INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Prova 3

Processos Estocásticos

Gabriel Luiz Espindola Pedro

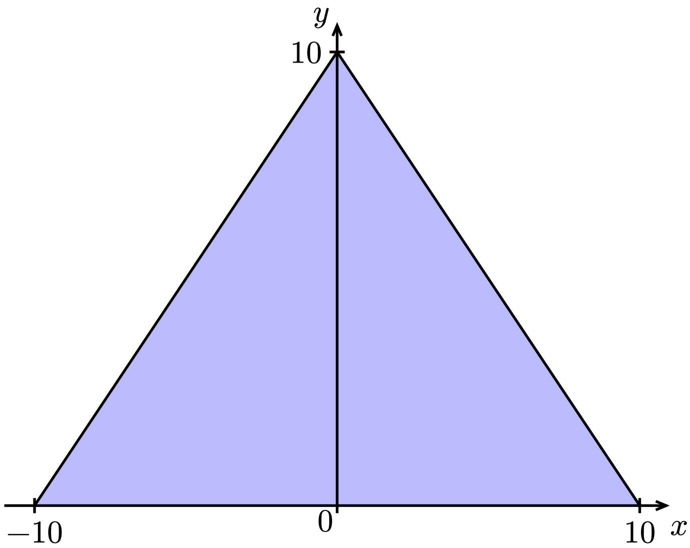
3 de Outubro de 2023

Sumário

1. Questão ... **3**
2. Desenvolvimento ... **4**
2.1. Determinando a área sombreada ... 4
2.2. Determinando o valor de k ... 5
2.3. Determinando $\Pr[X \geq Y]$ ... 5
2.4. Determinando a PDF marginal de Y ... 6
2.5. Determinando a CDF marginal de Y ... 7
2.6. Determinando a PDF condicional de Y dado $X = 5$ ... 7
2.7. Determinando a covariancia entre X e Y ... 9
3. Plots gerados ... **10**

1. Questão

Considere duas variáveis aleatórias X e Y com PDF conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo.



(a) Determine o valor da constante k;
(b) Determine $\Pr[X \geq Y]$;
(c) Determine e esboce a PDF marginal de Y;
(d) Determine e esboce a CDF marginal de Y;
(e) Determine e esboce a PDF condicional de Y dado $X = 5$;
(f) Determine a covariância entre X e Y.

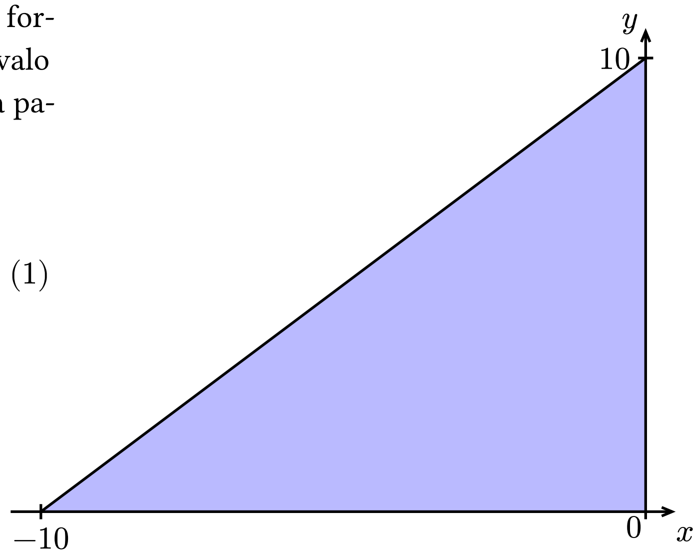
2. Desenvolvimento

2.1. Determinando a área sombreada

Para determinar a área sombreada dada pela questão reparti a área em duas partes de modo que fosse possível descrever de maneira simples a área sombreada.

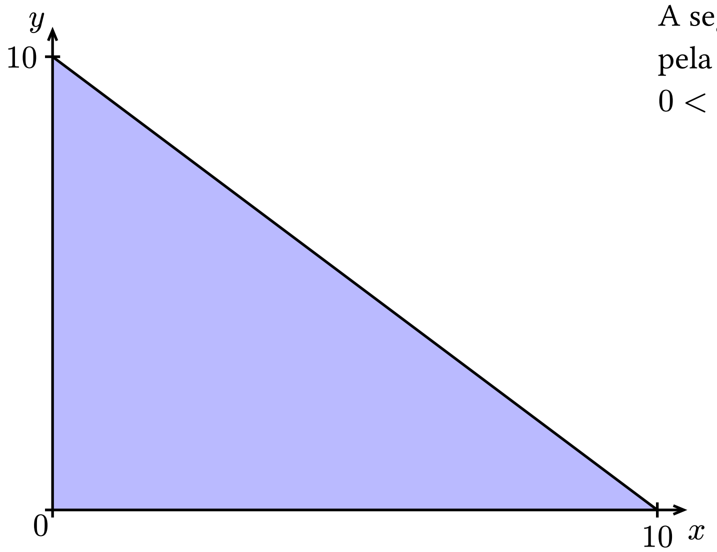
A primeira área consiste no triangulo formado pela reta $y = x + 10$ vista no intervalo de $-10 < x < 0$. Portanto obtem-se a área parametrizada:

$$[0 \leq y \leq x + 10] \tag{1}$$



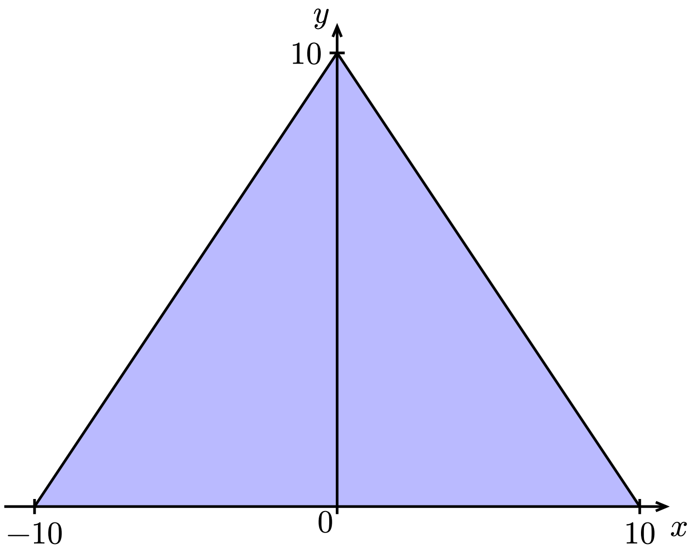
A segunda área consiste no triangulo formado pela reta $y = -x + 10$ vista no intervalo de $0 < x < 10$. Obtendo-se a área parametrizada:

$$[0 \leq y \leq -x + 10] \tag{2}$$



A área sombreada é a união das duas áreas anteriormente descritas, portanto:

$$[0 \leq y \leq x + 10] \vee [0 \leq y \leq -x + 10] \tag{3}$$



Sabendo que a função massa de probabilidade conjunta é constante de deve ter valor igual a k na área sombreada, temos que

$$A = A_1 = A_2 = \frac{10 \cdot 10}{2} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} A_t &= A_1 + A_2 = 2A = 2 \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} \\ A_t &= \cancel{2} \cdot \frac{10 \cdot 10}{\cancel{2}} = 100 \end{aligned} \tag{5}$$

2.2. Determinando o valor de k

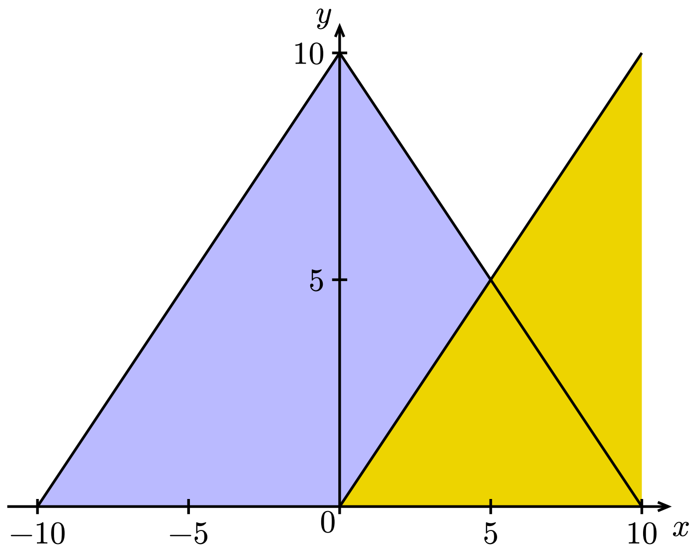
Sabendo que a função massa de probabilidade conjunta é constante de deve ter valor total igual a 1, podemos obter o valor da constante k resolvendo a igualdade:

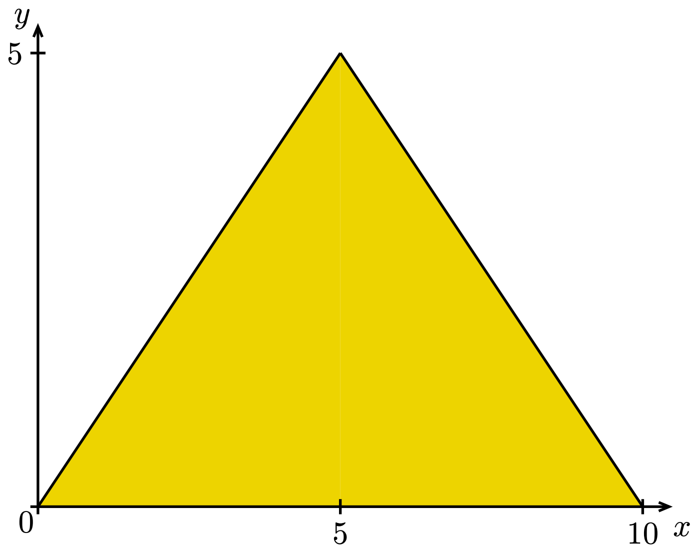
$$\begin{aligned} A_t k &= 1 \\ k &= \frac{1}{A_t} \\ k &= \frac{1}{100} \end{aligned} \tag{6}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{100}([0 \leq y \leq x + 10] \vee [0 \leq y \leq -x + 10]) \tag{7}$$

2.3. Determinando $\Pr[X \geq Y]$

Determinamos a probabilidade de $X \geq Y$ sendo a intersecção entre a área sombreada e a área $X \geq Y$ e a área sombreada $[0 \leq y \leq x + 10] \vee [0 \leq y \leq -x + 10]$. Portanto:





Visualmente concluimos que a $\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{4}$, podemos confirmar isso calculando a área deste triangulo gerado pela intersecção das áreas e dividindo pela área total.

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25 \qquad A_t = 100 \tag{8}$$

$$\Pr[X \geq Y] = \frac{A_\Delta}{A_t} \qquad \Pr[X \geq Y] = \frac{1}{4} \tag{9}$$

2.4. Determinando a PDF marginal de Y

Para calcular a PDF marginal de Y devemos integrar a PDF conjunta em relação a X, portanto utilizo a seguinte formula:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

Noto que existem três situações possíveis para a análise da PDF marginal de Y, ela terá valor zero para quando o valor de y for menor que 0 ou maior que 10, e terá valor diferente de zero quando $0 < y < 10$. Portanto:

Para $-\infty < y < 0$ ou para $10 < y < \infty$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, \mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

Para $0 < y < 10$:

$$f_Y(y) = \int_{y-10}^{-y-10} \frac{1}{100} \, \mathrm{d}x \tag{12}$$

Portanto para $0 < y < 10$:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{100} x|_{y-10}^{-y-10} \\
f_Y(y) &= \frac{1}{100}(-y - 10 - (y - 10)) \\
f_Y(y) &= \frac{1}{100}(-2y + 20) \\
f_Y(y) &= -\frac{2}{100}y + \frac{1}{5} \\
f_Y(y) &= \frac{1}{5} - \frac{y}{50}
\end{aligned} \tag{13}$$

2.5. Determinando a CDF marginal de Y

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(u) \, \mathrm{d}u \\
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} \left(\frac{1}{5} - \frac{u}{50}\right) \mathrm{d}u \\
F_Y(y) &= \frac{1}{5}y - \frac{y^2}{100} u|_0^y \\
F_Y(y) &= \frac{1}{5}y - \frac{y^2}{100} - \frac{1}{5}(0) + \frac{(0)^2}{100} \\
F_Y(y) &= \frac{1}{5}y - \frac{y^2}{100}
\end{aligned} \tag{14}$$

2.6. Determinando a PDF condicional de Y dado $X = 5$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{-x+10} \frac{1}{100} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{100} y|_0^{-x+10} \\
&= \frac{1}{100}(-x + 10 - 0) \\
&= \frac{1}{100} \cdot -x + 10
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
f_X(5) &= \frac{1}{100} \cdot -5 + 10 \\
&= \frac{1}{100} \cdot 5 \\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X=5}(y) &= \frac{f_{X,Y}(5,y)}{f_X(5)} \\
&= \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{20}{1} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned} \tag{17}
$$

2.7. Determinando a covariancia entre X e Y

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[X,Y] &= E\big[(X-\mu_x)\big(Y-\mu_y\big)\big] \\ \operatorname{cov}[X,Y] &= E[XY]-E[X]E[Y] \end{aligned} \tag{18}$$

Obs.: $f_{X,Y}(x,y) = -\frac{y}{5}$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{10}\int_{y-10}^{-y-10} xy\left(-\frac{y}{5}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{10}\int_{y-10}^{-y-10} \frac{-xy^2}{5}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}\int_0^{10} y^2 \int_{y-10}^{-y-10} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}\int_{-10}^{10} y^2\cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{y-10}^{-y-10}\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}\int_{-10}^{10} y^2\cdot\left[\frac{(-y-10)^2}{2}-\frac{(y-10)^2}{2}\right]\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}\int_{-10}^{10} y^2\cdot\left[\frac{y^2+20y+100}{2}-\frac{y^2-20y+100}{2}\right]\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}\int_{-10}^{10} y^2\cdot\frac{\cancel{y^2}+20y+\cancel{100}-\cancel{y^2}+20y-\cancel{100}}{2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}\int_{-10}^{10} y^2\cdot(20y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{5}\int_{-10}^{10} 20y^3\,\mathrm{d}y \\ &= -4\cdot\left.\frac{y^4}{4}\right|_{-10}^{10} \\ &= -4\cdot\left(\frac{10^4}{4}-\frac{(-10)^4}{4}\right) \\ &= -4\cdot\frac{10^4-10^4}{4} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

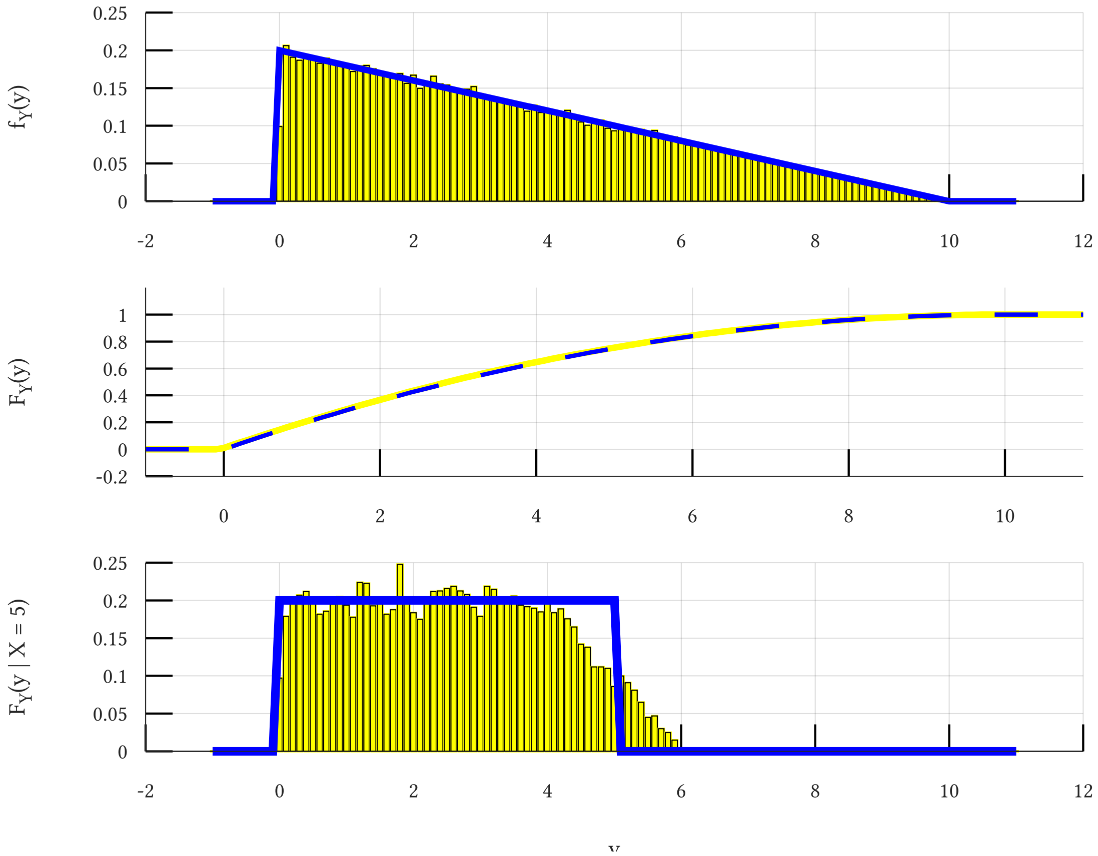
Obs.: $f_X(x) = \frac{1}{10}$

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-10}^{10} x \left(\frac{1}{10}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} \int_{-10}^{10} x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_{-10}^{10} \\
&= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10^2}{2} - \frac{(-10)^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{100}{2} - \frac{100}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Realizados os cálculos, obtivemos informação suficiente para obter o resultado da covariância:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= 0 - 0 \cdot E[Y] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

3. Plots gerados



$f_Y(y)$
$F_Y(y)$
$F_Y(y \mid X = 5)$
y