

Gabriel de Souza Alves Boasquives
Gabriel Falcone da Silva
Gabrielly Barcelos Cariman

PRIMEIRO TRABALHO DE ALGORÍTIMOS NUMÉRICOS 2021/1

Trabalho acadêmico desenvolvido como pré-requisito para obtenção parcial de nota na disciplina Algoritmos Numéricos do curso de graduação de Engenharia Elétrica na Universidade Federal do Espírito Santo.

Vitória, ES
2021

RESUMO

A partir da análise de métodos numéricos desenvolvidos ao longo da matéria e entendendo a importância desses estudos para a formação do engenheiro eletricista, foi desenvolvido um trabalho para a matéria de algoritmos numéricos com o objetivo de resolver alguns PVI's pré-estabelecidos e depois solucionar um problema prático da engenharia elétrica. Tais tarefas foram feitas no software *GNU Octave*, que caracterizado como um software de código livre amplamente utilizado no curso.

A partir da análise dos dois processos e do êxito deles, foi possível concluir que o trabalho foi de extrema valia para a complementação dos conhecimentos na matéria de algoritmos numéricos.

1. INTRODUÇÃO

No cenário da evolução tecnológica vista no Brasil e no mundo nas últimas décadas, se faz necessário e importante para a formação profissional de um engenheiro eletricista o estudo e aplicação de métodos numéricos que facilitem o processo de resolução de problemas e que possam auxiliar o método de construção e desenvolvimento de artigos científicos e teses.

Tais métodos numéricos estudados nessa primeira parte da disciplina são as equações diferenciais ordinárias, definidas por equações com derivadas que dizem respeito à uma variável (BILOTTI,2020) e os problemas de valor inicial (P.V.I) que são equações diferenciais acompanhadas de uma condição inicial ou valor inicial. Essas duas teorias foram discutidas e desenvolvidas por diversos matemáticos ao longo da matéria a fim de facilitar a resolução dos novos problemas que foram surgindo, e que hoje, foram desenvolvidos ao longo da matéria.

Além disso, ao longo dos últimos anos, foi possível perceber que os métodos estudados na disciplina de Algoritmos Numéricos foram adaptados para a interface computacional com o uso de softwares auxiliares, tais como *MatLab*, *GNU Octave* e *Python*, mudando o paradigma da matéria e ampliando sua área de correspondência.

Dado o exposto, o presente trabalho visa a resolução de alguns problemas propostos, seja a resolução de alguns exercícios teóricos, seja o desenvolvimento de um problema prático da área de engenharia elétrica, através da manipulação de códigos disponibilizados pelo professor e da criação de outros pelos integrantes do grupo no software *GNU Octave*. Outrossim, o projeto será estruturado através de uma análise dos seus objetivos, explicar os métodos numéricos usados, mostrar os resultados obtidos e avaliar se estes são satisfatórios.

2. OBJETIVOS

O presente trabalho tem por objetivo aplicar conceitos ensinados nas aulas de algoritmos numéricos através do uso do Software *Octave* para a aplicação do roteiro proposto. Entretanto, é necessário que alguns objetivos específicos sejam definidos com o intuito de facilitar a organização do projeto. Dado o contexto, podemos citar:

- Descrever a teoria dos métodos utilizados;
- Analisar os problemas propostos;
- Desenvolver, a partir do código do professor, o código *main* que será disponibilizado na entrega do trabalho;
- Discutir se os resultados obtidos estão em consonância com as respostas esperadas.

Ademais, é importante citar que todos os modelos descritos acima estarão detalhados no decorrer da metodologia e conclusão do trabalho.

3. METODOLOGIA

Para a realização da atividade proposta, foram empregados métodos numéricos estudados durante a primeira parte da disciplina que tem como objetivo gerar respostas aproximadas para determinadas equações. Tais resultados tiveram de ser comparados com resultados conseguidos pelas fórmulas analíticas que mostram precisamente a posição do ponto no plano cartesiano.

Os métodos utilizados que fazem parte do estudo de EDO são todas variações do método de Runge-Kutta, consistido de uma família de métodos iterativos com o objetivo de solucionar equações diferenciais ordinárias. Por regra, o método de Runge-Kutta tem por generalização a fórmula:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{i=1}^e b_i k_i,$$

Figura 1-forma geral de Runge-Kutta.

Tal método foi percussor de diversas fórmulas específicas e que foram empregadas nesse trabalho como: Euler, Euler Melhorado, Euler Modificado, Fehlberg RK(1), Fehlberg RK(4), Dormand-Prince com passo fixo, Dormand-Prince com passo adaptativo. Além disso, foi proposto a resolução de um circuito elétrico a partir do desenvolvimento de uma EDO específica para o problema.

O trabalho foi realizado através de uma linguagem de programação executada pelo software livre *GNU Octave* que tem por objetivo realizar soluções lineares, modelagem de sistemas e plotagens de gráficos. A execução dos trabalhos foi baseada em códigos disponibilizados pelo professor que continham cada método especificado com adaptações realizadas pelos membros do grupo para melhor atender as exigências propostas.

4. RESULTADOS E AVALIAÇÃO

4.1. Primeira parte do trabalho

Ao implementarmos os códigos feitos para a resolução do trabalho, foram conseguidos resultados para cada questão proposta. Sendo assim, foram determinadas a solução analítica de cada PVI, os gráficos da solução parametrizadas correspondentes a cada método exemplificado, a sua tabela correspondente, o gráfico de erros para cada método e, por fim, sua tabela correspondente. Sendo assim, temos:

O primeiro PVI, tem por solução analítica:

$$y(x) = (x + 1) \cdot e^{x \cdot (\ln(x+1)-1)}$$

Sendo assim, seus resultados serão:

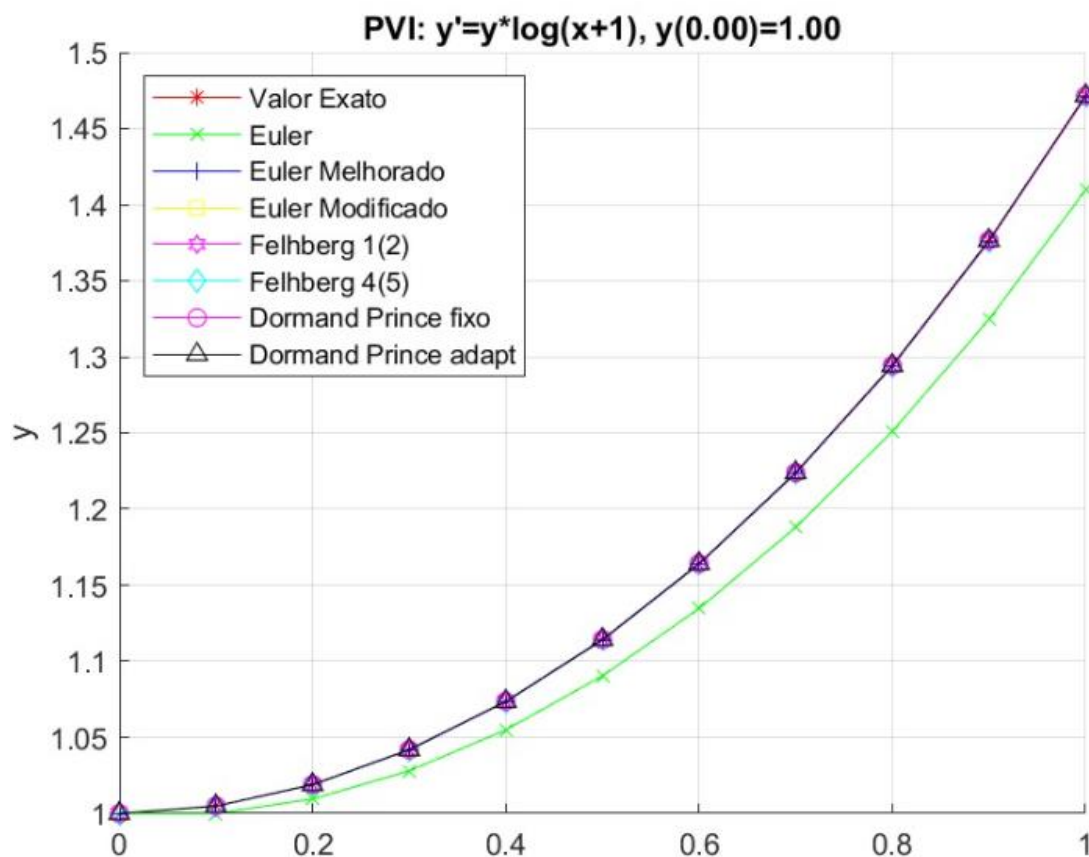


Figura 2 - Resultados para o primeiro PVI.

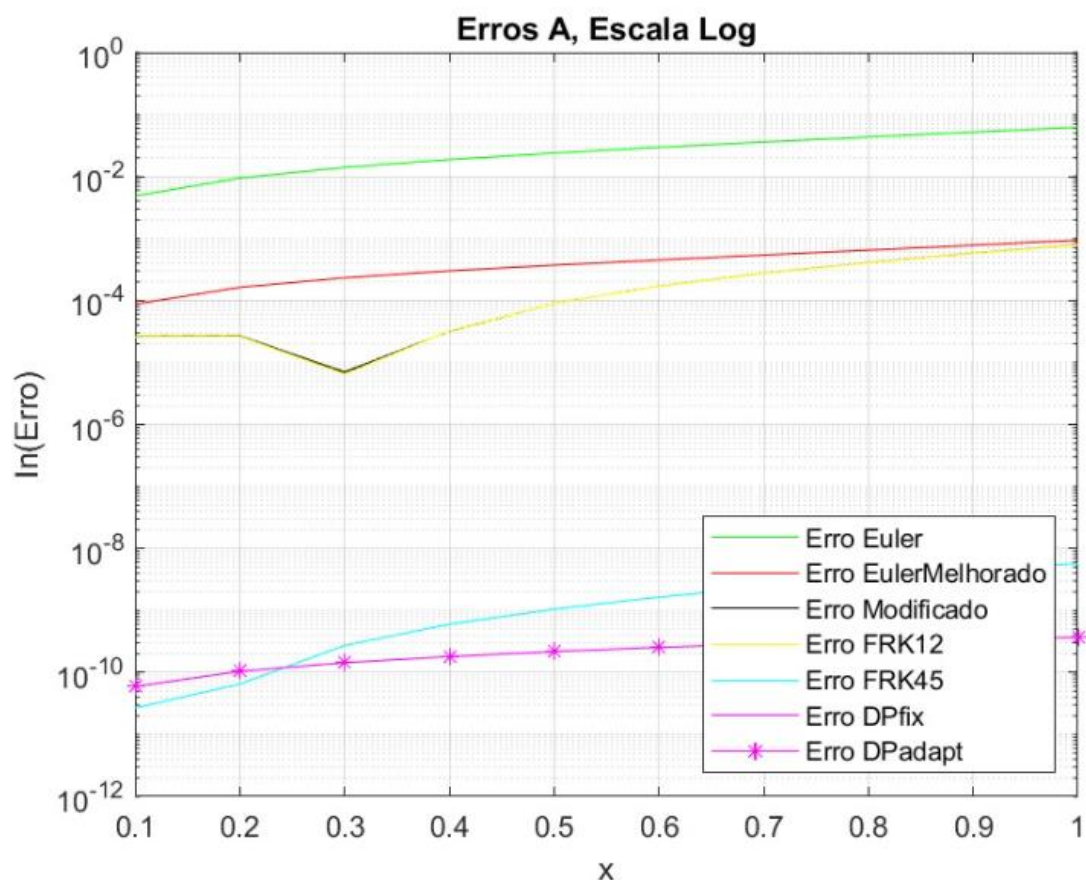


Figura 3- Erros do primeiro PVI.

x	Valor Exato	Euler	Euler Mel.	Euler Mod.	Fehl12	Fehl45	ODE45 fixo
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.100000	1.004853	1.000000	1.004766	1.004879	1.004879	1.004853	1.004853
0.200000	1.018963	1.009531	1.018801	1.018990	1.018990	1.018963	1.018963
0.300000	1.041929	1.027937	1.041697	1.041936	1.041935	1.041929	1.041929
0.400000	1.073647	1.054906	1.073347	1.073615	1.073615	1.073647	1.073647
0.500000	1.114268	1.090401	1.113897	1.114178	1.114178	1.114268	1.114268
0.600000	1.164167	1.134613	1.163717	1.163997	1.163997	1.164167	1.164167
0.700000	1.223931	1.187940	1.223391	1.223657	1.223658	1.223931	1.223931
0.800000	1.294360	1.250976	1.293712	1.293951	1.293953	1.294360	1.294360
0.900000	1.376470	1.324506	1.375692	1.375893	1.375896	1.376470	1.376470
1.000000	1.471518	1.409520	1.470580	1.470728	1.470732	1.471518	1.471518

Erros:							
0.000000	0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
0.100000	0.000000	4.852935e-03	8.742633e-05	2.608110e-05	2.572818e-05	2.685896e-11	1.320462e-10
0.200000	0.000000	9.432415e-03	1.628845e-04	2.689664e-05	2.640783e-05	6.520584e-11	1.879206e-10
0.300000	0.000000	1.399179e-02	2.322041e-04	6.993726e-06	6.540441e-06	2.732787e-10	2.582177e-10
0.400000	0.000000	1.874052e-02	3.002401e-04	3.197081e-05	3.223879e-05	6.001146e-10	1.694593e-10
0.500000	0.000000	2.386697e-02	3.713868e-04	9.034817e-05	9.028644e-05	1.053029e-09	1.079470e-10
0.600000	0.000000	2.955403e-02	4.499525e-04	1.700581e-04	1.695154e-04	1.643274e-09	6.143130e-11
0.700000	0.000000	3.599108e-02	5.404638e-04	2.744091e-04	2.732174e-04	2.385524e-09	2.090572e-11
0.800000	0.000000	4.338388e-02	6.479417e-04	4.080863e-04	4.060506e-04	3.297347e-09	2.142664e-11
0.900000	0.000000	5.196386e-02	7.781760e-04	5.772600e-04	5.741491e-04	4.398611e-09	7.355805e-11
1.000000	0.000000	6.199749e-02	9.380216e-04	7.897964e-04	7.853315e-04	5.710731e-09	2.201113e-10

Figura 4- Tabelas do primeiro PVI.

Para o primeiro PVI, temos que o método com maior erro será o de euler e o método que mais se aproxima da solução analítica será a de Dormand-Prince com passo fixo.

Para o segundo PVI, temos a sua solução analítica a seguir:

$$y(x) = e^{\frac{x \cdot (e^2 - 3)}{3}}$$

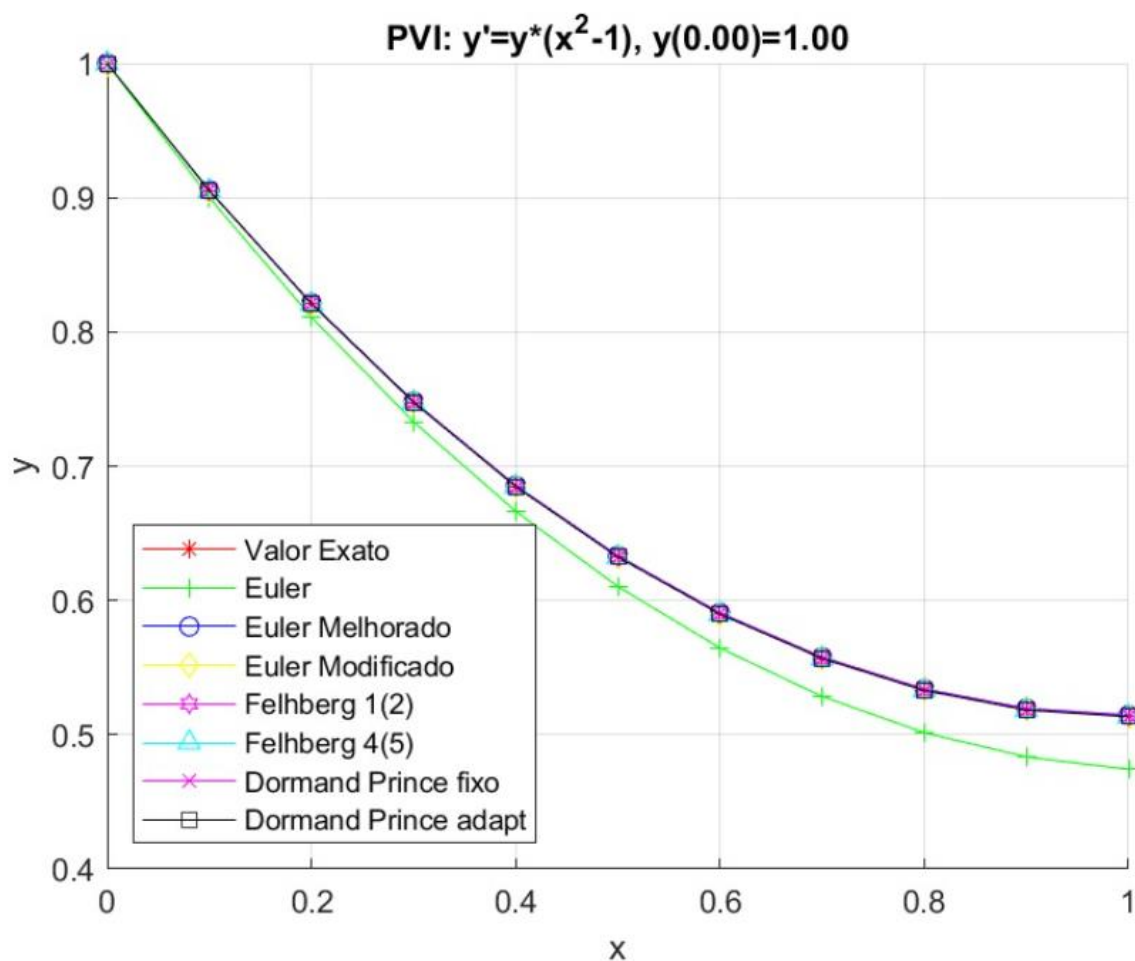


Figura 5- Resultados do segundo PVI.

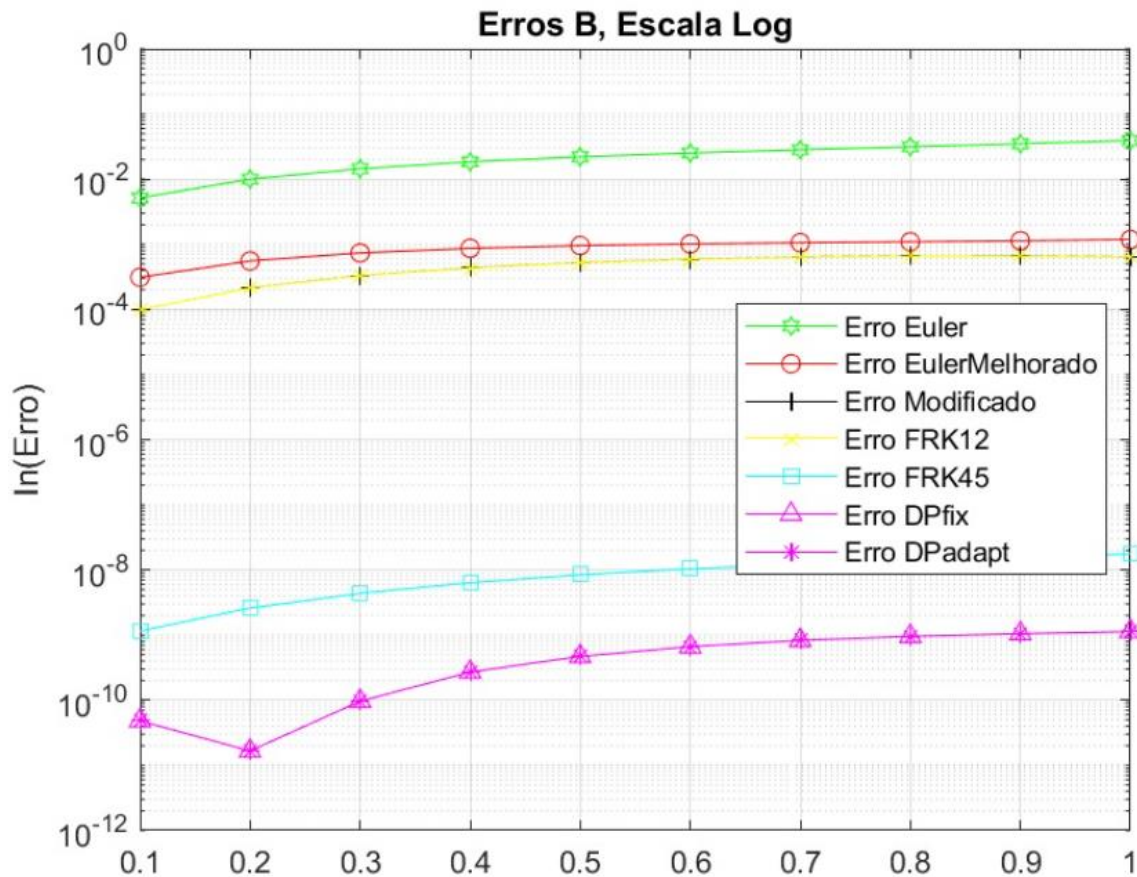


Figura 6- Erros do segundo PVI.

x	Valor Exato	Euler	Euler Mel.	Euler Mod.	Fehl12	Fehl45	ODE45 fixo
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.100000	0.905139	0.900000	0.905450	0.905238	0.905237	0.905139	0.905139
0.200000	0.820917	0.810900	0.821471	0.821131	0.821130	0.820917	0.820917
0.300000	0.747516	0.733054	0.748252	0.747845	0.747844	0.747516	0.747516
0.400000	0.684774	0.666346	0.685640	0.685207	0.685206	0.684774	0.684774
0.500000	0.632337	0.610373	0.633291	0.632857	0.632855	0.632337	0.632337
0.600000	0.589783	0.564595	0.590797	0.590371	0.590368	0.589783	0.589783
0.700000	0.556735	0.528461	0.557791	0.557368	0.557365	0.556735	0.556735
0.800000	0.532947	0.501509	0.534039	0.533605	0.533602	0.532947	0.532947
0.900000	0.518404	0.483455	0.519535	0.519064	0.519061	0.518404	0.518404
1.000000	0.513417	0.474269	0.514600	0.514051	0.514048	0.513417	0.513417
Erros:							
0.000000	0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
0.100000	0.000000	5.139081e-03	3.109192e-04	9.841922e-05	9.824053e-05	1.155067e-09	1.104874e-08
0.200000	0.000000	1.001695e-02	5.543747e-04	2.136905e-04	2.130767e-04	2.598544e-09	9.989167e-09
0.300000	0.000000	1.446208e-02	7.362634e-04	3.290516e-04	3.278898e-04	4.369798e-09	8.692792e-09
0.400000	0.000000	1.842811e-02	8.658829e-04	4.333856e-04	4.316679e-04	6.369688e-09	7.492382e-09
0.500000	0.000000	2.196398e-02	9.544610e-04	5.203819e-04	5.181708e-04	8.432707e-09	6.638539e-09
0.600000	0.000000	2.518863e-02	1.013931e-03	5.872244e-04	5.846269e-04	1.040125e-08	6.351588e-09
0.700000	0.000000	2.827391e-02	1.056044e-03	6.331040e-04	6.302558e-04	1.218653e-08	6.876483e-09
0.800000	0.000000	3.143781e-02	1.091805e-03	6.576822e-04	6.547428e-04	1.381555e-08	8.549943e-09
0.900000	0.000000	3.494937e-02	1.131143e-03	6.594523e-04	6.566132e-04	1.547893e-08	1.190032e-08
1.000000	0.000000	3.914792e-02	1.182655e-03	6.337574e-04	6.312649e-04	1.761054e-08	1.123154e-09

Figura 7- Tabelas para o terceiro PVI.

Para o segundo PVI, temos que seu maior erro será no método de Euler e a mais precisa será a de Dormand-Prince com passo fixo tal qual o primeiro PVI.

Para o terceiro PVI, temos que sua será:

$$y(x) = \frac{x^2 + 1}{2 \cdot x}$$

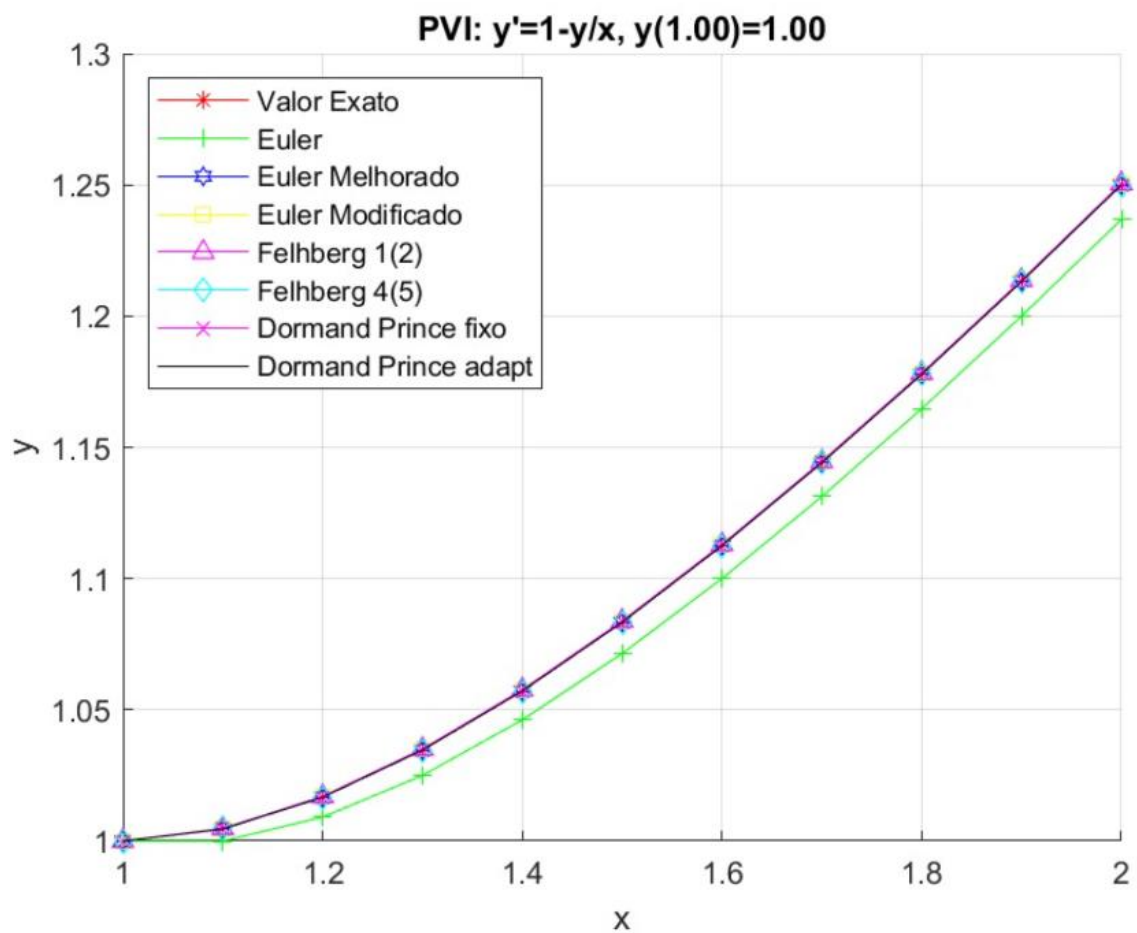


Figura 8-Resultados terceiro PVI

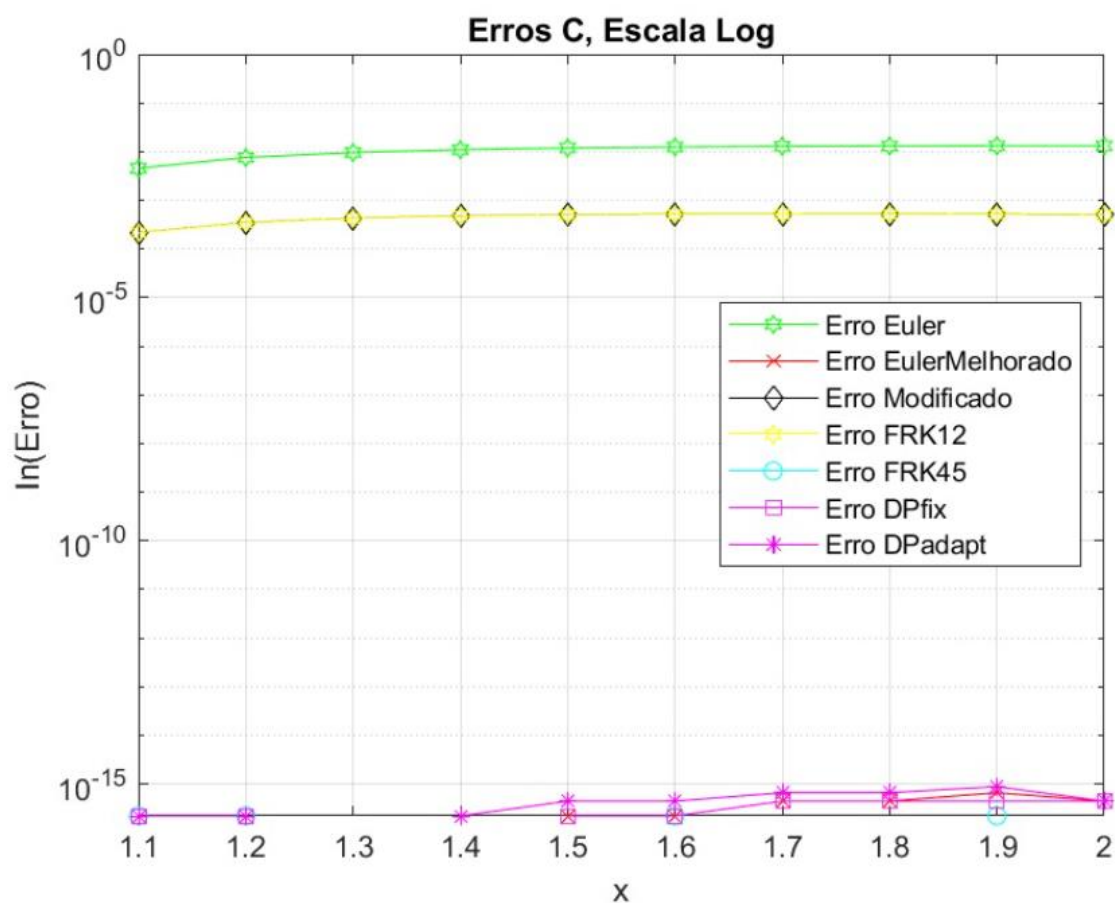


Figura 9- Erros para o terceiro PVI.

x	Valor Exato	Euler	Euler Mel.	Euler Mod.	Fehl12	Fehl45	ODE45 fixo
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.100000	1.004545	1.000000	1.004545	1.004762	1.004760	1.004545	1.004545
1.200000	1.016667	1.009091	1.016667	1.017015	1.017012	1.016667	1.016667
1.300000	1.034615	1.025000	1.034615	1.035044	1.035040	1.034615	1.034615
1.400000	1.057143	1.046154	1.057143	1.057619	1.057615	1.057143	1.057143
1.500000	1.083333	1.071429	1.083333	1.083836	1.083832	1.083333	1.083333
1.600000	1.112500	1.100000	1.112500	1.113017	1.113012	1.112500	1.112500
1.700000	1.144118	1.131250	1.144118	1.144639	1.144635	1.144118	1.144118
1.800000	1.177778	1.164706	1.177778	1.178297	1.178293	1.177778	1.177778
1.900000	1.213158	1.200000	1.213158	1.213672	1.213668	1.213158	1.213158
2.000000	1.250000	1.236842	1.250000	1.250506	1.250502	1.250000	1.250000

Erros:

1.000000	0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
1.100000	0.000000	4.545455e-03	2.220446e-16	2.164502e-04	2.147625e-04	2.220446e-16	4.470699e-10
1.200000	0.000000	7.575758e-03	2.220446e-16	3.482025e-04	3.454870e-04	2.220446e-16	6.180949e-10
1.300000	0.000000	9.615385e-03	0.000000e+00	4.283446e-04	4.250035e-04	0.000000e+00	8.262722e-10
1.400000	0.000000	1.098901e-02	0.000000e+00	4.761050e-04	4.723909e-04	0.000000e+00	5.357945e-10
1.500000	0.000000	1.190476e-02	2.220446e-16	5.030870e-04	4.991621e-04	0.000000e+00	3.577310e-10
1.600000	0.000000	1.250000e-02	2.220446e-16	5.165146e-04	5.124845e-04	2.220446e-16	2.450162e-10
1.700000	0.000000	1.286765e-02	2.220446e-16	5.210040e-04	5.169386e-04	2.220446e-16	1.716305e-10
1.800000	0.000000	1.307190e-02	4.440892e-16	5.195699e-04	5.155155e-04	0.000000e+00	1.226479e-10
1.900000	0.000000	1.315789e-02	6.661338e-16	5.142170e-04	5.102042e-04	2.220446e-16	8.922196e-11
2.000000	0.000000	1.315789e-02	4.440892e-16	5.062978e-04	5.023466e-04	0.000000e+00	0.000000e+00

error: bvp4adab a(11): out of bound 1 (dimensions are 1x1)

Figura 10- Tabelas para o terceiro PVI.

Para o terceiro PVI, temos que seu maior erro será no método de Euler e a mais precisa será tanto para o método de Euler Melhorado quando o método Fehlberg RK(4) 5.

4.2. Segunda parte

Na segunda parte do trabalho foi analisado um problema teórico da engenharia elétrica na qual o objetivo é obter a tensão V_c (contínua em um circuito de tensão alternada).

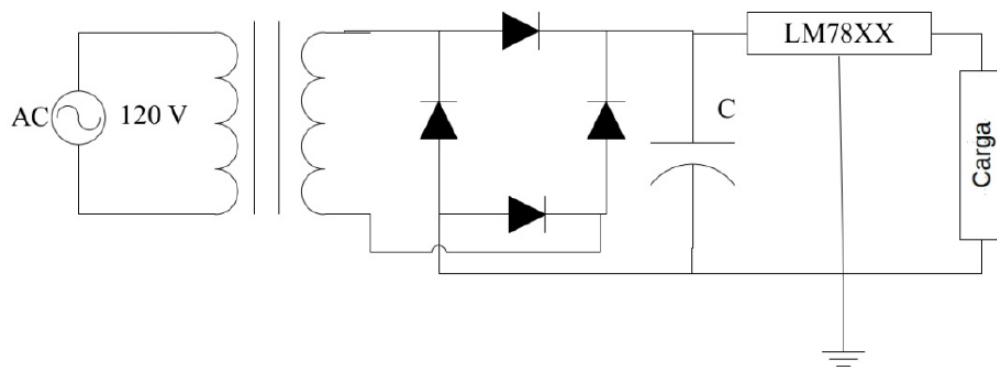


Figura 11-Retificador de onda completa.

Tal circuito é conhecido com retificador de onda completa ou retificador em ponte e tem algumas fases que serão brevemente resumidas:

Fase de carregamento do capacitor: Quando a voltagem que foi retificada ultrapassa a voltagem do capacitor.

Fase de descarregamento do capacitor: Quando a voltagem que foi retificada cai abaixo do valor de voltagem do capacitor.

Com os parâmetros fornecidos pelo professor, foi pedido que fosse usado todos os métodos de EDO conhecidos até o momento para determinar a tensão $V_c(t)$.

Sendo assim, foi feito como se pede:

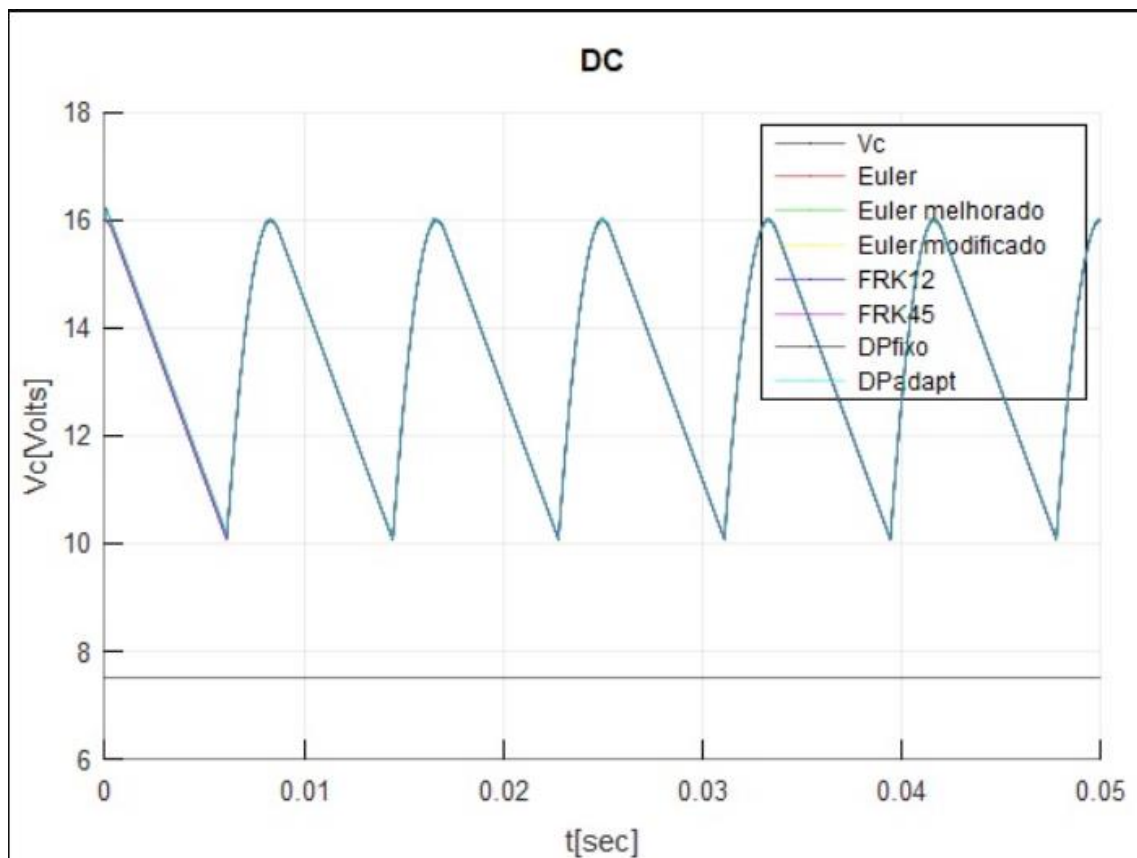


Figura 12- Tensão $V_c(t)$ determinada ao longo do tempo.

A fim de curiosidade, foi plotado o gráfico que diz respeito do comportamento em corrente alternada como se segue:

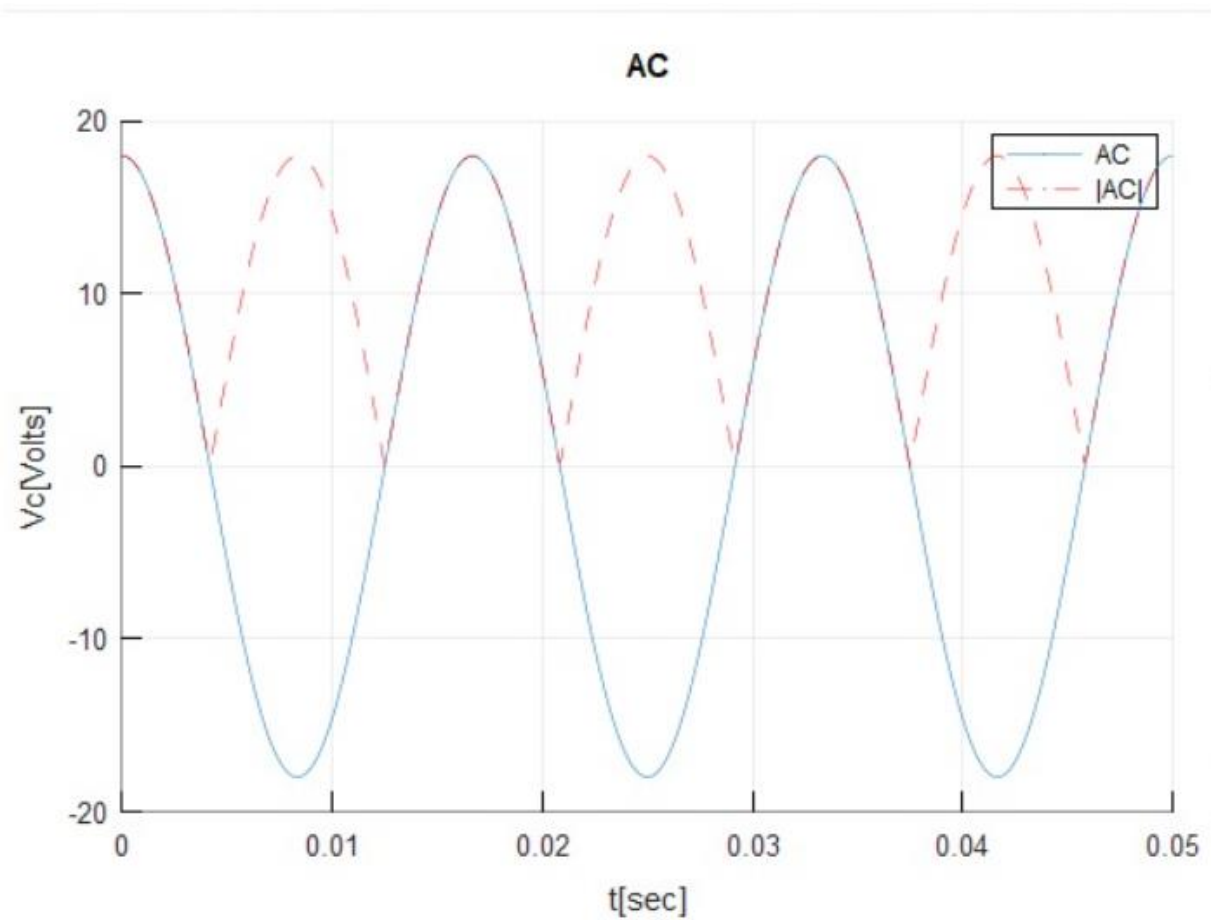


Figura 13- Gráfico de V_c em comportamento AC.

Ao fim do trabalho, foi possível concluir que este obteve resultados satisfatórios ao conseguirmos realizar todas as atividades propostas. Foi possível colocar em prática todo o conhecimento teórico aprendido nessa parte e por fim, relacionar e entender a importância dos métodos numéricos para a resolução de problemas reais da engenharia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

UNICAMP (SÃO PAULO). **O que é uma equação diferencial?**. 1. Campinas: Unicamp, 18 maio 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hKc4swcCbRg>. Acesso em: 22 ago. 2021.

WIKIPEDIA. **Método de Runge-Kutta**. [S. l.], 5 jan. 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta. Acesso em: 22 ago. 2021.