



**INSTITUTO
FEDERAL**

Santa Catarina

Câmpus
São José

Atividade avaliativa de Sistemas LIT

2º Avaliação de Sinais e Sistemas I

Gabriel Luiz Espindola Pedro

28/10/2023

Sumário

1. Questão 1	3
1.1. Resposta	3
2. Questão 2	4
2.1. Resposta	4
3. Questão 3	5
3.1. Resposta	5
4. Questão 4	6
4.1. Primeiro sistema	6
4.1.1. Resposta	7
4.2. Segundo sistema	8
4.2.1. Resposta	8
4.3. Terceiro sistema	9
4.3.1. Resposta	9
4.4. Quarto sistema	11
4.4.1. Resposta	11
4.5. Quinto sistema	13
4.5.1. Resposta	13
4.6. Sexto sistema	13
4.6.1. Resposta	14

1. Questão 1

Considere um SLIT (Sistema Linear Invariante no Tempo) discreto com resposta ao impulso dada por $h[n] = a^n u[n]$:

- a) O sistema é causal?
- b) O sistema é estável segundo as condições BIBO (Bounded Input - Bounded Output)?

1.1. Resposta

Sim, o sistema é causal, pois $h[n] = 0$ para $n < 0$, isso se dá pela influência da função degrau multiplicando todo o restante da função, pois sabemos que:

$$u[n] := \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & \text{c. c.} \end{cases} \quad (1)$$

Por definição um sistema é estável se toda entrada limitada produz uma saída limitada. Podemos utilizar a seguinte fórmula para determinar se um sistema é estável:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (2)$$

Devido a causalidade do sistema $h[n]$, demonstrada anteriormente, podemos reescrever a equação acima como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (3)$$

Substituindo $h[n]$ na equação acima e desconsiderando o degrau unitário, pois ele implica apenas na causalidade do sistema, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| < \infty \quad (4)$$

Dada a propriedade da multiplicatividade do módulo, podemos fazer a análise do módulo aplicado a função exponencial:

$$|a^k| = \overbrace{|a \cdot a \cdot \dots \cdot a|}^k = \overbrace{|a| \cdot |a| \cdot \dots \cdot |a|}^k = |a|^k \quad (5)$$

Portanto, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \quad (6)$$

Por se tratar de uma série geométrica, para que a série acima seja convergente, $|a| < 1$, caso contrário a série divergiria. Considerando $|a| < 1$, o sistema seria estável segundo as condições BIBO.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|} < \infty \quad (7)$$

2. Questão 2

A entrada $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema contínuo, linear e invariante no tempo são:

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) \\ h(t) &= e^{-t}u(t)\end{aligned}\tag{8}$$

- a) Determine a resposta de estado nulo do sistema. Nessa questão não é permitido o uso da tabela.
- b) O sistema é estável segundo as condições BIBO (Bounded Input - Bounded Output)?

2.1. Resposta

Para Obtermos a resposta de estado nulo do sistema, devemos realizar a convolução entre a entrada e a resposta ao impulso do sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau\tag{9}$$

Substituindo $x(t)$ e $h(t)$ na equação acima, obtemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-t+\tau}u(t - \tau) d\tau\tag{10}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$y(t) = \int_0^t e^{-t+\tau} d\tau\tag{11}$$

Resolvendo a integral acima, obtemos o estado nulo do sistema:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t e^{-t+\tau} d\tau \\ &= \int_0^t e^{-t}e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-t}(e^{\tau})\big|_0^t \\ &= e^{-t}(e^t - e^0) \\ &= e^{-t}(e^t - 1) \\ &= e^{-t+t} - e^{-t} \\ &= 1 - e^{-t}\end{aligned}\tag{12}$$

Para definir se o sistema é estável podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty\tag{13}$$

Então:

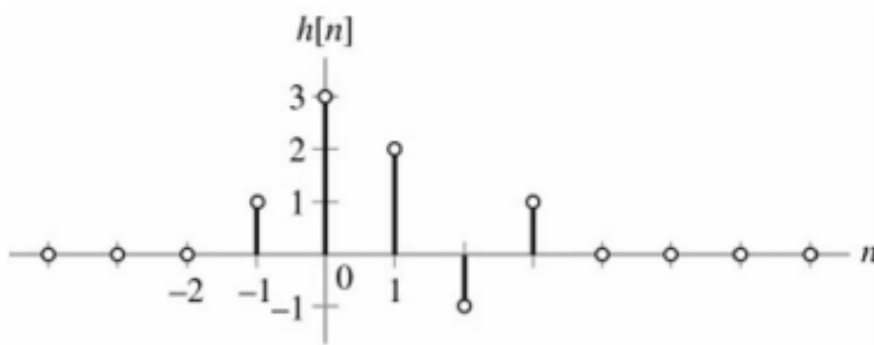
$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = -0 + 1 = 1 \quad (14)$$

Portanto, o sistema é estável segundo as condições BIBO.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} dt < \infty \quad (15)$$

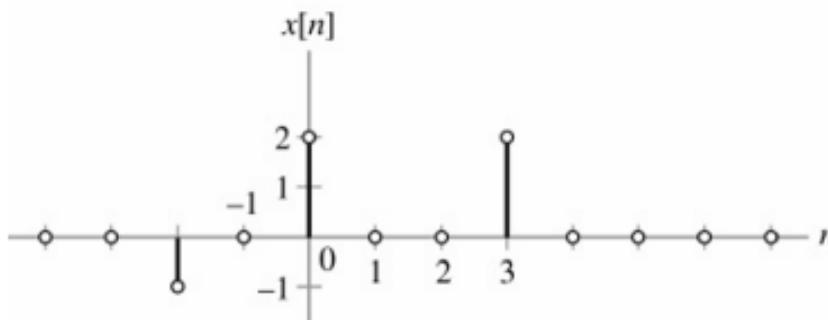
3. Questão 3

Um sistema discreto e invariante no tempo tem a resposta ao impulso $h[n]$ desenhada na figura a seguir. Determine a resposta de estado nulo do sistema.



Determine a saída $y[n]$ do sistema partindo do princípio que o sistema é linear e invariante, e as entradas são?

- a) $x_1[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n - 1]$
- b) $x_2[n]$ está expresso na figura a seguir



3.1. Resposta

Para definirmos a resposta em estado nulo do sistema calculamos a seguinte convolução:

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (16)$$

Para poder aplicar a formula acima precisamos definir $h[n]$ a partir da imagem apresentada, podemos fazer essa representação por uma soma de impulsos para onde o valor de $h[n]$ é diferente de 0, portanto:

$$h[n] = 1\delta[n+1] + 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - 1\delta[n-2] + 1\delta[n-3] \quad (17)$$

Sabendo que o resultado de uma função qualquer convolvida com o impulso é igual a propria função e sabendo que a existencia de um deslocamento no impulso reflete no deslocamento na função que está sendo convolvida:

$$\delta[n - N_0] * f[n] = f[n - N_0] \quad (18)$$

Podemos resolver a convolução aplicando:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= h[n] * x_1[n] \\ &= (3\delta[n] - 2\delta[n-1]) * x_1[n] \\ &= 3\delta[n] * x_1[n] - 2\delta[n-1] * x_1[n] \\ &= 3x_1[n] - 2x_1[n-1] \\ &= (3\delta[n+1] + 9\delta[n] + 6\delta[n-1] - 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3]) - \\ &\quad (2\delta[n] + 6\delta[n-1] + 4\delta[n-2] - 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4]) \\ &= 3\delta[n+1] + 7\delta[n] - 7\delta[n-2] + 7\delta[n-3] - 2\delta[n-4] \end{aligned} \quad (19)$$

Para $x_2[n]$ precisamos definir a função a partir da figura, da mesma maneira que fizemos com $h[n]$ utilizando a soma de impulsos:

$$x_2[n] = -1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3] \quad (20)$$

Aplicamos a mesma propriedade do impulso para resolver a convolução e obter a resposta de estado nulo:

$$\begin{aligned} y_2[n] &= h[n] * x_2[n] \\ &= (3\delta[n] - 2\delta[n-1]) * x_2[n] \\ &= 3\delta[n] * x_2[n] - 2\delta[n-1] * x_2[n] \\ &= 3(-1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3]) - 2(-1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3]) \quad (21) \\ &= -3\delta[n+2] + 6\delta[n] + 6\delta[n-3] + \\ &\quad 2\delta[n+2] - 4\delta[n] - 4\delta[n-3] \\ &= -1\delta[n+2] + 2\delta[n] + 2\delta[n-3] \end{aligned}$$

4. Questão 4

Para uma entrada degrau unitário, determine a resposta total dos seguintes sistemas LIT (Lineares Invariantes no Tempo):

4.1. Primeiro sistema

$$\begin{aligned}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ y_0(0) = 0; \quad \frac{dy_0(0)}{dt} &= -2\end{aligned}\tag{22}$$

4.1.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D :

$$\begin{aligned}D^2y(t) + 5Dy(t) + 6y(t) &= Dx(t) \\ (D^2 + 5D + 6)y(t) &= Dx(t)\end{aligned}\tag{23}$$

Para definir a resposta de entrada nula do sistema $y_0(t)$ observamos a função do operador D , que multiplica a função $y(t)$ em questão, como uma função de segundo grau onde as raízes são os modos caracterísiticos:

$$\begin{aligned}D^2 + 5D + 6 \\ \Downarrow \\ \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \\ (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -2\end{aligned}\tag{24}$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo λ_i distintos monto a equação característica:

$$y_0(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \dots + c_ne^{\lambda_n t}\tag{25}$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$y_0(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t}\tag{26}$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0(0) = 0$ e $Dy_0(0) = -2$ dado no enunciado. Primeiro calculamos a primeira derivada da função y_0 obtida:

$$\begin{aligned}Dy_0(t) &= D(c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t}) \\ &= D(c_1e^{-3t}) + D(c_2e^{-2t}) \\ &= -3c_1e^{-3t} - 2c_2e^{-2t}\end{aligned}\tag{27}$$

Substituímos então para os valores que possuímos:

$$\begin{aligned}y_0(0) &= c_1e^0 + c_2e^0 = 0 \\ &= c_1 + c_2 = 0\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}Dy_0(0) &= -3c_1e^0 - 2c_2e^0 = -2 \\ &= -3c_1 - 2c_2 = -2\end{aligned}\tag{29}$$

Montando o sistema linear para descobrir o valor destas constantes obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -3c_1 - 2c_2 = -2 \end{cases} \\ c_1 = c_2 \\ -3c_1 - 2c_1 = -2 \\ -5c_1 = -2 \quad c_1 = c_2 = \frac{2}{5} \end{aligned} \quad (30)$$

Por fim definimos nossa resposta de entrada nula como:

$$y_0(t) = \frac{2}{5}e^{-3t} + c_2e^{-2t} \quad (31)$$

4.2. Segundo sistema

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ y_0(0) = 1; \quad \frac{dy_0(0)}{dt} &= 2 \end{aligned} \quad (32)$$

4.2.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D :

$$D^2y(t) + 4Dy(t) + 4y(t) = Dx(t) \quad (33)$$

Para definir a resposta de entrada nula do sistema $y_0(t)$ observamos a função do operador D , que multiplica a função $y(t)$ em questão, como uma função de segundo grau onde as raízes são os modos característicos:

$$\begin{aligned} D^2 + 4D + 4 \\ \Downarrow \\ \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \\ (\lambda + 2)^2 = 0 \\ \therefore \\ \lambda = -2 \end{aligned} \quad (34)$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo apenas um λ portanto monto a equação característica:

$$y_0(t) = ce^{\lambda t}y_0(t) = ce^{-2t} \quad (35)$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0(0) = 1$ e $Dy_0(0) = 2$ dado no enunciado. Primeiro calculamos a primeira derivada da função y_0 obtida:

$$\begin{aligned}
Dy_0(t) &= D(ce^{-2t}) \\
&= D(ce^{-2t}) \\
&= -2ce^{-2t}
\end{aligned} \tag{36}$$

Substituímos então para os valores que possuímos:

$$\begin{aligned}
y_0(0) &= ce^0 = 1 \\
&\Rightarrow c = 1
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
Dy_0(0) &= -2ce^{-2t} = 2 \\
&= -2c = -2 \\
&\Rightarrow c = 1
\end{aligned} \tag{38}$$

Como há apenas uma constante e a substituição pelo valor informado no enunciado já demonstrou a constante podemos montar diretamente a resposta de entrada nula:

$$y_0(t) = e^{-2t} \tag{39}$$

4.3. Terceiro sistema

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 40y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\
y_0(0) = 2; \quad \frac{dy_0(0)}{dt} &= 10
\end{aligned} \tag{40}$$

4.3.1. Resposta

Para fácil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador D :

$$D^2y(t) + 4Dy(t) + 40y(t) = Dx(t) \tag{41}$$

Para definir a resposta de entrada nula do sistema $y_0(t)$ observamos a função do operador D , que multiplica a função $y(t)$ em questão, como uma função de segundo grau onde as raízes são os modos característicos:

$$\begin{aligned}
D^2 + 4D + 40 \\
\Downarrow \\
\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

Extraio as informações para aplicar a fórmula quadrática $a = 1, b = 4, c = 40$:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 160}}{2} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{-144}}{2} \\
&= -2 \pm \frac{12j}{2} \\
&= -2 \pm 6j \\
\therefore \lambda_1 &= -2 + 6j \\
\lambda_2 &= -2 - 6j
\end{aligned} \tag{43}$$

A partir dos modos característicos, observando que possui λ_i distintos e complexos, a partir disso monto a equação característica:

$$y_0(t) = ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \tag{44}$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$y_0(t) = ce^{-2t} \cos(6t + \theta) \tag{45}$$

Fazendo $t = 0$ e substituindo as condições iniciais, temos:

$$\begin{aligned}
y_0(0) &= ce^0 \cos(6 \cdot 0 + \theta) = 2 \\
&= c \cos(\theta) = 2
\end{aligned} \tag{46}$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0(0) = 2$ e $Dy_0(0) = 10$ dado no enunciado. Primeiro calculamos a primeira derivada da função y_0 obtida:

$$\begin{aligned}
Dy_0(t) &= D(ce^{-2t} \cos(6t + \theta)) \\
&= -2ce^{-2t}(3 \sin(6t + \theta) + \cos(6t + \theta))
\end{aligned} \tag{47}$$

Fazendo $t = 0$ e substituindo as condições iniciais, temos:

$$\begin{aligned}
Dy_0(0) &= -2ce^0(3 \sin(0 + \theta) + \cos(0 + \theta)) = 10 \\
&= -2c(3 \sin(\theta) + \cos(\theta)) = 10 \\
&= 3c \sin(\theta) + c \cos(\theta) = -5
\end{aligned} \tag{48}$$

Montando o sistema linear para descobrir o valor destas constantes obtemos:

$$\begin{cases} c \cos(\theta) = 2 \\ 3c \sin(\theta) + c \cos(\theta) = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3c \sin(\theta) + 2 &= -5 \\ 3c \sin(\theta) &= -7 \\ c \sin(\theta) &= -\frac{7}{3} \\ c \cos(\theta) &= 2 \end{aligned} \tag{49}$$

Fazendo o quadrado e somando os dois lados, temos:

$$\begin{aligned} c^2 &= 2^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2 \\ c^2 &= 4 + \frac{49}{9} \\ c^2 &= \frac{85}{9} \\ c &= \frac{\sqrt{85}}{3} = \frac{9.22}{3} = 3.07 \end{aligned} \tag{50}$$

Em seguida,

$$\frac{c \sin(\theta)}{c \cos(\theta)} = \frac{-\frac{7}{3}}{2} = -\frac{7}{6} \tag{51}$$

Resolvendo, temos:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{7}{6}\right) = -0.86 \tag{52}$$

Logo:

$$y_0(t) = 3.07e^{-2t} \cos(6t - 0.86) \tag{53}$$

4.4. Quarto sistema

$$\begin{aligned} y[n+2] + y[n+1] + 0.16y[n] &= 5x[n] \\ y[-1] &= 0; \quad y[-2] = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{54}$$

4.4.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E :

$$E^2y[n] + Ey[n] + 0.16y[n] = 5x[n] \tag{55}$$

Descubro os modos característicos:

$$\begin{aligned}
E^2 + E + 0.16 &= 0 \\
\gamma^2 + \gamma + 0.16 &= 0 \\
(x + 0.2)(x + 0.8) &= 0 \\
\therefore \gamma_1 &= -0.2 \\
\gamma_2 &= -0.8
\end{aligned} \tag{56}$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo γ_i distintos monto a equação característica:

$$y_0[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n \tag{57}$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$y_0[n] = c_1 (-0.2)^n + c_2 (-0.8)^n \tag{58}$$

Para solucionar a equação resta descobrir os valores das constantes, para isso utilizamos os valores de $y_0[-1] = 0$ e $y_0[-2] = \frac{1}{4}$ dado no enunciado:

$$\begin{aligned}
y_0[-2] &= c_1 (-0.2)^{-2} + c_2 (-0.8)^{-2} = \frac{1}{4} \\
&= c_1 \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + c_2 \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{4} \\
&= c_1 (-5)^2 + c_2 \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
&= c_1 (25) + c_2 \left(\frac{25}{16}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
y_0[-1] &= c_1 (-0.2)^{-1} + c_2 (-0.8)^{-1} = 0 \\
&= c_1 \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} + c_2 \left(-\frac{4}{5}\right)^{-1} = 0 \\
&= c_1 (-5) + c_2 \left(-\frac{5}{4}\right) = 0
\end{aligned} \tag{60}$$

Montando o sistema linear para descobrir o valor destas constantes obtemos:

$$\begin{cases} c_1 (25) + c_2 \left(\frac{25}{16}\right) = \frac{1}{4} \\ c_1 (-5) + c_2 \left(-\frac{5}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{125} \\
c_2 &= \frac{4}{125}
\end{aligned} \tag{61}$$

Substituindo os valores obtidos na resposta de entrada nula:

$$y_0[n] = \left(\frac{1}{125}(-0.2)^n + \frac{4}{125}(-0.8)^n \right) u[n] \quad (62)$$

4.5. Quinto sistema

$$\begin{aligned} y[n+2] + 1.6y[n+1] + 0.64y[n] &= 5x[n] \\ y[-1] &= 1; \quad y[-2] = 2 \end{aligned} \quad (63)$$

4.5.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E :

$$E^2 y[n] + 1.6E y[n] + 0.64y[n] = 5x[n] \quad (64)$$

Encontramos os modos característicos:

$$\begin{aligned} E^2 + 1.6E + 0.64 &= 0 \\ \gamma^2 + 1.6\gamma + 0.64 &= 0 \\ (x + 0.8)^2 &= 0 \\ \gamma &= -0.8 \end{aligned} \quad (65)$$

A partir dos modos característicos, observando que possuo apenas uma raiz descubro a equação característica:

$$y_0[n] = c\gamma^n \quad (66)$$

Substituindo com a informação obtida temos que:

$$y_0[n] = c(-0.8)^n \quad (67)$$

Aplicando as condições iniciais:

$$\begin{aligned} y_0[-1] &= c(-0.8)^{-1} = 1 \\ &= c\left(-\frac{5}{4}\right) = 1 \\ c &= -\frac{4}{5} \end{aligned} \quad (68)$$

Portanto temos a resposta de entrada nula como:

$$y_0[n] = \left(-\frac{4}{5}(-0.8)^n \right) u[n] \quad (69)$$

4.6. Sexto sistema

$$\begin{aligned} y[n+2] - 1.56y[n+1] + 0.81y[n] &= 5x[n] \\ y[-1] &= 1; \quad y[-2] = 3 \end{aligned} \quad (70)$$

4.6.1. Resposta

Para facil leitura e manipulação podemos reescrever o sistema utilizando a notação do operador de avanço E :

$$E^2y[n] - 1.56Ey[n] + 0.81y[n] = 5x[n] \quad (71)$$

Encontramos os modos característicos:

$$\begin{aligned} E^2 - 1.56E + 0.81 &= 0 \\ \gamma^2 - 1.56\gamma + 0.81 &= 0 \\ a = 1, b = -1.56, c = 0.81 \\ \gamma &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{1.56 \pm \sqrt{(-1.56)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.81}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1.56 \pm \sqrt{2.4336 - 3.24}}{2} \\ &= \frac{1.56 \pm \sqrt{-0.8064}}{2} \\ &= 0.78 \pm \frac{0.9j}{2} \\ &= 0.78 \pm 0.45j \\ \therefore \gamma_1 &= 0.78 + 0.45j \\ \gamma_2 &= 0.78 - 0.45j \end{aligned} \quad (72)$$

Obtida as raizes, transformamos na forma polar, portanto temos que $\gamma = 0.9e^{\pm j(\frac{\pi}{6})}$.

Montamos a equação característica, dado que possuo raizes complexas:

$$\begin{aligned} y_0[n] &= c|\gamma|^n \cos(\beta n + \theta) \\ &= c(0.9)^n \cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)n + \theta\right) \end{aligned} \quad (73)$$

Aplicando os valores iniciais informados:

$$\begin{aligned}
y[-1] &= c(0.9)^{-1} \cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)(-1) + \theta\right) = 1 \\
&= c\left(\frac{10}{9}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \theta\right) = 1 \\
&= c\left(\frac{10}{9}\right) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos(\theta) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin(\theta)\right) = 1 \\
&= c\left(\frac{10}{9}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \sin(\theta)\right) = 1
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
y[-2] &= c(0.9)^{-2} \cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)(-2) + \theta\right) = 3 \\
&= c\left(\frac{100}{81}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 3 \\
&= c\left(\frac{100}{81}\right) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cos(\theta) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin(\theta)\right) = 3 \\
&= c\left(\frac{100}{81}\right) \left(\frac{1}{2} \cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta)\right) = 3
\end{aligned} \tag{75}$$

Resolvendo, temos:

$$\begin{aligned}
c \cos(\theta) &= 2.308 \\
c \sin(\theta) &= 0.397
\end{aligned} \tag{76}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\tan(\theta) &= -0.172 \\
\theta &= -0.17
\end{aligned} \tag{77}$$

Para descobrir c substituímos em uma das equações:

$$\begin{aligned}
c \cos(\theta) &= 2.308 \\
c \cos(-0.17) &= 2.308 \\
&= \frac{2.308}{\cos(-0.17)} \\
&= \frac{2.308}{0.985} \\
&= 2.34
\end{aligned} \tag{78}$$

Substituindo as informações temos a resposta de entrada nula:

$$y_0[n] = \left(2.34(0.9)^n \cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)n - 0.17\right)\right) u[n] \tag{79}$$