



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Filtros IIR

Processamento de Sinais Digitais

Gabriel Luiz Espindola Pedro

08 de Agosto de 2024

Sumário

- 1. Questão 1 3
 - 1.1. Resolução 3
- 2. Questão 2 6
 - 2.1. Resolução 6

1. Questão 1

1. Usando a transformação bilinear, projete um filtro passa-baixas Butterworth que atenda as seguintes especificações:

$$\begin{aligned} 0.9 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.2, \quad 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \quad (1)$$

Considere $T_s = 2$

Faça o mesmo projeto usando o MATLAB ou SIMULINK. Plote a resposta em frequência.

1.1. Resolução

Para iniciarmos a resolução da questão utilizando as especificações do filtro, foi realizado o mapeamento por meio da transformação bilinear, onde: foi definido o valor de $T_s = 2$, e calculamos as frequências analógicas Ω_p e Ω_r .

$$\Omega \rightarrow \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2)$$

```
1 wp = 0.2*pi;
2 wr = 0.3*pi;
3
4 Omega_p = tan(wp/2)
5 Omega_r = tan(wr/2)
```

A partir dos valores de Ω_p e Ω_r e sabendo que $a = 1$ devido a escolha do filtro Butterworth, foi feita a normalização como visto na Tabela 1

Transformação	Normalização	Desnormalização
passa-baixas(Ω) \leftrightarrow passa-baixas(Ω')	$\Omega'_p = \frac{1}{a}$ $\Omega'_r = \frac{1}{a} \frac{\Omega_r}{\Omega_p} \quad (3)$	$s' \leftrightarrow \frac{1}{a} \frac{s}{\Omega_p} \quad (4)$

Tabela 1: Transformações na frequência analógica

Com a normalização das frequências, podemos então calcular as atenuações a partir da Tabela 2. Definindo os valores de atenuação desejados σ_p e σ_r , e calculando as atenuações em decibéis A_p e A_r .

	Ondulação	Ganho [dB]	Atenuação[dB]
Faixa de passagem	δ_p	$G_p = 20 \log(1 - \delta_p)$	$A_p = -G_p$
Faixa de rejeição	δ_r	$G_r = 20 \log(\delta_r)$	$A_r = -G_r$

Tabela 2: Atenuações

Com os valores de atenuação em mãos podemos então calcular ε e a ordem do filtro n .

$$\varepsilon = \sqrt{(10^{0.1 \cdot A_p}) - 1} \quad (5)$$

$$n = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^{0.1 \cdot A_r} - 1}{\varepsilon^2}\right)}{2 * \log(\Omega'_r)} \right\rceil \quad (6)$$

```

1 eps = sqrt((10^(0.1*atenuacao_p))-1)
2
3 num = log10((10^(0.1*atenuacao_r)-1) / eps^2);
4 den = 2*log10(omega_r_linha);
5
6 n = ceil(num/den)

```

E então podemos obter as raízes de s' utilizando a função `roots()` para encontrar as raízes da equação $1 + \varepsilon^2(-s'^2)^n = 0$.

```

1 roots([eps^2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1])

```

Os coeficientes do filtro por sua vez são obtidos utilizando a função `poly()`.

```

1 poly(roots([eps^2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]))

```

Com os coeficientes podemos obter a função de transferência do filtro, que é dada por:

$$h'(s') = \frac{2.0648}{1s'^6 + 4.3600s'^5 + 9.5048s'^4 + 13.1362s'^3 + 12.1033s'^2 + 7.0697s + 2.0648} \quad (7)$$

Em seguida, foram substituídos os valores de s' pelos valores desnormalizados, utilizando a expressão $s' = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{s}{\omega_p}\right)$.

$$h(s) = \frac{0.0024}{1s^6 + 1.4166s^5 + 1.0034s^4 + 0.4506s^3 + 0.1349s^2 + 0.0256s + 0.0024} \quad (8)$$

Então colocamos os valores dos coeficientes do numerador e do denominador em vetores b e a , respectivamente.

```

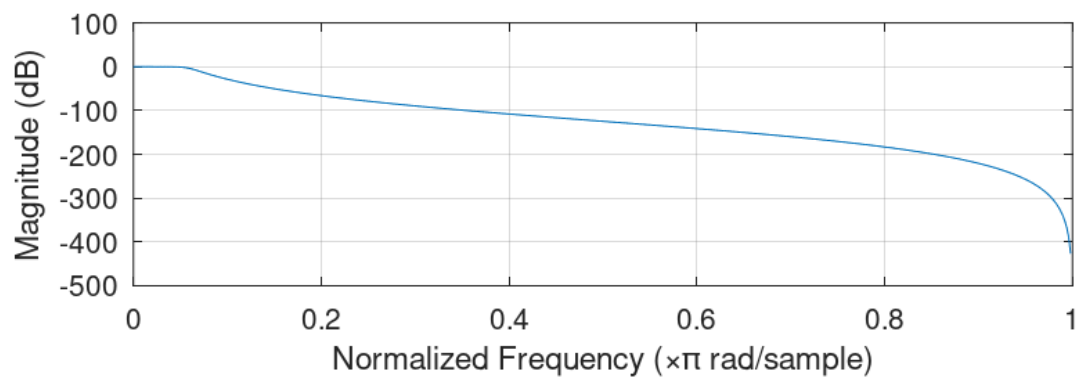
1 b = [0.0024];

```

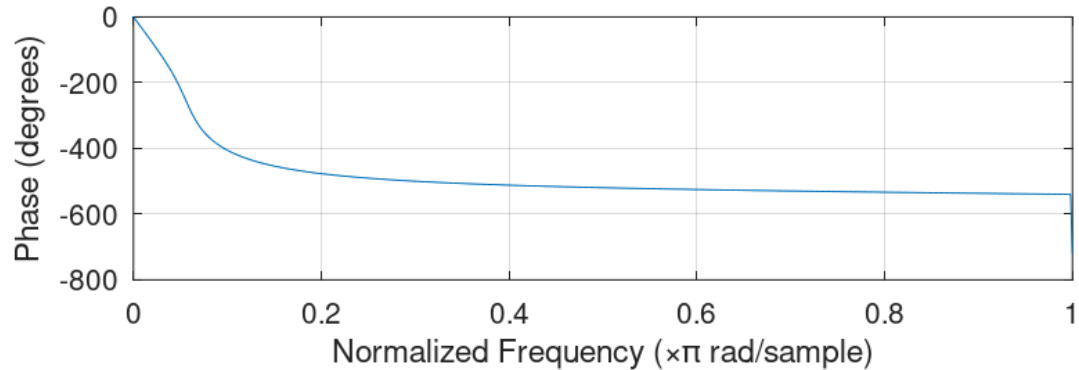
```
2 a = [1 1.4166 1.0034 0.4506 0.1349 0.0256 0.0024];
```

Por fim, foi implementado a aplicação da transformação bilinear, em que: Utilizamos a função `bilinear()` para converter os coeficientes do filtro desnormalizado para o domínio discreto. Assim, retornando os coeficientes do filtro discretizado em `num` e `den`.

```
1 [num, den] = bilinear(b, a, 1/ts);
```



Resposta em Frequência do Filtro Digital



2. Questão 2

1. Crie, usando MATLAB, um sinal de entrada composto de três componentes senoidais, nas frequências 770 Hz, 852 Hz e 941 Hz, com $f_s = 8$ kHz. Projete, usando o SIMULINK ou o MATLAB, um filtro IIR para isolar cada componente. Documente as especificações utilizadas. Faça comentários.

2.1. Resolução

Para iniciarmos a resolução da questão, foi criado um sinal de entrada composto de três componentes senoidais, nas frequências 770 Hz, 852 Hz e 941 Hz, com $f_s = 8$ kHz.

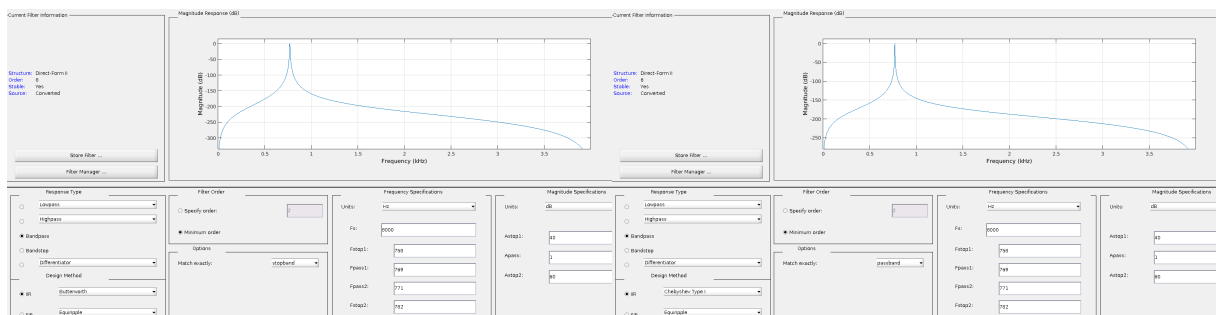


Figura 2: Filtro Butterworth

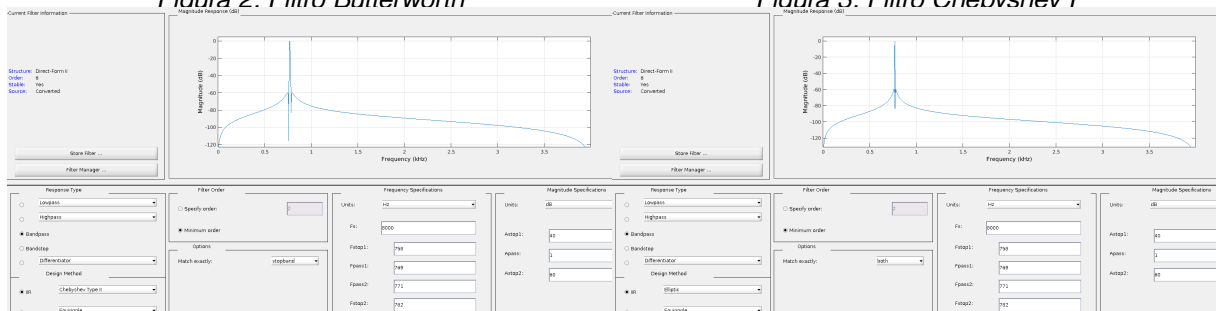


Figura 3: Filtro Chebyshev I

Figura 4: Filtro Chebyshev II

Figura 5: Filtro Elíptico

Com base nas imagens dos quatro tipos de filtro, podemos comparar a eficiência de cada um na filtragem das componentes. A análise dos filtros seguiu a ordem apresentada no simulador fdatool. O primeiro filtro examinado foi o Butterworth, que apresentou ordem 8, com uma banda de transição maior do que os filtros Chebyshev e Elíptico, além de uma banda de atenuação mais ampla.

O filtro Chebyshev I, de ordem 6, mostrou-se mais seletivo que o filtro Elíptico, mas com uma banda de atenuação menor. O filtro Chebyshev II apresentou um comportamento similar ao Butterworth, porém com uma banda de atenuação menor. Já o filtro Elíptico, também de ordem 6, foi mais seletivo que os filtros Butterworth e Chebyshev II, com uma banda de transição menor e uma banda de atenuação comparável à do Chebyshev I.

Todos os filtros demonstraram estabilidade com os parâmetros selecionados. Como o objetivo é filtrar frequências específicas, optou-se pelo filtro Butterworth. Embora seja mais complexo e custoso de implementar, ele oferece uma banda de atenuação

maior, essencial para a filtragem de múltiplas frequências do sinal. A seguir, será realizada uma análise detalhada do filtro Butterworth para as frequências desejadas, utilizando a regra de 10:1.

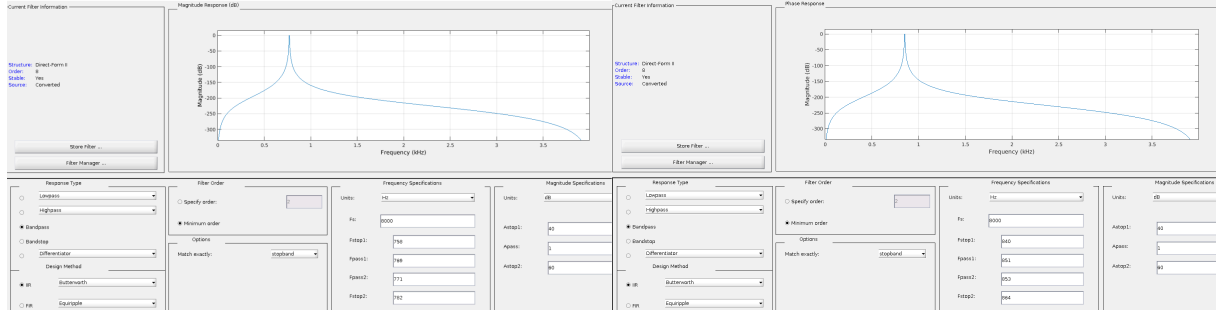


Figura 6: Filtro 770Hz

Figura 7: Filtro 852Hz

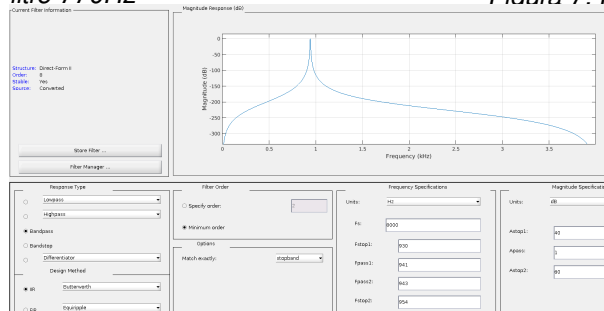


Figura 8: Filtro 942Hz

Para a filtragem das frequências desejadas, foram utilizados filtros Butterworth de ordem 8, com as seguintes especificações:

- Filtro 770Hz: $f_p = 770$ Hz, $f_s = 8$ kHz, $A_p = 0.1$ dB, $A_r = 60$ dB.
- Filtro 852Hz: $f_p = 852$ Hz, $f_s = 8$ kHz, $A_p = 0.1$ dB, $A_r = 60$ dB.
- Filtro 942Hz: $f_p = 942$ Hz, $f_s = 8$ kHz, $A_p = 0.1$ dB, $A_r = 60$ dB.

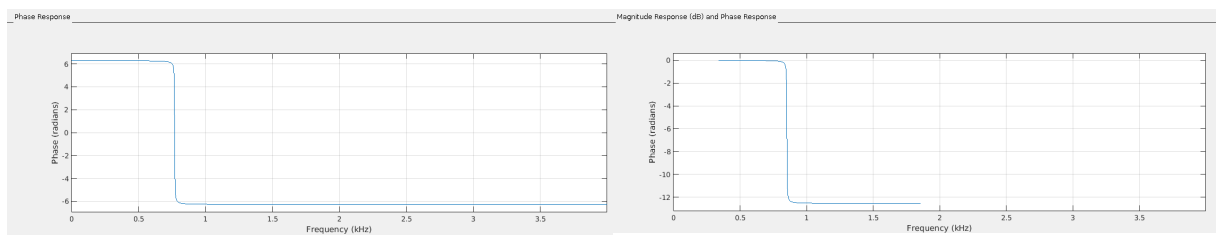


Figura 9: Filtro 770Hz

Figura 10: Filtro 852Hz

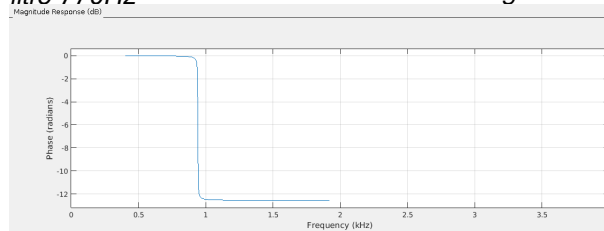


Figura 11: Filtro 942Hz

Analisando a fase verificamos que para o filtro de 770Hz temos uma fase próxima de 0° para sua banda de passagem e fora dela uma praticamente uma variação de aproximadamente $\pm 360^\circ$ (6 radianos). Para os filtros de 852Hz e 942Hz temos uma fase próxima

de -360° próximo de sua banda de passagem e fora em frequências mais baixas uma fase de 0° e em frequências mais altas uma fase de -720° .

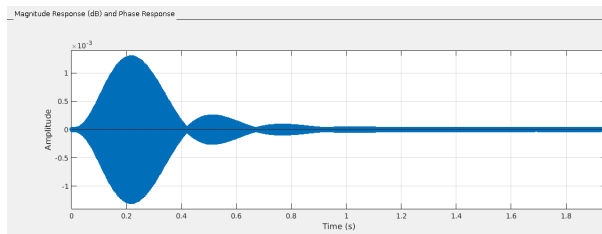


Figura 12: Filtro 770Hz

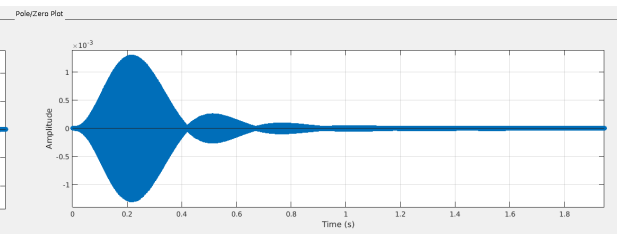


Figura 13: Filtro 852Hz

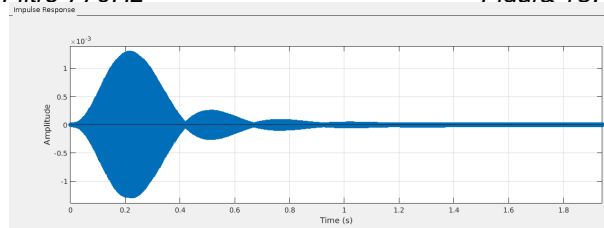


Figura 14: Filtro 942Hz

Analisando a resposta ao impulso dos três filtros, verificamos que são idênticos.

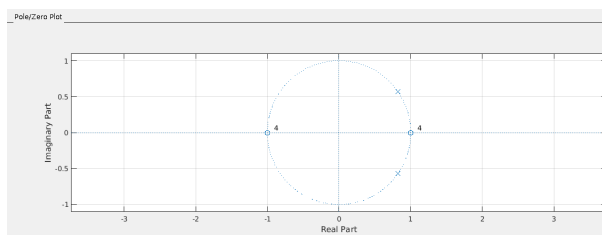


Figura 15: Filtro 770Hz

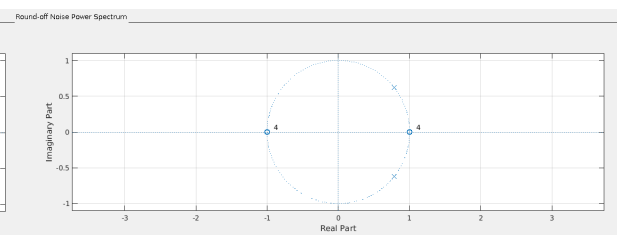


Figura 16: Filtro 852Hz

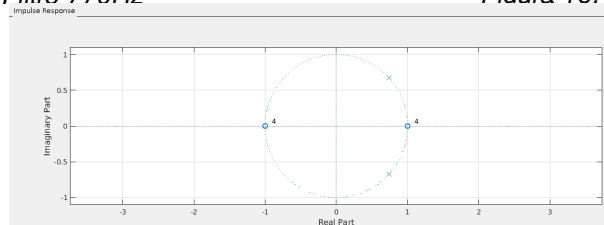


Figura 17: Filtro 942Hz

Como vemos nas figuras acima todos os filtros são estáveis, uma vez que os polos e zeros estão no círculo de raio unitário.

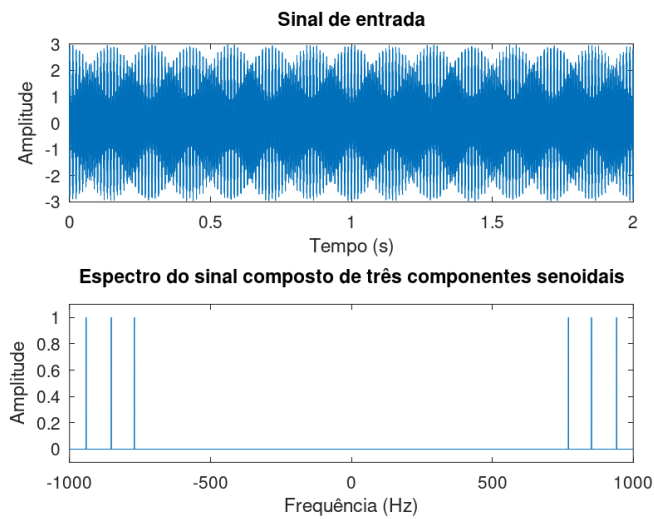


Figura 18: Sinal no tempo e na frequência

Na figura acima podemos verificar as senoides geradas e somadas, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

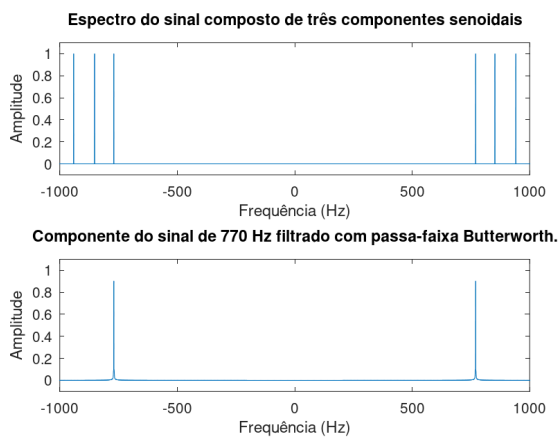


Figura 19: Filtro 770Hz

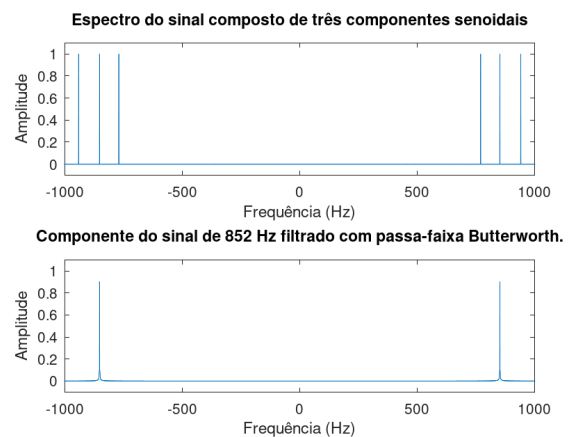


Figura 20: Filtro 852Hz

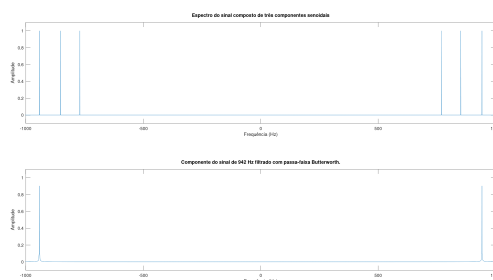


Figura 21: Filtro 942Hz

Aplicando individualmente o filtro de 770Hz, 852Hz e 942Hz, obtemos os sinais filtrados, como mostrado nas figuras acima. A filtragem foi bem sucedida, isolando cada componente senoidal do sinal original.

Com estas análises podemos concluir que o filtro Butterworth de ordem 8 é capaz de filtrar as frequências desejadas com eficiência. A utilização de um filtro IIR foi uma

escolha acertada, pois permite a filtragem de múltiplas frequências com uma banda de atenuação maior, garantindo a qualidade do sinal filtrado.