INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus São José

Prova 1

Processos Estocásticos

Gabriel Luiz Espindola Pedro

13 de Setembro de 2023

Sumário

1. Questão **3**
2. Desenvolvimento **3**
2.1. PDF 3
2.1.1. Esboço da PDF de X. 3
2.2. CDF 3
2.2.1. Esboço da CDF de X. 4
2.3. Média de X 5
2.4. $\Pr[-2 \leq X \leq 2]$ 5
3. Resultados **6**

1. Questão

Considere uma variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for ímpar, então $X = 0$;
- Se o resultado for par, então X é sorteada de acordo com a distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 2$.

(a) Determine e esboce a PDF de X
(b) Determine e esboce a CDF de X
(c) Determine a média de X
(d) Determine $\Pr[-2 \leq X \leq 2]$

2. Desenvolvimento

2.1. PDF

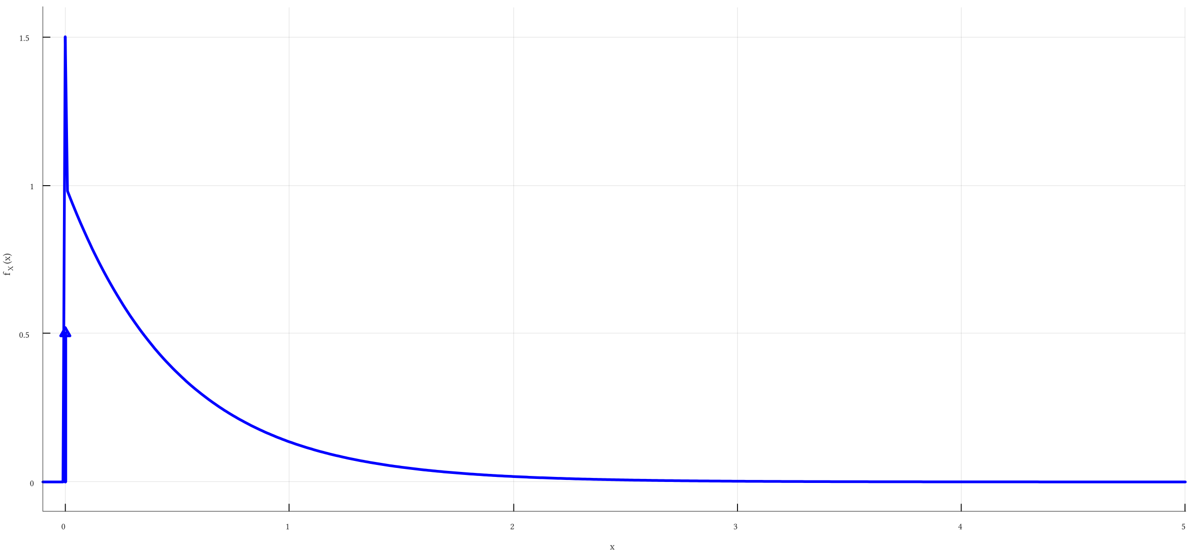
Utilizando o teorema da probabilidade total, temos que:

$$\begin{aligned} f_X(x) = f_X(x \mid U = 1 \vee U = 3 \vee U = 5) \Pr[U = 1 \vee U = 3 \vee U = 5] \\ + f_X(x \mid U = 2 \vee U = 4 \vee U = 6) \Pr[U = 2 \vee U = 4 \vee U = 6] \end{aligned} \tag{1}$$

A partir disto temos que a PDF de X é dada por:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}2e^{-2x}u(x) \\ &= \frac{1}{2}\delta(x) + e^{-2x}u(x) \end{aligned} \tag{2}$$

2.1.1. Esboço da PDF de X.



2.2. CDF

Para obter a CDF de X basta integrar a PDF de X até o ponto x desejado, temos então que para valores menores que 0:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0^-} 0 \, \mathrm{d}u = 0 \tag{3}$$

Para quando $x = 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0^-} 0 \, \mathrm{d}u + \int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{2}\delta(u) \, \mathrm{d}u = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{4}$$

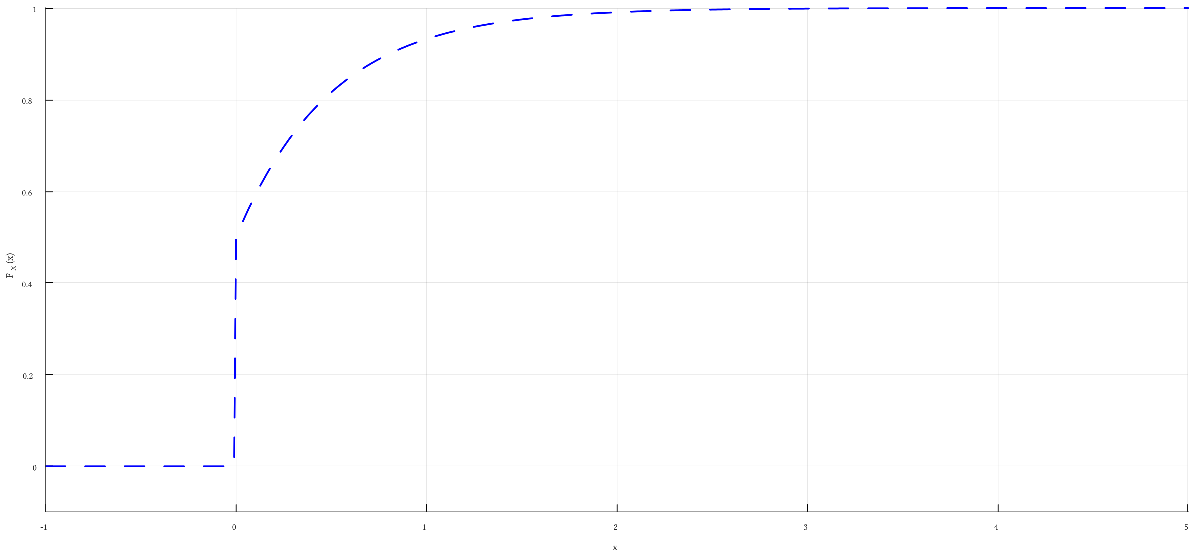
E para quando $0 < x < \infty$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{0^-} 0 \, \mathrm{d}u + \int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{2}\delta(u) \, \mathrm{d}u + \int_{0^+}^{x} e^{-2u} \, \mathrm{d}u \\
&= 0 + \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2u}\right]_{u=0^+}^{u=x} \\
&= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2x} - e^{-2\cdot 0}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}\left(e^{-2x} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}
\end{aligned} \tag{5}$$

Considerando a analise dos casos podemos resumir a função CDF de X como:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \tag{6}$$

2.2.1. Esboço da CDF de X.



2.3. Média de X

A média de X é dada por:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\delta(x) + e^{-2x}u(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x \delta(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2x} u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{0^-}^{0^+} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} x e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0^-}^{x=0^+} + \left[\frac{1}{4}(-2e^{-2x}x - e^{-2x}) \right]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4}[(-2e^{-2\cdot\infty}x - e^{-2\cdot\infty}) - (-2e^{-2\cdot 0}x - e^{-2\cdot 0} \cdot 0)] \\
&= 0 + \frac{1}{4}[(0-0) - (0-1)] \\
&= \frac{1}{4}[1] \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2.4. $\Pr[-2 \leq X \leq 2]$

A probabilidade de X estar entre -2 e 2 é dada pela aplicação da CDF de X em 2 subtraída da aplicação da CDF de X em -2, temos então que:

$$
\begin{aligned}
\Pr[-2 \leq X \leq 2] &= F_X(2) - F_X(-2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}e^{-2 \cdot 2} - 0 \\
&= 1 - \frac{1}{2}e^{-4}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

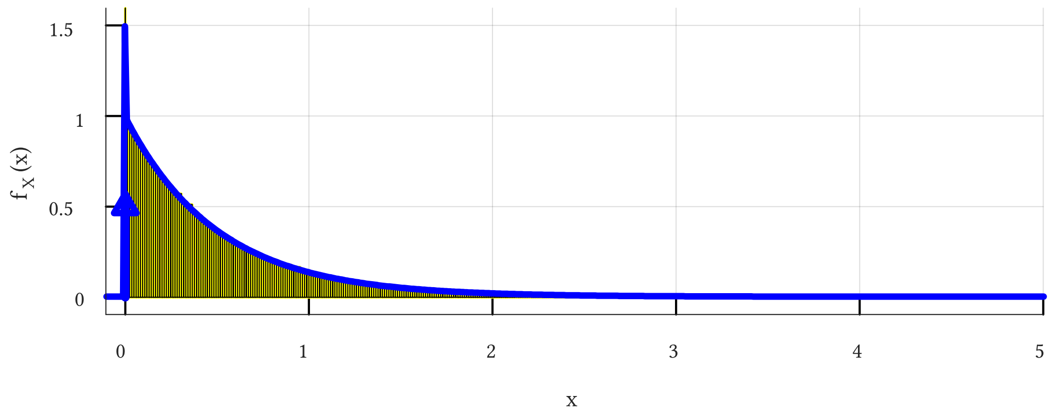
3. Resultados

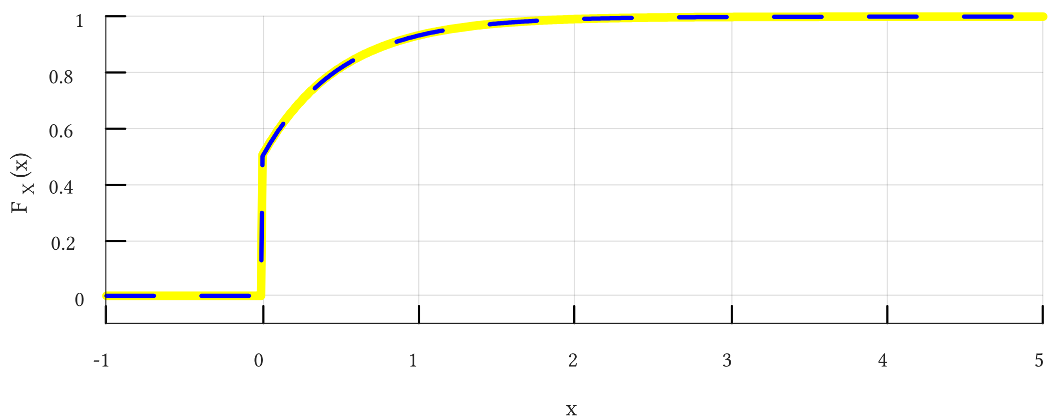
Ao final do desenvolvimento obtivemos a partir do software de computação numérica Octave os seguintes resultados após desenvolvido o seguinte script:

```
clear all; close all; clc;
pkg load statistics;

N = 10^6;                          % Número de lançamentos

U = randi([1 6], 1, N);            % Lançamento dos dados

idx1 = U == 1 | U == 3 | U == 5; % Ocorrências ímpares
idx2 = U == 2 | U == 4 | U == 6; % Ocorrências pares

X = zeros(1, N); % Criando vetor para armazenar valores aleatórios de X

X(idx1) = 0; % Se for impar atribuir valor 0

% Se for par atribuir valor pela distribuição exponencial com \lambda = 2
lambda = 2; beta = 1/lambda; % Parâmetros da distribuição exponencial
X(idx2) = exprnd(beta, 1, sum(idx2));

dx = 0.01; x = -1 : dx : 5.2; % Vetor de valores de x para plotar pdf e cdf

pdfX_sim = hist(X, x) / (N * dx); % Simulação da pdf de X
pdfX_teo = (1/2) * (x == 0) + exp(-lambda*x) .* (x >= 0); % PDF teórica de X

cdfX_sim = cumsum(pdfX_sim) * dx; % Simulação da CDF de X
cdfX_teo = (1 - 1/2 * exp(-lambda*x)) .* (x >= 0); % CDF teórica de X


figure;
subplot(2,1,1); hold on; grid on;
bar(x, pdfX_sim,'y'); % Plotando PDF simulada
plot(x, pdfX_teo,'b', 'LineWidth', 3'); % Plotando PDF teórica
plot([0, 0], [0, 1/2], 'b', 'LineWidth', 4'); % Plotando linha do impulso
plot([0], [1/2], 'b^', 'LineWidth', 3'); % Plotando seta do impulso
xlim([-0.1 5]); ylim([-0.1 1.6]); % Limites dos eixos
xlabel('x'); ylabel('f_X(x)'); % Legendas dos eixos

subplot(2,1,2); hold on; grid on;
plot(x, cdfX_sim, 'y', 'LineWidth', 4); % Plotando CDF simulada
plot(x, cdfX_teo, 'b--', 'LineWidth', 2); % Plotando CDF teórica
xlim([-1 5]); ylim([-0.1 1]); % Limites dos eixos
```

```
xlabel('x'); ylabel('F_X(x)'); % Legendas dos eixos

printf('Sim: Pr[-2 <= X <= 2] = %g\n', sum(X <= 2) / N); % Probabilidade simulada
printf('Teo: Pr[-2 <= X <= 2] = %g\n', 1 - exp(-2 * lambda)); % Probabilidade teórica

printf('Sim: E[X] = %g\n', mean(X)); % Valor esperado simulado
printf('Teo: E[X] = %g\n', 1/4); % Valor esperado teórico

% Gerando esboços para o relatório
figure; hold on; grid on;
plot(x, pdfX_teo,'b', 'LineWidth', 3'); % Plotando PDF teórica
plot([0, 0], [0, 1/2], 'b', 'LineWidth', 4'); % Plotando linha do impulso
plot([0], [1/2], 'b^', 'LineWidth', 3'); % Plotando seta do impulso
xlim([-0.1 5]); ylim([-0.1 1.6]); % Limites dos eixos
xlabel('x'); ylabel('f_X(x)'); % Legendas dos eixos

figure; hold on; grid on;
plot(x, cdfX_teo, 'b--', 'LineWidth', 2); % Plotando CDF teórica
xlim([-1 5]); ylim([-0.1 1]); % Limites dos eixos
xlabel('x'); ylabel('F_X(x)'); % Legendas dos eixos
```

O código acima gera o seguinte gráfico como resultado:





Os valores de média e probabilidade de X estar entre -2 e 2 são simulados próximos ao valor teórico obtido no desenvolvimento.