INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus São José

Estruturas de Filtros Digitais

Processamento de Sinais Digitais

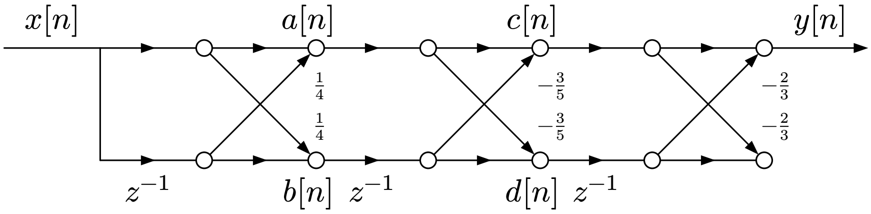
Gabriel Luiz Espindola Pedro

29 de Abril de 2024

Sumário

1. Questão 1

Considere o diagrama de fluxo de sinais a seguir.



a) Determine a função de transferência $H[z]$ relacionando a entrada $x[n]$ à saída $y[n]$ para o filtro *FIR* em treliça da figura acima.

$$a[n] = x[n] + 0.25x[n-1] \tag{1}$$

$$b[n] = 0.25x[n] + x[n-1] \tag{2}$$

$$\begin{aligned} c[n] &= a[n] - 0.6b[n-1] \\ &= x[n] + 0.25x[n-1] - 0.6(0.25x[n-1] + x[n-2]) \\ &= x[n] + 0.25x[n-1] - 0.15x[n-1] - 0.6x[n-2] \\ &= x[n] + 0.1x[n-1] - 0.6x[n-2] \end{aligned} \tag{3}$$

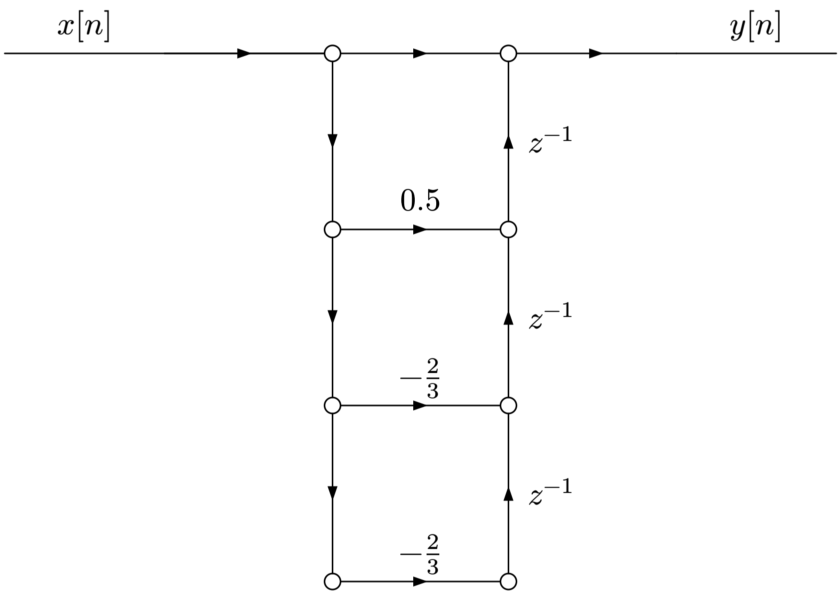
$$\begin{aligned} d[n] &= -0.6a[n] + b[n-1] \\ &= -0.6(x[n] + 0.25x[n-1]) + 0.25x[n-1] + x[n-2] \\ &= -0.6x[n] - 0.15x[n-1] + 0.25x[n-1] + x[n-2] \\ &= -0.6x[n] + 0.1x[n-1] + x[n-2] \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= c[n] - \frac{2}{3}d[n-1] \\ &= x[n] + 0.1x[n-1] - 0.6x[n-2] \\ &\quad -\frac{2}{3}(-0.6x[n-1] + 0.1x[n-2] + x[n-3]) \\ &= x[n] + 0.1x[n-1] - 0.6x[n-2] \\ &\quad +0.4x[n-1] - \frac{2}{30}x[n-2] - \frac{2}{3}x[n-3] \\ &= x[n] + 0.5x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-2] - \frac{2}{3}x[n-3] \end{aligned} \tag{5}$$

Com isso encontramos a transformada Z de $y[n]$, e isolando $\frac{Y[z]}{X[z]}$ obtemos a função de transferência $H[z]$:

$$
\begin{aligned}
Y[z] &= X[z] + 0.5z^{-1}X[z] - \frac{2}{3}z^{-2}X[z] - \frac{2}{3}z^{-3}X[z] \\
Y[z] &= X[z]\left(1 + 0.5z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}\right) \\
H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} &= 1 + 0.5z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

b) Desenhe o diagrama de fluxo de sinais na forma direta I.



c) Determine e trace o gráfico de resposta ao impulso unitário.

$$
h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{2}{3}\delta[n-2] - \frac{2}{3}\delta[n-3] \tag{7}
$$

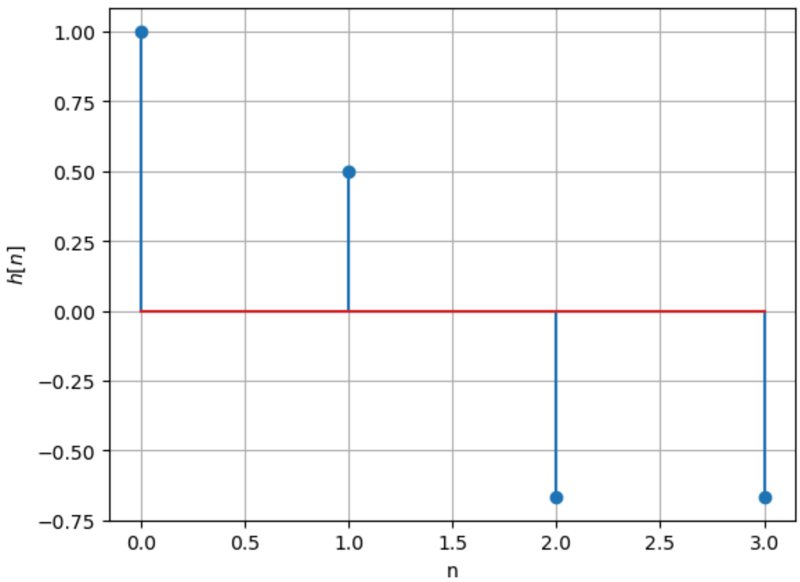
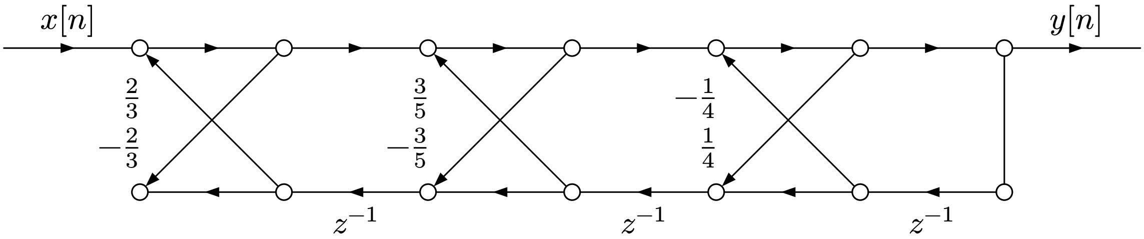


Figura 1: Resposta ao impulso unitário

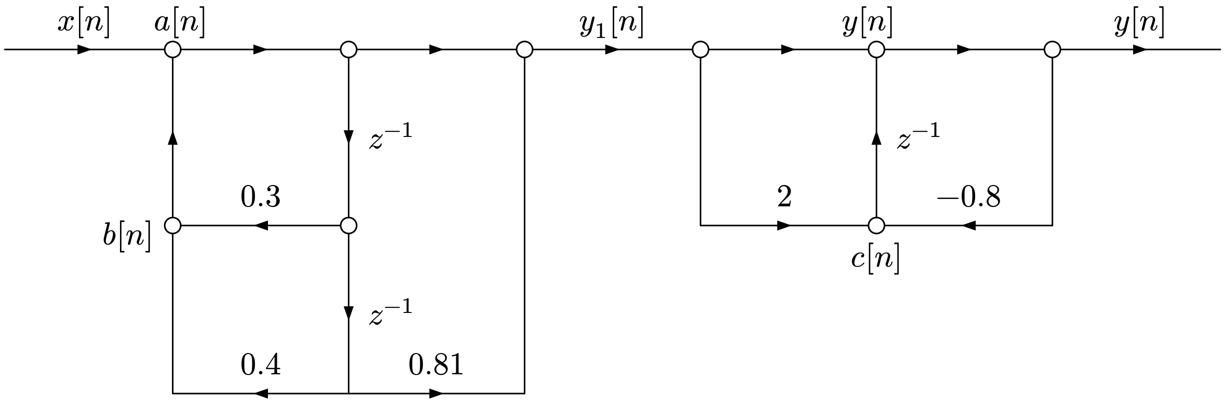
d) Desenhe a estrutura do filtro em treliça para o filtro só-pólos $1/H[z]$

$$\frac{1}{H[z]} = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}} \tag{8}$$



2. Questão 2

Um sistema LIT causal é definido pelo diagrama de fluxo de sinais mostrado na Figura a seguir, que representa o sistema como uma cascata de um sistema de segunda ordem com um sistema de primeira ordem.



a) Qual é a função de transferência do sistema em cascata global?

Observando os nós somadores verificamos que:

$$b[n] = 0.3a[n-1] + 0.4a[n-2] \tag{9}$$

$$\begin{aligned} a[n] &= x[n] + b[n] \\ &= x[n] + 0.3a[n-1] + 0.4a[n-2] \end{aligned} \tag{10}$$

$$y_1[n] = a[n] + 0.81a[n-2] \tag{11}$$

Analisando no domínio Z:

$$\begin{aligned} A[z] &= X[z] + 0.3z^{-1}A[z] + 0.4z^{-2}A[z] \\ X[z] &= A[z] - 0.3z^{-1}A[z] - 0.4z^{-2}A[z] \\ &= A[z](1 - 0.3z^{-1} - 0.4z^{-2}) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} Y_1[z] &= A[z] + 0.81z^{-2}A[z] \\ &= A[z](1 + 0.81z^{-2}) \end{aligned} \tag{13}$$

Obtemos então a função de transferência local considerando a entrada $x[n]$ e a saída $y_1[n]$:

$$H_1[z] = \frac{Y_1[z]}{X[z]} = \frac{1 + 0.81z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.4z^{-2}} \tag{14}$$

Considerando agora o segundo sistema da cascata:

$$c[n] = 2y_1[n-1] - 0.8y[n-1] \tag{15}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= y_1[n] + c[n-1] \\ &= y_1[n] + 2y_1[n-1] - 0.8y[n-1] \end{aligned} \tag{16}$$

Portanto em Z:

$$\begin{aligned} Y[z] &= Y_1[z] + 2z^{-1}Y_1[z] - 0.8z^{-1}Y[z] \\ Y[z] + 0.8z^{-1}Y[z] &= Y_1[z] + 2z^{-1}Y_1[z] \\ Y[z](1 + 0.8z^{-1}) &= Y_1[z](1 + 2z^{-1}) \end{aligned} \tag{17}$$

Temos então a função de transferência local do segundo sistema:

$$H_2[z] = \frac{Y[z]}{Y_1}[z] = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.8z^{-1}} \tag{18}$$

Podemos definir a função de transferência global como o produto das funções de transferências em Z:

$$H[z] = H_1[z]H_2[z] = \frac{1 + 0.81z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.4z^{-2}} \cdot \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.8z^{-1}} \tag{19}$$

Utilizando as funções *roots* e *poly* do *Python* podemos obter a função de transferência para uma única expressão:

$$H[z] = \frac{1 + 2z^{-1} + 0.81z^{-2} + 1.62z^{-3}}{1 + 0.5z^{-1} - 0.64z^{-2} - 0.32z^{-3}} \tag{20}$$

b) O sistema global é estável? Explique resumidamente.

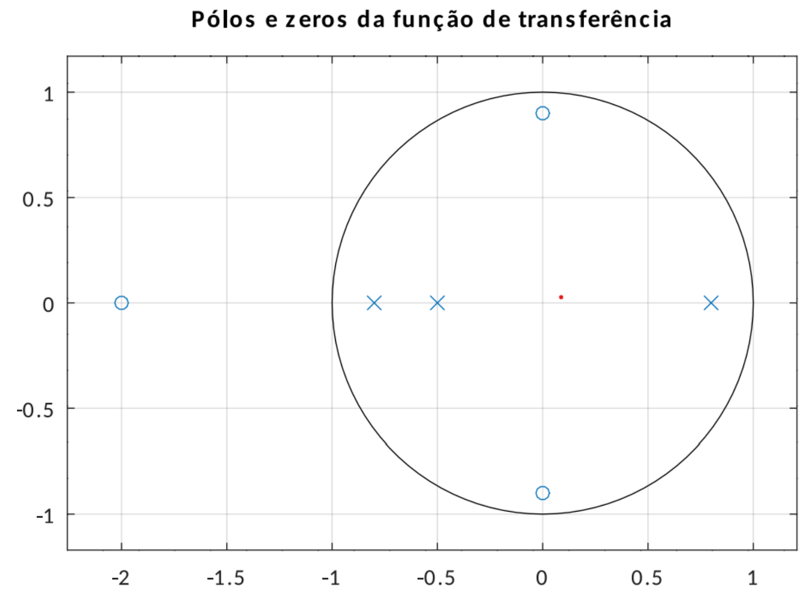
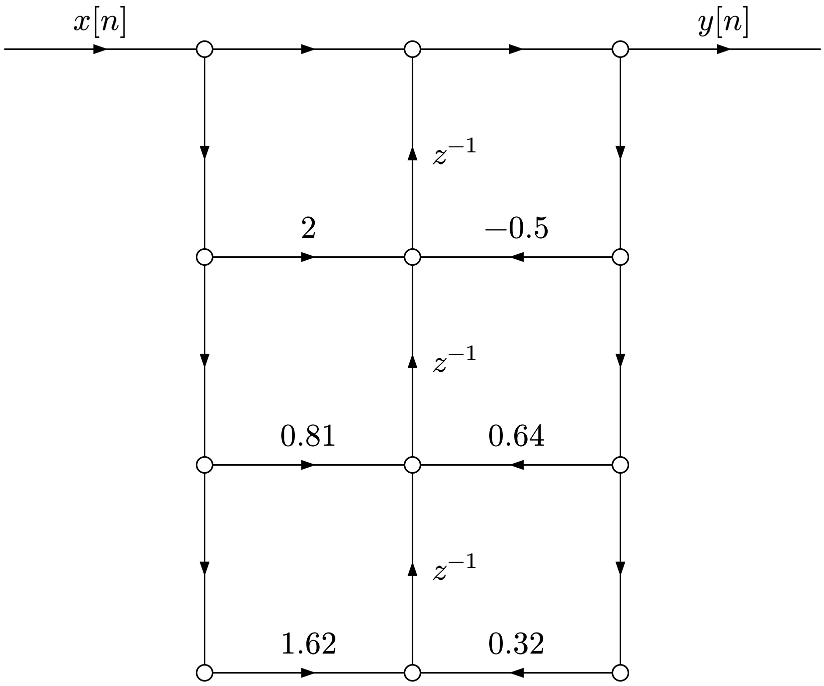


Figura 2: Diagrama de polos e zeros

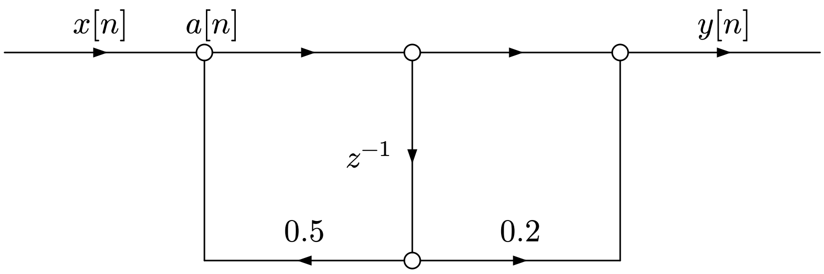
Utilizando a função *zplane* do *Python* podemos visualizar o diagrama de polos, nele constatamos que todos os polos estão dentro do círculo unitário, portanto o sistema é estável.

c) Desenhe o diagrama de fluxo de sinais de uma implementação na forma direta II transposta desse sistema.



3. Questão 3

A figura a seguir mostra uma implementação em forma direta II de um sistema



a) Determine a função de transferência $H[z]$

$$a[n] = x[n] + 0.5a[n-1] \tag{21}$$

$$y[n] = a[n] + 0.2a[n-1] \tag{22}$$

Portanto em Z:

$$
\begin{aligned}
A[z] &= X[z] + 0.5z^{-1}A[z] \\
X[z] &= A[z] - 0.5z^{-1}A[z] \\
&= A[z](1 - 0.5z^{-1})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
Y[z] &= A[z] + 0.2z^{-1}A[z] \\
&= A[z](1 + 0.2z^{-1})
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Logo a função de transferência $H[z]$ é:

$$
H[z] = \frac{Y[z]}{X[Z]} = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \tag{25}
$$

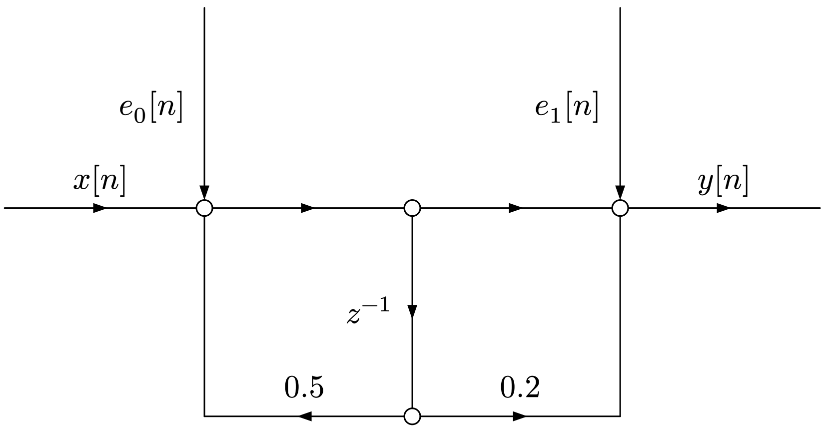
b) Determine a resposta ao impulso unitário $h[n]$

$$
H[z] = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + 0.2\frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \tag{26}
$$

Portanto utilizando a tabela de transformada inversa de Z:

$$
h[n] = (0.5)^n u[n] + 0.2(0.5)^{n-1}u[n-1] \tag{27}
$$

c) Assumindo que o sistema seja implementado em aritmética de ponto fixo de 8 bits, e que todos os produtos sejam arredondados para 8 bits antes que uma soma qualquer tenha sido realizada. Usando o modelo linear para ruído de arredondamento, encontre a variância do ruído de arredondamento na saída do filtro.



A variância do ruído de arredondadmento é dada por:

$$
\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \tag{28}
$$

Onde B é o número de bits do sistema menos 1, portanto para um sistema de 8 bits:

$$
\sigma_e^2 = \frac{2^{-2\cdot 7}}{12} = 5.0863 \cdot 10^{-6} \tag{29}
$$

Podemos escrever o ruído da saída do sistema como:

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 + \sigma_e^2 \frac{b_0^2 + b_1^2 + 2a_1 b_0 b_1}{1 - a_1^2} \tag{30}$$

Onde b_0 e b_1 são os coeficientes do numerador e a_1 do denominador da função de transferência, portanto:

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 = \sigma_e^2 + \sigma_e^2 \frac{1^2 + 0.2^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 0.2}{1 - 0.5^2} \\
= 5.0863 \cdot 10^{-6} \\
+5.0863 \cdot 10^{-6} \frac{1 + 0.04 + 0.2}{1 - 0.25} \\
= 5.0863 \cdot 10^{-6} \\
+5.0863 \cdot 10^{-6} \frac{1.24}{0.75} \\
= 5.0863 \cdot 10^{-6} (1 + 1.6533) \\
= 1.3495 \cdot 10^{-5}
\end{aligned} \tag{31}$$