INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Prova 5

Processos Estocásticos

Gabriel Luiz Espindola Pedro

4 de Novembro de 2023

Sumário

1. Questão

Um vetor gaussiano $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; X_3 \;\; X_4]^\mathsf{T}$ tem média nula e matriz de covariância

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \qquad (2) \qquad \vec{\mu}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4) \qquad C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Determine:

(a) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3]$;
(b) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2]$;
(c) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \wedge X_3 = 3]$;
(d) $\Pr[X_2 + X_4 > 4]$.

2. Analise do enunciado

A partir do enunciado sabemos que $\vec{X}$ é um vetor gaussiano, por definição isso implica que cada componente X_i é uma variável aleatória gaussiana, ou seja para podermos responder quais são as probabilidades pedidas precisamos saber qual é a média e variância de cada componente.

Para obter tais informações podemos utilizar as demais informações dadas pela questão, nos é informado que o vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}}$ é nulo, ou seja todas as componentes são 0, pela definição da média de um vetor podemos associar a média de cada componente com a média do vetor, ou seja $\mu_{X_i} = 0$.

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = E\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \\ E[X_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ou seja, $E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = E[X_4] = 0$.

Com base na matriz covariância $C_{\vec{X}}$ dada pelo enunciado podemos extrair a variância de cada uma das distribuições componentes do vetor $\vec{X}$ e também as relações entre as distribuições:

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}[X_1] & \mathrm{cov}[X_1, X_2] & \mathrm{cov}[X_1, X_3] & \mathrm{cov}[X_1, X_4] \\ \mathrm{cov}[X_2, X_1] & \mathrm{var}[X_2] & \mathrm{cov}[X_2, X_3] & \mathrm{cov}[X_2, X_4] \\ \mathrm{cov}[X_3, X_1] & \mathrm{cov}[X_3, X_2] & \mathrm{var}[X_3] & \mathrm{cov}[X_3, X_4] \\ \mathrm{cov}[X_4, X_1] & \mathrm{cov}[X_4, X_2] & \mathrm{cov}[X_4, X_3] & \mathrm{var}[X_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

A partir da análise acima podemos concluir que:

$$X_1 \sim N\left(0, \sqrt{1}\right) \tag{9}$$

$$X_2 \sim N\left(0, \sqrt{2}\right) \tag{10}$$

$$X_3 \sim N\left(0, \sqrt{3}\right) \tag{11}$$

$$X_4 \sim N\left(0, \sqrt{4}\right) \tag{12}$$

Sendo a distribuição gaussiana representada pela notação:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \text{média} \\ \sigma &= \text{desvio padrão} \end{aligned} \tag{14}$$

Também podemos concluir que existe uma relação de independência as distribuições X_1 e X_2 com relação as distribuições X_3 e X_4, dado que se tratando de variáveis aleatórias gaussianas, descorrelação implica independência e vice-versa.

3. Calculando $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3]$

Para calcularmos a probabilidade de X_1 estar contido dentro do intervalo $2 \leq X_1 \leq 3$ devemos utilizar a função de distribuição acumulada da distribuição gaussiana, que é definida como:

$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Pr[X \leq x] \tag{15}$$

$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}x \tag{16}$$

A função descrita acima gera o seguinte gráfico para as gaussianas que estamos trabalhando:

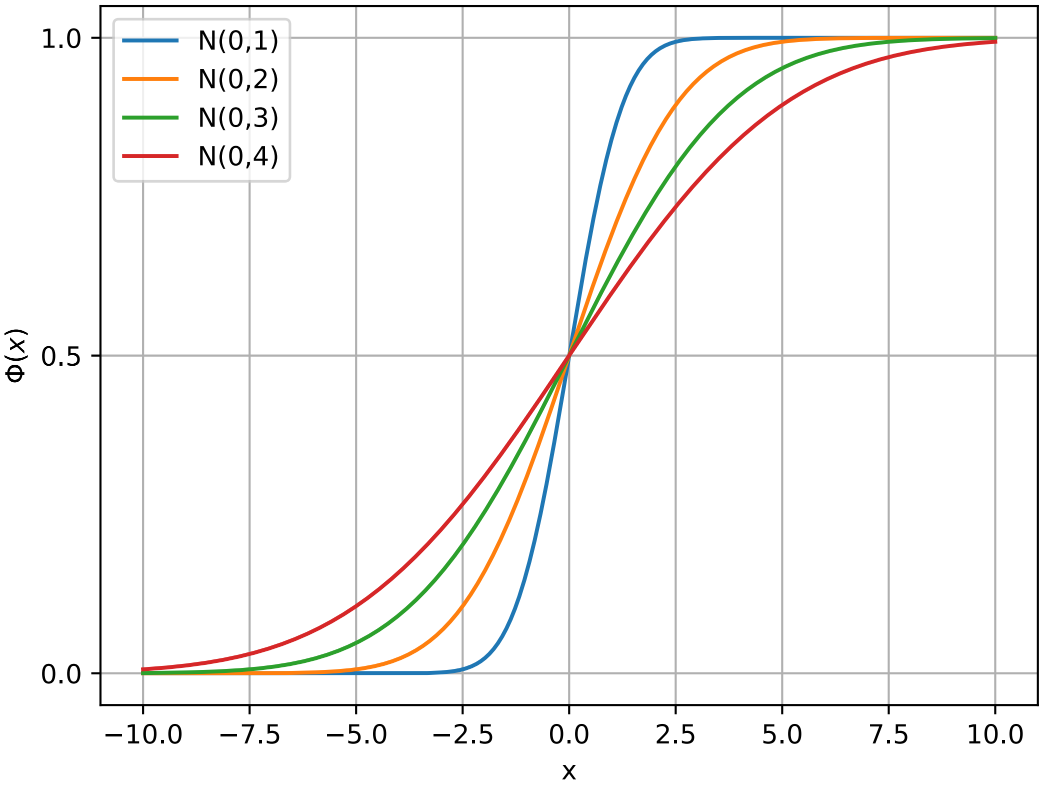

Fig. 1: Função de distribuição acumulada da gaussiana padrão

Para $X_1 \sim N(0,1)$ temos:

$$\begin{aligned} \Pr[2 \leq X_1 \leq 3] &= \Phi\left(\frac{3-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{1}\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(2) \\ &= 0.99865 - 0.97725 \\ &= 0.0214 \\ &= 2.14\% \end{aligned} \tag{17}$$

Portanto a probabilidade de X_1 estar entre 2 e 3 é de 2.14%.

4. Calculando $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2]$

Analisando a matriz covariância (6) dada pelo enunciado observamos que existe uma dependência entre as variáveis X_1 e X_2, ou seja, para podermos calcular a probabilidade condicional pedida devemos utilizar a distribuição gaussiana multivariada, que é definida como:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^\top C^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right) \tag{18}$$

Para aplicarmos na fórmula podemos criar um vetor $\vec{x}$ apenas com as variáveis X_1 e trazer as informações de média e covariância relacionadas:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\det(C) = (1 \cdot 2) - (1 \cdot 1) = 1 \tag{22}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Para calcularmos a probabilidade condicional pedida utilizamos a seguinte equação:

$$f_{X_1}(x_1 \mid x_2 = 2) = \frac{f_{X_1, X_2}(X_1, 2)}{f_{X_2}(2)} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(X_1, 3) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot [(1 \cdot 2) - (1 \cdot 1)]}} \exp\left(-\frac{1}{2}([X_1 \ \ 2] - [0 \ \ 0]) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot 1}} \exp\left(-\frac{1}{2}[X_1 \ \ 2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(2X_1^2 - 4X_1 + 4)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \exp(-X_1^2 + 2X_1 - 2)
\end{aligned} \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
f_{X_2}(2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot 2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2-0}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot 2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot 2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot 2}} \exp(-1)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1 \mid x_2 = 2) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \exp(-X_1^2 + 2X_1 - 2)}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \cdot \frac{\sqrt{2\cdot\pi\cdot 2}}{1} \exp(-X_1^2 + 2X_1 - 2 + 1) \\
&= \sqrt{\frac{\cancel{2\pi}\cdot 2}{\cancel{2\pi}\cdot 2\pi}} \exp(-X_1^2 + 2X_1 - 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}} \exp(-1(X_1^2 - 2X_1 + 1)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}} \exp\left(-(X_1 - 1)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(X_1-1)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}\right) \\
&\Rightarrow f_{X_1}(x_1 \mid x_2 = 2) \sim N\left(1, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Observamos que a distribuição condicional $f_{X_1}(x_1 \mid x_2 = 2)$ é uma gaussiana com $\mu = 1$ e $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, com essa informação podemos calcular a distribuição acumulada para essa gaussiana:

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{3-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{2-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) &= \Phi(2.8284) - \Phi(1.4142) \\
&= 0.9976 - 0.9214 \\
&= 0.0762
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Ou seja a probabilidade de X_1 estar entre 2 e 3 dado que $X_2 = 2$ é de 7.62%.

5. Calculando $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \wedge X_3 = 3]$

Analisando a matriz covariância (6) dada pelo enunciado observamos que existe uma dependência entre as variáveis X_1 e X_2 porém não existe dependência entre as variáveis X_1 e X_3, podemos considerar apenas X_2 para o calculo da probabilidade:

$$\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \wedge X_3 = 3] = \Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2] \tag{29}$$

Verificamos que a probabilidade condicional pedida é igual a probabilidade condicional calculada anteriormente, ou seja a a probabilidade X_1 estar entre 2 e 3 dado que $X_2 = 2$ e $X_3 = 3$ é de 7.62%.

6. Calculando $\Pr[X_2 + X_4 > 4]$

Criamos um novo vetor aleatório $\vec{Y} = \begin{bmatrix} X_2 & X_4 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ para podermos trabalhar com as transformações lineares afins.

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$C_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Sendo uma transformação linear afim de, precisamos do da matriz de coeficientes A, que representa a constante que está multiplicando cada componente da equação linear $(1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_4)$, e o vetor de constantes $\vec{b}$, que representa a constante que está somando a equação linear que no caso é um vetor nulo.

Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então utilizamos as seguintes formulas para calcular a média e a variância da distribuição de $\vec{Y}$:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= A \cdot \mu_{\vec{Y}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= A C_{\vec{Y}} A^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 6 \end{aligned} \tag{34}$$

Portanto $\vec{Y} \sim N\left(0, \sqrt{6}\right)$, para calcularmos a probabilidade pedida utilizamos a função cumulativa:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\left(\frac{4-0}{\sqrt{6}}\right) &= 1 - \Phi(1.633) \\ &= 1 - 0.94876 \\ &= 0.0512 \end{aligned} \tag{35}$$

Ou seja, a probabilidade de $X_2 + X_4$ ser maior que 4 é de 5.12%.