INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Transformada de Fourier Discreta

Processamento de Sinais Digitais

Gabriel Luiz Espindola Pedro

18 de Março de 2024

Sumário

1. Questão 1

As duas sequências de oito pontos $x_1[n]$ e $x_2[n]$ mostradas na figura a seguir tem *DFT's* $X_1[k]$ e $X_2[k]$, respectivamente. Determine a relação entre $X_1[k]$ e $X_2[k]$.

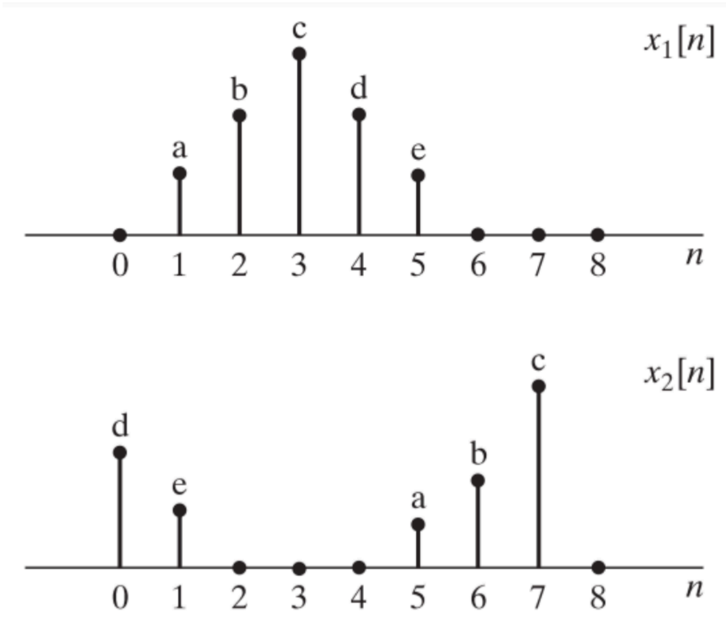


Figura 1: Definições de $x_1[n]$ e $x_2[n]$

1.1. Reposta

Ao compararmos os dois gráficos percebemos que a sequência $x_2[n]$ é a sequência $x_1[n]$ deslocada de 4 posições para a direita, analisamos também um janelamento de 8 pontos $[0, 7]$.

Obtendo a expressão de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ em função dos impulsos unitários $\delta[n]$:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5] \\ x_2[n] &= 2\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-5] + 2\delta[n-6] + 3\delta[n-7] \end{aligned} \tag{1}$$

Portanto podemos reescrever $X_2[k]$ em função de $X_1[k]$:

$$X_2[k] = X_1[k] e^{-j\frac{2\pi}{8}4k} \tag{2}$$

1.2. Simulação

Utilizando a linguagem de programação python, podemos simular a relação entre $X_1[k]$ e $X_2[k]$.

```
n = np.arange(0, 8)  # Gera um vetor de 0 a 7

x1_n = [0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 0]  # Definição de x1[n]
x2_n = [2, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 3]  # Definição de x2[n]

X1_k = fft(x1_n) * (
    np.e ** (-1j * 2 * np.pi / 8 * 4 * n)
)  # Calcula a FFT de x1[n] e realiza deslocamento de 4

x2_hat_n = ifft(X1_k)  # Calcula a IFFT
```

Onde $\hat{x}_2[n]$ é a sequência $x_2[n]$ reconstruída a partir de $X_1[k]$.

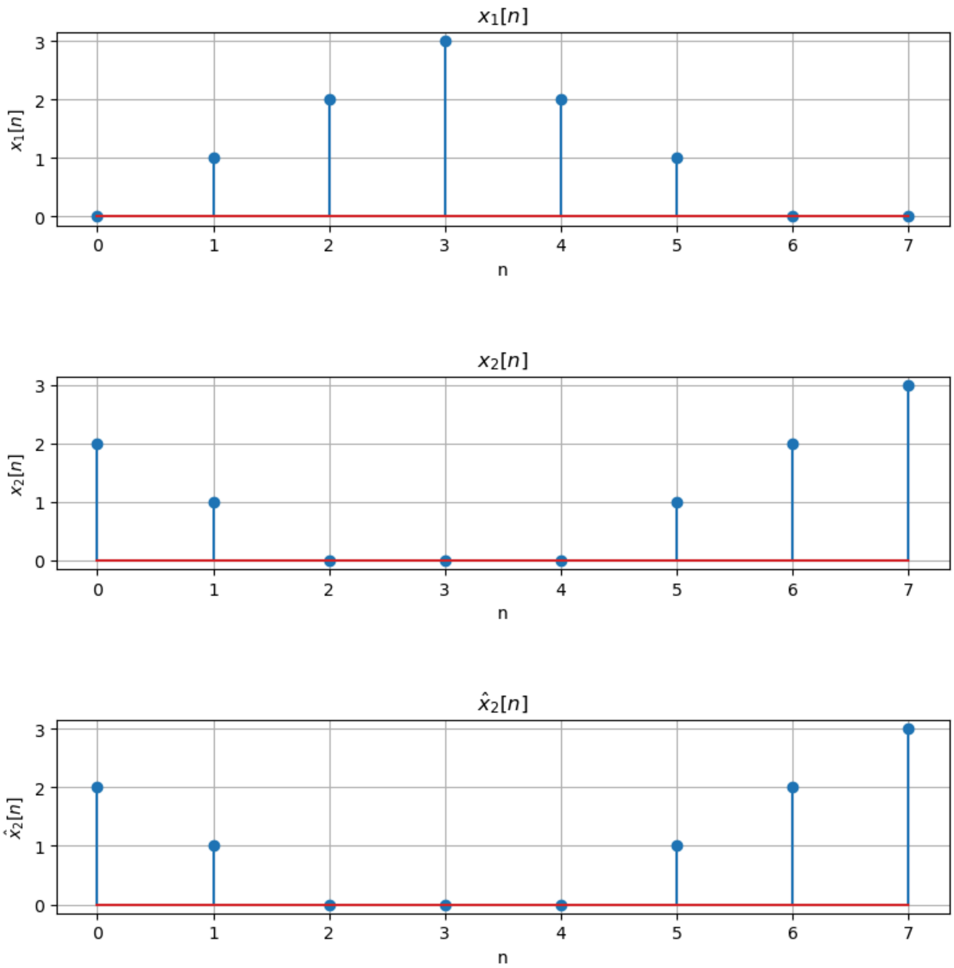


Figura 2: Plot de $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $\hat{x}_2[n]$

Verificamos que como esperado $\hat{x}_2[n]$ é igual a $x_2[n]$.

2. Questão 2

Suponha que temos duas sequências de quatro pontos $x[n]$ e $h[n]$, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \qquad && n = 0, 1, 2, 3 \\
h[n] &= 2^n && n = 0, 1, 2, 3
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Portanto temos:

a) Calcule a *DFT* de quatro pontos $X[k]$.
b) Calcule a *DFT* de quatro pontos $H[k]$.
c) Calcule $y[n] = x[n] \circledast_4 h[n]$ (realizando a convolução circular diretamente).
d) Calcule $y[n]$ do item anterior multiplicando as *DFT's* de $x[n]$ e $h[n]$ e realizando uma *DFT* inversa.

2.1. Reposta

A partir do enunciado podemos obter as sequências $x[n]$ e $h[n]$:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \delta[n] - \delta[n-2] \\
h[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 8\delta[n-3]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2.1.1. Item *a*

Para calcular a *DFT* de quatro pontos $X[k]$ utilizamos a seguinte expressão:

$$
X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}
\tag{5}
$$

Substituindo os valores de $x[n]$ e $N = 4$:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= 1e^{-j\frac{2\pi}{4}0k} + 0e^{-j\frac{2\pi}{4}1k} - 1e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 0e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} \\
&= 1 - e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2.1.2. Item *b*

Realizando o mesmo procedimento para $H[k]$:

$$
\begin{aligned}
H[k] &= 1e^{-j\frac{2\pi}{4}0k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}1k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 8e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} \\
&= 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 8e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2.1.3. Item *c*

Para calcular $y[n] = x[n] \circledast_4 h[n]$ realizamos a convolução circular diretamente:

$$
y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h\left[(n-m)_{\mathrm{mod}\,4}\right]
\tag{8}
$$

Para $N = 4$ então obtemos:

$$
\begin{aligned}
y[n] = x[0]h[n_{\bmod 4}] + x[1]h\left[(n-1)_{\bmod 4}\right] + \\
x[2]h\left[(n-2)_{\bmod 4}\right] + x[3]h\left[(n-3)_{\bmod 4}\right] \\
= h[n_{\bmod 4}] - h\left[(n-2)_{\bmod 4}\right]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Portanto para os valores de 0 a 3 temos:

$$
\begin{aligned}
y[0] &= h[0] - h[-2_{\bmod 4}] \\
&= h[0] - h[2] \\
&= 1 - 4 \\
&= -3 \\
y[1] &= h[1] - h[-1_{\bmod 4}] \\
&= h[1] - h[3] \\
&= 2 - 8 \\
&= -6
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
y[2] &= h[2] - h[0_{\bmod 4}] \\
&= h[2] - h[0] \\
&= 4 - 1 \\
&= 3 \\
y[3] &= h[3] - h[1_{\bmod 4}] \\
&= h[3] - h[1] \\
&= 8 - 2 \\
&= 6
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Portanto $y[n]$ pode ser representado por:

$$
y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3] \tag{12}
$$

2.1.3.1. Simulação

Utilizado a biblioteca `scipy` do python, podemos simular a convolução circular de $x[n]$ e $h[n]$.

```python
N = 4
n = np.arange(0, N)

x_n = cos(pi * n / 2)
h_n = 2**n

y_n = ndimage.convolve(x_n, h_n, mode="wrap", origin=-int(N / 2))
```

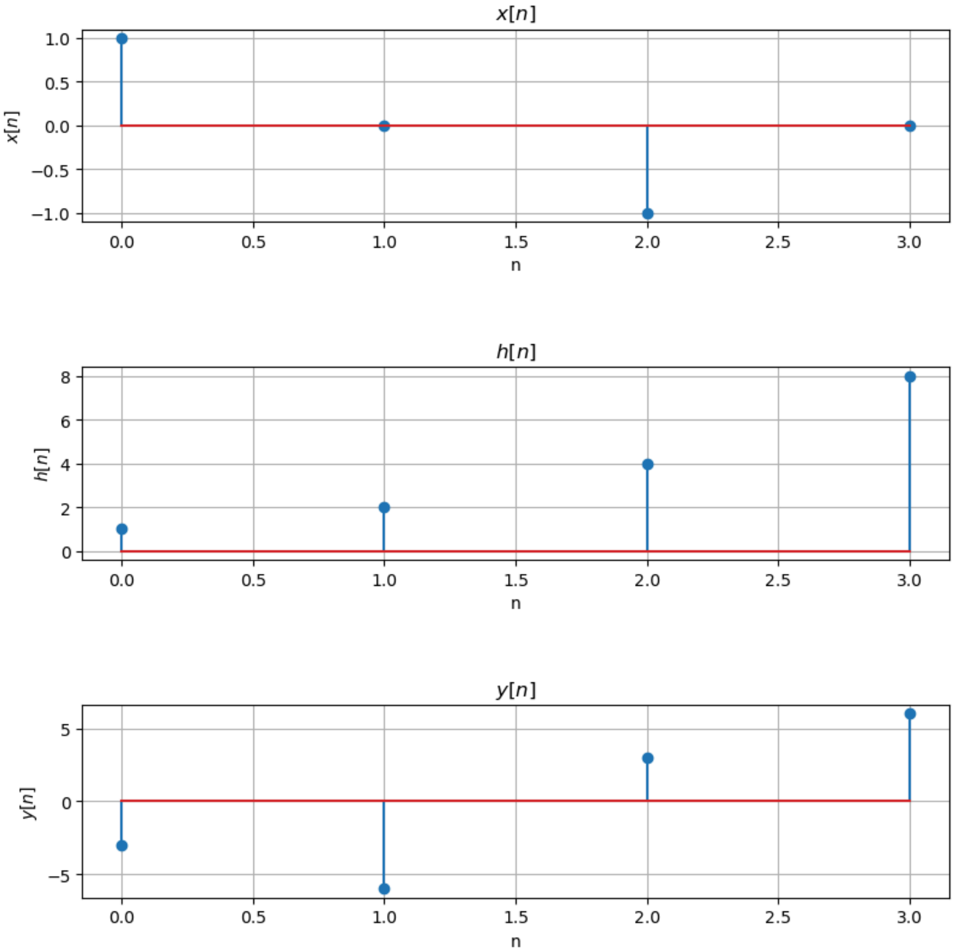


Figura 3: Plot de $x[n]$, $h[n]$ e $y[n]$

2.1.4. Item *d*

Com as *DFT's* calculadas no item *a* e *b*, podemos calcular $y[n]$ multiplicando as *DFT's* de $x[n]$ e $h[n]$ e realizando uma *DFT* inversa.

$$
\begin{aligned}
Y[k] &= X[k]H[k] \\
&= \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}\right)H[k] \\
&= H[k] - H[k]e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} \\
&\Updownarrow \\
y[n] &= h[n] - h\left[(n-2)_{\operatorname{mod} 4}\right] \\
&= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 8\delta[n-3] - \\
&\quad \delta\left[(n-2)_{\operatorname{mod} 4}\right] - 2\delta\left[(n-3)_{\operatorname{mod} 4}\right] - 4\delta\left[(n-4)_{\operatorname{mod} 4}\right] - 8\delta\left[(n-5)_{\operatorname{mod} 4}\right] \\
&= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 8\delta[n-3] - \\
&\quad \delta[n-2] - 2\delta[n-3] - 4\delta[n] - 8\delta[n-1] \\
&= -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

2.1.4.1. Simulação

Utilizando a biblioteca `numpy` do python, podemos calcular a *DFT* inversa de $X[k]H[k]$.

```
N = 4
n = np.arange(0, N)

x_n = cos(pi * n / 2)
h_n = 2**n

X_k = fft(x_n)
H_k = fft(h_n)

Y_k = X_k * H_k

y_n = ifft(Y_k)
```

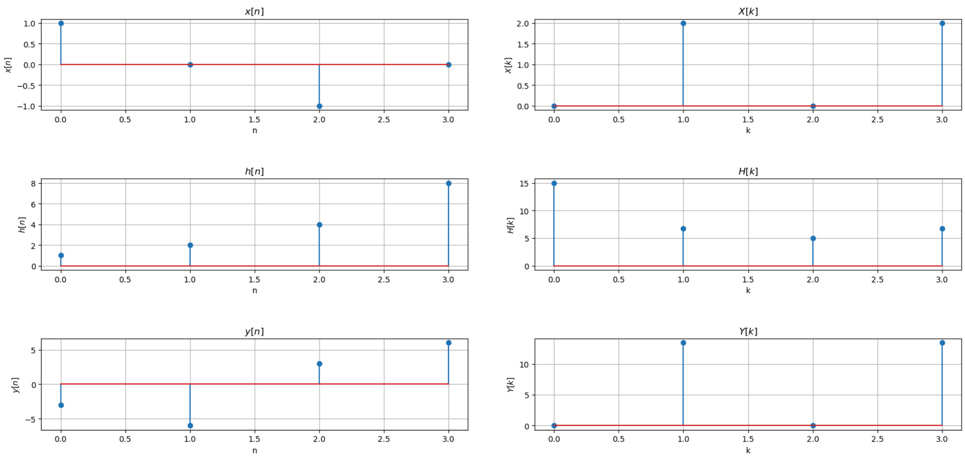


Figura 4: Plot de $x[n]$, $h[n]$ e $y[n]$ e suas respectivas *DFT's*

3. Questão 3

Dois sinais de comprimento finito, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, são esboçados na figura a seguir. Suponha que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam nulos fora da região mostrada na figura. Seja $x_3[n]$ a convolução circular de oito pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Determine $x_3[2]$.

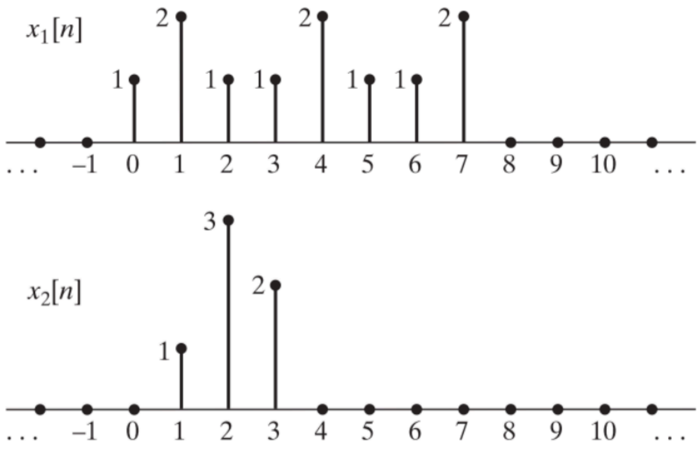


Figura 5: Definições de $x_1[n]$ e $x_2[n]$

3.1. Resposta

Analisando a figura, podemos obter as sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$:

$$\begin{aligned} x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \\ 2\delta[n-4] + \delta[n-5] + \delta[n-6] + 2\delta[n-7] \end{aligned} \tag{14}$$

$$x_2[n] = \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$

Utilizando a formula da convolução circular sendo $N = 8$:

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2\left[(n-m)_{\mathrm{mod}\, N}\right] \tag{15}$$

Podemos então obter $x_3[2]$:

$$\begin{aligned} x_3[2] &= x_1[0]x_2\left[(2-0)_{\mathrm{mod}\,8}\right] + x_1[1]x_2\left[(2-1)_{\mathrm{mod}\,8}\right] + \\ &\quad x_1[2]x_2\left[(2-2)_{\mathrm{mod}\,8}\right] + x_1[3]x_2\left[(2-3)_{\mathrm{mod}\,8}\right] + \\ &\quad x_1[4]x_2\left[(2-4)_{\mathrm{mod}\,8}\right] + x_1[5]x_2\left[(2-5)_{\mathrm{mod}\,8}\right] + \\ &\quad x_1[6]x_2\left[(2-6)_{\mathrm{mod}\,8}\right] + x_1[7]x_2\left[(2-7)_{\mathrm{mod}\,8}\right] \\ &= x_1[0]x_2[2] + x_1[1]x_2[1] + x_1[2]x_2[0] + x_1[3]x_2[7] + \\ &\quad x_1[4]x_2[6] + x_1[5]x_2[5] + x_1[6]x_2[4] + x_1[7]x_2[3] \\ &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ &= 3 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4 \\ &= 9 \end{aligned} \tag{16}$$

Portanto $x_3[2] = 9$.

3.1.1. Simulação

Utilizando python simulamos a operação

```python
N = 8
n = np.arange(0, N)

x1_n = [1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2]
x2_n = [0, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 0]

x3_n = ndimage.convolve(x1_n, x2_n, mode="wrap", origin=-int(N / 2))
```

Obtemos o seguinte resultado

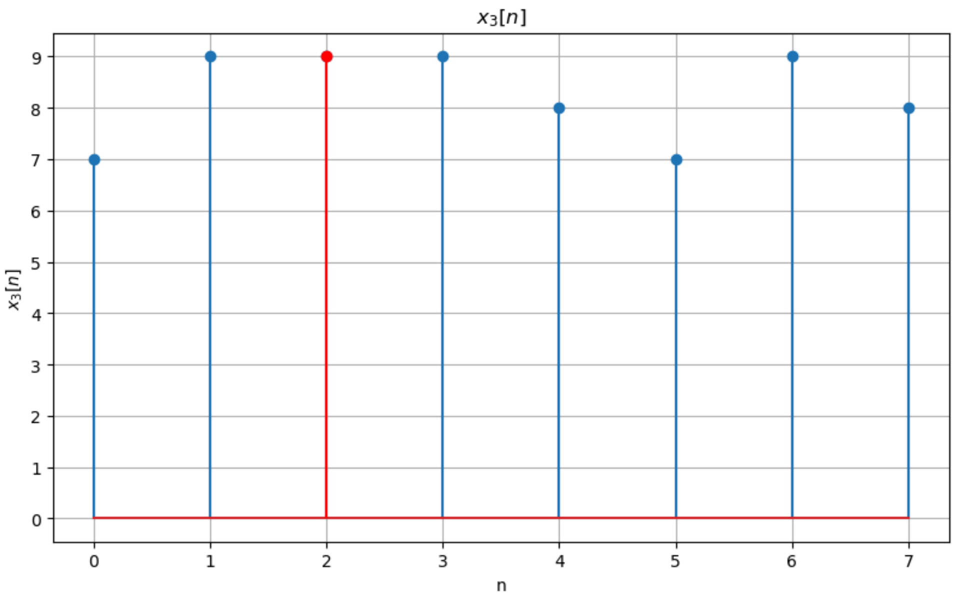
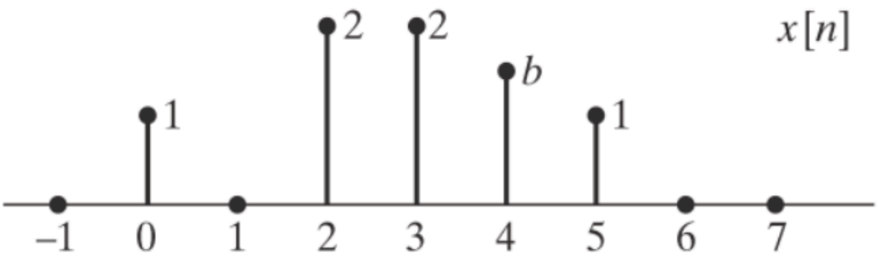


Figura 6: Plot de $x_3[n]$ evidenciando o valor em $x_3[2]$

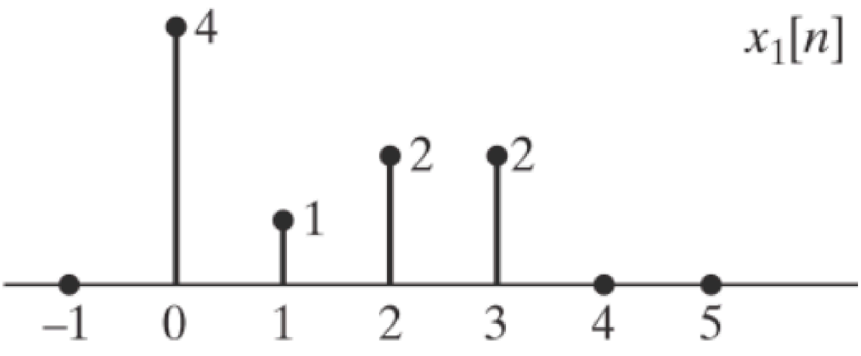
4. Questão 4

Na figura a seguir é mostrada uma sequência de tempo discreto com seis pontos $x[n] = 0$ fora do intervalo mostrado. O valor de $x[4]$ não é conhecido e é representado como b. Observe que a amostra mostrada como b na figura não está necessariamente na escala. Sejam $X(e^{j\omega})$ a *TFTD* de $x[n]$ e $X_1[k]$ as amostras de $X(e^{j\omega})$ em a cada $\pi/2$, isto é,

$$X_1[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\pi/2} \qquad 0 \leq k \leq 3$$



A sequência com uatro pontos $x_1[n]$ que resulta da inversa com quatro pontos de $X_1[k]$ é mostrada a seguir. Com base nessa figura, você pode determinar b de modo único? Caso afirmativo, dê esse valor de b.



Definimos $x_1[n]$ a partir da sequência mostrada na figura como:

$$x_1[n] = 4\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] \tag{17}$$

Com essa informação podemos determinar a *DFT* de 4 pontos da sequência:

$$X_1[k] = 4 + e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} \tag{18}$$

Observando a sequência $x[n]$ dada na primeira imagem podemos defini-la em termos de função:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + b\delta[n-4] + \delta[n-5] \tag{19}$$

Portanto a *DFT* de 4 pontos de $x[n]$ é:

$$X_1[k] = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + b + e^{-j\frac{2\pi}{4}k} \tag{20}$$

Comparando as duas expressões de $X_1[k]$ podemos obter o valor de b:

$$\begin{gathered} 4 + e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} \\ = \\ 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + b + e^{-j\frac{2\pi}{4}k} \end{gathered} \tag{21}$$

Anulando os termos comuns obtemos:

$$4 = 1 + b \therefore \boxed{\mathrm{b} = 3} \tag{22}$$

5. Questão 5

Na figura a seguir são mostradas duas sequências de comprimento finito $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Qual é o menor N tal que a convolução circular de N pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ seja igual à convolução linear dessas sequência?

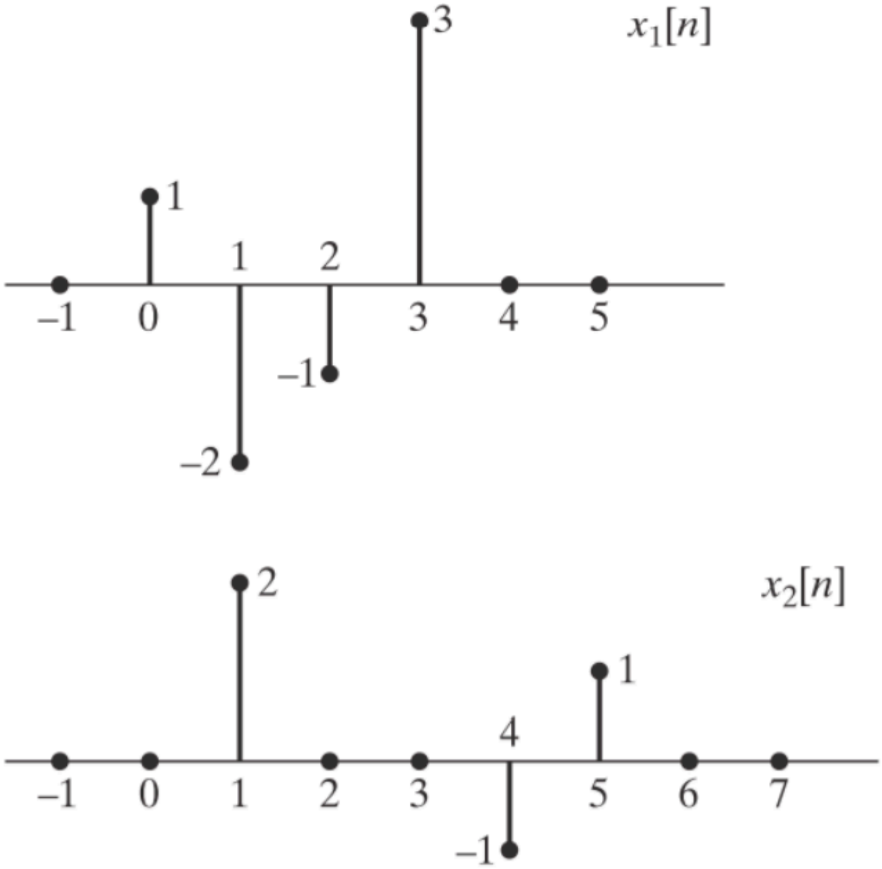


Figura 9: Definições de $x_1[n]$ e $x_2[n]$

5.1. Resposta

A partir da figura definimos as sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \delta[n] - 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 3\delta[n-3] \\ x_2[n] &= 2\delta[n-1] - \delta[n-4] + \delta[n-5] \end{aligned} \tag{23}$$

Verificamos pelas imagens também que as respectivas janelas que contem valores são 4 para $x_1[n]$ e 6 para $x_2[n]$.

Portanto utilizando a fórmula do tamanho da convolução linear:

$$N = N_1 + N_2 - 1 \tag{24}$$

Obtemos que o menor N tal que a convolução circular de N pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ seja igual à convolução linear dessas sequência é 9.

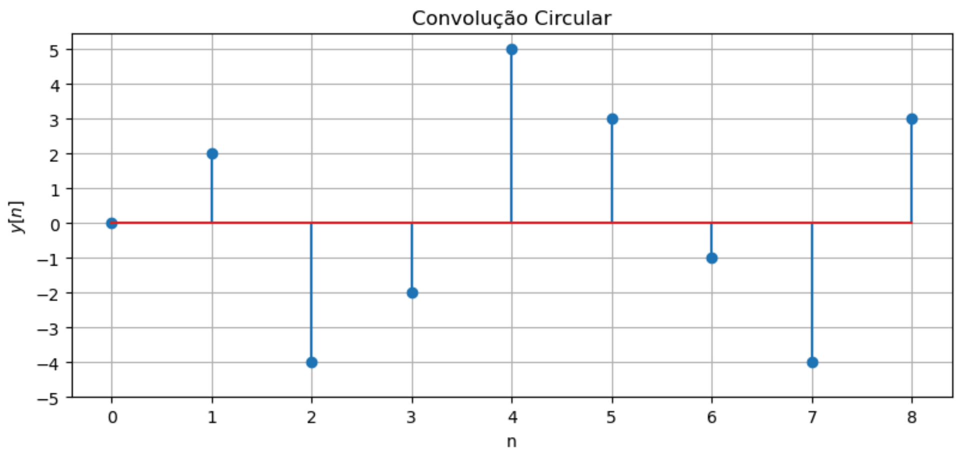
5.2. Simulação

Para validar os cálculos realizados simulamos ambas as convoluções e as comparamos. Será realizado utilizando python.

```
N = 9
n = np.arange(0, N)

x1_n = [1, -2, -1, 3, 0, 0, 0, 0, 0]
x2_n = [0, 2, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0]

circ_conv = ndimage.convolve(x1_n, x2_n, mode="wrap", origin=-int(N / 2))
linear_conv = signal.convolve(x1_n, x2_n)
```



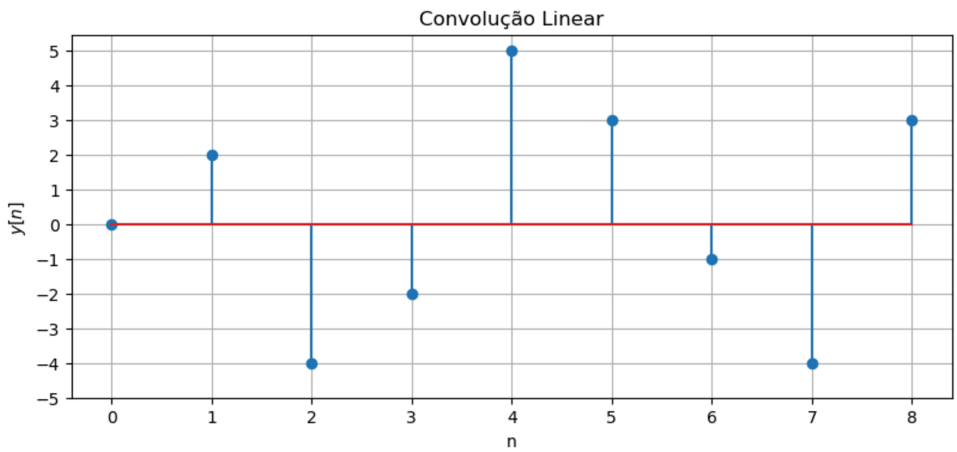
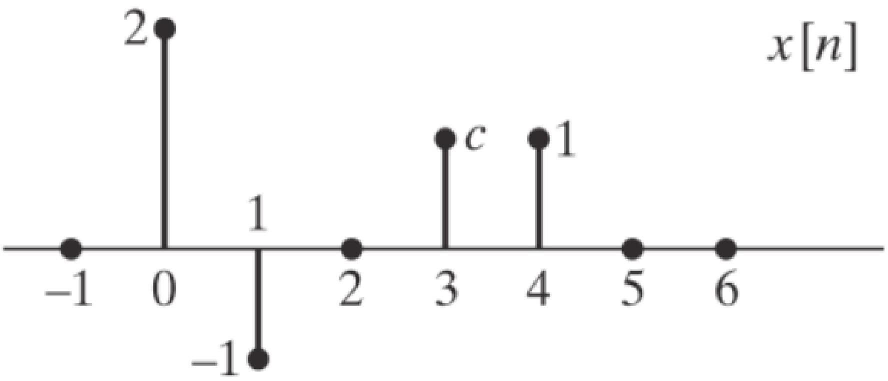


Figura 10: Plot das convoluções circular e linear de $x_1[n]$ e $x_2[n]$

Como observamos acima, a convolução circular de 9 pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é igual à convolução linear dessas sequências.

6. Questão 6

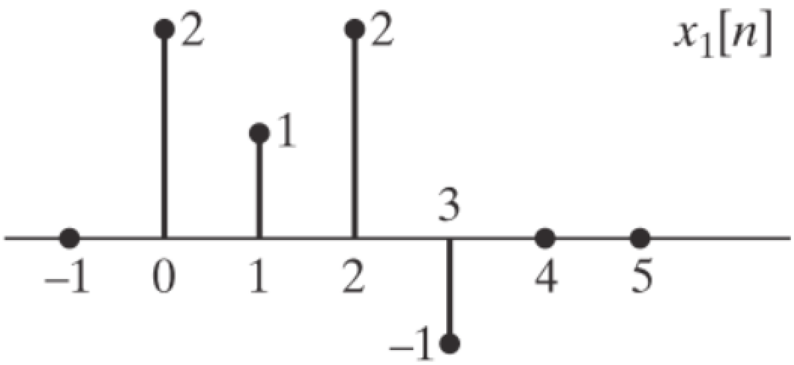
Na figura a seguir é mostrada uma sequência $x[n]$ para a qual o valor de $x[3]$ é uma constante desconhecida c.



O valor da amostra com amplitude c não está necessariamente representada na escala. Considere:

$$X_1[k] = X[k]e^{j\frac{2\pi}{5}2k} \tag{25}$$

Sendo $X[k]$ a *DFT* de cinco pontos de $x[n]$. A sequência $x_1[n]$ representada na figura a seguir é a *DFT* inversa de $X_1[k]$. Qual o valor de c?



6.1. Reposta

Obtendo a sequências $x[n]$ e $x_1[n]$ a partir das figuras:

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\delta[n] - \delta[n-1] + c\delta[n-3] + \delta[n-4] \\ x_1[n] &= 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] \end{aligned} \tag{26}$$

Sabendo que a multiplicação por $e^{j\frac{2\pi}{5}2k}$ em $X[k]$ resulta em um deslocamento de 2 posições para a direita, podemos definir a relação entre $x_1[n]$ e $x[n]$:

$$x_1[n] = x\left[(n-2)_{\text{mod}(5)}\right] \tag{27}$$

Portanto reescrevendo $x\left[(n-2)_{\mathrm{mod}(5)}\right]$:

$$\begin{aligned} x\left[(n-2)_{\mathrm{mod}(5)}\right] &= 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + c\delta\left[(n-5)_{\mathrm{mod}(5)}\right] + \delta\left[(n-6)_{\mathrm{mod}(5)}\right] \\ &= 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + c\delta[n] + \delta[n-1] \\ &= c\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] \end{aligned} \tag{28}$$

Realizando a comparação com $x_1[n]$ obtemos:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 2\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] \\ &= \\ x\left[(n-2)_{\mathrm{mod}(5)}\right] &= c\delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] \end{aligned} \tag{29}$$

Cancelando os termos comuns obtemos:

$$c = 2 \tag{30}$$

7. Questão 7

Suponha que tenhamos uma sequência de 1025 pontos de dados (1 a mais que $N = 2^{10}$). Em vez de descartar o valor final, vamos preencher a sequência com zeros até que seu comprimento seja de $N = 2^{11}$, de modo que possamos usar um algoritmo *FFT* de raiz 2.

a) Quantas multiplicações complexas são necessárias para se computar a *DFT* usando um algoritmo de *FFT* raiz 2?

b) Quantas multiplicações complexas seriam necessárias para se computar diretamente a *DFT* de 1025 pontos?

7.1. Respostas

7.1.1. Item *a*

Utilizando a fórmula para o cálculo do número de multiplicações complexas necessárias para se computar a *DFT* usando um algoritmo de *FFT* raiz 2:

$$\frac{N}{2} \log_2 N \tag{31}$$

Sendo $N = 2^{11}$:

$$\frac{2^{11}}{2} \log_2 2^{11} = \boxed{11.264} \tag{32}$$

Portanto são necessárias 11264 multiplicações complexas.

7.1.2. Item *b*

Para calcular diretamente a *DFT* de 1025 pontos, utilizamos a fórmula:

$$N^2 \tag{33}$$

Sendo $N = 1025$:

$$1025^2 = \boxed{1050625} \tag{34}$$

Portanto são necessárias 1050625 multiplicações complexas.

8. Questão 8

Considere a sequência de comprimento finito real $x[n]$ mostrada na figura a seguir.

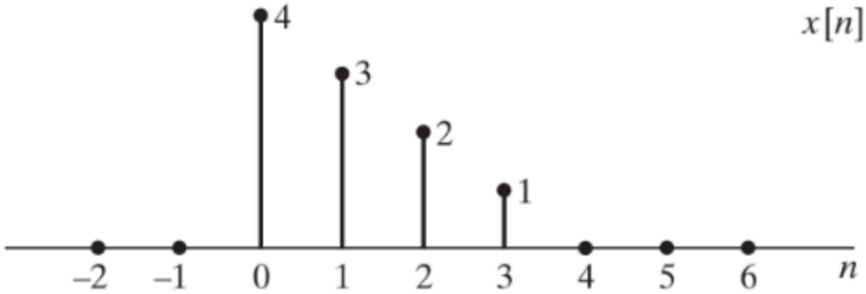


Figura 13: Definições de $x[n]$

a) Esboce a sequência de comprimento finito $y[n]$ cuja *DFT* de seis pontos seja

$$Y[k] = W_6^{5k} X[k] \tag{35}$$

Sendo $X[k]$ a *DFT* de seis pontos de $x[n]$.

b) Esboce a sequência de comprimento finito w[n] cuja *DFT* de seis pontos seja

$$W[k] = \Im\{X[k]\} \tag{36}$$

c) Esboce a sequência de comprimento finito $q[n]$ cuja *DFT* de três pontos seja

$$Q[k] = X[2k+1] \qquad k = 0, 1, 2 \tag{37}$$

8.1. Respostas

8.1.1. Item *a*

A partir da figura podemos obter a sequência $x[n]$:

$$x[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] \tag{38}$$

Sabendo que $W_6^{5k} = e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$ e que a multiplicação por $e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$ em $X[k]$ resulta em um deslocamento de 5 posições para a direita, podemos facilmente relacionar $y[n]$ e $x[n]$:

$$y[n] = x\left[(n-5)_{\text{mod}\,6}\right] \tag{39}$$

Portanto reescrevendo $x\left[(n-5)_{\text{mod}\,6}\right]$ obtemos $y[n]$:

$$\begin{aligned} y[n] = x\left[(n-5)_{\text{mod}\,6}\right] &= 4\delta[n-5] + 3\delta\left[(n-6)_{\text{mod}(6)}\right] + \\ &\quad 2\delta\left[(n-7)_{\text{mod}(6)}\right] + \delta\left[(n-8)_{\text{mod}(6)}\right] \\ &= 4\delta[n-5] + 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \\ &= 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + 4\delta[n-5] \end{aligned} \tag{40}$$

8.1.2. Item *b*

Calculamos a *DFT* de seis pontos de $x[n]$:

$$X[k] = 4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k} \tag{41}$$

Sabendo que:

$$W_6 = e^{-j\frac{2\pi}{6}} \quad e \quad \Im\left\{e^{-j\theta}\right\} = -\sin(\theta) \tag{42}$$

Podemos obter a sequência $W[k]$:

$$\begin{aligned} W[k] &= \Im\{X[k]\} \\ &= -3\sin\left[\frac{2\pi}{6}k\right] + -2\sin\left[\frac{2\pi}{6}2k\right] - +\sin\left[\frac{2\pi}{6}3k\right] \end{aligned} \tag{43}$$