INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus São José

Prova 6

Processos Estocásticos

Gabriel Luiz Espindola Pedro

4 de Novembro de 2023

Sumário

1. Questão

Considere o processo estocástico

$$X(t) = A \ \mathrm{rect}(t - T),$$

onde A e T são variáveis aleatórias independentes, ambas uniformemente distribuídas sobre o conjunto finito $\left\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\}$.

(a) Determine e esboce três possíveis realizações (funções-amostra) do proceso, à sua escolha.

(b) Determine e esboce a função média de $X(t)$.

(c) Determine a função autocovariância de $X(t)$.

2. Determinando funções-amostra de $X(t)$

A e T podendo assumir dois valores ($-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$), temos quatro possíveis realizações para $X(t)$:

A	T	$X(t)$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\ \mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right)$
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\ \mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}\ \mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right)$
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}\ \mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

2.1. Esboçando as funções-amostra

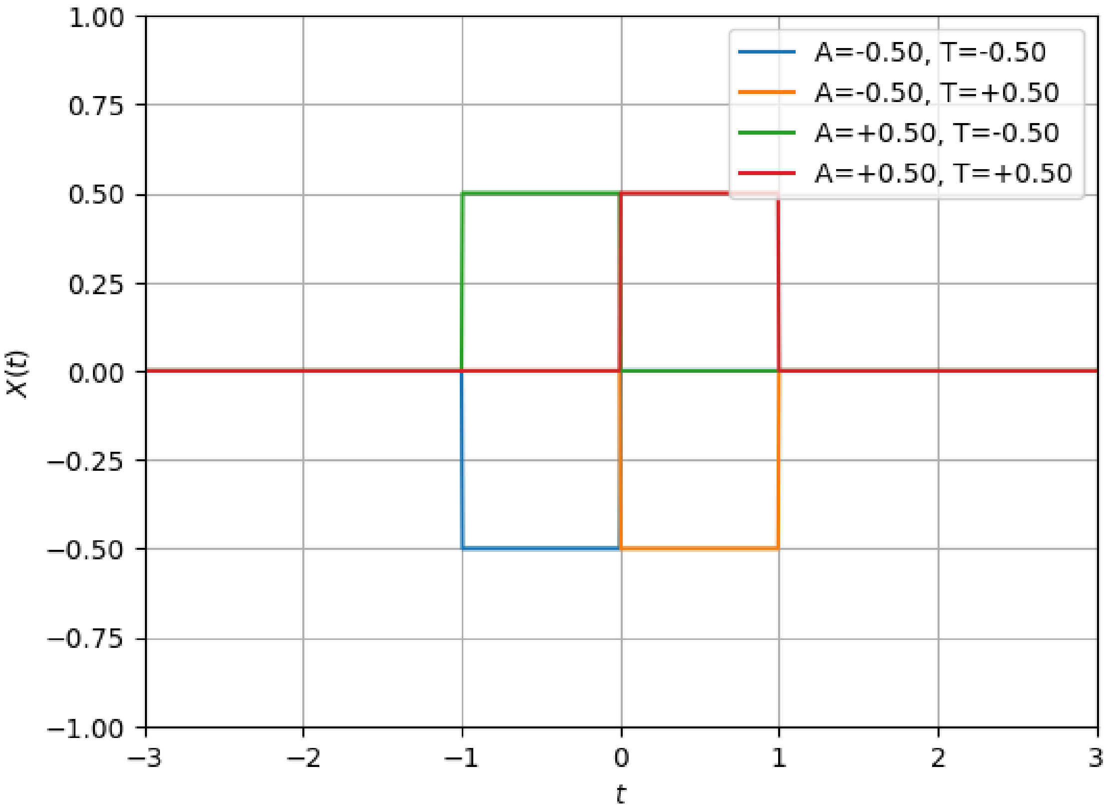

Fig. 1: Funções-amostra de $X(t)$

3. Determinando a função média de $X(t)$

A função média de $X(t)$ é definida por:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \sum_{x \in X} xP[X(t) = x]$$

Aplicando o $X(t)$ dado pela questão obtemos:

$$\mu_X(t) = E[A \ \mathrm{rect}(t - T)]$$

Como A e T são variáveis aleatórias independentes, temos:

$$\mu_X(t) = E[A]E[\mathrm{rect}(t - T)]$$

$$\begin{aligned} E[A] &= \sum_{a \in A} aP[A = a] \\ &= -\frac{1}{2}P\left[A = -\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}P\left[A = \frac{1}{2}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\mathrm{rect}(t - T)] &= \sum_{t \in T} \mathrm{rect}(t - T)P[T = t] \\ &= \mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right)P\left[T = -\frac{1}{2}\right] \\ &\quad + \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)P\left[T = \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \ \mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\mu_X(t) = 0\left(\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 0$$

4. Determinando a função autocovariância de $X(t)$

A função autocovariância de $X(t)$ é definida por:

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))]$$

Aplicando o $X(t)$ dado pela questão obtemos:

$$\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= E[(A \ \text{rect}(t_1 - T) - 0)(A \ \text{rect}(t_2 - T) - 0)] \\
&= E[A \ \text{rect}(t_1 - T) A \ \text{rect}(t_2 - T)] \\
&= E[A^2 \ \text{rect}(t_1 - T) \ \text{rect}(t_2 - T)] \\
&= E[A^2] E[\text{rect}(t_1 - T) \ \text{rect}(t_2 - T)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[A^2] &= \sum_{a \in A} a^2 P[A = a] \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 P\left[A = -\frac{1}{2}\right] + \left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left[A = \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\text{rect}(t_1 - T) \ \text{rect}(t_2 - T)] &= \sum_{t \in T} \text{rect}(t_1 - t) \ \text{rect}(t_2 - t) P[T = t] \\
&= \text{rect}\left(t_1 + \frac{1}{2}\right) \ \text{rect}\left(t_2 + \frac{1}{2}\right) P\left[T = -\frac{1}{2}\right] \\
&\quad + \text{rect}\left(t_1 - \frac{1}{2}\right) \ \text{rect}\left(t_2 - \frac{1}{2}\right) P\left[T = \frac{1}{2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \ \text{rect}\left(t_1 + \frac{1}{2}\right) \ \text{rect}\left(t_2 + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right) \ \text{rect}\left(t_1 - \frac{1}{2}\right) \ \text{rect}\left(t_2 - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$