

Sistemas Realimentados - 2023/2

Nome: Gabrielly Barcelos Cariman

Data limite para entrega: 4/10, 6h da manhã.

Trabalho 3 - Projeto de controladores PID via método do lugar das raízes.

```
I=14; % Seu valor de I
[G1,G2,G3, iae_G1, iae_G3, ts_G2]=ini_t3(I);
datetime('now')
```

```
ans = datetime
      04-Oct-2023 03:27:16
```

Atividade 1: Projeto de um controlador PI para sistema de primeira ordem + tempo morto (G1(s)).

Projetar um controlador PI via método do lugar das raízes usando a FT G1. O controlador resultante C1 deve resultar em um valor de $IAE \leq iae_{G1}$ e erro nulo para entrada degrau.

Mostrar o controlador e o LR utilizado, explicar as escolhas da localização do zero do controlador para atender a especificação e a obtenção de Kp e Ki do LR.

G1

G1 =

$$\exp(-10*s) * \frac{8}{40 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

iae_G1

iae_G1 = 22.3904

Como o sistema possui tempo morto, a aproximação de Pade deve ser utilizada no projeto.

Vou optar pela aproximação de Pade de ordem 1 para adicionar a menor complexidade possível ao LR.

G1_pade = pade(G1,1)

G1_pade =

$$\frac{-8 s + 1.6}{40 s^2 + 9 s + 0.2}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

A FT do controlador PI é dado por:

$$C(s) = K_p \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s}$$

O projeto do PI via LR envolve:

- Adicionar um polo na origem;
- Escolher a localização do zero;
- Definir o ganho K_p ;
- Calcular o ganho K_i .

Vamos fazer esses passos:

Adicionar um polo na origem:

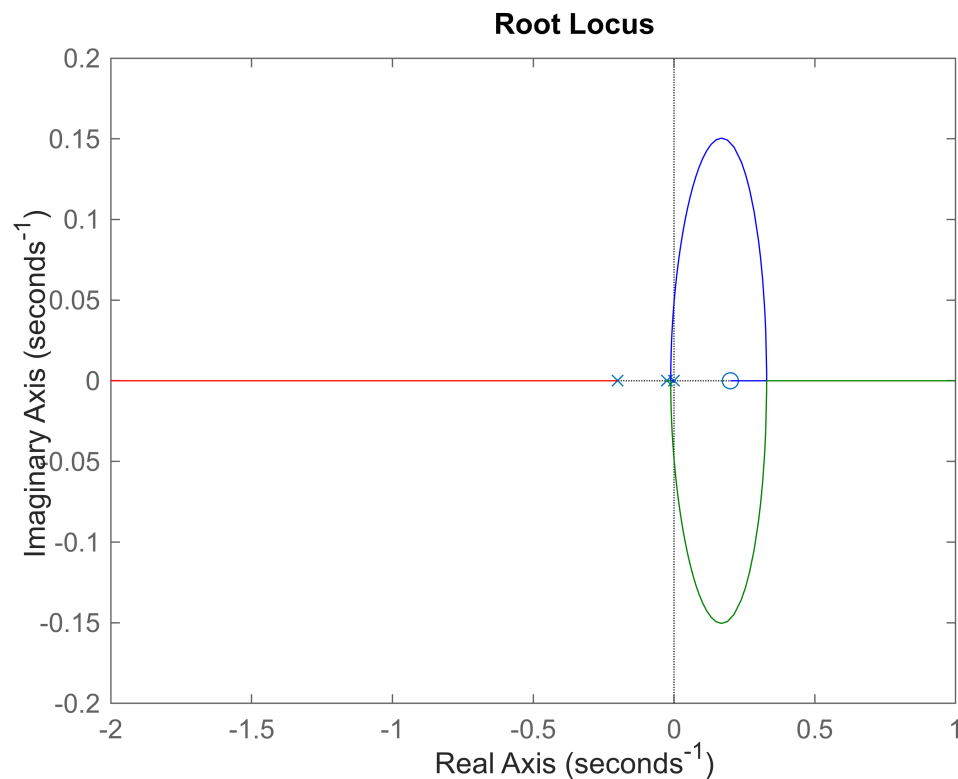
```
s=tf('s');  
G1_pade_polo = G1_pade * 1/s
```

```
G1_pade_polo =
```

```
      -8 s + 1.6  
-----  
40 s^3 + 9 s^2 + 0.2 s
```

```
Continuous-time transfer function.  
Model Properties
```

```
rlocus(G1_pade_polo)
```



Escolher a localização do zero:

G1_pade

G1_pade =

$$\frac{-8s + 1.6}{40s^2 + 9s + 0.2}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

$$G1_pade(s) = \frac{-8s + 1.6}{40s^2 + 9s + 0.2} = \frac{-8s + 1.6}{(s + 0.025)(s + 0.2)}$$

Uma abordagem inicial que pode proporcionar bons resultados seria executar um procedimento semelhante ao método de síntese direta.

Para simular um pouco do procedimento realizado no método de síntese direta, precisamos que o zero de PI anule um polo de G1(s).

Portanto, inicialmente, vamos posicionar o zero de PI em -0.025 para que ele anule o polo em -0.025 de G1(s).

Vamos analisar o resultado dessa modificação:

G1_pade_polo_zero = G1_pade_polo*(s+0.025)

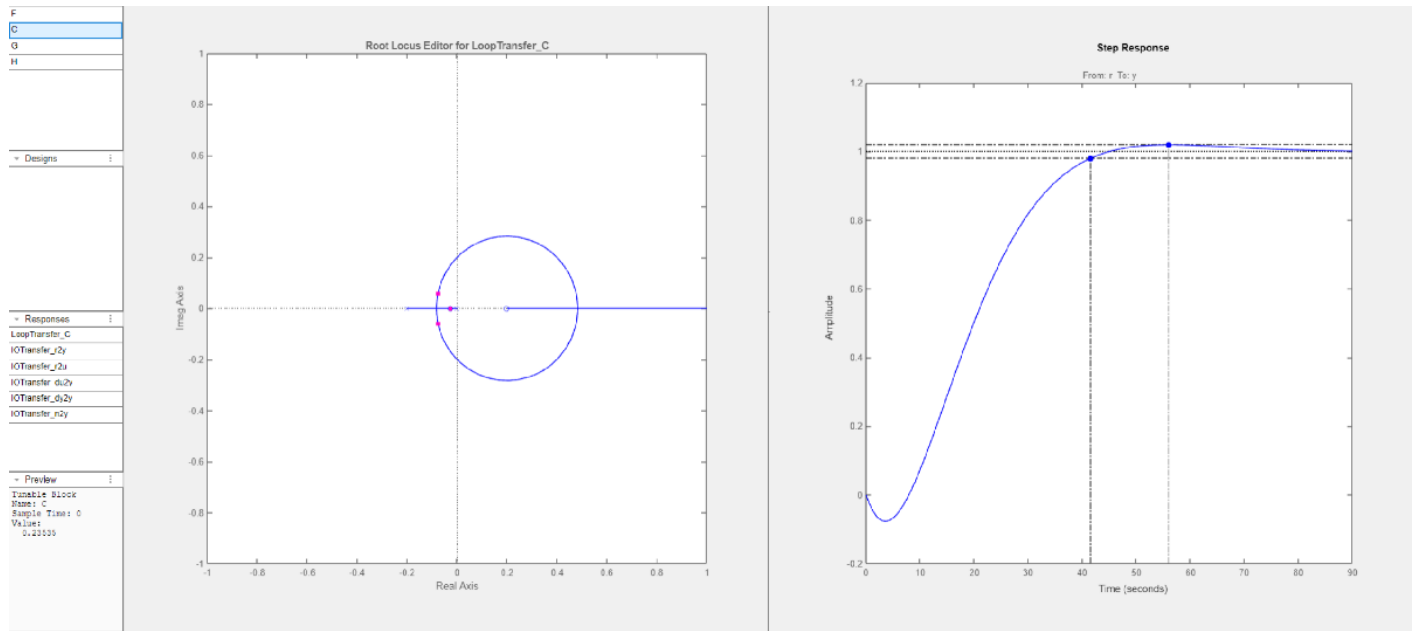
G1_pade_polo_zero =

$$\frac{-8 s^2 + 1.4 s + 0.04}{40 s^3 + 9 s^2 + 0.2 s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
%rltool(G1_pade_polo_zero)
```

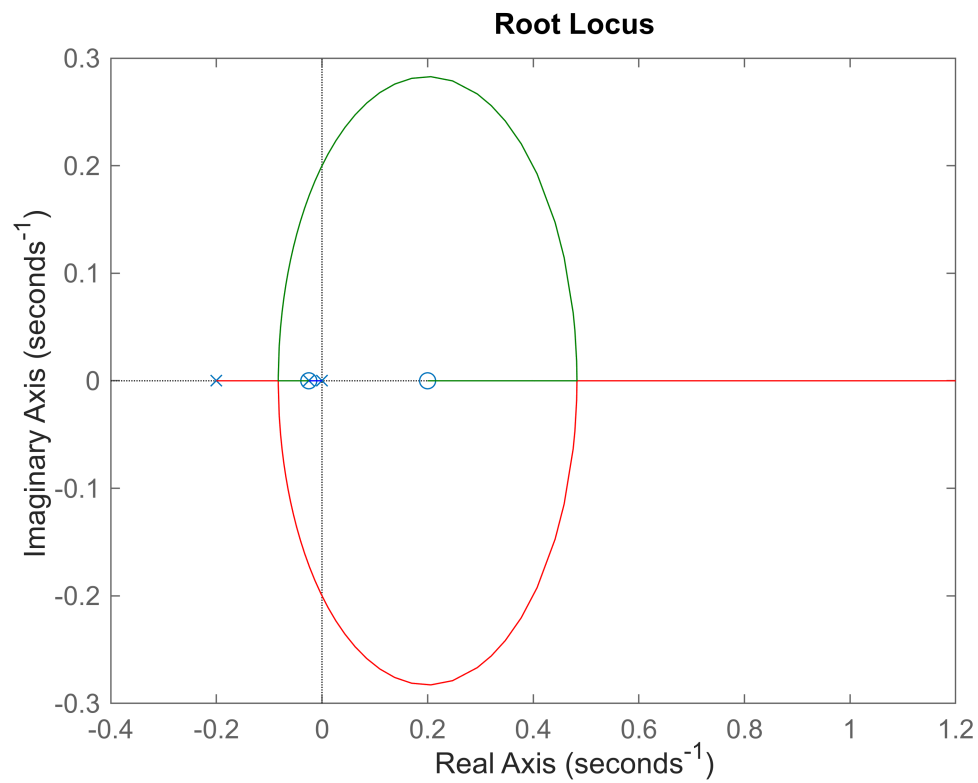
Ao posicionar o zero de PI em -0.025, anulamos o polo em -0.025 de G1(s).



É possível observar no gráfico acima que essa ótima resposta foi obtida para o zero em -0.025 e um ganho de 0.23535.

Essa resposta possui uma sobressinal de 1.74%, e o seu tempo de estabilização é 42.4 segundos.

```
rlocus(G1_pade_polo_zero)
```



A FT do controlador PI é dado por:

$$C(s) = K_p \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s}$$

Logo, temos que $K_p =$ ganho.

Como o zero é em -0.025. Temos:

$$\frac{K_i}{K_p} = 0.025$$

$$K_i = 0.025K_p$$

$$K_p = 0.23535$$

$$K_p = 0.2354$$

$$\begin{aligned} K_{i_sobre_Kp} &= 0.025; \\ K_i &= K_{i_sobre_Kp} * K_p \end{aligned}$$

$$K_i = 0.0059$$

$$C1 = K_p * ((s + K_{i_sobre_Kp}) / s)$$

$$C1 =$$

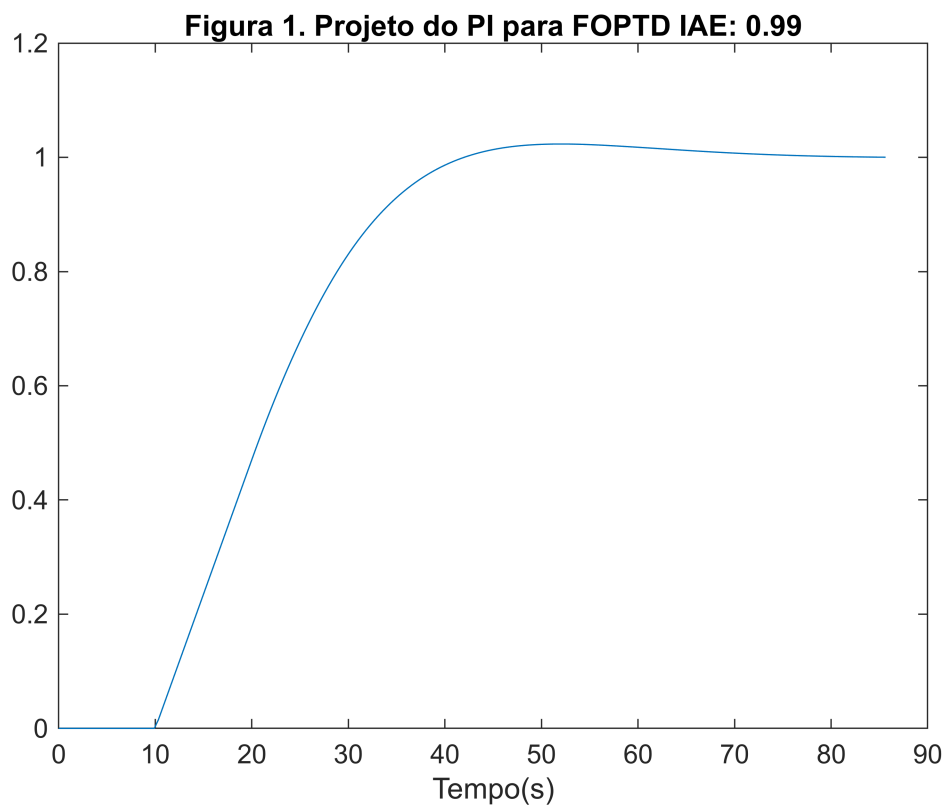
$$0.2354 \, s + 0.005884$$

s

Continuous-time transfer function.
Model Properties

Apresentação do resultado: simulação e o cálculo do IAE usando o controlador C1 projetado.

```
M1=feedback(C1*G1,1);  
[y,t]=step(M1);  
t=linspace(0,max(t),200);  
y=step(M1,t);  
plot(t,y);xlabel('Tempo(s)');  
iae1=trapz(t,abs(1-y));  
ss=sprintf('Figura 1. Projeto do PI para FOPTD IAE: %3.2f', iae1/iae_G1);  
title(ss);
```



iae1

iae1 = 22.2451

iae_G1

iae_G1 = 22.3904

erro = 1-y(end)

erro = -1.8054e-04

O gráfico acima comprova que o controlador resultante C1 atendeu a todas as especificações e obteve um valor de $IAE \leq iae_{G1}$, $22.2451 \leq 22.3904$, e erro nulo para uma entrada de degrau.

Atividade 2: Projeto de um controlador C2 tipo PD via método do LR para o modelo de ordem 2 $G2(s)$ que permita obter o tempo de estabilização $ts \leq ts_{G2}$ e com sobrelevação menor que 1%.

Mostrar o controlador e o LR utilizado, explicar as escolhas da localização do zero do controlador para atender a especificação e a obtenção de K_p e K_d do LR.

G2

G2 =

$$\frac{14}{s^3 + 45s^2 + 200s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

ts_G2

ts_G2 = 0.2917

$$G2(s) = \frac{14}{s^3 + 45s^2 + 200s} = \frac{14}{s(s+5)(s+40)}$$

Uma abordagem inicial que pode proporcionar bons resultados seria executar um procedimento semelhante ao método de síntese direta.

Para simular um pouco do procedimento realizado no método de síntese direta, precisamos que o zero de PD anule um polo de $G2(s)$.

Portanto, inicialmente, vamos posicionar o zero de PD na origem para que ele anule o polo da origem de $G2(s)$.

Ao fazer isso, é possível transformar o denominador de $G2(s)$, que era um polinômio de terceiro grau, em um polinômio de segundo grau.

Vamos analisar o resultado dessa modificação:

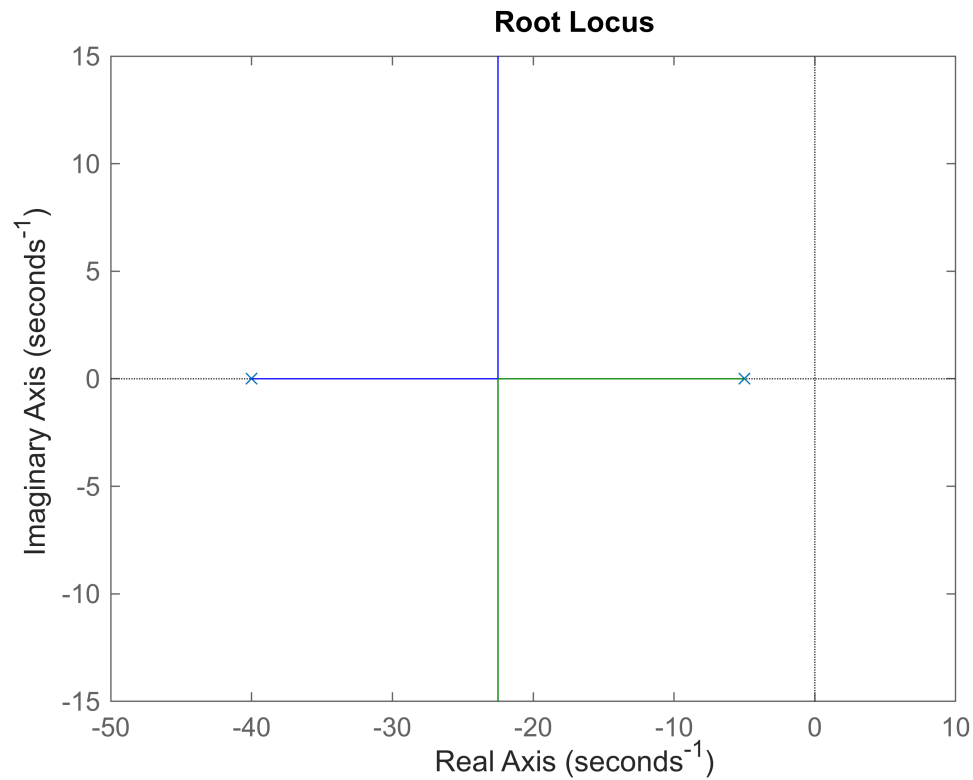
```
s=tf('s');
G2_zero = G2*s
```

G2_zero =

$$\frac{14s}{s^3 + 45s^2 + 200s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
rlocus(G2_zero)
```

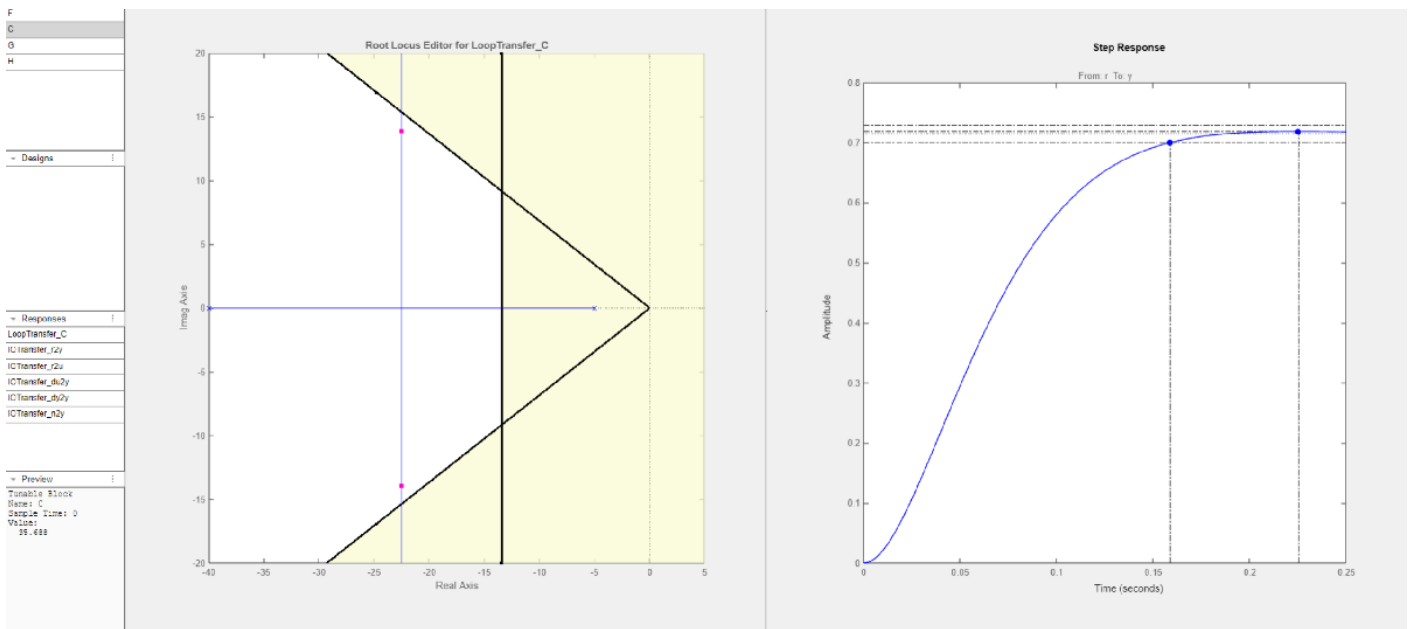


```
%rltool(G2)
```

Ao posicionar o zero de PD na origem, anulamos o polo de origem de $G2(s)$.

Com isso, transformamos o denominador de $G2(s)$ em um polinômio de segundo grau.

Agora, é possível marcar no gráfico da resposta apenas as áreas em branco que apresentam um ganho que mantém a especificação correta:



É possível observar no gráfico acima que essa ótima resposta foi obtida para o zero na origem e um ganho de 35.688.

Essa resposta possui uma sobressinal de 0.62%, e o seu tempo de estabilização, de aproximadamente 0.15 segundos, atendendo a todas as especificações.

$$G2_zero_ganho = 35.688 * G2_zero$$

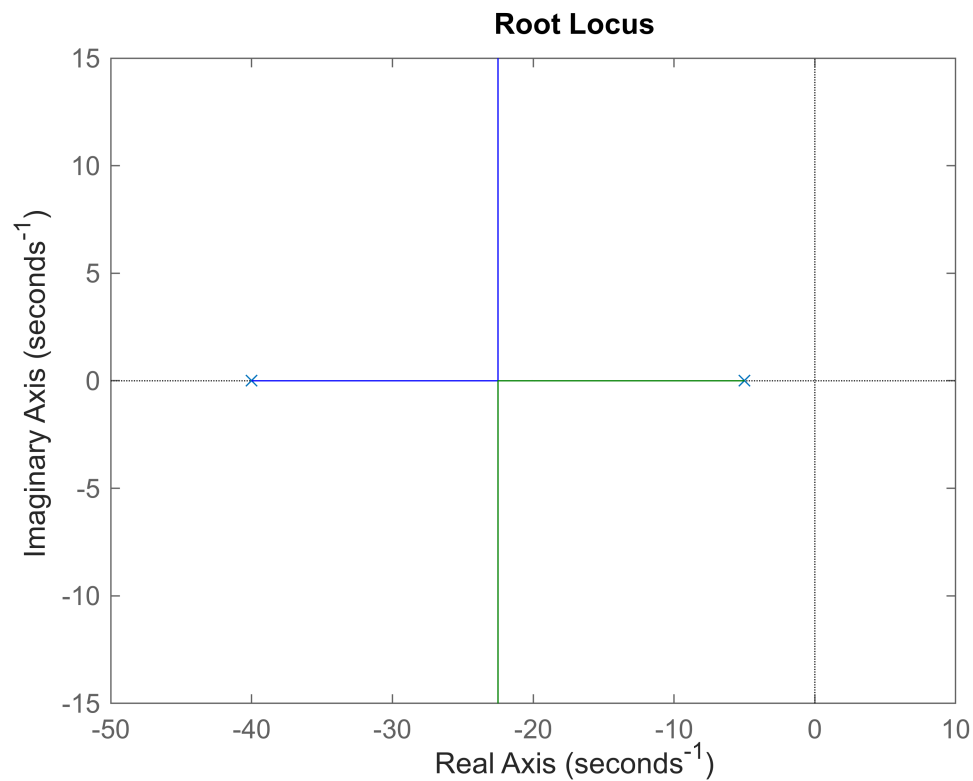
$$G2_zero_ganho =$$

$$499.6 \text{ s}$$

$$s^3 + 45 s^2 + 200 s$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

$$rlocus(G2_zero_ganho)$$



A FT do controlador PD é dado por:

$$C(s) = K_p + K_d s$$

Obtivemos a resposta acima ao multiplicar $G_2(s)$ por s (zero na origem) e, posteriormente, pelo ganho de 35.688.

Portanto, podemos identificar o controlador que multiplicou $G_2(s)$ como:

$$C(s) = 35.688 * s$$

Comparando com a primeira equação apresentada do PD, temos que:

$$K_p = 0$$

$$K_d = 35.688$$

$$K_p = 0$$

$$K_p = 0$$

$$K_d = 35.688$$

$$K_d = 35.6880$$

$$C_2 = K_p + K_d * s$$

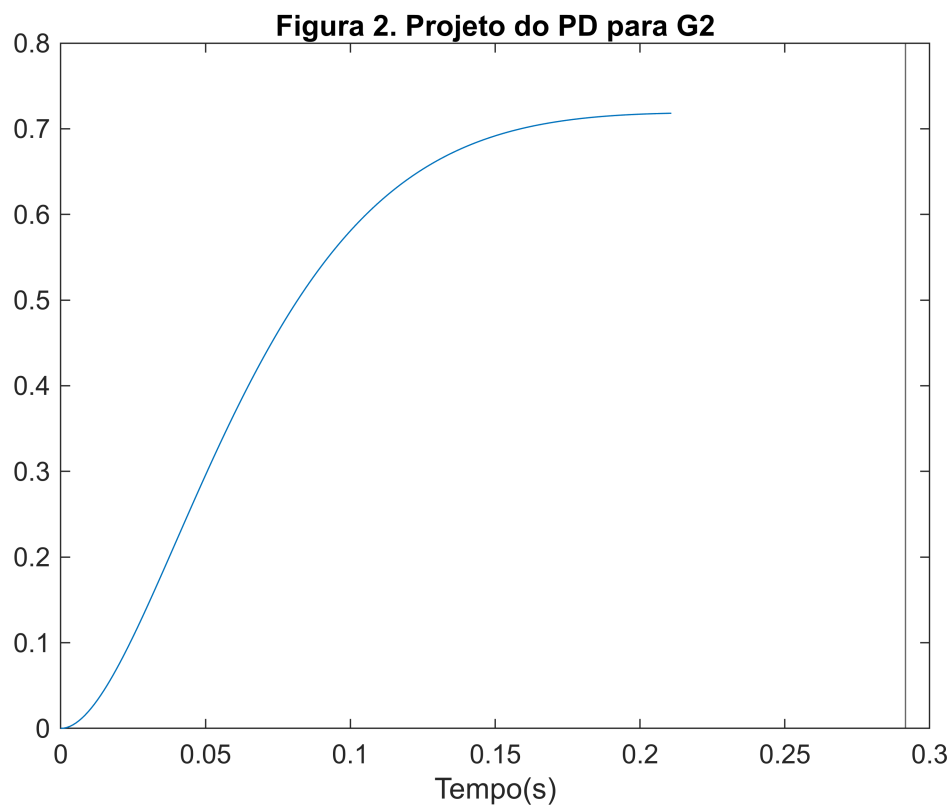
$$C_2 =$$

35.69 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties

Abaixo a simulação com o controlador C2 projetado.

```
M2=feedback(C2*G2,1);  
[y,t]=step(M2);  
t=linspace(0,max(t),200);  
y=step(M2,t);  
plot(t,y);xline(ts_G2);  
xlabel('Tempo(s)');title('Figura 2. Projeto do PD para G2')
```



```
S = stepinfo(M2);  
up = S.Overshoot
```

```
up = 0.6200
```

```
ts = S.SettlingTime
```

```
ts = 0.1586
```

```
ts_G2
```

```
ts_G2 = 0.2917
```

A partir do exposto, podemos constatar que o controlador C2 atendeu a todas as especificações, obtendo um valor de $ts \leq ts_{G2}$, $0.1586 \leq 0.2917$, e sobrelevação de 0.62%, menor que 1%.

Atividade 3: Projeto de um controlador C3 PI ou PID para o modelo de ordem 4 G3(s) tal que se tenha $IAE \leq iae_{G3}$.

Mostrar o(s) LR utilizado(s), explicar as escolhas para obter o controlador e atender a especificação e a obtenção dos ganhos do PID no LR.

G3

G3 =

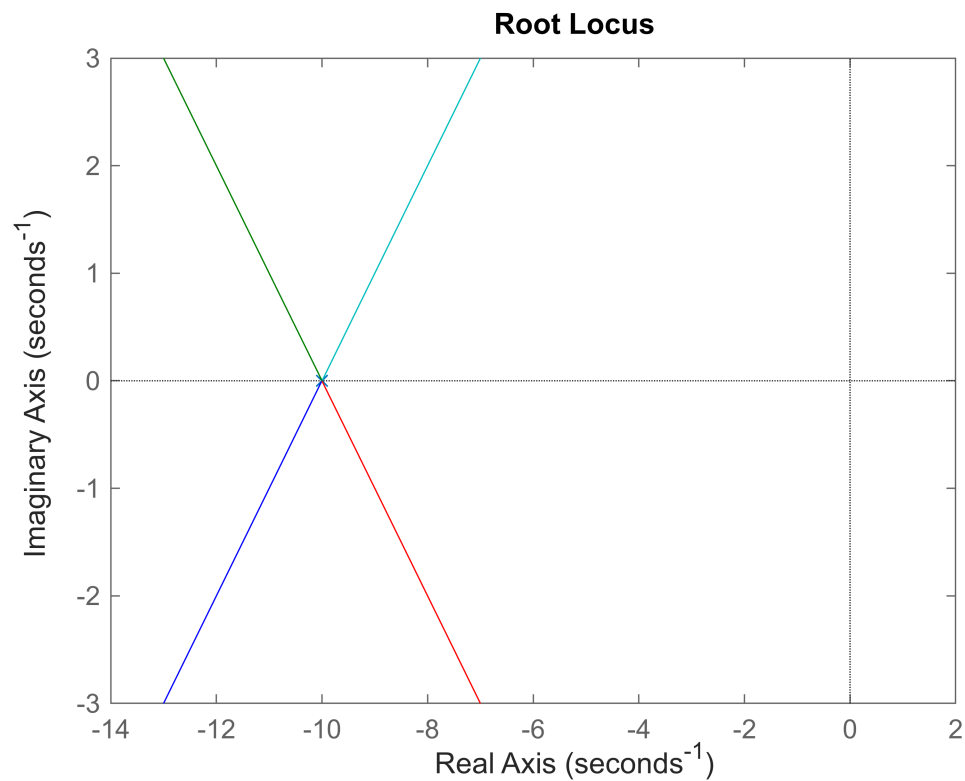
$$\frac{1200}{s^4 + 40 s^3 + 600 s^2 + 4000 s + 10000}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

iae_G3

iae_G3 = 0.3663

rlocus(G3)



• **Primeira tentativa de obter o controle:**

Vamos começar projetando um PI:

A FT do controlador PI é dado por:

$$C(s) = K_p \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s}$$

O projeto do PI via LR envolve:

- Adicionar um polo na origem;
- Escolher a localização do zero;
- Definir o ganho K_p ;
- Calcular o ganho K_i .

Vamos fazer esses passos:

Adicionar um polo na origem:

```
s=tf('s');
G3_polo = G3 * 1/s
```

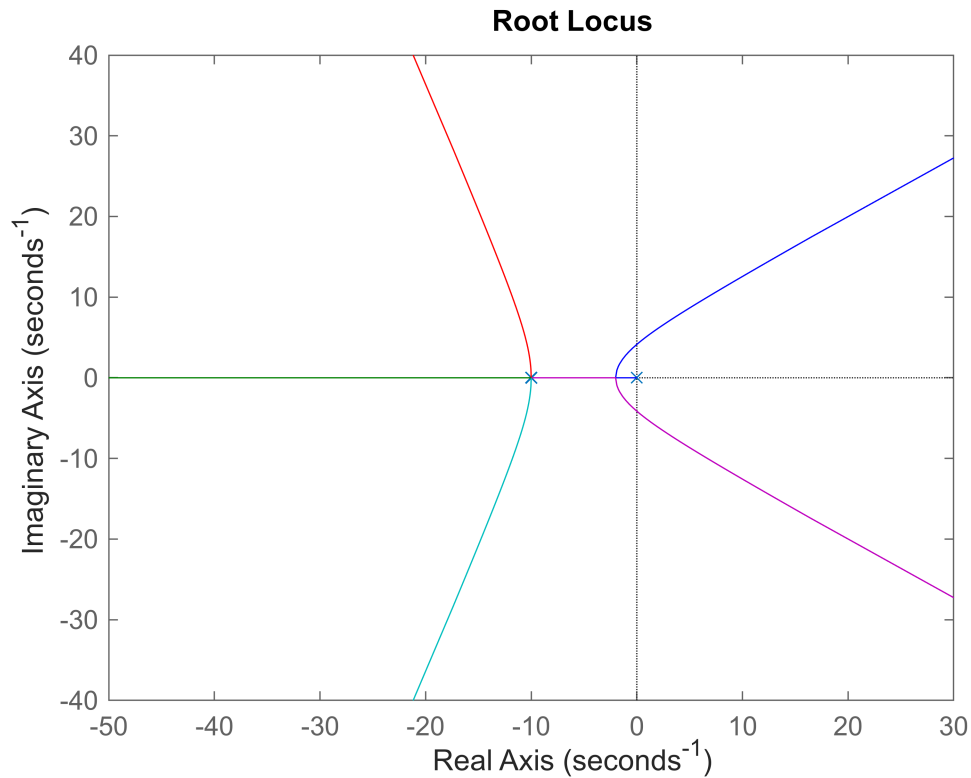
```
G3_polo =
```

1200

$$s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

`rlocus(G3_polo)`



Escolher a localização do zero:

G3

G3 =

$$\frac{1200}{s^4 + 40 s^3 + 600 s^2 + 4000 s + 10000}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

$$G3(s) = \frac{1200}{s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10000} = \frac{1200}{(s + 10)^4}$$

Uma abordagem inicial que pode proporcionar bons resultados seria executar um procedimento semelhante ao método de síntese direta.

Para simular um pouco do procedimento realizado no método de síntese direta, precisamos que o zero de PI anule um polo de G3(s).

Portanto, inicialmente, vamos posicionar o zero de PI em -10 para que ele anule o polo em -10 de G3(s).

Vamos analisar o resultado dessa modificação:

```
G3_polo_zero = G3_polo*(s+5.25)
```

```
G3_polo_zero =
```

$$\frac{1200 s + 6300}{s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
G3_polo_zero = G3_polo*(s+10)
```

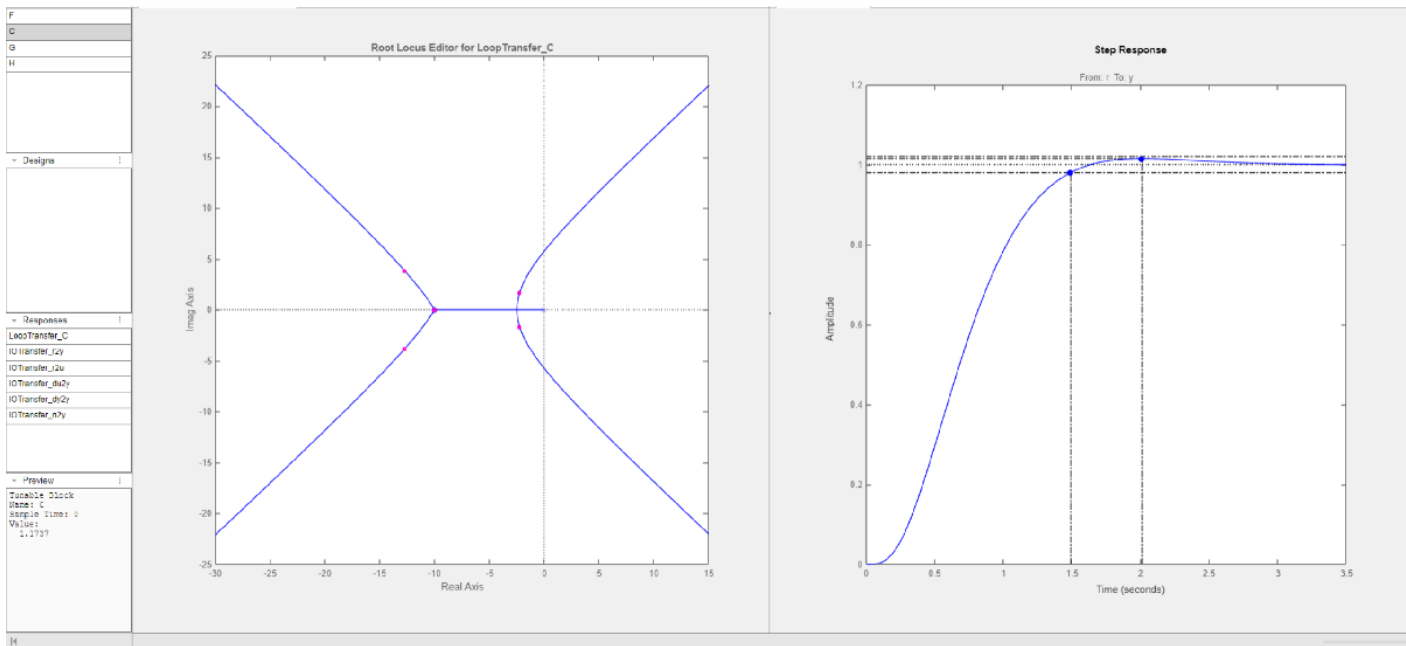
```
G3_polo_zero =
```

$$\frac{1200 s + 12000}{s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
%rltool(G3_polo)
```

Ao posicionar o zero de PI em -10, anulamos o polo em -10 de G3(s).



É possível observar no gráfico acima que essa resposta foi obtida para o zero em -10 e um ganho de 1.1737.

Essa resposta possui uma sobressinal de 1.5%, e o seu tempo de estabilização é 1.49 segundos.

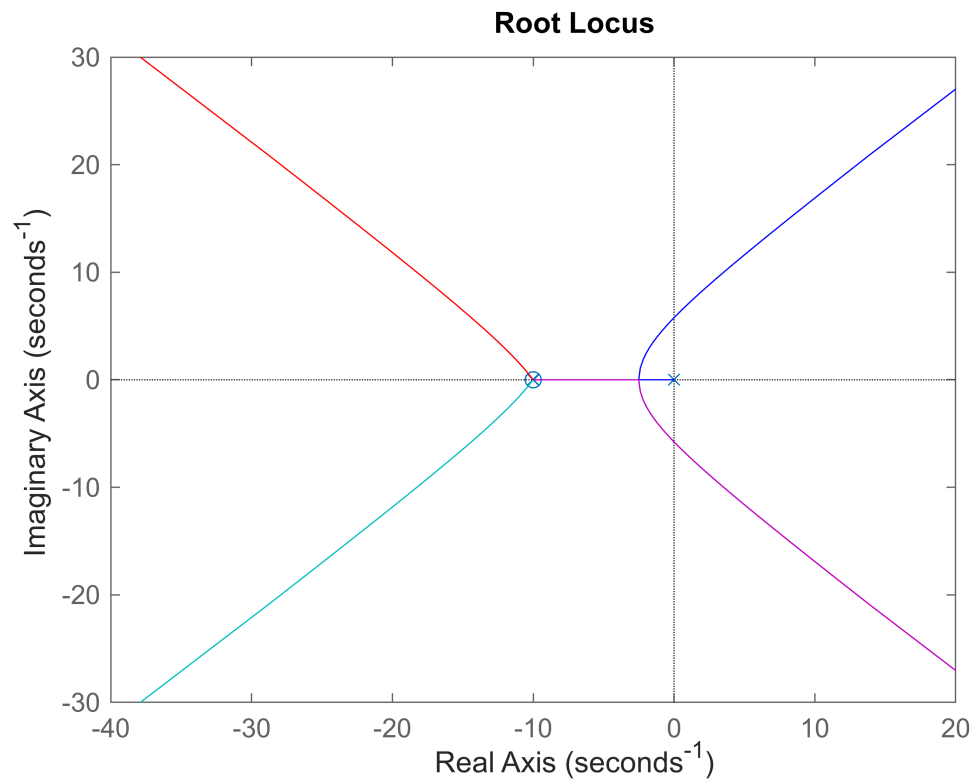
```
G3_polo_zero_ganho = G3_polo_zero*1.1737
```

G3_polo_zero_ganho =

$$\frac{1408 s + 1.408e04}{s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

rlocus(G3_polo_zero_ganho)



A FT do controlador PI é dado por:

$$C(s) = K_p \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s}$$

Logo, temos que $K_p = \text{ganho}$.

Como o zero é em -10. Temos:

$$\frac{K_i}{K_p} = 10$$

$$K_i = 10K_p$$

Kp = 1.1737

Kp = 1.1737


```
Ki_sobre_Kp = 10;  
Ki = Ki_sobre_Kp*Kp
```

```
Ki = 11.7370
```

```
C3 = Kp *((s+Ki_sobre_Kp)/s)
```

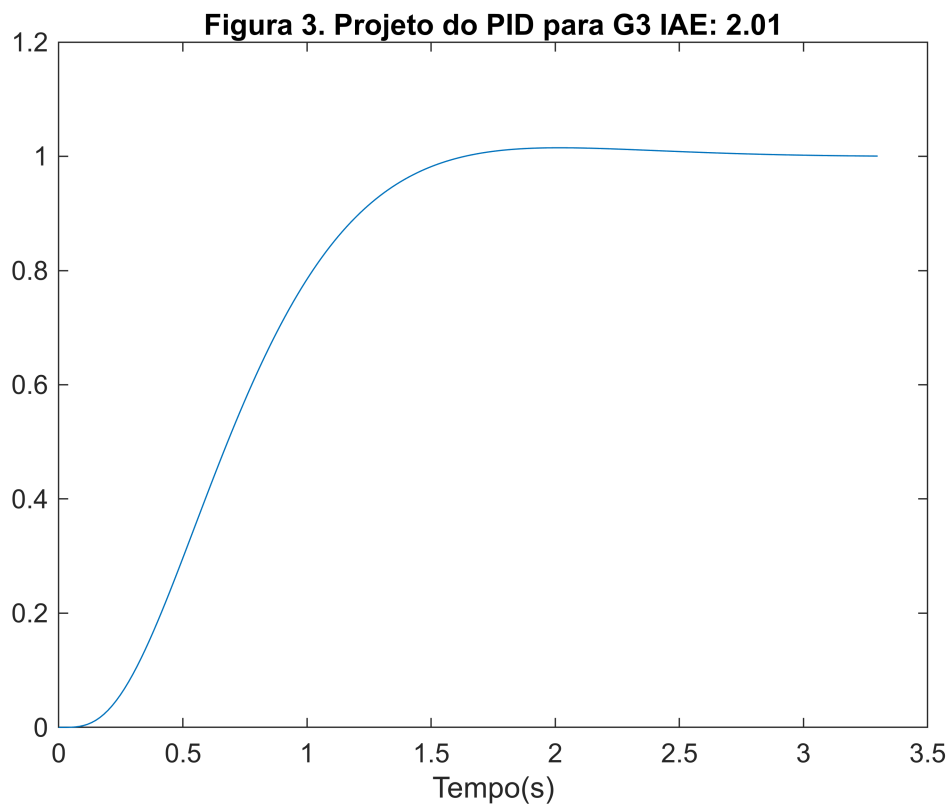
```
C3 =
```

$$\frac{1.174 s + 11.74}{s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

Abaixo a simulação e o cálculo do IAE usando o controlador C3 projetado.

```
M3=feedback(C3*G3,1);  
[y,t]=step(M3);  
t=linspace(0,max(t),200);  
y=step(M3,t);  
plot(t,y);xlabel('Tempo(s)');  
iae3=trapz(t,abs(1-y));  
ss=sprintf('Figura 3. Projeto do PID para G3 IAE: %.2f', iae3/iae_G3);  
title(ss);
```



Mas essa resposta apenas com esse PI não conseguiu atender ao que era pedido:

```
iae3
```

```
iae3 = 0.7352
```

```
iae_G3
```

```
iae_G3 = 0.3663
```

Vamos modelar um PD agora para construir o PID:

Uma abordagem inicial que pode proporcionar bons resultados seria executar um procedimento semelhante ao método de síntese direta.

Para simular um pouco do procedimento realizado no método de síntese direta, precisamos que o zero de PD anule um polo de $G3(s)$.

Portanto, inicialmente, vamos posicionar o zero de PD em -10 para que ele anule um polo em -10 de $G3(s)$.

Vamos analisar o resultado dessa modificação:

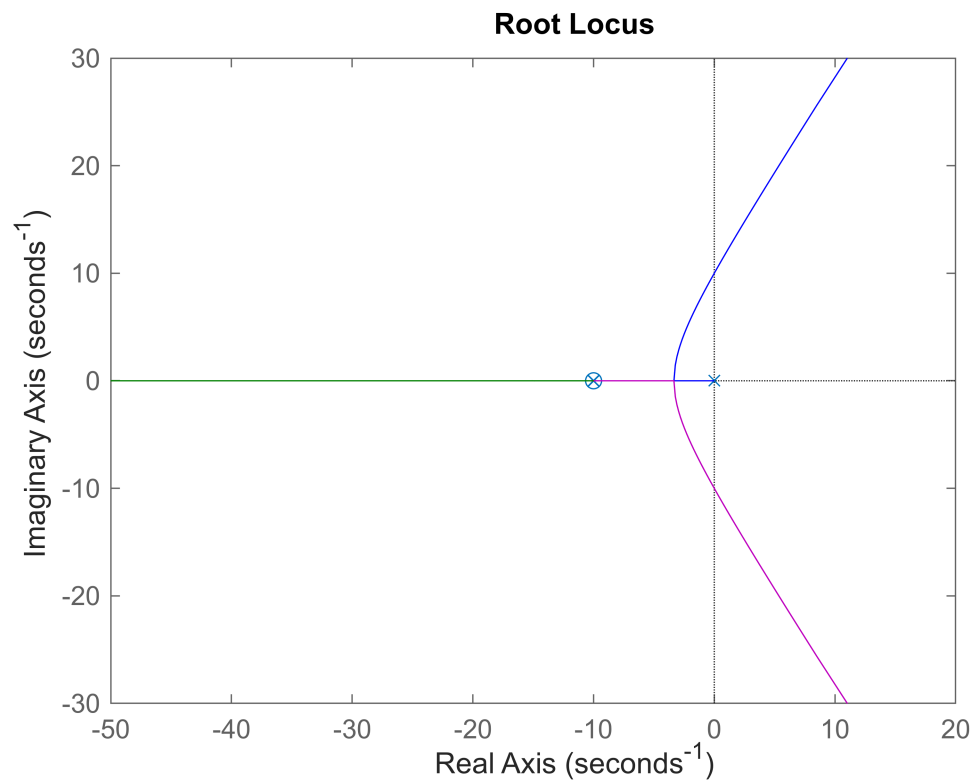
```
s=tf('s');  
G3_polo_zero_zero = G3_polo_zero_ganho*(s+10)
```

```
G3_polo_zero_zero =
```

```
      1408 s^2 + 2.817e04 s + 140844  
-----  
s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s
```

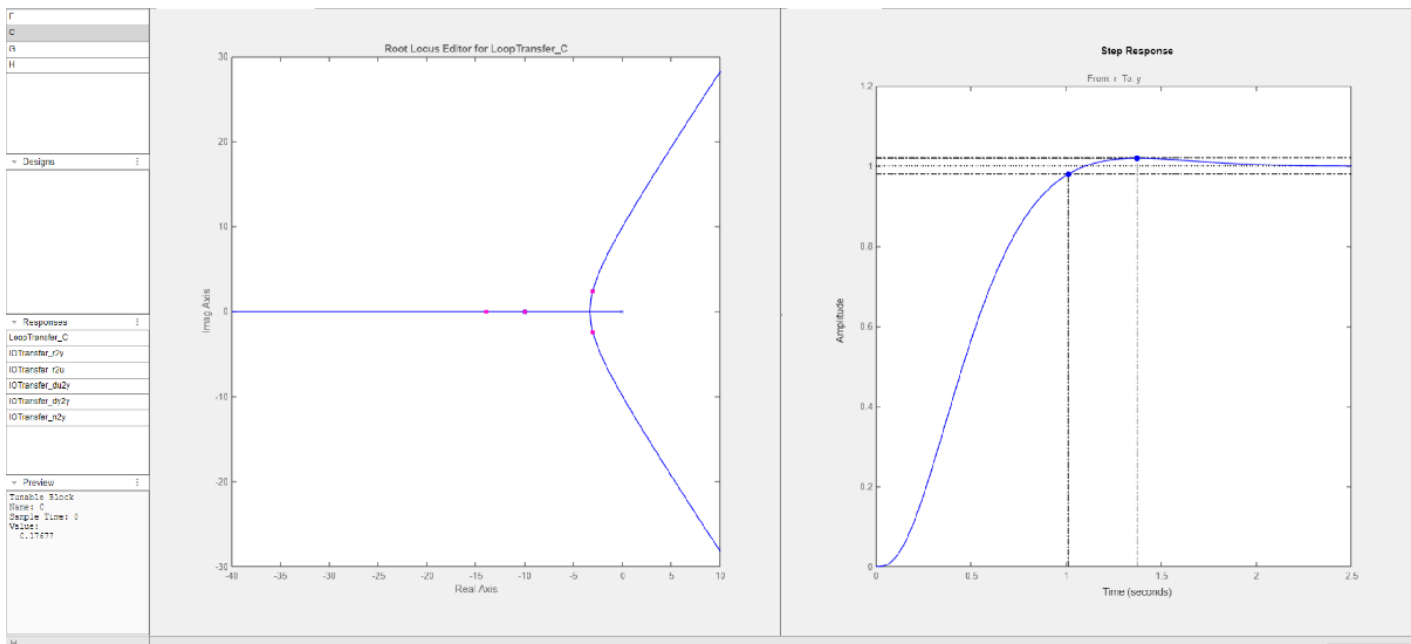
```
Continuous-time transfer function.  
Model Properties
```

```
rlocus(G3_polo_zero_zero)
```



```
%rltool(G3_polo_zero_ganho)
```

Ao posicionar o zero de PD em -10, anulamos um polo em -10 de $G_3(s)$.



É possível observar no gráfico acima que essa resposta foi obtida para o zero em -10 e um ganho de 0.17677.

Essa resposta possui uma sobressinal de 1.88%, e o seu tempo de estabilização, de aproximadamente 1.01 segundos.

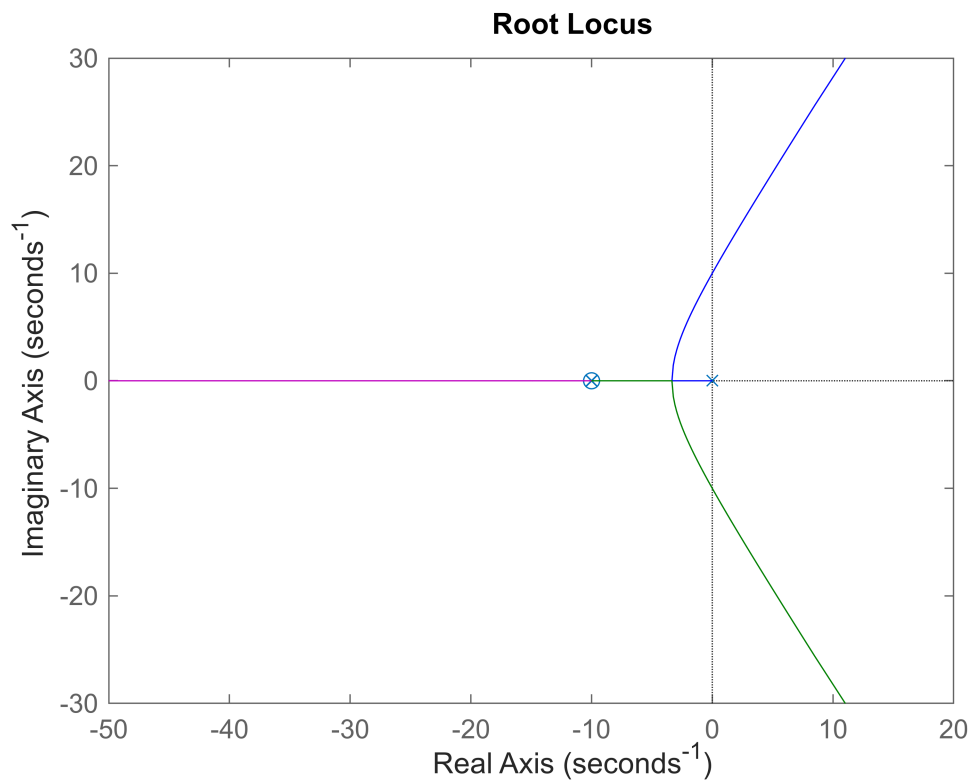
```
G3_polo_zero_zero_ganho = 0.17677*G3_polo_zero_zero
```

```
G3_polo_zero_zero_ganho =
```

$$\frac{249 s^2 + 4979 s + 2.49e04}{s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
rlocus(G3_polo_zero_zero_ganho)
```



```
C3 = (1/s)*(s+10)*(s+10)*0.17677*1.1737
```

```
C3 =
```

$$\frac{0.2075 s^2 + 4.149 s + 20.75}{s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
Kd = 0.2075
```

```
Kd = 0.2075
```

$K_p = 4.149$

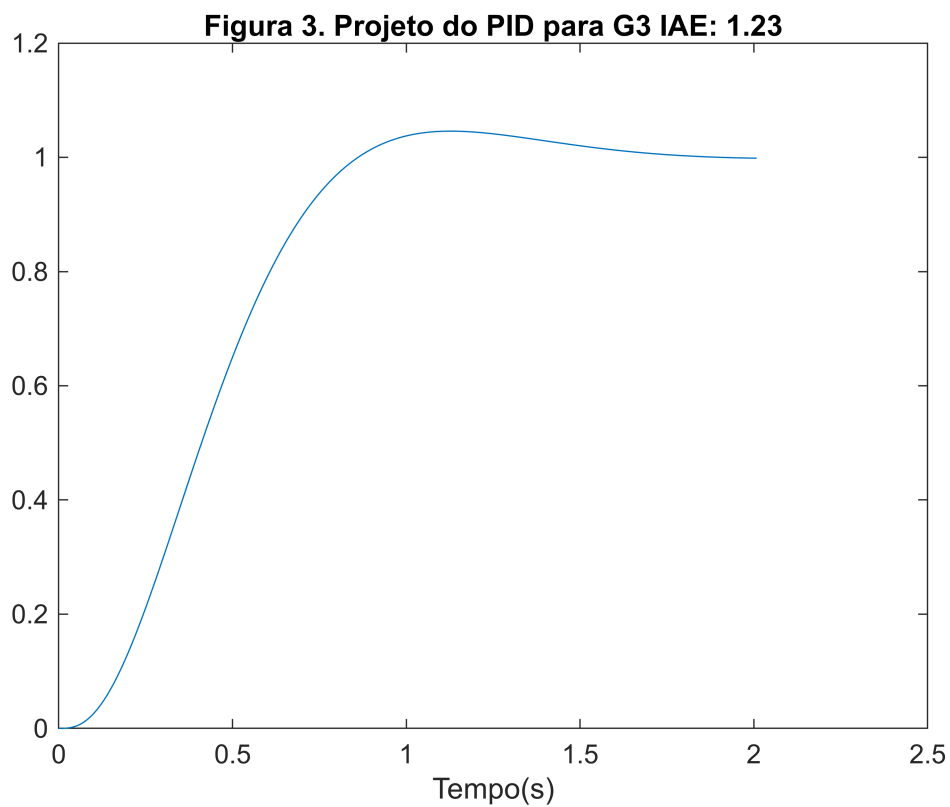
$K_p = 4.1490$

$K_i = 20.75$

$K_i = 20.7500$

Abaixo a simulação e o cálculo do IAE usando o controlador C3 projetado.

```
M3=feedback(C3*G3,1);  
[y,t]=step(M3);  
t=linspace(0,max(t),200);  
y=step(M3,t);  
plot(t,y);xlabel('Tempo(s)');  
iae3=trapz(t,abs(1-y));  
ss=sprintf('Figura 3. Projeto do PID para G3 IAE: %3.2f', iae3/iae_G3);  
title(ss);
```



iae3

```
iae3 = 0.4504
```

```
iae_G3
```

```
iae_G3 = 0.3663
```

- **Segunda tentativa de obter o controle:**

Vamos usar apenas o rltool.

Vamos começar projetando um PI que tenha alto UP e seja rápido para o PD amortecer depois.

A FT do controlador PI é dado por:

$$C(s) = K_p \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s}$$

O projeto do PI via LR envolve:

- Adicionar um polo na origem;
- Escolher a localização do zero;
- Definir o ganho K_p ;
- Calcular o ganho K_i .

Vamos fazer esses passos:

Adicionar um polo na origem:

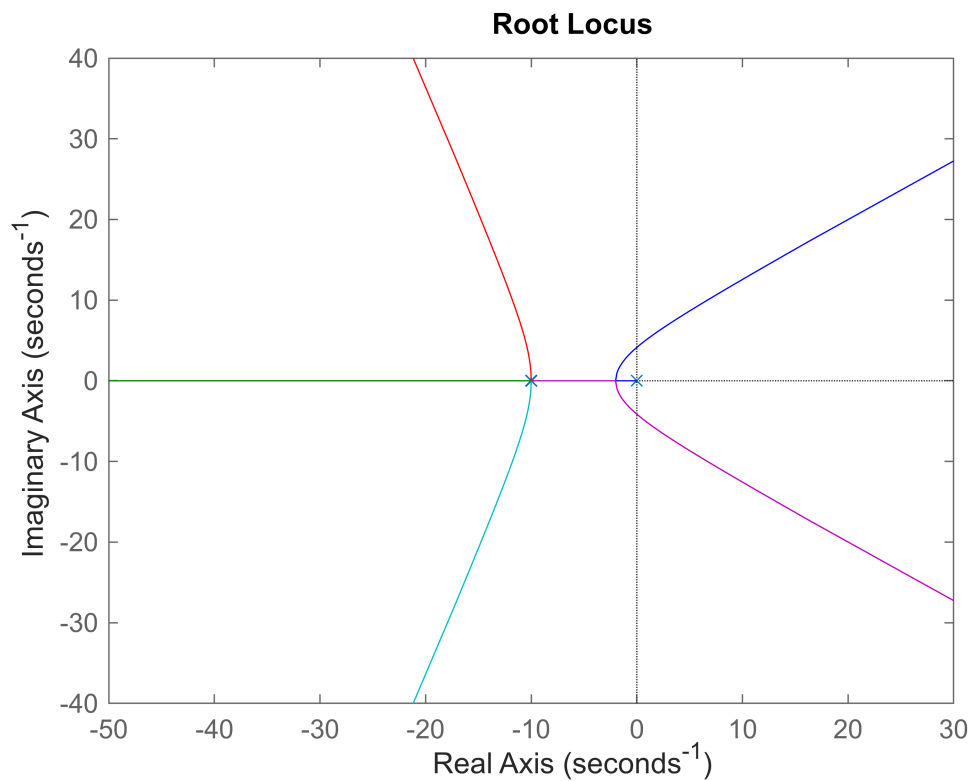
```
s=tf('s');  
G3_polo = G3 * 1/s
```

```
G3_polo =
```

```
          1200  
-----  
s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s
```

```
Continuous-time transfer function.  
Model Properties
```

```
rlocus(G3_polo)
```



Escolher a localização do zero:

G3

G3 =

$$\frac{1200}{s^4 + 40 s^3 + 600 s^2 + 4000 s + 10000}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

$$G3(s) = \frac{1200}{s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10000} = \frac{1200}{(s + 10)^4}$$

Definição de um zero com alto UP:

G3_polo_zero = G3_polo*(s+5.25)

G3_polo_zero =

$$\frac{1200 s + 6300}{s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

`%rltool(G3_polo)`

É possível observar acima que essa resposta foi obtida para o zero em -5.25 e um ganho de 14.525.

```
G3_polo_zero_ganho = G3_polo_zero*14.525
```

```
G3_polo_zero_ganho =
```

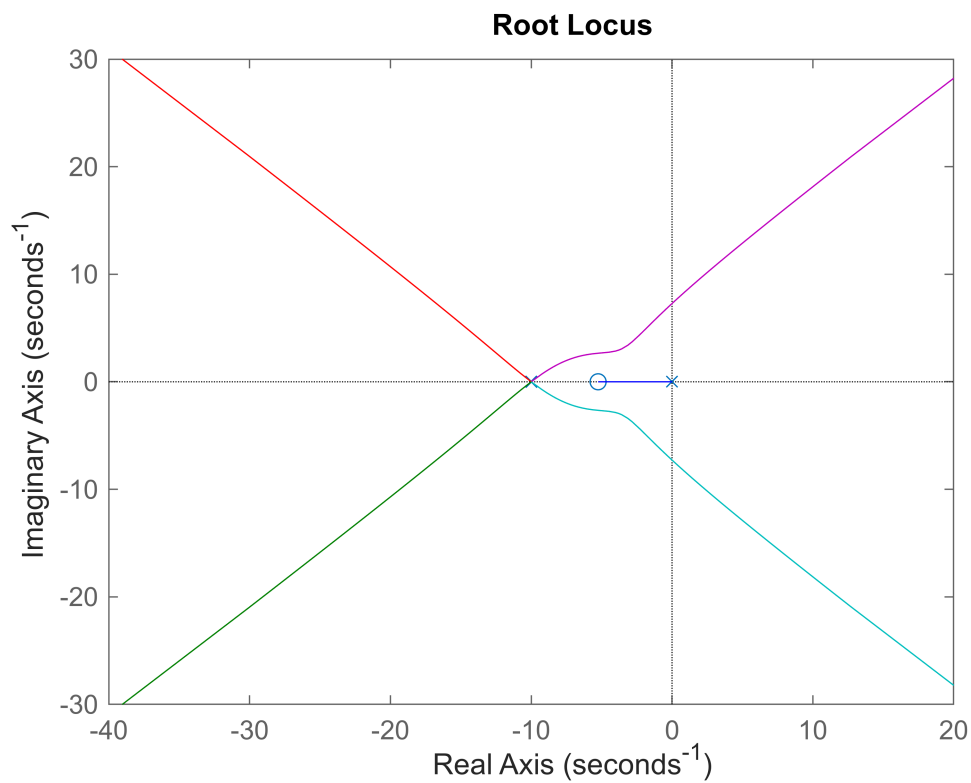
```

      17430 s + 9.151e04
-----
s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s

```

```
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
rlocus(G3_polo_zero_ganho)
```



A FT do controlador PI é dado por:

$$C(s) = K_p \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s}$$

Logo, temos que $K_p = \text{ganho}$.

Como o zero é em -10. Temos:

$$\frac{K_i}{K_p} = 10$$

$$K_i = 10K_p$$

$$K_p = 14.525$$

$$K_p = 14.5250$$

$$\begin{aligned} K_{i_sobre_Kp} &= 5.25; \\ K_i &= K_{i_sobre_Kp} * K_p \end{aligned}$$

$$K_i = 76.2563$$

$$C3 = K_p * ((s + K_{i_sobre_Kp}) / s)$$

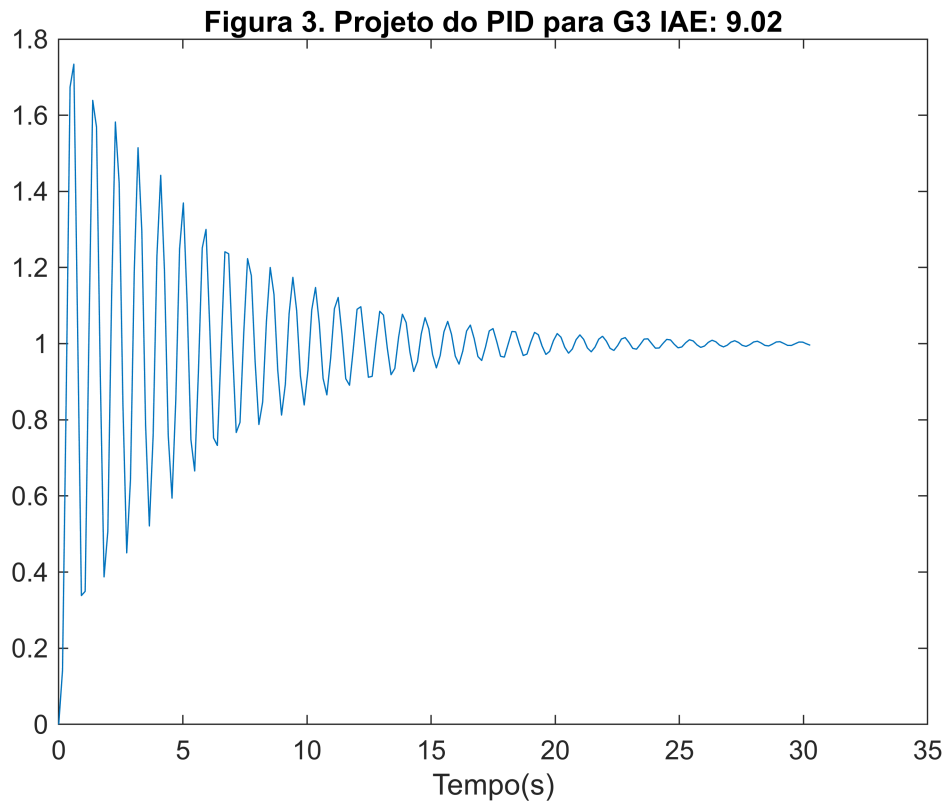
$$C3 =$$

$$\frac{14.53 \, s + 76.26}{s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

Abaixo a simulação e o cálculo do IAE usando o controlador C3 projetado.

```
M3=feedback(C3*G3,1);
[y,t]=step(M3);
t=linspace(0,max(t),200);
y=step(M3,t);
plot(t,y);xlabel('Tempo(s)');
iae3=trapz(t,abs(1-y));
ss=sprintf('Figura 3. Projeto do PID para G3 IAE: %3.2f', iae3/iae_G3);
title(ss);
```



Mas essa resposta apenas com esse PI não conseguiu atender ao que era pedido:

```
iae3
```

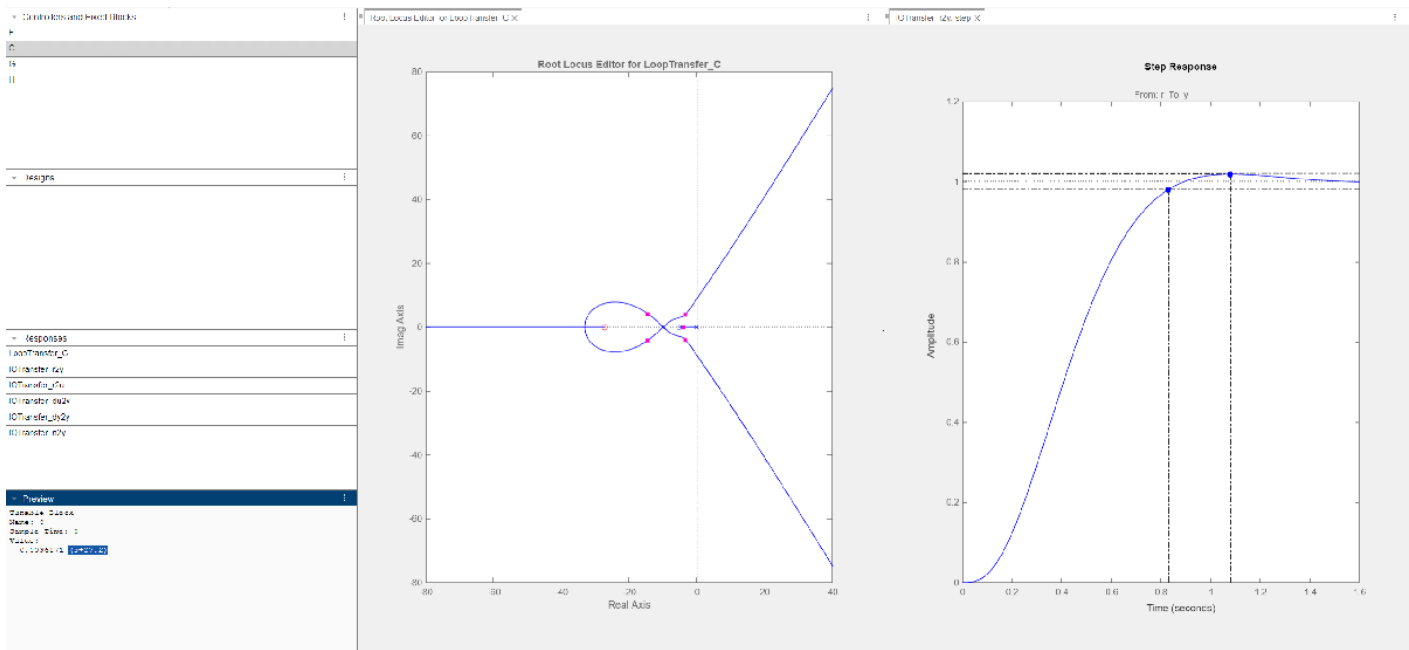
```
iae3 = 3.3046
```

```
iae_G3
```

```
iae_G3 = 0.3663
```

Vamos modelar um PD agora para construir o PID:

O objetivo é que o PD retire o UP colocado no PI



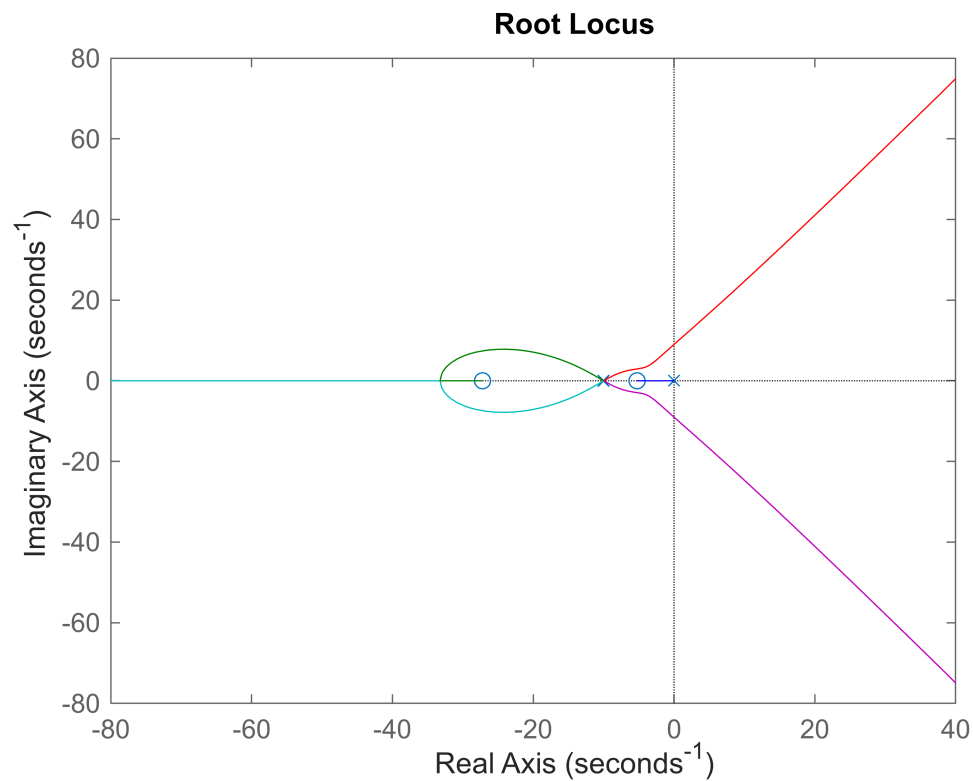
```
s=tf('s');
G3_polo_zero_zero = G3_polo_zero_ganho*(s+27.2)
```

```
G3_polo_zero_zero =
```

$$\frac{17430 s^2 + 5.656e05 s + 2.489e06}{s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
rlocus(G3_polo_zero_zero)
```



```
%rltool(G3_polo_zero_ganho)
```

A resposta possui uma sobressinal de 1.81%, e o seu tempo de estabilização, de aproximadamente 0.83 segundos.

```
G3_polo_zero_zero_ganho = 0.0096171*G3_polo_zero_zero
```

```
G3_polo_zero_zero_ganho =
```

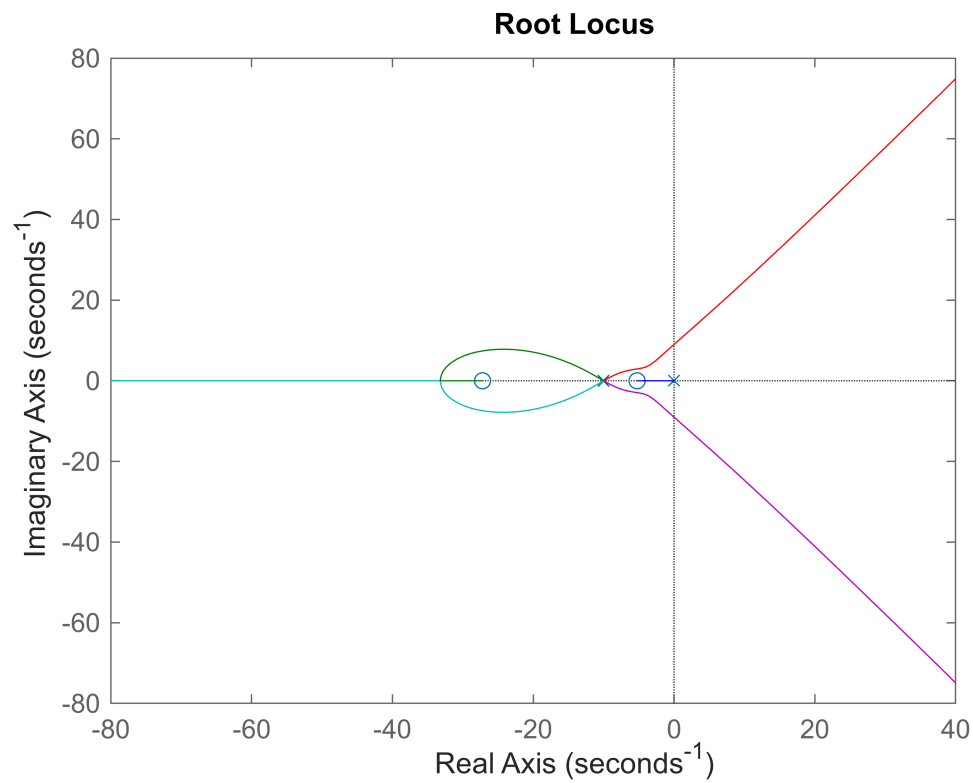
```

      167.6 s^2 + 5439 s + 2.394e04
-----
s^5 + 40 s^4 + 600 s^3 + 4000 s^2 + 10000 s

```

```
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
rlocus(G3_polo_zero_zero_ganho)
```



```
C3 = (1/s)*(s+5.25)*(s+28.2)*0.0092858*14.525
```

```
C3 =
```

$$\frac{0.1349 s^2 + 4.512 s + 19.97}{s}$$

```
Continuous-time transfer function.  
Model Properties
```

```
Kd = 0.1349
```

```
Kd = 0.1349
```

```
Kp = 4.512
```

```
Kp = 4.5120
```

```
Ki = 19.97
```

```
Ki = 19.9700
```

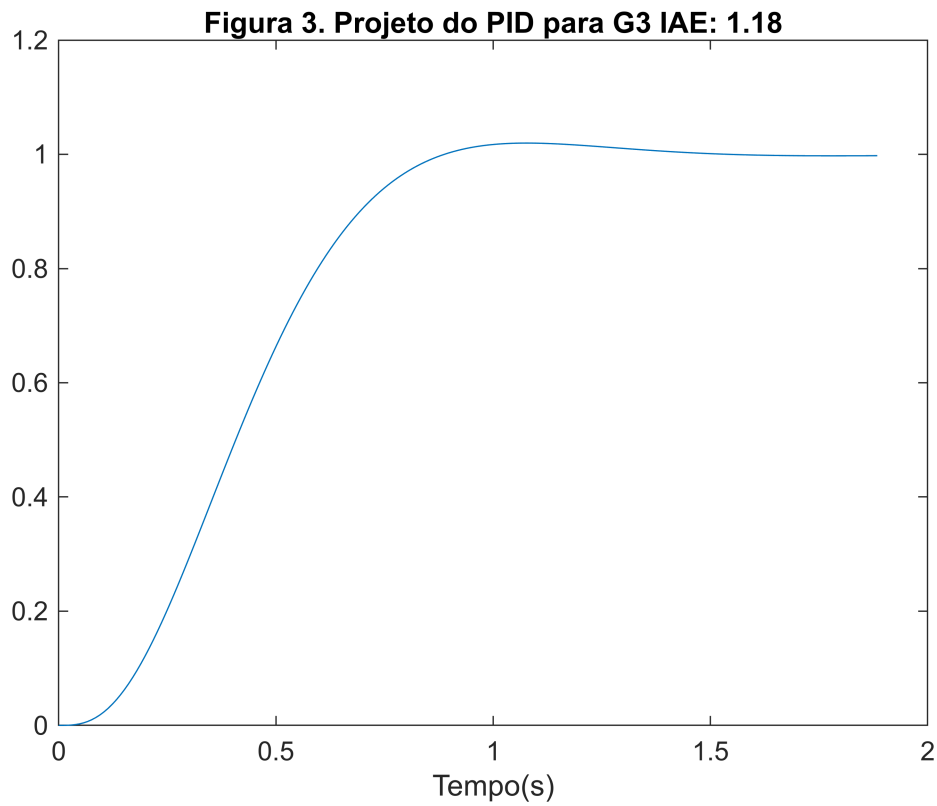
Abaixo a simulação e o cálculo do IAE usando o controlador C3 projetado.

```
M3=feedback(C3*G3,1);  
[y,t]=step(M3);
```

```

t=linspace(0,max(t),200);
y=step(M3,t);
plot(t,y);xlabel('Tempo(s)');
iae3=trapz(t,abs(1-y));
ss=sprintf('Figura 3. Projeto do PID para G3 IAE: %.2f', iae3/iae_G3);
title(ss);

```



```
iae3
```

```
iae3 = 0.4314
```

```
iae_G3
```

```
iae_G3 = 0.3663
```

• **Terceira tentativa de obter o controle:**

Vamos pegar uma referência para usar como base:

```
G3
```

G3 =

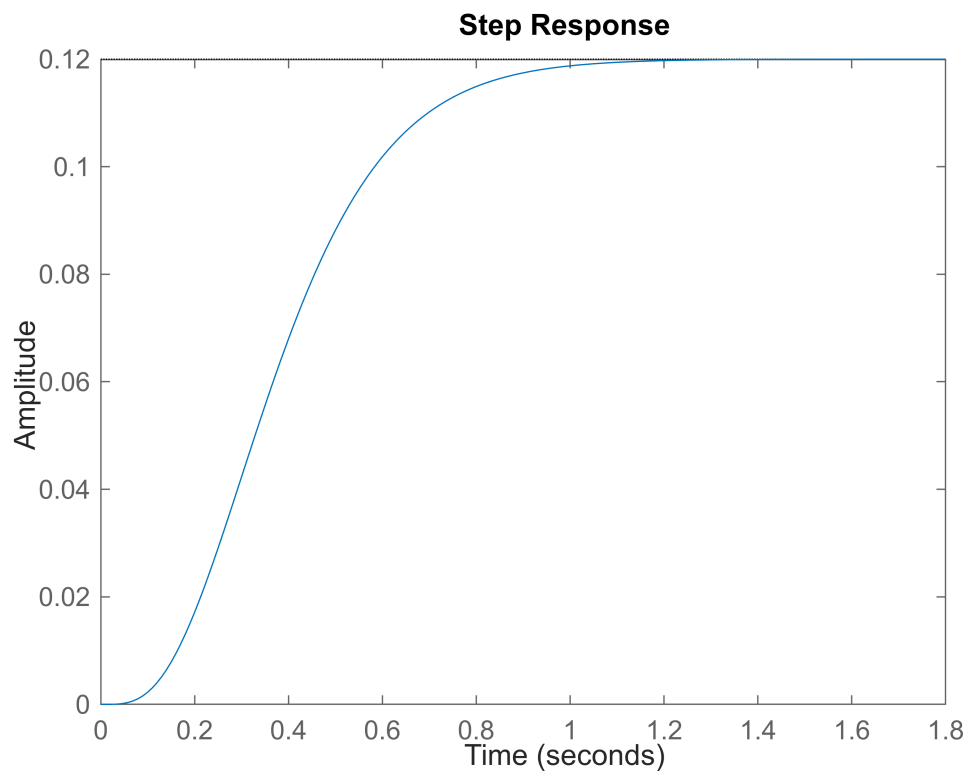
$$\frac{1200}{s^4 + 40 s^3 + 600 s^2 + 4000 s + 10000}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

iae_G3

iae_G3 = 0.3663

step(G3)



Vamos modelar G3 como sendo um sistema de primeira ordem com tempo morto:

A equação para um sistema de primeira ordem com tempo morto é da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-ds}}{\tau s + 1}$$

Em que:

K é o ganho

d é o tempo morto

τ é a constante de tempo

d1 = 0.08;

```
k1 = 0.12;
tau1 = 0.42 - d1
```

```
tau1 = 0.3400
```

```
s=tf('s');
```

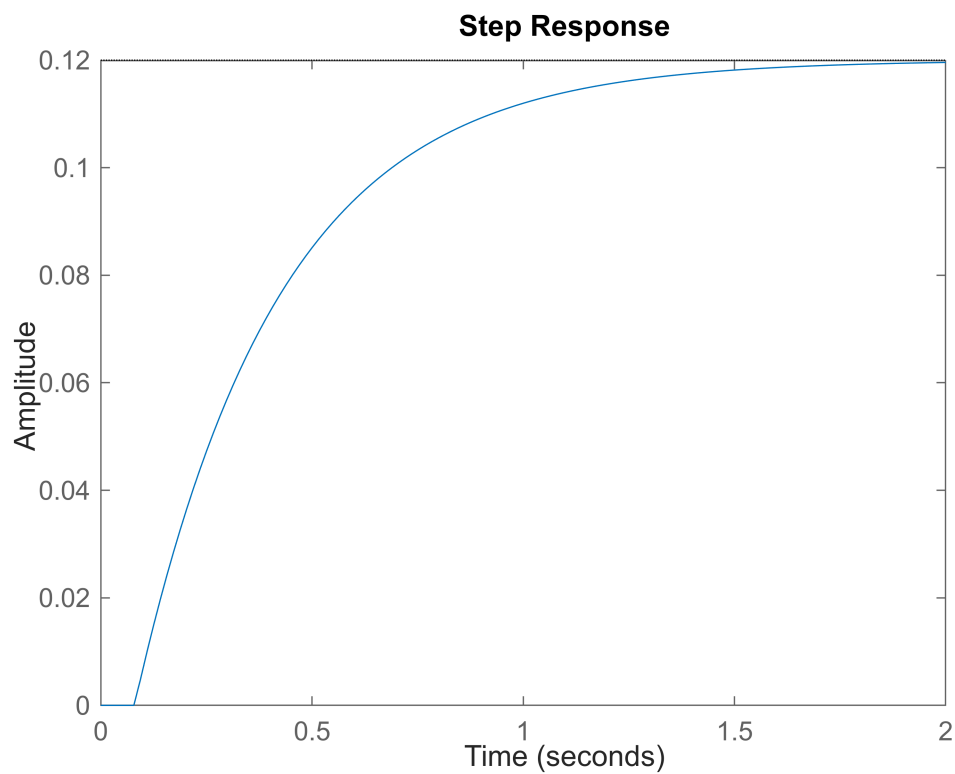
```
g1 = (k1 * exp(-d1*s))/(tau1*s + 1)
```

```
g1 =
```

$$\exp(-0.08s) * \frac{0.12}{0.34 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.
Model Properties

```
step(g1)
```



Vamos usar a função pidtuning para gerar um controle inicial:

```
[C3, iae]=pidtuning(g1,0.34)
```

```
C3 =
```

$$K_p + K_i * \frac{1}{s}$$

with $K_p = 8.33$, $K_i = 24.5$

Continuous-time PI controller in parallel form.

Model Properties

iae = 0.3305

Kp = 8.33

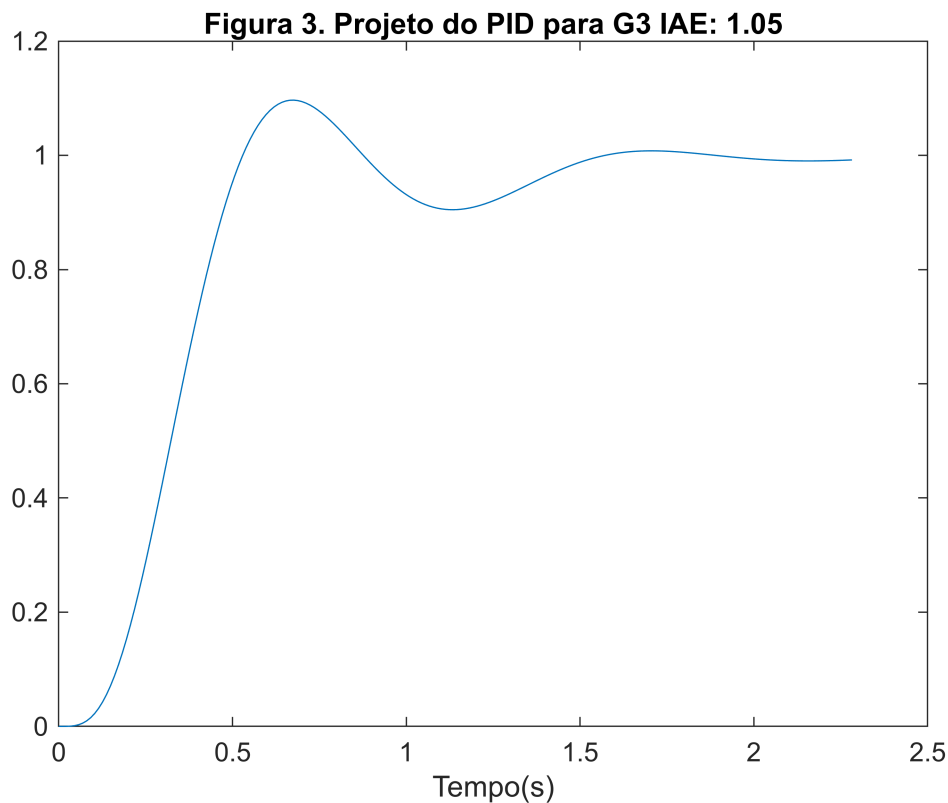
Kp = 8.3300

Ki = 24.5

Ki = 24.5000

Abaixo a simulação e o cálculo do IAE usando o controlador C3 projetado.

```
M3=feedback(C3*G3,1);  
[y,t]=step(M3);  
t=linspace(0,max(t),200);  
y=step(M3,t);  
plot(t,y);xlabel('Tempo(s)');  
iae3=trapz(t,abs(1-y));  
ss=sprintf('Figura 3. Projeto do PID para G3 IAE: %3.2f', iae3/iae_G3);  
title(ss);
```



Mas essa resposta apenas com esse PI não conseguiu atender ao que era pedido:

iae3

iae3 = 0.3847

iae_G3

iae_G3 = 0.3663

Aqui é possível ver que o valor ficou muito próximo do IAE definido como referência.