INSTITUTO
FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Atividade avaliativa de Sistemas LIT

2º Avaliação de Sinais e Sistemas I

Gabriel Luiz Espindola Pedro

28/10/2023

Sumário

1. Questão 1

Considere um SLIT (Sistema Linear Invariante no Tempo) discreto com resposta ao impulso dada por $h[n] = a^n u[n]$:

a) O sistema é causal?
b) O sistema é estável segundo as condições BIBO (Bounded Input - Bounded Output)?

1.1. Resposta

Sim, o sistema é causal, pois $h[n] = 0$ para $n < 0$, issos se dá pela influência da função degrau multiplicando todo o restante da função, pois sabemos que:

$$u[n] := \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & \text{c. c.} \end{cases} \tag{1}$$

Por definção um sistema é estável se toda entrada limitada produz uma saída limitada. Podemos utilizar a seguinte formula para determinar se um sistema é estável:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{2}$$

Devido a causalidade do sistema $h[n]$, demonstrada anteriormente, podemos reescrever a equação acima como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{3}$$

Substituindo $h[n]$ na equação acima e desconsiderando o degrau unitário, pois ele implica apenas na causalidade do sistema, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| < \infty \tag{4}$$

Dada a propriedade da multiplicatividade do módulo, podemos fazer a análise do módulo aplicado a função exponencial:

$$|a^k| = \overbrace{|a \cdot a \cdot \ldots \cdot a|}^{k} = \overbrace{|a| \cdot |a| \cdot \ldots \cdot |a|}^{k} = |a|^k \tag{5}$$

Portanto, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \tag{6}$$

Por se tratar de uma série geométrica, para que a série acima seja convergente, $|a| < 1$, caso contrário a série divergiria. Considerando $|a| < 1$, o sistema seria estável segundo as condições BIBO.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|} < \infty \tag{7}$$

2. Questão 2

A entrada $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema contínuo, linear e invariante no tempo são:

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \\ h(t) &= e^{-t}u(t) \end{aligned} \tag{8}$$

a) Determine a resposta de estado nulo do sistema. Nessa questão não é permitido o uso da tabela.
b) O sistema é estável segundo as condições BIBO (Bounded Input - Bounded Output)?

2.1. Resposta

Para Obtermos a resposta de estado nulo do sistema, devemos realizar a convolução entre a entrada e a resposta ao impulso do sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

Substituindo $x(t)$ e $h(t)$ na equação acima, obtemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-t+\tau}u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$y(t) = \int_0^t e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

Resolvendo a integral acima, obtemos o estado nulo do sistema:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t e^{-t}e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= e^{-t}(e^{\tau})|_0^t \\ &= e^{-t}\left(e^t - e^0\right) \\ &= e^{-t}\left(e^t - 1\right) \\ &= e^{-t+t} - e^{-t} \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned} \tag{12}$$

Para definir se o sistema é estável podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty \tag{13}$$

Então:

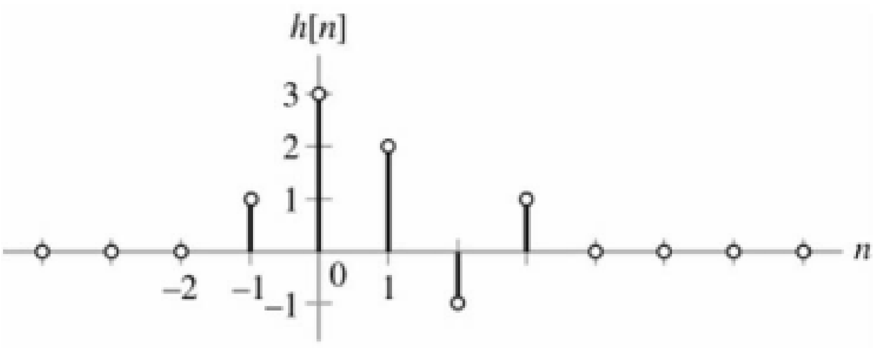
$$\int_0^\infty e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = -e^{-\tau}|_0^\infty = -e^{-\infty} + e^0 = -0 + 1 = 1 \tag{14}$$

Portanto, o sistema é estável segundo as condições BIBO.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t < \infty \tag{15}$$

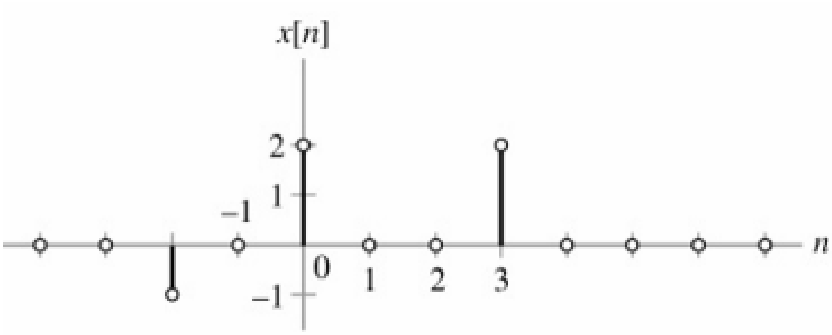
3. Questão 3

Um sistema discreto e invariante no tempo tem a resposta ao impulso $h[n]$ desenhada na figura a seguir. Determine a resposta de estado nulo do sistema.



Determine a saída $y[n]$ do sistema partindo do princípio que o sistema é linear e invariante, e as entradas são?

a) $x_1[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-1]$
b) $x_2[n]$ está expresso na figura a seguir



3.1. Resposta

Para definirmos a resposta em estado nulo do sistema calculamos a seguinte convolução:

$$y[n] = h[n] * x[n] \tag{16}$$

Para poder aplicar a formula acima precisamos definir $h[n]$ a partir da imagem apresentada, podemos fazer essa representação por uma soma de impulsos para onde o valor de $h[n]$ é diferente de 0, portanto:

$$h[n] = 1\delta[n+1] + 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - 1\delta[n-2] + 1\delta[n-3] \tag{17}$$

Sabendo que o resultado de uma função qualquer convolvida com o impulso é igual a propria função e sabendo que a existencia de um deslocamento no impulso reflete no deslocamento na função que está sendo convolvida:

$$\delta[n-N_0] * f[n] = f[n-N_0] \tag{18}$$

Podemos resolver a convolução aplicando:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= h[n] * x_1[n] \\ &= (3\delta[n] - 2\delta[n-1]) * x_1[n] \\ &= 3\delta[n] * x_1[n] - 2\delta[n-1] * x_1[n] \\ &= 3x_1[n] - 2x_1[n-1] \\ &= (3\delta[n+1] + 9\delta[n] + 6\delta[n-1] - 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3]) - \\ &\quad (2\delta[n] + 6\delta[n-1] + 4\delta[n-2] - 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4]) \\ &= 3\delta[n+1] + 7\delta[n] - 7\delta[n-2] + 7\delta[n-3] - 2\delta[n-4] \end{aligned} \tag{19}$$

Para $x_2[n]$ precisamos definir a função a partir da figura, da mesma maneira que fizemos com $h[n]$ utilizando a soma de impulsos:

$$x_2[n] = -1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3] \tag{20}$$

Aplicamos a mesma propriedade do impulso para resolver a convolução e obter a resposta de estado nulo:

$$\begin{aligned} y_2[n] &= h[n] * x_2[n] \\ &= (3\delta[n] - 2\delta[n-1]) * x_2[n] \\ &= 3\delta[n] * x_1[n] - 2\delta[n-1] * x_2[n] \\ &= 3(-1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3]) - 2(-1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3]) \\ &= -3\delta[n+2] + 6\delta[n] + 6\delta[n-3] + \\ &\quad 2\delta[n+2] - 4\delta[n] - 4\delta[n-3] \\ &= -1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3] \end{aligned} \tag{21}$$

4. Questão 4

Para uma entrada degrau unitário, determine a resposta total dos seguintes sistemas LIT (Lineares Invariantes no Tempo):

4.1. Primeiro sistema

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 6y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\
y_0(0) = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y_0(0)}{\mathrm{d}t} = -2
\end{gathered} \tag{22}
$$

4.1.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D:

$$
\begin{gathered}
D^2 y(t) + 5Dy(t) + 6y(t) = Dx(t) \\
(D^2 + 5D + 6)y(t) = Dx(t)
\end{gathered} \tag{23}
$$

Para definir a resposta de entrada nula do sistema $y_0(t)$ observamos a função do operador D, que multiplica a função $y(t)$ em questão, como uma função de segundo grau onde as raizes são os modos caracterísiticos:

$$
\begin{gathered}
D^2 + 5D + 6 \\
\Downarrow \\
\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \\
(\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 \\
\therefore \\
\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -2
\end{gathered} \tag{24}
$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo λ_i distintos monto a equação característica:

$$
y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \tag{25}
$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$
y_0(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t} \tag{26}
$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0(0) = 0$ e $Dy_0(0) = -2$ dado no enunciado. Primeiro calculamos a primeira derivada da função y_0 obtida:

$$
\begin{aligned}
Dy_0(t) &= D(c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}) \\
&= D(c_1 e^{-3t}) + D(c_2 e^{-2t}) \\
&= -3c_1 e^{-3t} - 2c_2 e^{-2t}
\end{aligned} \tag{27}
$$

Substituimos então para os valores que possuimos:

$$
\begin{aligned}
y_0(0) &= c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \\
&= c_1 + c_2 = 0
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
Dy_0(0) &= -3c_1 e^0 - 2c_2 e^0 = -2 \\
&= -3c_1 - 2c_2 = -2
\end{aligned} \tag{29}
$$

Montando o sistema linear para descobrir o valor destas constantes obtemos:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -3c_1 - 2c_2 = -2 \end{cases} \\
&c_1 = c_2 \\
&-3c_1 - 2c_1 = -2 \\
&-5c_1 = -2 \qquad\qquad c_1 = c_2 = \frac{2}{5}
\end{aligned} \tag{30}$$

Por fim definimos nossa resposta de entrada nula como:

$$y_0(t) = \frac{2}{5}e^{-3t} + c_2 e^{-2t} \tag{31}$$

4.2. Segundo sistema

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 4y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\
y_0(0) = 1; \quad \frac{\mathrm{d}y_0(0)}{\mathrm{d}t} = 2
\end{gathered} \tag{32}$$

4.2.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D:

$$D^2 y(t) + 4Dy(t) + 4y(t) = Dx(t) \tag{33}$$

Para definir a resposta de entrada nula do sistema $y_0(t)$ observamos a função do operador D, que multiplica a função $y(t)$ em questão, como uma função de segundo grau onde as raizes são os modos caracterísiticos:

$$\begin{gathered}
D^2 + 4D + 4 \\
\Downarrow \\
\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \\
(\lambda + 2)^2 = 0 \\
\therefore \\
\lambda = -2
\end{gathered} \tag{34}$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo apenas um λ portanto monto a equação característica:

$$y_0(t) = ce^{\lambda t} y_0(t) = ce^{-2t} \tag{35}$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0(0) = 1$ e $Dy_0(0) = 2$ dado no enunciado. Primeiro calculamos a primeira derivada da função y_0 obtida:

$$
\begin{aligned}
Dy_0(t) &= D\left(ce^{-2t}\right) \\
&= D\left(ce^{-2t}\right) \\
&= -2ce^{-2t}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Substituimos então para os valores que possuimos:

$$
\begin{aligned}
y_0(0) &= ce^0 = 1 \\
&\Rightarrow c = 1
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
Dy_0(0) &= -2ce^{-2t} = 2 \\
&= -2c = -2 \\
&\Rightarrow c = 1
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Como há apenas uma constante e a substituição pelo valor informado no enunciado já demonstrou a constante podemos montar diretamente a resposta de entrada nula:

$$
y_0(t) = e^{-2t} \tag{39}
$$

4.3. Terceiro sistema

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 40y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\
y_0(0) = 2; \quad \frac{\mathrm{d}y_0(0)}{\mathrm{d}t} = 10
\end{gathered}
\tag{40}
$$

4.3.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D:

$$
D^2 y(t) + 4Dy(t) + 40y(t) = Dx(t) \tag{41}
$$

Para definir a resposta de entrada nula do sistema $y_0(t)$ observamos a função do operador D, que multiplica a função $y(t)$ em questão, como uma função de segundo grau onde as raizes são os modos caracterísiticos:

$$
\begin{gathered}
D^2 + 4D + 40 \\
\Downarrow \\
\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0
\end{gathered}
\tag{42}
$$

Extraio as informações para aplicar a fórmula quadrática $a = 1, b = 4, c = 40$:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 160}}{2} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{-144}}{2} \\
&= -2 \pm \frac{12j}{2} \\
&= -2 \pm 6j \\
\therefore \lambda_1 &= -2 + 6j \\
\lambda_2 &= -2 - 6j
\end{aligned}
\tag{43}
$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo λ_i distintos e complexos, a partir disso monto a equação característica:

$$
y_0(t) = ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \tag{44}
$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$
y_0(t) = ce^{-2t} \cos(6t + \theta) \tag{45}
$$

Fazendo $t = 0$ e substituindo as condições iniciais, temos:

$$
\begin{aligned}
y_0(0) &= ce^0 \cos(6 * 0 + \theta) = 2 \\
&= c \cos(\theta) = 2
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0(0) = 2$ e $Dy_0(0) = 10$ dado no enunciado. Primeiro calculamos a primeira derivada da função y_0 obtida:

$$
\begin{aligned}
Dy_0(t) &= D\left(ce^{-2t} \cos(6t + \theta)\right) \\
&= -2ce^{-2t}(3 \sin(6t + \theta) + \cos(6t + \theta))
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Fazendo $t = 0$ e substituindo as condições iniciais, temos:

$$
\begin{aligned}
Dy_0(0) &= -2ce^0(3 \sin(0 + \theta) + \cos(0 + \theta)) = 10 \\
&= -2c(3 \sin(\theta) + \cos(\theta)) = 10 \\
&= 3c \sin(\theta) + c \cos(\theta) = -5
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Montando o sistema linear para descobrir o valor destas constantes obtemos:

$$\begin{cases} c\cos(\theta) = 2 \\ 3c\sin(\theta) + c\cos(\theta) = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3c\sin(\theta) + 2 &= -5 \\ 3c\sin(\theta) &= -7 \\ c\sin(\theta) &= -\frac{7}{3} \\ c\cos(\theta) &= 2 \end{aligned} \tag{49}$$

Fazendo o quadrado e somando os dois lados, temos:

$$\begin{aligned} c^2 &= 2^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2 \\ c^2 &= 4 + \frac{49}{9} \\ c^2 &= \frac{85}{9} \\ c &= \frac{\sqrt{85}}{3} = \frac{9.22}{3} = 3.07 \end{aligned} \tag{50}$$

Em seguida,

$$\frac{c\sin(\theta)}{c\cos(\theta)} = \frac{-\frac{7}{3}}{2} = -\frac{7}{6} \tag{51}$$

Resolvendo, temos:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{7}{6}\right) = -0.86 \tag{52}$$

Logo:

$$y_0(t) = 3.07e^{-2t}\cos(6t - 0.86) \tag{53}$$

4.4. Quarto sistema

$$\begin{gathered} y[n+2] + y[n+1] + 0.16y[n] = 5x[n] \\ y[-1] = 0; \quad y[-2] = \frac{1}{4} \end{gathered} \tag{54}$$

4.4.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E:

$$E^2y[n] + Ey[n] + 0.16y[n] = 5x[n] \tag{55}$$

Descubro os modos característicos:

$$\begin{aligned}
E^2 + E + 0.16 &= 0 \\
\gamma^2 + \gamma + 0.16 &= 0 \\
(x + 0.2)(x + 0.8) &= 0 \\
&\therefore \gamma_1 = -0.2 \\
&\quad\ \gamma_2 = -0.8
\end{aligned} \tag{56}$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo γ_i distintos monto a equação característica:

$$y_0[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n \tag{57}$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$y_0[n] = c_1(-0.2)^n + c_2(-0.8)^n \tag{58}$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0[-1] = 0$ e $y_0[-2] = \frac{1}{4}$ dado no enunciado:

$$\begin{aligned}
y_0[-2] &= c_1(-0.2)^{-2} + c_2(-0.8)^{-2} = \frac{1}{4} \\
&= c_1\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + c_2\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{4} \\
&= c_1(-5)^2 + c_2\left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
&= c_1(25) + c_2\left(\frac{25}{16}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
y_0[-1] &= c_1(-0.2)^{-1} + c_2(-0.8)^{-1} = 0 \\
&= c_1\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} + c_2\left(-\frac{4}{5}\right)^{-1} = 0 \\
&= c_1(-5) + c_2\left(-\frac{5}{4}\right) = 0
\end{aligned} \tag{60}$$

Montando o sistema linear para descobrir o valor destas constantes obtemos:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} c_1(25) + c_2\left(\frac{25}{16}\right) = \frac{1}{4} \\ c_1(-5) + c_2\left(-\frac{5}{4}\right) = 0 \end{cases} \\
&\qquad\qquad c_1 = \frac{1}{125} \\
&\qquad\qquad c_2 = \frac{4}{125}
\end{aligned} \tag{61}$$

Substituindo os valores obtidos na resposta de entrada nula:

$$y_0[n] = \left(\frac{1}{125}(-0.2)^n + \frac{4}{125}(-0.8)^n\right)u[n] \tag{62}$$

4.5. Quinto sistema

$$\begin{gathered} y[n+2] + 1.6y[n+1] + 0.64y[n] = 5x[n] \\ y[-1] = 1; \quad y[-2] = 2 \end{gathered} \tag{63}$$

4.5.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E:

$$E^2y[n] + 1.6Ey[n] + 0.64y[n] = 5x[n] \tag{64}$$

Encontramos os modos característicos:

$$\begin{aligned} E^2 + 1.6E + 0.64 &= 0 \\ \gamma^2 + 1.6\gamma + 0.64 &= 0 \\ (x + 0.8)^2 &= 0 \\ \gamma &= -0.8 \end{aligned} \tag{65}$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo apenas uma raiz descubro a equação característica:

$$y_0[n] = c\gamma^n \tag{66}$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$y_0[n] = c(-0.8)^n \tag{67}$$

Aplicando as condições iniciais:

$$\begin{aligned} y_0[-1] = c(-0.8)^{-1} &= 1 \\ = c\left(-\frac{5}{4}\right) &= 1 \\ c &= -\frac{4}{5} \end{aligned} \tag{68}$$

Portanto temos a resposta de entrada nula como:

$$y_0[n] = \left(-\frac{4}{5}(-0.8)^n\right)u[n] \tag{69}$$

4.6. Sexto sistema

$$\begin{gathered} y[n+2] - 1.56y[n+1] + 0.81y[n] = 5x[n] \\ y[-1] = 1; \quad y[-2] = 3 \end{gathered} \tag{70}$$

4.6.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E:

$$E^2 y[n] - 1.56Ey[n] + 0.81y[n] = 5x[n] \tag{71}$$

Encontramos os modos característicos:

$$
\begin{aligned}
E^2 - 1.56E + 0.81 &= 0 \\
\gamma^2 - 1.56\gamma + 0.81 &= 0 \\
a = 1, b = -1.56, c &= 0.81 \\
\gamma &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{1.56 \pm \sqrt{(-1.56)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.81}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{1.56 \pm \sqrt{2.4336 - 3.24}}{2} \\
&= \frac{1.56 \pm \sqrt{-0.8064}}{2} \\
&= 0.78 \pm \frac{0.9j}{2} \\
&= 0.78 \pm 0.45j \\
\therefore \gamma_1 &= 0.78 + 0.45j \\
\gamma_2 &= 0.78 - 0.45j
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Obtida as raizes, transformamos na forma polar, portanto temos que $\gamma = 0.9e^{\pm j\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.

Montamos a equação característica, dado que possuo raizes complexas:

$$
\begin{aligned}
y_0[n] &= c|\gamma|^n \cos(\beta n + \theta) \\
&= c(0.9)^n \cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)n + \theta\right)
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Aplicando os valores iniciais informados:

$$\begin{aligned} y[-1] &= c(0.9)^{-1}\cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)(-1)+\theta\right) = 1 \\ &= c\left(\frac{10}{9}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\theta\right) = 1 \\ &= c\left(\frac{10}{9}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos(\theta) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin(\theta)\right) = 1 \\ &= c\left(\frac{10}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) = 1 \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} y[-2] &= c(0.9)^{-2}\cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)(-2)+\theta\right) = 3 \\ &= c\left(\frac{100}{81}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\theta\right) = 3 \\ &= c\left(\frac{100}{81}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos(\theta) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin(\theta)\right) = 3 \\ &= c\left(\frac{100}{81}\right)\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 3 \end{aligned} \tag{75}$$

Resolvendo, temos:

$$\begin{aligned} c\cos(\theta) &= 2.308 \\ c\sin(\theta) &= 0.397 \end{aligned} \tag{76}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= -0.172 \\ \theta &= -0.17 \end{aligned} \tag{77}$$

Para descobrir c substituimos em uma das equações:

$$\begin{aligned} c\cos(\theta) &= 2.308 \\ c\cos(-0.17) &= 2.308 \\ &= \frac{2.308}{\cos(-0.17)} \\ &= \frac{2.308}{0.985} \\ &= 2.34 \end{aligned} \tag{78}$$

Subsitituindo as informações temos a resposta de entrada nula:

$$y_0[n] = \left(2.34(0.9)^n\cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)n - 0.17\right)\right)u[n] \tag{79}$$