INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

# Revisão de Sinais e Sistemas

Processamento de Sinais Digitais

**Gabriel Luiz Espindola Pedro**

13 de Setembro de 2023

# Sumário

**1. Questão 1** ... **3**
1.1. $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ ... 3
1.2. $x[n] = \sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ ... 4
1.3. $x[n] = e^{j\frac{2\pi n}{3}}$ ... 5
**2. Questão 2** ... **6**
**3. Questão 3** ... **7**
**4. Questão 4** ... **8**
**5. Questão 5** ... **9**
**6. Questão 6** ... **10**
**7. Questão 7** ... **11**

# 1. Questão 1

Determine se os sinais abaixo são periódicos e em caso positivo, determine o período fundamental.

---

## 1.1. $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \tag{2}$$

Temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) \tag{3}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 1 \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 0 \tag{4}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi N}{3} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi}{2\pi} 3k \\ \therefore N &= 3k \end{aligned} \tag{5}$$

O que implica que o sinal é periódico com período fundamental $N = 3$.

**1.2.** $x[n] = \sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

Podemos reescrever o argumento da função seno como uma única fração

$$\sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) \tag{6}$$

Desta maneira podemos validar a periodicidade do sinal

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{8(n + N) + 3\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{8n + 8N + 3\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12} + \frac{8N}{12}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \tag{8}$$

Temos que

$$\sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{8N}{12}\right) + \sin\left(\frac{8N}{12}\right)\cos\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) \tag{9}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\sin\left(\frac{8N}{12}\right) = 0 \quad e \quad \cos\left(\frac{8N}{12}\right) = 1 \tag{10}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{8N}{12} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi k 12}{8} \\ N &= \frac{24\pi k}{8} \\ \therefore N &= (3\pi k) \end{aligned} \tag{11}$$

Como não exiteste um valor inteiro que $k$ possa assumir para que $N$ seja um número inteiro, o sinal não é periódico.

### 1.3. $x[n] = e^{j\frac{2\pi n}{3}}$

Utilizando a identidade de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{12}$$

Portanto temos que

$$e^{j\frac{2\pi n}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \tag{13}$$

Podemos então verificar a periodicidade do sinal

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \\ \sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A)\end{aligned} \tag{15}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = &\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right)\right] \\ &+ j\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]\end{aligned} \tag{16}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 1 \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 0 \tag{17}$$

O que implica que

$$\begin{aligned}\frac{2\pi N}{3} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi}{2\pi}3k \\ \therefore N &= 3k\end{aligned} \tag{18}$$

O que implica que o sinal é periódico com período fundamental $N = 3$.

## 2. Questão 2

Dada a sequência

$$x[n] = (2 - n)\{u[n] - u[n - 4]\} \tag{19}$$

Faça o gráfico de $y[n] = x[-2n - 4]$, sendo $u[n]$ a função degrau unitário (Heaviside).

---

Analisando a sequência $x[n]$, identificamos que ela é composta por duas funções, uma sendo uma reta decrescente que cruza o eixo das abscissas no ponto $n = 2$ e outra sendo um janelamento onde possui valor 1 entre $n = 0$ e $n = 3$, e 0 para os demais valores de $n$. Considerando que $x[n]$ é uma multiplicação entre essas duas funções, identificamos que ela possui valor $(2n - 1)$ para $0 < n < 3$ e 0 para os demais valores.

$$x[n] = \begin{cases} 2n - 1 \text{ , } 0 < n < 3 \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases} \tag{20}$$

Dado que $y[n] = x[-2n - 4]$, podemos fazer o deslocamento do sinal $x[n]$ para a direita em 4 unidades, após isso espelhar o sinal em relação ao eixo das ordenadas e por fim comprimir o sinal pegando os valores a cada 2 unidades.

# 3. Questão 3

Determine se o sistema

$$y[n] = nx[n + 3] \tag{21}$$

é causal, invariante no deslocamento e linear.

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem.

# 4. Questão 4

Um sistema linear invariante ao deslocamento tem a seguinte resposta ao impulso

$$h[n] = u[n] \tag{22}$$

Encontre, usando a soma de convolução, a saída se a entrada for

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{23}$$

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem.

## 5. Questão 5

Considere a sequência de tempo discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{24}$$

Encontre dois sinais diferentes de tempo contínuo que produzem essa sequência quando são amostrados com uma frequência de $f_s = 5000\ \text{Hz}$.

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem.

## 6. Questão 6

Um filtro digital, implementado em um circuito integrado DSP (*Digital Signal Processing*), é descrito pela equação de diferença linear com coeficientes constantes:

$$y[n] = x[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] \tag{25}$$

Para analisar o desempenho do filtro, mede-se a resposta a entrada $\delta[n]$. Entretanto, antes da aplicação da entrada, os registradores internos de armazenamento não são zerados. Assim, a saída do filtro inclui o efeito das condições iniciais, que são $y[-1] = 1$ e $y[-2] = 1$.

Determine a resposta do filtro para $n \geq 0$.

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem.

## 7. Questão 7

Considere a seguinte transformada $\mathcal{Z}$

$$X[z] = \frac{z}{z - 0.1} + \frac{z}{z - 0.2} + \frac{z}{z - 0.3} \tag{26}$$

Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ inversa para as seguintes regiões de convergência:

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem.