Trabalho de Sinais e Sistema II - Transformada Z

Gabriel Luiz Espindola Pedro

Considere um sistema linear e invariante no tempo com as condições inicias $y[-1] = 1$ e $y[-2] = 1$ e descrito pela equação diferença

$$y[n] - y[n-1] + 0.21y[n-2] = x[n]$$

e sinal de entrada $x[n] = (1 - 0.9^n)u[n]$

a) Determine a expressão da função de transferência do sistema (cálculo)
b) Represente graficamente o sistema no plano z. Verifique e justifique a estabilidade do sistema.
c) Determine a expressão da resposta ao impulso do sistema (cálculo e via simulação).
d) Represente graficamente a resposta ao impulso do sistema.
e) Determine a expressão da resposta em frequência do sistema (módulo e fase).
f) Represente graficamente a resposta em frequência do sistema (módulo e fase).
g) Represente graficamente o sinal de entrada.
h) Determine a transformada z do sinal de entrada (via tabela/propriedades/definição e via simulação).
i) Represente o sinal de entrada no plano z.
j) Determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais nulas. Represente-a no plano z.
k) Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.
l) Identifique a componente homogênea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.
m) Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.
n) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada.
o) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.
p) Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal $x_{CI}[n]$ que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.
q) Determine a TZ da resposta do sistema às condições iniciais.
r) Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.
s) Determine a resposta complete do sistema admitindo condições iniciais não nulas.
t) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.
u) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.

a) Determine a expressão da função de transferência do sistema (cálculo)

A função de transferência $H[z]$ é definida por:

$$H[Z] = \frac{Y[z]}{X[z]}$$

Para obter a equação nesta forma, primeiro aplicamos a transformada $\mathcal{Z}$ a equação diferença:

$$y[n] - y[n-1] + 0.21y[n-2] = x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} Y[z] - Y[z] \cdot z^{-1} + 0.21Y[z] \cdot z^{-2} = X[z]$$

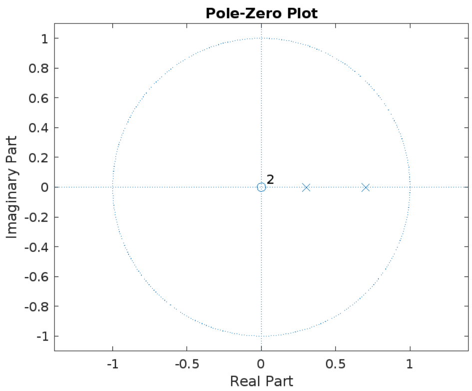
Isolando $Y[z]$ e $X[z]$:

$$Y[z] - Y[z] \cdot z^{-1} + 0.21Y[z] \cdot z^{-2} = X[z]$$
$$Y[z] \cdot (1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}) = X[z]$$
$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}}$$

b) Represente graficamente o sistema no plano z. Verifique e justifique a estabilidade do sistema.

Utilizando o software MATLAB, utilizo a função informo os valores obtidos para dos coeficientes da minha função de transferência antes de executar as frações parciais e utilizo a função `zplane` para gerar o gráfico do plano Z.

```
b = 1;
a = [1 -1 0.21];

zplane(b,a);
```



Como podemos analisar no gráfico gerado os polos do sistema estão dentro do circulo unitário portanto é estável.

c) Determine a expressão da resposta ao impulso do sistema (cálculo e via simulação).

Multiplicamos equação por $\frac{z^2}{z^2}$, desta maneira podemos fatorar a equação linear no divisor e separar em frações parciais:

$$H[z] = \frac{z^2}{z^2 - z^1 + 0.21}$$
$$= \frac{z^2}{(z - 0.7)(z - 0.3)}$$
$$\frac{H[z]}{z} = \frac{z}{(z - 0.7)(z - 0.3)}$$
$$= \frac{A}{z - 0.7} + \frac{B}{z - 0.3}$$

Calculando os valores das contantes para as frações parciais:

$$A = \left[(z-0.7)\left(\frac{z}{(z-0.7)(z-0.3)}\right)\right]_{z=0.7} \qquad B = \left[(z-0.3)\left(\frac{z}{(z-0.7)(z-0.3)}\right)\right]_{z=0.3}$$

$$= \left[\frac{z}{z-0.3}\right]_{z=0.7} \qquad = \left[\frac{z}{z-0.7}\right]_{z=0.3}$$

$$= \frac{0.7}{(0.7)-0.3} \qquad = \frac{0.3}{(0.3)-0.7}$$

$$= \frac{0.7}{0.4} = \frac{7}{4} = 1.75 \qquad = \frac{0.3}{-0.4} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

Aplicando os valores obtidos, obtemos:

$$\frac{H[z]}{z} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z-0.7} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-0.3}$$
$$H[z] = \frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z-0.7} - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{z-0.3}$$

Para calcular a resposta ao impulso do sistema aplicamos a transformada inversa a função de transferência, portanto:

$$H[z] = \frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z-0.7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{z-0.3} \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\Longleftrightarrow} h[n] = \frac{7}{4}0.7^n u[n] - \frac{3}{4}0.3^n u[n]$$

Utilizando o MATLAB para validar o resultado obtido, temos:

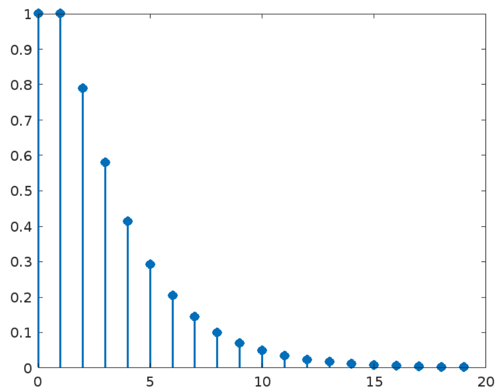
```
[r p k] = residuez(b, a)

syms z
iztrans(z^2/((z-0.7)*(z-0.3)))
```

$$r = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.75 \end{bmatrix}$$
$$p = [0.7]$$
$$k = []$$
$$\texttt{ans} = \frac{7\left(\frac{7}{10}\right)^n}{4} - \frac{3\left(\frac{3}{10}\right)^n}{4}$$

d) Represente graficamente a resposta ao impulso do sistema.

Utilizando o MATLAB é possível representar a reposta ao impulso do sistema utilizando a função `impz`:

```
n = 20;

h = impz(b, a, n);

stem(0:n-1, h, 'filled',
     'LineWidth', 1.5);
```

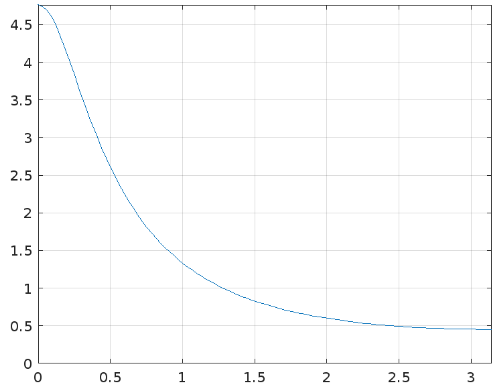


e) Determine a expressão da resposta em frequência do sistema (módulo e fase).

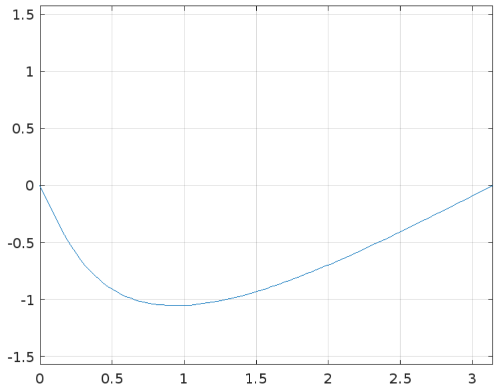
$$H[\Omega] = H[z]|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0.7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0.3}$$

f) Represente graficamente a resposta em frequência do sistema (módulo e fase).

```
w = 0 : pi/100 : pi;
[H w] = freqz(b,a,w);

plot(w,abs(H));grid on;

axis([min(w) max(w) 0 max(abs(H))])
```




```
plot(w,angle(H)); grid on
axis([min(w) max(w) -pi/2 pi/2])
```



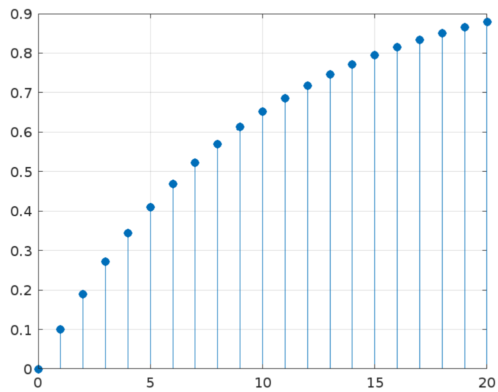
g) Represente graficamente o sinal de entrada.

O enunciado informa que o sinal de entrada é dado por:

$$x[n] = (1 - 0.9^n)u[n]$$

Utilizando o MATLAB para desenhar o gráfico deste sinal obtemos:

```
n = 0 : 20;
x=(1-0.9.^(n));
figure(5);
stem(n,x,'filled'); grid on
```



h) Determine a transformada z do sinal de entrada (via tabela/propriedades/definição e via simulação).

Sabendo que:

$$u[n] \overset{z}{\Longleftrightarrow} \frac{z}{z-1}$$

$$\alpha^n u[n] \overset{z}{\Longleftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha}$$

Portanto desenvolvendo a equação do sinal de entrada obtemos:

$$\begin{aligned} x[n] &= (1-0.9^n)u[n] \\ &= 1u[n] - 0.9^n u[n] \\ \mathcal{Z} &\Updownarrow \\ X[z] &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.9} \end{aligned}$$

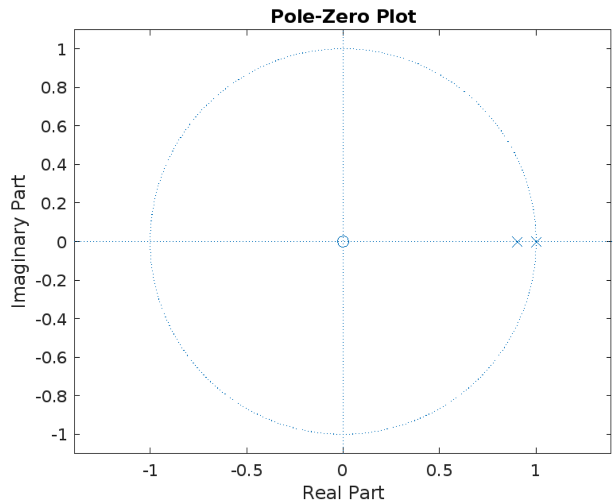
Utilizando a função `ztrans`

```
syms n
X= simplify(ztrans(1-0.9^n))
```

ans $= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.9}$

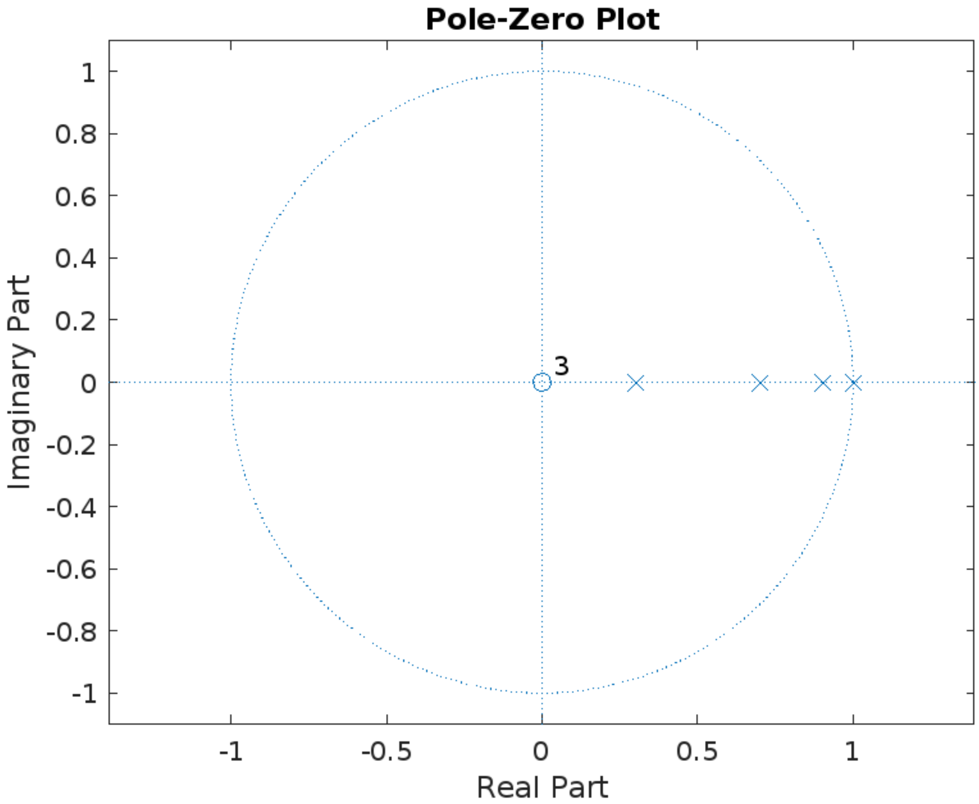
i) Represente o sinal de entrada no plano z.

```
b=[0 0.1];
a=poly([1 0.9]);

zplane(b,a)
```



j) Determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais nulas. Represente-a no plano z.

$$\begin{aligned} Y[z] &= H[z] \cdot X[z] \\ &= \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z-0.7} - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{z-0.3}\right) \cdot \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.9}\right) \\ &= \left(\frac{1.75 \cdot z(z-0.3) - 0.75 \cdot z(z-0.7)}{(z-0.7) \cdot (z-0.3)}\right) \cdot \left(\frac{z(z-0.9) - z(z-1)}{(z-1) \cdot (z-0.9)}\right) \\ &= \left(\frac{(1.75 \cdot z(z-0.3) - 0.75 \cdot z(z-0.7)) \cdot ((z(z-0.9) - z(z-1)))}{(z-0.7) \cdot (z-0.3) \cdot (z-1) \cdot (z-0.9)}\right) \\ &= \left(\frac{z((1.75 \cdot (z-0.3) - 0.75 \cdot (z-0.7)) \cdot z(((z-0.9) - (z-1))))}{(z-0.7) \cdot (z-0.3) \cdot (z-1) \cdot (z-0.9)}\right) \\ \frac{Y[z]}{z} &= \left(\frac{(1.75 \cdot (z-0.3) - 0.75 \cdot (z-0.7)) \cdot (((z-0.9) - (z-1)))}{(z-0.7) \cdot (z-0.3) \cdot (z-1) \cdot (z-0.9)}\right) \\ &= \frac{2.0417}{z-0.7} - \frac{0.0536}{z-0.3} + \frac{4.7619}{z-1} - \frac{6.5}{z-0.9} \\ Y[z] &= 2.0417 \cdot \frac{z}{z-0.7} - 0.0536 \cdot \frac{z}{z-0.3} + 4.7619 \cdot \frac{z}{z-1} - 6.5 \cdot \frac{z}{z-0.9} \end{aligned}$$



k) Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.

$$Y[z] = 2.0417 \cdot \frac{z}{z-0.7} - 0.0536 \cdot \frac{z}{z-0.3} + 4.7619 \cdot \frac{z}{z-1} - 6.5 \cdot \frac{z}{z-0.9}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \Updownarrow$$

$$y[n] = 2.0417 \cdot 0.7^n u[n] - 0.0536 \cdot 0.3^n u[n] + 4.7619 \cdot u[n] - 6.5 \cdot 0.9^n u[n]$$

l) Identifique a componente homogênea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.

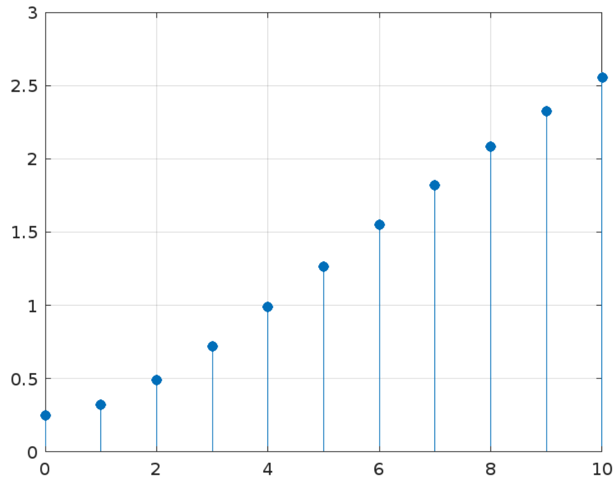
$$y[n] = \underbrace{2.0417 \cdot 0.7^n u[n] - 0.0536 \cdot 0.3^n u[n]}_{\text{homogênea}} + \underbrace{4.7619 \cdot u[n] - 6.5 \cdot 0.9^n u[n]}_{\text{particular}}$$

m) Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.

$$y[n] = \underbrace{2.0417 \cdot 0.7^n u[n] - 0.0536 \cdot 0.3^n u[n]}_{\text{transitória}} + \underbrace{4.7619 \cdot u[n]}_{\text{estacionária}} - \underbrace{6.5 \cdot 0.9^n u[n]}_{\text{transitória}}$$

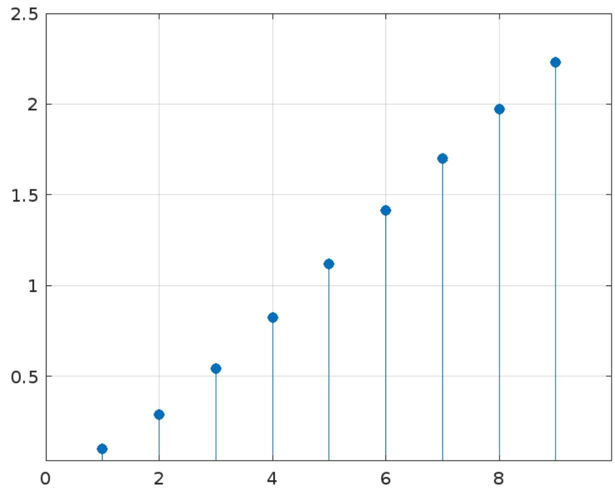
n) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada.

```
n=0:10;
x=2.0417*0.7.^n-0.0536*0.3.^n+4.7619 ...
  -6.5*0.9.^n;

stem(n,x,'filled'); grid on;
```



o) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.

```
n=0:10;
x=2.0417*0.7.^n-0.0536*0.3.^n+4.7619 ...
  -6.5*0.9.^n;

stem(n,x,'filled'); grid on;
```



p) Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal $x_{CI}[n]$ que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.

$$Y[z] - (y[-1] + z^{-1}Y[z]) + 0.21) + z^{-1}(y[-2] + z^{-1}y[-1] + z^{-2}Y[z] = X[z]$$

Ou seja:

$$Y[z](1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}) = X[z] + y[-1] - 0.21y[-2] - 0.21z^{-1}y[-1]$$

$$\begin{aligned} Y[z] &= \frac{X[z]}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}} + \frac{y[-1] - 0.21y[-2] - 0.21z^{-1}y[-1]}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}} \\ &= \frac{X[z]}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}} + \frac{1 - 0.21 - 0.21z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}} \\ &= \frac{X[z]}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}} + \frac{0.79 - 0.21z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}} \end{aligned}$$

Pelo que:

$$X_{CI}[z] = 0.79 - 0.21z^{-1}$$

Logo:

$$x_{CI}[n] = 0.79\delta[n] - 0.21\delta[n-1]$$

Verificando com a função `filtic`:

```
y=[1 1];
xic=filtic(b,a,y)
```

$$x_{ic} = \begin{bmatrix} 0.7900 \\ -0.2100 \end{bmatrix}$$

q) Determine a TZ da resposta do sistema às condições iniciais.

Imediatamente a partir das expressões acima

$$Y_{x_{CI}}[z] = \frac{0.79 - 0.21z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.21z^{-2}}$$

r) Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.

```
b=[0.75 -0.21];
a=[1 -1 0.21];

[r p k]=residuez(b,a)
```

$$r = \begin{bmatrix} 0.7875 \\ -0.0375 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 0.7000 \\ 0.3000 \end{bmatrix}$$

$$k = []$$

$$\begin{aligned} Y[z] &= \frac{0.7875}{1-0.7z^{-1}} - \frac{0.0375}{1-0.3z^{-1}} \\ &= 0.7875\frac{z}{z-0.7} - 0.0375\frac{z}{z-0.3} \\ \mathcal{Z} &\Updownarrow \\ y[n] &= 0.7875 \cdot 0.7^n u[n] - 0.0375 \cdot 0.3^n u[n] \end{aligned}$$

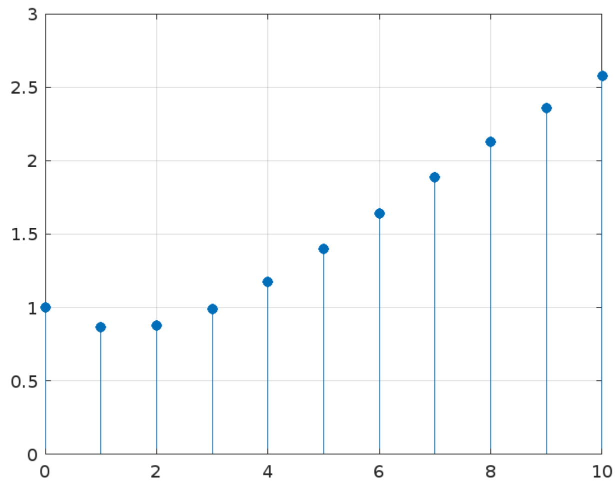
s) Determine a resposta completa do sistema admitindo condições iniciais não nulas.

$$y[n] = \underbrace{2.0417 \cdot 0.7^n u[n] - 0.0536 \cdot 0.3^n u[n] + 4.7619 \cdot u[n] - 6.5 \cdot 0.9^n u[n]}_{\text{condições iniciais nulas}}$$

$$\underbrace{+0.7875 \cdot 0.7^n u[n] - 0.0375 \cdot 0.3^n u[n]}_{\text{condições iniciais}}$$

t) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.

```
n=0:10;
x=2.0417*0.7.^n-0.0536*0.3.^n+4.7619 ...
-6.5*0.9.^n+0.78750*0.7.^n ...
-0.0375*0.3.^n
stem(n,x,'filled'); grid on;
```



u) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.

```
n=0:10;
x=1-0.9.^(n);
b=[1];
a=[1 -1 0.21];
y=filter(b,a,x,xic);
stem(n,y,'filled'); grid on;
```