INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Prova 7

Processos Estocásticos

Gabriel Luiz Espindola Pedro

23 de Novembro de 2023

Sumário

1. Questão

Considere dois processos de Poisson, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, independentes, de taxas $\lambda_1 = 2.5$ e $\lambda_2 = 2$ eventos por segundo, respectivamente. Seja $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$. As questões abaixo são todas referente ao processo estocástico $X(t)$.

(a) Determine e esboce a função média do processo estocástico.

(b) Determine a probabilidade de ocorrer pelo menos quinze eventos entre 10 e 13 segundos, dado que ocorreu exatamente um evento entre 6 e 9 segundos.

(c) Determine a probabilidade de que o tempo decorrido entre o segundo evento e o terceiro evento seja maior que 0.1 segundos.

(d) Determine a matriz covariâmcia do vetor aleatório $\begin{bmatrix} X(3) & X(4) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

2. Resolução

2.1. Calculando a função média

$$\lambda_X = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.5 + 2 = 4.5$$

$$\mu_X(t) = \lambda_X t[t \geq 0]$$

$$\therefore \mu_X(t) = 4.5t[t \geq 0]$$

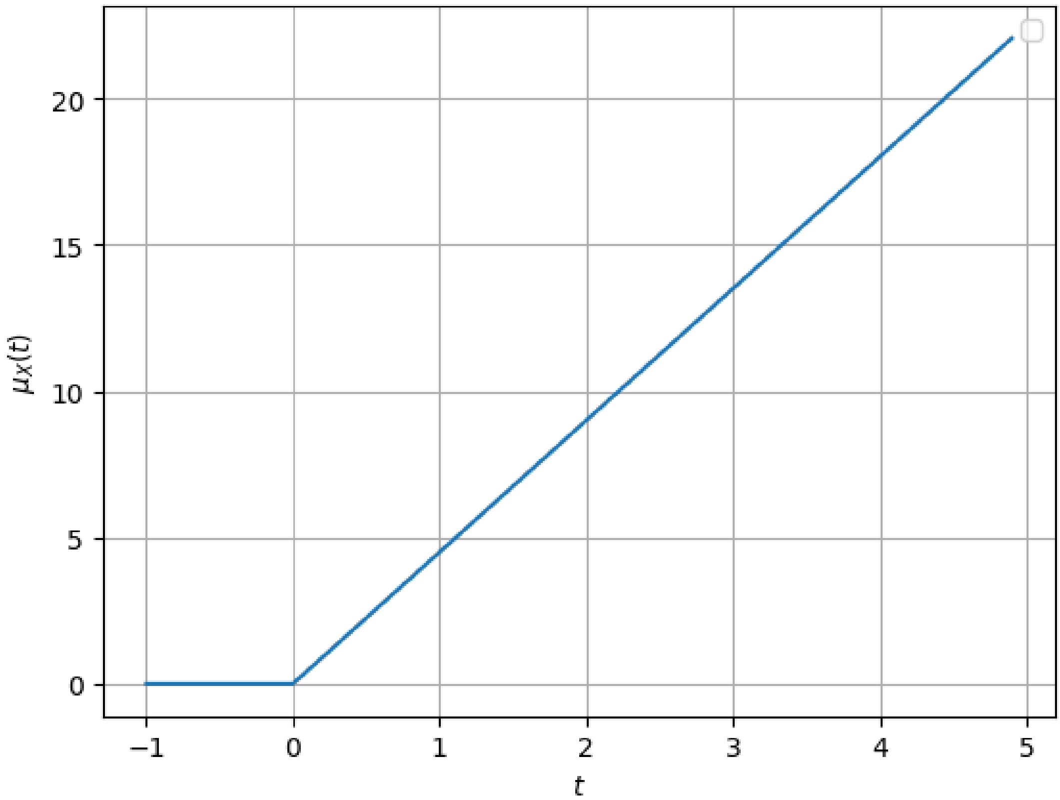

Fig. 1: Função média de $X(t)$

2.2. Calculando a probabilidade condicional

$$\Pr[X_{10,13} \geq 15 \mid X_{6,9} = 1] = \Pr[X_{10,13} \geq 15]$$

$$\begin{aligned} X_{10,13} \sim \text{Poisson}(\lambda_X \cdot (13 - 10)) &= \text{Poisson}(4.5 \cdot 3) \\ &= \text{Poisson}(13.5) \end{aligned}$$

$$p_X(x) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^x}{x!}$$

$$\therefore$$

$$\begin{aligned} \Pr[X_{10,13} \geq 15] &= 1 - e^{-13.5} \cdot \sum_{x=0}^{14} \left(\frac{13.5^x}{x!} \right) \\ &= 1 - 0.623271 \\ &= 0.376729 \\ &= 37.7\% \end{aligned}$$

2.3. Determinando a probabilidade do intervalo entre o segundo e o terceiro evento ser maior que 0.1 segundos

$$\begin{aligned} P(T > t) &= e^{-\lambda t} \\ P(T > 0.1) &= e^{-4.5 \cdot 0.1} \\ &= e^{-0.45} \\ &= 0.638 \\ &= 63.8\% \end{aligned}$$

2.4. Determinando a matriz covariância de $\begin{bmatrix} X(3) & X(4) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

$$C_{X(t_1, t_2)} = \lambda_X \min\{t_1, t_2\} \quad [t_1, t_2 > 0]$$

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(X(3), X(3)) & \operatorname{cov}(X(3), X(4)) \\ \operatorname{cov}(X(4), X(3)) & \operatorname{cov}(X(4), X(4)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X(3), X(3)) &= 4.5 \min\{3, 3\} = 4.5 \cdot 3 = 13.5 \\ \operatorname{cov}(X(3), X(4)) &= 4.5 \min\{3, 4\} = 4.5 \cdot 3 = 13.5 \\ \operatorname{cov}(X(4), X(3)) &= 4.5 \min\{4, 3\} = 4.5 \cdot 3 = 13.5 \\ \operatorname{cov}(X(4), X(4)) &= 4.5 \min\{4, 4\} = 4.5 \cdot 4 = 18 \\ \therefore C_{\vec{X}} &= \begin{bmatrix} 13.5 & 13.5 \\ 13.5 & 18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$