position $\vec{r}$ tandis que v est la magnitude de la vitesse. $\dot{r}$ est donc le changement dans la magnitude de $\vec{r}$ et est égale à $\dot{r} = v \cos\gamma$ avec $\gamma = \angle(\vec{r}, \vec{v})$.

L'énergie mécanique spécifique [9]

Pour obtenir une équation scalaire, nous pouvons multiplier l'équation 1 par le vecteur $\dot{\vec{r}}$. Nous pouvons donc écrire :

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}\,\frac{\mu}{r^3} = 0$$
$$v\dot{v} + \frac{\mu}{r^3} r\dot{r} = 0$$

Il est évident que $\frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2}) = v\dot{v}$ et $\frac{d}{dt}(-\frac{\mu}{r}) = \frac{\mu}{r^2}\dot{r}$. On en arrive donc à la formule :

$$\frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2} + c - \frac{\mu}{r}) = 0$$

Grâce à cette transformation, nous obtenons une expression qui ne varie pas avec le temps, soit une constante. Cette constante est l'énergie mécanique spécifique E. La constante d'intégration peut être interprétée comme la référence nulle pour l'énergie potentielle. Comme il s'agit d'un choix arbitraire, nous pouvons le mettre à zéro, ce qui place notre référence nulle à l'infini. Cela équivaut à :

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \tag{2}$$

Conservation du moment cinétique Le moment cinétique $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ est une grandeur physique qui va nous aider à décrire les orbites à deux corps. Le lecteur intéressé trouvera la preuve de sa conservation dans [10]. Elle décrit le sens de la rotation et le plan sur lequel l'orbite se trouve. Remarquons qu'aux apsides, l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{v}$ est de 90°. Par conséquent, la magnitude de $\vec{h}$ s'écrit $h = r_p v_p = r_a v_a$, où r_p et v_p représentent la distance et la vitesse au périapse, et r_a et v_a la distance et la vitesse à l'apoapse [11].

2.1.3 Intégration de l'équation de motion [12]

Nous ne pouvons pas encore intégrer directement l'équation 1. Pour faire cela, nous devons d'abord effectuer le produit vectoriel avec le moment cinétique. On trouve alors :

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}(\vec{h} \times \vec{r})$$

Notez que le changement de la position entre $\vec{h}$ et $\vec{r}$ entraîne la disparition du signe négatif. Puisque $\vec{h}$ est une constante, le côté gauche est équivalent à $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h})$. En substituant la définition de $\vec{h}$ et en appliquant la propriété du produit triple vectoriel, on obtient :

$$\frac{\mu}{r^3}((\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}) = \frac{\mu}{r^3}\left[\vec{v}\underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{r})}_{r^2} - \vec{r} \times \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{v})}_{r \cdot \dot{r}}\right] = \mu\left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}\vec{r}\right)$$

Comme on peut le constater maintenant, cela est équivalent à $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$. Cette expression peut facilement être intégrée, ce qui permet d'obtenir :

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) + \vec{B}$$

$\vec{B}$ est la constante vectorielle d'intégration. Sa signification deviendra plus claire par la suite. Nous calculons le produit scalaire avec $\vec{r}$, ce qui donne :

$$\underbrace{\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h}}_{=\vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{h}} = \mu\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r}\right) + \vec{r} \cdot \vec{B}$$

$$\Rightarrow h^2 = \mu\, r + rB\cos\nu$$

Finalement, cela devient :

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (B/\mu)\cos\nu} \tag{3}$$

En comparant ce résultat à l'équation générale d'une section conique, on remarque que la solution du problème à deux corps ne permet d'obtenir que des sections de conique. L'angle ν ci-dessous est l'angle entre le vecteur de position le plus proche du point focal, nommé périapside, et la position $\vec{r}$. Puisque l'angle entre la constante d'intégration $\vec{B}$ et $\vec{r}$ correspond à l'angle ν ci-dessous, le vecteur $\vec{B}$ doit pointer dans la direction du périapside.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{4}$$

De cette relation résulte notamment que :

$$p = \frac{h^2}{\mu} \tag{5}$$

2.1.4 Introduction d'autres éléments importants

Grâce à des considérations géométriques, on peut montrer que pour chaque section conique sauf une parabole [13] :

$$p = a(1 - e^2) \tag{6}$$

où a est le demi-grand axe. Grâce à cette information et en raison du fait que l'anomalie vraie est nulle au périapside, l'équation 4 devient [14] :

$$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \tag{7}$$

En utilisant l'équation 2 qui décrit l'énergie dans l'orbite et en utilisant le concept du moment cinétique introduit dans la section 2.1.2, nous pouvons écrire l'équation d'énergie spécifique de la manière suivante [11] :

$$E = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$$

En prenant en considération que

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2) \Rightarrow h^2 = \mu a(1-e^2)$$

et en utilisant l'équation 7, l'énergie spécifique mécanique devient [11] :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu a(1-e^2)}{2a^2(1-e)^2} - \frac{\mu}{a(1-e)} \\ &= \frac{\mu(1-e)(1+e)}{2a(1-e)^2} - \frac{2\mu}{2a(1-e)} \\ &= \frac{\mu(-1+e)}{2a(1-e)} \\ &= -\frac{\mu}{2a} \end{aligned} \tag{8}$$

La résolution de l'équation 6 en e conduit à [11] :

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

Grâce aux équations 5 et 8, nous pouvons remplacer a par $-\mu/2E$ et p par h^2/μ, ce qui conduit à l'équation suivante [11] :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}} \tag{9}$$

Cette formule sera utile dans la section 2.6.3.

2.1.5 Le système de coordonnées périfocal [15]

L'introduction des deux vecteurs d'unité $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ permet de décrire facilement la position du satellite sous forme vectorielle. Cela devient évident en observant la figure 1. En appliquant les notions de trigonométrie, on obtient :

$$\vec{r} = r\cos\nu\ \hat{P} + r\sin\nu\ \hat{Q} \tag{10}$$

$$\text{avec } r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{11}$$

En différenciant cette équation par rapport au temps, sachant que les deux vecteurs $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ sont des constantes, nous obtenons :

$$\vec{v} = (\dot{r}\cos\nu - r\dot{\nu}\sin\nu)\ \hat{P} + (\dot{r}\sin\nu\ + r\ \dot{\nu}\cos\nu)\hat{Q}$$

Selon le livre «Fundamentals of Astrodynamics», on a $v\cos\phi = r\dot{\nu}$ où ϕ est l'angle de trajectoire de vol. Cela devient évident en observant l'image 2 : seule la composante de la vitesse perpendiculaire à la position contribue à une variation de l'anomalie vraie. De plus, il faut considérer le rapport entre la vitesse et la distance plutôt que la vitesse elle-même ; plus la distance est grande, plus la variation de l'anomalie vraie est faible. Étant donné que $v\cos\phi = \frac{h}{r}$, on peut reformuler : $h = r^2\dot{\nu}$. De plus, nous avons vu que $p = h^2/\mu$. En différenciant l'équation 11, nous obtenons :

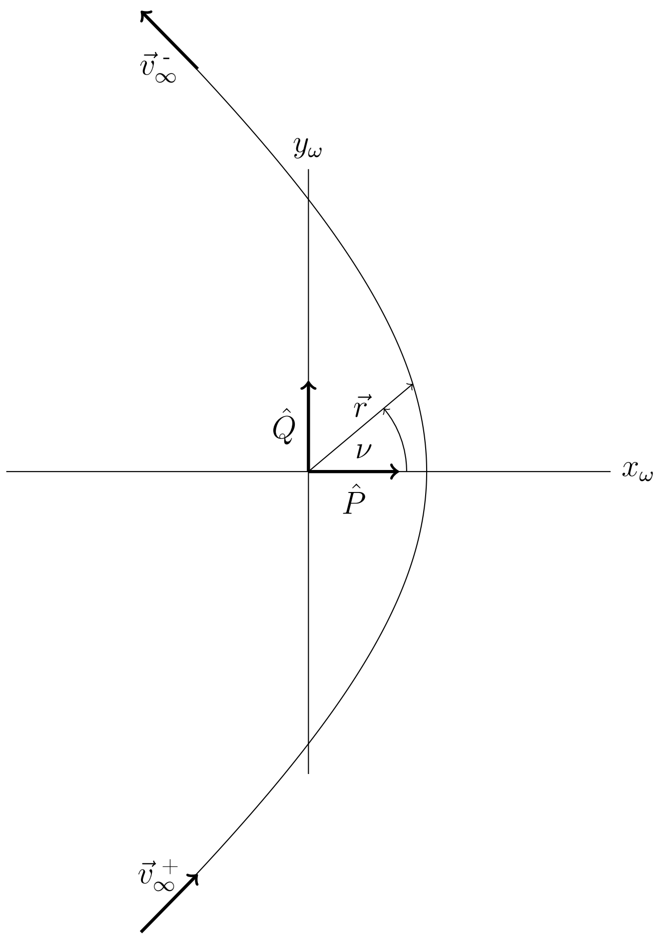


FIGURE 1 – Le système périfocal (Adapté de [16])

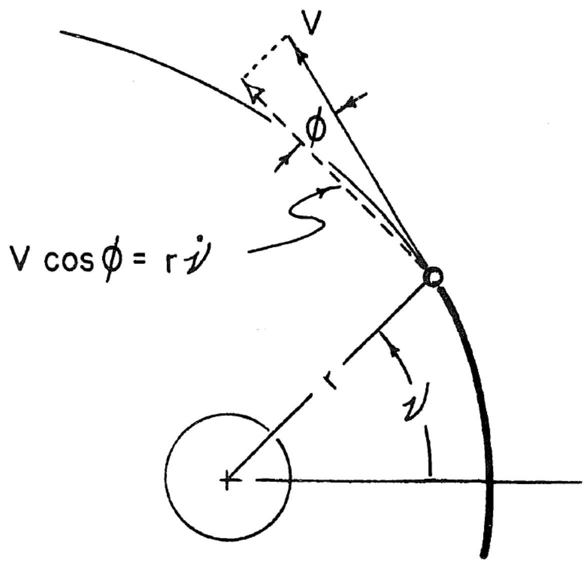


FIGURE 2 – Composante horizontale de v. Tiré de [17]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}p &= 1 + e\cos\nu \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \\
-\frac{1}{r^2}\dot{r}p &= -e\dot{\nu}\sin\nu \\
\frac{1}{h}\dot{r}p &= e\sin\nu \\
\dot{r} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\nu
\end{aligned} \tag{12}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= -p(1 + e\cos\nu)^{-2}e\dot{\nu}(-\sin\nu) \\
\dot{r} &= r(1 + e\cos\nu)^{-1}e\dot{\nu}\sin\nu \\
\overset{\text{équation 12}}{\Rightarrow} \quad \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\nu &= r(1 + e\cos\nu)^{-1}e\dot{\nu}\sin\nu \\
r\dot{\nu} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\nu)
\end{aligned}
$$

On peut mettre cela dans l'équation précédente, ce qui équivaut à :

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\sin\nu\vec{P} + (e + \cos\nu)\vec{Q}\right] \tag{13}$$

2.2 Déduction du rayon de la sphère d'influence [18]

L'idée fondamentale de la sphère d'influence (SOI ou «Sphere of Influence» en anglais) a déjà été développée dans la section 2.1.1. Pour l'utiliser, nous devons connaître le rayon de cette sphère imaginaire. L'approche proposée par Laplace est la suivante. La dérivation suivante est tirée de Vallado [18]. Nous avons deux corps célestes : A (p. ex. le Soleil) et B (p. ex. la Terre) et nous souhaitons déterminer la sphère d'influence de B. Nous commençons par décrire l'accélération du satellite relative à B. Elle vaut :

$$\ddot{\vec{r}}_{B,\ sat} = \underbrace{-\frac{G(m_B + m_{sat})}{r^3_{B\ sat}}\vec{r}_{B,\ sat}}_{\ddot{\vec{r}}\ principale} + \underbrace{Gm_A(\frac{\vec{r}_{sat,\ A}}{r^3_{sat,\ A}} - \frac{\vec{r}_{B,\ A}}{r^3_{B,\ A}})}_{\ddot{\vec{r}}\ perturbatrice}$$

Note : Nous avons déjà vu l'accélération principale $\ddot{\vec{r}}_{\text{principale}}$ dans la section 2.1.2. Il est clair que dans le référentiel de B l'accélération perturbatrice $\ddot{\vec{r}}_{\text{perturbatrice}}$ ne peut pas seulement être celle exercée sur le satellite par A, car le référentiel B est lui-même accéléré.
De la même manière, dans le référentiel de A :

$$\ddot{\vec{r}}_{A,\ sat} = \underbrace{-\frac{G(m_A + m_{sat})}{r^3_{A,\ sat}}\vec{r}_{A,\ sat}}_{\ddot{\vec{r}}\ principale} + \underbrace{Gm_B(\frac{\vec{r}_{sat,\ B}}{r^3_{sat,\ B}} - \frac{\vec{r}_{A,\ B}}{r^3_{A,\ B}})}_{\ddot{\vec{r}}\ perturbatrice}$$

Laplace a défini la sphère d'influence comme l'endroit où le rapport entre l'accélération perturbatrice et l'accélération principale est le même dans les deux référentiels. En négligeant la masse m_{sat} et en remplaçant $\vec{r}_{B,\ A}$ par le vecteur $\vec{D}$, on obtient :

$$\frac{m_A\left|\frac{\vec{r}_{A,\ sat}}{r^3_{A,\ sat}} - \frac{\vec{D}}{D^3}\right|}{m_B\left|\frac{\vec{r}_{B,\ sat}}{r^3_{B\ sat}}\right|} \qquad \frac{m_B\left|\frac{\vec{r}_{sat,\ B}}{r^3_{sat,\ B}} - \frac{\vec{r}_{A,\ B}}{r^3_{A,\ B}}\right|}{m_A\left|\frac{\vec{r}_{sat,\ A}}{r^3_{sat,\ A}}\right|}$$

Les deux termes sont développés ci-dessous en utilisant la relation $\vec{r}_{SOI} = \vec{r}_{B,\ sat} = \vec{D} - \vec{r}_{sat,B}$ et les hypothèses simplificatrices $r_{SOI} \ll D$ et $r_{SOI} \ll |\vec{r}_{A,\ sat}|$ ainsi que $\vec{r}_{sat,\ A} \cong \vec{D}$.

$$\frac{m_A\left|\frac{\vec{r}_{A,\ sat}}{r^3_{A,\ sat}} - \frac{\vec{D}}{D^3}\right|}{m_B\left|\frac{\vec{r}_{B,\ sat}}{r^3_{B\ sat}}\right|} \cong \frac{m_A\left|\frac{-\vec{r}_{SOI}}{D^3}\right|}{\frac{m_B}{r^2_{SOI}}} = \frac{m_A r^3_{SOI}}{m_B\ D^3}$$

$$\frac{m_B\left|\frac{\vec{r}_{sat,\ B}}{r^3_{sat,\ B}} - \frac{\vec{r}_{A,\ B}}{r^3_{A,\ B}}\right|}{m_A\left|\frac{\vec{r}_{sat,\ A}}{r^3_{sat,\ A}}\right|} = \frac{m_B\left|-\frac{\vec{r}_{SOI}}{r^3_{SOI}} + \frac{\vec{D}}{D^3}\right|}{m_A\left|\frac{\vec{r}_{sat,\ A}}{r^3_{sat,\ A}}\right|} = \frac{m_B\left|\frac{\vec{D}\cdot r^3_{SOI} - \vec{r}_{SOI}\cdot D^3}{r^3_{SOI}\ D^3}\right|}{m_A\left|\frac{\vec{r}_{sat,\ A}}{r^3_{sat,\ A}}\right|} = \frac{m_B\left|\frac{\vec{D}\ r_{SOI}(r^2_{SOI} - D^2)}{r^3_{SOI}\ D^3}\right|}{m_A\left|\frac{\vec{r}_{sat,\ A}}{r^3_{sat,\ A}}\right|}$$
$$\cong \frac{m_B\frac{1}{r^2_{SOI}}}{\frac{m_A}{D^2}} = \frac{m_B\ D^2}{m_A\ r^2_{SOI}}$$

Nous pouvons maintenant mettre les fractions en équation ...

$$\frac{m_B\ D^2}{m_A\ r^2_{SOI}} = \frac{m_A r^3_{SOI}}{m_B\ D^3}$$

... et résoudre. Le résultat est le suivant :

$$r_{SOI} = D\ (\frac{m_B}{m_A})^{\frac{2}{5}} \tag{14}$$

2.3 Intégration numérique et simulations

Pour évaluer les orbites des planètes et la trajectoire de la fusée, il faut résoudre des problèmes à N corps, un problème si difficile, que la seule solution analytique trouvée est sous forme de série de Taylor, qui converge trop lentement pour être utilisée en pratique [19].
L'intégration numérique est donc la seule manière de solution convenant à ce problème. Cependent, elle n'est pas parfaite. Plus précisément, deux types de déviations d'une solution exacte existent :
La première, appelée « erreur d'arrondi » (en anglais : « roundoff error »), est due au fait que l'ordinateur ne peut effectuer des calculs qu'avec une précision finieet commet donc de petites erreurs à chaque étape de calcul. Pour contrebalancer cet effet, mon programme utilise des np.longdouble, ce qui constitue des valeurs à virgule flottante avec 128 bits.
La seconde, appelée « erreur de troncature », est due à l'ordre de la méthode et dépend du pas d'intégration (en anglais : step-size) [20].

2.3.1 Méthode d'Euler

Dû à sa simplicité et à sa rapidité, la méthode d'Euler est probablement la première méthode d'intégration numérique que l'on apprend. Pourtant, tout avantage de cette méthode est surcompensé par son imprécision, ce qui rend impossible l'obtention de résultats exacts avec elle. C'est cette insuffisance qui a poussé les mathématiciens à chercher des méthodes plus précises.
À partir des conditions initiales, la pente est calculée. Pour de petits pas d'intégration, celle-ci est approximativement constante, ce qui permet de calculer un nouveau point de la manière suivante [21] :

$$y_{n\,+\,1} = y_n + \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t$$

2.3.2 Méthode Runge-Kutta du quatrième ordre

La méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre est l'une des méthodes les plus populaires pour résoudre des problèmes à valeurs initiales. L'idée derrière cette méthode est la suivante : on évalue la dérivée à plusieurs endroits dans l'intervalle à extrapoler, puis on en prend une moyenne pondérée. Pour identifier les facteurs déterminants le lieu et la façon de pondérer cette moyenne, on les déclare de manière qu'ils approximent une série de Taylor de l'ordre donné. Vous trouverez la dérivation de la méthode de Runge-Kutta du deuxième ordre dans la source [22]. Sans déduire moi-même celle du quatrième ordre, qui devrait s'obtenir avec une démarche similaire, j'utiliserai la formule présentée dans « Fundamentals of Astrodynamics ». L'idée de diviser l'équation de mouvement, qui est une équation différentielle ordinaire du second ordre, en deux équations du premier ordre pour qu'elle soit soluble, est tirée de [23].

2.3.3 Méthode de Gauss-Jackson

La méthode d'intégration Gauss-Jackson est rapide et précise. Le fait qu'il s'agisse d'une méthode de double intégration la rend idéale pour le calcul des trajectoires des satellites ou d'autres objets, dans le cadre desquels il faut toujours déduire la position à partir de l'accélération. Il s'agit d'un intégrateur en plusieurs étapes (multi-step method), ce qui signifie qu'il prend en compte plusieurs points précédents et les extrapole. L'avantage de cette caractéristique est une précision supérieure, car le changement d'accélération dans l'intervalle à intégrer est mieux représenté. Cependant, cela nécessite l'utilisation de points précédents, appelés « backpoints » ou « points de référence ». Il est donc indispensable de suivre une procédure de démarrage pour générer les premiers points. Pour cela, j'ai utilisé la méthode de Runge-Kutta présentée précédemment. Gauss-Jackson est une méthode prédicteur-correcteur : d'abord un nouveau point est calculé, puis corrigé en prenant en compte la nouvelle accélération. Un point peut être corrigé plusieurs fois ou pas. Un soi-disant « mid-corrector » est utilisé dans la procédure de démarrage pour corriger les points calculés à l'aide de Runge-Kutta. Pour que l'extrapolation des accélérations fonctionne, la fonction doit être continue et régulière sur l'ensemble des points de référence. Si les accélérations agissantes changeaient spontanément, ce qui ne serait pas le cas dans notre approche simplifiée, la procédure doit être redémarrée. La dérivation présentée dans [24] utilise l'opérateur de différence arrière ∇, mais des dérivations utilisant les opérateurs de différence avant Δ ou de différence centrée δ sont algébriquement équivalentes [24].

2.3.4 Summed Adams

La version sommée du prédicteur d'Adams-Bashforth et du correcteur d'Adams-Moulton. Obtenu comme étape intermédiaire dans la dérivation de l'intégrateur Gauss-Jackson, cet intégrateur est une méthode d'intégration simple ("single-integration methods") pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. Elle est utilisée en combinaison avec ce dernier pour obtenir la vitesse. [24]

2.3.5 Comparaison des méthodes d'intégration

Pour tester ces méthodes moi-même, j'ai créé le programme compare.py, qui se trouve dans l'annexe A.2. Après exactement mille orbites, le programme compare les positions $\vec{r}_1$ obtenues avec la position initiale $\vec{r}_p$. Pour mieux voir la différence entre les méthodes d'intégration, la norme du vecteur $\vec{r}_1 - \vec{r}_p$ est prise et divisée par $|\vec{r}_p|$. Vous trouverez le résultat dans le tableau 1.

Face à ce tableau, nous pouvons immédiatement exclure l'utilisation de la méthode d'intégration d'Euler, en raison de son immense imprécision. Il est plus difficile de prendre une telle décision pour les méthodes de Gauss-Jackson et Runge-Kutta : même si la méthode de Gauss-Jackson est environ vingt fois plus précise, elle est plus de quatre fois plus lente. L'analyse du

Méthode (pas d'intégration)	temps d'exécution	$\lvert\Delta\vec{r}\rvert / \lvert\vec{r}_p\rvert$	$\lvert\Delta\vec{v}\rvert / \lvert\vec{v}_p\rvert$
Méthode d'Euler (30s)	10 s	3351	0.9873
Runge-Kutta 4 (30s)	49 s	0.3601	0.2208
Gauss-Jackson/Summed Adams (30s)	3 min 22 s	0.01519	0.01937

Table 1 – Comparaison des méthodes d'intégration numérique proposées

programme révèle rapidement que cela est dû à de nombreuses boucles « for » qui pourraient être remplacées par des opérations NumPy, rendant ainsi le code beaucoup plus efficace. Cela est dû au fait que la partie du programme responsable de l'intégration Gauss-Jackson a été programmée au tout début du projet, alors que je ne connaissais pas encore les pouvoirs de NumPy. Une autre explication de cette longue durée vient du fait que plusieurs « backpoints » sont utilisés, dont les accélérations doivent être recalculées à chaque itération si l'on ne veut pas les sauvegarder. De plus, le correcteur de Gauss-Jackson et Summed Adams corrige chaque point, ce qui prend également du temps.
Selon [25], il est clairement recommandé d'utiliser la méthode d'intégration numérique Gauss-Jackson pour des problèmes orbitaux, ce qui est la raison principale de l'avoir choisi. Toutefois, comme une réduction du pas d'intégration pour la méthode de Runge-Kutta conduit à un résultat excellent (ce qui n'est pas montré dans le tableau 1), la question se pose de savoir s'il valait la peine d'utiliser la méthode Gauss-Jackson, compte tenu de la complexité supplémentaire de cette méthode.

2.3.6 Commentaire sur l'implémentation

Simulation du mouvement planétaire Les implémentations de l'intégrateur de Gauss-Jackson en combinaison avec celui d'Adams sont de l'ordre 8 avec les coefficients pris de [26]. Les programmes utilisant cette méthode d'intégration sont écrits de manière à permettre un changement d'ordre qui ne consiste qu'à adapter les coefficients, ainsi que l'ordre dans le fichier general_definitions.py. Vu que les résultats obtenus avec l'ordre 8 sont excellentes, cela n'était pas nécessaire. Le programme qui simule les trajectoires de planètes, ainsi qu'une discussion complète des données obtenues grâce à cette simulation, se trouve dans l'annexe A.6. Les valeurs initiales de cette simulation sont celles mises à disposition par le système de Horizons de la NASA [1].
Il est intéressant de jeter un œil sur l'utilisation des numpy.ndarrays dans l'implémentation du programme planetary_movement2.py. Grâce à la fonctionnalité de « broadcasting » des tableaux de NumPy, la durée d'exécution du programme a été réduite de pres d'un facteur 40 comparée à la version non optimisée. Des valeurs plus concrètes sont obtenues en simulant 165 ans avec un pas d'intégration de $1000s$ et en estimant le temps d'exécution avec le module tqdm [5]. Ce module indique un temps d'exécution de 35 à 39 heures pour le programme qui utilise

surtout des boucles « for », tandis que le programme optimisé finit l'exécution après environ 55 minutes. Il faut faire attention à ne pas trop diminuer le pas d'intégration, car l'optimisation du programme permet désormais de calculer des quantités de données si élevées que l'ordinateur n'a plus assez de mémoire vive pour les stocker, ce qui provoque l'arrêt du processus.

Simulation de la fusée Mes expérimentations ont montré qu'il faut un pas d'intégration d'environ 100 s pour simuler une orbite de satellite stable autour de la Terre, en tenant compte des effets perturbateurs des autres planètes. Comme les positions planétaires sont calculées avec un pas d'intégration de $1000s$, nous devons trouver un moyen efficace d'interpoler ces positions pour pouvoir calculer l'accélération agissante. J'ai d'abord pensé à utiliser la solution au problème de Kepler. Mais cette méthode présente deux défauts : le premier est que les positions des corps célestes sont données par rapport au barycentre et non pas par rapport au Soleil. Au contraire, le problème de Kepler, qui est une solution au problème à deux corps relatif, donne toujours la position par rapport au corps principal. Il est impossible de convertir l'un de ces référentiels à l'autre sans connaître le mouvement du Soleil dans l'intervalle. Même si ce mouvement est probablement négligeable, cette méthode présente un autre inconvénient : le temps d'exécution. L'interpolation est une tâche idéale pour la vectorisation avec NumPy, car les ensembles de points à interpoler sont indépendants les uns des autres. Autrement dit, il n'est pas nécessaire de calculer séparément les points 1, 11, etc., à partir des points 0, 10, etc. Chaque point de la forme $10n + 1$ peut être calculé simultanément, ce qui rend le processus très efficace. À mon avis, créer une version vectorisée de la fonction résolvant le problème de Kepler aurait été très complexe. Comme il est faisable d'écrire une telle fonction pour calculer les accélérations de nombreux points en parallèle, la méthode de Runge-Kutta s'est imposée pour effectuer cette interpolation.
Un pas d'intégration de $100s$ en combinaison avec une longue durée d'intégration peut conduire à un problème d'utilisation excessive de la mémoire vive et à l'arrêt du programme.

2.4 Problème de Kepler [27]

La description d'une orbite en fonction de l'anomalie vraie ν est triviale. Même si cela est très pratique, dans la plupart des cas, nous voulons décrire une orbite en fonction du temps au lieu de l'anomalie vraie. Pour y parvenir, on pourrait, pour chaque type de tronçon de conique, établir une équation décrivant la relation entre le temps et l'anomalie excentrique, calculable à partir de l'anomalie vraie. Ensuite, on pourrait utiliser une méthode par essais et erreurs pour estimer l'anomalie vraie, en ajustant progressivement jusqu'à se rapprocher du temps donné. Cependant, selon le livre « Fundamentals of Astrodynamics », cette approche ne garantit ni des résultats précis ni une convergence fiable pour des trajectoires proches de paraboles. C'est pourquoi une autre méthode est développée, dépendent d'une nouvelle variable x, qui se laisse appliquer pour toutes les coniques. Ce changement de variable s'appelle « transformation de

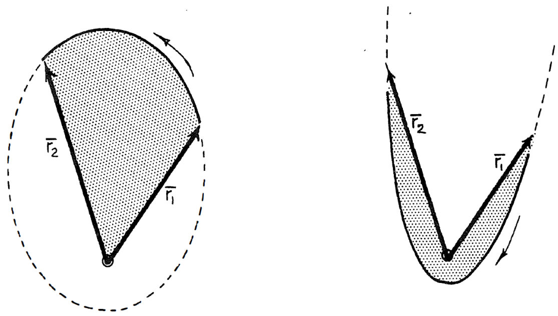


FIGURE 3 – Chemin longue et courte (Tiré de [29])

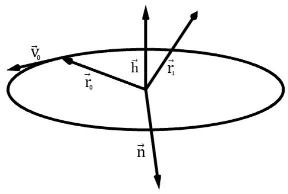
Sundman ». Compte tenu du fait que cette méthode est indépendante du reste de mon travail, j'ai choisi de ne pas développer ce sujet ici. Le lecteur intéressé trouvera la dérivation d'une telle méthode dans le chapitre 4 du livre « Fundamentals of Astrodynamics ». Le résultat est une fonction transcendantale et dérivable liant la variable x et le temps, ainsi que la position et la vitesse. Une fois que x est déterminé avec la méthode de Newton-Raphson, la nouvelle position et la nouvelle vitesse peuvent être obtenues. La mise en œuvre se trouve dans l'annexe A.1. La comparaison de cette solution à deux corps avec ma simulation se trouve dans l'annexe B.1

2.5 Problème de Gauss [28]

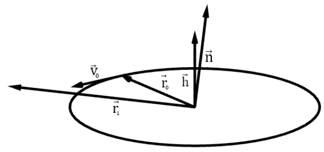
Le problème de Gauss, souvent appelé problème de Lambert, permet de déterminer une orbite lorsque deux positions, le temps de vol entre ces deux positions et la direction du mouvement sont connus. La direction du mouvement est importante, car il existe toujours deux solutions (voir l'image 3) : l'une avec une variation de l'anomalie vraie $\Delta\nu$ inférieure à π et l'autre avec une variation angulaire supérieure à π. Il existe des cas où la méthode présentée dans le livre n'arrive pas à trouver de solution (par exemple, quand les deux vecteurs sont colinéaires et le plan du transfert n'est pas défini). Dans ces cas, np.nan est renvoyé. Ces valeurs sont ignorées par le reste du programme. Il faut noter que la trajectoire courte et la trajectoire longue sont indépendantes l'une de l'autre. Pour les comparer, il faut donc toujours les calculer séparément.

2.6 Sélection de l'orbite de transfert

Au début d'une approximation par tronçons de conique, il faut sélectionner, l'orbite de transfert héliocentrique [30]. Grâce à la simulation des orbites des planètes, nous pouvons exprimer chaque position et vitesse de planète comme une fonction du temps. Si le temps de départ t_0 et le temps d'arrivée t_1 sont donnés, on connaît les valeurs $\vec{r}_0 \cong \vec{r}_{planète,\ 0}(t_0)$, $\vec{r}_1 \cong \vec{r}_{planète,\ 1}(t_1)$ et $\Delta t = t_1 - t_0$ aussi. Ce qui nous permet de calculer une première trajectoire seulement sous l'influence du Soleil. Cette première approximation est raisonnable, car la sphère



(a) Cas où $\angle(\vec{h},\ \vec{n}) > \frac{\pi}{2}$



(b) Cas où $\angle(\vec{h},\ \vec{n}) < \frac{\pi}{2}$

FIGURE 4 – Représentation schématique des deux cas possibles

d'influence est très petite par rapport au reste du transfert [30]. La seule chose qui nous manque pour utiliser la solution au problème de Gauss est donc la direction du mouvement.

2.6.1 Déterminer la direction du mouvement

Normalement, pour déterminer laquelle est énergétiquement meilleure, on devrait évaluer les deux directions de mouvement séparément [31]. Étant donné que notre cible est limitée aux planètes de notre système solaire qui orbitent approximativement toutes dans le même plan et dans le même sens, le moment cinétique $\vec{h}$ de la trajectoire à évaluer doit donc lui ressembler. Cela devient évident lorsque l'on imagine vouloir quitter la Terre : soit on veut accélérer le moins possible en utilisant la vitesse de la planète de manière optimale, soit on veut ralentir le moins possible ; dans ce dernier cas, il reste toujours une partie de la vitesse de la Terre [32].

Pour déterminer s'il faut prendre la trajectoire « courte » avec un changement dans l'anomalie vraie $\Delta\nu < \pi$ ou celle avec $\Delta\nu > \pi$ (voir la figure 3), nous calculons le moment cinétique $\vec{h}$ de la planète de départ $\vec{h}_p = \vec{r}_{planète,0} \times \vec{v}_{planète,0}$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{r}_{planète,0} \times \vec{r}_{planète,1}$. Ce dernier est colinéaire au moment cinétique de la trajectoire « courte » entre $\vec{r}_{planète,0}$ et $\vec{r}_{planète,1}$. Par conséquent, si l'angle entre $\vec{h}$ et $\vec{n}$ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$, comme le montre le graphique 4a, le changement dans l'anomalie vraie $\Delta\nu$ doit être plus que π ; et si l'inverse est le cas le montre le graphique 4b, le changement dans l'anomalie vraie $\Delta\nu$ doit être moins que π. Cela est implémenté dans le fichier swingby.py :

```
n = np.cross(r1v, r2v)
h = np.cross(r1v, v1v)
dv = unsigned_angle(r1v, r2v)
if unsigned_angle(n, h) > np.pi/2:
    DM = -1
    dv = 2*np.pi - dv
else:
    DM = 1
```

Où DM signifie "Direction of Motion" ou direction de motion.

2.6.2 La notion de "Porkchop plot"

Une fois que la direction de la motion est déterminée, nous disposons de toutes les informations nécessaires pour établir de grands tableaux permettant de comparer les différentes dates de départ et d'arrivée. La visualisation d'un tel tableau s'appelle « porkchop plot ». Elle est extrêmement précieuse pour le choix des trajectoires, car elle permet de détecter directement les dates d'arrivée et de départ associées à un changement de vitesse optimale [32]. Mais les « porkchop plots » ont encore une autre utilité : en comparant les diagrammes pour deux transferts, il est possible d'identifier des trajectoires favorables pour des manœuvres d'assistance gravitationnelles [33]. Un exemple historique est l'utilisation d'environ 10 000 de ces diagrammes pour la planification des trajectoires de Voyager I et II [34]. Sans visualiser ces données, j'utiliserai ce concept pour automatiser la sélection de l'orbite.

Les deux tableaux calculés dans le programme swingby.py sont appelés pchp1 et pchp2. L'axe zéro du tableau représente les dates de départ et l'axe un des dates d'arrivée. Ils sont générés à l'aide de deux boucles « for » imbriquées, chacune parcourant une plage de dates de départ et d'arrivée. Il est évident qu'il est physiquement impossible de fixer les dates d'arrivée à un niveau inférieur à la date de départ plus un temps de transfert minimal. La limite supérieure de la première boucle peut être définie arbitrairement, tandis que celle de la seconde est donnée par le temps de transfert maximal que nous avons choisi. Cette définition permet d'éviter des tableaux absurdement larges qui ne sont qu'à moitié remplis, mais rend plus difficile la déduction de la date à partir de l'index.

2.6.3 Limites physiques dans le choix d'une orbite de transfert héliocentrique[35]

Pour qu'un transfert entièrement balistique soit possible, deux conditions doivent être remplies concernant la planète d'assistance gravitationnelle : La première, est que l'énergie de la fusée par rapport à cette planète doit être conservée. Par conséquent, les deux excès de vitesse hyperbolique doivent avoir la même magnitude. Il est important de noter que même si l'énergie par rapport à la planète est invariable, celle par rapport au Soleil change (ce qui est la raison pour laquelle on fait des manœuvres d'assistance gravitationnelles). Elle augmente lorsque la fusée passe derrière la planète et diminue lorsque la fusée passe derrière la planète (voir l'image 5). La seconde condition, est que la distance minimale à la planète doit être assez grande pour éviter tout impact. La trajectoire étant hyperbolique, nous pouvons appliquer l'équation d'énergie de la manière suivante :

$$E = \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{2\ r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$$
$$\Rightarrow h^2 = r_p^2 v_\infty^2 + 2\mu r_p \tag{15}$$

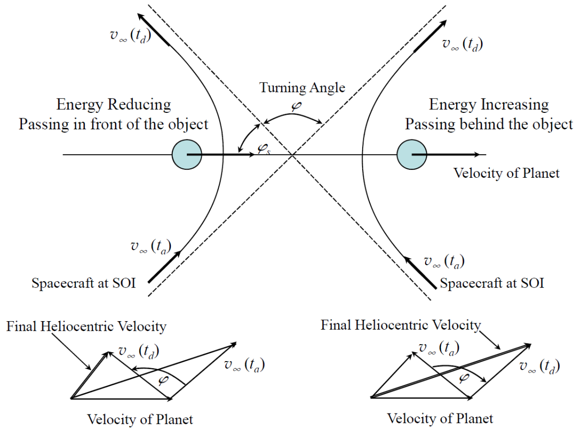


FIGURE 5 – Une visualisation de deux assistances gravitationelles (Tiré de : [36])

Nous avons vu que l'excentricité d'une orbite à deux corps est donnée par $e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$. En insérant les expressions ci-dessus dans cette équation, on obtient :

$$e = \sqrt{1 + \frac{v_\infty^2(r_p^2 v_\infty^2 + 2\mu r_p)}{\mu^2}} = \sqrt{\left(\frac{v_\infty^2 r_p}{\mu}\right)^2 + 2\frac{v_\infty^2 r_p}{\mu} + 1} = \frac{v_\infty^2 r_p}{\mu} + 1 \tag{16}$$

Selon [35] l'excentricité est liée à l'angle de rotation supplémentaire de manière $\cos\varphi_s = \frac{1}{e}$. En examinant l'image 5, on constate que celui-ci est lié à l'angle de tournement $\varphi = \pi - 2\varphi_s$. Cela nous permet d'écrire :

$$\cos\varphi_s = \frac{1}{e} = \frac{1}{\frac{v_\infty^2 r_p}{\mu} + 1}$$

$$\Rightarrow r_p = \frac{\mu}{|\vec{v}_\infty|^2}\left(\frac{1}{\cos\varphi_s} - 1\right) = \frac{\mu}{|\vec{v}_\infty|^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi-\varphi}{2}} - 1\right) \tag{17}$$

Si la distance de périapside de cette trajectoire d'assistance gravitationnelle est inférieure à des distances dangereuses, il ne faut pas la sélectionner. Le tableau indiquant ce choix, se trouve dans l'annexe B.2.

2.7 Idées pour une approximation par tronçons de coniques complète

Lorsque le contour de la trajectoire est déterminé, les hyperboles à l'intérieur des sphères d'influence doivent être calculées. Je n'ai pas trouvé d'informations concrètes à ce sujet dans les livres que j'ai consultés. J'ai donc essayé de développer moi-même une telle méthode à l'aide des outils acquis. L'idée fondamentale de l'algorithme complétant l'approximation par tronçons de coniques est de définir l'intérieur de chaque sphère d'influence de manière que la vitesse $\vec{v}$ pour $r \to \infty$ soit exactement l'excès de vitesse hyperbolique $\vec{v}_\infty$. Une fois que cette orbite est déterminée, nous pouvons calculer les vecteurs indiquant les points de sortie et d'entrée sur cette sphère d'influence. Grâce à ces nouveaux points de départ et au temps que la fusée passe sur cette trajectoire à l'intérieur de la SOI, nous pouvons réévaluer la solution au problème de Gauss, comme le montre la suite, en modifiant légèrement l'excès de vitesse hyperbolique requis. Dans une nouvelle itération, cela est pris en considération, enchainant des nouveaux points sur la SOI. Étant donné que ce changement de position est très faible par rapport à la distance de la planète au soleil, les changements effectués deviennent de plus en plus petits et l'algorithme converge. Quand l'ensemble des vecteurs indiquant les positions sur la sphère d'influence bouge en totale moins qu'une valeur c, dans mon programme $c = 0.5m$, nous pouvons afficher les résultats et terminer le programme.

2.7.1 Les orbites dans les sphères d'influences

Nous allons ensuite élaborer un concept qui nous permettra d'utiliser le système périfocal pour trouver les points de sortie et d'entrée d'une sphère d'influence. Pour cela, nous devons déterminer les constantes suivantes : le paramètre p, l'excentricité e, l'anomalie vraie à la frontière de la sphère d'influence ν_{SOI} et les deux vecteurs unitaires $\vec{P}$ et $\vec{Q}$.

Les orbites hyperboliques Le demi latus rectum p peut être déterminé en se rappelant que $p = h^2/\mu$ et en appliquant l'équation 15. On obtient :

$$p = \frac{r_p^2 v_\infty^2}{\mu} + 2r_p$$

Pour la trajectoire d'arrivée et de départ, on peut librement choisir r_p. Pour la trajectoire de manœuvre d'assistance gravitationnelle, celle-ci est donnée par l'équation 17.
Pour ν_{SOI}, nous pouvons résoudre l'équation 4 selon ν :

$$\nu_{SOI} = \arccos \frac{\frac{p}{r_{SOI}} - 1}{e} \tag{18}$$

Il faut faire attention : cette équation ne s'applique qu'aux points sortant de la sphère d'influence. Pour ceux qui entrent, $\nu_{SOI} = 2\pi - \arccos \frac{\frac{p}{r_{SOI}} - 1}{e}$.

L'orbite d'arrivée et de départ L'excentricité des orbites peut être déterminée à l'aide de l'équation 16. Mais pour ces orbites, les vecteurs $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ ne sont pas clairement définis : il existe en effet un nombre infini de plans qui donnent la même vitesse à l'infini, comme le montre l'image 6. Nous avons donc une certaine liberté pour choisir le vecteur normal $\hat{N}$ au plan de la trajectoire, mais il doit naturellement être perpendiculaire à l'excès de vitesse hyperbolique $\vec{v}_\infty$. (voir la figure 6) Puisque le lancement d'une fusée est le plus efficace à l'équateur [38], nous voulons choisir le vecteur $\hat{N}$ de manière qu'il soit le plus proche que possible du vecteur unitaire vitesse angulaire de la Terre $\vec{\omega}_{Terre}$. Je l'ai réalisé en projetant $\vec{\omega}_{Terre}$ sur le plan normal à $\vec{v}_\infty$ et en le faisant un vecteur unitaire en divisant par sa longueur. Les mêmes considérations ont été faites pour les cas où l'on veut descendre à la surface de la planète cible, et en raison de la

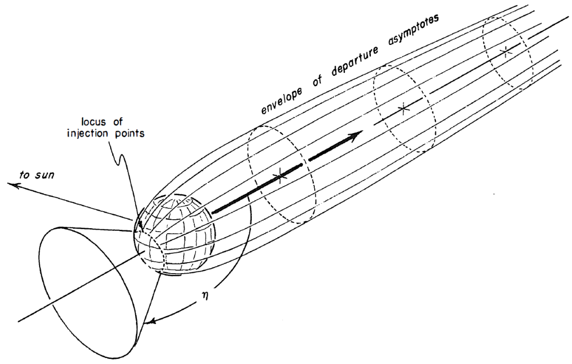


FIGURE 6 – Visualisation de l'ensemble des trajectoires de départ possibles. Tiré de [37]

simplicité.

La direction nord d'une planète est définie comme la direction du pôle de rotation « qui se trouve sur le côté nord du plan invariable du système solaire » [39]. La source [40], utilisée pour la Terre et [41], utilisée pour les autres planètes, donnent cette direction dans le référentiel ICRF en utilisant l'ascension droite et la déclinaison. Pour convertir cette formulation en coordonnées cartésiennes, il suffit d'appliquer les considérations trigonométriques trouvées dans [42] pour obtenir :

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{19}$$

Il faut faire attention : selon la définition de « nord », Vénus et Uranus tournent dans le sens négatif. Pour ces deux planètes, nous devons donc inverser la direction du vecteur obtenu.

Il faut maintenant trouver une expression pour $\hat{P}$ et $\hat{Q}$. Pour cela, je reprends l'équation 13. Comme p, e et μ sont déjà fixés, nous devons maintenant trouver ν_∞ pour pouvoir insérer $\vec{v}_\infty$ dans cette équation. Nous pouvons faire cela en prenant la limite de l'équation 18 de la manière suivante :

$$\nu_\infty = \arccos\left[\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\frac{p}{r}-1}{e}\right)\right] = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

En effet, comme on peut l'imaginer en regardant l'image 1, on a $\hat{Q} = \hat{N} \times \hat{P}$. La seule variable inconnue dans l'équation décrivant le système de coordonnées périfocal à déterminer est donc $\hat{P}$.

En séparant cette équation vectorielle en un système d'équations :

$$\sqrt{\frac{p}{\mu}}v_x = -\sin\nu P_x + (e+\cos\nu)(N_y P_z - N_z P_y)$$
$$\sqrt{\frac{p}{\mu}}v_y = -\sin\nu P_y + (e+\cos\nu)(N_z P_x - N_x P_z)$$
$$\sqrt{\frac{p}{\mu}}v_z = -\sin\nu P_z + (e+\cos\nu)(N_x P_y - N_y P_x)$$

À l'aide de Wolfram Mathematica [43], on peut le résoudre en fonction des composantes de $\hat{P}$, ce qui conduit à :

$$P_x = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{\begin{array}{c}(e^2(-v_x)\csc\nu - N_x N_y v_y \csc\nu(e+\cos v)^2 - N_x N_z v_z \csc\nu(e+\cos\nu)^2 + N_y^2 v_x \csc\nu(e+ \\ \cos\nu)^2 - N_y v_z(e+\cos\nu) + N_z^2 v_x \csc\nu(e+\cos\nu)^2 + N_z v_y(e+\cos\nu) - 2ev_x\cot\nu - v_x\csc\nu)\end{array}}{e^2+2e\cos\nu+1}$$

$$P_y = -\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{\begin{array}{c}(2N_x N_y v_x \csc\nu(e+\cos\nu)^2 - 2N_x v_z(e+\cos\nu) + 2N_y^2 v_y \csc\nu(e+\cos\nu)^2 + \\ 2N_y N_z v_z \csc\nu(e+\cos\nu)^2 + 2N_z v_z(e+\cos\nu) + v_y\csc\nu - v_y\cos 2\nu\csc\nu)\end{array}}{2\left(e^2+2e\cos\nu+1\right)}$$

$$P_z = -\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{\begin{array}{c}\sin\nu(N_x N_z v_x(e\csc\nu+\cot\nu)^2 + N_x v_y\csc\nu(e+\cos\nu) + \\ N_y N_z v_y(e\csc\nu+\cot\nu)^2 - N_y v_x\csc\nu(e+\cos\nu) + N_z^2 v_z(e\csc\nu+\cot\nu)^2 + v_z)\end{array}}{e^2+2e\cos\nu+1}$$

L'orbite d'assistance gravitationelle À la différence des orbites précédentes, dans la trajectoire située dans la sphère d'influence de la planète où se déroule l'assistance gravitationnelle, les vecteurs $\hat{P}$, $\hat{Q}$ et $\hat{N}$ sont clairement déterminés par les deux excès de vitesse hyperbolique. $\hat{N}$ est défini par le produit vectoriel des deux excès de vitesse hyperbolique :

$$\vec{N} = \frac{\vec{v}_\infty^{\,+} \times \vec{v}_\infty^{\,-}}{|\vec{v}_\infty^{\,+} \times \vec{v}_\infty^{\,-}|}$$

En examinant l'image 1, nous constatons que les vecteurs unitaires $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ peuvent s'écrire :

$$\vec{P} = \frac{\vec{v}_\infty^{\,+} - \vec{v}_\infty^{\,-}}{|\vec{v}_\infty^{\,+} - \vec{v}_\infty^{\,-}|}$$
$$\vec{Q} = \frac{\vec{v}_\infty^{\,+} + \vec{v}_\infty^{\,-}}{|\vec{v}_\infty^{\,+} + \vec{v}_\infty^{\,-}|}$$

Mais cela peut conduire à des erreurs : même si les orbites de transfert héliocentrique ont été choisies de manière à minimiser la différence de taille entre les deux excès de vitesse hyperboliques, une déviation entre les deux valeurs persiste tout de même. Il est donc préférable de diviser les vecteurs $\vec{v}_\infty^{\,+}$ et $\vec{v}_\infty^{\,-}$ par leur taille avant d'utiliser l'équation ci-dessus.
L'excentricité e peut directement être déterminée grâce à l'angle de tournement, comme décrit dans l'équation 17.

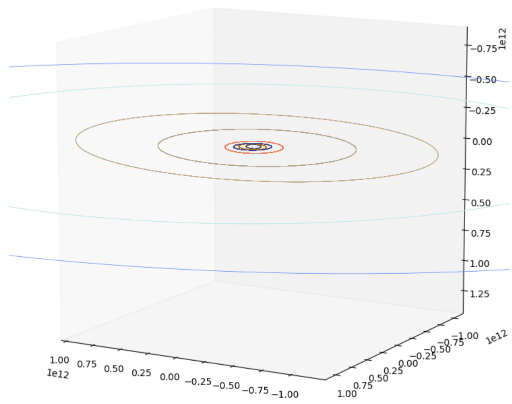


Figure 7 – Les orbites des planètes visualisées avec ma simulation

3 Résultats

3.1 Simulation d'orbites planétaires

Étant donné que les valeurs initiales de la simulation sont tirées du système Horizons, il est pertinent de comparer les valeurs obtenues à l'aide de ma simulation avec les valeurs de Horizons. Pour automatiser cette comparaison, le programme test2.py a été écrit. Ce programme compare la solution de ma simulation, la solution au problème à deux corps et la valeur de référence de Horizons. Le programme distingue entre la déviance dans la longueur des vecteurs et la distance entre les deux vecteurs de position calculés. Comme ces valeurs ne sont généralement pas intuitives pour nous, la valeur obtenue est normalisée par la distance au soleil et indiquée en pourcentage. Vous trouverez le tableau complet dans l'annexe B.1. En résumé, les écarts de ma simulation par rapport à Horizons se trouvent tous sous 1 % de la distance au soleil. La figure 7 montre une visualisation des orbites calculées.

3.2 Simulation de la fusée

Le test de la simulation avec différents pas d'intégration a montré qu'il est possible d'obtenir une orbite terrestre stable avec un pas d'intégration de 100s. L'image 8 montre une découpe d'une visualisation d'une telle orbite.

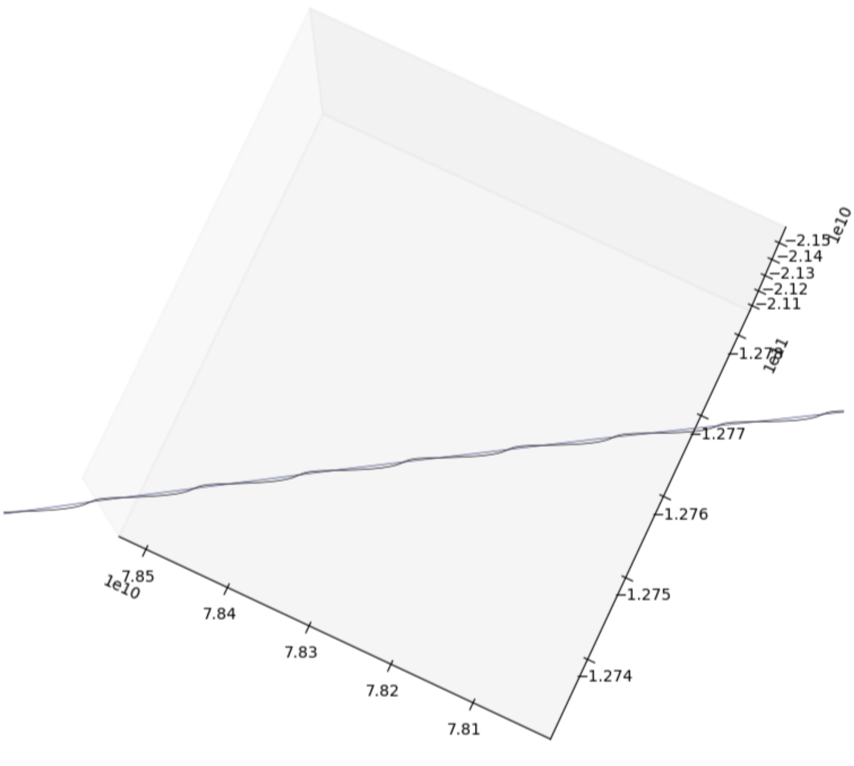


Figure 8 – Orbite stable autour de la Terre

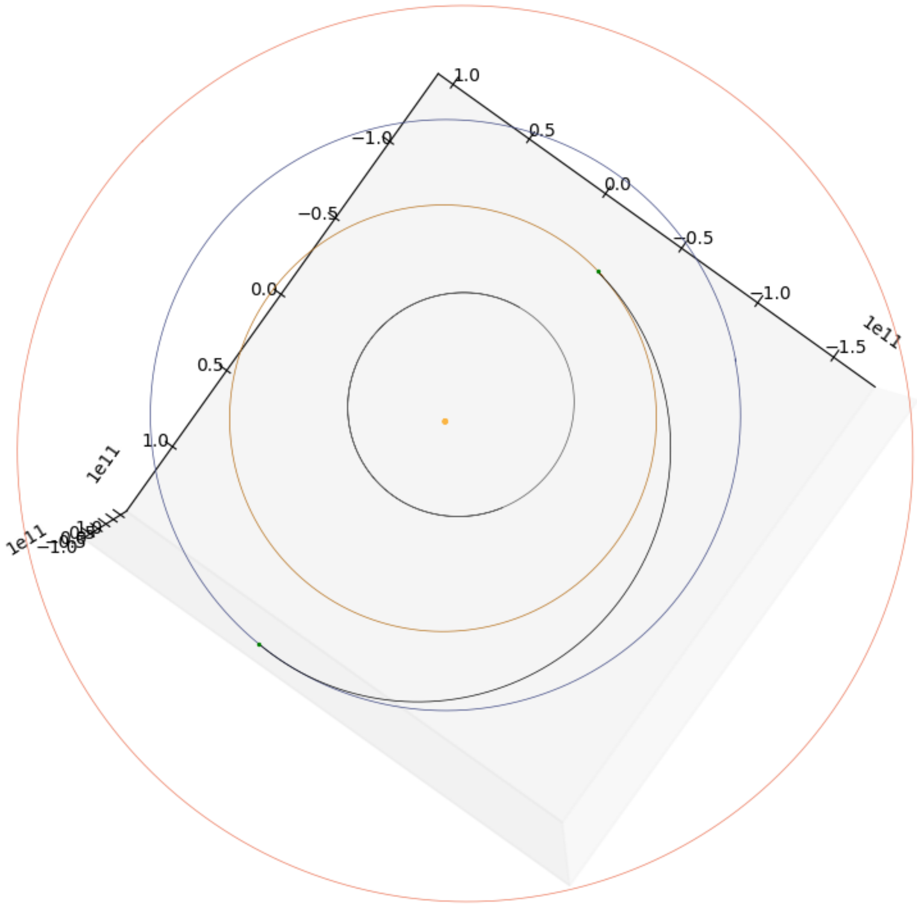


FIGURE 9 – Trajectoire vers Vénus

3.3 Trajectoire simple

Je vais présenter l'exemple d'une trajectoire à Vénus, mais il est possible de choisir n'importe quelle planète jusqu'à Jupiter. L'image 9 représente une simulation utilisant la solution indiquée par le programme simpletraj.py. Ce dernier indique également le vecteur d'arrivée dans le référentiel de la planète ciblée. Après la fin de la simulation, ce vecteur d'arrivée, ajouté à la position de la planète, est comparé aux points calculés. La magnitude du point le plus proche du point d'arrivée ciblé est fournie. Pour cette trajectoire, elle est de $171'395km$. Pour une orbite d'attente à une altitude de $185km$ le Δv nécessaire pour aller dans l'orbite de transfert héliocentrique est de $3.598km/s$. La fusée quittera la Terre en décembre 2040 de la terre et arrivera à Vénus en mai 2041, après avoir passé 142 jours sur cette trajectoire.

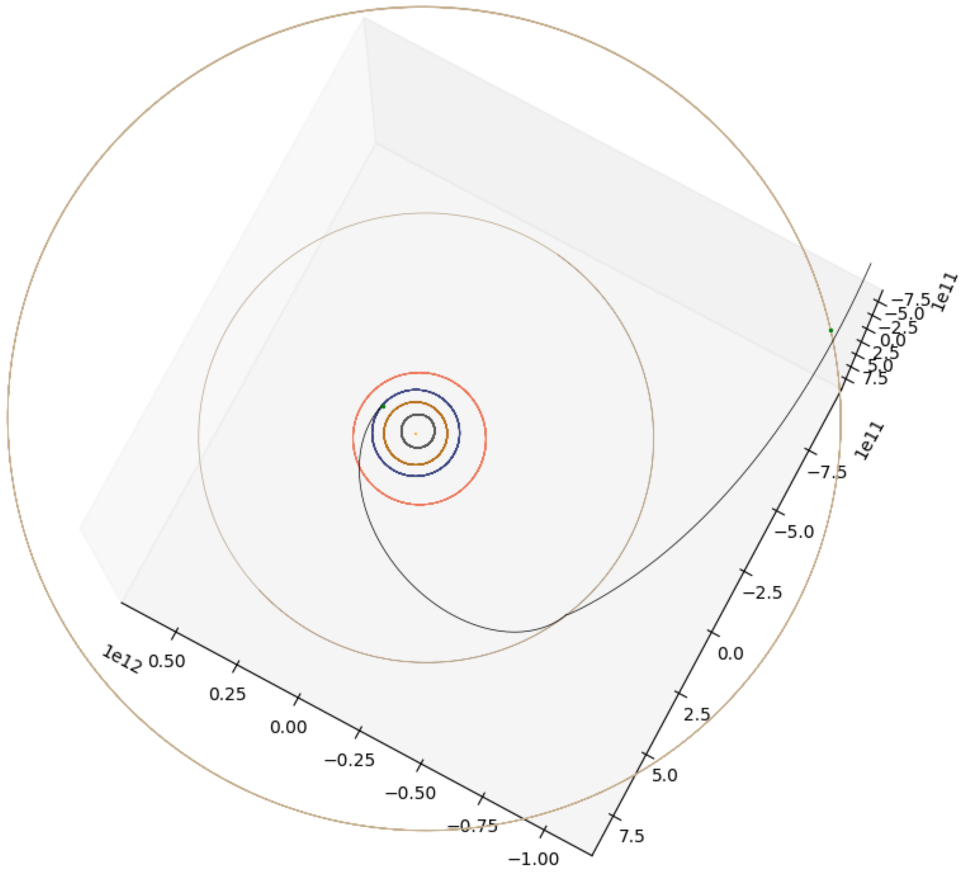


FIGURE 10 – Trajectoire d'assistance gravitationnelle vers Saturne

3.4 Assistance Gravitationnelle

J'ai testé le programme qui détermine des trajectoires d'assistance gravitationnelle, à l'instar de Saturn. Un Δv de $7.434km/s$ est nécessaire pour sortir de l'orbite d'attente à une altitude de $185km$. Après la convergence de l'algorithme, la différence dans la magnitude de l'excès de vitesse hyperbolique à la planète d'assistance gravitationnelle est passée de moins de $1m/s$ quand le temps d'arrivée et de départ à Jupiter étaient considérés comme identique à $294.5m/s$. La distance la plus proche au périapse calculée est de $194,432,085km$, et la plus proche au centre de la planète est de $194,154,748km$. Le temps passé sur la trajectoire calculée est de 6.5 ans. L'image 10 est une représentation graphique de la simulation de l'orbite décrite par le programme swingby.py.

4 Interprétation

4.1 Simulation d'orbites planétaires

Le tableau se trouvant dans l'annexe B.1 démontre une proximité avec les valeurs de référence. Je peux donc affirmer avec confiance que les valeurs obtenues sont fiables. Les petites déviances qui existent peuvent être expliquées par des erreurs d'arrondi de l'ordinateur ou par le fait que la méthode de Gauss-Jackson est seulement du 8ième ordre, ce qui contribue à l'erreur de troncature [20]. Évidemment, le système de la NASA prend en considération la relativité générale pour ses simulations [44], mon approximation newtonienne pourrait donc être une autre source d'erreur.

4.2 Simulation de la fusée

Selon la littérature consultée [45], une augmentation de l'ordre de 8 à 12 peut améliorer la précision jusqu'à un facteur dix. Un tel changement a été effectué. Selon la même source, une diminution du pas d'intégration à $25s$ ou $40s$ (il faut obligatoirement choisir un diviseur de $1000s$ pour que l'interpolation fonctionne) est encore plus importante pour la précision qu'un changement d'ordre. Cela conduit toutefois non seulement à des temps d'exécution beaucoup plus longs, mais aussi à une utilisation importante de la mémoire vive limitée, ce qui est la raison pour laquelle j'ai renoncé à cette solution. Sur la base de [46], je suis de l'avis qu'un pas d'intégration de $100s$ suffit largement pour la simulation des trajectoires interplanétaires : la raison pour laquelle le pas d'intégration devrait être diminué est que la direction de l'accélération change très rapidement dans une orbite planétaire. La simulation doit donc prendre davantage de points en considération pour représenter correctement ce phénomène. Toutefois, étant donné que la fusée passe la plupart du temps presque uniquement sous l'influence du Soleil, dont la distance est très grande, et que la simulation des planètes était très réussie avec un pas d'intégration de $1000s$, les imprécisions résultant de la courte durée d'influence d'une planète devraient être tolérables.

4.3 Trajectoire simple

Je ne peux pas faire ici de comparaison directe, car cette trajectoire ne représente qu'une des nombreuses possibilités d'atteindre Vénus. Cependant, en examinant le graphique 9, nous pouvons constater que cette trajectoire est relativement proche d'un transfert de Hohmann, un concept souvent discuté dans la littérature. En utilisant les données et la procédure décrites dans [47], on peut montrer qu'un Δv de $3.52km/s$ est nécessaire pour initier le transfert de Hohmann, si l'on part d'une orbite d'attente de rayon $6563.137km$ (ce qui correspond à une altitude de $185km$). Cela correspond à la valeur obtenue. Un transfert de Hohmann, comme décrit dans [47], prend environ quatre jours de plus que la trajectoire trouvée grâce à l'aide de mon programme. Selon une comparaison de [48] entre une approximation par tronçons de coniques et un transfert à n corps modélisant une trajectoire jusqu'à Mars, une déviation de $200,000km$ est possible et normalement pas significative. Avec une déviation de $171'395km$ nous sommes en deçà de cette frontière, mais évidemment une comparaison directe avec un transfert jusqu'à Mars n'est possible que qualitativement.

4.4 Assistance Gravitationnelle

Je vais encore une fois comparer la trajectoire calculée à un transfert de Hohmann. La vitesse nécessaire pour initier un transfert de Hohmann est de $7.273km/s$ [47]. Nous sommes donc très proches, voire un peu moins bons que le transfert de Hohmann. Cela peut étonner, car la manœuvre d'assistance gravitationnelle devrait être énergétiquement beaucoup mieux. Cela est probablement dû au fait que la trajectoire doit aussi prendre en considération la position de Jupiter. Je suppose qu'il n'y a pas assez d'alignements entre les trois planètes dans la plage de recherche pour des départs de la Terre pour choisir un transfert entre la Terre et Jupiter optimal.

Comme nous l'avons constaté précédemment, nous ratons la planète d'une distance assez importante. La comparaison de la distance minimale à la planète, $r_p = 1.941547 \cdot 10^{11}$, avec le rayon de la sphère d'influence à l'arrivée, $r_{SOI} = 5.2597 \cdot 10^{10}$, souligne assez bien ce fait. Je pense que cela est principalement dû au fait que les deux excès de vitesse hyperbolique ne sont plus de la même taille après avoir pris en considération le mouvement de Jupiter pendant que la fusée est dans son influence. Cela expliquerait aussi pourquoi on voit sur l'image 10 que la simulation ne se termine pas à la hauteur de Saturne : en allant plus vite que prévu, la fusée dépasse la planète Saturne avant la fin de la simulation. En théorie, si l'on connaissait la durée moyenne pendant laquelle la fusée se trouve dans la sphère d'influence de Jupiter, on pourrait tenir compte de ce facteur pour choisir la trajectoire, afin de minimiser l'effet de la différence de taille des excès de vitesse hyperboliques par rapport à l'algorithme qui détermine l'intérieur des sphères d'influence. Il aurait été intéressant de tester les effets d'un tel changement.

5 Résumé

Différentes méthodes de calcul d'orbites ont été comparées. Parmi celles-ci figuraient les méthodes d'intégration numérique d'Euler, de Runge-Kutta d'ordre quatre et l'intégrateur de Gauss-Jackson. Ce dernier a été utilisé pour simuler les orbites des planètes pour les 165 prochaines années, et ce, avec d'excellents résultats. La comparaison de ces résultats avec la solution du problème de Kepler a été effectuée.

En utilisant la solution du problème de Gauss, souvent appelé problème de Lambert, il est

possible de calculer des tableaux avec l'excès de vitesse hyperbolique. Ils peuvent être utilisés pour trouver une date de départ et d'arrivée pour une trajectoire simple ou pour indiquer une trajectoire utilisant l'assistance gravitationnelle. En utilisant ces dates et le système de coordonnées périfocal, un algorithme permettant d'obtenir une approximation par tronçons de coniques complète a été inventé. Le résultat peut être comparé à une simulation à N-corps.
Dans ce travail, les masses de toutes les planètes ainsi que leurs satellites naturels sont considérées comme concentrées en un seul point. Toute accélération perturbatrice non liée à la gravitation newtonienne a été négligée.

Table des figures

Liste des tableaux

Références

[1] J. D. Giorgini et J. S. S. D. Group. « NASA/JPL Horizons On-Line Ephemeris System. » (2022), adresse : https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/.

[2] « NumPy, Powerful N-dimensional arrays. » (), adresse : https://numpy.org/.

[3] J. D. Hunter, « Matplotlib : A 2D graphics environment, » *Computing in Science & Engineering*, t. 9, nº 3, p. 90-95, 2007. doi : 10.1109/MCSE.2007.55.

[4] T. M. D. Team, *Matplotlib : Visualization with Python*, version v3.8.4, avr. 2024. doi : 10.5281/zenodo.10916799. adresse : https://doi.org/10.5281/zenodo.10916799.

[5] C. da Costa-Luis, *tqdm : A fast, Extensible Progress Bar for Python and CLI*, version v4.66.4, mai 2024. doi : 10.5281/zenodo.11107065. adresse : https://doi.org/10.5281/zenodo.11107065.

[6] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, p. 891-921, isbn : 9780486497044.

[7] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 7.4, isbn : 9780486497044.

[8] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 1.3.2, isbn : 9780486497044.

[9] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 1.4.1, isbn : 9780486497044.

[10] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, p. 14-15, isbn : 9780486497044.

[11] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 1.6, isbn : 9780486497044.

[12] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, p. 16-17, isbn : 9780486497044.

[13] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 1.5.3, ISBN : 9780486497044.

[14] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, p. 21, ISBN : 9780486497044.

[15] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 2.5.1, ISBN : 9780486497044.

[16] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 2.2.4, p. 46, ISBN : 9780486497044.

[17] R. Bate, D. Mueller et J. White, *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, 1971, chap. 1.8, p. 32, ISBN : 0-486-60061-0.

[18] D. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications : Fourth Edition* (Space Technology Library). Microcosm Press, 2013, chap. 12.2.1, p. 945-948, ISBN : 978-1881883180.

[19] « n-body problem. » (), adresse : https://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem#n-body_problem.

[20] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 9.5.2, ISBN : 9780486497044.

[21] W. Durandi, B. D. Wong, M. Kriener, H. Künsch, A. Vogelsanger et J. Waldvogel, « Mathematik, » in Formeln, Tabellen, Begriffe, 2019, chap. 7.8, p. 142, ISBN : 978-3-280-04193-2.

[22] M. Zeltkevic. « Runge-Kutta Methods. » (15.04.1998), adresse : https://web.mit.edu/10.001/Web/Course_Notes/Differential_Equations_Notes/node5.html.

[23] I. C. London. « Coupled ODEs integration. » (2022), adresse : https://primer-computational-mathematics.github.io/book/c_mathematics/numerical_methods/5_Runge_Kutta_method.html#coupled-odes-integration.

[24] M. M. Berry et L. M. Healy, « Implementation of Gauss-Jackson Integration for Orbit Propagation, » *The Journal of the Astronautical Sciences*, t. 52, nº 3, p. 331-357, 2004. DOI : https://doi.org/10.1007/BF03546367.

[25] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 9.6.5, p. 352, ISBN : 9780486497044.

[26] M. M. Berry et L. M. Healy. « Implementation of Gauss-Jackson Integration for Orbit Propagation. » (2004), adresse : http://hdl.handle.net/1903/2202.

[27] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 4, isbn : 9780486497044.

[28] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 5, p. 191-194, isbn : 9780486497044.

[29] R. Bate, D. Mueller et J. White, *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, 1971, chap. 5.2, p. 229, isbn : 0-486-60061-0.

[30] D. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications : Fourth Edition* (Space Technology Library). Microcosm Press, 2013, chap. 12.2.2, p. 948, isbn : 978-1881883180.

[31] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 5.3, p. 201, isbn : 9780486497044.

[32] D. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications : Fourth Edition* (Space Technology Library). Microcosm Press, 2013, chap. 12.3, p. 955, isbn : 978-1881883180.

[33] D. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications : Fourth Edition* (Space Technology Library). Microcosm Press, 2013, chap. 12.4, p. 957-958, isbn : 978-1881883180.

[34] P. J. Westwick, *Into the Black : JPL and the American Space Program, 1976-2004*. Yale University Press, 2008, chap. 2, p. 21, isbn : 978-0-300-11075-3.

[35] D. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications : Fourth Edition* (Space Technology Library). Microcosm Press, 2013, chap. 12.4, p. 957-960, isbn : 978-1881883180.

[36] D. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications : Fourth Edition* (Space Technology Library). Microcosm Press, 2013, chap. 12.4, p. 959, isbn : 978-1881883180.

[37] R. Bate, D. Mueller et J. White, *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, 1971, chap. 8.3, p. 372, isbn : 0-486-60061-0.

[38] U. Walter, *Astronautics : The Physics of Space Flight : Third Edition*. Springer International Publishing, 2019, chap. 6.3, p. 145, isbn : 978-3-319-74372-1. doi : https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8.

[39] B. A. Archinal, M. A'Hearn et E. e. a. Bowell, « Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements : 2009, » *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, t. 109, p. 105, 2011. doi : https://doi.org/10.1007/s10569-010-9320-4.

[40] B. A. Archinal, M. A'Hearn et E. e. a. Bowell, « Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements : 2009, » *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, t. 109, p. 101-135, 2011. doi : https://doi.org/10.1007/s10569-010-9320-4.

[41] B. Archinal, C. Acton et M. e. a. A'Hearn, « Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements : 2015, » *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, t. 130, p. 22-130, 2018. doi : https://doi.org/10.1007/s10569-017-9805-5.

[42] H. Roth, « Astronomie, » in Formeln, Tabellen, Begriffe, 2019, chap. 1, p. 207, isbn : 978-3-280-04193-2.

[43] I. Wolfram Research, *Mathematica*, version 14.1, Utilisé pour résoudre le système d'équations avec la fonction "Solve[]"., 2024. adresse : https://www.wolfram.com/mathematica.

[44] J. D. Giorgini et J. S. S. D. Group. « NASA/JPL Horizons On-Line Ephemeris System. » (2022), adresse : https://ssd.jpl.nasa.gov/orbits_doc.html.

[45] M. M. Berry et L. M. Healy, « Implementation of Gauss-Jackson Integration for Orbit Propagation, » *The Journal of the Astronautical Sciences*, t. 52, nº 3, p. 353-356, 2004. doi : https://doi.org/10.1007/BF03546367.

[46] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 9.3, p. 332, isbn : 9780486497044.

[47] R. Bate, D. Mueller, J. White et W. Saylor, *Fundamentals of Astrodynamics : Second Edition* (Dover Books on Physics). Dover Publications, 2020, chap. 8.3, p. 303-308, isbn : 9780486497044.

[48] D. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications : Fourth Edition* (Space Technology Library). Microcosm Press, 2013, chap. 12.2.5, p. 954, isbn : 978-1881883180.

[49] NASA/JPL-Caltech. « Saturn and Moons Tethys, Enceladus, and Mimas. » (oct. 2024), adresse : https://science.nasa.gov/image-detail/pia01383-3/.

[50] A. Gleaves, R. Allen, A. Tupis et al., « A Survey of Mission Opportunities to Trans-Neptunian Objects - Part II, Orbital Capture, » in *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, Minneapolis, Minnesota, août 2012, p. 4. doi : https://doi.org/10.2514/6.2012-5066.

[51] D. R. Williams. « Jupiter Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html.

[52] D. R. Williams. « Saturnian Rings Fact Sheet. » (2022), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/satringfact.html.

[53] D. R. Williams. « Mercury Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html.

[54] U. Walter, *Astronautics : The Physics of Space Flight : Third Edition*. Springer International Publishing, 2019, chap. 10.1.2, p. 431, ISBN : 978-3-319-74372-1. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8.

[55] U. Walter, *Astronautics : The Physics of Space Flight : Third Edition*. Springer International Publishing, 2019, chap. 6.1.3, p. 129, ISBN : 978-3-319-74372-1. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8.

[56] U. Walter, *Astronautics : The Physics of Space Flight : Third Edition*. Springer International Publishing, 2019, chap. 6.1.2, p. 125, ISBN : 978-3-319-74372-1. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8.

[57] D. R. Williams. « Venus Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/venusfact.html.

[58] D. R. Williams. « Mars Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/marsfact.html.

[59] D. R. Williams. « Uranus Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/uranusfact.html.

[60] D. R. Williams. « Neptune Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/neptunefact.html.

[61] J. D. Giorgini et J. S. S. D. Group. « NASA/JPL Horizons On-Line Ephemeris System. » (2022), adresse : https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/.

[62] D. R. Williams. « Jupiter Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html.

[63] D. R. Williams. « Jovian Satellite Fact Sheet. » (2023), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/joviansatfact.html.

[64] D. R. Williams. « Saturnian Satellite Fact Sheet. » (2023), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/saturniansatfact.html.

[65] D. R. Williams. « Uranian Satellite Fact Sheet. » (2023), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/uraniansatfact.html.

[66] D. R. Williams. « Neptunian Satellite Fact Sheet. » (2024), adresse : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/neptuniansatfact.html.

Ce texte a été révisé linguistiquement à l'aide de l'intelligence artificielle. Le contenu n'a pas été modifié. Les outils utilisés sont DeepL Write, Chat GPT et Google Gemini. La plupart des termes techniques ont été traduits à l'aide du dictionnaire en ligne Tureng.
Une version numérique de ce document ainsi que le programme sont disponibles à l'adresse suivante : https://github.com/gabrielleonabegg/En-route-vers-les-Planetes

Annexe

A Le programme

A.1 kepler.py

```
from math import sqrt, factorial, pi
import numpy as np

def vect(a,b,c):
    return np.array([a,b,c], dtype=np.longdouble)

def mag(a:np.ndarray):
    return np.sqrt(a.dot(a))            #https://stackoverflow.com/questions/9171158/how-do-you-get-the-magnitude-of-a-vector-in-numpy

def C(z):
    s = 0
    a = 0.5
    k = 1
    while abs(a) > 0.00000000001:
        s += a
        a = (-z)**k / np.longdouble(factorial(2*k+2))
        k +=1
    return s


def S(z):
    s = 0
    a = 1/6
    k = 1
    while abs(a) > 0.00000000001:
        s += a
        a = (-z)**k / np.longdouble(factorial(2*k+3))
        k +=1
    return s
```

```python

def kepler(r0v: np.ndarray, v0v: np.ndarray, t, mu, xn = None):
    if t == 0:        #enke's method might make use of this
        return r0v, v0v
    r0 = mag(r0v)
    v0 = mag(v0v)
    E = 0.5*(v0)**2 - mu/r0
    a = - mu/(2*E)
    h = np.cross(r0v, v0v)
    alpha = (2*mu/r0 - v0**2)/mu     #a^-1 to make sure we don't divide by 0, as suggested on page 169, eq (4-74)
    e = sqrt(1+(2*E*mag(h)**2)/(mu)**2)
    if 0 < e < 1 and mu != 0:
        TP = 2*np.pi*np.sqrt(a**3/mu)
        while t > TP:
            t = t - TP
        while t < 0:
            t += TP
    #solve for x when time is known: section 4.4.2
    if xn == None:
        #select starting value
        if 0 < e < 1:
            xn = sqrt(mu)*t*alpha
        else:
            xn = np.sign(t)*np.sqrt(-a)*np.log((-2*mu*t)/(a*(r0v.dot(v0v) + np.sign(t)*np.sqrt(-mu*a)*(1-r0/a))))
        tn = t+20
    #determining x from initial conditions and time (Newton iteration scheme)
    while abs((t-tn)/t) > 1e-8: #in our elliptic example, it doesn't even get executed once!
        #print("Goal: {}".format(t))
        z = xn**2 *alpha
        tn = np.dot(r0v, v0v)/mu * xn**2 * C(z) + (1-r0*alpha)* xn**3*S(z) / sqrt(mu) + r0*xn/sqrt(mu)
        #print(tn)
        dtdx = (xn**2*C(z) + np.dot(r0v, v0v)/sqrt(mu) * xn*(1 - z*S(z)) + r0*(1 - z*C(z)))/sqrt(mu)
        xn += (t-tn)/dtdx
    x = xn
    z = x**2 *alpha
    # the f and g expression
    f = 1 - x**2/r0 * C(z)
    g = t - x**3/sqrt(mu) * S(z)
    # getting position vector rv and its absolute value r (for further computation of v)
    rv = r0v*f + v0v*g
```

```
    r = mag(rv)
    dg = 1 - x**2/r * C(z)
    df = sqrt(mu)/r0/r *x*(z*S(z) - 1)
    #getting vector v
    v = r0v*df + v0v*dg
    #precision should be 1
    precision = f*dg + df * g
    print("Precision in the Kepler equation: {}".format(precision))
    return rv, v
```

A.2 compare.py

```
import numpy as np
from helpers1 import mag, G
from general_definitions import masses
from tqdm import tqdm
from math import sqrt
from time import time
mu = G*masses[3]
def f(r):
    return - mu/mag(r)**3 * r


r0 = np.array([6478100,0, 0], dtype=np.longdouble)
v0 = np.array([0, 10000, 0], dtype=np.longdouble)

E = 0.5 * mag(v0)**2 - mu/mag(r0)
h = np.cross(r0, v0)
a = - mu/(2*E)
p = mag(h)**2/(mu)
e = sqrt(1+(2*E*mag(h)**2)/(mu)**2)
rp = p/(1+e)
ra = p/(1 - e)
# Diskussion der Daten: Siehe Arbeitsjournal

dt = 30     #0.1
TP = 2*np.pi*pow(a, 3/2)/sqrt(mu)
nrev = 100

stepn = int(TP*nrev/dt + 2)

r = np.empty([stepn,3], dtype=np.longdouble)
r[0] = r0
v = np.empty([stepn,3], dtype=np.longdouble)
v[0] = v0
```

```


start = time()
i = 0
with tqdm(total=(stepn - 1)) as pbar:
    while i*dt < TP*nrev:
        a = f(r[i])
        r[i + 1] = r[i] + v[i]*dt
        v[i + 1] = v[i] + a*dt
        i += 1
        pbar.update(1)

print("Time elapsed {}s".format(time() - start))
print(r[-1])
print("Forward Euler with step-size {}s after {} revolutions has an imprecision
    of {}% & {}%".format(dt, nrev, mag(r[-1]-r0)/mag(r0), mag(v[-1]-v0)/mag(v0)))

#Runge-Kutta du quatrième ordre :

dt = 30                          #1
stepn = int(TP*nrev/dt + 2)

r = np.empty([stepn,3], dtype=np.longdouble)
r[0] = r0
v = np.empty([stepn,3], dtype=np.longdouble)
v[0] = v0

start = time()
i = 0
with tqdm(total=(stepn - 1)) as pbar:
    while i*dt < TP*nrev:
        m0 = v[i]
        k0 = f(r[i])
        m1 = v[i] + k0*dt/2
        k1 = f(r[i] + m0*dt/2)
        m2 = v[i] + k1*dt/2
        k2 = f(r[i] + m1*dt/2)
        m3 = v[i] + k2*dt
        k3 = f(r[i] + m2*dt)
        r[i + 1] = r[i] + ((m0+ 2*m1+ 2*m2+ m3)*dt/6)
        v[i + 1] = v[i] + (k0 + k1*2 + k2*2 + k3)*dt/6
        i+=1
        pbar.update(1)
print("Time elapsed {}s".format(time() - start))
print(r[-1])
print("RK4 with step-size {}s after {} revolutions has an imprecision of {}% &
```

```
    {}%".format(dt, nrev, mag(r[-1] - r0)/mag(r0), mag(v[-1] - v0)/mag(v0)))



from general_definitions import N2, N, a, b

#Gauss-Jackson avec

dt = 30
stepn = int(TP*nrev/dt + 2)


r = np.empty([stepn + N2,3], dtype=np.longdouble)
r[N2] = r0
v = np.empty([stepn + N2,3], dtype=np.longdouble)
v[N2] = v0


def fs(r):
    return - mu/mag(r)**3 * r

def f(n):
    return - mu/mag(r[n])**3 * r[n]




dt = -dt
for k in range(N2):
    m0 = v[N2 - k]
    k0 = fs(r[N2 - k])
    m1 = v[N2 - k] + k0*dt/2
    k1 = fs(r[N2 - k] + m0*dt/2)
    m2 = v[N2 - k] + k1*dt/2
    k2 = fs(r[N2 - k] + m1*dt/2)
    m3 = v[N2 - k] + k2*dt
    k3 = fs(r[N2 - k] + m2*dt)
    r[N2 - k - 1] = r[N2 - k] + (m0 + m1*2 + m2*2 + m3)*dt/6
    v[N2 - k - 1] = v[N2 - k] + (k0 + k1*2 + k2*2 + k3)*dt/6

dt = -dt
for k in range(N2):
    m0 = v[N2 + k]
    k0 = fs(r[N2 + k])
    m1 = v[N2 + k] + k0*dt/2
    k1 = fs(r[N2 + k] + m0*dt/2)
```

```
    m2 = v[N2 + k] + k1*dt/2
    k2 = fs(r[N2 + k] + m1*dt/2)
    m3 = v[N2 + k] + k2*dt
    k3 = fs(r[N2 + k] + m2*dt)
    r[N2 + k + 1] = r[N2 + k] + (m0 + m1*2 + m2*2 + m3)*dt/6
    v[N2 + k + 1] = v[N2 + k] + (k0 + k1*2 + k2*2 + k3)*dt/6

C1s = np.empty([3], dtype=np.longdouble)
S0 = np.empty([3], dtype=np.longdouble)

def resets():
    global C1s, S0, Sn, sn
    #defining C1s
    sum1 = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
    for k in range(N + 1):
        sum1 += f(k)*b[N2][k]
    C1s = v[N2]/dt - sum1
    #Defining S0:
    sum2 = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
    for k in range(N + 1):
        sum2 += f(k)*a[N2][k]
    S0 = r[N2]/dt**2 - sum2
    sn = C1s
    Sn = S0
resets()

def getss(n):
    global Sn, sn
    if n == N2:
        resets()
        return Sn
    elif -1 < n < N2:
        resets()
        for j in range(N2 - n):
            Sn = Sn - sn + f(N2 - j)*0.5
            sn -= (f(N2 - j) + f(N2 - j - 1))*0.5
        return sn, Sn
    elif n > N2:
        resets()
        for j in range(n - N2):
            Sn += sn + f(N2 + j)*0.5
            sn += (f(N2 + j) + f(N2 + j + 1))*0.5
        return sn, Sn

def getsr(n):
    global Sn, sn
```

```
    if n == N + 1:
        resets()
        for j in range(n - N2 - 1):
            if j != 0:
                sn += (f(N2 + j - 1) + f(N2 + j))*0.5
            Sn += sn + f(N2 + j)*0.5

    sn += (f(n - 2) + f(n - 1))*0.5
    Sn += sn + f(n - 1)*0.5
    return sn, Sn

def getssr(n):
    global sn
    return sn + (f(n - 1) + f(n))*0.5

maxa = 1
while maxa > 0.00000000001:
    maxa = 0
    for n in range(N + 1):
        if n != N2:
            s, S = getss(n)
            aold = f(n)
            #correct starting value
            sum3r = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
            sum3v = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
            for k in range(N + 1):
                a3 = f(k)
                sum3r += a3*a[n][k]
                sum3v += a3*b[n][k]
            r[n] = (S + sum3r)*dt**2
            v[n] = (s + sum3v)*dt
            #check convergence of accelerations
            anew = f(n)
            magdif = mag(aold - anew)
            if magdif > maxa:
                maxa = magdif


start = time()
#Commencing PEC cycle:
n = N
t = N2*dt

corrsum = np.empty([2, 3], dtype=np.longdouble)
with tqdm(total=(stepn - N2 - 1)) as pbar:
    while t < TP*nrev:          #T is defined in general_definitions
```

```
        #Predict:
        s, S = getsr(n + 1)
        psum = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
        psumv = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
        for k in range(N + 1):
            ap = f(n-N+k)
            psum += ap*a[N + 1][k]
            psumv+= ap*b[N + 1][k]
        r[n + 1] = (psum + S)*dt**2
        v[n + 1] = (psumv + f(n)/2 + psumv)*dt
        n += 1
        corrsum.fill(0)
        #Evaluate-Correct:
        for k in range(N):
            ac = f(n + k - N)
            corrsum[0] += ac*a[N][k]
            corrsum[1] += ac*b[N][k]

        for _ in range(200):
            max = 0
            rold = r[n]
            r[n] = (f(n)*a[N][N] + corrsum[0] + S)*dt**2
            v[n] = (f(n)*b[N][N] + corrsum[1] + s)*dt
            diff = mag(rold - r[n])
            if diff > max:
                max = diff
            if max < 0.0000000001:
                break
        t += dt
        pbar.update(1)



print("Time elapsed {}s".format(time() - start))
print(r[-1])
print("Gauss-Jackson with step-size {}s after {} revolutions has an imprecision
    of {}%, {}%".format(dt, nrev, mag(r[-1] - r0)/mag(r0), mag(v[-1] - v0)/mag(v0
    )))
```

A.3 helpers1.py

```
from math import sqrt, pi
import numpy as np

G = np.longdouble(6.6743015e-11)
```

```python

def vect(a,b,c):
    return np.array([a,b,c], dtype=np.longdouble)

def mag(array:np.ndarray):
    if array.shape[-1] != 3:
        print("Warning: An array of 3D vectors instead of {}D vectors expected".format(array.shape[-1]))
    return np.sqrt(np.sum(array*array, axis=-1))

def unsignedAngle(array1:np.ndarray, array2:np.ndarray):    #takes two arrays of vectors as inputs, speeds up work with large datasets as we don't need a for loop (about 60 times faster for large arrays, but since both operations are rather fast, we don't actually care)
    if array1.shape != array2.shape:
        print("Arrays are not of the same shape")
        return None
    if array1.shape[-1] != 3:
        print("Warning: 3-dimentional vectors are expected")
    dot = np.sum(array1*array2, axis=-1)
    mag = np.sqrt(np.sum(array1**2, -1)*np.sum(array2**2, axis=-1))
    return np.arccos(dot/mag)
class object:
    def __init__(self, r: vect, v: vect, m):
        self.r = r
        self.v = v
        self.m = m

class planet(object):
    def __init__(self, r: vect, v: vect, m, rayon):
        super().__init__(r, v, m)
        self.rayon = rayon

def norm(v):
    return v/mag(v)
```

A.4 general_definitions.py

```python
import numpy as np
import datetime
import os
from helpers1 import mag

a = np.array([[3250433/53222400, 572741/5702400, -8701681/39916800, 4026311/13305600, -917039/3193344, 7370669/39916800, -1025779/13305600,
```

```
    754331/39916800, -330157/159667200],
    [-330157/159667200, 530113/6652800, 518887/19958400, -27631/623700,
     44773/1064448, -531521/19958400, 109343/9979200, -1261/475200,
     45911/159667200],
    [45911/159667200, -185839/39916800, 171137/1900800, 73643/39916800,
     -25775/3193344, 77597/13305600, -98911/39916800, 24173/39916800,
     -3499/53222400],
    [-3499/53222400, 4387/4989600, -35039/4989600, 90817/950400, -20561/3193344,
     2117/9979200, 2059/6652800, -317/2851200, 317/22809600],
    [317/22809600, -2539/13305600, 55067/39916800, -326911/39916800, 14797/152064,
     -326911/39916800, 55067/39916800, -2539/13305600, 317/22809600],
    [317/22809600, -317/2851200, 2059/6652800, 2117/9979200, -20561/3193344,
     90817/950400, -35039/4989600, 4387/4989600, -3499/53222400],
    [-3499/53222400, 24173/39916800, -98911/39916800, 77597/13305600,
     -25775/3193344, 73643/39916800, 171137/1900800, -185839/39916800,
     45911/159667200],
    [45911/159667200, -1261/475200, 109343/9979200, -531521/19958400,
     44773/1064448, -27631/623700, 518887/19958400, 530113/6652800,
     -330157/159667200],
    [-330157/159667200, 754331/39916800, -1025779/13305600, 7370669/39916800,
     -917039/3193344, 4026311/13305600, -8701681/39916800, 572741/5702400,
     3250433/53222400],
    [3250433/53222400, -11011481/19958400, 6322573/2851200, -8660609/1663200,
     25162927/3193344, -159314453/19958400, 18071351/3326400, -24115843/9979200,
     103798439/159667200]], dtype=np.longdouble)

b = np.asarray([[19087/89600, -427487/725760, 3498217/3628800, -500327/403200,
    6467/5670, -2616161/3628800, 24019/80640, -263077/3628800, 8183/1036800],
    [8183/1036800, 57251/403200, -1106377/3628800, 218483/725760, -69/280,
     530177/3628800, -210359/3628800, 5533/403200, -425/290304],
    [-425/290304, 76453/3628800, 5143/57600, -660127/3628800, 661/5670,
     -4997/80640, 83927/3628800, -19109/3628800, 7/12800],
    [7/12800, -23173/3628800, 29579/725760, 2497/57600, -2563/22680,
     172993/3628800, -6463/403200, 2497/725760, -2497/7257600],
    [-2497/7257600, 1469/403200, -68119/3628800, 252769/3628800, 0,
     -252769/3628800, 68119/3628800, -1469/403200, 2497/7257600],
    [2497/7257600, -2497/725760, 6463/403200, -172993/3628800, 2563/22680,
     -2497/57600, -29579/725760, 23173/3628800, -7/12800],
    [-7/12800, 19109/3628800, -83927/3628800, 4997/80640, -661/5670,
     660127/3628800, -5143/57600, -76453/3628800, 425/290304],
    [425/290304, -5533/403200, 210359/3628800, -530177/3628800, 69/280,
     -218483/725760, 1106377/3628800, -57251/403200, -8183/1036800],
    [-8183/1036800, 263077/3628800, -24019/80640, 2616161/3628800, -6467/5670,
     500327/403200, -3498217/3628800, 427487/725760, -19087/89600],
    [25713/89600, -9401029/3628800, 5393233/518400, -9839609/403200, 167287/4536,
     -135352319/3628800, 10219841/403200, -40987771/3628800, 3288521/1036800]],
```

```
    dtype=np.longdouble)

N = 8
N2 = int(N/2)

T = 5200848000
dt = 1000        #2 Stunden

# 1 Jahr: 31558140
# 165 Jahre: 5200848000

steps = int(T/dt) + N2 + 2  #+1 for the initial value + 1 because int always rounds off. If it doesent, because T is a multiple of dt, then "while t <= T" will be true for the last iteration, as we needn't worry for floatingpoint imprecision (dt is an int)
masses = np.array([1.988410e30, 3.302e23, 4.8685e24, 6.04568e24, 6.4171e23, 1.89858032e27, 5.684805395e26, 8.6821876e25, 1.0243e26], dtype=np.longdouble)        # Für Jupiter baryzentrum: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/galileanfact_table.html; https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/saturniansatfact.html
objcount = len(masses)


rad_of_closest_approach = np.array([np.nan, 2.4405e6,6.400248e6, 6.500137e6, 3.5497e6, 7.86412e7, 4.8e8, 2.6026390e7, 2.5107930e7], dtype=np.longdouble)#Voir le tableau \ref
tick_rate = [None, 5*60*60, 1*86400, 2*86400, 5*86400, 6*86400, 7*86400, 10*86400, 14*86400]     #Arbitrary, earth and mars inspired by Wikipedia

names = ["Sun", "Mercury", "Venus", "Earth", "Mars", "Jupiter", "Saturn", "Uranus", "Neptune"]

def pEpoch():
    with open("log.txt", "r") as file:
        ep = float(file.read())
    return datetime.datetime.fromtimestamp(ep)


def unitRotationVector(t, planet:int):      #Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015
    if planet == 3:
        return earthUnitRotationVector(t)
    t = float(t)
    T = (datetime.timedelta(seconds=t) + pEpoch() - datetime.datetime(year=2000, month=1, day=1, hour=12, minute=0, second=0, microsecond=0)).total_seconds()/(36525*24*60*60)
```

```
    if planet == 1:
        alpha0 = 281.0103 - 0.0328*T
        gamma0 = 61.4155 - 0.0049*T
    elif planet == 2:
        alpha0 = 272.76
        gamma0 = 67.16
    elif planet == 4:
        alpha0 = 317.269202 - 0.10927547*T+ 0.000068 * np.sin((198.991226 + 19139.4819985*T )*np.pi/180) + 0.000238 * np.sin((226.292679 + 38280.8511281*T)*np.pi/180) + 0.000052 * np.sin((249.663391 + 57420.7251593*T)*np.pi/180) + 0.000009 *np.sin((266.183510 + 76560.6367950*T)*np.pi/180) + 0.419057 * np.sin((79.398797 + 0.5042615*T )*np.pi/180)
        gamma0 = 54.432516 - 0.05827105*T + 0.000051 * np.cos((122.433576 + 19139.9407476*T )*np.pi/180) + 0.000141 * np.cos((43.058401 + 38280.8753272*T )*np.pi/180) + 0.000031 * np.cos((57.663379 + 57420.7517205*T )*np.pi/180) + 0.000005 *np.cos((79.476401 + 76560.6495004*T )*np.pi/180) + 1.591274 * np.cos((166.325722 + 0.5042615*T)*np.pi/180)
    elif planet == 5:
        J = np.array([99.360714 + 4850.4046*T, 175.895369 + 1191.9605*T, 300.323162 + 262.5475*T, 114.012305 + 6070.2476*T, 49.511251 + 64.3000*T])*np.pi/180
        alpha0 = 268.056595 - 0.006499*T + 0.000117*np.sin(J[0]) + 0.000938 * np.sin(J[1]) + 0.001432* np.sin(J[2]) + 0.000030* np.sin(J[3]) + 0.002150 *np.sin(J[4])
        gamma0 = 64.495303 + 0.002413*T + 0.000050* np.cos(J[0]) + 0.000404 * np.cos (J[1]) + 0.000617 * np.cos (J[2]) - 0.000013 * np.cos(J[3]) + 0.000926 * np.cos(J[4])
    elif planet == 6:
        alpha0 = 40.589 - 0.036*T
        gamma0 = 83.537 - 0.004*T
    elif planet == 7:
        alpha0 = 257.311
        gamma0 = -15.175
    elif planet == 8:
        N = (357.85 + 52.316*T)*np.pi/180
        alpha0 = 299.36 + 0.70 * np.sin(N)
        gamma0 = 43.46 - 0.51 * np.cos(N)

    alpha0 = alpha0*np.pi/180
    gamma0 = gamma0*np.pi/180
    if planet != 2 and planet != 7:#Voir la distinction entre le mouvement prograde ou rétrograde fait dans IAU p.
        w = np.array([np.cos(alpha0)*np.cos(gamma0), np.sin(alpha0)*np.cos(gamma0), np.sin(gamma0)], dtype=np.longdouble)#\cite p.45 FoA
```

```python
    else:
        w = - np.array([np.cos(alpha0)*np.cos(gamma0), np.sin(alpha0)*np.cos(gamma0), np.sin(gamma0)], dtype=np.longdouble)
    return w/mag(w)

def earthUnitRotationVector(t1):        #Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009
    t1 = float(t1)
    T = (datetime.timedelta(seconds=t1) + pEpoch() - datetime.datetime(year=2000, month=1, day=1, hour=12, minute=0, second=0, microsecond=0)).total_seconds()/(36525*24*60*60)
    alpha = np.longdouble(0.00 - 0.641*T)*(np.pi/180)
    gamma = np.longdouble(90 - 0.557*T)*np.pi/180
    w = np.array([np.cos(alpha)*np.cos(gamma), np.sin(alpha)*np.cos(gamma), np.sin(gamma)], dtype=np.longdouble)#\cite p.45 FoA
    return w/mag(w)
```

A.5 horizons.py

Ce programme a été adapté de https ://ssd-api.jpl.nasa.gov/doc/horizons.html

```python
import json
import requests
import datetime
import numpy as np
from general_definitions import pEpoch

# https://stackoverflow.com/questions/100210/what-is-the-standard-way-to-add-n-seconds-to-datetime-time-in-python

def horizons(id, dtime=None):
  # Define API URL and SPK filename:
  url = 'https://ssd.jpl.nasa.gov/api/horizons.api'

  # Define the time span:

  if dtime is None:
    epoch = datetime.datetime.now()
    start_time = epoch.strftime('%Y-%b-%d')
    start_time += "%2000:00:00"
    stop_time = epoch.strftime('%Y-%b-%d') + "%2000:15"
  elif dtime!=0:
    epoch = pEpoch()
    start_time_d = (epoch + datetime.timedelta(0,dtime))
    start_time = start_time_d.strftime('%Y-%b-%d') + "%20" + start_time_d.strftime('%H:%M:%S')
```

```python
    stop_time_d = (epoch + datetime.timedelta(0,dtime)  + datetime.timedelta(0,900))
    stop_time = stop_time_d.strftime('%Y-%b-%d') + "%20" + stop_time_d.strftime('%H:%M:%S')
  elif dtime == 0:
    epoch = pEpoch()
    start_time = epoch.strftime('%Y-%b-%d')
    start_time += "%2000:00:00"
    stop_time = epoch.strftime('%Y-%b-%d') + "%2000:15"


  # Build the appropriate URL for this API request:
  # IMPORTANT: You must encode the "=" as "%3D" and the ";" as "%3B" in the
  #            Horizons COMMAND parameter specification.
  url += "?format=json&OBJ_DATA=NO&MAKE_EPHEM='YES'&EPHEM_TYPE='VECTORS'&CENTER='%400'&VEC_TABLE='2x'&CAL_TYPE='GREGORIAN'&CSV_FORMAT=YES&TIME_DIGITS='SECONDS'"
  url += "&START_TIME='{}'&STOP_TIME='{}'".format(start_time, stop_time)
  url += "&COMMAND='{}'".format(id)

  # Submit the API request and decode the JSON-response:
  response = requests.get(url)
  try:
    data = json.loads(response.text)
  except ValueError:
    print("Unable to decode JSON results")

  # If the request was valid...
  if (response.status_code == 200):
    data = data["result"]
    # print(data)
    s = data.find("$$SOE")
    e = data.find("n.a.,")
    data = data[s + 6:e].split(', ')
    data = data[2:8]
    data = list(map(str.lower, data))
    r = np.asarray(data[:3], dtype=np.longdouble)
    v = np.asarray(data[3:], dtype=np.longdouble)
    return r*1000, v*1000

  # If the request was invalid, extract error content and display it:
  if (response.status_code == 400):
    data = json.loads(response.text)
    if "message" in data:
      print("MESSAGE: {}".format(data["message"]))
    else:
```

```
        print(json.dumps(data, indent=2))

    # Otherwise, some other error occurred:
    print("response code: {0}".format(response.status_code))
    return None
```

A.6 planetary_movement.py

```
import numpy as np
from helpers1 import *
from horizons import horizons
from vis import *
from general_definitions import *
from tqdm import tqdm

r = np.empty([steps,9,3], dtype=np.longdouble)
v = np.empty([steps,9,3], dtype=np.longdouble)

rinit, vinit = horizons(10)
r[N2][0] = rinit
v[N2][0] = vinit

#get initial conditions:
for i in range(8):
    rh, vh = horizons(i + 1)
    r[N2][i + 1] = rh
    v[N2][i + 1] = vh
print("downloaded data from horizons api")

def ft(posvects: np.ndarray, n: int):
    a = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
    for i in range(objcount):
        if i != n:
            rl = posvects[i] - posvects[n]    #make sure that the local r doesn't
                override the global one
            if mag(rl) == 0:
                print("Don't divide by 0 you idiot!")
            a += rl*G*(masses[i])/mag(rl)**3
    return a

#for all planets: calculate m1 and k1, use the vectors obtained to recalculate
    the force field
#then on the basis of this, calculate m2 and k2 and so on.

#for the startup procedure of the rocket, we need to have the intermediate
```

```
positions of the planets:
startup = np.empty([N + 1, 3 , objcount, 3], dtype=np.longdouble)

stepli = np.empty([4,2,objcount,3], dtype=np.longdouble)

#how to access r and v for a given step:
    # r = r[N2 - k]
    # v = v[N2 - k]
dt = -dt
for k in range(N2):
    stepli[0][0] = v[N2 - k]                    #[0][0] represents m and therefore a velocity
    for i in range(objcount):
        stepli[0][1][i] = ft(r[N2 - k], i)      #[0][1] represents k (rungekutta.py) and therefore an acceleration

    for i in range(1,4):
        #calculate m
        for j in range(objcount):
            if i < 3:
                stepli[i][0][j] = v[N2 - k][j] + stepli[i - 1][1][j]*dt/2     # m1 & m2 (see rungekutta.py)
            else:
                stepli[i][0][j] = v[N2 - k][j] + stepli[i - 1][1][j]*dt
        #calculate k (see rungekutta.py), has nothing to do with the local for-loop variable k
        # instead of recalculating this vector for every mass, it is saved in stepvectm
        if i < 3:
            stepvectm = r[N2 - k] + stepli[i][0]*dt/2
        else:
            stepvectm = r[N2 - k] + stepli[i][0]*dt
        startup[N2 - k - 1][i - 1] = stepvectm
        for j in range(objcount):        #only after calculating all m's can we calculate all k's
            stepli[i][1][j] = ft(stepvectm, j)
    #finally calculate new r and v
    r[N2 - k - 1] = r[N2 - k] + (stepli[0][0] + stepli[1][0]*2 + stepli[2][0]*2 + stepli[3][0])*dt/6
    v[N2 - k - 1] = v[N2 - k] + (stepli[0][1] + stepli[1][1]*2 + stepli[2][1]*2 + stepli[3][1])*dt/6

dt = -dt
for k in range(N2):
    stepli[0][0] = v[N2 + k]                    #[0][0] represents m and therefore a velocity
```

```
    for i in range(objcount):
        stepli[0][1][i] = ft(r[N2 + k], i)      #[0][1] represents k (rungekutta.py) and therefore an acceleration

    for i in range(1,4):
        #calculate m
        for j in range(objcount):
            if i < 3:
                stepli[i][0][j] = v[N2 + k][j] + stepli[i - 1][1][j]*dt/2      # m1 & m2 (see rungekutta.py)
            else:
                stepli[i][0][j] = v[N2 + k][j] + stepli[i - 1][1][j]*dt
        #calculate k (see rungekutta.py), has nothing to do with the local for-loop variable k
        # instead of recalculating this vector for every mass, it is saved in stepvectm
        if i < 3:
            stepvectm = r[N2 + k] + stepli[i][0]*dt/2
        else:
            stepvectm = r[N2 + k] + stepli[i][0]*dt
        startup[N2 + k][i - 1] = stepvectm
        for j in range(objcount):       #only after calculating all m's can we calculate all k's
            stepli[i][1][j] = ft(stepvectm, j)
    #finally calculate new r and v
    r[N2 + k + 1] = r[N2 + k] + (stepli[0][0] + stepli[1][0]*2 + stepli[2][0]*2 + stepli[3][0])*dt/6
    v[N2 + k + 1] = v[N2 + k] + (stepli[0][1] + stepli[1][1]*2 + stepli[2][1]*2 + stepli[3][1])*dt/6
print("Starting procedure complete")

#now that the startvalues are initialized, we no longer need stepli and can free its memory:
stepli = None
del stepli

#the ordinate coefficients are defined in general_definitions

C1s = np.empty([objcount,3], dtype=np.longdouble)
S0 = np.empty([objcount,3], dtype=np.longdouble)

def resets():
    global C1s, S0, Sn, sn
    #defining C1s
    for i in range(objcount):
        sum1 = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
```

```python
        for k in range(N + 1):
            sum1 += ft(r[k], i)*b[N2][k]
        C1s[i] = v[N2][i]/dt - sum1
    #Defining S0:
    for i in range(objcount):
        sum2 = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
        for k in range(N + 1):
            sum2 += ft(r[k], i)*a[N2][k]
        S0[i] = r[N2][i]/dt**2 - sum2
    sn = C1s        #since S0 and C1s never actually get used, passing on the pointer to the array instead of copying it doesn't constitute a bug
    Sn = S0
resets()

def getss(n):
    global Sn, sn
    if n == N2:
        resets()
        return Sn
    elif -1 < n < N2:
        resets()
        for i in range(objcount):
            for j in range(N2 - n):
                Sn[i] = Sn[i] - sn[i] + ft(r[N2 - j], i)*0.5
                sn[i] -= (ft(r[N2 - j], i) + ft(r[N2 - j - 1], i))*0.5
        return sn, Sn
    elif n > N2:
        resets()
        for i in range(objcount):
            for j in range(n - N2):
                Sn[i] += sn[i] + ft(r[N2 + j], i)*0.5
                sn[i] += (ft(r[N2 + j], i) + ft(r[N2 + j + 1], i))*0.5
        return sn, Sn

a_1 = np.empty_like(sn)
def getsr(n):
    global Sn, sn, a_1
    if n == N + 1:
        resets()
        for i in range(len(masses)):
            for j in range(n - N2 - 1):
                a_1[i] = ft(r[N2 + j], i)
                if j != 0:
                    sn[i] += (ft(r[N2 + j - 1], i) + a_1[i])*0.5
                Sn[i] += sn[i] + a_1[i]*0.5
    for i in range(len(masses)):
```

```python
            a_1[i] = ft(r[n - 1], i)
            sn[i] += (ft(r[n - 2], i) + a_1[i])*0.5
            Sn[i] += sn[i] + a_1[i]*0.5
    return sn, Sn

def getssr(n):
    global sn, a_1
    cpy = sn.copy()
    for i in range(len(masses)):
        cpy[i] += (a_1[i] + ft(r[n], i))*0.5
    return cpy
#Correct starting values!!!!!!!!!!

#while max change in acceleration is higher than ...
#for all points:
    #for all planets:
        #apply corrector
#get max change in acceleration

maxa = 1
while maxa > 0.00000000001:
    maxa = 0
    for n in range(N + 1):
        if n != N2:
            s, S = getss(n)
            oldr = r[n]
            for o in range(len(masses)):
                sum3r = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
                sum3v = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
                for k in range(N + 1):
                    ao = ft(r[k], o)
                    sum3r += ao*a[n][k]
                    sum3v += ao*b[n][k]
                r[n][o] = (S[o] + sum3r)*dt**2
                v[n][o] = (s[o] + sum3v)*dt
            for o in range(len(masses)):
                aold = ft(oldr, o)
                anew = ft(r[n], o)
                magdif = mag(aold - anew)
                if magdif > maxa:
                    maxa = magdif


#Commencing PEC cycle:
n = N
t = N2*dt
```

```
corrsum = np.empty([2, objcount,3], dtype=np.longdouble)        #corrsum[0]: position, corrsum[1]: velocity
with tqdm(total=steps-9) as pbar:
    while t <= T:        #T is defined in general_definitions
        #Predict:
        s, S = getsr(n + 1)        #returns sn and Sn+1, sn is used for the predictor
        for o in range(objcount):
            psumr = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
            psumv = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
            for k in range(N + 1):
                pa = ft(r[n-N+k], o)
                psumr += pa*a[N + 1][k]
                psumv += pa*b[N + 1][k]
            r[n + 1][o] = (psumr + S[o])*dt**2
            v[n + 1][o] = (s[o] + ft(r[n], o)/2 + psumv)
        n += 1
        corrsum.fill(0)
        #Evaluate-Correct:# May not make a difference for Gauss-Jackson, but summed Adams becomes unstable very quickely when not corrected.
        for o in range(objcount):
            for k in range(N):
                ac = ft(r[n + k - N], o)
                corrsum[0][o] += ac*a[N][k]
                corrsum[1][o] += ac*b[N][k]
        for _ in range(200):
            max = 0
            s = getssr(n)
            for o in range(objcount):
                rold = r[n][o]
                vold = v[n][o]
                aco = ft(r[n], o)
                r[n][o] = (aco*a[N][N] + corrsum[0][o] + S[o])*dt**2
                v[n][o] = (aco*b[N][N] + corrsum[1][o] + s[o])*dt
                diff = mag(rold - r[n][o])
                diffv = mag(vold - v[n][o])
                if diff > max:
                    max = diff
                if diffv > max:
                    max = diffv
            if max < 0.0000000001:
                break
        t += dt
        pbar.update(1)

```

```
print("data calculated")
print(t)

with open("r.npy", "wb") as file:    #'wb': write as binary
    np.save(file, r)
with open("v.npy", "wb") as file:
    np.save(file, v)

epoch = datetime.datetime.now().replace(hour=0, minute=0, second=0, microsecond=0)
with open("log.txt", "w") as file:
    file.write(str(epoch.timestamp()))

import os
os.system("shutdown.exe /s")
```

A.7 planetary_movement2.py

```
    import numpy as np
from helpers1 import *
from horizons import horizons
from vis import *
from general_definitions import *
from tqdm import tqdm

r = np.empty([steps,9,3], dtype=np.longdouble)
v = np.empty([steps,9,3], dtype=np.longdouble)

rinit, vinit = horizons(10)
r[N2][0] = rinit
v[N2][0] = vinit

#get initial conditions:
for i in range(8):
    rh, vh = horizons(i + 1)
    r[N2][i + 1] = rh
    v[N2][i + 1] = vh
print("Download from Horizons API complete!")

masses1 = masses[np.newaxis, :, np.newaxis]
def aG(rAllPlanets):
    deltar = rAllPlanets[np.newaxis, :] - rAllPlanets[:,np.newaxis]
    distanceFactor = (np.sqrt(np.sum(deltar**2, axis=-1))**3)[:,:,np.newaxis]
    return np.sum(np.divide(deltar, distanceFactor, out=np.zeros_like(deltar), where=np.rint(distanceFactor)!=0)*G*masses1, axis=1)
```

```
masses2 = masses[np.newaxis, np.newaxis, :, np.newaxis]
def aGeneral2(rAllPlanets):
    deltar = rAllPlanets[:,np.newaxis, :] - rAllPlanets[:,:,np.newaxis]
    distanceFactor = (np.sqrt(np.sum(deltar**2, axis=-1))**3)[:,:,:,np.newaxis]
    return np.sum(np.divide(deltar, distanceFactor, out=np.zeros_like(deltar), where=np.rint(distanceFactor)!=0)*G*masses1, axis=2)


stepli = np.empty([4,2,objcount,3], dtype=np.longdouble)

dt = -dt
for k in range(N2):
    stepli[0, 0] = v[N2 - k]
    stepli[0, 1] = aG(r[N2 - k])
    stepli[1, 0] = v[N2 - k] + stepli[0, 1]*dt/2
    stepli[1, 1] = aG(r[N2 - k] + stepli[0, 0]*dt/2)
    stepli[2, 0] = v[N2 - k] + stepli[1, 1]*dt/2
    stepli[2, 1] = aG(r[N2 - k] + stepli[1, 0]*dt/2)
    stepli[3, 0] = v[N2 - k] + stepli[2, 1]*dt
    stepli[3, 1] = aG(r[N2 - k] + stepli[2, 0]*dt)
    r[N2 - k - 1] = r[N2 - k] + (stepli[0, 0] + stepli[1, 0]*2 + stepli[2, 0]*2 + stepli[3, 0])*dt/6
    v[N2 - k - 1] = v[N2 - k] + (stepli[0, 1] + stepli[1, 1]*2 + stepli[2, 1]*2 + stepli[3, 1])*dt/6

dt = -dt
for k in range(N2):
    stepli[0, 0] = v[N2 + k]
    stepli[0, 1] = aG(r[N2 + k])
    stepli[1, 0] = v[N2 + k] + stepli[0, 1]*dt/2
    stepli[1, 1] = aG(r[N2 + k] + stepli[0, 0]*dt/2)
    stepli[2, 0] = v[N2 + k] + stepli[1, 1]*dt/2
    stepli[2, 1] = aG(r[N2 + k] + stepli[1, 0]*dt/2)
    stepli[3, 0] = v[N2 + k] + stepli[2, 1]*dt
    stepli[3, 1] = aG(r[N2 + k] + stepli[2, 0]*dt)
    r[N2 + k + 1] = r[N2 + k] + (stepli[0, 0] + stepli[1, 0]*2 + stepli[2, 0]*2 + stepli[3, 0])*dt/6
    v[N2 + k + 1] = v[N2 + k] + (stepli[0, 1] + stepli[1, 1]*2 + stepli[2, 1]*2 + stepli[3, 1])*dt/6

#now that the startvalues are initialized, we no longer need stepli and can free its memory:
stepli = None
del stepli
```

```
C1s = np.empty([objcount,3], dtype=np.longdouble)
S0 = np.empty([objcount,3], dtype=np.longdouble)

def ft(posvects: np.ndarray, n: int):
    a = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
    for i in range(objcount):
        if i != n:
            rl = posvects[i] - posvects[n]   #make sure that the local r doesn't override the global one
            if mag(rl) == 0:
                print("Don't divide by 0 you idiot!")
            a += rl*G*(masses[i])/mag(rl)**3
    return a


def resets():
    global C1s, S0, Sn, sn
    #defining C1s
    C1s[:] = v[N2]/dt - np.sum(aGeneral2(r[:N + 1]) * b[N2][:,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)
    #Defining S0:
    S0[:] = r[N2]/dt**2 - np.sum(aGeneral2(r[:N + 1]) * a[N2][:,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)
    sn = C1s        #since S0 and C1s never actually get used, passing on the pointer to the array instead of copying it doesn't constitute a bug
    Sn = S0
resets()

def getss(n):
    global Sn, sn
    if n == N2:
        resets()
        return Sn
    elif -1 < n < N2:
        resets()
        for i in range(N2 - n):
            Sn = Sn - sn + aG(r[N2 - i])*0.5
            sn -= (aG(r[N2 - i]) + aG(r[N2 - i - 1]))*0.5
        return sn, Sn
    elif n > N2:
        resets()
        for i in range(n - N2):
            Sn += sn + aG(r[N2 + i])*0.5
            sn += (aG(r[N2 + i]) + aG(r[N2 + i + 1]))*0.5
        return sn, Sn

```

```
a_1 = np.empty_like(sn)
def getsr(n):
    global Sn, sn, a_1
    if n == N + 1:
        resets()
        for j in range(n - N2 - 1):
            a_1 = aG(r[N2 + j])
            if j != 0:
                sn += (aG(r[N2 + j - 1]) + a_1)*0.5
            Sn += sn + a_1*0.5
    a_1 = aG(r[n - 1])
    sn += (aG(r[n - 2]) + a_1)*0.5
    Sn += sn + a_1*0.5
    return sn, Sn

def getssr(n):
    global sn, a_1
    cpy = sn.copy()
    cpy += (a_1 + aG(r[n]))*0.5
    return cpy

maxa = 1
while maxa > 0.00000000001:
    maxa = 0
    for n in range(N + 1):
        if n != N2:
            s, S = getss(n)
            oldr = r[n]
            a0 = aGeneral2(r[:N + 1])
            sum3r = np.sum(a0 * a[n][:,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)
            sum3v = np.sum(a0 * b[n][:,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)
            r[n] = (S + sum3r)*dt**2
            v[n] = (s + sum3v)*dt
            for o in range(len(masses)):
                aold = aG(oldr)
                anew = aG(r[n])
                maxa = np.max(mag(aold - anew))

#Commencing PEC cycle:
n = N
t = N2*dt

corrsum = np.empty([2, objcount,3], dtype=np.longdouble)        #corrsum[0]: position, corrsum[1]: velocity
with tqdm(total=steps-9) as pbar:
    while t <= T:        #T is defined in general_definitions
```

```
        #Predict:
        s, S = getsr(n + 1)          #returns sn and Sn+1, sn is used for the predictor
        pa = aGeneral2(r[n - N:n + 1])
        psumr = np.sum(pa * a[N + 1][:,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)
        psumv = np.sum(pa * b[N + 1][:,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)
        r[n + 1] = (psumr + S)*dt**2
        v[n + 1] = (s + aG(r[n])/2 + psumv)
        n += 1
        corrsum.fill(0)
        #Evaluate-Correct:# May not make a difference for Gauss-Jackson, but summed Adams becomes unstable very quickely when not corrected.
        ac = aGeneral2(r[n - N:n])
        corrsum[0] = np.sum(ac * a[N][:-1,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)
        corrsum[1] = np.sum(ac * b[N][:-1,np.newaxis, np.newaxis], axis=0)

        for _ in range(200):
            max = 0
            s = getssr(n)
            rold = r[n]
            vold = v[n]
            aco = aG(r[n])
            r[n] = (aco*a[:,:, np.newaxis, np.newaxis][N, N] + corrsum[0] + S)*dt**2
            v[n] = (aco*b[:,:, np.newaxis, np.newaxis][N, N] + corrsum[1] + s)*dt
            maxr = np.max(mag(rold - r[n]))
            maxv = np.max(mag(vold - v[n]))
            if maxr < 0.0000000001 and maxv < 0.0000000001:
                break
        t += dt
        pbar.update(1)

print("Data calculated")
print(t)

with open("r.npy", "wb") as file:   #'wb': write as binary
    np.save(file, r)
with open("v.npy", "wb") as file:
    np.save(file, v)

epoch = datetime.datetime.now().replace(hour=0, minute=0, second=0, microsecond=0)
with open("log.txt", "w") as file:
    file.write(str(epoch.timestamp()))

```

```
import os
os.system("shutdown.exe /s")
```

A.8 test2.py

```
from kepler import kepler
from helpers1 import G, mag
import numpy as np
from horizons import horizons
from general_definitions import objcount, masses, dt, N2
import general_definitions
import sys

def timeToIndex(t):
    return int(round(t/dt)) + N2

try:
    T = float(sys.argv[1])
    print(T)

    if T > general_definitions.T:
        print("Time t larger than specified in general_definitions\nTerminating
            program")
        sys.exit(1)
    elif T < 0:
        print("No negative values accepted")
        sys.exit(1)

    n = timeToIndex(T)
    #read into memory position vectors:
    #Gauss-Jackson
    print(n)
    with open("r.npy", "rb") as file:
        myr = np.load(file)
        myr = myr[n]
    #read into memory velocity vectors for comparison:
    with open("v.npy", "rb") as file:
        myv = np.load(file)
        myv = myv[n]
except IndexError:
    from general_definitions import T
    with open("r.npy", "rb") as file:
        myr = np.load(file)
        myr = myr[-1]
    #read into memory velocity vectors for comparison:
```

```python
    with open("v.npy", "rb") as file:
        myv = np.load(file)
        myv = myv[-1]


def direction(r:np.ndarray):
    #get solely the direction of the vectors:
    direction = np.empty([len(r), 3], dtype=np.longdouble)
    for i in range(len(r)):
        direction[i] = r[i]/mag(r[i])
    return direction

def dist(r:np.ndarray):
    #calculate the distance from the sun:
    dist = np.empty([len(r)], dtype=np.longdouble)
    for i in range(objcount):
        dist = mag(r[i])
    return dist

def heliocentric(r:np.ndarray):
    #calculate position with respect to the sun
    helior = np.empty([objcount - 1,3], dtype=np.longdouble)
    for i in range(objcount - 1):
        helior[i] = r[i + 1] - r[0]
    return helior

def error(r1:np.ndarray, r2:np.ndarray):
    return "{:.4}".format(mag(r1 - r2)/mag(r1)*100) + " \%"

def errdist(r1:np.ndarray, r2:np.ndarray):
    return "{:.4}".format(abs(mag(r1) - mag(r2))/mag(r1)*100) + " \%"

"""
#read into memory position vectors:
#Gauss-Jackson
with open("r.npy", "rb") as file:
    myr = np.load(file)
    myr = myr[-1]
#read into memory velocity vectors for comparison:
with open("v.npy", "rb") as file:
    myv = np.load(file)
    myv = myv[-1]
"""


#JPL's Horizons:
```

```
horizonsr = np.empty([objcount,3], dtype=np.longdouble)
horizonsv = np.empty([objcount,3], dtype=np.longdouble)
horizonsr[0], horizonsv[0] = horizons(10, T)
for i in range(objcount - 1):
    horizonsr[i + 1], horizonsv[i + 1] = horizons(i + 1, T)

#Kepler Problem:
keplerr = np.empty([objcount - 1,3], dtype=np.longdouble)
keplerv = np.empty([objcount - 1,3], dtype=np.longdouble)
helios_r, helios_v = horizons(10, 0)
for i in range(objcount - 1):
    r1, v1 = horizons(i + 1, 0)
    keplerr[i], keplerv[i] = kepler(r1 - helios_r, v1 - helios_v, T, (masses[0]
        + masses[i + 1])*G)

#Idea with the origin
print("Test new origin idea : ", end="")
bary = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
for i in range(objcount):
    bary += masses[i] * myr[i]
print(bary)
print("As a reference the same calculation for horizons: ", end="")
bary.fill(0)
for i in range(objcount):
    bary += masses[i] * horizonsr[i]
print(bary)

#convert to heliocentric coodrinates:
myr = heliocentric(myr)
myv = heliocentric(myv)
horizonsr = heliocentric(horizonsr)
horizonsv = heliocentric(horizonsv)

print("PM to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(error(horizonsr[i], myr[i]))
print("Kepler to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(error(horizonsr[i], keplerr[i]))
print("Kepler to PM")
for i in range(objcount - 1):
    print(error(myr[i], keplerr[i]))

print("Distance; PM to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(errdist(myr[i], horizonsr[i]))
```

```python
print("Distance; Kepler to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(errdist(keplerr[i], horizonsr[i]))
print("Distance; Kepler to PM: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(errdist(keplerr[i], myr[i]))

print("Velocity tests :\n\n")
print("PM to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(error(horizonsv[i], myv[i]))
print("Kepler to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(error(horizonsv[i], keplerv[i]))
print("Kepler to PM")
for i in range(objcount - 1):
    print(error(myv[i], keplerv[i]))

print("Distance; PM to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(errdist(horizonsv[i], myv[i]))
print("Distance; Kepler to Horizons: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(errdist(horizonsv[i], keplerv[i]))
print("Distance; Kepler to PM: ")
for i in range(objcount - 1):
    print(errdist(myv[i], keplerv[i]))
```

A.9 vis.py

```python
# [1]: https://www.youtube.com/watch?v=fAztJg9oi7s
# [2]: https://matplotlib.org/stable/gallery/mplot3d/lorenz_attractor.html#sphx-glr-gallery-mplot3d-lorenz-attractor-py
# [3]: https://stackoverflow.com/questions/45148704/how-to-hide-axes-and-gridlines
# [4]: https://stackoverflow.com/questions/11140163/plotting-a-3d-cube-a-sphere-and-a-vector


import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits import mplot3d
ax = plt.axes(projection="3d")
ax.set_aspect(aspect="equal")
ax.set_box_aspect(aspect=(1,1,1))
```

```python

def reset():
    global ax
    ax = plt.axes(projection="3d")
    ax.set_aspect(aspect="equal")

def point(pos:np.ndarray, col:str = 'g'):
    x,y,z = pos
    ax.scatter([x], [y], [z], color=col, s=2)

def lign(arr:np.ndarray, col:str):
    ax.grid(False)
    ax.set_box_aspect([1,1,1])
    ax.plot(*arr.T, color=col, linewidth='0.5')        #[2]

def sphere(pos:np.ndarray, r, col:str):
    x,y,z = pos
    print(x,y,z)
    u, v = np.mgrid[0:2*np.pi:30j, 0:np.pi:30j]
    x = np.cos(u)*np.sin(v)*r + x
    y = np.sin(u)*np.sin(v)*r + y
    z = np.cos(v)*r + z
    ax.plot_wireframe(x, y, z, color=col)

def setlim(m):
    ax.set_xlim(-m, m)
    ax.set_ylim(-m, m)
    ax.set_zlim(-m, m)

def plot():
    ax.set_aspect(aspect="equal")
    ax.set_box_aspect(aspect=(1,1,1))
    plt.show()
```

A.10 pmvisualization.py

```python
import numpy as np
from vis import *
from datetime import datetime
from general_definitions import dt, N2

def timeToIndex(t):
    return abs(int(round(t/dt)) + N2)
idx = timeToIndex(31535800)

```

```
with open("r.npy", "rb") as file:
    r = np.load(file)

t0 =  373246737.99170226
t1 = 578499117.7331004
target = 6

IDX0 = timeToIndex(t0)
IDX1 = timeToIndex(t1)
Sun = r[::50,0]
lign(Sun, '#fbb543')
Mercury = r[:IDX1:50,1]
lign(Mercury, '#585858')
Venus = r[:IDX1:50,2]
lign(Venus, '#b7711c')
Earth = r[:timeToIndex(31536000):50,3]
lign(Earth, '#3d4782')
Mars = r[:IDX1:50,4]
lign(Mars, '#ed795c')
Jupiter = r[:IDX1:50,5]
lign(Jupiter, '#b8a48c')
Saturn = r[::50,6]
lign(Saturn, '#c4ad8d')
Uranus = r[::50,7]
lign(Uranus, '#c5ebee')
Neptune = r[::50,8]
lign(Neptune, '#497bfe')

idx = timeToIndex(31535800)
try:
    with open("rocketdata.npy", "rb") as file:
        rr=np.load(file)
    lign(rr, 'black')
    point(r[IDX0, 3])
    point(r[IDX1, target])
except FileNotFoundError:
    print("Simulate a trajectory for it to be displayed")



m = max(r.min(), r.max(), key=abs)
setlim(m)

plot()
```

A.11 simpletraj.py

```python
import numpy as np
from helpers1 import G, mag, norm
from general_definitions import dt, N2, masses, rad_of_closest_approach, earthUnitRotationVector, tick_rate, unitRotationVector, names, pEpoch
from kepler import C, S
from math import factorial, cos


import warnings
from sys import exit
import datetime
import tqdm
from tqdm import trange


def unsigned_angle(a:np.ndarray, b:np.ndarray):
    return np.arccos(np.dot(a,b)/(mag(a)*mag(b)))

def unsignedAngle(array1:np.ndarray, array2:np.ndarray):    #takes two arrays of vectors as inputs, speeds up work with large datasets as we don't need a for loop (about 60 times faster for large arrays, but since both operations are rather fast, we don't actually care)
    if array1.shape != array2.shape:
        print("Arrays are not of the same shape")
        return None
    if array1.shape[-1] != 3:
        print("Warning: 3-dimentional vectors are expected")
    dot = np.sum(array1*array2, axis=-1)
    mag = np.sqrt(np.sum(array1**2, -1)*np.sum(array2**2, -1))
    return np.arccos(dot/mag)


def signed_angle(a:np.ndarray, b:np.ndarray, N:np.ndarray):     #https://stackoverflow.com/questions/5188561/signed-angle-between-two-3d-vectors-with-same-origin-within-the-same-plane
    alpha = np.arctan2(np.dot(np.cross(a,b), N), np.dot(a, b))
    if alpha > 0:
        return alpha
    else:
        return 2*np.pi + alpha

def derC(z):#Checked
    fact = 4
    k = 1
```

```
    s = 0
    deltas = 100
    while abs(deltas) > 1e-7:
        # print("{}*z^{}/{}!".format((-1)**k * k, k - 1, fact))
        deltas = (-1)**k*k/factorial(fact)*z**(k - 1)
        s += deltas
        k +=1
        fact+=2
    return s



def derS(z):#Checked
    fact = 5
    k = 1
    s = 0
    deltas = 100
    while abs(deltas) > 1e-7:
        # print("{}*z^{}/{}!".format((-1)**k*k, (k - 1), fact))
        deltas = (-1)**k*k/factorial(fact)*z**(k - 1)
        s += deltas
        k +=1
        fact+=2
    return s

def timeToIndex(t):
    return abs(int(round(t/dt)) + N2)

def hyperbolicTOF(mu, a, e, true_anomaly):#BUG CHECK
    print("a: {}".format((-a)**3))
    F = np.arccosh((e + np.cos(true_anomaly))/(1 + e*np.cos(true_anomaly)))
    print(e)
    print((e + np.cos(true_anomaly))/(1 + e*np.cos(true_anomaly)))
    print(F)
    print(e*np.sinh(F) - F)
    return abs(np.sqrt((-a)**3/mu)*(e*np.sinh(F) - F))

AHHcount = 0
def porkchop(t1, t2, p1_index, p2_index, r1v=None, r2v=None):        #assuming
    time from ephemeris epoch; CHECKED
    global AHHcount
    time_1_index = timeToIndex(t1)
    time_2_index = timeToIndex(t2)
    case0 = False
    if r1v is None or r2v is None:
        r1v  = rplanets[time_1_index, p1_index] - rplanets[time_1_index, 0]
```

```
        r2v  = rplanets[time_2_index, p2_index] - rplanets[time_2_index, 0]
        case0 = True
    v1v = vplanets[time_1_index, p1_index] - vplanets[time_1_index, 0]
    v2v = vplanets[time_2_index, p2_index] - vplanets[time_2_index, 0]
    mu = G*masses[0]
    t = t2 - t1
    n = np.cross(r1v, r2v)
    h = np.cross(r1v, v1v)
    dv = unsigned_angle(r1v, r2v)
    if unsigned_angle(n, h) > np.pi/2:        #Genaue überlegungen : siehe arbeitsjournal
        DM = -1
        dv = 2*np.pi - dv
    else:
        DM = 1

    sqrtmu = np.sqrt(mu)
    if abs(dv - np.pi) < 1e-3:
        tqdm.tqdm.write("Collinear state vectors: the plane is not unequely defined")
        return None
    if abs(dv - 2*np.pi) < 1e-3 or dv < 1e-3:
        tqdm.tqdm.write("Collinear state vectors that point in the same direction; isn't optimal anyways")
        return None
        #CHANGE
    r1 = mag(r1v)
    r2 = mag(r2v)
    A = DM*(np.sqrt(r1*r2)*np.sin(dv))/(np.sqrt(1 - np.cos(dv)))
    zn = dv**2
    convergence = False
    for _ in range(50):
        Sn = S(zn)
        Cn = C(zn)
        y = r1 + r2 - A*(1 - zn*Sn)/np.sqrt(Cn)
        if y < 0:
            AHHcount += 1
            return None
        xn = np.sqrt(y/Cn)
        tn = xn**3*Sn/sqrtmu + A*np.sqrt(y)/sqrtmu
        if t < 1 or t < 1e6:
            if abs(t - tn) < 1e-4:
                convergence = True
                break
        elif abs((t - tn)/t) < 1e-4:       #These values no longer correspond to one another (new and old edition)
            convergence = True
```

```
                break
            if abs(zn) < 0.5:
                dCdz = derC(zn)
                dSdz = derS(zn)
            else:
                dCdz = 1/(2*zn)*(1 - zn*Sn - 2*Cn)
                dSdz = 1/(2*zn)*(Cn - 3*Sn)

            dtdz = xn**3/sqrtmu*(dSdz - (3*Sn*dCdz)/(2*Cn)) + A/(8*sqrtmu)*((3*Sn*np
                .sqrt(y))/Cn + A/xn)
            zn = zn + (t - tn)/dtdz
        if not convergence:
            tqdm.tqdm.write("The method hasn't converged, returning approximate
                values")
        f = 1 - y/r1
        g = A*np.sqrt(y/mu)
        dg = 1 - y/r2
        v1 = (r2v - f*r1v)/g
        v2 = (dg*r2v - r1v)/g
        vinf_departure = v1 - v1v
        vinf_arrival = v2 - v2v
        if case0:
            C3 = mag(vinf_departure)**2
            return C3, vinf_departure, vinf_arrival
        else:
            return vinf_departure, vinf_arrival



#Load ephemerides of all Planets:
with open("r.npy", "rb") as file:
    rplanets = np.load(file)
with open("v.npy", "rb") as file:
    vplanets = np.load(file)
now = datetime.datetime.now().replace(hour=0, minute=0, second=0, microsecond=0)
# epoch = datetime.datetime.fromtimestamp(os.path.getmtime('r.npy')).replace(
    hour=0, minute=0, second=0, microsecond=0) #NOTE: outdated
epoch = pEpoch()
deltat = (now - epoch).total_seconds()        #Time in seconds since ephemeris "
    epoch"

transfer_time = np.array([[0, 0], [0.4, 1], [2, 3], [3, 7], [10, 17], [10, 31]],
     dtype=np.longdouble)*31536000        #transfer time from earth [min, max] in
     years; for mars a range of 1 year is used (which is more than a Hohmann
    transfer) and 0.4 is slightly lower than the record

```

```
mode0 = True



check = True
while check:
    print("What is your target ?\n1) Mercury\n2) Venus\n4) Mars\n5) Jupiter"
        )
    x = input()
    try:
        x = int(x)
        if x < 1 or x > 5:
            print("Invalid index {} cannot be chosen".format(x))
        else:
            check = False
    except ValueError:
        print("Please provide an integer")

periapsisEarthOrbit = 185000 + 6378137     #According to Vallado:
if mode0:
    departure = 3
    arrival = x
    mu0 = G*masses[departure]
    mu1 = G*masses[arrival]
    transfer_time = np.array([[np.nan, np.nan],[np.nan, np.nan],[100, 160],[0,
        0], [120, 270], [2*365, 3*365]], dtype=np.longdouble)*86400
    transfer_range = transfer_time[x]
    search_range = transfer_range[1] - transfer_range[0]
    #Up to what time in the future do we want to check for possible launch dates
        ?
    range_of_analysis = 20*31536000
    sd1 = int(range_of_analysis/tick_rate[departure])     #TEST FOR POSSIBLE
        BUG
    sd2 = int(int(search_range)/int(tick_rate[arrival])) + 1
    pchp1 = np.full([sd1, sd2, 1], np.nan, dtype=np.longdouble)
    jmax = 0
    i = 0
    for t1 in trange(int(deltat), int(deltat + range_of_analysis), int(tick_rate
        [departure])):
        j = 0
        for t2 in range(int(t1) + int(transfer_range[0]), int(t1) + int(
            transfer_range[1]), int(tick_rate[x])):
```

```
            tmp = porkchop(t1, t2, departure, arrival)
            if tmp is not None:
                C3, vinf_departure, vinf_arrival = tmp
                vinf_departure = mag(vinf_departure)
                vinf_arrival = mag(vinf_arrival)
                pchp1[i][j] = vinf_departure # + vinf_arrival
            else:
                tqdm.tqdm.write("oh")
                pchp1[i][j] = np.nan
            j += 1
        if i == 0:
            jmax = j - 1
        i += 1


    minindices = np.unravel_index(np.nanargmin(pchp1), pchp1.shape)


    departureTime = minindices[0]*tick_rate[departure] + deltat
    arrivalTime = minindices[1]*tick_rate[arrival] + transfer_range[0] + departureTime
    departureIndex = timeToIndex(departureTime)
    arrivalIndex = timeToIndex(arrivalTime)
    _, vinf_departure, vinf_arrival = porkchop(departureTime, arrivalTime, departure, arrival)

    departureSOI = mag(rplanets[departureIndex, departure] - rplanets[departureIndex, 0])*(masses[departure]/masses[0])**(2/5)
    arrivalSOI = mag(rplanets[arrivalIndex, arrival] - rplanets[arrivalIndex, 0])*(masses[arrival]/masses[0])**(2/5)
    print("Input arrival orbit radius")
    while True:
        arrivalOrbitRadius = input()
        try:
            arrivalOrbitRadius = np.longdouble(arrivalOrbitRadius)
            if arrivalOrbitRadius > arrivalSOI:
                print("Specified radius greater than the SOI of {}".format(names[arrival]))
            elif arrivalOrbitRadius < rad_of_closest_approach[arrival]:
                print("Specified radius is less than the lower limit. Do you want to use this radius nonetheless? (y/n)")
                if input().capitalize() == "Y":
                    break
            else:
                break
        except ValueError:
```

```python
            print("Please input a number")


    rotationVectorEarth = earthUnitRotationVector(departureTime)
    rotationVectorTarget = unitRotationVector(arrivalTime, x)
    earthAtDeparture = rplanets[departureIndex, departure] - rplanets[departureIndex, 0]
    targetAtArrival = rplanets[arrivalIndex, arrival] - rplanets[arrivalIndex, 0]
    #TODO
    s = - np.sum(vinf_departure*rotationVectorEarth)/np.sum(vinf_departure**2)
    N = norm(rotationVectorEarth + s*vinf_departure)
    e = mag(vinf_departure)**2*periapsisEarthOrbit/(mu0) + 1          #See notes made in Vallado
    p = (mag(vinf_departure)**2*periapsisEarthOrbit**2/(mu0) + 2*periapsisEarthOrbit)          #See notes made in Vallado
    true_anomaly = np.arccos(-1/e)       #@infinity
    P = np.array([1/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p/mu0) * (N[2] * vinf_departure[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) - N[1] * vinf_departure[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e * vinf_departure[0] / np.tan(true_anomaly) - vinf_departure[0] / np.sin(true_anomaly) - e**2 * vinf_departure[0] / np.sin(true_anomaly) + N[1]**2 * vinf_departure[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N[2]**2 * vinf_departure[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[1] * vinf_departure[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[2] * vinf_departure[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly)), -((np.sqrt(p/mu0) * (2 * N[2] * vinf_departure[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * N[0] * vinf_departure[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) + vinf_departure[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[0] * N[1] * vinf_departure[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1]**2 * vinf_departure[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1] * N[2] * vinf_departure[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_departure[1] * np.cos(2 * true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))), -((np.sqrt(p/mu0) * (vinf_departure[2] - N[1] * vinf_departure[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * vinf_departure[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * N[2] * vinf_departure[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[1] * N[2] * vinf_departure[1] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[2]**2 * vinf_departure[2] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
    print("TEST 1: VALUE OUGHT TO BE NEAR 0: {}".format(N.dot(P)))
    print("TEST 2: Value ought to be near 1: {}".format(mag(P)))
    Q = np.cross(N, P)
```

```
    true_anomalySOI = np.arccos((p/departureSOI - 1)/e)
    departureVector = (p - departureSOI)/e*P + departureSOI*np.sin(true_anomalySOI)*Q + rplanets[departureIndex, departure] - rplanets[departureIndex, 0]

    s = - np.sum(vinf_arrival*rotationVectorTarget)/np.sum(vinf_arrival**2)
    N = (rotationVectorTarget + s*vinf_arrival)/mag(rotationVectorTarget + s*vinf_arrival)
    print("Test: Value ought to be near 0: {}".format(N.dot(vinf_arrival)))
    e = mag(vinf_arrival)**2*arrivalOrbitRadius/(mu1) + 1
    p = (mag(vinf_arrival)**2*arrivalOrbitRadius**2/(mu1) + 2*arrivalOrbitRadius)
    true_anomaly = -np.arccos(-1/e)
    P = np.array([1/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p/mu1) * (N[2] * vinf_arrival[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) - N[1] * vinf_arrival[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e * vinf_arrival[0] / np.tan(true_anomaly) - vinf_arrival[0] / np.sin(true_anomaly) - e**2 * vinf_arrival[0] / np.sin(true_anomaly) + N[1]**2 * vinf_arrival[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N[2]**2 * vinf_arrival[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[1] * vinf_arrival[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[2] * vinf_arrival[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly)), -((np.sqrt(p/mu1) * (2 * N[2] * vinf_arrival[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * N[0] * vinf_arrival[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) + vinf_arrival[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[0] * N[1] * vinf_arrival[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1]**2 * vinf_arrival[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1] * N[2] * vinf_arrival[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_arrival[1] * np.cos(2 * true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))), -((np.sqrt(p/mu1) * (vinf_arrival[2] - N[1] * vinf_arrival[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * vinf_arrival[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * N[2] * vinf_arrival[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[1] * N[2] * vinf_arrival[1] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[2]**2 * vinf_arrival[2] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
    Q = np.cross(N, P)
    true_anomalySOI = -np.arccos((p/arrivalSOI - 1)/e)
    arrivalVector = (p - arrivalSOI)/e*P + arrivalSOI*np.sin(true_anomalySOI)*Q + rplanets[arrivalIndex, arrival] - rplanets[arrivalIndex, 0]
    while True:
        vinf_departure, vinf_arrival = porkchop(departureTime, arrivalTime, departure, arrival, departureVector, arrivalVector)
```

```
        s = - np.sum(vinf_departure*rotationVectorEarth)/np.sum(vinf_departure**2)
        N0 = (rotationVectorEarth + s*vinf_departure)/mag(rotationVectorEarth + s*vinf_departure)
        e0 = mag(vinf_departure)**2*periapsisEarthOrbit/(mu0) + 1
        p0 = (mag(vinf_departure)**2*periapsisEarthOrbit**2/(mu0) + 2*periapsisEarthOrbit)
        true_anomaly = np.arccos(-1/e0)
        P0 = np.array([1/(1 + e0**2 + 2 * e0 * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p0/mu0) * (N0[2] * vinf_departure[1] * (e0 + np.cos(true_anomaly)) - N0[1] * vinf_departure[2] * (e0 + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e0 * vinf_departure[0] / np.tan(true_anomaly) - vinf_departure[0] / np.sin(true_anomaly) - e0**2 * vinf_departure[0] / np.sin(true_anomaly) + N0[1]**2 * vinf_departure[0] * (e0 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N0[2]**2 * vinf_departure[0] * (e0 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N0[0] * N0[1] * vinf_departure[1] * (e0 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N0[0] * N0[2] * vinf_departure[2] * (e0 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly)), -((np.sqrt(p0/mu0) * (2 * N0[2] * vinf_departure[0] * (e0 + np.cos(true_anomaly)) - 2 * N0[0] * vinf_departure[2] * (e0 + np.cos(true_anomaly)) + vinf_departure[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N0[0] * N0[1] * vinf_departure[0] * (e0 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N0[1]**2 * vinf_departure[1] * (e0 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N0[1] * N0[2] * vinf_departure[2] * (e0 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_departure[1] * np.cos(2 * true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e0**2 + 2 * e0 * np.cos(true_anomaly)))), -((np.sqrt(p0/mu0) * (vinf_departure[2] - N0[1] * vinf_departure[0] * (e0 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N0[0] * vinf_departure[1] * (e0 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N0[0] * N0[2] * vinf_departure[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e0 / np.sin(true_anomaly))**2 + N0[1] * N0[2] * vinf_departure[1] * (1/np.tan(true_anomaly) + e0 / np.sin(true_anomaly))**2 + N0[2]**2 * vinf_departure[2] * (1/np.tan(true_anomaly) + e0 / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1 + e0**2 + 2 * e0 * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
        print("TEST 1: VALUE OUGHT TO BE NEAR 0: {}".format(N0.dot(P0)))
        Q0 = np.cross(N0, P0)
        true_anomalySOI0 = np.arccos((p0/departureSOI - 1)/e0)
        diff1 = departureVector
        geocentricV = (p0 - departureSOI)/e0*P0 + departureSOI*np.sin(true_anomalySOI0)*Q0
        departureVector = geocentricV + rplanets[departureIndex, departure] - rplanets[departureIndex, 0]
        diff1 = mag(diff1 - departureVector)

```

```
        s = - np.sum(vinf_arrival*rotationVectorTarget)/np.sum(vinf_arrival**2)
        N1 = (rotationVectorTarget + s*vinf_arrival)/mag(rotationVectorTarget + s*vinf_arrival)
        e1 = mag(vinf_arrival)**2*arrivalOrbitRadius/(mu1) + 1
        p1 = (mag(vinf_arrival)**2*arrivalOrbitRadius**2/(mu1) + 2*arrivalOrbitRadius)
        true_anomaly = -np.arccos(-1/e1)
        P1 = np.array([1/(1 + e1**2 + 2 * e1 * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p1/mu1) * (N1[2] * vinf_arrival[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) - N1[1] * vinf_arrival[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e1 * vinf_arrival[0] / np.tan(true_anomaly) - vinf_arrival[0] / np.sin(true_anomaly) - e1**2 * vinf_arrival[0] / np.sin(true_anomaly) + N1[1]**2 * vinf_arrival[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N1[2]**2 * vinf_arrival[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N1[0] * N1[1] * vinf_arrival[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N1[0] * N1[2] * vinf_arrival[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly)), -((np.sqrt(p1/mu1) * (2 * N1[2] * vinf_arrival[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) - 2 * N1[0] * vinf_arrival[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) + vinf_arrival[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N1[0] * N1[1] * vinf_arrival[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N1[1]**2 * vinf_arrival[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N1[1] * N1[2] * vinf_arrival[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_arrival[1] * np.cos(2 * true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e1**2 + 2 * e1 * np.cos(true_anomaly)))), -((np.sqrt(p1/mu1) * (vinf_arrival[2] - N1[1] * vinf_arrival[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N1[0] * vinf_arrival[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N1[0] * N1[2] * vinf_arrival[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e1 / np.sin(true_anomaly))**2 + N1[1] * N1[2] * vinf_arrival[1] * (1/np.tan(true_anomaly) + e1 / np.sin(true_anomaly))**2 + N1[2]**2 * vinf_arrival[2] * (1/np.tan(true_anomaly) + e1 / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1 + e1**2 + 2 * e1 * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
        Q1 = np.cross(N1, P1)
        true_anomalySOI1 = -np.arccos((p1/arrivalSOI - 1)/e1)
        diff2 = arrivalVector
        planetocentricV = (p1 - arrivalSOI)/e1*P1 + arrivalSOI*np.sin(true_anomalySOI1)*Q1
        arrivalVector = planetocentricV + rplanets[arrivalIndex, arrival] - rplanets[arrivalIndex, 0]
        if np.isnan(departureVector).any() or np.isnan(arrivalVector).any():
            print("NaN encounterd. Terminating program")
            exit(1)
        diff2 = mag(arrivalVector - diff2)
```

```
        if diff1 + diff2 < 0.5:
            break
    tof0 = hyperbolicTOF(mu0, periapsisEarthOrbit/(1 - e0), e0, true_anomalySOI0)
    tof1 = abs(hyperbolicTOF(mu1, arrivalOrbitRadius/(1 - e1), e1, true_anomalySOI1))
    DepartureTime = epoch + datetime.timedelta(seconds=float(departureTime - tof0))
    ArrivalTime = epoch + datetime.timedelta(seconds=float(arrivalTime + tof1))
    vdep = np.sqrt(mu0/p0)*(e0 + np.cos(0))*Q0
    print("Thrust1:\nTime: {}\nPlanetocentric position: {}\nTarget velocity: {}\n\u0394v: {} ({} km/s)".format(DepartureTime.strftime("%d.%m.%y. %H:%M:%S"), periapsisEarthOrbit*P0, np.sqrt(mu0/p0)*(e0 + np.cos(0))*Q0, (np.sqrt(mu0/p0)*(e0 + 1) - np.sqrt(mu0/periapsisEarthOrbit))*Q0, (np.sqrt(mu0/p0)*(e0 + 1) - np.sqrt(mu0/periapsisEarthOrbit))/1000))
    print("Thrust2:\nTime: {}\nPlanetocentric position: {}\nTarget velocity: {}\n\u0394v: {} ({} km/s)".format(ArrivalTime.strftime("%d.%m.%y. %H:%M:%S"), arrivalOrbitRadius*P1, np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + np.cos(0))*Q1, (np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1) - np.sqrt(mu1/arrivalOrbitRadius))*Q1, (np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1) - np.sqrt(mu1/arrivalOrbitRadius))/1000))
    print("Total \u0394v required: {} km/s".format((np.sqrt(mu0/p0)*(e0 + 1) - np.sqrt(mu0/periapsisEarthOrbit) + np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1) - np.sqrt(mu1/arrivalOrbitRadius))/1000))
    print("Data for simulation:")
    print("t0 = {}".format(departureTime - tof0))
    print("t1 = {}".format(arrivalTime + tof1))
    print("rinit = np.array([\"{}\", \"{}\", \"{}\"], dtype=np.longdouble)".format(periapsisEarthOrbit*P0[0], periapsisEarthOrbit*P0[1], periapsisEarthOrbit*P0[2]))
    rv = np.sqrt(mu0/p0)*(e0 + 1)*Q0
    print("vinit = np.array([\"{}\", \"{}\", \"{}\"], dtype=np.longdouble)".format(rv[0], rv[1], rv[2]))
    print("refpos = np.array([\"{}\", \"{}\", \"{}\"], dtype=np.longdouble)".format(arrivalOrbitRadius*P1[0], arrivalOrbitRadius*P1[1], arrivalOrbitRadius*P1[2]))
    print("target = {}".format(x))
```

A.12 swingby.py

```
import numpy as np
from helpers1 import G, mag, norm
from general_definitions import dt, N2, masses, rad_of_closest_approach, earthUnitRotationVector, tick_rate, unitRotationVector, names, pEpoch
from kepler import C, S
from math import factorial, cos
```

```python


import warnings
from sys import exit
import datetime
import tqdm
from tqdm import trange


def unsigned_angle(a:np.ndarray, b:np.ndarray):
    return np.arccos(np.dot(a,b)/(mag(a)*mag(b)))

def unsignedAngle(array1:np.ndarray, array2:np.ndarray):    #takes two arrays of vectors as inputs, speeds up work with large datasets as we don't need a for loop (about 60 times faster for large arrays, but since both operations are rather fast, we don't actually care)
    if array1.shape != array2.shape:
        print("Arrays are not of the same shape")
        return None
    if array1.shape[-1] != 3:
        print("Warning: 3-dimentional vectors are expected")
    dot = np.sum(array1*array2, axis=-1)
    mag = np.sqrt(np.sum(array1**2, -1)*np.sum(array2**2, -1))
    return np.arccos(dot/mag)


def signed_angle(a:np.ndarray, b:np.ndarray, N:np.ndarray):     #https://stackoverflow.com/questions/5188561/signed-angle-between-two-3d-vectors-with-same-origin-within-the-same-plane
    alpha = np.arctan2(np.dot(np.cross(a,b), N), np.dot(a, b))
    if alpha > 0:
        return alpha
    else:
        return 2*np.pi + alpha

def derC(z):#Checked
    fact = 4
    k = 1
    s = 0
    deltas = 100
    while abs(deltas) > 1e-7:
        # print("{}*z^{}/{}!".format((-1)**k * k, k - 1, fact))
        deltas = (-1)**k*k/factorial(fact)*z**(k - 1)
        s += deltas
        k +=1
        fact+=2
```

```
    return s



def derS(z):#Checked
    fact = 5
    k = 1
    s = 0
    deltas = 100
    while abs(deltas) > 1e-7:
        # print("{}*z^{}/{}!".format((-1)**k*k, (k - 1), fact))
        deltas = (-1)**k*k/factorial(fact)*z**(k - 1)
        s += deltas
        k +=1
        fact+=2
    return s

N2order = N2    #later used for the normal vector
def timeToIndex(t):
    return abs(int(round(t/dt)) + N2order)

def hyperbolicTOF(mu, a, e, true_anomaly):#BUG CHECK
    # print("a: {}".format((-a)**3))
    F = np.arccosh((e + np.cos(true_anomaly))/(1 + e*np.cos(true_anomaly)))
    # if true_anomaly > np.pi and true_anomaly < 2*np.pi:
    #     F = -F
    return abs(np.sqrt((-a)**3/mu)*(e*np.sinh(F) - F))

AHHcount = 0
def porkchop(t1, t2, p1_index, p2_index, r1v=None, r2v=None):        #assuming time from ephemeris epoch; CHECKED
    global AHHcount
    time_1_index = timeToIndex(t1)
    time_2_index = timeToIndex(t2)
    case0 = False
    if r1v is None or r2v is None:
        r1v  = rplanets[time_1_index, p1_index] - rplanets[time_1_index, 0]
        r2v  = rplanets[time_2_index, p2_index] - rplanets[time_2_index, 0]
        case0 = True
    v1v = vplanets[time_1_index, p1_index] - vplanets[time_1_index, 0]
    v2v = vplanets[time_2_index, p2_index] - vplanets[time_2_index, 0]
    mu = G*masses[0]
    t = t2 - t1
    n = np.cross(r1v, r2v)
    h = np.cross(r1v, v1v)
    dv = unsigned_angle(r1v, r2v)
```

```
    if unsigned_angle(n, h) > np.pi/2:          #Genaue überlegungen : siehe arbeitsjournal
        DM = -1
        dv = 2*np.pi - dv
    else:
        DM = 1

    sqrtmu = np.sqrt(mu)
    if abs(dv - np.pi) < 1e-3:
        tqdm.tqdm.write("Collinear state vectors: the plane is not unequely defined")
        return None
    if abs(dv - 2*np.pi) < 1e-3 or dv < 1e-3:
        tqdm.tqdm.write("Collinear state vectors that point in the same direction; isn't optimal anyways")
        return None
        #CHANGE
    r1 = mag(r1v)
    r2 = mag(r2v)
    A = DM*(np.sqrt(r1*r2)*np.sin(dv))/(np.sqrt(1 - np.cos(dv)))
    zn = dv**2
    convergence = False
    for _ in range(50):
        Sn = S(zn)
        Cn = C(zn)
        y = r1 + r2 - A*(1 - zn*Sn)/np.sqrt(Cn)
        if y < 0:
            AHHcount += 1
            return None
        xn = np.sqrt(y/Cn)
        tn = xn**3*Sn/sqrtmu + A*np.sqrt(y)/sqrtmu
        if t < 1 or t < 1e6:
            if abs(t - tn) < 1e-4:
                convergence = True
                break
        elif abs((t - tn)/t) < 1e-4:        #These values no longer correspond to one another (new and old edition) WHY ARE THESE VALUES NORMALIZED
            convergence = True
            break
        if abs(zn) < 0.5:
            dCdz = derC(zn)
            dSdz = derS(zn)
        else:
            dCdz = 1/(2*zn)*(1 - zn*Sn - 2*Cn)
            dSdz = 1/(2*zn)*(Cn - 3*Sn)

        dtdz = xn**3/sqrtmu*(dSdz - (3*Sn*dCdz)/(2*Cn)) + A/(8*sqrtmu)*((3*Sn*np
```

```
            .sqrt(y))/Cn + A/xn)
        zn = zn + (t - tn)/dtdz
    if not convergence:
        tqdm.tqdm.write("The method hasn't converged, returning approximate values")
    f = 1 - y/r1
    g = A*np.sqrt(y/mu)
    dg = 1 - y/r2
    v1 = (r2v - f*r1v)/g
    v2 = (dg*r2v - r1v)/g
    vinf_departure = v1 - v1v
    vinf_arrival = v2 - v2v
    if case0:
        C3 = mag(vinf_departure)**2
        return C3, vinf_departure, vinf_arrival
    else:
        return vinf_departure, vinf_arrival


#Load ephemerides of all Planets:
with open("r.npy", "rb") as file:
    rplanets = np.load(file)
with open("v.npy", "rb") as file:
    vplanets = np.load(file)
now = datetime.datetime.now().replace(hour=0, minute=0, second=0, microsecond=0)
# epoch = datetime.datetime.fromtimestamp(os.path.getmtime('r.npy')).replace(hour=0, minute=0, second=0, microsecond=0) #NOTE: outdated
epoch = pEpoch()
deltat = (now - epoch).total_seconds()      #Time in seconds since ephemeris "epoch"

transfer_time = np.array([[0, 0], [0.4, 1], [2, 3], [3, 7], [10, 17], [10, 31]], dtype=np.longdouble)*31536000      #transfer time from earth [min, max] in years; for mars a range of 1 year is used (which is more than a Hohmann transfer) and 0.4 is slightly lower than the record

periapsisEarthOrbit = 185000 + 6378137      #According to Vallado:



mode0 = False
mode1 = False
mode2 = False


check = True
```

```
while check:
    print("What is your target ?\n6) Saturn\n7) Uranus\n8) Neptune")
    x = input()
    try:
        x = int(x)
        if x < 6 or x > 8:
            print("Invalid index {} cannot be chosen".format(x))
        else:
            check = False
    except ValueError:
        print("Please provide an integer")


departure1 = 3#Earth
arrival1 = 5#Jupiter
departure2 = 5
arrival2 = x#Arrival
range_of_analysis = 12*31536000          #NOTE: Arbitrary choice, to be verified
mu1 = G*masses[departure1]
mu2 = G*masses[arrival1]
mu3 = G*masses[arrival2]

maxRadiusAtArrival = np.min(mag(rplanets[::100, arrival2] - rplanets[::100, 0]))
    *(masses[arrival2]/masses[0])**(2/5)          #perihelion is used; I only use
     every 100th point. With a step-size of 1000s this is around 1.2 days, still
    totally acceptable while a lot faster
print("Input the arrival orbit's radius (min. : {})".format(
    rad_of_closest_approach[arrival2]))
while True:
    arrivalOrbitRadius = input()
    try:
        arrivalOrbitRadius = np.longdouble(arrivalOrbitRadius)
        if arrivalOrbitRadius > maxRadiusAtArrival:
            print("Specified radius greater than the SOI of {}".format(names[
                arrival2]))
        elif arrivalOrbitRadius < rad_of_closest_approach[arrival2]:
            print("Radius is less than the specified lower limit. Do you want to
                 use this radius nonetheless? (y/n)")
            if input().capitalize() == "Y":
                break
        else:
            break
    except ValueError:
        print("Please input a number")

transfer_time = np.array([[np.nan,np.nan],[0.1, 3], [0.2, 0.7], [0, 0], [0.4,
```

```
1], [2, 3], [3, 7], [10, 17], [10, 31]], dtype=np.longdouble)*31536000 #transfer time from earth [min, max] in years; for mars a range of 1 year is used (which is more than a Hohmann transfer) and 0.4 is slightly lower than the record; rough estimates are used for mercury and venus: In order to establish an orbit around mercury, one would have to make multiple venus flybys; for venus: lower limit roughly four months upper limit: more than the hohmann transfer
transfer_range1 =  [transfer_time[arrival1, 0] - transfer_time[departure1, 1], transfer_time[arrival1, 1] - transfer_time[departure1, 0]]
transfer_range2 =  [transfer_time[arrival2, 0] - transfer_time[departure2, 1], transfer_time[arrival2, 1] - transfer_time[departure2, 0]]
search_ranget1 = transfer_range1[1] - transfer_range1[0]
search_ranget2 = transfer_range2[1] - transfer_range2[0]

i = 0
sd1 = int(range_of_analysis/tick_rate[departure1])
sd2 = int(search_ranget1/tick_rate[arrival1]) + 1
pchp1 = np.empty([sd1, sd2, 5], dtype=np.longdouble)
jmax = 0
for t1 in trange(int(deltat), int(deltat + range_of_analysis), int(tick_rate[departure1])):
    j = 0
    for t2 in range(int(t1) + int(transfer_range1[0]), int(t1) + int(transfer_range1[1]), int(tick_rate[arrival1])):
        tmp = porkchop(t1, t2, departure1, arrival1)
        if tmp is not None:
            C3, vinf_departure, vinf_arrival = tmp
            vinf_departure = mag(vinf_departure)
            pchp1[i, j] = C3, vinf_departure, *vinf_arrival
        else:
            pchp1[i, j] = np.nan, np.nan, np.nan, np.nan, np.nan
        j += 1
    if i == 0:
        jmax = j - 1
    i += 1



sd1 = int((range_of_analysis + transfer_range1[1] - transfer_range1[0])/tick_rate[departure2]) + 1
sd2 = int(search_ranget2/tick_rate[arrival2]) + 1
pchp2 = np.empty([sd1, sd2, 4])
i = 0
for t1 in trange(int(deltat + transfer_range1[0]), int(deltat + transfer_range1[1] + range_of_analysis), int(tick_rate[departure2])):
    j = 0
```

```
    for t2 in range(t1 + int(transfer_range2[0]), int(t1 + transfer_range2[1]), int(tick_rate[arrival2])):
        tmp = porkchop(t1, t2, departure2, arrival2)
        if tmp is not None:
            _, vinf_departure, vinf_arrival = tmp
            vinf_arrival = mag(vinf_arrival)
            pchp2[i, j] = *vinf_departure, vinf_arrival
        else:
            pchp2[i, j] = np.nan, np.nan, np.nan, np.nan
        j += 1
    i += 1

tqdm.tqdm.write("AHHHH*({})".format(AHHcount))

def swingbyTimeIndices(t):#Checked; returns the all indices that indicate an arrival time at target of t
    start = int(round((t - (transfer_range1[0] + jmax*tick_rate[arrival1]) - deltat)/tick_rate[departure1]))
    stop = int(round((t - transfer_range1[0] - deltat)/tick_rate[departure1])) + 1
    i = np.arange(start if start > 0 else 0, stop if stop < int(range_of_analysis/tick_rate[departure1]) else int(range_of_analysis/tick_rate[departure1]))        # + 1 because the last element should be inclusive; the starting index for i cannot be lower than 0 and the last index mustn't exceed the highest possible index for i
    pchp1Indices = (i, np.rint((t - i*tick_rate[departure1] - deltat - transfer_range1[0])/tick_rate[arrival1]).astype(np.int64),)
    return pchp1Indices

k = 0
compare = np.empty([sd1], dtype=np.dtype([('dvinf', np.longdouble), ('indices', np.int64, (2, 2))]))
compare[:]['dvinf'] = np.nan
for swingby_time in trange(int(deltat + transfer_range1[0]), int(deltat + transfer_range1[1] + range_of_analysis), int(tick_rate[departure2])):       # for every possible swingby date, select the departure and arrival dates that are best
    pchp1Indices = swingbyTimeIndices(swingby_time)
    if not np.size(pchp1Indices[0]):
        break
    jarray1 = pchp1[pchp1Indices]
    jarray2 = pchp2[k]
    min = np.inf
    m = None    #add safety if the two conditions below should be unfulfilled
    for i in range(len(jarray1)):
        for j in range(len(jarray2)):
```

```
            if mu2/mag(jarray1[i, 2:5])**2 * (1/cos((np.pi - unsignedAngle(jarray1[i, 2:5], jarray2[j, 0:3]))/2) - 1) > rad_of_closest_approach[arrival1]:  #Check if physically possible without crashing
                magdiff = abs(mag(jarray1[i, 2:5]) - mag(jarray2[j, 0:3]))
                if magdiff < 1:  #minimise the difference in magnitude of the ingoing and outgoint vinf vectors at the swingby planet
                    if jarray1[i, 1] < min:
                        min = jarray1[i, 1]
                        m = i, j
    if m is not None:
        i, j = m
        compare[k]['indices'] = (pchp1Indices[0][i], pchp1Indices[1][i]), (k, j)
        compare[k]['dvinf'] = abs(mag(jarray1[i, 2:5]) - mag(jarray2[j, 0:3]))
    else:
        compare[k]['indices'] = (0, 0), (0, 0)
        compare[k]['dvinf'] = np.nan
    k += 1

#first we will choose those with low velocity difference @swingby
indices = np.where(compare['dvinf'] < 1)
# print(indices)
compare = compare[indices]
# print(compare)
#we have now chosen those favorable at swingby. We also want to minimize Δv at departure and arrival. We will do this as follows :
#first: make indices for pchp1&2
pchp1OptimizedIndices = tuple([compare['indices'][:,0, 0], compare['indices'][:,0, 1]])
pchp2OptimizedIndices = tuple([compare['indices'][:,1, 0], compare['indices'][:,1, 1]])

# print(pchp1[pchp1OptimizedIndices][:, 1])
# print(pchp2[pchp2OptimizedIndices])

cvdep = np.sqrt(mu1/periapsisEarthOrbit)          #circular speed at departure
cvarr = np.sqrt(mu3/arrivalOrbitRadius)

#From the Energy equation follows that at distance r = infinity; E=vinf^2/2 and at periapsis = vp^2 / 2 - mu/rp
            #1-Dimentional array, np.nanargmin is ok!
minindex = np.nanargmin(np.sqrt(pchp1[pchp1OptimizedIndices][:, 1]**2 + 2*mu1/periapsisEarthOrbit) - np.sqrt(mu1/periapsisEarthOrbit) + np.sqrt(pchp2[pchp2OptimizedIndices][:, 3]**2 + 2*mu3/arrivalOrbitRadius) - np.sqrt(mu3/arrivalOrbitRadius))

```

```
pchp1Indices = pchp1OptimizedIndices[0][minindex], pchp1OptimizedIndices[1][minindex]
pchp2Indices = pchp2OptimizedIndices[0][minindex], pchp2OptimizedIndices[1][minindex]

#NOTE: Add tests here
t1 = pchp1Indices[0]*tick_rate[departure1] + deltat
t2 = pchp2Indices[0]*tick_rate[departure2] + transfer_range1[0] + deltat
t3 = t2 + transfer_range2[0] + pchp2Indices[1]*tick_rate[arrival2]


# print(t1)
# print(t2)
# print(t3)
departureIndex = timeToIndex(t1)
flybyIndex = timeToIndex(t2)
arrivalIndex = timeToIndex(t3)

_, vinf_dep1, vinf_arr1 = porkchop(t1, t2, departure1, arrival1)
_, vinf_dep2, vinf_arr2 = porkchop(t2, t3, departure2, arrival2)

# print(mag(vinf_arr1) - mag(vinf_dep2))
# print(mag(vinf_dep1))
# print(mag(vinf_arr2))

# rdep = rplanets[departureIndex, departure1] - rplanets[departureIndex, 0]
# rarr = rplanets[flybyIndex, arrival1] - rplanets[flybyIndex, 0]
# vdep = vplanets[departureIndex, departure1] - vplanets[departureIndex, 0] + vinf_dep1
# varr = vplanets[flybyIndex, arrival1] - vplanets[flybyIndex, 0] + vinf_arr1

# muS = G*masses[0]
# evect = (mag(vdep)**2/muS - 1/mag(rdep))*rdep - np.dot(rdep, vdep)/muS*vdep
# hvect = np.cross(rdep, vdep)
# true_anomaly_dep = signed_angle(evect, rdep, norm(hvect))
# true_anomaly_arr = signed_angle(evect, rarr, norm(hvect))
# print("T1: Value ought to be near 0: {}".format(mag(evect - ((mag(varr)**2/muS - 1/mag(rarr))*rarr - np.dot(rarr, varr)/muS*varr))))    #Do the same thing with arrival and departure to verify that they describe the same thing
# print("T2: Value ought to be near 0: {}".format(mag(hvect - np.cross(rarr, varr))))
# p = mag(hvect)**2/muS
# e = mag(evect)
# print(e)
# P = norm(evect)
```

```
# Q = norm(np.cross(hvect, evect))
# def plotter(true_anomaly):
#     return p/(1 + e*np.cos(true_anomaly))*np.cos(true_anomaly)*P + p/(1 + e*np
    .cos(true_anomaly))*np.sin(true_anomaly)*Q
# trajectory = np.empty([10000, 3], dtype=np.longdouble)
# i = 0
# bool1 = True
# for true_anomaly in np.arange(true_anomaly_dep, true_anomaly_arr, (
    true_anomaly_arr - true_anomaly_dep)/10000):
#     if bool1:
#         print(true_anomaly)
#         bool1 = False
#     trajectory[i] = plotter(true_anomaly)
#     i += 1
# print(true_anomaly_arr, "2.549362280593937506")
# print(rdep, plotter(1.056320156631414 3629))
# print(rarr, plotter(2.549362280593937506))
# import matplotlib.pyplot as plt
# from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# ax = plt.axes(projection="3d")
# ax.scatter(*rdep)
# ax.scatter(*rarr)
# ax.plot(*trajectory.T)
# plt.show()


periapsisEarthOrbit = 185000 + 6378137      #According to Vallado:

departureSOI = mag(rplanets[departureIndex, departure1] - rplanets[
    departureIndex, 0])*(masses[departure1]/masses[0])**(2/5)
swingbySOI = mag(rplanets[flybyIndex, departure2] - rplanets[flybyIndex, 0])*(
    masses[departure2]/masses[0])**(2/5)
arrivalSOI = mag(rplanets[arrivalIndex, arrival2] - rplanets[arrivalIndex, 0])*(
    masses[arrival2]/masses[0])**(2/5)


#NOTE: To be verified
rotationVectorEarth = earthUnitRotationVector(t1)      #Not going to change a
    lot
rotationVectorTarget = unitRotationVector(t3, x)
#SOI of earth
s = - np.sum(vinf_dep1*rotationVectorEarth)/np.sum(vinf_dep1**2)
N = norm(rotationVectorEarth + s*vinf_dep1)
# print("Important new test 1")
# print(np.dot(N, vinf_dep1))
e = mag(vinf_dep1)**2*periapsisEarthOrbit/(mu1) + 1      #See notes made in
```

```
Vallado
p = (mag(vinf_dep1)**2*periapsisEarthOrbit**2/(mu1) + 2*periapsisEarthOrbit)          #See notes made in Vallado
true_anomaly = abs(np.arccos(-1/e))      #@infinity
# print(true_anomaly)
P = np.array([1/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p/mu1) * (N[2] * vinf_dep1[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) - N[1] * vinf_dep1[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e * vinf_dep1[0] / np.tan(true_anomaly) - vinf_dep1[0] / np.sin(true_anomaly) - e**2 * vinf_dep1[0] / np.sin(true_anomaly) + N[1]**2 * vinf_dep1[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N[2]**2 * vinf_dep1[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[1] * vinf_dep1[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[2] * vinf_dep1[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly)), -((np.sqrt(p/mu1) * (2 * N[2] * vinf_dep1[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * N[0] * vinf_dep1[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) + vinf_dep1[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[0] * N[1] * vinf_dep1[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1]**2 * vinf_dep1[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1] * N[2] * vinf_dep1[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_dep1[1] * np.cos(2 * true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))), -((np.sqrt(p/mu1) * (vinf_dep1[2] - N[1] * vinf_dep1[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * vinf_dep1[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * N[2] * vinf_dep1[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[1] * N[2] * vinf_dep1[1] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[2]**2 * vinf_dep1[2] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
# print("TEST 1: VALUE OUGHT TO BE NEAR 0: {}".format(N.dot(P)))
# print("TEST 2: Value ought to be near 1: {}".format(mag(P)))
Q = np.cross(N, P)
vtest = np.sqrt(mu1/p)*(-np.sin(true_anomaly)*P + (e + np.cos(true_anomaly))*Q)
# print("Important new test 2")
# print(mag(vinf_dep1 - vtest))
true_anomalySOI = np.arccos((p/departureSOI - 1)/e)
departureVector1 = (p - departureSOI)/e*P + departureSOI*np.sin(true_anomalySOI)*Q + rplanets[departureIndex, departure1] - rplanets[departureIndex, 0]
#Swingby SOI
N = norm(np.cross(vinf_arr1, vinf_dep2))
P = norm(norm(vinf_arr1) - norm(vinf_dep2))
Q = norm(norm(vinf_arr1) + norm(vinf_dep2))
# print("Test1: Value ought to be near 0: {}".format(N.dot(P)))
# print("Test2: Value ought to be near 0: {}".format(mag(np.cross(P, Q) - N)))
turning_angle = unsigned_angle(vinf_arr1, vinf_dep2)
rp = mu2/mag(vinf_arr1)**2*(1/cos((np.pi - turning_angle)/2) - 1)
e = 1/np.sin(turning_angle/2)
```

```
p = mag(vinf_arr1)**2 * rp**2 /mu2 + 2*rp
true_anomalySOIout = np.arccos((p/swingbySOI - 1)/e)
true_anomalySOIin = 2*np.pi - true_anomalySOIout
swingbyTOF2 = hyperbolicTOF(mu2,  p/(1 - e**2), e, true_anomalySOIout)
TimeIn = t2 - swingbyTOF2
TimeInIndex = timeToIndex(TimeIn)
TimeOut = t2 + swingbyTOF2
TimeOutIndex = timeToIndex(TimeOut)
rvSOIin = swingbySOI*cos(true_anomalySOIin)*P + swingbySOI*np.sin(true_anomalySOIin)*Q
rvSOIout = swingbySOI*cos(true_anomalySOIout)*P + swingbySOI*np.sin(true_anomalySOIout)*Q
arrivalVector1 = rvSOIin + rplanets[TimeInIndex, arrival1] - rplanets[TimeInIndex, 0]
departureVector2 = rvSOIout + rplanets[TimeOutIndex, departure2] - rplanets[TimeOutIndex, 0]
#Define arrival SOI:
s = - np.sum(vinf_arr2*rotationVectorTarget)/np.sum(vinf_arr2**2)
N = (rotationVectorTarget + s*vinf_arr2)/mag(rotationVectorTarget + s*vinf_arr2)
# print("Test: Value ought to be near 0: {}".format(N.dot(vinf_arr2)))
e = mag(vinf_arr2)**2*arrivalOrbitRadius/(mu3) + 1
p = (mag(vinf_arr2)**2*arrivalOrbitRadius**2/(mu3) + 2*arrivalOrbitRadius)
true_anomaly = abs(np.arccos(-1/e))
P = np.array([1/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p/mu3) * (N[2] * vinf_arr2[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) - N[1] * vinf_arr2[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e * vinf_arr2[0] / np.tan(true_anomaly) - vinf_arr2[0] / np.sin(true_anomaly) - e**2 * vinf_arr2[0] / np.sin(true_anomaly) + N[1]**2 * vinf_arr2[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N[2]**2 * vinf_arr2[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[1] * vinf_arr2[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N[0] * N[2] * vinf_arr2[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly)), -((np.sqrt(p/mu3) * (2 * N[2] * vinf_arr2[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) - 2 * N[0] * vinf_arr2[2] * (e + np.cos(true_anomaly)) + vinf_arr2[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[0] * N[1] * vinf_arr2[0] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1]**2 * vinf_arr2[1] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N[1] * N[2] * vinf_arr2[2] * (e + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_arr2[1] * np.cos(2 * true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))), -((np.sqrt(p/mu3) * (vinf_arr2[2] - N[1] * vinf_arr2[0] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * vinf_arr2[1] * (e + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N[0] * N[2] * vinf_arr2[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[1] * N[2] * vinf_arr2[1] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2 + N[2]**2 * vinf_arr2[2] * (1/np.tan(true_anomaly) + e / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1 + e**2 + 2 * e * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
```

```
Q = np.cross(N, P)
true_anomalySOI = np.arccos((p/arrivalSOI - 1)/e)
arrivalVector2 = (p - arrivalSOI)/e*P + arrivalSOI*np.sin(true_anomalySOI)*Q + rplanets[arrivalIndex, arrival2] - rplanets[arrivalIndex, 0]
while True:
    vinf_dep1, vinf_arr1 = porkchop(t1, TimeIn, departure1, arrival1, departureVector1, arrivalVector1)
    vinf_dep2, vinf_arr2 = porkchop(TimeOut, t3, departure2, arrival2, departureVector2, arrivalVector2)
    s = - np.sum(vinf_dep1*rotationVectorEarth)/np.sum(vinf_dep1**2)
    N1 = norm(rotationVectorEarth + s*vinf_dep1)
    e1 = mag(vinf_dep1)**2*periapsisEarthOrbit/(mu1) + 1          #See notes made in Vallado
    p1 = (mag(vinf_dep1)**2*periapsisEarthOrbit**2/(mu1) + 2*periapsisEarthOrbit)          #See notes made in Vallado
    true_anomaly = abs(np.arccos(-1/e1))       #@infinity
    P1 = np.array([1/(1 + e1**2 + 2 * e1 * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p1/mu1) * (N1[2] * vinf_dep1[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) - N1[1] * vinf_dep1[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e1 * vinf_dep1[0] / np.tan(true_anomaly) - vinf_dep1[0] / np.sin(true_anomaly) - e1**2 * vinf_dep1[0] / np.sin(true_anomaly) + N1[1]**2 * vinf_dep1[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N1[2]**2 * vinf_dep1[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N1[0] * N1[1] * vinf_dep1[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N1[0] * N1[2] * vinf_dep1[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly)), -((np.sqrt(p1/mu1) * (2 * N1[2] * vinf_dep1[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) - 2 * N1[0] * vinf_dep1[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) + vinf_dep1[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N1[0] * N1[1] * vinf_dep1[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N1[1]**2 * vinf_dep1[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + 2 * N1[1] * N1[2] * vinf_dep1[2] * (e1 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_dep1[1] * np.cos(2 * true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e1**2 + 2 * e1 * np.cos(true_anomaly)))), -((np.sqrt(p1/mu1) * (vinf_dep1[2] - N1[1] * vinf_dep1[0] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N1[0] * vinf_dep1[1] * (e1 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N1[0] * N1[2] * vinf_dep1[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e1 / np.sin(true_anomaly))**2 + N1[1] * N1[2] * vinf_dep1[1] * (1/np.tan(true_anomaly) + e1 / np.sin(true_anomaly))**2 + N1[2]**2 * vinf_dep1[2] * (1/np.tan(true_anomaly) + e1 / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1 + e1**2 + 2 * e1 * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
    # print("TEST 1: VALUE OUGHT TO BE NEAR 0: {}".format(N1.dot(P1)))
    # print("TEST 2: Value ought to be near 1: {}".format(mag(P1)))
    Q1 = np.cross(N1, P1)
    true_anomalySOI1 = np.arccos((p1/departureSOI - 1)/e1)
    diff0 = departureVector1
```

```
        departureVector1 = (p1 - departureSOI)/e1*P1 + departureSOI*np.sin(true_anomalySOI1)*Q1 + rplanets[departureIndex, departure1] - rplanets[departureIndex, 0]
        diff0 = mag(departureVector1 - diff0)
        #Swingby SOI
        N2 = norm(np.cross(vinf_arr1, vinf_dep2))
        P2 = norm(norm(vinf_arr1) - norm(vinf_dep2))
        Q2 = norm(norm(vinf_arr1) + norm(vinf_dep2))
        # print("Test1: Value ought to be near 0: {}".format(N2.dot(P2)))
        # print("Test2: Value ought to be near 0: {}".format(mag(np.cross(P2, Q2) - N2)))
        turning_angle = unsigned_angle(vinf_arr1, vinf_dep2)
        rp = mu2/mag(vinf_arr1)**2*(1/cos((np.pi - turning_angle)/2) - 1)
        e2 = 1/np.sin(turning_angle/2)
        p2 = mag(vinf_arr1)**2 * rp**2 /mu2 + 2*rp
        true_anomalySOIout = np.arccos((p2/swingbySOI - 1)/e2)
        true_anomalySOIin = 2*np.pi - true_anomalySOIout

        swingbyTOF2 = hyperbolicTOF(mu2, p2/(1 - e2**2), e2, true_anomalySOIout)
        TimeIn = t2 - swingbyTOF2
        TimeInIndex = timeToIndex(TimeIn)
        TimeOut = t2 + swingbyTOF2
        TimeOutIndex = timeToIndex(TimeOut)
        rvSOIin = swingbySOI*cos(true_anomalySOIin)*P2 + swingbySOI*np.sin(true_anomalySOIin)*Q2
        rvSOIout = swingbySOI*cos(true_anomalySOIout)*P2 + swingbySOI*np.sin(true_anomalySOIout)*Q2
        diff1 = arrivalVector1
        arrivalVector1 = rvSOIin + rplanets[TimeInIndex, arrival1] - rplanets[TimeInIndex, 0]
        diff1 = mag(arrivalVector1 - diff1)
        diff2 = departureVector2
        departureVector2 = rvSOIout + rplanets[TimeOutIndex, departure2] - rplanets[TimeOutIndex, 0]
        diff2 = mag(departureVector2 - diff2)
        #Define arrival SOI:
        s = - np.sum(vinf_arr2*rotationVectorTarget)/np.sum(vinf_arr2**2)
        N3 = (rotationVectorTarget + s*vinf_arr2)/mag(rotationVectorTarget + s*vinf_arr2)
        # print("Test: Value ought to be near 0: {}".format(N3.dot(vinf_arr2)))
        e3 = mag(vinf_arr2)**2*arrivalOrbitRadius/(mu3) + 1
        p3 = (mag(vinf_arr2)**2*arrivalOrbitRadius**2/(mu3) + 2*arrivalOrbitRadius)
        true_anomaly = abs(np.arccos(-1/e3))#see p 17 notes
        P3 = np.array([1/(1 + e3**2 + 2 * e3 * np.cos(true_anomaly)) * np.sqrt(p3/mu3) * (N3[2] * vinf_arr2[1] * (e3 + np.cos(true_anomaly)) - N3[1] * vinf_arr2[2] * (e3 + np.cos(true_anomaly)) - 2 * e3 * vinf_arr2[0] / np.
```

```
        tan(true_anomaly) - vinf_arr2[0] / np.sin(true_anomaly) - e3**2 *
        vinf_arr2[0] / np.sin(true_anomaly) + N3[1]**2 * vinf_arr2[0] * (e3 + np.
        cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) + N3[2]**2 * vinf_arr2[0] *
        (e3 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N3[0] * N3[1] *
        vinf_arr2[1] * (e3 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - N3
        [0] * N3[2] * vinf_arr2[2] * (e3 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(
        true_anomaly)), -((np.sqrt(p3/mu3) * (2 * N3[2] * vinf_arr2[0] * (e3 + np
        .cos(true_anomaly)) - 2 * N3[0] * vinf_arr2[2] * (e3 + np.cos(
        true_anomaly)) + vinf_arr2[1] / np.sin(true_anomaly) + 2 * N3[0] * N3[1]
        * vinf_arr2[0] * (e3 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) +
        2 * N3[1]**2 * vinf_arr2[1] * (e3 + np.cos(true_anomaly))**2 / np.sin(
        true_anomaly) + 2 * N3[1] * N3[2] * vinf_arr2[2] * (e3 + np.cos(
        true_anomaly))**2 / np.sin(true_anomaly) - vinf_arr2[1] * np.cos(2 *
        true_anomaly) / np.sin(true_anomaly)))/(2 * (1 + e3**2 + 2 * e3 * np.cos(
        true_anomaly)))), -((np.sqrt(p3/mu3) * (vinf_arr2[2] - N3[1] * vinf_arr2
        [0] * (e3 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N3[0] *
        vinf_arr2[1] * (e3 + np.cos(true_anomaly)) / np.sin(true_anomaly) + N3[0]
         * N3[2] * vinf_arr2[0] * (1/np.tan(true_anomaly) + e3 / np.sin(
        true_anomaly))**2 + N3[1] * N3[2] * vinf_arr2[1] * (1/np.tan(true_anomaly
        ) + e3 / np.sin(true_anomaly))**2 + N3[2]**2 * vinf_arr2[2] * (1/np.tan(
        true_anomaly) + e3 / np.sin(true_anomaly))**2) * np.sin(true_anomaly))/(1
         + e3**2 + 2 * e3 * np.cos(true_anomaly)))], dtype=np.longdouble)
    Q3 = np.cross(N3, P3)
    true_anomalySOI3 = np.arccos((p3/arrivalSOI - 1)/e3)
    diff3 = arrivalVector2
    arrivalVector2 = (p3 - arrivalSOI)/e3*P3 + arrivalSOI*np.sin(
        true_anomalySOI3)*Q3 + rplanets[arrivalIndex, arrival2] - rplanets[
        arrivalIndex, 0]
    diff3 = mag(arrivalVector2 - diff3)
    # print(diff0, diff1, diff2, diff3)
    # print("Difference in total : {}".format(diff0 + diff1 + diff2 + diff3))
    if diff0 + diff1 + diff2 + diff3 < 0.5:
        break
#Achtung: Verschiebung um 1 bei den indices!!!
tof0 = hyperbolicTOF(mu1, periapsisEarthOrbit/(1 - e1), e1, true_anomalySOI1)
tofarrival = abs(hyperbolicTOF(mu3, arrivalOrbitRadius/(1 - e3), e3,
    true_anomalySOI3))
DepartureTime = epoch + datetime.timedelta(seconds=float(t1 - tof0))
ArrivalTime = epoch + datetime.timedelta(seconds=float(t3 + tofarrival))
print("Thrust1:\nTime: {}\nHeliocentric position: {}\nTarget velocity: {}\n\
    u0394v: {} ({} km/s)".format(DepartureTime.strftime("%d.%m.%y    %H:%M:%S"),
     periapsisEarthOrbit*P1 + rplanets[departureIndex, departure1] - rplanets[
    departureIndex, 0], np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1)*Q1, (np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1) -
    np.sqrt(mu1/periapsisEarthOrbit))*Q1, (np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1) - np.sqrt(mu1
    /periapsisEarthOrbit))/1000))
print("Thrust2:\nTime: {}\nHeliocentric position: {}\nTarget velocity: {}\n\
```

```
u0394v: {} ({} km/s)".format(ArrivalTime.strftime("%d.%m.%y.    %H:%M:%S"), arrivalOrbitRadius*P3 + rplanets[arrivalIndex, arrival2] - rplanets[arrivalIndex, 0], np.sqrt(mu3/p3)*(e3 + 1)*Q3, (np.sqrt(mu3/p3)*(e3 + 1) - np.sqrt(mu3/arrivalOrbitRadius))*Q3, (np.sqrt(mu3/p3)*(e3 + 1) - np.sqrt(mu3/arrivalOrbitRadius))/1000))
print("Total \u0394v required: {} km/s".format((np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1) - np.sqrt(mu1/periapsisEarthOrbit) + np.sqrt(mu3/p3)*(e3 + 1) - np.sqrt(mu3/arrivalOrbitRadius))/1000))
print("The difference in v_infty magnitude at swingby: {}".format(abs(mag(vinf_dep2) - mag(vinf_arr1))))
print("Data for simulation :")
print("t0 =  {}".format(t1 - tof0))
print("t1 = {}".format(t3 + tofarrival))
print("rinit = np.array([\"{}\", \"{}\", \"{}\"], dtype=np.longdouble)".format(periapsisEarthOrbit*P1[0], periapsisEarthOrbit*P1[1], periapsisEarthOrbit*P1[2]))
rv = np.sqrt(mu1/p1)*(e1 + 1)*Q1
print("vinit = np.array([\"{}\", \"{}\", \"{}\"], dtype=np.longdouble)".format(rv[0], rv[1], rv[2]))
print("refpos = np.array([\"{}\", \"{}\", \"{}\"], dtype=np.longdouble)".format(arrivalOrbitRadius*P3[0], arrivalOrbitRadius*P3[1], arrivalOrbitRadius*P3[2]))
print("target = {}".format(x))
```

A.13 rocket.py

```
import numpy as np
from helpers1 import *
from general_definitions import *
import datetime
from tqdm import tqdm
from math import ceil

Nold = N
N2old = N2

b = [[94815908183/402361344000, -307515172843/373621248000, 2709005666077/1307674368000, -2309296746931/523069747200, 507942835493/69742632960, -4007043002299/435891456000, 2215533/250250, -2816016533573/435891456000, 175102023617/49816166400, -144690945961/104613949440, 486772076771/1307674368000, -160495253651/2615348736000, 2224234463/475517952000],
[2224234463/475517952000, 7034932909/40236134400, -599204812637/1307674368000, 18278957351/24908083200, -373290894521/348713164800, 550602114107/435891456000, -4538591/3891888, 360347741893/435891456000,
```

−153580740679/348713164800, 89210842829/523069747200,
−8468059909/186810624000, 3869513783/523069747200, −4012317/7175168000],
13 [−4012317/7175168000, 31245653651/2615348736000, 1199987603/9144576000,
−31205504599/104613949440, 116481399481/348713164800,
−21844230061/62270208000, 18461231/60810750, −90050181701/435891456000,
7462997467/69742632960, −7078368623/174356582400, 13891101923/1307674368000,
−4478654099/2615348736000, 13681829/106748928000],
14 [13681829/106748928000, −5820152083/2615348736000, 5739162887/261534873600,
345913117/3657830400, −72062156729/348713164800, 73700317499/435891456000,
−261983/2002000, 1041757943/12454041600, −14518999879/348713164800,
8038193101/523069747200, −5153476771/1307674368000, 148748057/237758976000,
−1935865/41845579776],
15 [−1935865/41845579776, 173463193/237758976000, −1089820997/186810624000,
6133014383/174356582400, 149947703/2438553600, −12825001151/87178291200,
5454343/60810750, −22437447749/435891456000, 8407070279/348713164800,
−639529483/74724249600, 558737863/261534873600, −869611667/2615348736000,
521303/21525504000],
16 [521303/21525504000, −944389651/2615348736000, 3424241827/1307674368000,
−6674450381/523069747200, 522979469/9963233280, 92427157/3048192000,
−51350723/486486000, 20981972677/435891456000, −7081103431/348713164800,
236881763/34871316480, −2134386979/1307674368000, 92427157/373621248000,
−92427157/5230697472000],
17 [−92427157/5230697472000, 132822967/523069747200, −2274524387/1307674368000,
4013113421/523069747200, −8855328071/348713164800, 32793164357/435891456000,
0, −32793164357/435891456000, 8855328071/348713164800,
−4013113421/523069747200, 2274524387/1307674368000, −132822967/523069747200,
92427157/5230697472000],
18 [92427157/5230697472000, −92427157/373621248000, 2134386979/1307674368000,
−236881763/34871316480, 7081103431/348713164800, −20981972677/435891456000,
51350723/486486000, −92427157/3048192000, −522979469/9963233280,
6674450381/523069747200, −3424241827/1307674368000, 944389651/2615348736000,
−521303/21525504000],
19 [−521303/21525504000, 869611667/2615348736000, −558737863/261534873600,
639529483/74724249600, −8407070279/348713164800, 22437447749/435891456000,
−5454343/60810750, 12825001151/87178291200, −149947703/2438553600,
−6133014383/174356582400, 1089820997/186810624000, −173463193/237758976000,
1935865/41845579776],
20 [1935865/41845579776, −148748057/237758976000, 5153476771/1307674368000,
−8038193101/523069747200, 14518999879/348713164800, −1041757943/12454041600,
261983/2002000, −73700317499/435891456000, 72062156729/348713164800,
−345913117/3657830400, −5739162887/261534873600, 5820152083/2615348736000,
−13681829/106748928000],
21 [−13681829/106748928000, 4478654099/2615348736000, −13891101923/1307674368000,
7078368623/174356582400, −7462997467/69742632960, 90050181701/435891456000,
−18461231/60810750, 21844230061/62270208000, −116481399481/348713164800,
31205504599/104613949440, −1199987603/9144576000, −31245653651/2615348736000,

```
    4012317/7175168000],
[4012317/7175168000, −3869513783/523069747200, 8468059909/186810624000,
    −89210842829/523069747200, 153580740679/348713164800,
    −360347741893/435891456000, 4538591/3891888, −550602114107/435891456000,
    373290894521/348713164800, −18278957351/24908083200,
    599204812637/1307674368000, −7034932909/40236134400,
    −2224234463/475517952000],
[−2224234463/475517952000, 160495253651/2615348736000,
    −486772076771/1307674368000, 144690945961/104613949440,
    −175102023617/49816166400, 2816016533573/435891456000, −2215533/250250,
    4007043002299/435891456000, −507942835493/69742632960,
    2309296746931/523069747200, −2709005666077/1307674368000,
    307515172843/373621248000, −94815908183/402361344000],
[106364763817/402361344000, −9000055832083/2615348736000,
    491703913717/23775897600, −13247042672623/174356582400,
    66393001798471/348713164800, −149831214658501/435891456000,
    31975145483/69498000, −40318232897599/87178291200,
    121844891963321/348713164800, −102675619234099/523069747200,
    104639289835229/1307674368000, −59344946587373/2615348736000,
    733526173/172204032]]

a = [[132282840127/2414168064000, 192413017/1162377216,
    −183706612697/348713164800, 133373184587/112086374400,
    −467089093853/232475443200, 26637354127/10378368000,
    −186038426051/74724249600, 5304463979/2905943040, −77220056327/77491814400,
    308415783287/784604620800, −8800586233/83026944000, 1525695617/87178291200,
    −1197622087/896690995200],
[−1197622087/896690995200, 14516634431/201180672000, 64188105383/1046139494400,
    −227269902593/1569209241600, 23409520499/99632332800,
    −25305946559/87178291200, 102644956367/373621248000, −492615587/2490808320,
    74251645873/697426329600, −65181504263/1569209241600,
    11614474687/1046139494400, −679920221/373621248000, 866474507/6276836966400],
[866474507/6276836966400, −2046617/653837184, 3033240127/36578304000,
    613021979/28021593600, −4596037109/99632332800, 2439013/42567525,
    −3989974979/74724249600, 2062196293/54486432000, −14026509859/697426329600,
    380746409/49037788800, −12299341/5977939968, 446819/1334361600,
    −72041419/2853107712000],
[−72041419/2853107712000, 58072601/124540416000, −423410459/83026944000,
    989217599/10973491200, 296244089/77491814400, −1980839447/145297152000,
    5218829519/373621248000, −1462665121/145297152000, 177708673/33210777600,
    −65905289/32024678400, 946410977/1743565824000, −315501/3587584000,
    207259963/31384184832000],
[207259963/31384184832000, −20754971/186810624000, 5133428761/5230697472000,
    −5483137573/784604620800, 462681151/4877107200, −145599917/31135104000,
    −859562191/373621248000, 574469327/217945728000, −156165377/99632332800,
    493595561/784604620800, −885138967/5230697472000, 3292123/118879488000,
```

−9374747/4483454976000],
31 [−9374747/4483454976000, 1606609/47551795200, −40978319/149448499200,
2478440803/1569209241600, −5916580259/697426329600, 297378623/3048192000,
−123511513/14944849920, 2290603/1779148800, −38522503/697426329600,
−16224893/224172748800, 162596491/5230697472000, −3203699/523069747200,
3203699/6276836966400],
32 [3203699/6276836966400, −1901831/217945728000, 5132899/69742632960,
−164834207/392302310400, 452015111/232475443200, −22134407/2421619200,
36740617/373248000, −22134407/2421619200, 452015111/232475443200,
−164834207/392302310400, 5132899/69742632960, −1901831/217945728000,
3203699/6276836966400],
33 [3203699/6276836966400, −3203699/523069747200, 162596491/5230697472000,
−16224893/224172748800, −38522503/697426329600, 2290603/1779148800,
−123511513/14944849920, 297378623/3048192000, −5916580259/697426329600,
2478440803/1569209241600, −40978319/149448499200, 1606609/47551795200,
−9374747/4483454976000],
34 [−9374747/4483454976000, 3292123/118879488000, −885138967/5230697472000,
493595561/784604620800, −156165377/99632332800, 574469327/217945728000,
−859562191/373621248000, −145599917/31135104000, 462681151/4877107200,
−5483137573/784604620800, 5133428761/5230697472000, −20754971/186810624000,
207259963/31384184832000],
35 [207259963/31384184832000, −315501/3587584000, 946410977/1743565824000,
−65905289/32024678400, 177708673/33210777600, −1462665121/145297152000,
5218829519/373621248000, −1980839447/145297152000, 296244089/77491814400,
989217599/10973491200, −423410459/83026944000, 58072601/124540416000,
−72041419/2853107712000],
36 [−72041419/2853107712000, 446819/1334361600, −12299341/5977939968,
380746409/49037788800, −14026509859/697426329600, 2062196293/54486432000,
−3989974979/74724249600, 2439013/42567525, −4596037109/99632332800,
613021979/28021593600, 3033240127/36578304000, −2046617/653837184,
866474507/6276836966400],
37 [866474507/6276836966400, −679920221/373621248000, 11614474687/1046139494400,
−65181504263/1569209241600, 74251645873/697426329600, −492615587/2490808320,
102644956367/373621248000, −25305946559/87178291200, 23409520499/99632332800,
−227269902593/1569209241600, 64188105383/1046139494400,
14516634431/201180672000, −1197622087/896690995200],
38 [−1197622087/896690995200, 1525695617/87178291200, −8800586233/83026944000,
308415783287/784604620800, −77220056327/77491814400, 5304463979/2905943040,
−186038426051/74724249600, 26637354127/10378368000,
−467089093853/232475443200, 133373184587/112086374400,
−183706612697/348713164800, 192413017/1162377216,
132282840127/2414168064000],
39 [132282840127/2414168064000, −1866476396209/2615348736000,
2040667428953/475517952000, −24757711059413/1569209241600,
27597902895821/697426329600, −31173587791351/435891456000,
5116077905657/53374464000, −42070857451313/435891456000,

```
    50972790156553/697426329600, -64631301332531/1569209241600,
    88195348546091/5230697472000, -12555699585959/2615348736000,
    2504631949133/2853107712000]]
N=12
N2 = int(N/2)


#Faster function for the calculation of accelerations
masses1 = masses[np.newaxis, :, np.newaxis]
def aGeneral(rAllPlanets):
    deltar = rAllPlanets[np.newaxis, :] - rAllPlanets[:,np.newaxis]
    distanceFactor = (np.sqrt(np.sum(deltar**2, axis=-1))**3)[:,:,np.newaxis]
    return np.sum(np.divide(deltar, distanceFactor, out=np.zeros_like(deltar),
        where=np.rint(distanceFactor)!=0)*G*masses1, axis=1)



#UI:
# t0 =  373246737.99170226
# t1 = 578499117.7331004
# rinit = np.array(["4144393.343943437", "-4942696.470309006",
    "-1211826.1813648157"], dtype=np.longdouble)
# vinit = np.array(["11127.632798784025", "7561.947853523697",
    "7212.976972498207"], dtype=np.longdouble)
# refpos = np.array(["116981803.91779557", "485211077.83533645",
    "-29756805.910740476"], dtype=np.longdouble)
# target = 6

#testing values:
t0 = 0
t1 = 31536000
rinit = np.array([6478100,0, 0], dtype=np.longdouble)
vinit = np.array([0, 10000, 0], dtype=np.longdouble)
refpos = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
target = 3

#r0, v0
import time
starttime = time.time()
#LOADING SELF-CALCULATED EPHEMERIS:
with open("r.npy", "rb") as file:
    rplanets_load = np.load(file)
with open("v.npy", "rb") as file:
    vplanets_load = np.load(file)

print("Time to load files: {:.2f}s".format(time.time() - starttime))
```

```

#Startup and Interpolation
planetarydt = dt
dt = 100
sl = int(planetarydt/dt) - 1          #This only works if multiples of 100 (dt) are used as planetarydt
forwards =  sl//2 + sl%2
backwards = sl//2

#redefining sl for later purposes:
sl += 1


T = t1 - t0
steps = int(T/dt) + N2 + 2

rplanets = np.empty([steps,9,3], dtype=np.longdouble)
vplanets = np.empty([steps,9,3], dtype=np.longdouble)



b0 = t0 - dt*N2      #backpoint 0
IDX0 = ceil(b0/planetarydt) + N2old     #used later for slicing
print(IDX0)
IDX1 = int(t1/planetarydt) + N2old
print(IDX1)
p0 = ceil(b0/planetarydt)*sl - round(b0/dt)            #step in terms of dt - nearest calculated point = number of steps to be interpolated backwards & index of the first grid-point to be used
p1 = int(t1/planetarydt)*sl - round(b0/dt)             #from b0 to t1, how many points are used.
print(p0)
print(p1)

rplanets[p0:p1 + 1:sl] = rplanets_load[IDX0:IDX1 + 1]
vplanets[p0:p1 + 1:sl] = vplanets_load[IDX0:IDX1 + 1]

rplanets_load = None
del rplanets_load
vplanets_load = None
del vplanets_load

masses2 = masses[np.newaxis, np.newaxis, :, np.newaxis]
def aGeneral2(rAllPlanets):
    deltar = rAllPlanets[:,np.newaxis, :] - rAllPlanets[:,:,np.newaxis]
    distanceFactor = (np.sqrt(np.sum(deltar**2, axis=-1))**3)[:,:,:,np.newaxis]
```

```
    return np.sum(np.divide(deltar, distanceFactor, out=np.zeros_like(deltar),
        where=np.rint(distanceFactor)!=0)*G*masses1, axis=2)

dt = -dt
for i in range(p0):
    m0 = vplanets[p0 - i]
    k0 = aGeneral(rplanets[p0 - i])
    m1 = vplanets[p0 - i] + k0*dt/2
    k1 = aGeneral(rplanets[p0 - i] + m0*dt/2)
    m2 = vplanets[p0 - i] + k1*dt/2
    k2 = aGeneral(rplanets[p0 - i] + m1*dt/2)
    m3 = vplanets[p0 - i] + k2*dt/2
    k3 = aGeneral(rplanets[p0 - i] + m2*dt/2)
    vplanets[p0 - i - 1] = vplanets[p0 - i] + (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)*dt/6
    rplanets[p0 - i - 1] = rplanets[p0 - i] + (m0 + 2*m1 + 2*m2 + m3)*dt/6

with tqdm(total=(sl - 1)*4) as pbar:
    for i in range(backwards):
        m0 = vplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl]
        k0 = aGeneral2(rplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl])
        pbar.update(1)
        m1 = vplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] + k0*dt/2
        k1 = aGeneral2(rplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] + m0*dt/2)
        pbar.update(1)
        m2 = vplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] + k1*dt/2
        k2 = aGeneral2(rplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] + m1*dt/2)
        pbar.update(1)
        m3 = vplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] + k2*dt
        k3 = aGeneral2(rplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] + m2*dt)
        pbar.update(1)
        vplanets[p0 + sl - i - 1:p1 + 1:sl] = vplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] +
            (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)*dt/6
        rplanets[p0 + sl - i - 1:p1 + 1:sl] = rplanets[p0 + sl - i:p1 + 1:sl] +
            (m0 + 2*m1 + 2*m2 + m3)*dt/6

    dt = -dt
    for i in range(forwards):
        m0 = vplanets[p0 + i:p1:sl]
        k0 = aGeneral2(rplanets[p0 + i:p1:sl])      #p1 is the last point that
            is a multiple of sl. It is not included. This is deliberate behaviour
            , we will extrapolate later
        pbar.update(1)
        m1 = vplanets[p0 + i:p1:sl] + k0*dt/2
        k1 = aGeneral2(rplanets[p0 + i:p1:sl] + m0*dt/2)
        pbar.update(1)
        m2 = vplanets[p0 + i:p1:sl] + k1*dt/2
```

```
            k2 = aGeneral2(rplanets[p0 + i:p1:sl] + m1*dt/2)
            pbar.update(1)
            m3 = vplanets[p0 + i:p1:sl] + k2*dt
            k3 = aGeneral2(rplanets[p0 + i:p1:sl] + m2*dt)
            pbar.update(1)
            vplanets[p0 + i + 1:p1:sl] = vplanets[p0 + i:p1:sl] + (k0 + 2*k1 + 2*k2
                + k3)*dt/6
            rplanets[p0 + i + 1:p1:sl] = rplanets[p0 + i:p1:sl] + (m0 + 2*m1 + 2*m2
                + m3)*dt/6

print(np.arange(p0 + forwards, p1, sl)[-1])
print(p1)
print(steps)

for i in range(steps - p1 - 1):
    m0 = vplanets[p1 + i]
    k0 = aGeneral(rplanets[p1 + i])
    m1 = vplanets[p1 + i] + k0*dt/2
    k1 = aGeneral(rplanets[p1 + i] + m0*dt/2)
    m2 = vplanets[p1 + i] + k1*dt/2
    k2 = aGeneral(rplanets[p1 + i] + m1*dt/2)
    m3 = vplanets[p1 + i] + k2*dt/2
    k3 = aGeneral(rplanets[p1 + i] + m2*dt/2)
    vplanets[p1 + i + 1] = vplanets[p1 + i] + (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)*dt/6
    rplanets[p1 + i + 1] = rplanets[p1 + i] + (m0 + 2*m1 + 2*m2 + m3)*dt/6

# from vis import *
# Earth = rplanets[-100:,3]
# lign(Earth, '#3d4782')
# plot()

#Interpolation complete !
# with open("rocketdata.npy", "rb") as file:
#     r = np.load(file)
# print(np.min(mag(r - rplanets[:, target])))
# exit(0)

r = np.empty([steps,3], dtype=np.longdouble)
v = np.empty([steps,3], dtype=np.longdouble)

#DECLARING INITIAL CONDITIONS:
r[N2] = rplanets[N2][3] + rinit        #transformation from earth to other
    coordinates!
v[N2] = vplanets[N2][3] + vinit


```

```
def fs(rpl, rsat):
    deltar = rpl - rsat[np.newaxis ,:]
    distanceFactor = (np.sqrt(np.sum(deltar**2, axis=-1))**3)[:,np.newaxis]
    return np.sum(np.divide(deltar, distanceFactor, out=np.zeros_like(deltar),
        where=np.rint(distanceFactor)!=0)*(G*masses[:, np.newaxis]), axis=0)

def f(n):
    deltar = rplanets[n] - r[n][np.newaxis ,:]
    distanceFactor = (np.sqrt(np.sum(deltar**2, axis=-1))**3)[:,np.newaxis]
    return np.sum(np.divide(deltar, distanceFactor, out=np.zeros_like(deltar),
        where=np.rint(distanceFactor)!=0)*(G*masses[:, np.newaxis]), axis=0)



stepli = np.empty([4,2,objcount,3], dtype=np.longdouble)

dt = -dt
for k in range(N2):
    stepli[0, 0] = vplanets[N2 - k]
    stepli[0, 1] = aGeneral(rplanets[N2 - k])
    stepli[1, 0] = vplanets[N2 - k] + stepli[0, 1]*dt/4
    stepli[1, 1] = aGeneral(rplanets[N2 - k] + stepli[0, 0]*dt/4)
    stepli[2, 0] = vplanets[N2 - k] + stepli[1, 1]*dt/4
    stepli[2, 1] = aGeneral(rplanets[N2 - k] + stepli[1, 0]*dt/4)
    stepli[3, 0] = vplanets[N2 - k] + stepli[2, 1]*dt/2
    stepvectm = r[N2 - k] + (stepli[0, 0] + stepli[1, 0]*2 + stepli[2, 0]*2 +
        stepli[3, 0])*dt/12

    m0 = v[N2 - k]
    k0 = fs(rplanets[N2 - k], r[N2 - k])
    m1 = v[N2 - k] + k0*dt/2
    k1 = fs(stepvectm, m0*dt/2)
    m2 = v[N2 - k] + k1*dt/2
    k2 = fs(stepvectm, m1*dt/2)
    m3 = v[N2 - k] + k2*dt
    k3 = fs(rplanets[N2 - k - 1], m2*dt)
    r[N2 - k - 1] = r[N2 - k] + (m0 + m1*2 + m2*2 + m3)*dt/6
    v[N2 - k - 1] = v[N2 - k] + (k0 + k1*2 + k2*2 + k3)*dt/6

dt = -dt
for k in range(N2):
    stepli[0, 0] = vplanets[N2 + k]
    stepli[0, 1] = aGeneral(rplanets[N2 + k])
    stepli[1, 0] = vplanets[N2 + k] + stepli[0, 1]*dt/4
    stepli[1, 1] = aGeneral(rplanets[N2 + k] + stepli[0, 0]*dt/4)
    stepli[2, 0] = vplanets[N2 + k] + stepli[1, 1]*dt/4
```

```
        stepli[2, 1] = aGeneral(rplanets[N2 + k] + stepli[1, 0]*dt/4)
        stepli[3, 0] = vplanets[N2 + k] + stepli[2, 1]*dt/2
        stepvectm = r[N2 + k] + (stepli[0, 0] + stepli[1, 0]*2 + stepli[2, 0]*2 +
            stepli[3, 0])*dt/12

        m0 = v[N2 + k]
        k0 = fs(rplanets[N2 + k], r[N2 + k])
        m1 = v[N2 + k] + k0*dt/2
        k1 = fs(stepvectm, m0*dt/2)
        m2 = v[N2 + k] + k1*dt/2
        k2 = fs(stepvectm, m1*dt/2)
        m3 = v[N2 + k] + k2*dt
        k3 = fs(rplanets[N2 + k + 1], m2*dt)
        r[N2 + k + 1] = r[N2 + k] + (m0 + m1*2 + m2*2 + m3)*dt/6
        v[N2 + k + 1] = v[N2 + k] + (k0 + k1*2 + k2*2 + k3)*dt/6




C1s = np.empty([3], dtype=np.longdouble)
S0 = np.empty([3], dtype=np.longdouble)

def resets():
    global C1s, S0, Sn, sn
    #defining C1s
    sum1 = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
    for k in range(N + 1):
        sum1 += f(k)*b[N2][k]
    C1s = v[N2]/dt - sum1
    #Defining S0:
    sum2 = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
    for k in range(N + 1):
        sum2 += f(k)*a[N2][k]
    S0 = r[N2]/dt**2 - sum2
    sn = C1s
    Sn = S0
resets()

def getss(n):
    global Sn, sn
    if n == N2:
        resets()
        return Sn
    elif -1 < n < N2:
        resets()
        for j in range(N2 - n):
```

```
                Sn = Sn - sn + f(N2 - j)*0.5
                sn -= (f(N2 - j) + f(N2 - j - 1))*0.5
            return sn, Sn
        elif n > N2:
            resets()
            for j in range(n - N2):
                Sn += sn + f(N2 + j)*0.5
                sn += (f(N2 + j) + f(N2 + j + 1))*0.5
            return sn, Sn

def getsr(n):
    global Sn, sn
    if n == N + 1:
        resets()
        for j in range(n - N2 - 1):
            if j != 0:
                sn += (f(N2 + j - 1) + f(N2 + j))*0.5
            Sn += sn + f(N2 + j)*0.5

    sn += (f(n - 2) + f(n - 1))*0.5
    Sn += sn + f(n - 1)*0.5
    return sn, Sn

def getssr(n):
    global sn
    return sn + (f(n - 1) + f(n))*0.5

maxa = 1
while maxa > 0.00000000001:
    maxa = 0
    for n in range(N + 1):
        if n != N2:
            s, S = getss(n)
            aold = f(n)
            #correct starting value
            sum3r = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
            sum3v = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
            for k in range(N + 1):
                a3 = f(k)
                sum3r += a3*a[n][k]
                sum3v += a3*b[n][k]
            r[n] = (S + sum3r)*dt**2
            v[n] = (s + sum3v)*dt
            #check convergence of accelerations
            anew = f(n)
            magdif = mag(aold - anew)
```

```
            if magdif > maxa:
                maxa = magdif

#Commencing PEC cycle:
n = N
t = N2*dt


corrsum = np.empty([2, 3], dtype=np.longdouble)
with tqdm(total=(steps - 9)) as pbar:
    while t <= T:        #T is defined in general_definitions
        #Predict:
        s, S = getsr(n + 1)
        psum = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
        psumv = np.array([0,0,0], dtype=np.longdouble)
        for k in range(N + 1):
            ap = f(n-N+k)
            psum += ap*a[N + 1][k]
            psumv+= ap*b[N + 1][k]
        r[n + 1] = (psum + S)*dt**2
        v[n + 1] = (psumv + f(n)/2 + psumv)*dt
        n += 1
        corrsum.fill(0)
        #Evaluate-Correct:
        for k in range(N):
            ac = f(n + k - N)
            corrsum[0] += ac*a[N][k]
            corrsum[1] += ac*b[N][k]

        for _ in range(200):
            max = 0
            rold = r[n]
            r[n] = (f(n)*a[N][N] + corrsum[0] + S)*dt**2
            v[n] = (f(n)*b[N][N] + corrsum[1] + s)*dt
            diff = mag(rold - r[n])
            if diff > max:
                max = diff
            if max < 0.0000000001:
                break
        t += dt
        pbar.update(1)
print("Rocket Trajectory calculated!\nSaving to file...")

with open("rocketdata.npy", "wb") as file:
    np.save(file, r)

```

```
print(np.min(mag(r - rplanets[:, target] - refpos[np.newaxis, :])))
```

B Documents supplémentaires

B.1 Tableau des écarts

Le tableau présente les écarts observés entre différentes méthodes de calcul du mouvement des planètes et une référence obtenue à partir du système Horizons. Les notations utilisées sont : « réf. » pour référence, « sim. » pour simulation, et « K » pour la solution au problème de Kepler. Les différences sont évaluées soit en comparant la distance entre deux vecteurs (notée $|\Delta\vec{r}|$ ou $|\Delta\vec{v}|$), soit en comparant la différence de leur norme (notée $\Delta|\vec{r}|$ ou $\Delta|\vec{v}|$). Ces écarts énumérés ci-dessous sont exprimés en pourcentage de la norme du vecteur de référence. Par exemple, pour un vecteur arbitraire $\vec{w}$, l'écart est calculé selon la formule : $\frac{|\vec{w}_1-\vec{w}_2|}{w_2} \cdot 100\%$ pour $|\Delta\vec{w}|$ ou $\frac{||\vec{w}_1|-|\vec{w}_2||}{w_2} \cdot 100\%$ pour $\Delta|\vec{w}|$. Cette procédure est automatisée avec le programme `test2.py`. Les données de la simulation sont des valeurs qui vont 165 ans dans l'avenir avec un pas d'intégration de 1000s.

Méthode	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Sim. et réf. ($\|\Delta\vec{r}\|$)	0.5787%	0.1407 %	0.07439 %	0.05042 %	0.008333 %	0.003085 %	0.0013 %	0.0006901 %
K. et réf. ($\|\Delta\vec{r}\|$)	0.1784 %	3.113 %	2.542 %	5.826 %	2.024 %	12.26 %	11.32 %	4.464 %
K. et sim. ($\|\Delta\vec{r}\|$)	0.4038 %	2.972 %	2.616 %	5.877 %	2.015 %	12.26 %	11.32 %	4.465 %
Sim. et réf. ($\Delta\|\vec{r}\|$)	0.004507 %	0.0002972 %	0.001167 %	0.003238 %	0.0001052 %	$8.443 \cdot 10^{-5}$ %	$5.343 \cdot 10^{-5}$ %	$6.849 \cdot 10^{-6}$ %
K. et réf. ($\Delta\|\vec{r}\|$)	0.009216 %	0.007756 %	0.02794 %	0.3035 %	0.1208 %	0.2 %	0.2106 %	0.05903 %
K. et sim. ($\Delta\|\vec{r}\|$)	0.004709 %	0.007459 %	0.0291 %	0.3067 %	0.1207 %	0.2001 %	0.2106 %	0.05904 %

TABLE 2 – L'écart de la position après 165 ans

Méthode	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Sim. et réf. ($\|\Delta\vec{v}\|$)	0.4742 %	0.1417 %	0.1417 %	0.04703 %	0.007936 %	0.00314 %	0.001338 %	0.0006955 %
K. et réf. ($\|\Delta\vec{v}\|$)	0.07818 %	3.13 %	2.548 %	5.518 %	1.899 %	12.49 %	12.2 %	4.276 %
K. et sim. ($\|\Delta\vec{v}\|$)	0.4077 %	2.972 %	2.988 %	2.623 %	5.565 %	1.891 %	12.5 %	12.2 %
Sim. et réf. ($\Delta\|\vec{v}\|$)	0.003728 %	0.0002991 %	0.001177 %	0.003027 %	$9.861 \cdot 10^{-5}$ %	$9.611 \cdot 10^{-5}$ %	$5.615 \cdot 10^{-5}$ %	$1.31 \cdot 10^{-7}$ %
K. et réf. ($\Delta\|\vec{v}\|$)	0.00752 %	0.007901 %	0.02747 %	0.2803 %	0.1187 %	0.4186 %	0.391 %	0.09348 %
K. et sim. ($\Delta\|\vec{v}\|$)	0.003792 %	0.007602 %	0.02864 %	0.2833 %	0.1186 %	0.4187 %	0.391 %	0.09348 %

TABLE 3 – L'écart de la vitesse après 165 ans

B.2 Choix du périapse minimal

Du fait d'un grand champ magnétique et d'une forte exposition aux radiations, le périapse minimal de Jupiter était déterminé à une distance de 1,1 fois le rayon jovien [50]. Comme un rayon jovien équivaut à 71 492 000 m [51], nous pouvons définir la distance minimale comme étant 78 641 200 m.
Pour Saturne, le périapse minimal a été choisi à la fin de l'anneau E, qui vaut 480 000 000 m. [52]
En considérant que l'atmosphère de Mercure est « essentiellement un vide » [53], elle ne doit pas être prise en compte. J'ai donc déterminé la distance minimale à l'équateur de Mercure, égale à 2440500 m.
Pour les autres planètes, nous devons prendre en compte l'atmosphère : D'après la source [54], l'atmosphère commence à avoir un effet en dessous d'une altitude de 122 km. En utilisant le modèle exponentiel par morceaux décrit dans [55], on obtient une densité de $\rho_{122km} = 1.9740 \cdot 10^{-8}$ à cette altitude. J'utiliserai cette valeur comme référence pour déterminer l'endroit où la densité atmosphérique d'une planète devient suffisamment petite pour être négligée.
Si la densité à la surface et la hauteur de l'échelle d'une atmosphère sont connues et que nous faisons l'hypothèse simplifiée que la température de l'atmosphère ainsi que sa composition sont constantes, nous pouvons utiliser la formule barométrique $\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$ dérivée du livre [56] pour déterminer la hauteur à laquelle l'atmosphère devient négligeable. Les densités de surface et la hauteur de l'échelle sont présentées dans le tableau suivant :

	Vénus [57]	Mars [58]	Uranus [59]	Neptune [60]
Densité à la surface	65. kg/m^3	0.020 kg/m^3	0.42 kg/m^3	0.45 kg/m^3
La hauteur de l'échelle	15.9 km	11.1 km	27.7 km	19.1 − 20.3 km

TABLE 4 – Données atmosphériques

La hauteur h se trouvant donc avec $h = -H(\ln \rho - \ln \rho_0)$, doit être additionnée avec R, qui est le rayon de la planète à l'équateur, pour obtenir $r_{p,\,\mathrm{min}} = R + h$. En complétant avec les valeurs de Mercure, de la Terre, de Jupiter et de Saturne :

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
$r_{p,\,\mathrm{min}}$	2440500 m	6400250 m	6500137 m	3549700 m	78641200 m	$4.8 \cdot 10^8$ m	26026390 m	25107930 m

TABLE 5 – Périapse minimal des planètes

B.3 Considérations pour les masses barycentriques

Le Soleil La masse du Soleil est la plus importante pour calculer les trajectoires de vol des planètes. Celle donnée par [61] a changé fin octobre, ce qui a entraîné un écart élevé dans ma simulation. Si la lectrice ou le lecteur remarque ce changement, la masse du Soleil, qui est actuellement de $1.988410 \cdot 10^{30}$ kg selon les données actuelles, doit être mise à jour.

Mercure La planète Mercure n'ayant pas de lune [53], a une masse barycentrique de $3.302 \cdot 10^{23}$ kg [61].

Vénus Vénus n'a pas de satellite naturel non plus [57]. La masse du barycentre est donc $4.8685 \cdot 10^{24}$ kg [61].

Terre La masse de la Terre est de $5.97219 \cdot 10^{24}$ kg, et celle de la Lune est de $7.349 \cdot 10^{22}$ kg. La masse totale que nous considérons comme concentrée au barycentre du système terrestre est donc de $6.04568 \cdot 10^{24}$ kg [61].

Mars La planète rouge a les deux satellites : Phobos et Déimos. La masse de la planète elle-même est de $6.4171 \cdot 10^{23}$ kg, celle de Phobos est de$1.08 \cdot 10^{16}$ kg et celle de Déimos est de $1.80 \cdot 10^{15}$ kg [61]. Comme ils n'ont pas d'influence sensible sur les chiffres significatifs de la masse de Mars, ils sont négligés.

Jupiter Jupiter, la planète la plus massive du système solaire, possède 95 satellites naturels [62]. Pour calculer la masse considérée comme concentrée au barycentre de Jupiter, seules les quatre lunes galiléennes ont été prises en compte. Leurs masses sont présentées dans le tableau suivant :

Jupiter [61]	Ganymède [63]	Callisto [63]	Io [63]	Europe [63]
$1.89818722 \cdot 10^{27}$ kg	$1.482 \cdot 10^{23}$ kg	$1.076 \cdot 10^{23}$ kg	$8.93 \cdot 10^{22}$ kg	$4.80 \cdot 10^{22}$ kg

Table 6 – La masse de Jupiter avec ses lunes galiléennes

Ce qui donne en totale $1.89858032 \cdot 10^{27}$.

Saturne Pour Saturne, la somme de toutes les lunes majeures de [64] a été additionnée à la masse de la planète qui vaut $5.6834 \cdot 10^{26}$ kg [61]. Cela donne une masse au barycentre de : $5.684805395 \cdot 10^{26}$ kg

Uranus pour Uranus aussi, j'ai seulement pris en considération les lunes majeures [65]. La masse d'Uranus même est tirée de [61] ce qui donne le résultat suivant : $8.6821876 \cdot 10^{25}$ kg.

Neptune La masse considérée comme concentrée au barycentre de Neptune est la masse de Neptune, soit $1.02409{\cdot}10^{26}$ kg [61]. En additionnant cette masse à celle de sa lune la plus massive, Triton, dont la masse est de $2.14 \cdot 10^{22}$ kg [66], nous obtenons un total de $1.02430 \cdot 10^{26}$ kg.