Taxa de Variação & Análise de Dados

Gabriel Luiz dos Santos Silva
Monitoria | Cálculo em Ciência de Dados

August 31, 2023

Derivada (Taxa de Variação)

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento. Para entendermos, observemos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto.

A fórmula da derivada de uma função $f(x)$ em relação a x é representada como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Essa fórmula descreve a taxa de variação instantânea da função $f(x)$ no ponto x, ou seja, a inclinação da reta tangente à curva da função nesse ponto.

1 Derivada na Economia

Seja você um funcionário de uma empresa, onde, x unidade do seu novo produto podem ser vendidos a p reais, onde, $x = 250 - p$. O custo de cada produto é $C = 750 + 5x$. Qual a Quant. Máx. de Produtos que deve ser Produzidos para obter o Lucro Máximo?

$$Lucro = Receita - Custo$$

Para encontrarmos o lucro, precisamos encontrar a receita e o custo, que estão definidas como função no enunciado. Sabemos que a receita de qualquer estabelecimento é definida pela sua quantidade de produtos vendidos e o valor do produto:

- Receita $R(x) = p \cdot x$
- Custo $C(x) = 750 + 5x$

A quantidade x de unidades de um produto é estabelecida como $x = 250 - p$. Dessa forma, é possível determinar o valor do produto, expresso como $p = 250 - x$, a partir da relação previamente estabelecida entre a quantidade e o preço. Logo, encontramos $R(x)$

$$R(x) = p \cdot x$$

$$R(x) = (250 - x) \cdot x$$

$$R(x) = 250x - x^2$$

Falta encontrarmos a função do Lucro:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

$$L(x) = (250x - x^2) - (750 + 5x)$$

$$L(x) = 250x - x^2 - 750 - 5x$$

$$L(x) = -x^2 + 245x - 750$$

Partindo para a aplicação da derivada, entendemos como ela se aplica a esse cenário. Temos a função já definida para o nosso lucro, com isso, podemos calcular a taxa de variação instantânea do lucro em relação à quantidade de unidades vendidas. Essa taxa de variação, representada pela derivada da função de lucro, nos dará informações valiosas sobre como o lucro está mudando à medida que aumentamos ou diminuímos a quantidade de unidades vendidas.

Para encontrar o ponto de lucro máximo, precisamos identificar onde a derivada da função de lucro é igual a zero, ou seja, onde a taxa de variação do lucro é nula. Esse ponto crítico é onde a curva de lucro atinge seu ponto mais alto ou mais baixo, ou seja, onde há uma mudança de tendência de aumento para diminuição do lucro ou vice-versa.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(-(x+h)^2 + 245(x+h) - 750) - (-x^2 + 245x - 750)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h)^2 + 245(x+h) - 750 + x^2 - 245x + 750}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 245x + 245h - 750 + x^2 - 245x + 750)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 245x + 245h - 750 + x^2 - 245x + 750)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2xh - h^2 + 245h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(-2x - h + 245)}{h}$$

$$ou$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2xh}{h} - \frac{h^2}{h} + \frac{245h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} -2x - h + 245$$

$$f'(x) = -2x + 245$$

Portanto, a derivada da função $f(x)$ em relação a x é $-2x + 245$. Isso representa a taxa de variação instantânea da função $f(x)$ em um ponto específico x. Agora partimos para encontrar em qual ponto a taxa de variação instantânea da função $f(x)$ é igual a zero, o que nos permitirá identificar possíveis pontos de máximo, mínimo ou pontos de inflexão. Para fazer isso, igualamos a derivada $-2x + 245$ a zero e resolvemos para x:

$$-2x + 245 = 0$$

Isolamos x:

$$-2x = -245$$

$$x = \frac{245}{2}$$

Portanto, o ponto onde a taxa de variação instantânea da função $f(x)$ é igual a zero é $x = \frac{245}{2}$, ou seja, $x = 122.5$.

Nesse ponto, a função $f(x)$ pode ter um ponto de **máximo OU mínimo OU inflexão**, dependendo das características da curva da função. Para determinar qual tipo de ponto é, seria necessário analisar a segunda derivada da função **(que vocês aprenderam em breve)** e realizar um teste de concavidade. Isso nos daria informações sobre a curvatura da função e sua concavidade, permitindo identificar o tipo de ponto presente.

1.1 Exercícios | Encontre as Derivadas das Funções

Exercício 1: ....

$$f(x) = 4x^2.$$

Exercício 2: ....

$$g(x) = 3x^3 + 2x.$$

Exercício 3: ....

$$j(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$$

Exercício 4: ....

$$k(x) = 5e^x - 3\ln(x).$$

Exercício 5: ....

$$m(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 1}.$$

....

2 Análise Numérica de Derivadas

A função `numpy.gradient()` é uma ferramenta numérica que calcula o gradiente ou a derivada discreta de um conjunto de dados. Ela é particularmente útil quando se trabalha com pontos de dados discretos e deseja-se estimar as taxas de variação entre esses pontos **sem depender explicitamente de uma função**.

A função `numpy.gradient()` recebe um conjunto de valores e retorna um conjunto de derivadas estimadas para cada ponto de dados. Ela calcula as diferenças entre os valores adjacentes e as divide pela diferença entre os pontos correspondentes no eixo em que a variação está sendo medida. Isso se assemelha à abordagem de calcular o limite da definição de derivada quando h tende a zero.

```
np.gradient(f, *varargs, axis=None)
```

Onde:

- **f** é o array de entrada contendo os valores que você deseja calcular os gradientes.
- **varargs** é uma sequência opcional de escalares que representam o espaçamento das coordenadas entre os pontos adjacentes ao longo de cada eixo. Ex: [1, 2, 3, 4, ..., n]
- **axis** é uma tupla de inteiros opcionais que especifica os eixos ao longo dos quais calcular os gradientes. Se não for fornecido, os gradientes serão calculados em todos os eixos.

A fórmula para calcular a derivada estimada usando `numpy.gradient()` "Deixo a fórmula para que vocês entendam o que está acontecendo e usem a função." Esta fórmula permite calcular a derivada de uma função em um ponto específico. No entanto, é apenas uma definição matemática e pode ser difícil de compreender agora, enquanto estão aprendendo.

....

Interior dos pontos (fórmula geral) 2, 3, ..., n-1: Aqui, x_i representa o valor do ponto atual. A fórmula calcula a derivada usando a média das diferenças entre os pontos anteriores e posteriores:

$$\frac{f(x_{i+1} + dx) - f(x_{i-1} - dx)}{2dx}$$

Primeiro ponto 1: Para o primeiro ponto, utilizamos uma abordagem ligeiramente diferente para estimar a derivada, uma vez que não temos um ponto anterior para calcular a diferença. Aqui, x_i ainda representa o valor do ponto atual:

$$\frac{f(x_i + dx) - f(x_i)}{dx}$$

Último ponto n: Da mesma forma, para o último ponto, ajustamos a fórmula para não usar um ponto posterior. Aqui, x_i representa o valor do ponto atual:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1} - dx)}{dx}$$

É importante notar que esta fórmula é apenas uma aproximação da derivada real e pode não ser precisa em todos os casos. No entanto, ela é uma ferramenta valiosa ao lidar com conjuntos de dados discretos, fornecendo estimativas das taxas de variação entre os pontos. Nem todo conjunto de dados pode ser descrito por uma função ou uma reta, e é aí que a `numpy.gradient()` pode ser especialmente útil.

3 Aplicações em Análise de Dados

Selecionamos um conjunto de dados que abrange os preços da gasolina comum no período de 2004 a 2021 no Brasil, com isso, torna-se possível aplicar o `np.gradient()` para calcular e visualizar suas variações. Com isso, podemos compreender as flutuações de preços ao longo do tempo, destacando tendências e eventos de significância econômica.

. . . .

O Algoritmo Python pode ser Encontrado no Repositório nas Referências

```
f = [2, 2, 2, 3, 2, 2, 1]
n = len(y)
dfdx = [0] * n

# Para os pontos interiores, usamos a fórmula central
for i in range(1, n-1):
    dfdx[i] = (f[i+1] - f[i-1]) / 2

# Para os pontos extremos, usamos a fórmula de diferença para frente e para trás
dfdx[0] = y[1] - y[0]
dfdx[n-1] = y[n-1] - y[n-2]

dfdx
```

✓ 0.0s

```
[0, 0.0, 0.5, 0.0, -0.5, -0.5, -1]
```

```
np.gradient(y)
```

✓ 0.0s

```
array([ 0. ,  0. ,  0.5,  0. , -0.5, -0.5, -1. ])
```

. . . .

3.1 Interpretação

Eixo x (Horizontal): O eixo horizontal representa os valores da variável independente, ou seja, aqueles que você está medindo ou observando. Isso pode ser o tempo, a posição, ou qualquer outra quantidade que você está analisando.

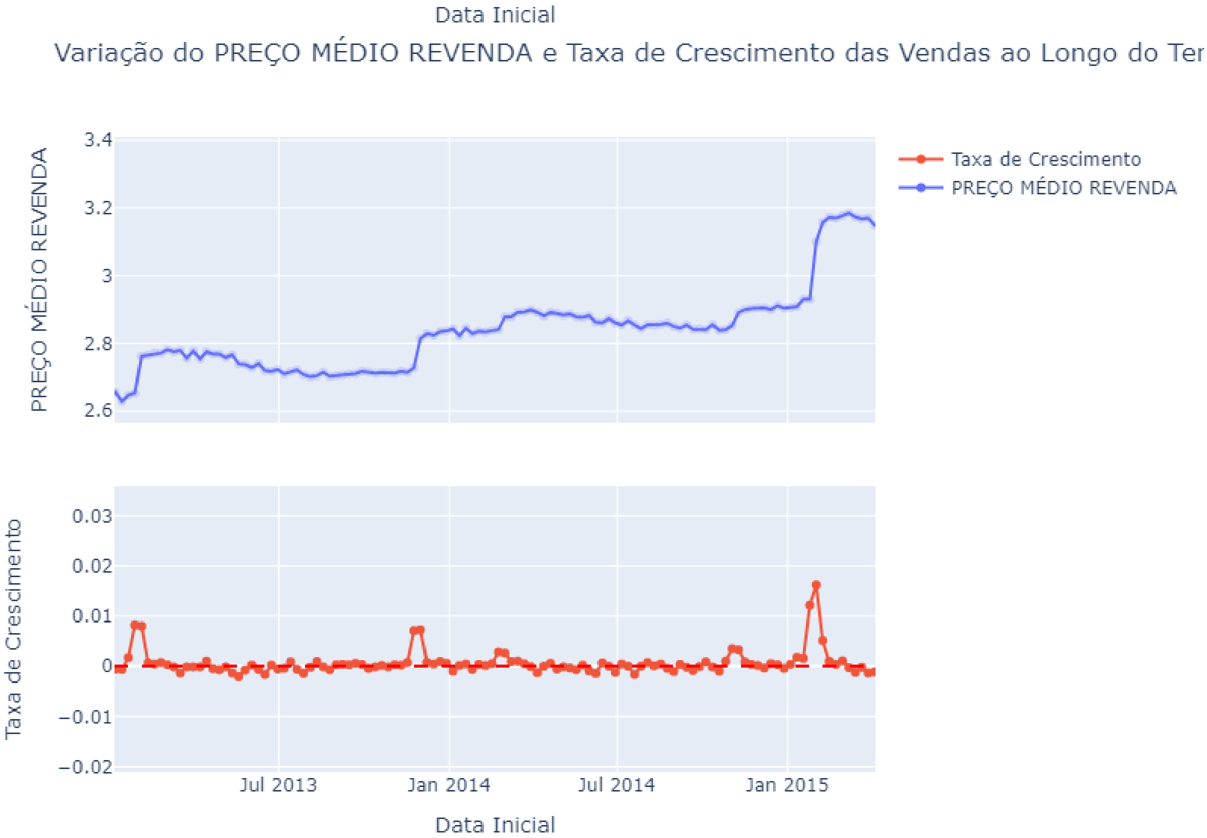
Eixo y (Vertical): O eixo vertical representa os valores da derivada calculada. Esses valores indicam a taxa de variação da função original em relação à variável independente. Uma derivada positiva indica um aumento na função original, enquanto uma derivada negativa indica uma diminuição. A magnitude da derivada indica o quão rápido essa mudança está ocorrendo.

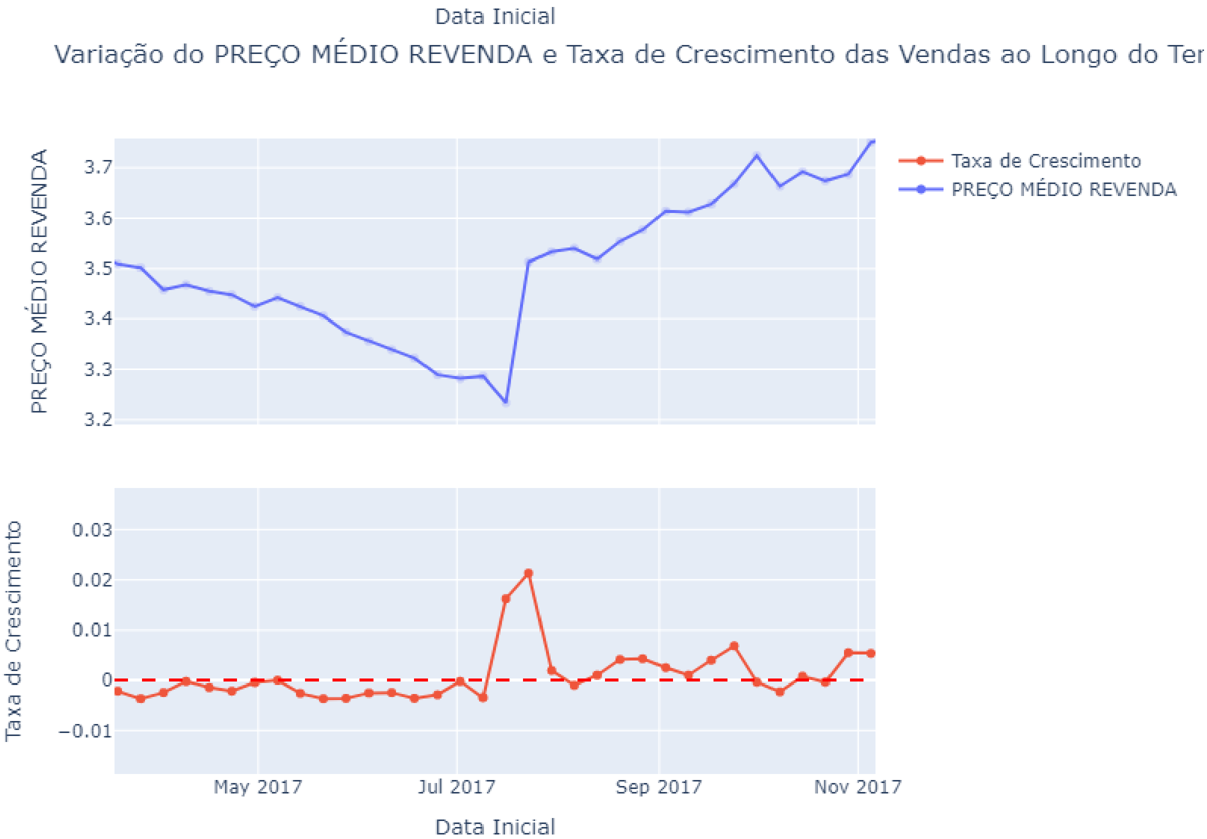
Inclinação da Curva: A inclinação da curva no gráfico de derivada indica a taxa de mudança da função original. Uma curva com inclinação positiva significa que a função está aumentando em relação à variável independente, e quanto mais íngreme a inclinação, mais rápido essa mudança está ocorrendo. Uma curva com inclinação negativa indica uma diminuição da função.

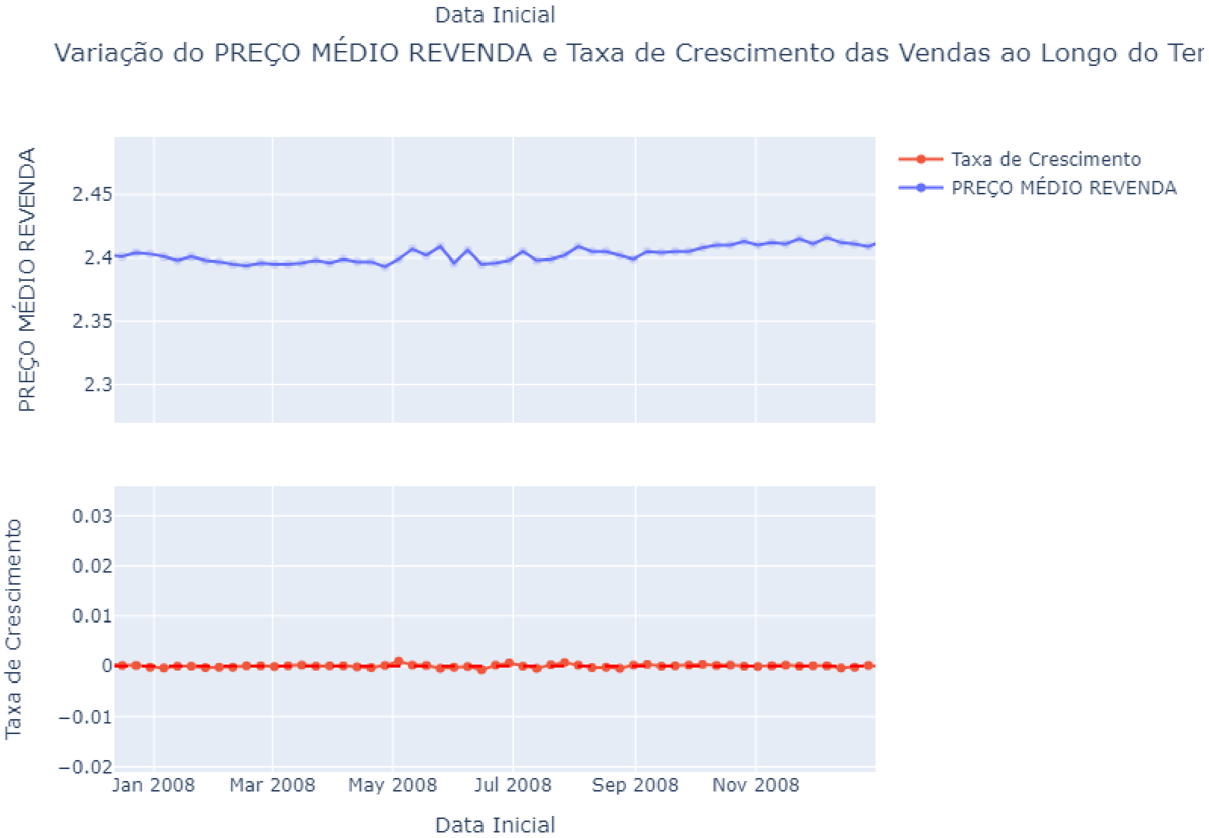
Variações Extremas na Derivada: Pontos onde a derivada tem variações abruptas ou picos podem indicar áreas onde a função original tem mudanças significativas. Essas mudanças podem representar eventos importantes, transições ou mudanças bruscas no comportamento da função.

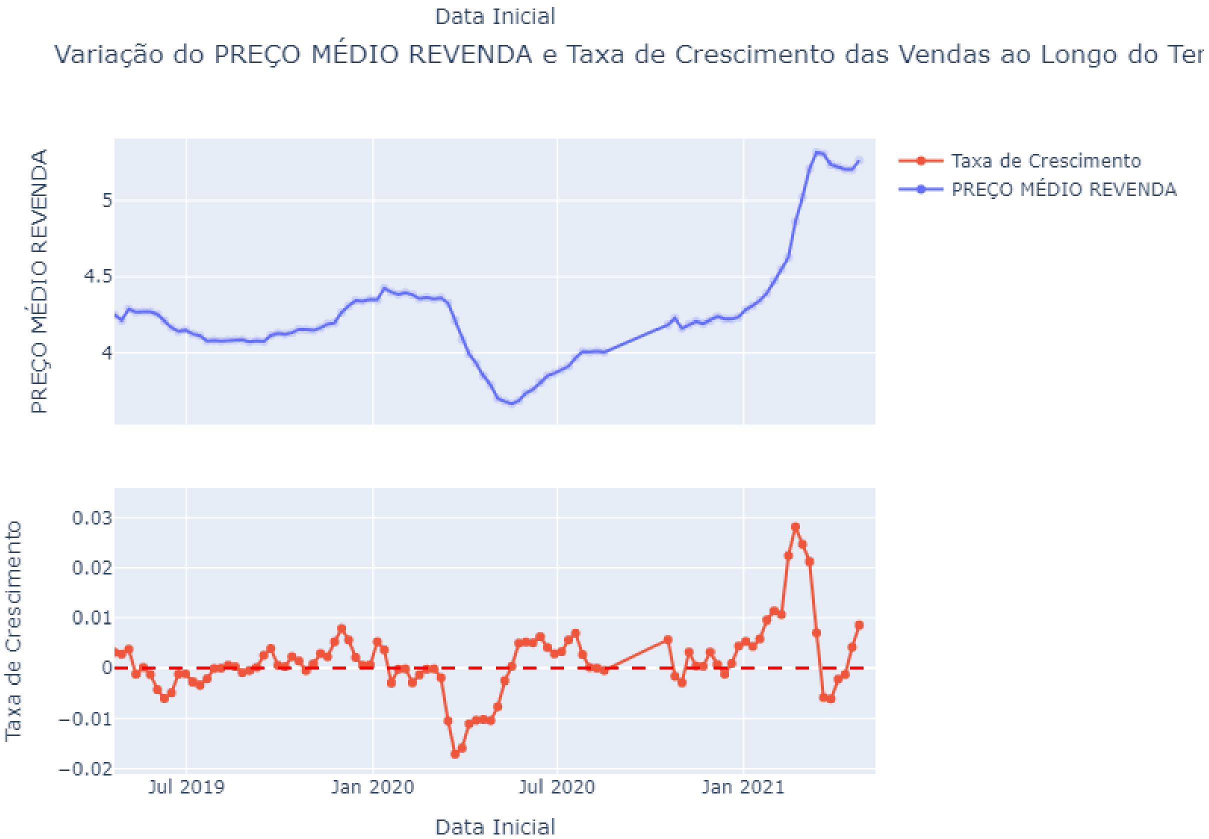
Padrões Recorrentes: Se você notar padrões recorrentes na curva da derivada, isso pode indicar comportamentos cíclicos, sazonais ou oscilatórios na função original. A frequência desses padrões na derivada estará relacionada à frequência das mudanças na função original.

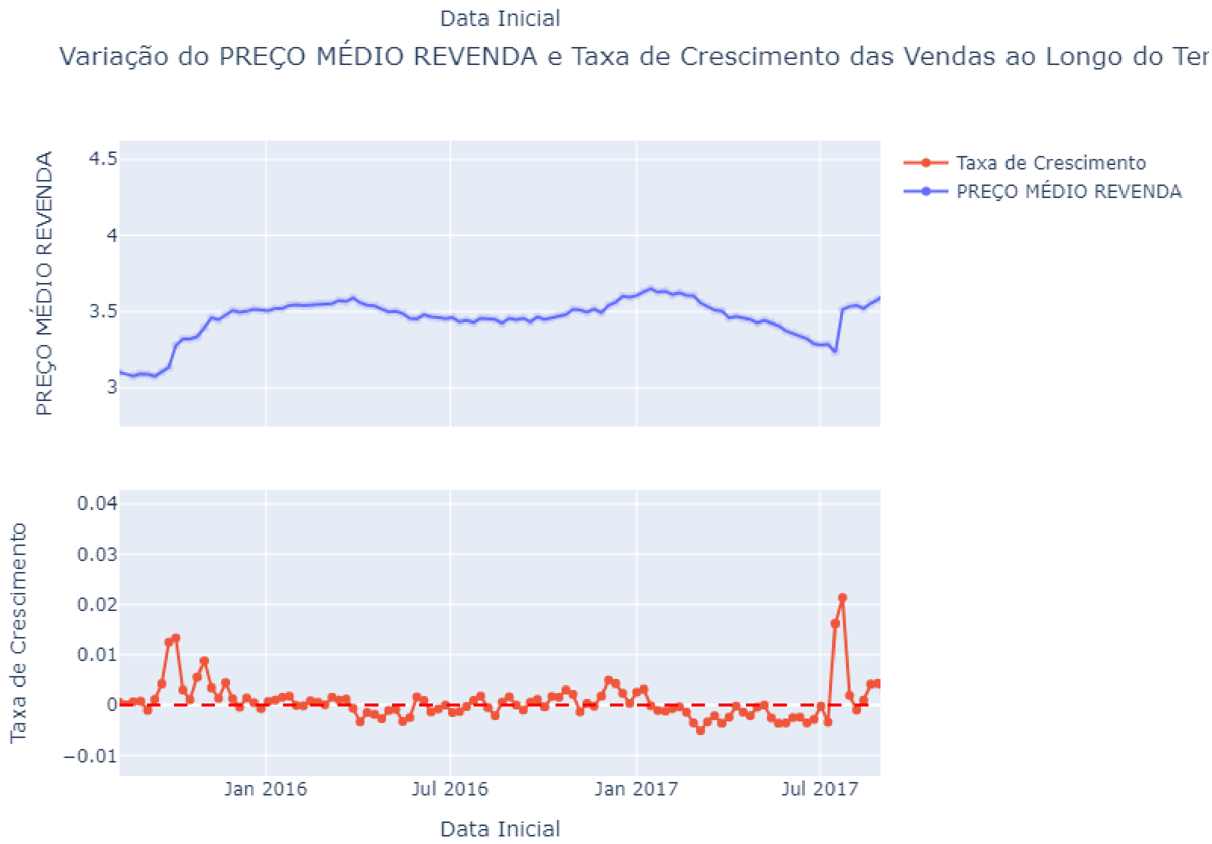
Comparação com a Função Original: Para obter insights mais profundos, você pode comparar o gráfico da derivada com o gráfico da função original. Por exemplo, áreas onde a derivada é alta podem corresponder a áreas de maior curvatura na função original.


Data Inicial
Variação do PREÇO MÉDIO REVENDA e Taxa de Crescimento das Vendas ao Longo do Ter
PREÇO MÉDIO REVENDA
3.4
3.2
3
2.8
2.6
Taxa de Crescimento
PREÇO MÉDIO REVENDA
Taxa de Crescimento
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
−0.02
Jul 2013
Jan 2014
Jul 2014
Jan 2015
Data Inicial


Data Inicial
Variação do PREÇO MÉDIO REVENDA e Taxa de Crescimento das Vendas ao Longo do Ter
PREÇO MÉDIO REVENDA
3.7
3.6
3.5
3.4
3.3
3.2
Taxa de Crescimento
PREÇO MÉDIO REVENDA
Taxa de Crescimento
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
May 2017
Jul 2017
Sep 2017
Nov 2017
Data Inicial


Data Inicial
Variação do PREÇO MÉDIO REVENDA e Taxa de Crescimento das Vendas ao Longo do Ter
Taxa de Crescimento
PREÇO MÉDIO REVENDA
PREÇO MÉDIO REVENDA
2.45
2.4
2.35
2.3
Taxa de Crescimento
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
−0.02
Jan 2008
Mar 2008
May 2008
Jul 2008
Sep 2008
Nov 2008
Data Inicial


Data Inicial
Variação do PREÇO MÉDIO REVENDA e Taxa de Crescimento das Vendas ao Longo do Ter
Taxa de Crescimento
PREÇO MÉDIO REVENDA
PREÇO MÉDIO REVENDA
5
4.5
4
Taxa de Crescimento
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
−0.02
Jul 2019
Jan 2020
Jul 2020
Jan 2021
Data Inicial



Refêrencias

- Derivadas, **Unesp - Faculdade de Ciências**
- Aplicações de Derivadas na Economia, **Dicas de Cálculo**
- Numerical Derivatives in Python using numpy.gradient(), **Knowledge is Power**
- Repositório, **Cáculo Dif e Int**
- Nympy Documentation, **numpy.gradient**
- Kaggle, **Gas Prices in Brazil**