

UFES - CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA  
Prof. Thomas W. Rauber

**1º Trabalho de Algoritmos Numéricos (INF09269 ) 2021/1 Earte**

Data de entrega: veja Mural na Sala de Aula

Linguagem de Programação para Implementação

Octave/Matlab, preferencialmente código que seja compatível com os dois ambientes

Grupo de até três alunos

**Aplicações Práticas de Técnicas Numéricas de Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.**

**Problema:** Dado um problema de valor inicial (PVI) em uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem,

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

o objetivo é criar uma sequência de estimativas

$$y_1, \dots, y_n, \dots$$

dos valores verdadeiros

$$y(x_1), \dots, y(x_n), \dots$$

da função  $y(x)$  em pontos equidistantes

$$x_1, \dots, x_n = x_0 + nh, x_{n+1} = x_n + h, \dots,$$

separados pelo passo  $h$ . Também existem métodos que usam um passo variável, por exemplo, Dormand-Prince com passo adaptativo. O lado esquerdo da EDO, em forma “canônica”, contém somente a derivada de primeira ordem  $dy/dx$  da função  $y(x)$ . É fácil ordenar uma EDO para aparecer nesta forma canônica, transportando todos os termos que não aparecem como derivada para o lado direito da equação. O lado direito da EDO é uma expressão  $f$  que define uma combinação da variável independente  $x$  e da variável dependente  $y$ . É um “funcional”, informalmente, uma função de função. Não confunda  $f$  com a função que nos interessa, a solução do EDO  $y(x)$ .

Se a variável independente  $x$  não está presente do lado direito da equação, a EDO simplifica para um *sistema autônomo de primeira ordem* [7], da forma

$$y' = f(y). \quad (2)$$

Às vezes a função  $y(x)$  é dada adicionalmente para fins de comparação, ou é fácil de “adivinhar”, por exemplo para a EDO  $y' = y$  sabe-se que a solução é a função exponencial  $y(x) = C \exp(x)$ , com a constante  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo:** Considere a EDOs

$$y'(x)/y = 2xy + 1.$$

A forma canônica obtém-se por multiplicar os dois lados da ODE por  $y$ , portanto

$$y'(x) = y(2xy + 1).$$

O lado direito da EDO seria então

$$f(x, y) = y(2xy + 1).$$

Expandindo a definição, ilustra que isso é uma combinação da variável independente  $x$ , e da variável dependente  $y$ . A variável  $y$  de fato é uma função  $y(x)$  que depende de  $x$ . Portanto, o lado direito da ODE é mais precisamente o funcional

$$f(x, y(x)) = y(x)(2xy(x) + 1).$$

Este lado direito da ODE é usado nas aproximações numéricas, por exemplo, no método de Euler temos

$$y_{\text{novo}} = y_{\text{antigo}} + h \cdot f(x_{\text{antigo}}, y_{\text{antigo}}).$$

# 1 Métodos de Resolução numérica de EDO

O método mais simples de gerar a sequência de estimativas  $y_n$  é o método de Euler, um método de primeira ordem, como

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (3)$$

É o resultado de expressar o lado direito da EDO  $f(x, y(x))$  por uma aproximação baseada na série de Taylor, ignorando todos os termos acima de ordem um. Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem são (entre muitos outros) o método de Euler Aperfeiçoado (Melhorado) ou também chamado o método de Heun

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \\ &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))], \end{aligned} \quad (4)$$

e o método de Euler Modificado

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)). \quad (5)$$

Uma generalização dos métodos de Runge-Kutta [5], [3], [4], de  $s$  estágios é a *matriz de Butcher*

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ c_2 & a_{2,1} & & & \\ c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{s-1} & a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \dots & a_{s-1,s-2} \\ c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s-1} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \end{array} \quad (6)$$

que permite a definição recursiva do cálculo da próxima estimativa  $y_{n+1}$  como

$$y_{n+1} = y_n + h [b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_{s-1} k_{s-1} + b_s k_s], \quad (7)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y) \\ k_2 &= f(x + c_2 h, y + h a_{2,1} k_1) \\ k_3 &= f(x + c_3 h, y + h(a_{3,1} k_1 + a_{3,2} k_2)) \\ &\dots \\ k_s &= f(x + c_s h, y + h(a_{s,1} k_1 + a_{s,2} k_2 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})). \end{aligned} \quad (8)$$

Todas as informações necessárias para montar um método de Runge-Kutta estão armazenados então na matriz triangular inferior  $[a_{i,j}]$  com os coeficientes  $a_{i,j}$ , e nos vetores  $(b_1, b_2, \dots, b_s)$  e  $(c_1, c_2, \dots, c_s)$ . Os campos vazios na matriz  $[a_{i,j}]$  têm o valor zero, ou seja, a diagonal da matriz e a parte triangular acima da diagonal  $a_{i,j}; i \leq j; i, j = 1, \dots, s$ .

Neste esquema o método de Euler na eq. (3) é de  $s = 1$  estágio com a matriz de Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}, \quad (9)$$

pois temos  $s = 1$  estágio,  $b_1 = 1$  e  $k_1 = f(x, y)$ , então

$$y_{n+1} = y_n + h [b_1 k_1] = y_n + h \cdot 1 \cdot k_1 = y_n + hf(x_n, y_n),$$

o de Euler Melhorado na eq. (4) é de  $s = 2$  estágios

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}, \quad (10)$$

e o Euler Modificado na eq. (5)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}. \quad (11)$$

O método de segunda ordem de Runge-Kutta genérico (parametrizado com o parâmetro  $\alpha \neq 0$ ) é

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha & \alpha & \\ \hline & 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}. \quad (12)$$

Essa parametrização tem a origem no desenvolvimento bidimensional do lado direito  $f(x, y)$  da EDO usando o Teorema de Taylor com resto de Lagrange. Considerando a tabela de Butcher, três equações com quatro incógnitas impõem as três restrições  $b_1 + b_2 = 1$ ,  $b_2 c_2 = 1/2$  e  $b_2 a_{21} = 1/2$ , facilmente verificável nesta tabela.

Os métodos *adaptativos* de Runge-Kutta visam estimar o erro de truncamento de um único passo de  $x_n$  para  $x_{n+1}$ . A matriz de Butcher é estendida por uma linha adicional abaixo dos coeficientes  $b_k, i = 1, \dots, s$  com os coeficientes  $b_k^*, i = 1, \dots, s$ . Os coeficientes  $b_k$  representam um método de Runge-Kutta de ordem  $p$  e os coeficientes  $b_k^*$  representam um método de Runge-Kutta de ordem  $p - 1$ .

O passo de ordem  $p - 1$  estima-se como

$$y_{n+1}^* = y_n + h [b_1^* k_1 + b_2^* k_2 + \dots b_s^* k_s], \quad (13)$$

em que os parâmetros  $k$  são os mesmos da eq. (8).

Dessa maneira é possível estimar um erro no passo

$$\begin{aligned} e_{n+1} &:= y_{n+1} - y_{n+1}^* \\ &= h [(b_1 - b_1^*)k_1 + (b_2 - b_2^*)k_2 + \dots (b_s - b_s^*)k_s], \end{aligned} \quad (14)$$

que permite ajustar o passo  $h$  que assim deixa de ser estático, ou seja, cada passo em geral é diferente do anterior ( $h_{n+1} \neq h_n$ ).

A matriz de Butcher para métodos adaptativos de Runge-Kutta então tem a estrutura

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ c_2 & a_{2,1} & & & & \\ c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_{s-1} & a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \dots & a_{s-1,s-2} & \\ c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \\ & b_1^* & b_2^* & \dots & b_{s-1}^* & b_s^* \end{array}. \quad (15)$$

O método adaptativo mais simples combina o Euler Melhorado de ordem dois da eq. (4) com o Euler simples de ordem um da eq. (3) na tabela de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \\ & 1 & 0 \end{array}, \quad (16)$$

ou o método de Runge-Kutta-Fehlberg, que combina métodos de ordem cinco e ordem quatro.

Voltando ao desenvolvimento da função procurada  $y(x)$  pelo Teorema de Taylor, respectivamente pela série de Taylor, a ideia é expressar uma função em torno de um ponto  $a$  como

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)} = P_n + R_n, \quad (17)$$

onde  $P_n$  é o polinômio de Taylor de ordem  $n$ , e  $R_n$  é o resto, sendo  $\xi$  um valor no intervalo  $[x, a]$ . O resto expressa a diferença entre o verdadeiro valor da função e sua aproximação. A função  $y(x)$  tem que ser derivável pelo menos  $(k+1)$  vezes, onde a 0-ésima derivada é a própria função  $y(x)$ . Até a segunda ordem  $k=2$  em torno de um ponto  $a=x_n$ , tem-se então

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}(x - x_n)^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!}(x - x_n)^3 = P_2 + R_2, \quad (18)$$

e a ordem  $k=1$ , a aproximação simplifica para

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(\xi)}{2}(x - x_n)^2 = P_1 + R_1. \quad (19)$$

Plugando a definição da EDO  $y'(x) = f(x, y(x))$  da eq. (1) no ponto  $x_{n+1}$  no polinômio de Taylor de primeira ordem  $P_1$  na eq. (19), e resolvendo segundo  $y_{n+1}$ , obtém-se imediatamente a aproximação de Euler da eq. (3), pois

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = y(x_n) + hy'(x_n) = y(x_n) + hf(x_n, y_n). \quad (20)$$

Querendo uma aproximação mais exata de  $y(x)$ , usando um polinômio de Taylor de segunda ordem de eq. (18), a tarefa mais difícil é o cálculo da segunda deriva

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{df(x, y(x))}{dx},$$

plugando novamente o lado direito da EDO da eq. (1). O cálculo da expressão  $\frac{df(x, y(x))}{dx}$  exige a *derivada total* de um funcional  $f$  que depende de duas variáveis  $y$  e  $x$ . A variável  $y$  nesse funcional na verdade por sua vez é uma função  $y(x)$  que define essa dependência entre  $y$  e  $x$ .

A derivada total de uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , onde ainda por cima  $y$  depende de  $x$  como  $y(x)$  é

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (21)$$

Pela eq. (21), a derivada total do lado direito da EDO  $f(x, y)$  pode ser calculada. Consequentemente, a aproximação explícita pelo polinômio de Taylor até a segunda ordem é

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \frac{df(x, y(x))}{dx}. \quad (22)$$

Como exemplo considere a EDO  $xy' = x - y$ . Na forma canônica  $y' = f(x, y)$  temos  $y' = 1 - y/x$ , então o lado direito da EDO é  $f(x, y) = 1 - y/x$ . As derivadas parciais são  $\frac{\partial f}{\partial x} = y/x^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -1/x$ . Na eq. (21), a derivada  $\frac{dy}{dx}$  é o lado esquerdo da EDO e então é equivalente ao lado direito  $f(x, y)$  da EDO. Portanto, a derivada total completa é

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = y/x^2 - 1/x [1 - y/x] = \frac{-x + 2y}{x^2},$$

e finalmente o desenvolvimento de Taylor de segunda ordem em torno do ponto  $x_n$  segundo a eq. (22) é

$$y_{n+1} = y_n - \frac{h^2}{2x_n} + \frac{h^2 y_n}{x_n^2} + h - \frac{h y_n}{x_n}. \quad (23)$$

A solução analítica da EDO  $y' = f(x, y)$  é (sem prova)

$$y(x) = \frac{\text{const}}{x} + \frac{x}{2}.$$

Com a condição inicial  $y(x_0 = 2) = 2$ , torna-se um PVI, e a solução analítica é

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2},$$

permitindo calcular o erro de aproximação  $e_n = y(x_n) - y_n$  entre o valor verdadeiro  $y(x_n)$  da função em  $x_n$ , e o valor estimado  $y_n$  em  $x_n$  pelo polinômio de Taylor até a segunda ordem.

## 2 Equações Diferenciais Ordinárias

Considere os seguintes PVI

- a)  $\{ y'/y = \ln(x+1), y(x_0) = y_0 \}$ , com  $x_0 = 0, y_0 = 1$
- b)  $\{ y'/y = x^2 - 1, y(x_0) = y_0 \}$ , com  $x_0 = 0, y_0 = 1$
- c)  $\{ y' = 1 - y/x, y(x_0) = y_0 \}$ , com  $x_0 = 1, y_0 = 1$

**Tarefas:**

1. Determine a solução analítica  $y(x)$  de cada PVI. Ajuda: Para facilitar o cálculo, pode usar o pacote simbólico do Octave. Veja o exemplos na pasta `edo` do software, especialmente o script `EulerGraficamente.m` que ilustra a definição simbólica de um PVI, a obtenção analítica da solução  $y(x)$ , a apresentação em tabela dos valores exatos e aproximados pelo método de Euler.
2. Converta a solução em uma função não-simbólica. Veja o exemplo que usa `matlabFunction`.
3. Discretize a variável independente a partir de  $x_0$ , calcule o valor da função analítica e desenhe. O número de passos deve ser  $n = 10$  e o passo deve ser  $h = 1/10$ . O intervalo de discretização do eixo  $x$  do desenho deve ser mais fino que o passo  $h$  para evitar efeitos de discretização, por exemplo  $\Delta x = h/10$ . Veja o exemplo.
4. Calcule as aproximações da solução analítica, usando os seguintes métodos:
  - Euler
  - Euler Melhorado
  - Euler Modificado
  - Fehlberg RK(1) 2
  - Fehlberg RK(4) 5
  - Dormand-Prince com passo fixo
  - Dormand-Prince com passo adaptativo

Recomenda-se colocar os resultados de cada método  $y_0, \dots, y_n$  em uma coluna de uma matriz (linha= $x_i$ , coluna= $y_i$  do método), exceto métodos de passo adaptativo que não têm um  $x_i$  bem definido a priori.

5. Insira os pontos  $(x_i, y_i)$  de cada método no gráfico junto com a função verdadeira  $y(x)$ . Veja o gráfico na fig. 1.
6. Gere um no gráfico de erros de cada método relativo à função verdadeira  $y(x)$ , com eixo  $y$  logarítmico, (função Octave `semilogy` em vez de `plot`). Veja o gráfico na fig. 2.
7. Mostre uma tabela com os valores de cada método (exceto os com passo adaptativo) Veja a fig. 3.
8. Mostre uma tabela com os erros de cada método (exceto os com passo adaptativo) Veja a fig. 3. Ajuda: Considere o script de exemplo `plot_e_tabela_demo.m` que gera uma tabela.

## 3 Problema Prático

O objetivo do circuito da fig. 4 é providenciar uma fonte de corrente elétrica contínua (DC), a partir de uma fonte primária de corrente elétrica alternada (AC). A descrição original encontra-se em [2] (anexado a esta especificação do trabalho).

O primeiro passo é a redução da voltagem original de 120 V para níveis mais razoáveis, por exemplo para 12 V, porém ainda como AC, uma curva senoidal com valores positivos e negativos.

A tensão (em volts [V]) original pode ser modelada por

$$V_{AC}^{\text{orig}}(t) = V_{\text{max}} \cos(2\pi\nu t + \phi), \quad (24)$$

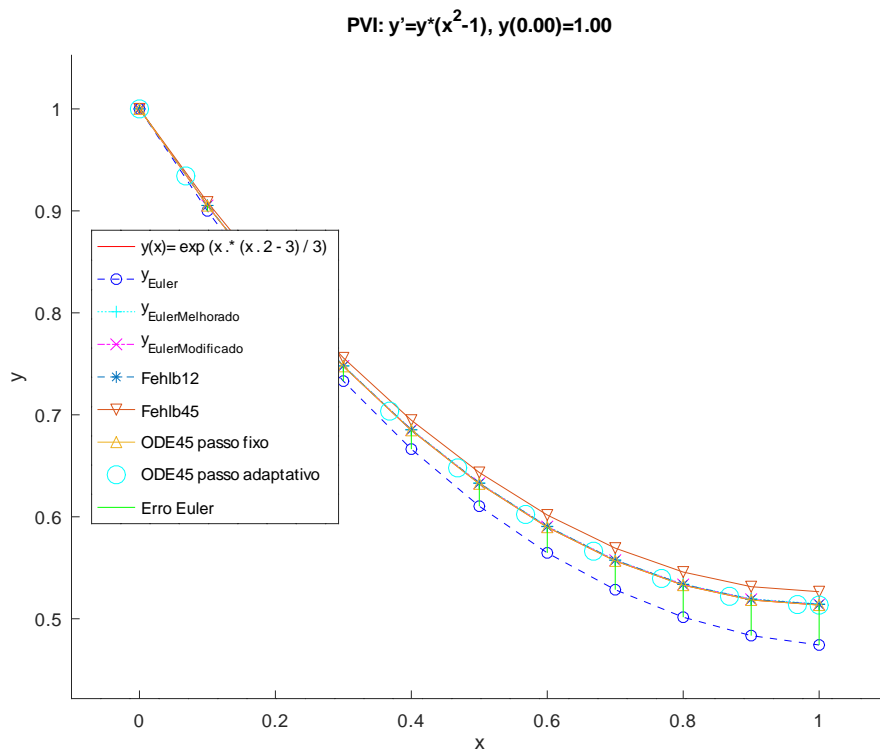


Figura 1: Função verdadeira  $y(x)$  e valores aproximados pelos métodos de solução de EDO.

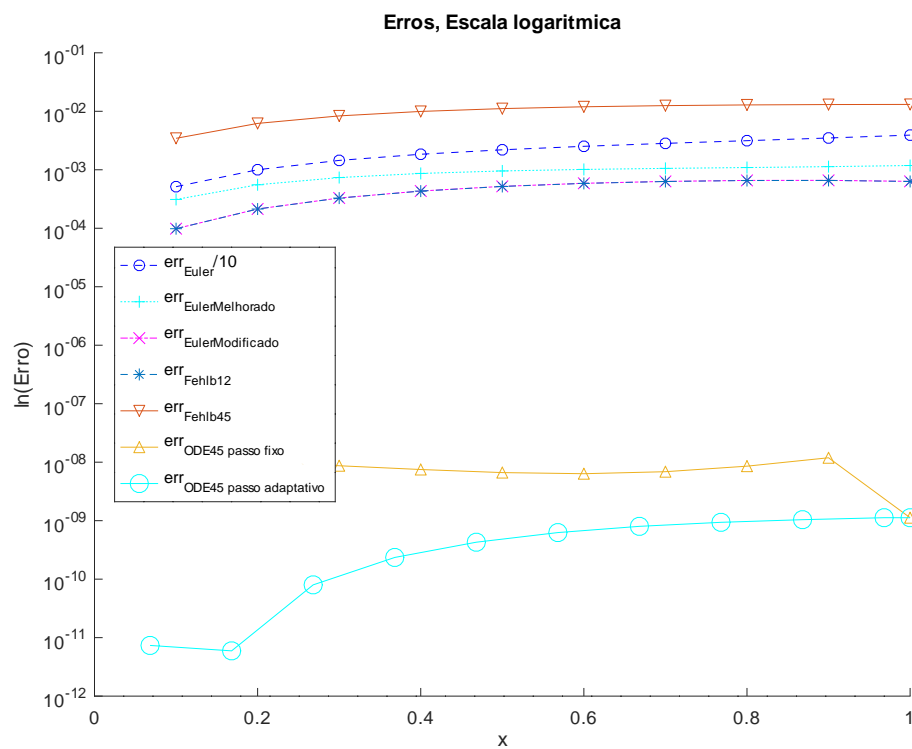


Figura 2: Erros de cada método em relação à função verdadeira  $y(x)$ .

Figura 3: Tabelas comparativas com os valores aproximados e erro dos métodos.

PVI: ==> Funcao:  $y(x) = \exp(x \cdot (x^2 - 3) / 3)$

x	Valor Exato	Euler	Euler Mel.	Euler Mod.	Fehl12	Fehl45	ODE45 fixo
0.00000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.10000	0.905139	0.900000	0.905450	0.905238	0.905237	0.908590	0.905139
0.20000	0.820917	0.810900	0.821471	0.821131	0.821130	0.827121	0.820917
0.30000	0.747516	0.733054	0.748252	0.747845	0.747844	0.755855	0.747516
0.40000	0.684774	0.666346	0.685640	0.685207	0.685206	0.694719	0.684774
0.50000	0.632337	0.610373	0.633291	0.632857	0.632855	0.643455	0.632337
0.60000	0.589783	0.564595	0.590797	0.590371	0.590368	0.601727	0.589783
0.70000	0.556735	0.528461	0.557791	0.557368	0.557365	0.569235	0.556735
0.80000	0.532947	0.501509	0.534039	0.533605	0.533602	0.545798	0.532947
0.90000	0.518404	0.483455	0.519535	0.519064	0.519061	0.531446	0.518404
1.00000	0.513417	0.474269	0.514600	0.514051	0.514048	0.526521	0.513417

Erros

0.00000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
0.10000	0.000000e+00	5.139081e-03	3.109192e-04	9.841922e-05	9.824053e-05	3.450729e-03	1.104874e-08
0.20000	0.000000e+00	1.001695e-02	5.543747e-04	2.136905e-04	2.130767e-04	6.204416e-03	9.989167e-09
0.30000	0.000000e+00	1.446208e-02	7.362634e-04	3.290516e-04	3.278898e-04	8.338909e-03	8.692792e-09
0.40000	0.000000e+00	1.842811e-02	8.658829e-04	4.333856e-04	4.316679e-04	9.945591e-03	7.492382e-09
0.50000	0.000000e+00	2.196398e-02	9.544610e-04	5.203819e-04	5.181708e-04	1.111799e-02	6.638539e-09
0.60000	0.000000e+00	2.518863e-02	1.013931e-03	5.872244e-04	5.846269e-04	1.194392e-02	6.351588e-09
0.70000	0.000000e+00	2.827391e-02	1.056044e-03	6.331040e-04	6.302558e-04	1.250043e-02	6.876483e-09
0.80000	0.000000e+00	3.143781e-02	1.091805e-03	6.576822e-04	6.547428e-04	1.285076e-02	8.549943e-09
0.90000	0.000000e+00	3.494937e-02	1.131143e-03	6.594523e-04	6.566132e-04	1.304216e-02	1.190032e-08
1.00000	0.000000e+00	3.914792e-02	1.182655e-03	6.337574e-04	6.312649e-04	1.310377e-02	1.123154e-09

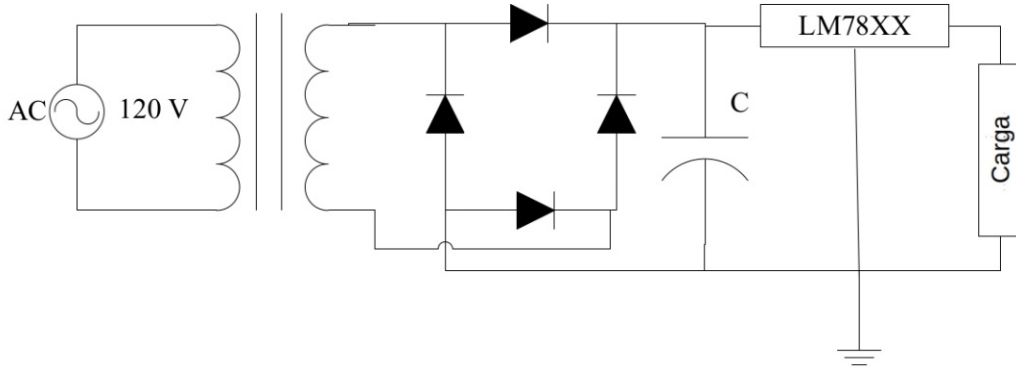


Figura 4: Circuito para implementar uma corrente elétrica contínua.

onde  $V_{\max}$  é a amplitude,  $\nu$  é a frequência, e  $\phi$  o ângulo de fase no instante  $t = 0$ .

A parte negativa de uma meia onda de um período completo é convertida para valores positivos por um *retificador de onda completa* ou um *retificador em ponte* [6], veja a fig. 5.

Os diodos são modelados por uma fonte DC com a voltagem  $V_d$  e uma resistência seguinte  $R_d$ , veja a fig. 6.

Após a retificação, a tensão da eq. (24) é

$$V_c(t) \leq V_{AC}(t) - 2V_d, \quad (25)$$

onde  $V_c$  é tensão do capacitor,  $V_{AC}$  é a tensão AC após a retificação da eq. (24), e  $V_d$  a resistência do modelo dos diodos.

Mesmo assim, a onda ainda não é constante, portanto, o circuito precisa mais componentes. Um *capacitor* (português brasileiro) ou *condensador* (português europeu) [1] é definido pela sua capacitância ou capacidade (C), com a unidade *farad*. A sua tarefa é armazenar carga em caso de fornecimento excessivo do retificador, acima do limite mínimo exigido, e, em compensação, providenciar tensão armazenada de volta para o sistema de controle de

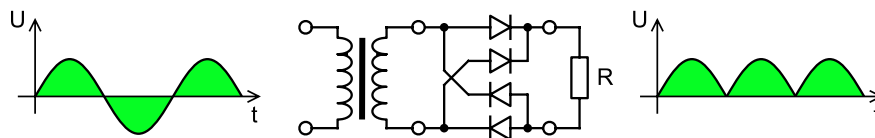


Figura 5: Retificador de onda completa.

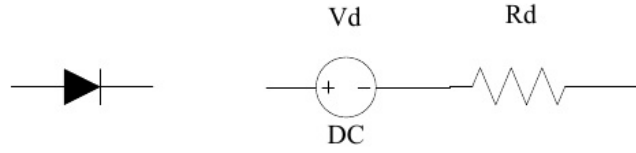


Figura 6: Modelo de diodo como fonte e resistência.

voltagem constante, em caso a tensão caindo abaixo do limite. A componente final é o regulador de voltagem que fornece o DC com a tensão desejada. No circuito é o LM78XX que fornece 5 V. Para poder operar normalmente, o seu Input precisa ficar acima deste valor, 2.5 V neste caso. Consequentemente, o circuito tem duas fases distintas de operação:

- **Fase 1: Carregamento do capacitor**

Quando a voltagem retificada ficar acima da voltagem  $V_c$  do capacitor, o retificador fornece uma corrente para o capacitor e regulador de voltagem, o capacitor carrega. Neste caso temos

$$V_c(t) \leq V_{AC}(t) - 2V_d. \quad (26)$$

- **Fase 2: Descarregamento do capacitor** Quando a voltagem retificada cai abaixo do valor  $V_c$ , o capacitor fornece a corrente, pois a corrente saindo dos diodos do retificador deixa de existir. Um efeito colateral é que a voltagem do capacitor diminui continuamente. Neste caso temos

$$V_c(t) > V_{AC}(t) - 2V_d. \quad (27)$$

- **Modelo de Carga**

Basta considerar o cenário mais pessimista em relação à carga que o circuito tem que fornecer, neste caso  $I_{\max} = 100mA$ .

- **Modelos de Circuitos**

Considerando a fase 1 de carregamento e fase 2 de descarregamento, podemos identificar dois modelos de circuito distintos.

Os dois modelos são mostrados na fig. 7, (a) para a fase de carregamento, (b) para a fase de descarregamento.

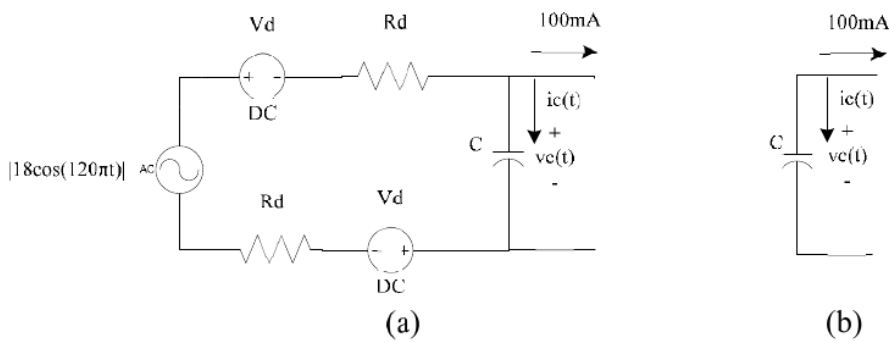


Figura 7: Modelo de circuito em dois modos de operação.

Vamos começar a análise pela equação da corrente do capacitor

$$I_c(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt}. \quad (28)$$

A 1ª Lei de Kirchhoff (Lei das Correntes ou Leis dos Nós) constata um valor nulo  $\sum_k I_k = 0$  de todas as correntes envolvidas em um circuito. Assim, na fase de carregamento temos o balanço

$$C \frac{dV_c(t)}{dt} + I_{\max} = \frac{V_{AC}(t) - 2V_d - 2V_c}{2R_d}. \quad (29)$$



Na fase de descarregamento, então temos

$$C \frac{dV_c(t)}{dt} + I_{\max} = 0. \quad (30)$$

**Tarefa:** Use todos os métodos de resolução de uma EDO da parte teórica deste trabalho para determinar a tensão  $V_c(t)$ . Considere somente um único passo do instante de tempo  $t_n$  para o próximo instante de tempo  $t_{n+1}$  para estimar  $V_c(t_{n+1})$ , dados a tensão atual  $V_c(t_n)$ .

O resultado, usando Euler modificado, é apresentado na figura 8, além de Dormand-Prince.

Os parâmetros devem ser

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \\ V_{\max} &= 18V \\ \nu &= 60Hz \\ V_d &= 1.0V \\ R_d &= 0.02\Omega \\ C &= 100\mu F \\ I_{\max} &= 100mA \end{aligned}$$

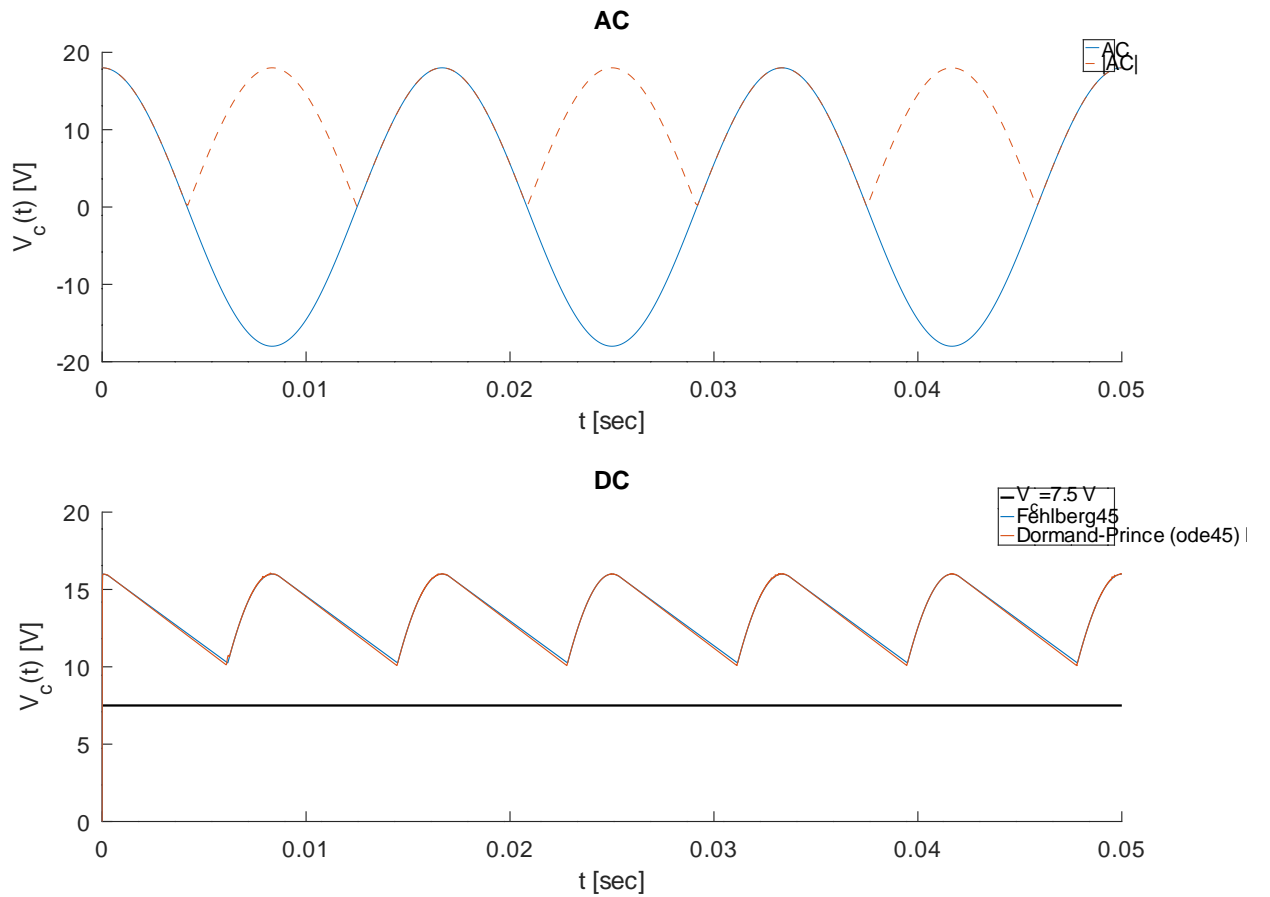


Figura 8: Evolução temporal estimada da tensão  $V_c$ .

## Referências

- [1] Capacitor. Capacitor — Wikipédia, a enciclopédia livre. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Capacitor>, 2021. [Online; acessado 10-July-2021].

- [2] A. Kaw and E.E. Kalu. *Numerical Methods with Applications: Abridged*. Lulu.com, 2009. [https://books.google.de/books?id=bCl\\_AgAAQBAJ](https://books.google.de/books?id=bCl_AgAAQBAJ).
- [3] Lista de Métodos de Runge-Kutta. Lista de métodos de Runge-Kutta — Wikipédia, a enciclopédia livre. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista\\_de\\_m%C3%A9todos\\_Runge-Kutta](https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_de_m%C3%A9todos_Runge-Kutta), 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [4] Lista de Métodos de Runge-Kutta (em inglês). Lista de métodos de Runge-Kutta (em inglês) — Wikipédia, a enciclopédia livre. [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Runge%E2%80%93Kutta\\_methods](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Runge%E2%80%93Kutta_methods), 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [5] Métodos de Runge-Kutta. Métodos de Runge-Kutta — Wikipédia, a enciclopédia livre. [https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_Runge-Kutta](https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta), 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [6] Retificador de onda completa. Retificador de onda completa — Wikipédia, a enciclopédia livre. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Retificador\\_de\\_onda\\_completa](https://pt.wikipedia.org/wiki/Retificador_de_onda_completa), 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [7] Sistema Autônomo. Sistema autônomo — Wikipédia, a enciclopédia livre. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema\\_aut%C3%B4nomo\\_%28matem%C3%A1tica%29](https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_aut%C3%B4nomo_%28matem%C3%A1tica%29), 2021. [Online; acessado 10-July-2021].

**Elaboração:** O resultado deve ser código em Octave que produz as tabelas e gráficos para o problema apresentado. O usuário (neste caso o professor) não deve ter o trabalho de digitar nada, além da linha de comando no Octave que executa o programa principal. Este script principal deve ter o nome `main.m`.

O produto final deve ser um arquivo no formato `zip` com a seguinte sintaxe: `aluno1+aluno2+aluno3.zip`, a ser submetido como resposta por um dos autores. O arquivo `aluno1+aluno2+aluno3.zip` deve conter uma **única** pasta. Duas subpastas devem conter o código fonte e a documentação do projeto.

A documentação deve ser em forma de descrição de projeto, preferencialmente gerado por  $\text{\LaTeX}$ , (ou LibreOffice) contendo os seguintes tópicos:

- Capa do Projeto
  - Título
  - Autoria
  - Data
  - Resumo
- Introdução
- Objetivos
- Metodologia
- Resultados e Avaliação
- Referências Bibliográficas

Qualquer dúvida, ou descobriu um erro no texto? Não hesite em me contactar por E-mail institucional `thomas.rauber@ufes.br` ou na aula (preferencialmente no início, ou no final).

Última atualização: 11 de agosto de 2021, 16:05

*Bom trabalho!*