INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Revisão de Sinais e Sistemas

Processamento de Sinais Digitais

Gabriel Luiz Espindola Pedro

18 de Março de 2024

Sumário

1. Questão 1

Determine se os sinais abaixo são periódicos e em caso positivo, determine o período fundamental.

1.1. $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \tag{2}$$

Temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) \tag{3}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 1 \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 0 \tag{4}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi N}{3} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi}{2\pi} 3k \\ \therefore N &= 3k \end{aligned} \tag{5}$$

O que implica que o sinal é periódico com período fundamental $N = 3$.

1.2. $x[n] = \sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

Podemos reescrever o argumento da função seno como uma única fração

$$\sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) \tag{6}$$

Desta maneira podemos validar a periodicidade do sinal

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{8(n + N) + 3\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{8n + 8N + 3\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12} + \frac{8N}{12}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \tag{8}$$

Temos que

$$\sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{8N}{12}\right) + \sin\left(\frac{8N}{12}\right)\cos\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) \tag{9}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\sin\left(\frac{8N}{12}\right) = 0 \quad e \quad \cos\left(\frac{8N}{12}\right) = 1 \tag{10}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{8N}{12} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi k 12}{8} \\ N &= \frac{24\pi k}{8} \\ \therefore N &= (3\pi k) \end{aligned} \tag{11}$$

Como não exiteste um valor inteiro que k possa assumir para que N seja um número inteiro, o sinal não é periódico.

1.3. $x[n] = e^{j\frac{2\pi n}{3}}$

Utilizando a identidade de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{12}$$

Portanto temos que

$$e^{j\frac{2\pi n}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \tag{13}$$

Podemos então verificar a periodicidade do sinal

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \\ \sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \end{aligned} \tag{15}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = &\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right)\right] \\ &+ j\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 1 \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 0 \tag{17}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi N}{3} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi}{2\pi} 3k \\ \therefore N &= 3k \end{aligned} \tag{18}$$

O que implica que o sinal é periódico com período fundamental $N = 3$.

2. Questão 2

Dada a sequência

$$x[n] = (2 - n)\{u[n] - u[n - 4]\} \tag{19}$$

Faça o gráfico de $y[n] = x[-2n - 4]$, sendo $u[n]$ a função degrau unitário (Heaviside).

Analisando a sequência $x[n]$, identificamos que ela é composta por duas funções, uma sendo uma reta decrescente que cruza o eixo das abscissas no ponto $n = 2$ e outra sendo um janelamento onde possui valor 1 entre $n = 0$ e $n = 3$, e 0 para os demais valores de n. Considerando que $x[n]$ é uma multiplicação entre essas duas funções, identificamos que ela possui valor $(2n - 1)$ para $0 < n < 3$ e 0 para os demais valores.

$$x[n] = \begin{cases} 2n - 1 \ , \ 0 < n < 3 \\ 0 \ , \ \text{caso contrário} \end{cases} \tag{20}$$

Dado que $y[n] = x[-2n - 4]$, podemos fazer o deslocamento do sinal $x[n]$ para a direita em 4 unidades, após isso espelhar o sinal em relação ao eixo das ordenadas e por fim comprimir o sinal pegando os valores a cada 2 unidades.

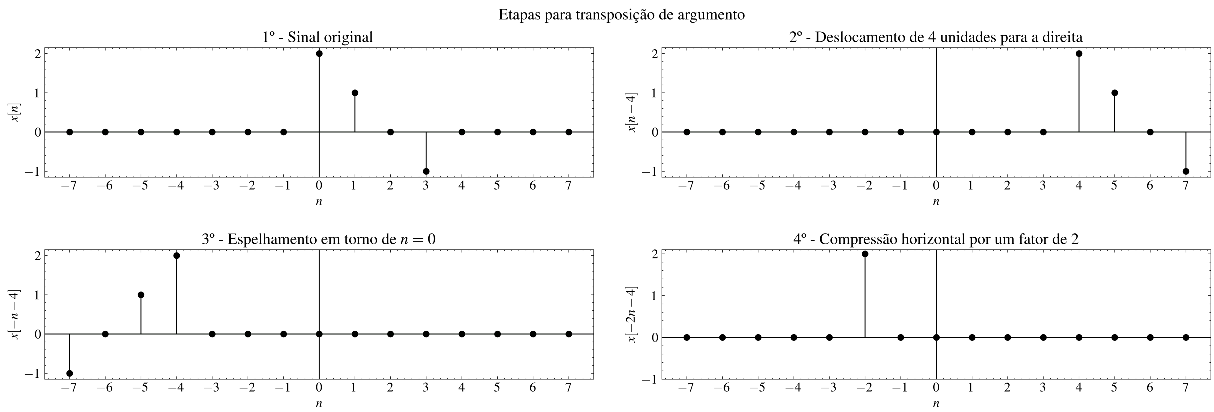

Figura 1: Etapas para transposição de argumento

3. Questão 3

Determine se o sistema

$$y[n] = nx[n+3] \tag{21}$$

é causal, invariante no deslocamento e linear.

Relembrando as definições de causalidade, invariância no deslocamento e linearidade:

- Um sistema é causal se a saída $y[n]$ depende apenas de valores de $x[n]$ para $n \leq n_0$.
- Um sistema é invariante no deslocamento dada uma entrada $x[n]$ e uma saída $y[n]$, se a saída $y[n-n_0]$ é a saída do sistema para a entrada $x[n-n_0]$.
- Um sistema é linear se satisfaz as propriedades de aditividade e homogeneidade.

3.1. Causalidade

Para verificar a causalidade do sistema, podemos analisar a saída $y[n]$ para $n < 0$.

$$y[-1] = -1x[2] \tag{22}$$

Como verificamos acima, a saída $y[-1]$ depende do valor de $x[2]$, o que implica que o sistema não é causal.

3.2. Invariância no deslocamento

Para verificar a invariância no deslocamento, podemos aplicar a entrada $x[n-n_0]$ e verificar se a saída $y[n-n_0]$ é a saída do sistema para a entrada $x[n-n_0]$.

$$\begin{gathered} y[n] = nx[(n-n_0)+3] \\ \neq \\ y[n-n_0] = (n-n_0)x[(n-n_0)+3] \end{gathered} \tag{23}$$

Como verificamos acima, ao aplicarmos um deslocamento na entrada $x[n]$, a saída não sofre uma alteração em sua amplitude como é esperado, o que implica que o sistema não é invariante no deslocamento.

3.3. Linearidade

Para que o sistema seja linear, devemos ter que:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= nx_1[n+3] \\ y_2[n] &= nx_2[n+3] \\ \\ y[n] &= y_1[n] + y_2[n] \\ &= nx_1[n] + nx_2[n] \\ &= n(x_1[n] + x_2[n]) \end{aligned} \tag{24}$$

Portanto verificamos que o sistema é linear.

4. Questão 4

Um sistema linear invariante ao deslocamento tem a seguinte resposta ao impulso

$$h[n] = u[n] \tag{25}$$

Encontre, usando a soma de convolução, a saída se a entrada for

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{26}$$

A soma de convolução é dada por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{27}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u[k]u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned} \tag{28}$$

Com esta soma geométrica finita podemos aplica a fórmula:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{29}$$

Portanto temos que

$$y[n] = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \tag{30}$$

5. Questão 5

Considere a sequência de tempo discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{31}$$

Encontre dois sinais diferentes de tempo contínuo que produzem essa sequência quando são amostrados com uma frequência de $f_s = 5000$ Hz.

$$\begin{aligned}
x[n] &= x_c(nT_s) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{2} f_c T_s\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{2} \frac{f_c}{f_s}\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{2} \frac{f_c}{f_s} + 2k\pi n\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
&= \cos\left(2\pi\left(\frac{f_c}{f_s} + k\right)n\right)
\end{aligned} \tag{32}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}
2\pi\left(\frac{f_c}{f_s} + k\right) &= \frac{\pi}{2} \\
\frac{f_c}{f_s} + k &= \frac{1}{4} \\
\frac{f_c}{f_s} &= \frac{1}{4} - k
\end{aligned} \tag{33}$$

Assim, temos que para qualquer valor inteiro de k, obtemos um sinal contínuo que ao ser amostrado com uma frequência de $f_s = 5000$ Hz, produz a sequência $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

6. Questão 6

Um filtro digital, implementado em um circuito integrado DSP (*Digital Signal Processing*), é descrito pela equação de diferença linear com coeficientes constantes:

$$y[n] = x[n] - 3y[n-1] - 2y[n-2] \tag{34}$$

Para analisar o desempenho do filtro, mede-se a resposta a entrada $\delta[n]$. Entretanto, antes da aplicação da entrada, os registradores internos de armazenamento não são zerados. Assim, a saída do filtro inclui o efeito das condições iniciais, que são $y[-1] = 1$ e $y[-2] = 1$.

Determine a resposta do filtro para $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
& y[n] = \delta[n] - 3y[n-1] - 2y[n-2] \\
& \Updownarrow \mathcal{Z} \\
& Y[z] = 1 - 3\left(z^{-1}Y[n] + 1\right) - 2\left(z^{-2}Y[n] + z^{-1} + 1\right) \\
& Y[z] = 1 - 3z^{-1}Y[n] - 3 - 2z^{-2}Y[n] - 2z^{-1} - 2 \\
& Y[z] + 3z^{-1}Y[n] + 2z^{-2}Y[n] = -2z^{-1} - 4 \\
& Y[z]\left(1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}\right) = -2z^{-1} - 4 \\
& Y[z] = \frac{-2z^{-1} - 4}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} \\
& Y[z] = \frac{-4z^2 - 2z}{z^2 + 3z + 2} \\
& \frac{Y[z]}{z} = \frac{-4z - 2}{z^2 + 3z + 2} \\
& = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+1} \\
& = -\frac{6}{z+2} + \frac{2}{z+1} \\
& \Updownarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
& y[n] = -6(-2)^n u[n] + 2(-1)^n u[n]
\end{aligned} \tag{35}$$

7. Questão 7

Considere a seguinte transformada $\mathcal{Z}$

$$X[z] = \frac{z}{z-0.1} + \frac{z}{z-0.2} + \frac{z}{z-0.3} \tag{36}$$

Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ inversa para as seguintes regiões de convergência:

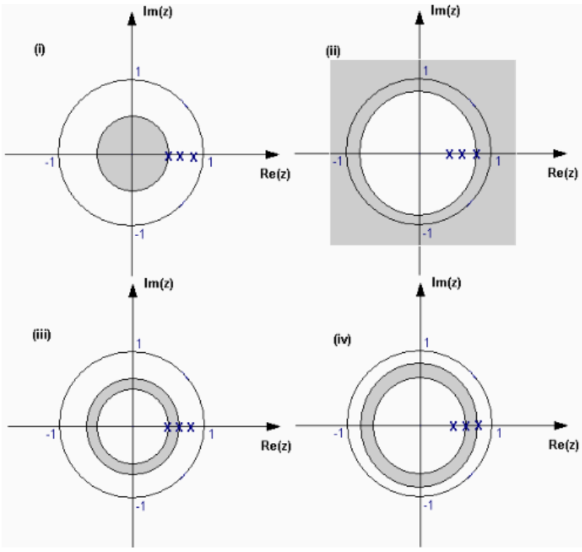

Figura 2: Zonas de convergência

7.1. Primeira zona de convergência $|z| \leq 0,1$

$$x[n] = (0.1^n + 0.2^n + 0.3^n)u[-n-1] \tag{37}$$

7.2. Segunda zona de convergência $|z| \geq 0,3$

$$x[n] = (0.1^n + 0.2^n + 0.3^n)u[n] \tag{38}$$

7.3. Terceira zona de convergência $0,1 < |z| < 0,2$

$$x[n] = (0,1)^n u[n] - (0,2^n + 0,3^n)u[-n-1] \tag{39}$$

7.4. Quarta zona de convergência $0,2 < |z| < 0,3$

$$x[n] = (0,1^n + 0,2^n)u[n] - 0,3^n u[-n-1] \tag{40}$$