Sistemas Realimentados - 2023/2

Nome: Gabrielly Barcelos Cariman

Data limite para entrega: 28/9

Trabalho 2 - O método do lugar das raízes

```
I = 14;
[G1,G3,G4]=ini_t2(I);
datetime('now')
```

```
ans = datetime
   28-Sep-2023 03:28:24
```

Atividade 1: Esboçar o lugar das raízes de $1 + KG_1(s) = 0$ para $K > 0$ e $K < 0$. Desenhe à mão, usando as propriedades de construção do LR, digitalize e insira abaixo a figura de forma bem visível. Incluir no esboço:

1.1 Raizes para $K = 0$ e $K \longrightarrow \infty$.

1.2 Pontos de passagem no eixo imaginário se houver.

1.3 As assíntotas e seus ângulos.

1.4 Ponto de interseção das assíntotas

1.5 Localização dos pontos de raízes múltiplas (encontro de polos)

```
G1
```

```
G1 =

           14
  --------------------
  s^3 + 45 s^2 + 200 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

Atividade 1

• $G_1 = \dfrac{14}{s^3 + 45s^2 + 200s}$

$$1 + K\frac{14}{s^3 + 45s^2 + 200s} = 0$$

1.1• Raízes de G_1:

$s_1 = -5$; $s_2 = -40$; $s_3 = 0$ } quando $K = 0$ (não

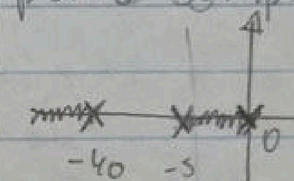
Quando $K \to \infty$, as raízes tendem para infinito

• Reescrevendo G_1:

$G_1 =$

$$\frac{14}{s^3 + 45s^2 + 200s} = \frac{14}{s(s+5)(s+40)}$$

• Desenhando o plano compl

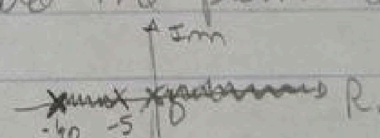


• O número de trajetórias é igual ao núme-ro de polos:

$n_p = 3$

• Desenhando no plano C

p/ $K < 0$:



1.3 e 1.4 • Encontrando as assíntotas para K

→ O número de assíntotas para infinito é d por $n_p - n_z = 3 - 0 = \boxed{3}$, em que n_p é o núm de polos e n_z é o número de zeros de G_1

→ As assíntotas são centradas em σ_A:

$\sigma_A = \sum^{n_p}$ polos de $G_1(s)$ $- \sum^{n_z}$ zeros de $G_1(s)$

→ Os ângulos das assíntotas são determinados por:

$$\varphi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} \cdot 180^\circ, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, (n_p - n_z - 1)$$

$$n_p - n_z - 1 = 3 - 0 - 1 = 2$$

Para $q = 0$: $\varphi_{A_0} = \frac{(2.0 + 1)}{3 - 0} \cdot 180^\circ = 60^\circ$

Para $q = 1$: $\varphi_{A_1} = \frac{(2.1 + 1)}{3 - 0} \cdot 180^\circ = 180^\circ$

Para $q = 2$: $\varphi_{A_2} = \frac{(2.2 + 1)}{3 - 0} \cdot 180^\circ = 300^\circ$

$\boxed{\varphi_A = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ}$ para $K > 0$

→ Os ângulos das assíntotas para $K < 0$ são determinados por:

$$\phi_A = \frac{q}{n_p - n_z} \, 360^\circ, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, (n_p - n_z - 1)$$

Para $q = 0$: $\phi_{A_0} = \frac{(0)}{3-0} \cdot 360^\circ = 0^\circ$

Para $q=2$: $\phi_{A_2} = \frac{2}{3-0} \cdot 360° = 240°$

$$\boxed{\phi_A = 0°, 120°, 240°}$$

1.5 • Localização dos pontos de raízes mu-
tiplas:

→ Da equação $1 + KG_1(s) = 0$, temos $K = -$

$\therefore K = -1 \cdot \frac{(s^3 + 45s^2 + 200s)}{14}$

→ Derivando essa equação em relação à s.

Obtemos $\frac{dK}{ds} = 0$, como K é constante,

$\therefore \frac{dK}{ds} = \frac{-1}{14} \cdot (3s^2 + 90s + 200) = 0$

$\therefore -\frac{3}{14}s^2 - \frac{90}{14}s - \frac{200}{14} = 0$

→ Obtendo as raízes da equação acima

Raízes: $s_1 = -2,42$; $s_2 = -27,58$

$\therefore$ s_1 e s_2 pertencem ao eixo real, porém, s_1, -2,
pertence ao LR de $K>0$ e s_2, -27,58, só pertence ao

• Todos os polos estão sobre o eixo real
$\therefore$ os ângulos de saída deles serão 90° p/

1.2 • Pontos de passagem no eixo imaginário só existe para $K>0$, pois o encontro dos polos acontece no semiplano esq

$$1+K\left(\frac{14}{s^3+45s^2+200s}\right)=0$$

E para $K<0$, a tendência será de se afastar do polo na origem, por isso existe ponto de passagem para o polo na origem

$$\frac{s^3+45s^2+200s+14K}{s^3+45s^2+200s}=0$$

$$q(s)=s^3+45s^2+200s+14K$$

s^3	1	200	0
s^2	45	14K	0
s^1	A	0	
s^0	B	0	

$$A=\frac{200.45-14K}{45}$$

Para haver oscilação

$$\frac{9000-14K}{45}=0 \Rightarrow \boxed{K=6}$$

$$B=\frac{14K.\cancel{A}}{\cancel{A}}=14K$$

$B=9000$

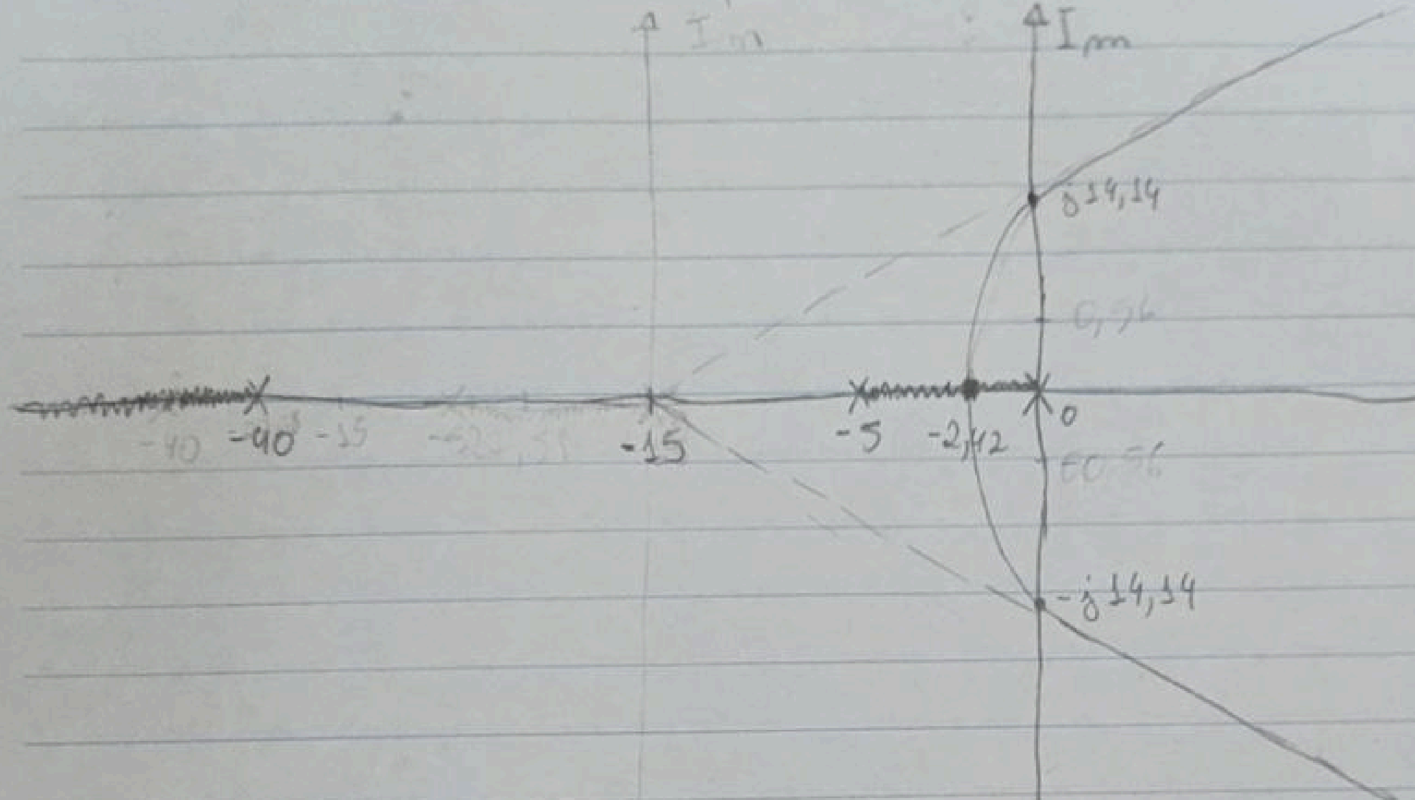
0

Para que o sistema seja Marginalmente Estável
temos que $\frac{9000-14K}{45}=0$

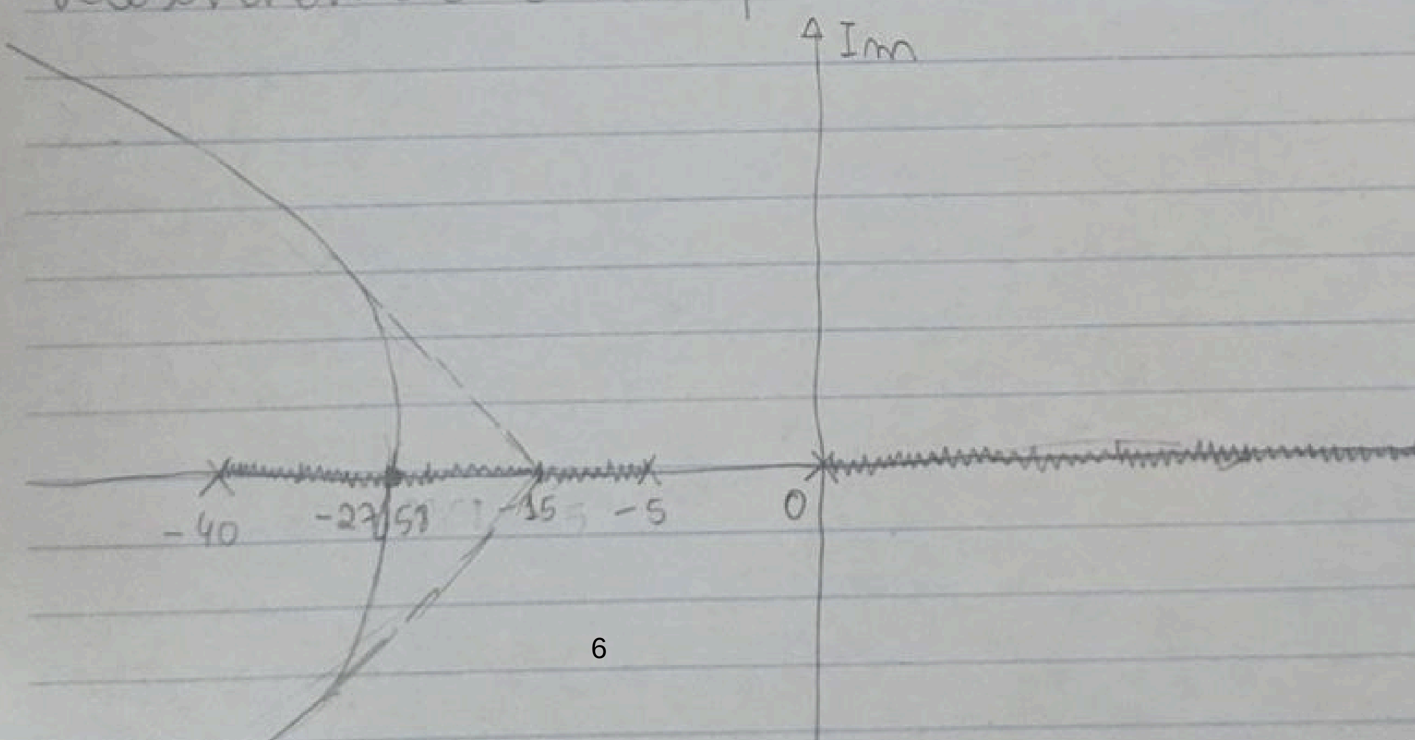
$\therefore$ $K=642,86$

Os pontos sobre o eixo imaginário serão a

• Desenhando o LR para $K > 0$:

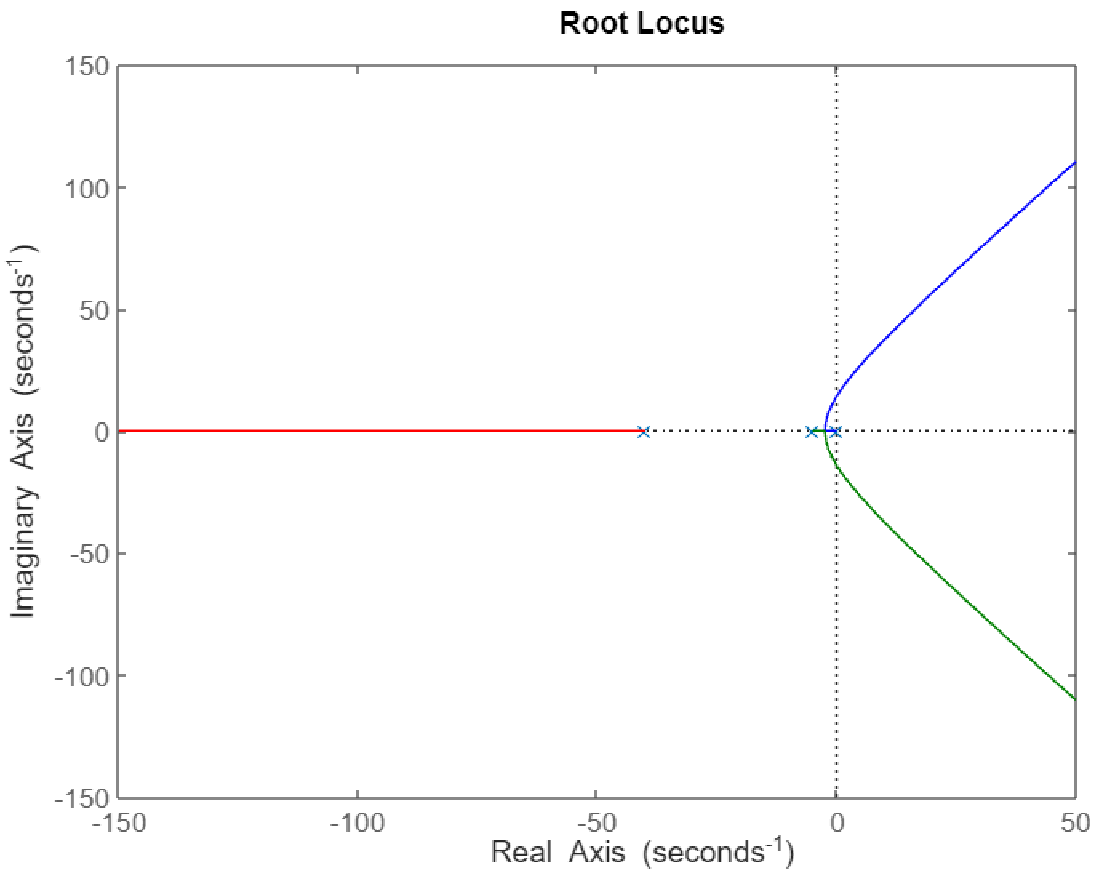


• Desenhando o LR para $K < 0$:

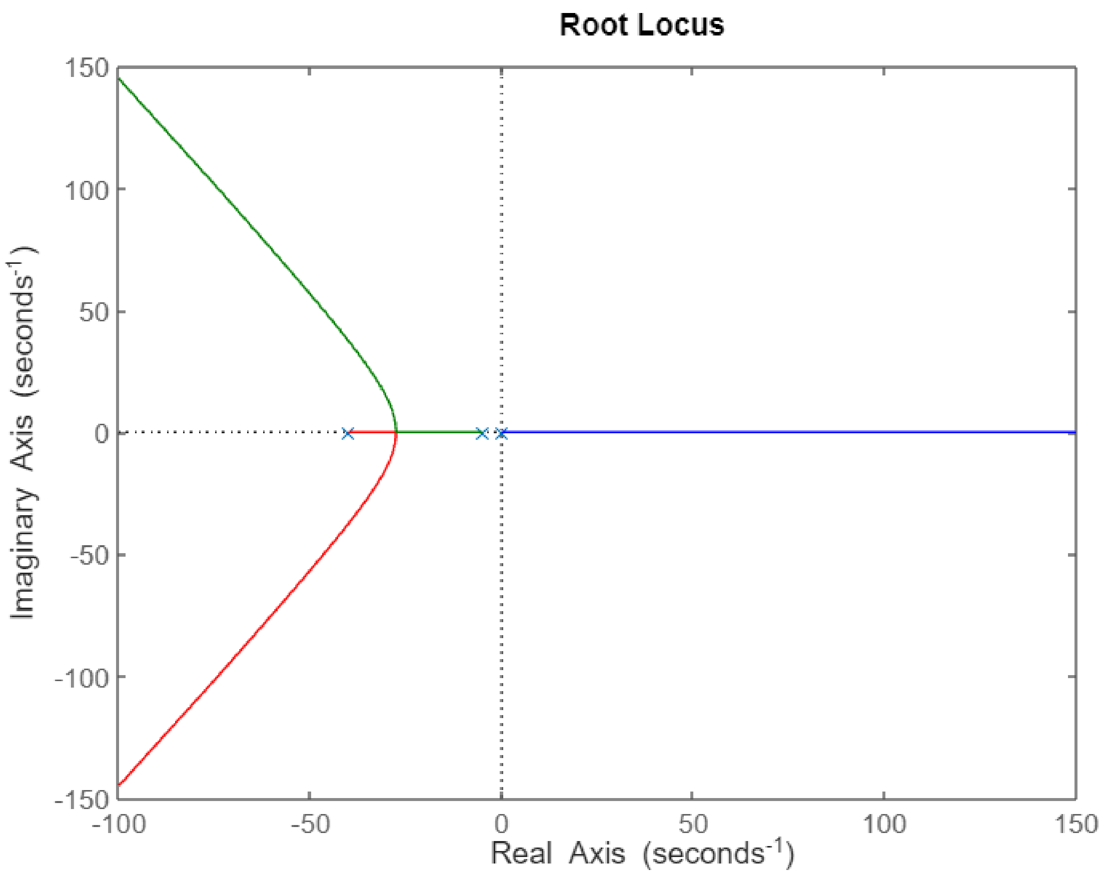


Comprovando todos os cálculos feitos, podemos ver o gráfico de G1 para K > 0 e K < 0 produzido pelo MATLAB:

```
rlocus(G1)
```




```
rlocus(-G1)
```



Atividade 2: Seja o LR de $1 + KG_2(s) = 0$ **mostrado, com** G_2 **da forma** $G_2(s) = \dfrac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots}$**.**

Responder as perguntas abaixo, obtendo as informações aproximadas da figura:

2.1 Quais são os polos e zeros de $G_2(s)$?

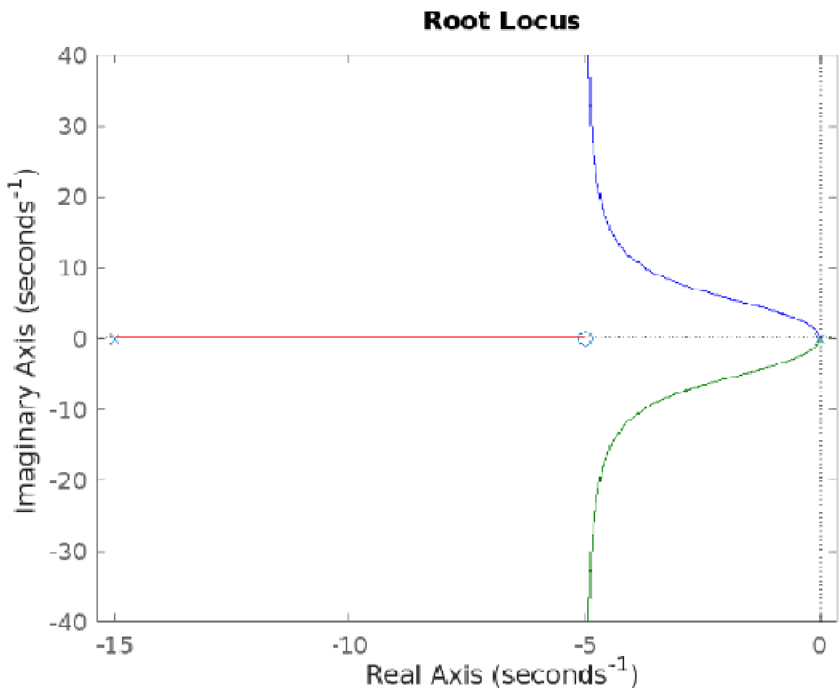
2.2 Quais são as raízes quando $K \longrightarrow 0$ e quando $K \longrightarrow \infty$?

2.3 Para que valores de $K > 0$ e $K < 0$ esse sistema é estável?

2.4 Obtenha os valores de K para os quais o par de polos complexos tem amortecimento $\zeta \geq 0.707$?

2.5 Obtenha os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento atende $t_s \leq \dfrac{8}{I}$.

```
imshow('fig2.png');
```



Respostas:

2.1 Os polos de $G_2(s)$ são -15, 0 e 0, zero é -5.

Portanto, temos que $G_2(s)$ é:

```
s=tf('s');
G2 = (s+5)/((s^2)*(s+15))
```

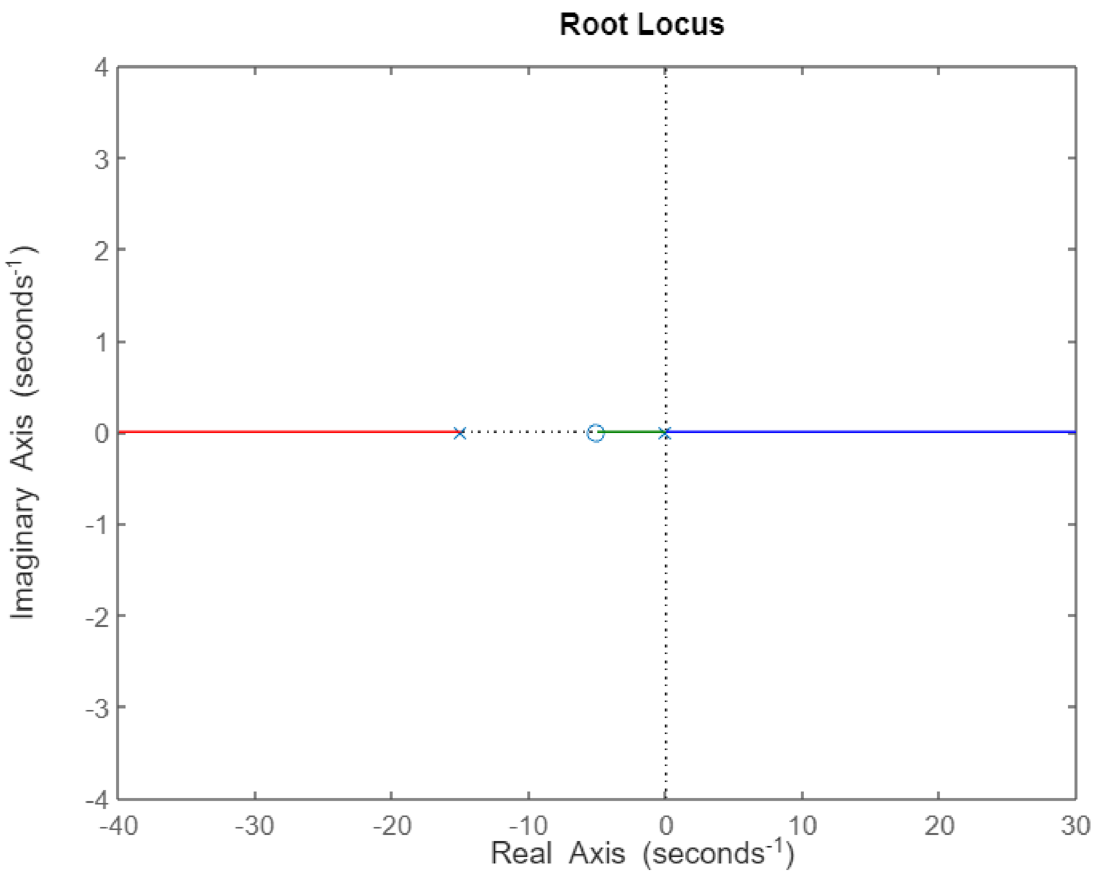
```
G2 =

      s + 5
  ------------
  s^3 + 15 s^2

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

2.2 As raízes quando $K \longrightarrow 0$ são os polos de G2(s), isto é, são -15, 0 e 0. Quando $K \longrightarrow \infty$ as raízes são os zeros de G2(s), isto é, -5, como pode ser observado no gráfico também.

2.3 O sistema é estável quando parte real do número é negativa. Análisando o gráfico, para qualquer valor de $K > 0$ o sistema será estável.

Análisando o gráfico para $K < 0$:

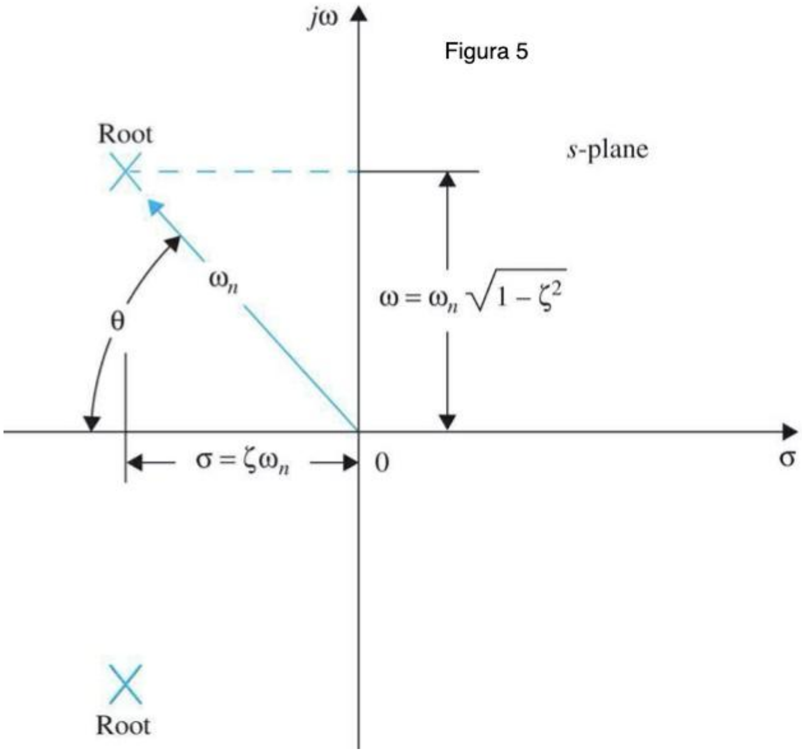
```
rlocus(-G2)
```



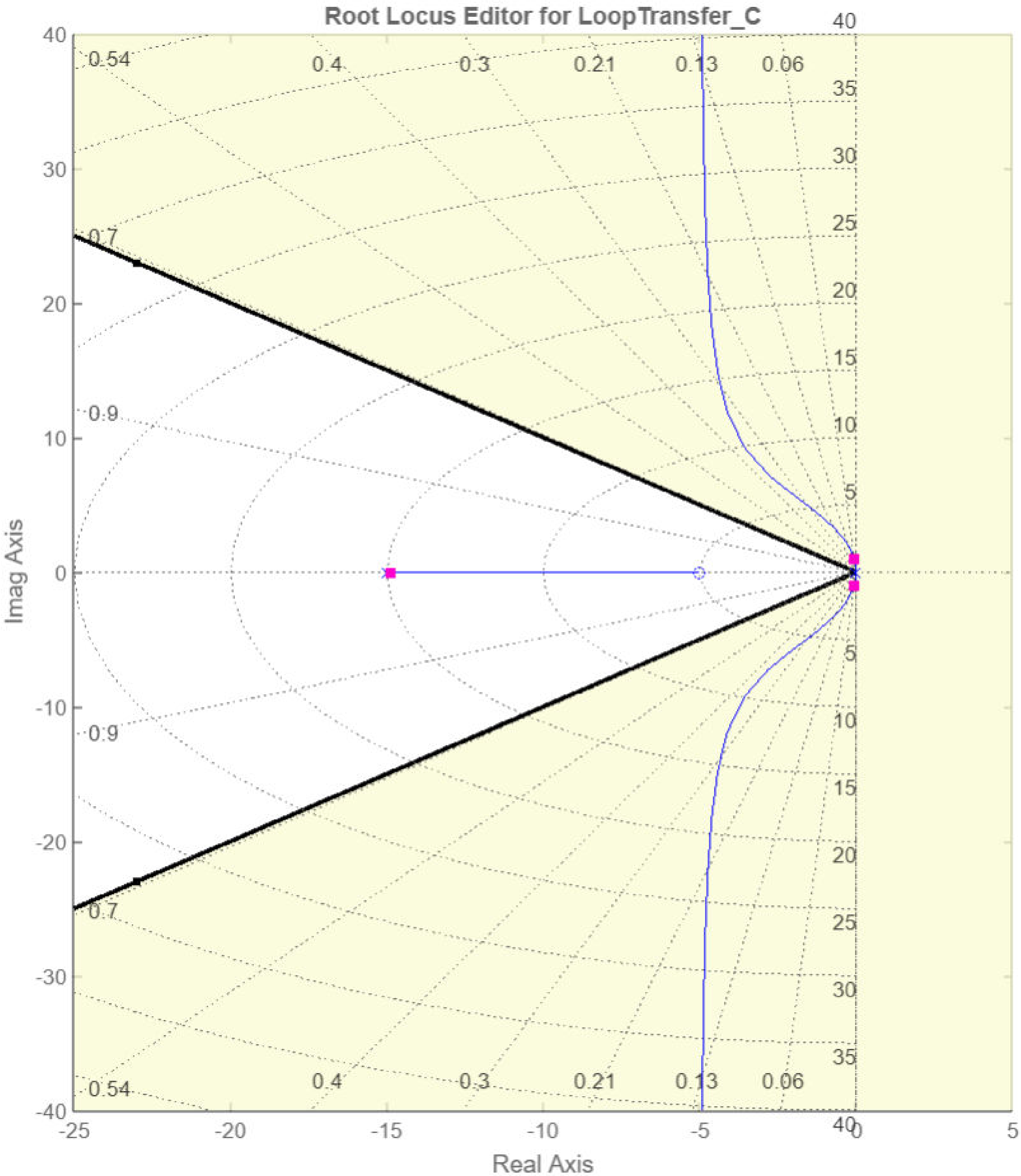
Para $K < 0$, existe uma assíntota que se estende até o infinito no semiplano direito. Isso implica que a parte real do número nunca pode ser negativa. Portanto, para qualquer valor de $K < 0$ o sistema será instável.

2.4 Verificando os valores de K para os quais o par de polos complexos tem amortecimento $\zeta \geq 0.707$:

```
rltool(G2)
```



Considerando que $\zeta = \cos\theta$, o ângulo de 45° corresponde a um cosseno de 0.707. Por isso, traçamos linhas que intersectam o gráfico na origem com ângulos de $\pm 45^\circ$. Como podemos observar, não há raízes complexas que se encontrem dentro da região branca restrita do gráfico com um amortecimento de 0.707; apenas as raízes só com parte real estão presentes. Portanto, não existe nenhum valor para K no qual o par de polos complexos tenha um amortecimento maior ou igual a 0.707.



Analisando o gráfico para $K < 0$, também observamos que esse valor nunca será alcançado, pois sempre teremos uma assíntota indo para o infinito positivo e uma raiz no semiplano direito.

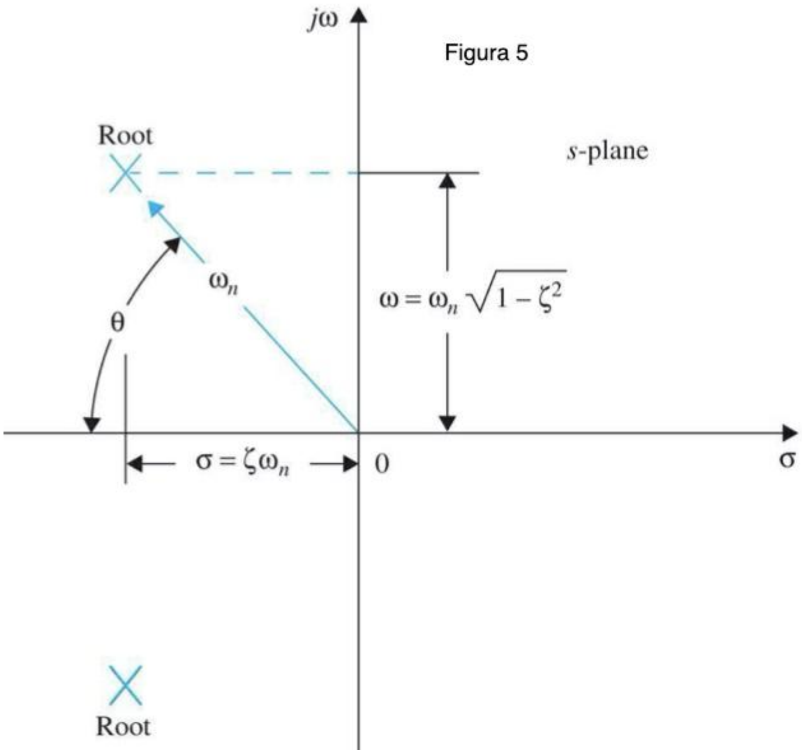
2.5 Obtendo os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento atende $t_s \leq \dfrac{8}{I}$:

```
ts = 8/I
```

```
ts = 0.5714
```

Considerando $\mathrm{ts} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$, temos: $\zeta\omega_n = \frac{4}{\mathrm{ts}}$

Sabendo:



A parte real, que representa a distância do ponto em relação à origem para o lado esquerdo, semiplano esquerdo, é igual a $\zeta\omega_n$.

Desejamos ter uma distância da origem para a esquerda de:

```
dist_origem = 4/ts
```

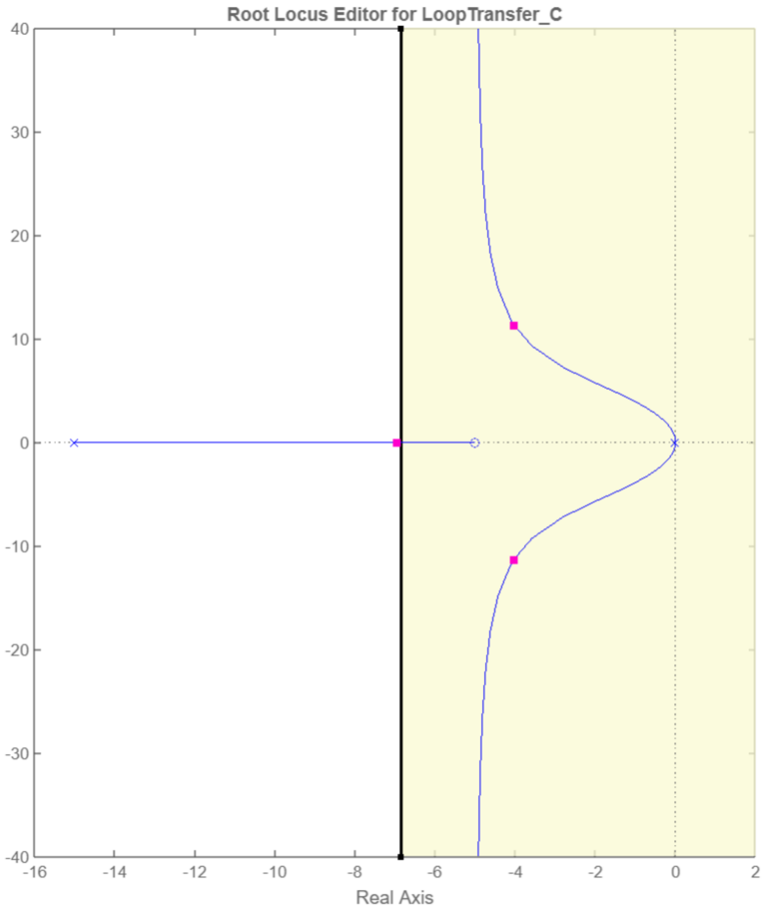
```
dist_origem = 7
```

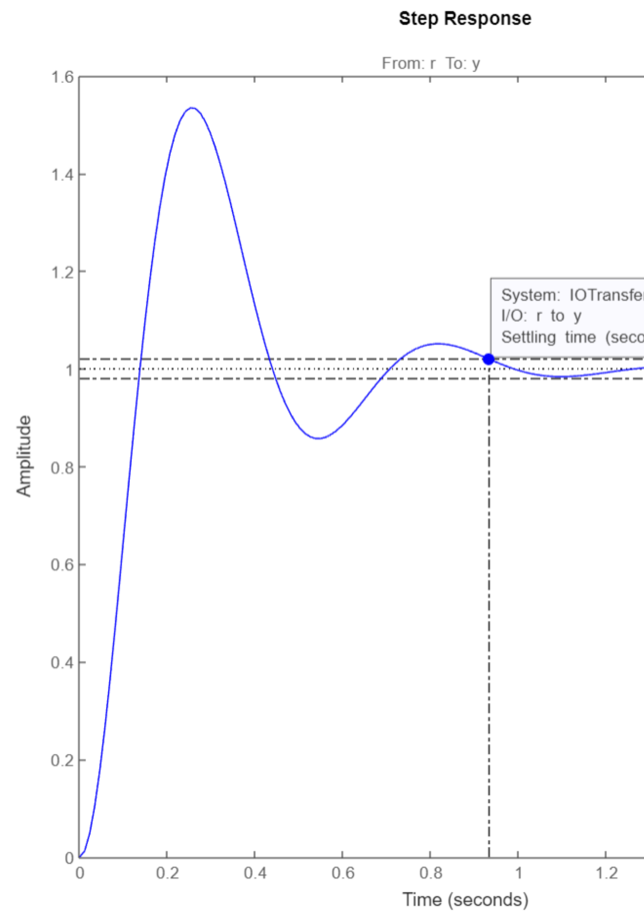
```
rltool(G2)
```

Portanto, os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento de $t_s \leq 0.5714$ é atendido serão os pontos *s* que têm parte real menor ou igual que -7.

No entanto, como podemos observar na figura, as assíntotas estão indo em direção a -5. Isso significa que os polos complexos nunca terão a parte real com valor menor ou igual a -7. Eles estarão limitados a ter como valor mínimo da parte real -5. Apenas o polo real poderia ter um valor menor ou igual a -7. Portanto, não existe nenhum valor para K para que o tempo de estabelecimento atende $t_s \leq 0.5714$

O gráfico abaixo confirma essa análise:





Analisando o gráfico para $K < 0$, também observamos que esse valor nunca será alcançado, pois sempre teremos uma assíntota indo para o infinito positivo e uma raiz no semiplano direito.

Atividade 3: Seja a FT de primeira ordem com tempo morto $G_3(s)$. Discretize esta FT obtendo $G_3(z)$ com tempo de amostragem igual a 1/5 do tempo morto, faça o LR discreto e responda as perguntas abaixo:

3.1 Identifique os polos e zeros de $G_3(z)$.

3.2 Obtenha todos os valores de $K \in [-\infty, \infty]$ para os quais este sistema é estável.

3.3 Para que valores de K tem-se $UP \leq 10\%$?

3.4 Verifique se existem valores de K para os quais $t_s \leq 10I$ s.

```
G3
```

```
G3 =

                    8
  exp(-10*s) * --------
               40 s + 1
```

```
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

Discretize esta $G_3(s)$ para obter $G_3(z)$:

```
tempo_morto = 10
```

```
tempo_morto = 10
```

```
tempo_amostragem = (1/5)*tempo_morto
```

```
tempo_amostragem = 2
```

```
s = tf('s');
G3_sem_tempo_morto = 8/((40*s)+1)
```

```
G3_sem_tempo_morto =

     8
  --------
  40 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
G3_z_sem_tempo_morto = c2d(G3_sem_tempo_morto, tempo_amostragem)
```

```
G3_z_sem_tempo_morto =

    0.3902
  ----------
  z - 0.9512

Sample time: 2 seconds
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

Discretizando o atraso:

```
atraso = tempo_morto/tempo_amostragem
```

```
atraso = 5
```

Dado um tempo morto de 10 segundos e um intervalo de amostragem de 2 segundos, podemos observar que os 10 segundos de tempo morto equivalem a 5 intervalos de amostragem.

Portanto, precisamos multiplicar nossa função de transferência $G_3(z)$ que não considera o tempo morto por z^{-5}.

```
z = tf('z', tempo_amostragem);
G3z = G3_z_sem_tempo_morto*z^(-atraso)
```

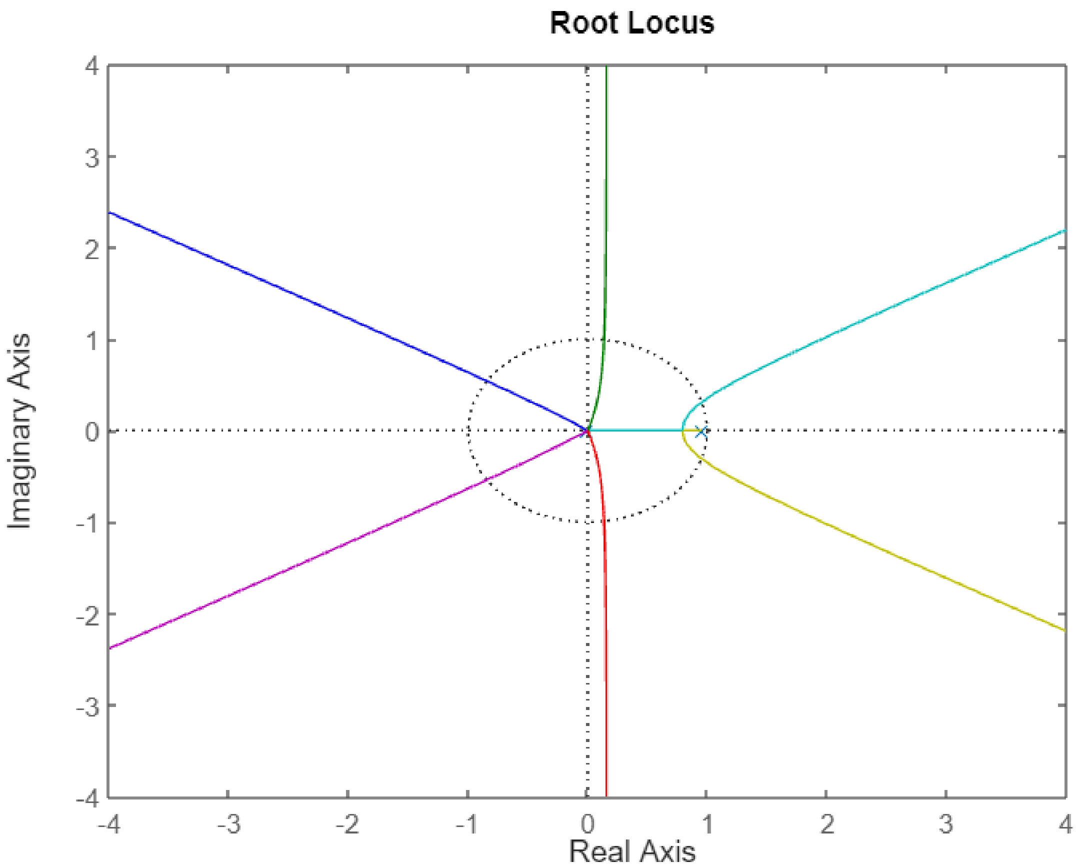
```
G3z =

       0.3902
  ----------------
  z^6 - 0.9512 z^5
```

```
Sample time: 2 seconds
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

3.1 Identificando os polos e zeros de $G_3(z)$:

Conforme pode ser observado na função acima e no gráfico abaixo, *G*3(*z*) não possui zeros e possui 3 polos em zero, além de outro polo em +0.9512.

```
rlocus(G3z)
```



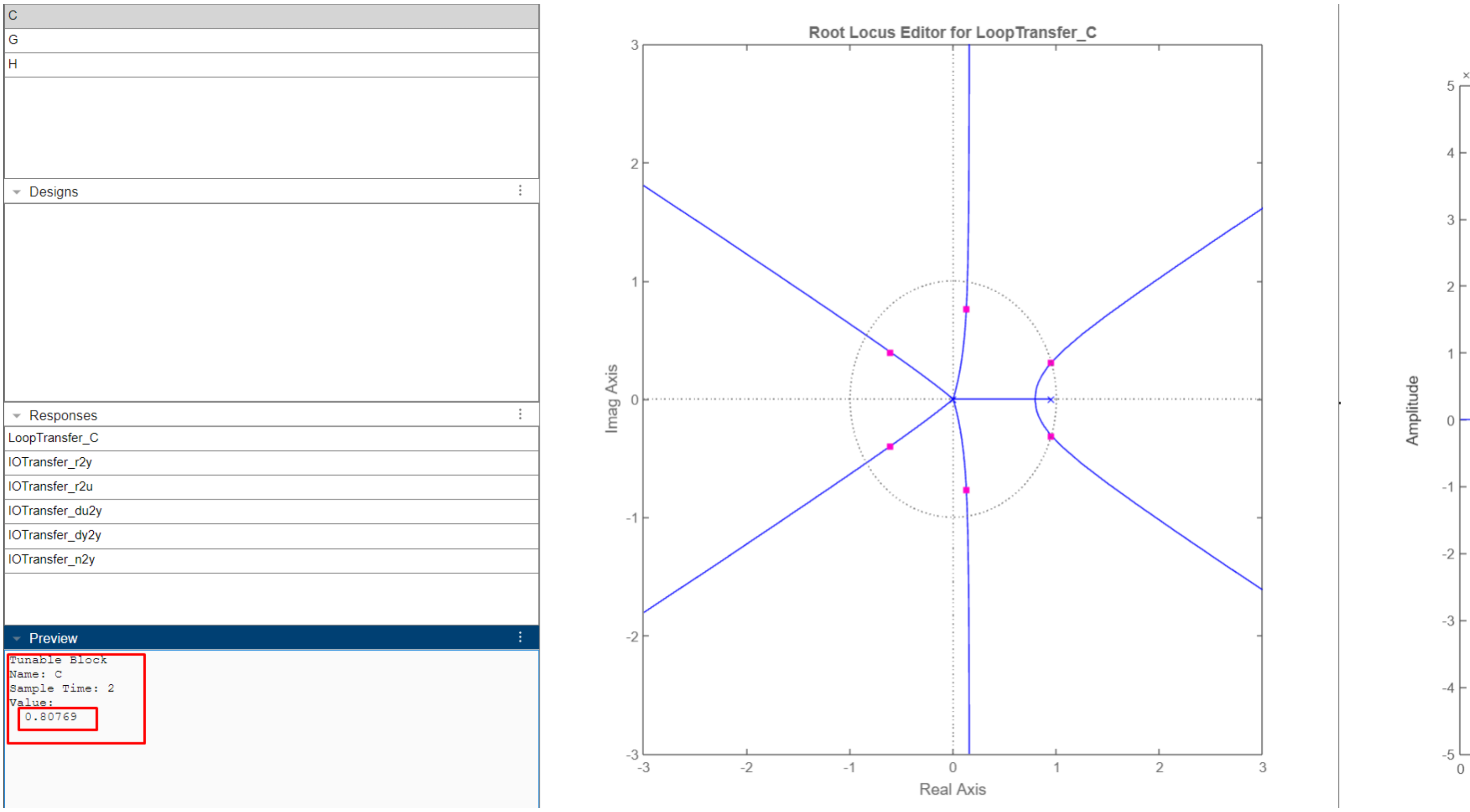
3.2 Obtendo todos os valores de $K \in [-\infty, \infty]$ para os quais este sistema é estável:

Para K > 0, temos:

Um sistema discreto é considerado marginalmente estável se ele possui pelo menos um polo na circunferência do círculo unitário (ou seja, tem um polo com módulo igual a 1). Neste caso, as soluções podem oscilar.

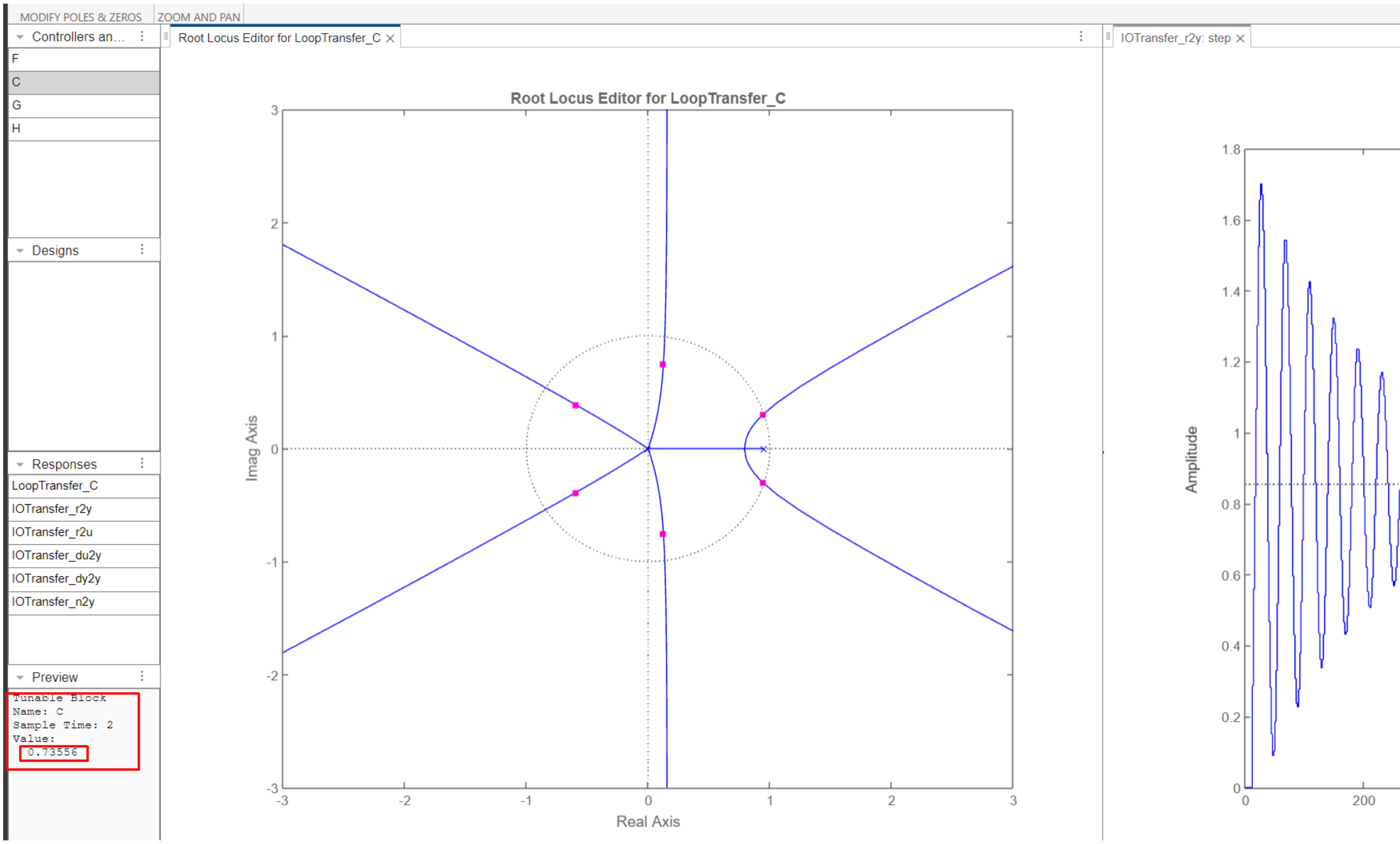
Portanto, vamos utilizar a função `rltool` na função de transferência discreta e posicionar o primeiro polo sobre o círculo unitário. Isso fará com que a resposta, que antes era estável, se torne instável. Em seguida, determinaremos o primeiro valor de *K* que a função pode ter para se tornar instável:

```
%rltool(G3z)
```



Como pode ser observado acima, quando os polos do lado direito estão sobre o círculo unitário, *K* assume um valor de 0.8 e a resposta se torna instável.

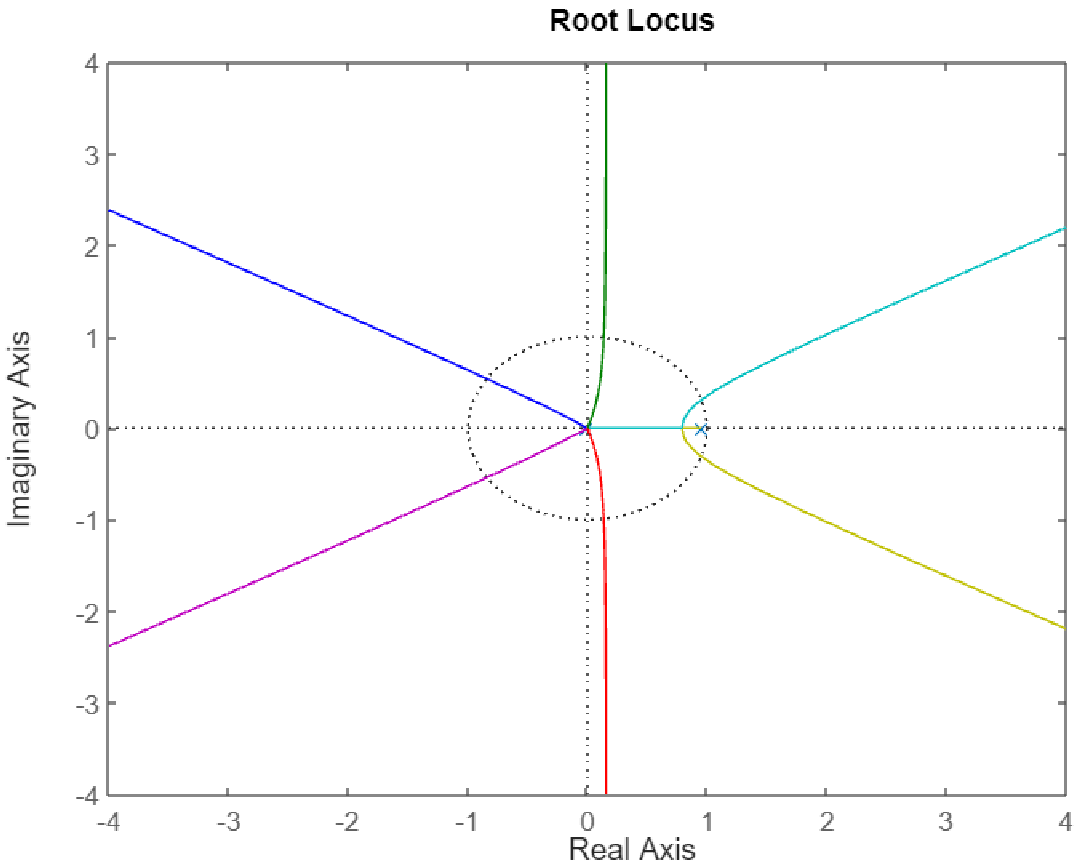
Portanto, *K* precisa ser menor que 0.8 para garantir a estabilidade. Um exemplo está demonstrado abaixo com *K*=0.73, o qual é próximo a 0.8. Com este valor de *K*, o sistema se estabiliza.



Dessa forma, é de fato essencial que *K* seja inferior a 0.8 para manter a estabilidade do sistema.

Outro método para encontrar o valor de *K* seria observar o gráfico gerado pela função `rlocus` aplicada a G3(z) e verificar os primeiros pontos que tocam o círculo unitário. Isso resultará em uma resposta instável e em no menor K que torna a resposta instável.

```
rlocus(G3z)
```



Podemos observar que os pontos à direita, que são aqueles que primeiro alcançam a circunferência unitária, os mais lentos, assumem valores de $0.95 \pm j0.31$ quando estão sobre ela.

Como $1 + KG_3(z) = 0$, logo $K = -1/G_3(z)$

```
K_func = -1/G3z
```

```
K_func =
 
  -z^6 + 0.9512 z^5
  -----------------
       0.3902
 
Sample time: 2 seconds
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

```
z_inst = 0.95 + 0.31i;
K_calc = (-(z_inst^6) + (0.9512*(z_inst^5)))/(0.3902)
```

```
K_calc = 0.7917 + 0.0081i
```

```
K = evalfr(K_func, z_inst)
```

```
K = 0.7917 + 0.0081i
```

Portanto, quando os polos do lado direito estão sobre o círculo unitário, calculamos que *K* assume um valor de 0.79 que é muito próximo de 0.8, valor encontrado no método anterior, e a resposta se torna instável.

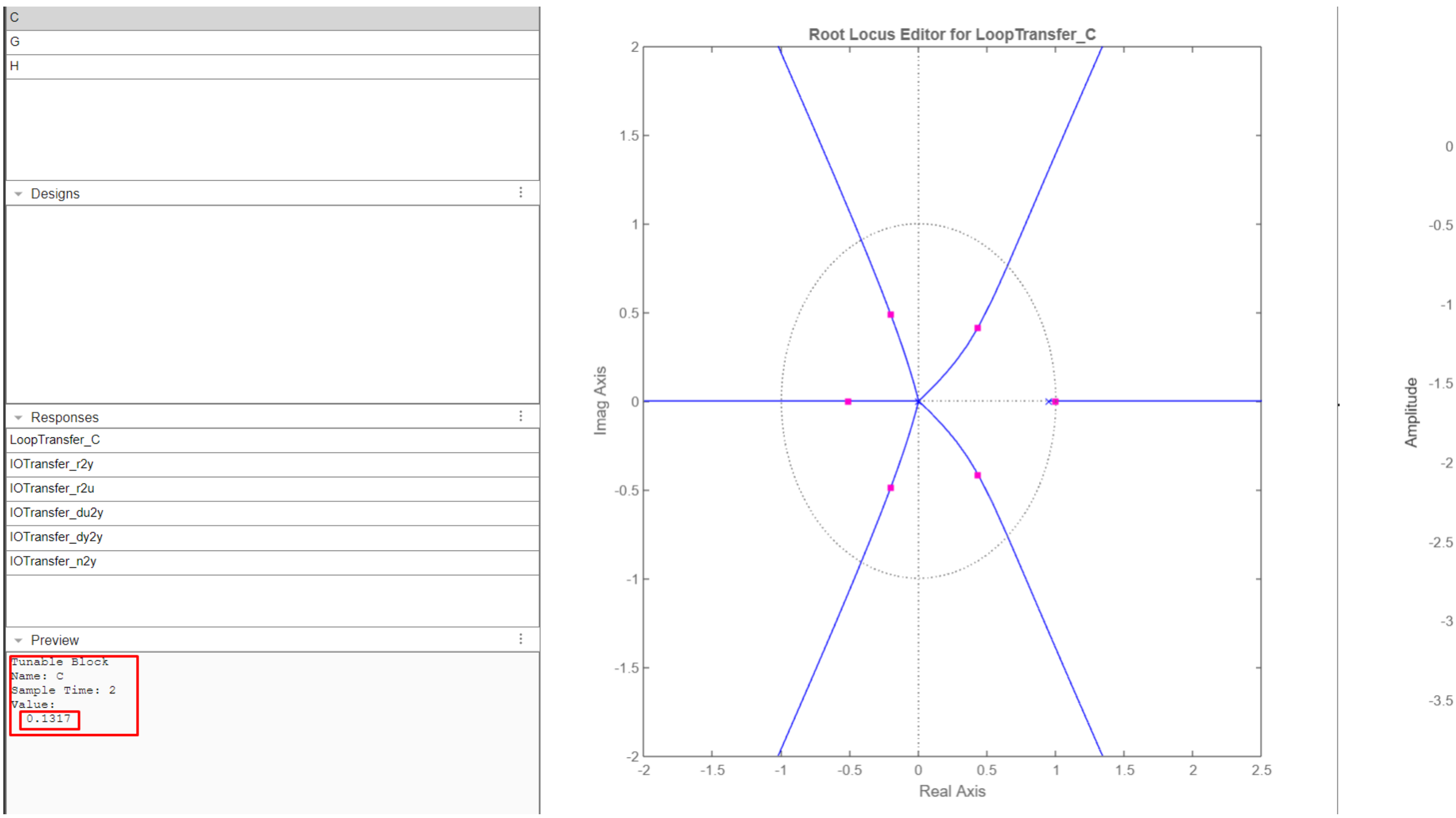
Confirmando que *K* precisa ser menor que 0.79 para garantir a estabilidade.

Para K < 0, temos:

Como já explicado, um sistema discreto é considerado marginalmente estável se ele possui pelo menos um polo na circunferência do círculo unitário (ou seja, tem um polo com módulo igual a 1). Neste caso, as soluções podem oscilar.

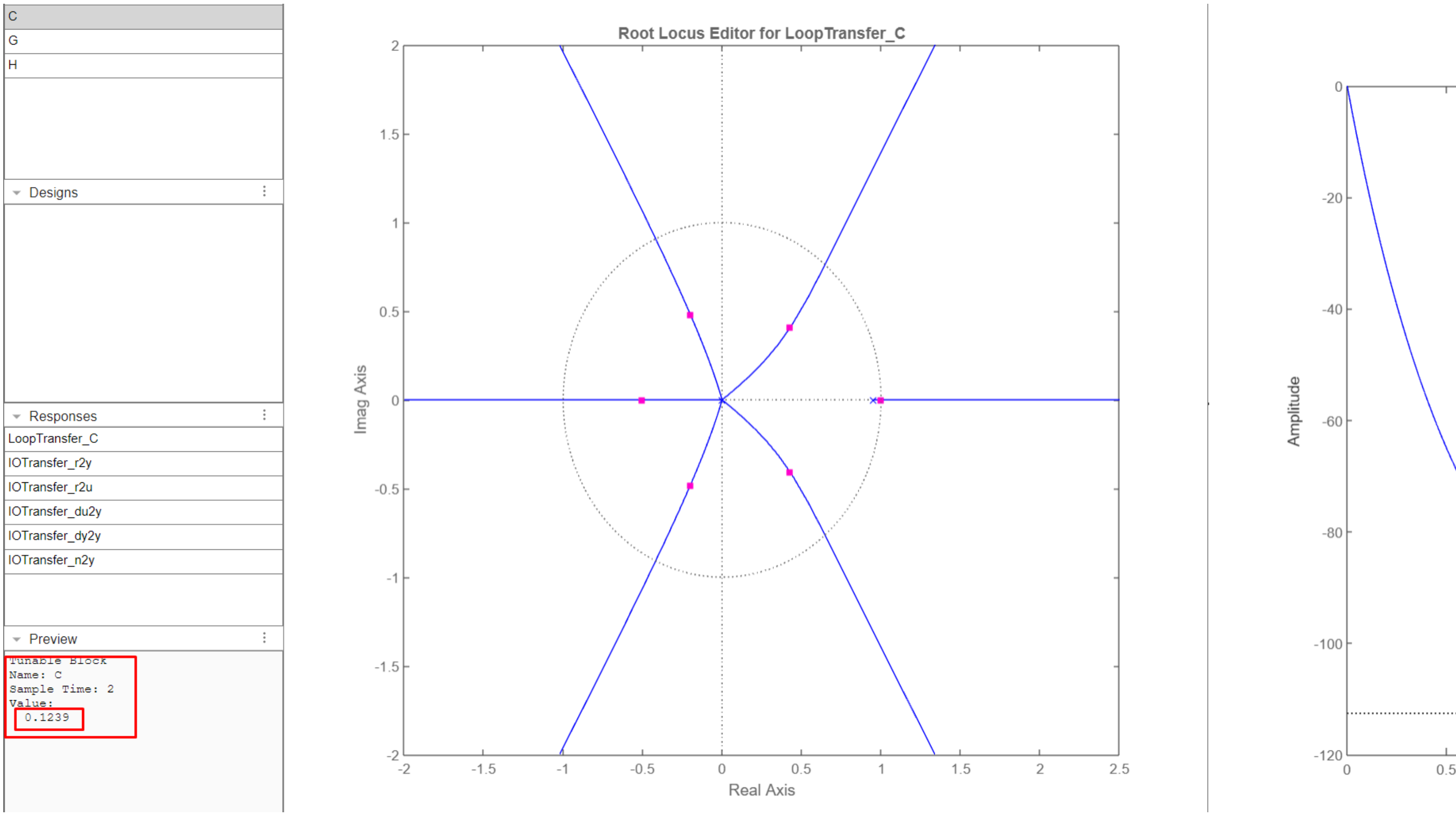
Portanto, vamos utilizar a função `rltool` na função de transferência discreta e posicionar o primeiro polo sobre o círculo unitário. Isso fará com que a resposta, que antes era estável, se torne instável. Em seguida, determinaremos o primeiro valor de *K* que a função pode ter para se tornar instável:

```
%rltool(-G3z)
```



Como pode ser observado acima, quando o polo do lado direito está sobre o círculo unitário, *K* assume um valor de -0.13 e a resposta se torna instável.

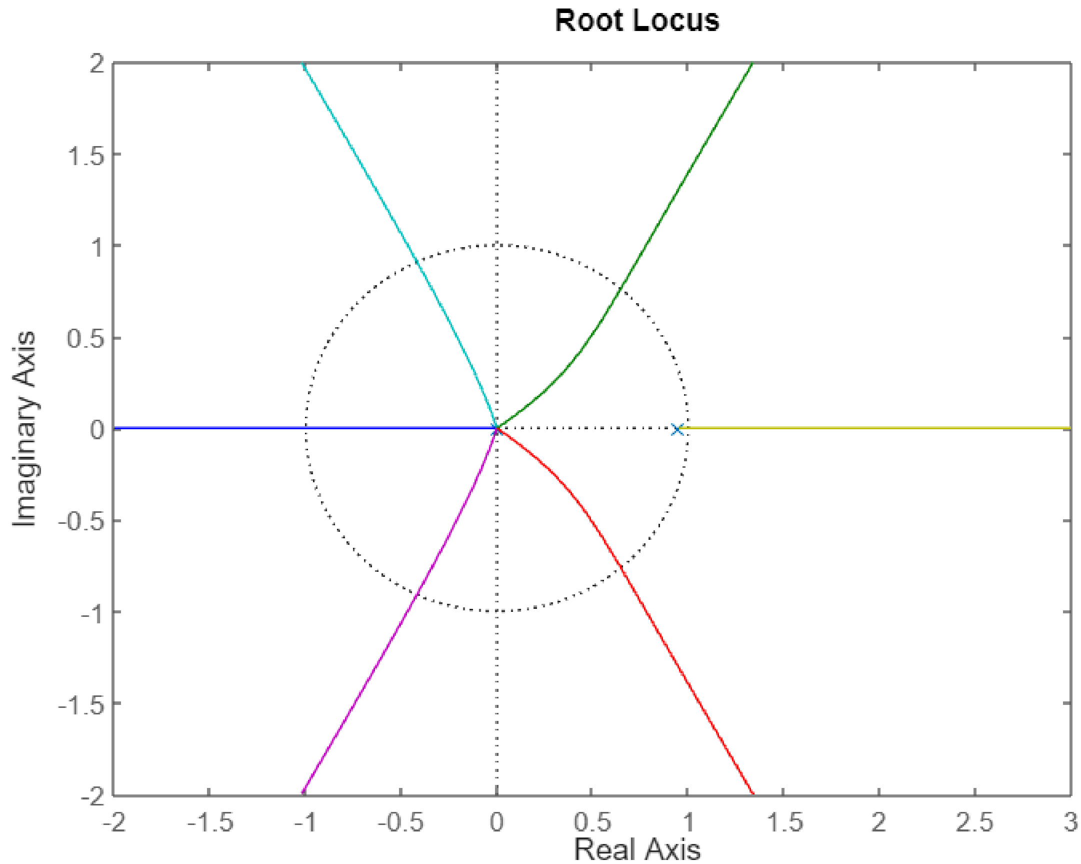
Portanto, *K* precisa ser maior que -0.13 para garantir a estabilidade. Um exemplo está demonstrado abaixo com *K*= -0.1239, o qual é próximo a -0.13. Com este valor de *K*, o sistema se estabiliza.



Dessa forma, é de fato essencial que *K* seja maior que -0.13 para manter a estabilidade do sistema.

Outro método para encontrar o valor de *K* seria observar o gráfico gerado pela função `rlocus` aplicada a G3(z) e verificar os primeiros pontos que tocam o círculo unitário. Isso resultará em uma resposta instável e em no menor K que torna a resposta instável.

```
rlocus(-G3z)
```



Podemos observar que o ponto à direita, que é aqueles que primeiro alcançam a circunferência unitária, o mais lento, assumem valores de 1 quando está sobre ela.

Como $1 - KG_3(z) = 0$, logo $K = 1/G_3(z)$

```
K_func = 1/G3z
```

```
K_func =

  z^6 - 0.9512 z^5
  ----------------
       0.3902

Sample time: 2 seconds
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

```
z_inst = 1;
K_calc = ((z_inst^6) - (0.9512*(z_inst^5)))/(0.3902)
```

```
K_calc = 0.1251
```

```
K = evalfr(K_func, z_inst)
```

```
K = 0.1250
```

Portanto, quando o polo do lado direito está sobre o círculo unitário, calculamos que *K* assume um valor de -0.1250 que é muito próximo de -0.13, valor encontrado no método anterior, e a resposta se torna instável.

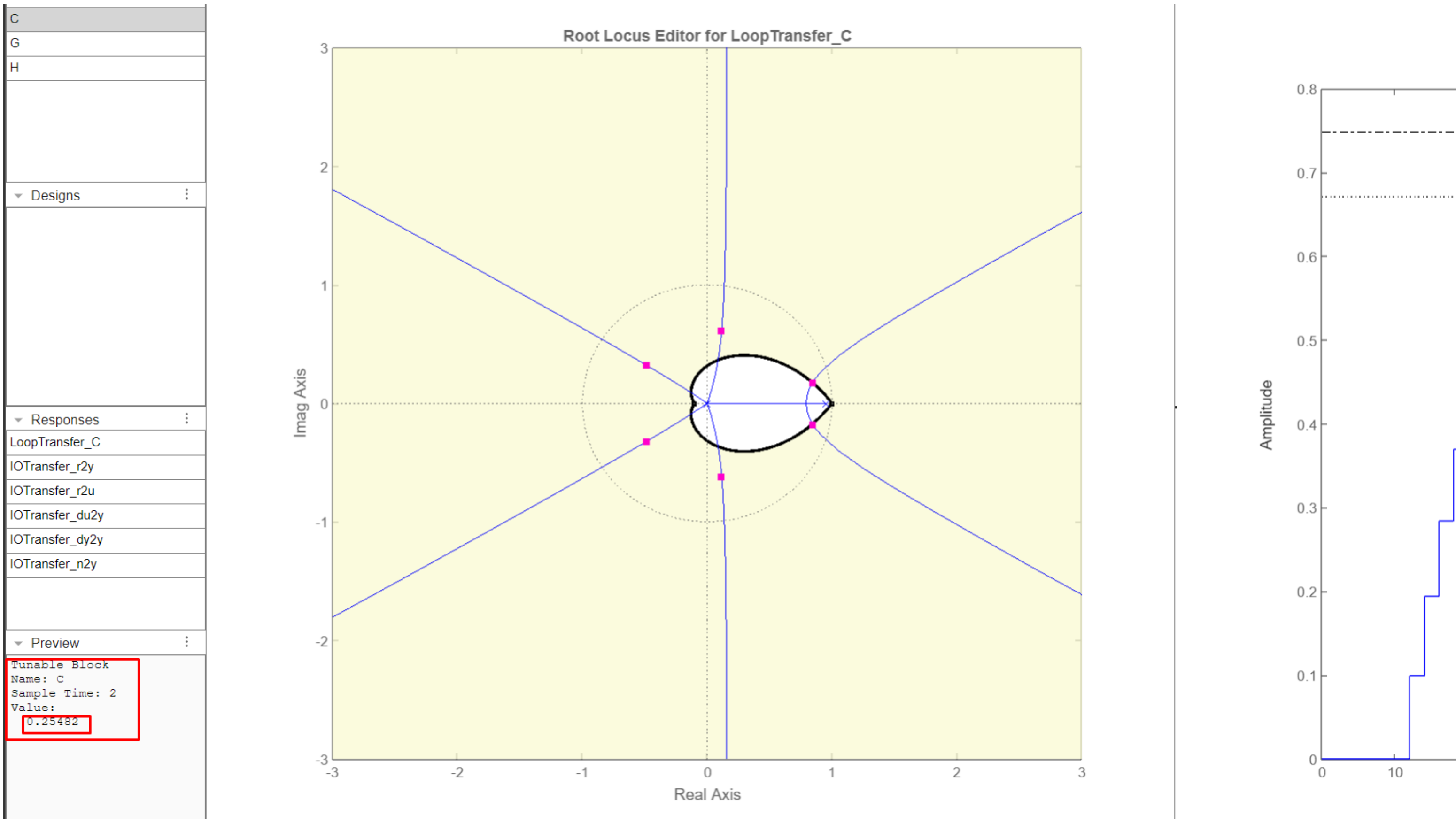
Confirmando que *K* precisa ser maior que -0.1250 para garantir a estabilidade.

3.3 Valores de K em que $UP \leq 10\%$:

Para K > 0, temos:

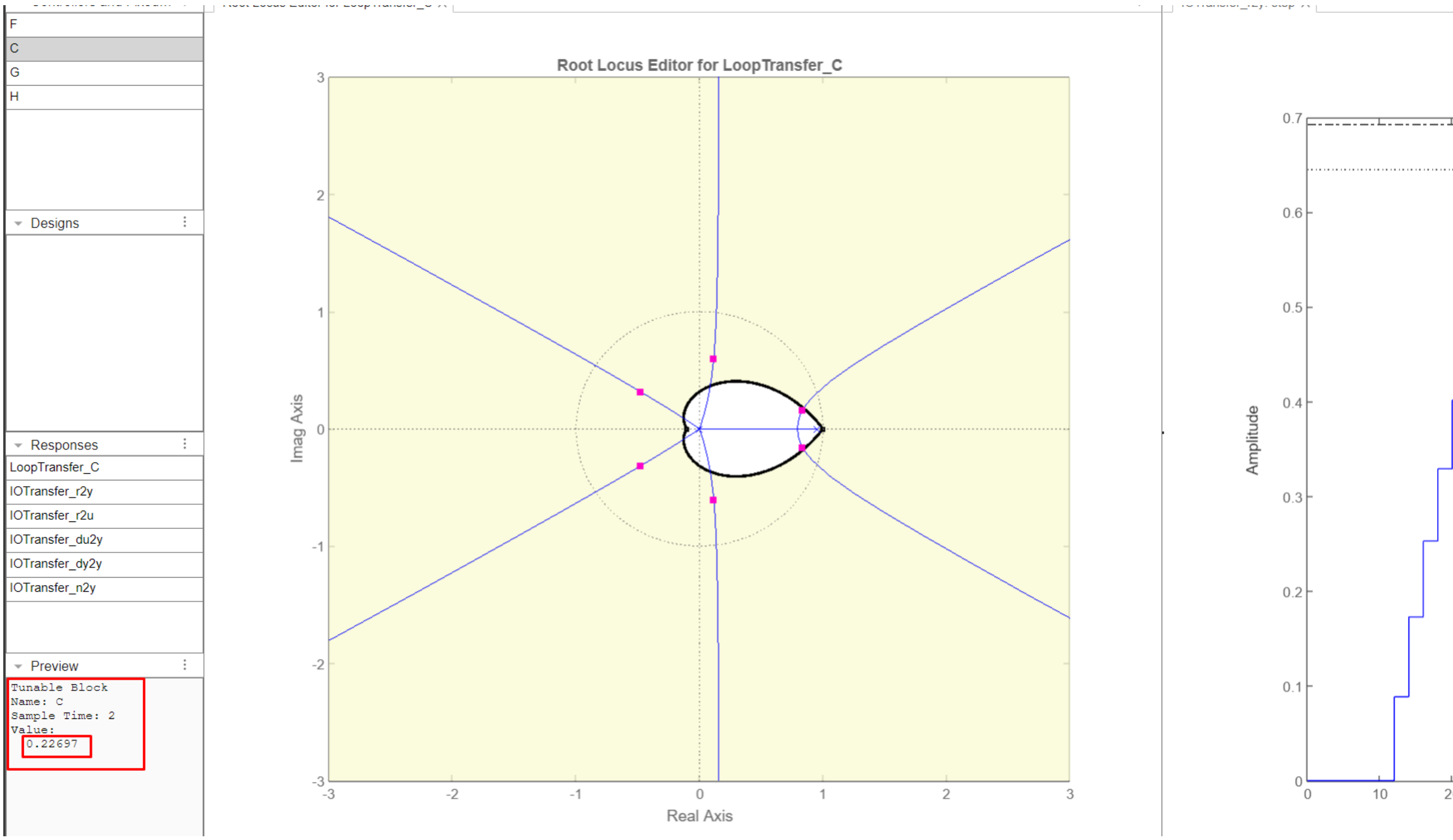
Vamos utilizar a função `rltool` na função de transferência discreta e adicionar como requisito que o UP seja menor ou igual a 10%. Como podemos observar, as últimas raizes que estão na região branca restrita do gráfico têm UP menor ou igual a 10%.

Para encontrar o maior valor de K que apresente esse requisito, vamos posicionar os últimos polos bem próximo da borda. Isso fará com que a resposta, que antes tinha UP menor ou igual a 10%, não tenha mais. Em seguida, determinaremos o primeiro valor de *K* que a função pode ter para ter UP maior do que 10%:



Como pode ser observado acima, quando os polos do lado direito está sobre a área definida, *K* assume um valor de 0.25 e a resposta tem um UP de 11.5% que é maior que 10%.

Portanto, *K* precisa ser menor que 0.25 para ter um UP menor que 10%. Um exemplo está demonstrado abaixo com *K*= 0.22, o qual é próximo a 0.25. Com este valor de *K*, o tem um UP menor que 10%.

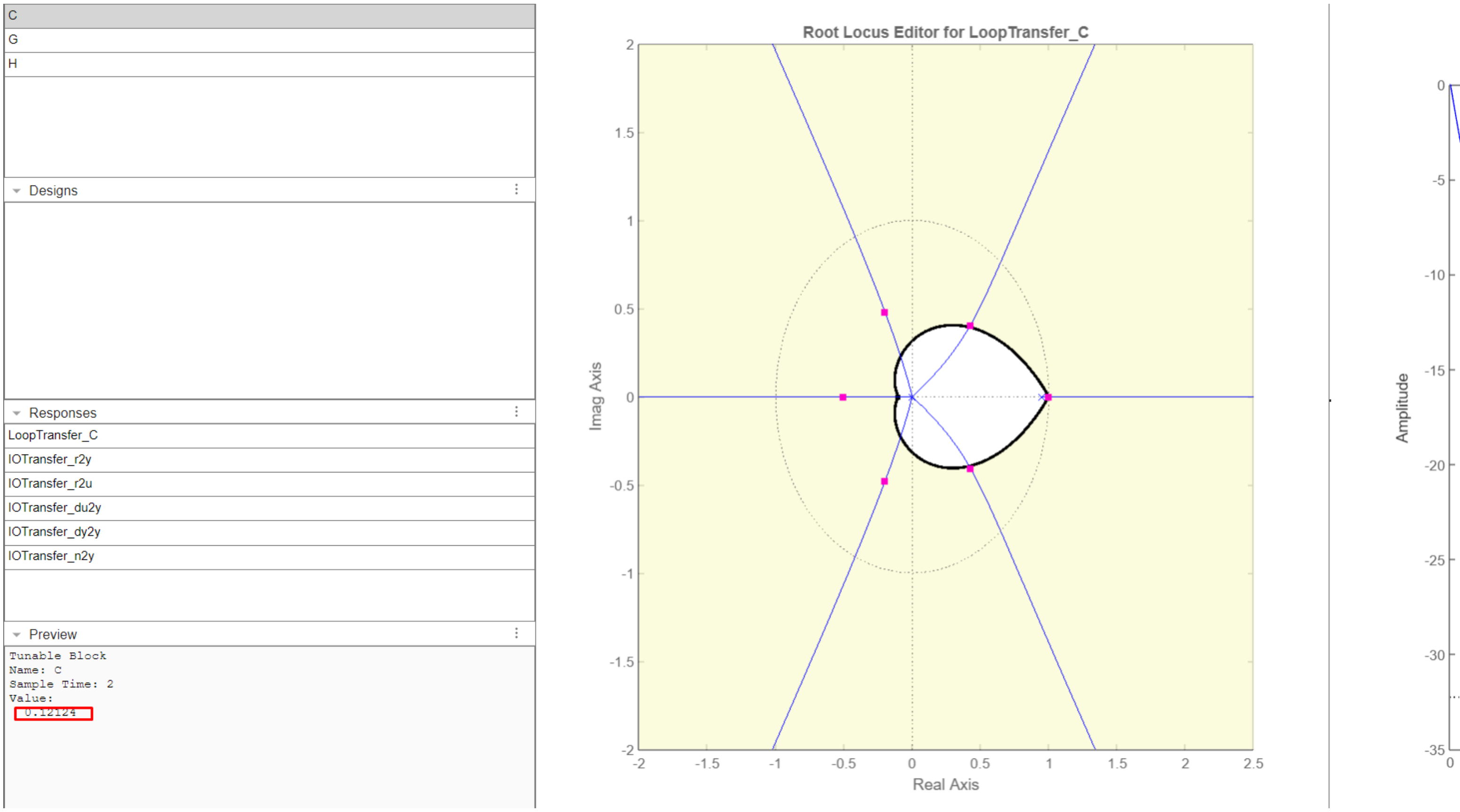


Dessa forma, é de fato essencial que *K* seja menor que 0.25 para manter a resposta com UP menor ou igual a 10%.

Para K < 0, temos:

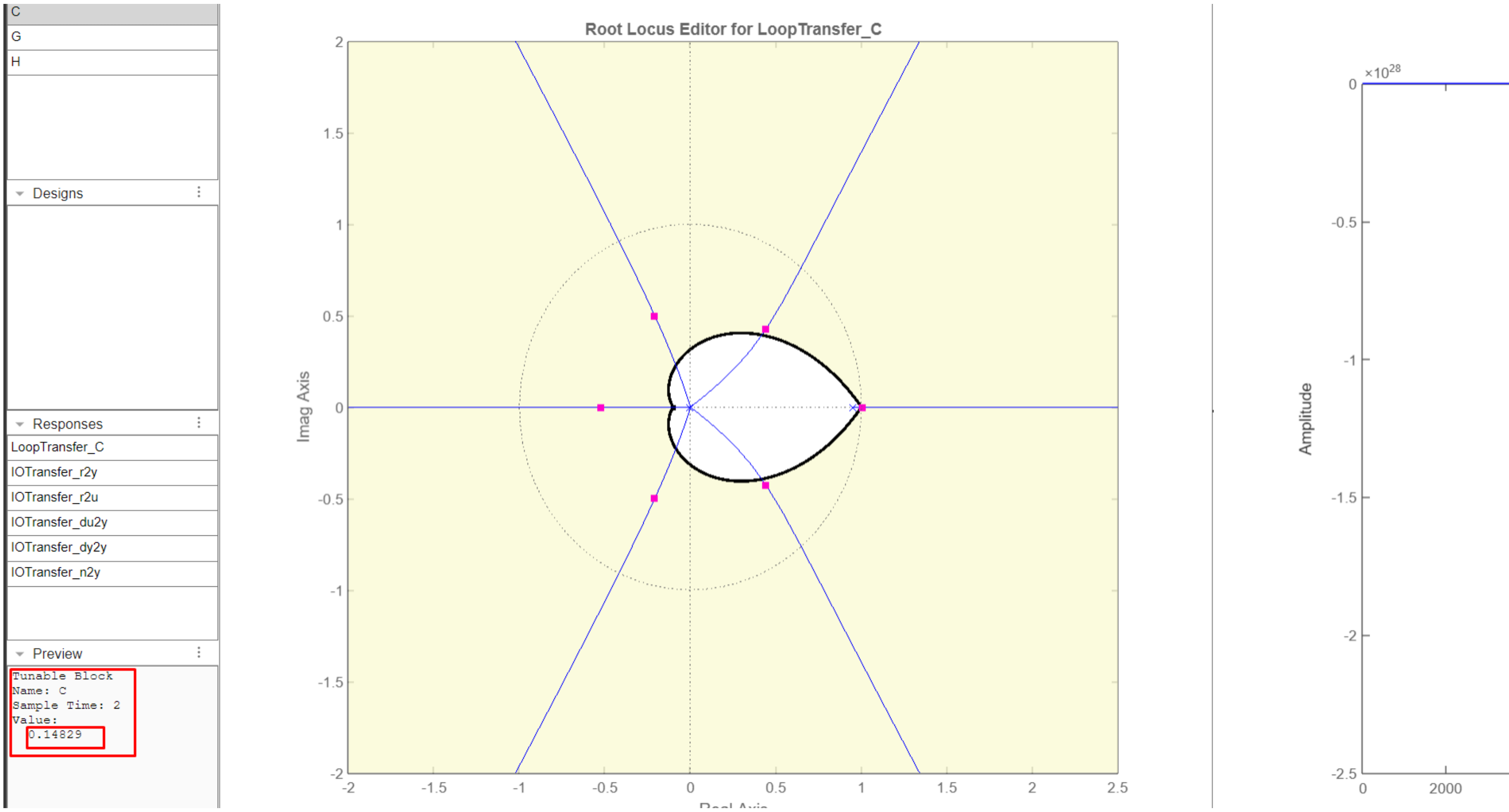
Vamos utilizar a função `rltool` na função de transferência discreta e adicionar como requisito que o UP seja menor ou igual a 10%. Como podemos observar, as últimas raizes que estão na região branca restrita do gráfico têm UP menor ou igual a 10%.

Para encontrar o maior valor de K que apresente esse requisito, vamos posicionar os últimos polos em cima da borda. Isso fará com que a resposta tenha UP menor ou igual a 10%. Em seguida, determinaremos o menor valor de *K* que a função tem UP menor ou igual do que 10%:



Como pode ser observado acima, quando os polos do lado direito está sobre a área definida, *K* assume um valor de -0.12 e a resposta tem um UP de 0% que é menor que 10%.

Portanto, *K* precisa ser maior ou igual que -0.12 para ter um UP menor ou igual que 10%. Um exemplo está demonstrado abaixo com *K*= -0.14, o qual é próximo a -0.12. Com este valor de *K*, o tem um UP maior que 10%.



Dessa forma, é de fato essencial que *K* seja maior ou igual a -0.12 para manter a resposta com UP menor ou igual a 10%.

3.4 Verificando se existe valores de K para os quais $t_s \leq 10I$ s:

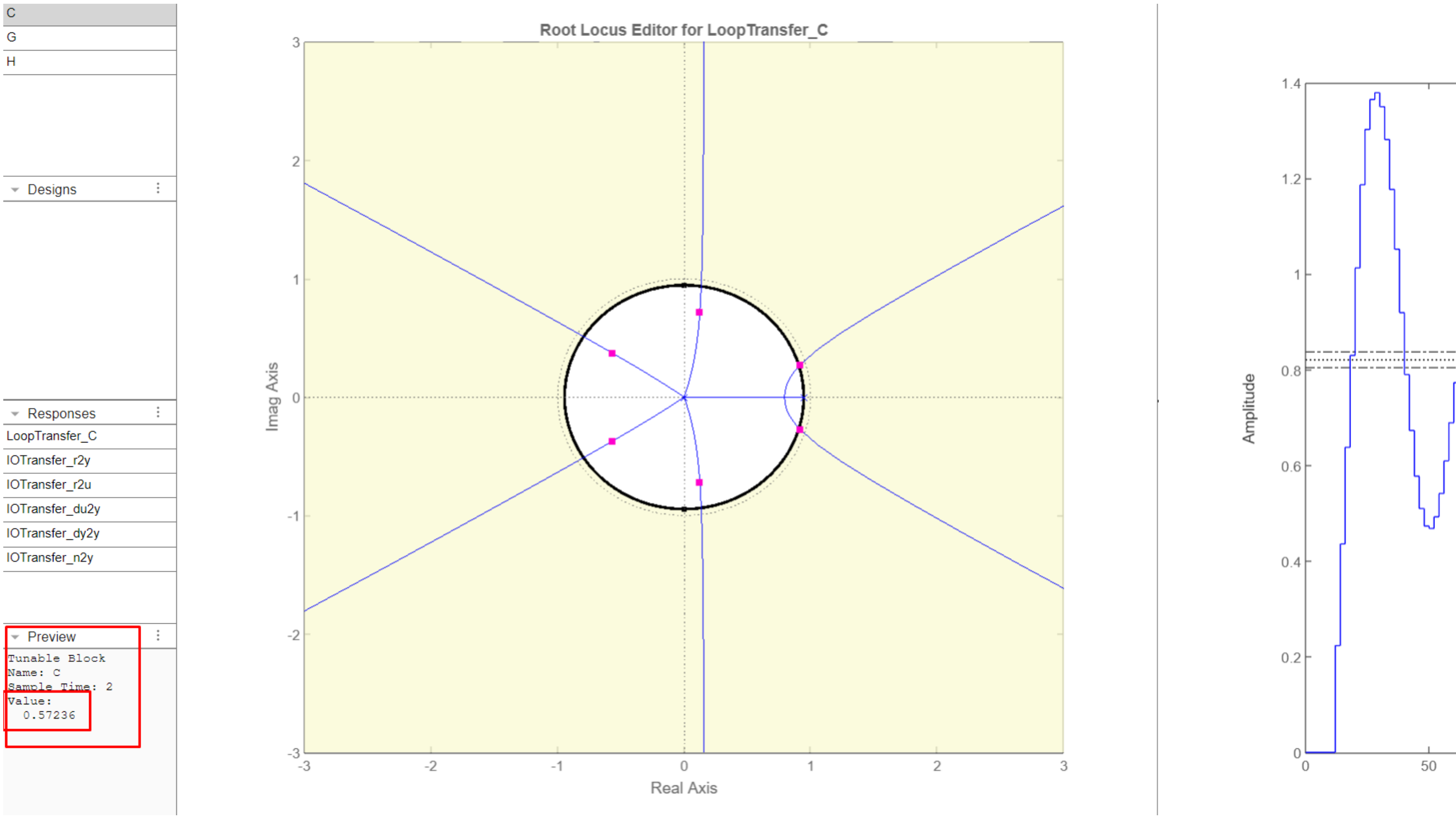
```
ts = 10*I
```

```
ts = 140
```

Para K > 0, temos:

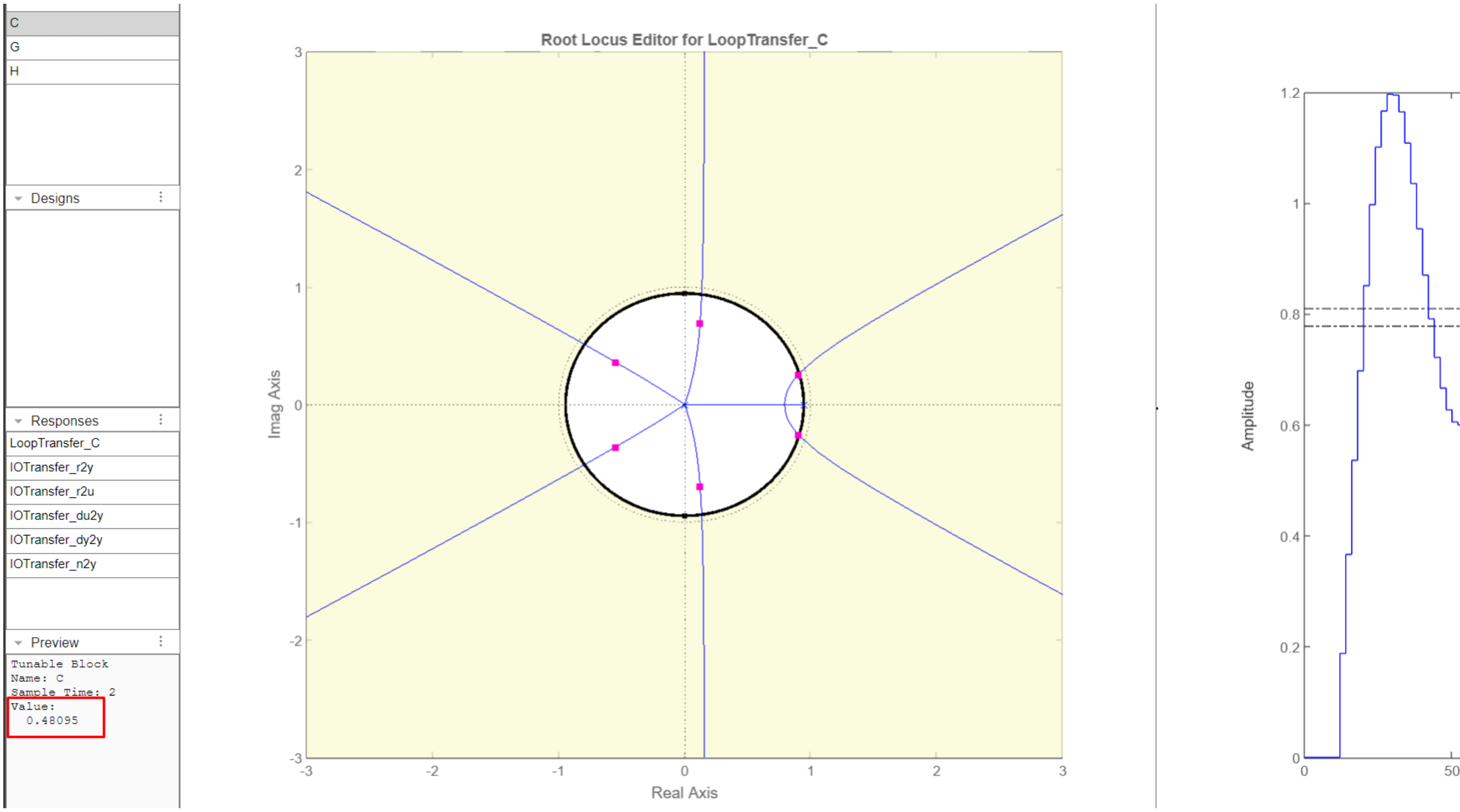
Vamos utilizar a função `rltool` na função de transferência discreta e adicionar como requisito que o ts seja menor ou igual a 140s. Como podemos observar, todas as raizes que estão na região branca restrita do gráfico têm ts menor ou igual a 140 s.

Para encontrar o maior valor de K que apresente esse requisito, vamos posicionar os primeiro polos bem próximo da borda. Isso fará com que a resposta, que antes tinha ts menor ou igual a 140s, não tenha mais. Em seguida, determinaremos o primeiro valor de *K* que a função pode ter para ter ts maior do que 140s:



Como pode ser observado acima, quando os polos do lado direito está sobre a área definida, *K* assume um valor de 0.57 e a resposta tem um ts de 184s que é maior que 140s.

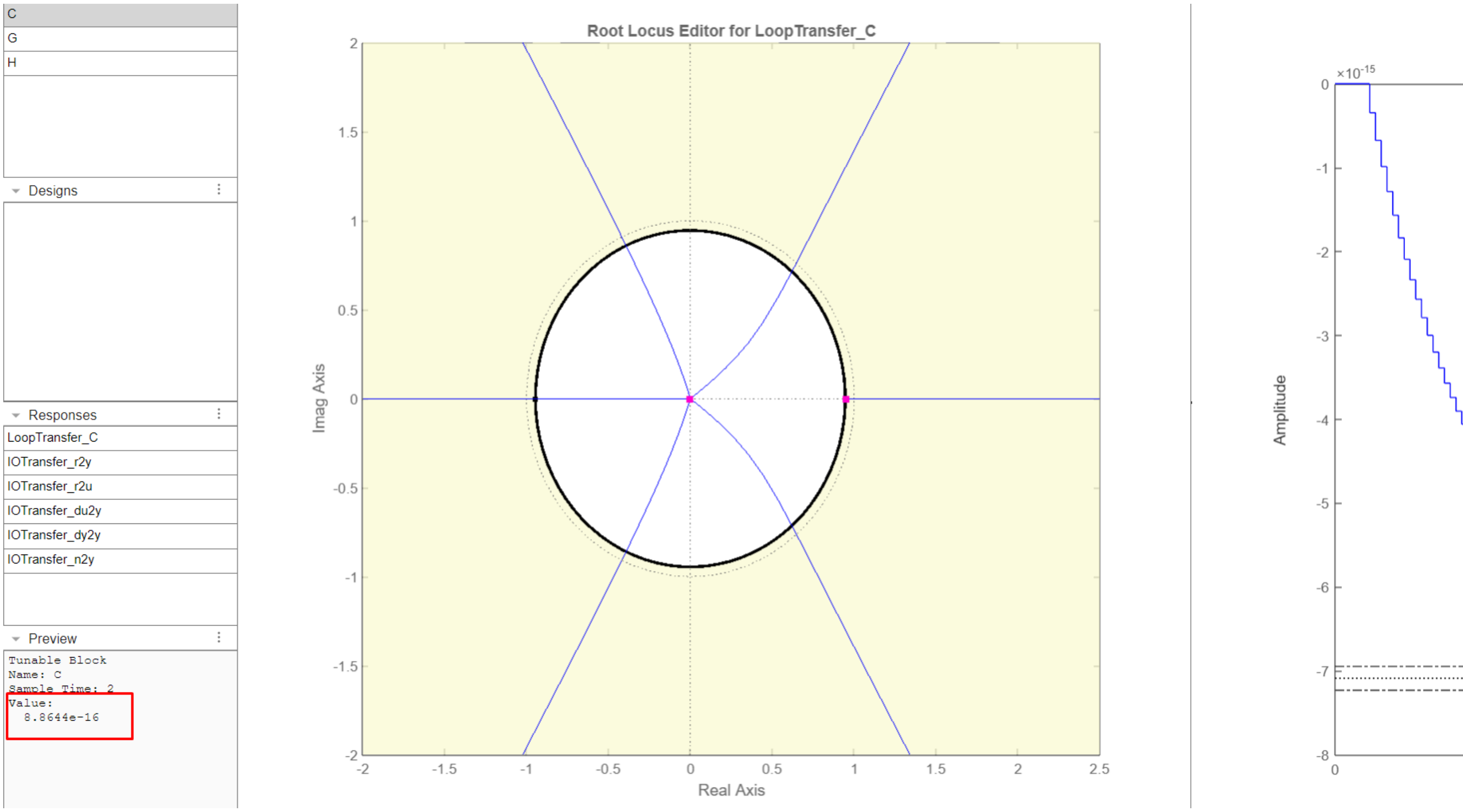
Portanto, *K* precisa ser menor que 0.57 para ter um ts menor que 140s. Um exemplo está demonstrado abaixo com *K*= 0.48, o qual é próximo a 0.57. Com este valor de *K*, o tem um ts menor que 140s.



Dessa forma, é de fato essencial que *K* seja menor que 0.57 para manter a resposta com ts menor ou igual a 140s.

Para K < 0, temos:

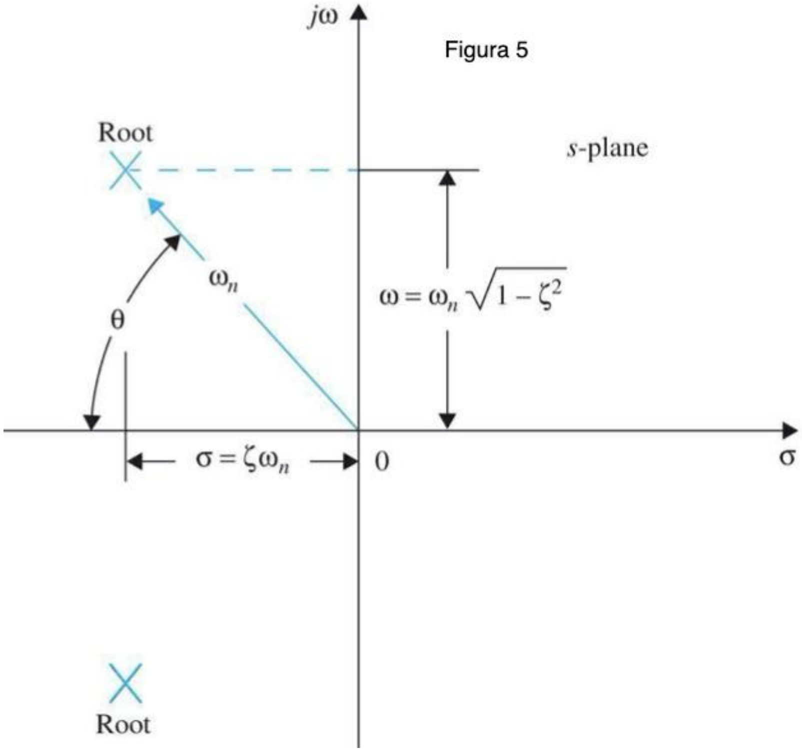
Não existe K que faça o ts ser menor ou igual a 140s. Isso porque o polo do semiplano direito está muito longe da origem. Então, ele é lento e o menor valor de ts que consegue é de 166s.



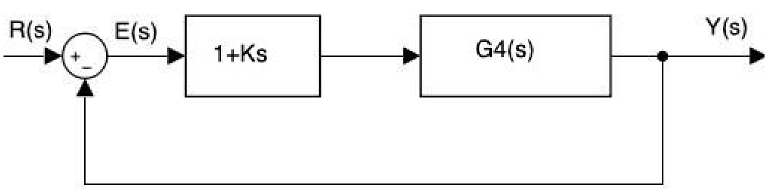
Dessa forma, é de fato essencial que *K* seja maior ou igual a -0.12 para manter a resposta com UP menor ou igual a 10%.

```
rltool(-G3z)
```

Lembrando: $\zeta = \cos\theta$, $\text{ts} = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$, $0 < \zeta < 0.9$.



Atividade 4: Seja o diagrama de blocos mostrado.



6.1 Faça o LR e explique o efeito de K sobre os polos de malha fechada.

6.2 Obtenha os valores de $K > 0$ para os quais o sistema é estável.

6.3 Obtenha um valor de K tal que $UP \leq 10\%$ e o tempo de estabelecimento seja o menor possível. Faça uma simulação ao degrau comprovando.

Respostas:

6.1 Faça o LR e explique o efeito de K sobre os polos de malha fechada:

Temos: $1 + KG_4(s) = 0$

Ao fechar a malha, encontramos Ks e não apenas o K.

Por isso, é preciso multiplicar s por G4(s) para obter a equação da definição:

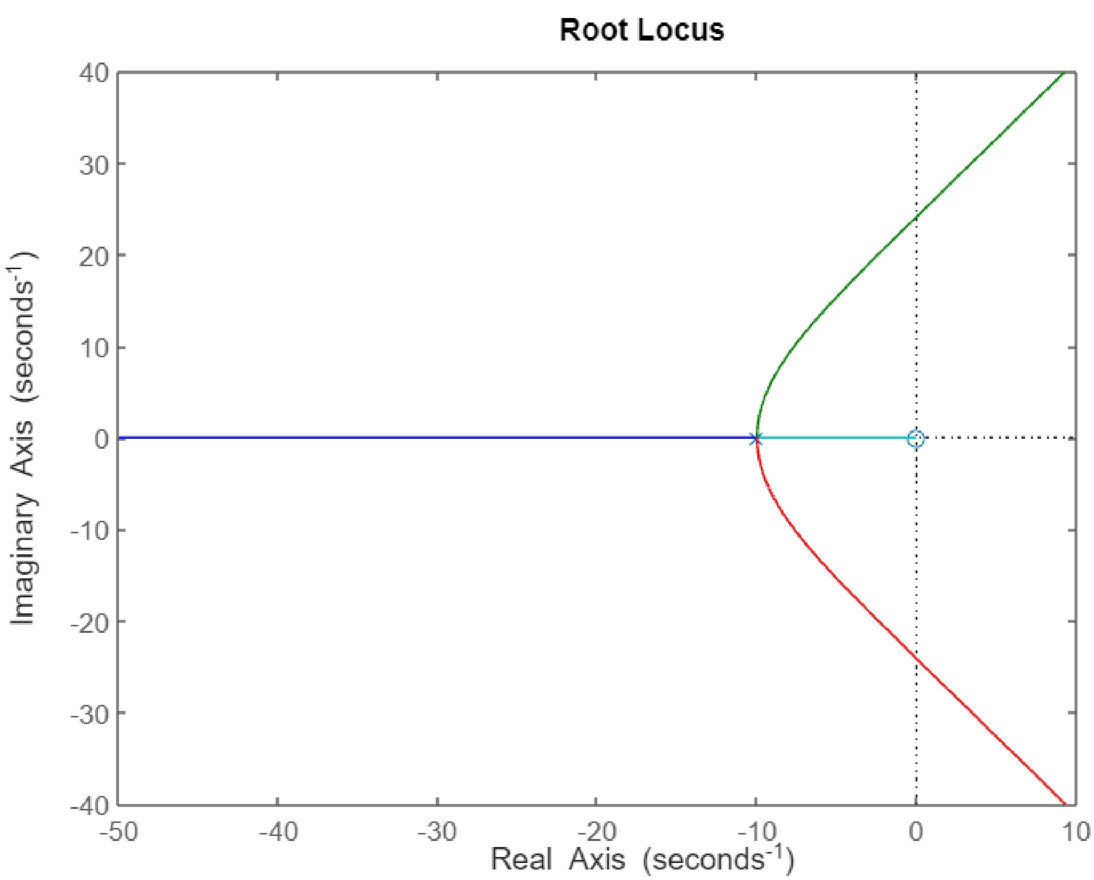
```
G4
```

```
G4 =

                   1200
  ---------------------------------------
  s^4 + 40 s^3 + 600 s^2 + 4000 s + 10000

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
s = tf('s');
G4s = G4 * s
```

```
G4s =

                  1200 s
  ---------------------------------------
  s^4 + 40 s^3 + 600 s^2 + 4000 s + 10000

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
rlocus(G4s)
```




```
rltool(G4s)
```

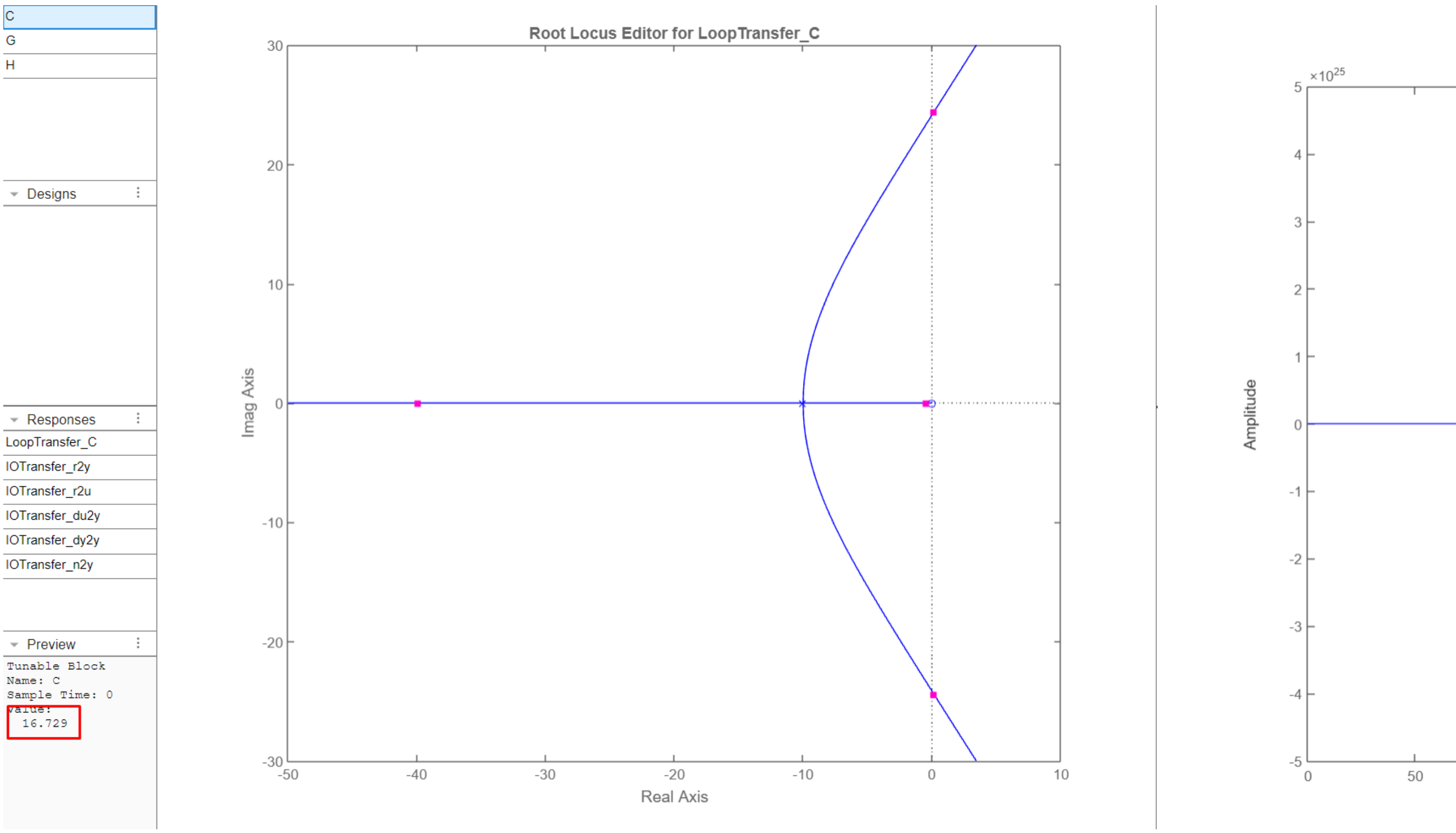
Conforme o K vai crescendo, os polos vou aumentando para as suas respectivas assintotas ou faixas.

Um polo vai para menos infinito, outros 2 vão para duas assintotas diferentes e o último tende para zero.

6.2 Obtenha os valores de $K > 0$ para os quais o sistema é estável.

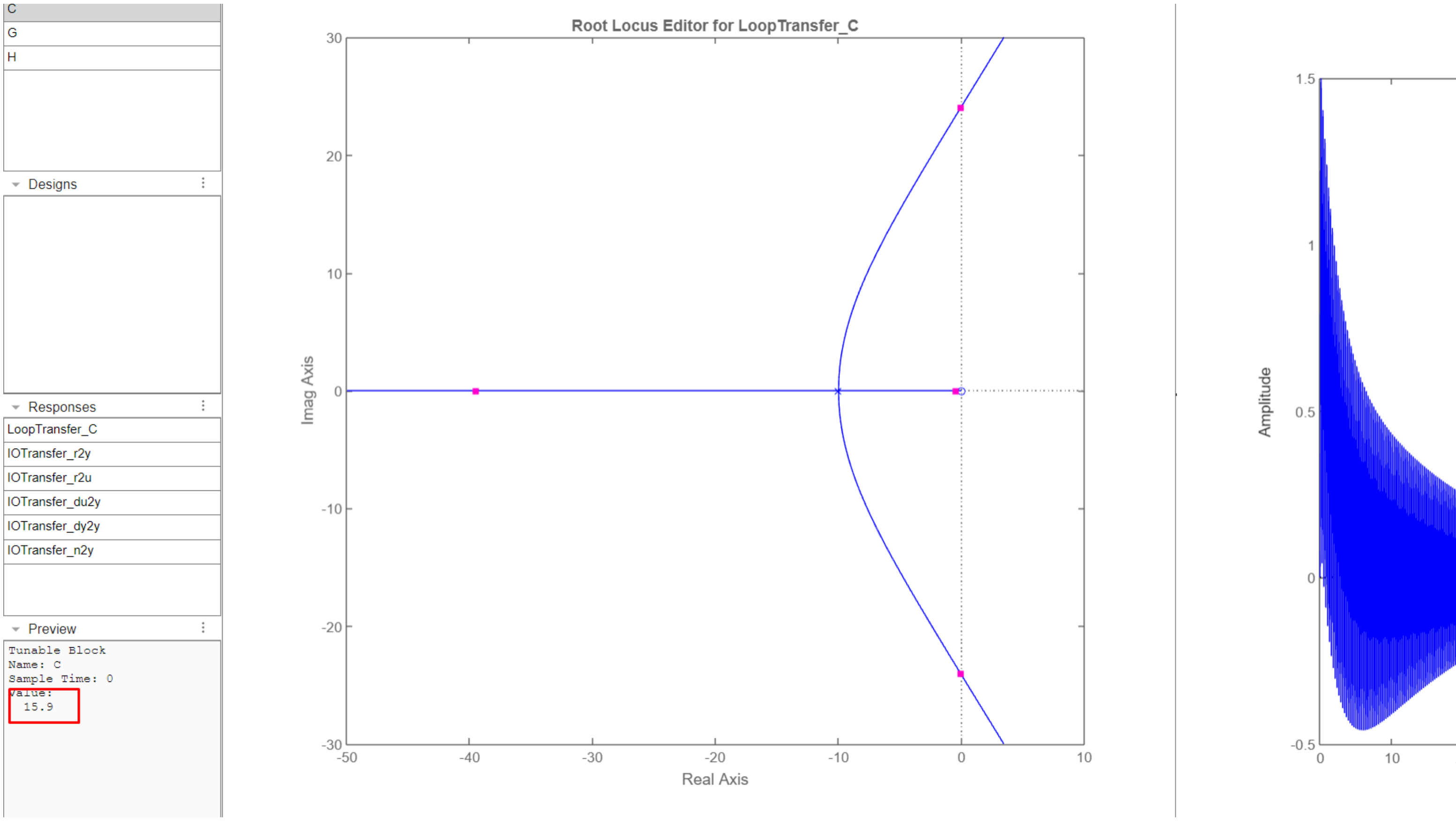
Para K > 0, temos:

O sistema é estável quando parte real do número é negativa. Então, a raiz não poderia passar para o semiplano direito:

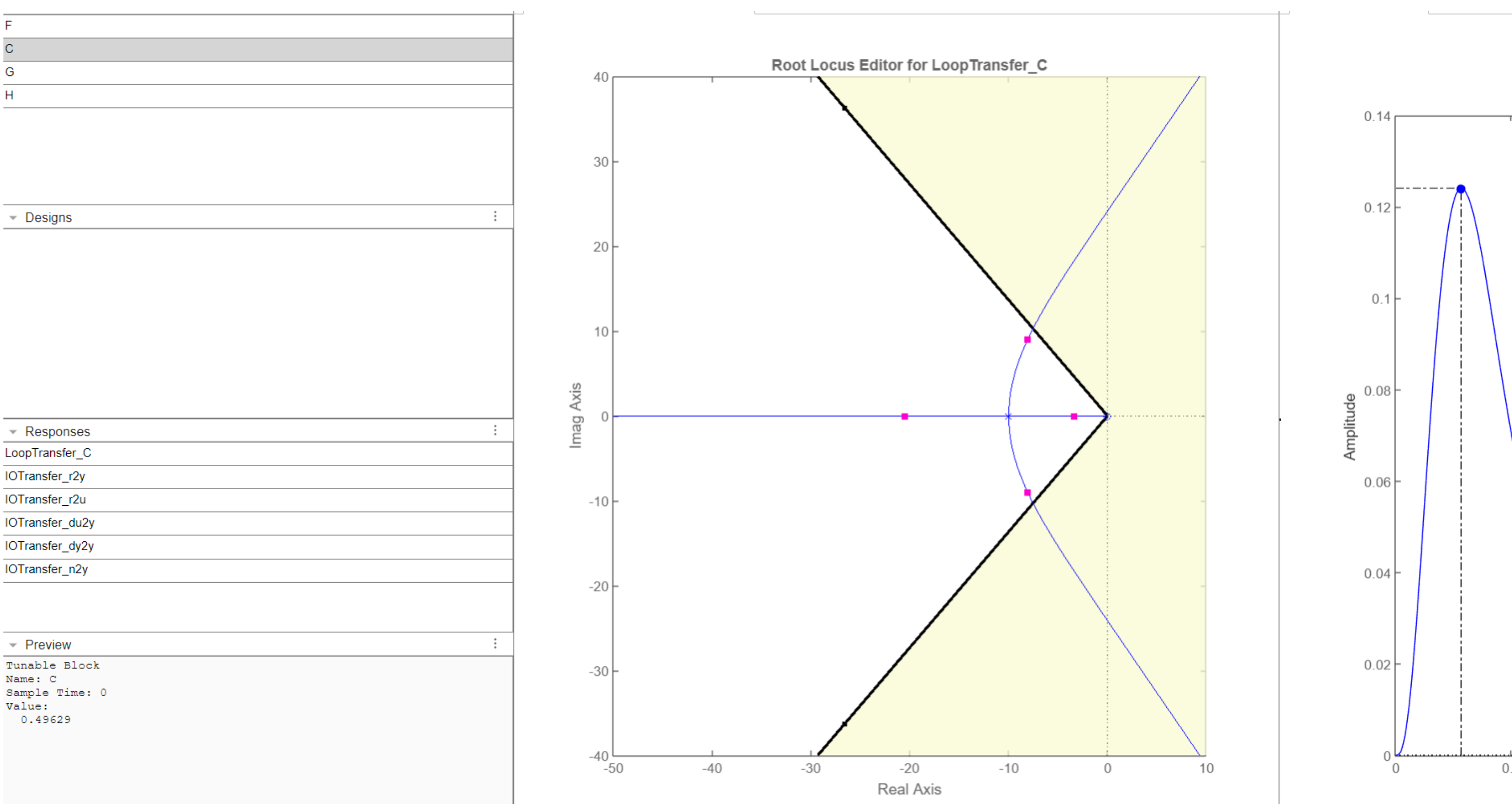


Como pode ser observado acima, quando os polos passam para o semiplano direito estão sobre o círculo unitário, *K* assume um valor de 16 e a resposta se torna instável.

Portanto, *K* precisa ser menor que 16 para garantir a estabilidade. Um exemplo está demonstrado abaixo com *K*=15.9, o qual é próximo a 16. Com este valor de *K*, o sistema se estabiliza.



Dessa forma, é de fato essencial que *K* seja inferior a 16 para manter a estabilidade do sistema.



O maior K seria 0.49 como pode ver.

```
step(G4s*0.49)
```