INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Prova 1

Processos Estocásticos

Gabriel Luiz Espindola Pedro

13 de Setembro de 2023

Sumário

1. Questão 1 ... **3**
1.1. $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ ... 3
1.2. $x[n] = \sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ ... 4
1.3. $x[n] = e^{j\frac{2\pi n}{3}}$ ... 5
2. Questão 2 ... **6**

1. Questão 1

Determine se os sinais abaixo são periódicos e em caso positivo, determine o período fundamental.

1.1. $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \tag{2}$$

Temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) \tag{3}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 1 \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 0 \tag{4}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi N}{3} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi}{2\pi} 3k \\ \therefore N &= 3k \end{aligned} \tag{5}$$

O que implica que o sinal é periódico com período fundamental $N = 3$.

1.2. $x[n] = \sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

Podemos reescrever o argumento da função seno como uma única fração

$$\sin\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) \tag{6}$$

Desta maneira podemos validar a periodicidade do sinal

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{8(n+N) + 3\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{8n + 8N + 3\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12} + \frac{8N}{12}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \tag{8}$$

Temos que

$$\sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{8N}{12}\right) + \sin\left(\frac{8N}{12}\right)\cos\left(\frac{8n + 3\pi}{12}\right) \tag{9}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\sin\left(\frac{8N}{12}\right) = 0 \quad e \quad \cos\left(\frac{8N}{12}\right) = 1 \tag{10}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{8N}{12} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi k 12}{8} \\ N &= \frac{24\pi k}{8} \\ \therefore N &= (3\pi k) \end{aligned} \tag{11}$$

Como não exiteste um valor inteiro que k possa assumir para que N seja um número inteiro, o sinal não é periódico.

1.3. $x[n] = e^{j\frac{2\pi n}{3}}$

Utilizando a identidade de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{12}$$

Portanto temos que

$$e^{j\frac{2\pi n}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \tag{13}$$

Podemos então verificar a periodicidade do sinal

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi N}{3}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \\ \sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \end{aligned} \tag{15}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) &= \left[\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right)\right] \\ &\quad + j\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Para que essa equação seja verdadeira, temos que

$$\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 1 \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi N}{3}\right) = 0 \tag{17}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi N}{3} &= 2\pi k \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ N &= \frac{2\pi}{2\pi} 3k \\ \therefore N &= 3k \end{aligned} \tag{18}$$

O que implica que o sinal é periódico com período fundamental $N = 3$.

2. Questão 2

Dada a sequência

$$x[n] = (2 - n)\{u[n] - u[n - 4]\} \tag{19}$$

Faça o gráfico de $y[n] = x[-2n - 4]$, sendo $u[n]$ a função degrau unitário (Heaviside).

Analisando a sequência $x[n]$, identificamos que ela é composta por duas funções, uma sendo uma reta decrescente que cruza o eixo das abscissas no ponto $n = 2$ e outra sendo um janelamento onde possui valor 1 entre $n = 0$ e $n = 3$, e 0 para os demais valores de n. Considerando que $x[n]$ é uma multiplicação entre essas duas funções, identificamos que ela possui valor $(2n - 1)$ para $0 < n < 3$ e 0 para os demais valores.

$$x[n] = \begin{cases} 2n - 1 \text{ , } 0 < n < 3 \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases} \tag{20}$$

Dado que $y[n] = x[-2n - 4]$, podemos fazer o deslocamento do sinal $x[n]$ para a direita