INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Atividade avaliativa de Sistemas LIT

2º Avaliação de Sinais e Sistemas I

Gabriel Luiz Espindola Pedro

28/10/2023

Sumário

1. Questão 1

Considere um SLIT (Sistema Linear Invariante no Tempo) discreto com resposta ao impulso dada por $h[n] = a^n u[n]$:

a) O sistema é causal?
b) O sistema é estável segundo as condições BIBO (Bounded Input - Bounded Output)?

1.1. Resposta

Sim, o sistema é causal, pois $h[n] = 0$ para $n < 0$, issos se dá pela influência da função degrau multiplicando todo o restante da função, pois sabemos que:

$$u[n] := \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & \text{c. c.} \end{cases} \tag{1}$$

Por definção um sistema é estável se toda entrada limitada produz uma saída limitada. Podemos utilizar a seguinte formula para determinar se um sistema é estável:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{2}$$

Devido a causalidade do sistema $h[n]$, demonstrada anteriormente, podemos reescrever a equação acima como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{3}$$

Substituindo $h[n]$ na equação acima e desconsiderando o degrau unitário, pois ele implica apenas na causalidade do sistema, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| < \infty \tag{4}$$

Dada a propriedade da multiplicatividade do módulo, podemos fazer a análise do módulo aplicado a função exponencial:

$$|a^k| = \overbrace{|a \cdot a \cdot ... \cdot a|}^{k} = \overbrace{|a| \cdot |a| \cdot ... \cdot |a|}^{k} = |a|^k \tag{5}$$

Portanto, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \tag{6}$$

Por se tratar de uma série geométrica, para que a série acima seja convergente, $|a| < 1$, pois caso contrário a série divergiria. Portanto, o sistema é estável segundo as condições BIBO.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|} < \infty \tag{7}$$

2. Questão 2

A entrada $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema contínuo, linear e invariante no tempo são:

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \\ h(t) &= e^{-t}u(t) \end{aligned} \tag{8}$$

a) Determine a resposta de estado nulo do sistema. Nessa questão não é permitido o uso da tabela.
b) O sistema é estável segundo as condições BIBO (Bounded Input - Bounded Output)?

2.1. Resposta

Para Obtermos a resposta de estado nulo do sistema, devemos realizar a convolução entre a entrada e a resposta ao impulso do sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

Substituindo $x(t)$ e $h(t)$ na equação acima, obtemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-t+\tau}u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

Resolvendo a integral acima, obtemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{0}^{t} e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{0}^{t} e^{-t}e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= e^{-t}\int_{0}^{t} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= e^{-t}(e^{\tau})\big|_0^t \\ &= e^{-t}\big(e^{t} - e^{0}\big) \\ &= e^{-t}\big(e^{t} - 1\big) \\ &= e^{-t+t} - e^{-t} \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned} \tag{12}$$

BIBO

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{d}t < \infty \tag{13}$$

Então:

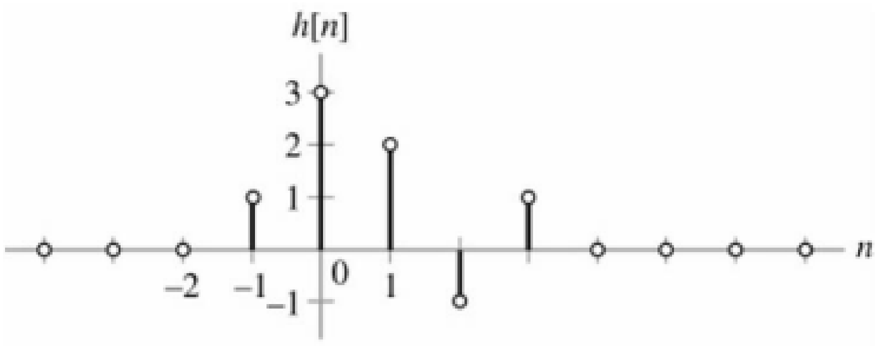
$$\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^{0} = -0 + 1 = 1 \tag{14}$$

Portanto, o sistema é estável segundo as condições BIBO.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t < \infty \tag{15}$$

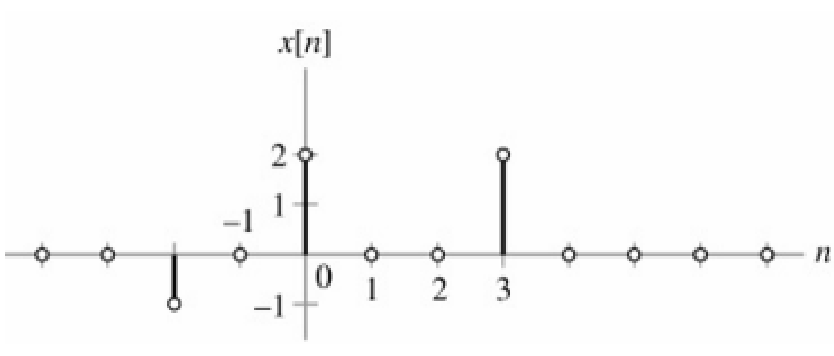
3. Questão 3

Um sistema discreto e invariante no tempo tem a resposta ao impulso $h[n]$ desenhada na figura a seguir. Determine a resposta de estado nulo do sistema.



Determine a saída $y[n]$ do sistema partindo do princípio que o sistema é linear e invariante, e as entradas são?

a) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-1]$
b) $x[n]$ está expresso na figura a seguir



4. Questão 4

Para uma entrada degrau unitário, determine a resposta total dos seguintes sistemas LIT (Lineares Invariantes no Tempo):

4.1. Primeiro sistema

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\\ y_0(0)=0;\quad \frac{\mathrm{d}y_0(0)}{\mathrm{d}t}=-2\end{gathered}\tag{16}$$

4.1.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D:

$$D^2y(t)+5Dy(t)+6y(t)=Dx(t)\tag{17}$$

4.2. Segundo sistema

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+4y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\\ y_0(0)=1;\quad \frac{\mathrm{d}y_0(0)}{\mathrm{d}t}=2\end{gathered}\tag{18}$$

4.2.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D:

$$D^2y(t)+4Dy(t)+4y(t)=Dx(t)\tag{19}$$

4.3. Terceiro sistema

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+40y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\\ y_0(0)=2;\quad \frac{\mathrm{d}y_0(0)}{\mathrm{d}t}=10\end{gathered}\tag{20}$$

4.3.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D:

$$D^2y(t)+4Dy(t)+40y(t)=Dx(t)\tag{21}$$

4.4. Quarto sistema

$$\begin{gathered}y[n+2]+y[n+1]+0.16y[n]=5x[n]\\ y[-1]=0;\quad y[-2]=\frac{1}{4}\end{gathered}\tag{22}$$

4.4.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E:

$$E^2y[n] + Ey[n] + 0.16y[n] = 5x[n] \tag{23}$$

4.5. Quinto sistema

$$\begin{gathered} y[n+2] + 1.6y[n+1] + 0.64y[n] = 5x[n] \\ y[-1] = 1; \quad y[-2] = 2 \end{gathered} \tag{24}$$

4.5.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E:

$$E^2y[n] + 1.6Ey[n] + 0.64y[n] = 5x[n] \tag{25}$$

4.6. Sexto sistema

$$\begin{gathered} y[n+2] - 1.56y[n+1] + 0.81y[n] = 5x[n] \\ y[-1] = 1; \quad y[-2] = 3 \end{gathered} \tag{26}$$

4.6.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E:

$$E^2y[n] - 1.56Ey[n] + 0.81y[n] = 5x[n] \tag{27}$$