INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Prova 4

Processos Estocásticos

Gabriel Luiz Espindola Pedro

16 de Outubro de 2023

Sumário

1. Questão

Sejam $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Unif}(\{-1, 1\})$ variáveis aleatórias sorteadas independentemente.

(a) Sejam

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_1 X_2 \\ Y_3 &= X_1 X_2 X_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^\top$

(b) Sejam

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_1 + Y_2 \\ Z_2 &= Y_2 + Y_3 \\ Z_3 &= Y_3 + Y_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)^\top$. **Utilize a formulação matricial**

2. Resolução

2.1. Vetor média de $\vec{Y}$

O vetor média é definido por:

$$\vec{\mu}_{\vec{Y}} = E\left[\vec{Y}\right] \tag{3}$$

lembrando que a média de um vetor aleatório $\vec{X}$ é definida por:

$$\vec{\mu}_{\vec{X}} = (E[Y_1], E[Y_2], ..., E[Y_n])^\top \tag{4}$$

E lembrando que a média de uma variável aleatória X é definida por:

$$E[X] = \sum_{x \in X} xP(X = x) \tag{5}$$

Para a distribuição Unif($\{-1, 1\}$) a probabilidade de que seja sorteado um valor pertencente a cada ponto no conjunto $\{-1, 1\}$ é igual $\frac{1}{2}$ porque a probabilidade total deve ser igual a 1 e temos dois itens possíveis de ser sorteado.

Dito isso, podemos calcular a média de $\vec{Y}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_{\vec{Y}} &= (E[Y_1], E[Y_2], E[Y_3])^\top \\
\vec{\mu}_{\vec{Y}} &= (E[X_1], E[X_1 X_2], E[X_1 X_2 X_3])^\top \\
\vec{\mu}_{\vec{Y}} &= (E[X_1], E[X_1] \cdot E[X_2], E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot E[X_3])^\top
\end{aligned} \tag{6}$$

Calculando cada uma das médias:

$$\begin{aligned}
E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] &= \sum_{x \in X} xP(X = x) \\
&= 1 \cdot P(X = 1) + (-1) \cdot P(X = -1) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Para Y_2 e Y_3 temos uma multiplicação de variáveis aleatórias, sabendo que X_1 e X_2 são independentes, podemos calcular a média de Y_2 e Y_3 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
E[Y_2] &= E[X_1 X_2] \\
&= E[X_1]E[X_2] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
E[Y_3] &= E[X_1 X_2 X_3] \\
&= E[X_1]E[X_2]E[X_3] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Dessa forma, podemos calcular a média de $\vec{Y}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_{\vec{Y}} &= (E[Y_1], E[Y_2], E[Y_3])^\top \\
&= (0, 0, 0)^\top
\end{aligned} \tag{10}$$

2.2. Matriz covariância de $\vec{Y}$

A matriz covariância é definida por:

$$\vec{C}_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} \operatorname{var}[Y_1] & \operatorname{cov}[Y_1, Y_2] & \operatorname{cov}[Y_1, Y_3] \\ \operatorname{cov}[Y_2, Y_1] & \operatorname{var}[Y_2] & \operatorname{cov}[Y_2, Y_3] \\ \operatorname{cov}[Y_3, Y_1] & \operatorname{cov}[Y_3, Y_2] & \operatorname{var}[Y_3] \end{bmatrix} \tag{11}$$

Sendo a covariância definida por:

$$\operatorname{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_Y))] \tag{12}$$

E sabendo que:

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \operatorname{cov}[Y, X] \tag{13}$$

Podemos então calcular as covariâncias

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[Y_1, Y_2] &= E[(Y_1 - E[Y_1])(Y_2 - E[Y_2])] \\ &= E[Y_1 Y_2] \\ &= E[X_1 X_1 X_2] \\ &= E[X_1]E[X_1]E[X_2] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[Y_1, Y_3] &= E[(Y_1 - E[Y_1])(Y_3 - E[Y_3])] \\ &= E[Y_1 Y_3] \\ &= E[X_1 X_1 X_2 X_3] \\ &= E[X_1]E[X_1]E[X_2]E[X_3] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[Y_2, Y_3] &= E[(Y_2 - E[Y_2])(Y_3 - E[Y_3])] \\ &= E[Y_2 Y_3] \\ &= E[X_1 X_1 X_2 X_2 X_3] \\ &= E[X_1]E[X_1]E[X_2]E[X_2]E[X_3] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

A variância definida por:

$$\operatorname{var}[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] \tag{17}$$

Com isso podemos calcular as variâncias:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[Y_1] &= E\left[(Y_1 - E[Y_1])^2\right] \\
&= E[Y_1^2] \\
&= E[X_1^2] \\
&= \sum_{x \in X} x^2 P(X = x) \\
&= 1^2 \cdot P(X = 1) + (-1)^2 \cdot P(X = -1) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[Y_2] &= E\left[(Y_2 - E[Y_2])^2\right] \\
&= E[Y_2^2] \\
&= E[X_1^2 X_2^2] \\
&= E[X_1^2] E[X_2^2] \\
&= \sum_{x \in X} x^2 P(X = x) \\
&= 1^2 \cdot P(X = 1) + (-1)^2 \cdot P(X = -1) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[Y_3] &= E\left[(Y_3 - E[Y_3])^2\right] \\
&= E[Y_3^2] \\
&= E[X_1^2 X_2^2 X_3^2] \\
&= E[X_1^2] E[X_2^2] E[X_3^2] \\
&= \sum_{x \in X} x^2 P(X = x) \\
&= 1^2 \cdot P(X = 1) + (-1)^2 \cdot P(X = -1) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Portanto a matriz covariância de $\vec{Y}$ é:

$$
\vec{C}_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\tag{21}
$$

2.3. Vetor média de $\vec{Z}$

O vetor média é definido por:

$$\vec{\mu}_{\vec{Z}} = A \cdot \vec{\mu}_{\vec{Y}} + \vec{b} \tag{22}$$

Portanto:

$$\vec{\mu}_{\vec{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

2.4. Matriz covariância de $\vec{Z}$

A matriz covariância é definida por:

$$C_{\vec{Z}} = A \cdot C_{\vec{Y}} \cdot A^{\mathsf{T}} \tag{24}$$

Portanto:

$$C_{\vec{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{25}$$