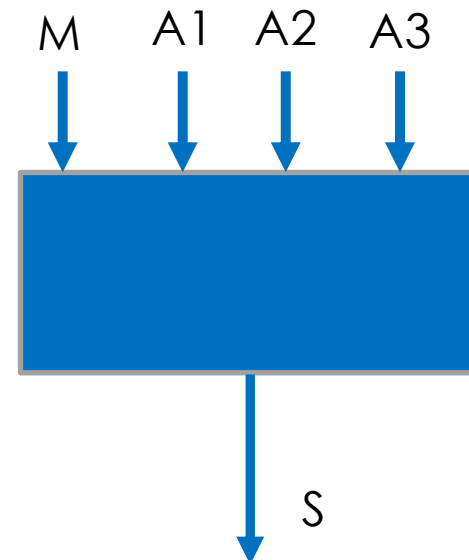


Mapa de Karnaugh

Prof. Gustavo Girão
girao@imd.ufrn.br

Exemplo

- Vamos projetar um circuito que determina se a porta de um elevador deve estar aberta ou não.
- Entradas:
 - M (se está em movimento ou não)
 - A1, A2, A3 – Sensores de presença nos andares
- Saída
 - S – se a porta deve abrir ou não



Exemplo

M	A1	A2	A3		S

Exemplo

M	A1	A2	A3		S
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	0	1		
1	1	1	0		
1	1	1	1		

Exemplo

M	A1	A2	A3		S
0	0	0	0		X
0	0	0	1		1
0	0	1	0		1
0	0	1	1		0
0	1	0	0		1
0	1	0	1		X
0	1	1	0		0
0	1	1	1		X
1	0	0	0		0
1	0	0	1		0
1	0	1	0		0
1	0	1	1		0
1	1	0	0		0
1	1	0	1		X
1	1	1	0		0
1	1	1	1		x

Exemplo

M	A1	A2	A3		S
0	0	0	0		X
0	0	0	1		1
0	0	1	0		1
0	0	1	1		0
0	1	0	0		1
0	1	0	1		X
0	1	1	0		0
0	1	1	1		X
1	0	0	0		0
1	0	0	1		0
1	0	1	0		0
1	0	1	1		0
1	1	0	0		0
1	1	0	1		X
1	1	1	0		0
1	1	1	1		x

Exemplo

- X significa “Don’t Care”
- Demonstra um estado que é inválido e/ou nunca deveria existir no sistema.

M	A1	A2	A3		S
0	0	0	0		X
0	0	0	1		1
0	0	1	0		1
0	0	1	1		0
0	1	0	0		1
0	1	0	1		X
0	1	1	0		0
0	1	1	1		X
1	0	0	0		0
1	0	0	1		0
1	0	1	0		0
1	0	1	1		0
1	1	0	0		0
1	1	0	1		X
1	1	1	0		0
1	1	1	1		x

Desenhando um Mapa K

- Um mapa de Karnaugh ou simplesmente Mapa K é uma metodologia para simplificação de expressões booleanas
- Faz uso de uma tabela cujo tamanho depende de quantidade de variáveis de entrada do circuito.
- Para até quatro variáveis, um mapa é simplesmente uma tabela de duas dimensões
 - A partir de 5 variáveis torna-se mais complexo do que isso.
- A maneira como as variáveis estão dispostas no eixo X e Y da tabela segue uma ordem de código Grey
 - A razão para isso é que toda célula adjacente da tabela tem apenas uma variável mudando seu estado

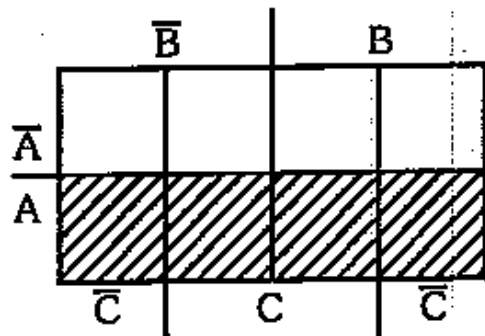
Agrupamento de Variáveis

- O agrupamento de “1s” ou “0s” é realizado em potências de 2.
 - Dois termos (pares).
 - Quatro termos (quartetos).
 - Oito termos (octetos).
 - Em geral é possível agrupar até 2^n termos.
- O agrupamento de “1s” ou “0s” se faz nas células adjacentes.
- Deve-se agrupar o maior número de “1s” ou “0s” possível.

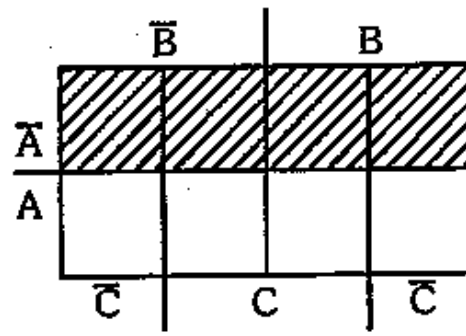
Agrupamento De Variáveis

- Se um grupo de 2^n “1s” ou “0s” são adjacentes, n variáveis são alteradas (mudam do nível “1” para o nível “0” ou o contrário). Estas variáveis são eliminadas no processo de simplificação. Ex:
 - O agrupamento de 4 “1s” ou “0s” elimina 2 variáveis.
 - O agrupamento de 8 “1s” ou “0s” elimina 3 variáveis.
- Cada variável possui uma região dentro do mapa na qual seu valor não muda.

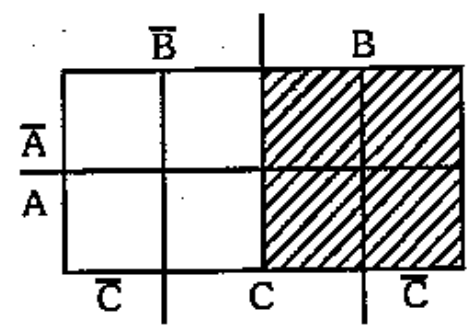
Regiões De Cada Variável Em Um Mapa De Kargnaugh



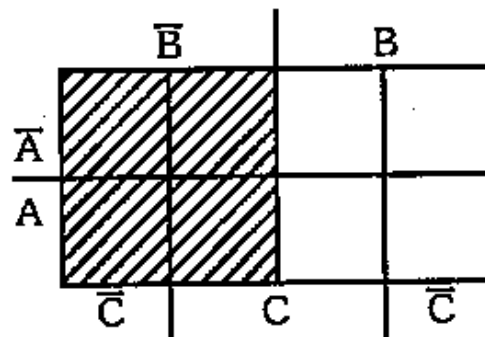
(a)



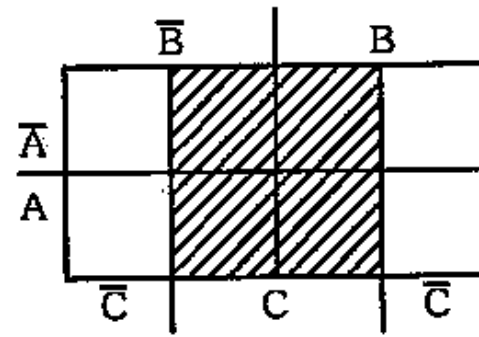
(b)



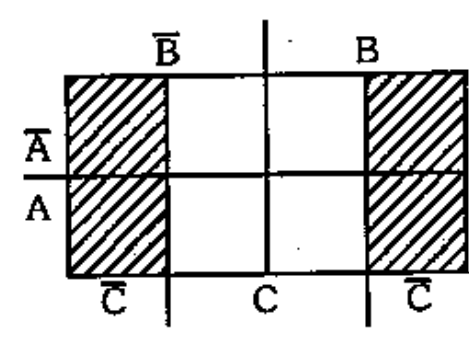
(c)



(d)



(e)



(f)

AGRUPAMENTO DE PARES

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

$X = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$
 $= B\bar{C}$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	0	0
$A\bar{B}$	1	0

$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} = \bar{B}\bar{C}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$X = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D}$
 $= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{D}$

(d)

AGRUPAMENTO DE QUARTETOS

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	1
$\bar{A}B$	0	1
AB	0	1
$A\bar{B}$	0	1

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$X = \bar{B}\bar{D}$

AGRUPAMENTO DE OCTETOS

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$X = B$

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
AB	1	1	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

$X = \bar{C}$

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

$X = \bar{B}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$X = \bar{D}$

Mapa K para 2 e 3 variáveis

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

$$\left\{ x = \bar{A}\bar{B} + AB \right\}$$

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1 → $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\bar{C}$
1	1	1	0

$$\left\{ X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} \right\}$$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

Mapa K para 2 e 3 variáveis

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

$$\left\{ x = \bar{A}\bar{B} + AB \right\}$$

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1 → $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\bar{C}$
1	1	1	0

$$\left\{ X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} \right\}$$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

Mapa K para 2 e 3 variáveis

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

$$\left\{ x = \bar{A}\bar{B} + AB \right\}$$

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1 → $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\bar{C}$
1	1	1	0

$$\left\{ X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} \right\}$$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

Mapa K para 2 e 3 variáveis

A	B	X
0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0
1	0	0
1	1	1 → AB

$$\left\{ x = \underline{\bar{A}\bar{B}} + \underline{AB} \right\}$$

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1 → $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\bar{C}$
1	1	1	0

$$\left\{ X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} \right\}$$

Através do mapa de Karnaugh:

$$X = \underline{\bar{A}\bar{B}} + \underline{B\bar{C}}$$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

Mapa K para 4 variáveis

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1 → $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 → $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 → $ABCD$

$$\left\{ \begin{aligned} X = & \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D \\ & + AB\bar{C}D + ABCD \end{aligned} \right\}$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Mapa K para 4 variáveis

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1 → $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 → $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 → $ABCD$

$$\left\{ \begin{aligned} X = & \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D \\ & + AB\bar{C}D + ABCD \end{aligned} \right\}$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Mapa K para 4 variáveis

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 $\rightarrow \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0

Através do mapa de Karnaugh:

$$X = \bar{A}\bar{C}D + ABD$$

1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 $\rightarrow AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 $\rightarrow ABCD$

$$\left\{ \begin{aligned} X = & \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D \\ & + AB\bar{C}D + ABCD \end{aligned} \right\}$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Mapa K de 5 variáveis

<i>A B</i> \ <i>C D E</i>									
		000	001	011	010	110	111	101	100
00		0	1	3	2	6	7	5	4
01		8	9	11	10	14	15	13	12
11		24	25	27	26	30	31	29	28
10		16	17	19	18	22	23	21	20

Exemplo

Extraia a equação booleana simplificada da tabela verdade ao lado utilizando Mapa K

M	A1	A2	A3		S
0	0	0	0		X
0	0	0	1		1
0	0	1	0		1
0	0	1	1		0
0	1	0	0		1
0	1	0	1		X
0	1	1	0		0
0	1	1	1		X
1	0	0	0		0
1	0	0	1		0
1	0	1	0		0
1	0	1	1		0
1	1	0	0		0
1	1	0	1		X
1	1	1	0		0
1	1	1	1		x

Exemplo de um Mapa de Karnaugh

	$\bar{A}_2 \bar{A}_3$	$\bar{A}_2 A_3$	$A_2 A_3$	$A_2 \bar{A}_3$
$\bar{M} \bar{A}_1$	X	1	0	1
$\bar{M} A_1$	1	X	X	0
$M A_1$	0	X	X	0
$M \bar{A}_1$	0	0	0	0

Exemplo

	$\bar{A}2 \bar{A}3$	$\bar{A}2 A3$	$A2 A3$	$A2 \bar{A}3$
$\bar{M} \bar{A}1$	X	1	0	1
$\bar{M} A1$	1	X	X	0
$M A1$	0	X	X	0
$M \bar{A}1$	0	0	0	0

Exemplo

	$\bar{A}2 \bar{A}3$	$\bar{A}2 A3$	$A2 A3$	$A2 \bar{A}3$
$\bar{M} \bar{A}1$	X	1	0	1
$\bar{M} A1$	1	X	X	0
$M A1$	0	X	X	0
$M \bar{A}1$	0	0	0	0

$$S = \bar{M} \cdot \bar{A}2 + \bar{M} \cdot \bar{A}1 \cdot \bar{A}3$$

Exercicio 1

- Simplificar, usando o mapa de Karnaugh, a expressão booleana descrita pela tabela-verdade ilustrada.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Exercício 1

\overline{A} \overline{B}
 \overline{A} B
 A B
 A \overline{B}

\overline{C}	C
0	1
0	1
1	0
1	1

Exercício 1

\overline{A} \overline{B}
 \overline{A} B
 A B
 A \overline{B}

\overline{C}	C
0	1
0	1
1	0
1	1

Exercício 1

\overline{A} \overline{B}
 \overline{A} B
 A B
 A \overline{B}

\overline{C}	C
0	1
0	1
1	0
1	1

Exercício 1

\overline{A} \overline{B}
 \overline{A} B
 A B
 A \overline{B}

\overline{C}	C
0	1
0	1
1	0
1	1

Exercício 1

$$S = A\bar{C} + \bar{A}C + A\bar{B}$$

\bar{A} \bar{B}
 \bar{A} B
 A B
 A \bar{B}

\bar{C}	C
0	1
0	1
1	0
1	1

Referências

- **STALLINGS, William. Arquitetura e organização de computadores. 10. ed. São Paulo: Pearson, 2017. 814 p.**
 - Capítulo 9
- **TOCCI, Ronald J; Widmer, Neal S. Sistemas Digitais: princípios e Aplicações. 11. ed. São Paulo SP: Pearson, 2011, 817 p. ISBN 9788576050957**
 - Capítulo 1
- **PATTERSON, David A; HENNESSY, John L. Organização e projeto de computadores: A interface HARDWARE/SOFTWARE. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005, 3ª edição.**

Mapa de Karnaugh

Prof. Gustavo Girão
girao@imd.ufrn.br