UFES - CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
Prof. Thomas W. Rauber

2º Trabalho de Algoritmos Numéricos (INF 09269) 2021/1

Data de entrega: veja o mural da disciplina.

Linguagem de Programação para Implementação:
Octave/Matlab, preferencialmente código que seja compatível com os dois ambientes, Octave é o ambiente oficial do trabalho.
Grupo de até três alunos

Probabilidade e Estatística: Aplicação na Engenharia.

1 Teoria

Baseado em históricos de valores de algum processo de natureza estocástica[1], o objetivo é fazer afirmações sobre esse processo. Por exemplo, deseja-se estimar probabilidades para um certo valor, ou faixa de valores. É necessário uma modelagem do processo. Neste trabalho os objetivos são

- Obter um banco de dados de sensores reais;
- Filtrar variáveis aleatórias deste banco de dados;
- Pré-processar os dados;
- Assumindo um modelo, estimar os parâmetros associados ao modelo;

1.1 Variáveis Aleatórias

"Alea iacta est" = "O dado está lançado" do latim, já aponta para a origem da palavra "aleatório", ou equivalentemente "randômico". O valor da variável não é conhecido exatamente, somente ao longo do tempo, ou ao longo de uma outra dimensão. Uma distinção principal é entre variáveis aleatórias discretas e variáveis aleatórias contínuas.

1.1.1 Variáveis Aleatórias Discretas

Uma variável aleatória discreta x pode assumir um valor discreto de uma conjunto $\mathcal{X}$ de n valores possíveis. Por exemplo, no caso do dado, $n = 6$ e $x \in \mathcal{X} = \{X_i | i = 1, \ldots, n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cada valor X_i pode ser assumido com uma probabilidade $0 \leq \text{Prob}[x = X_i] \leq 1$, e a probabilidade acumulada que algum de vários valores pode ser assumido é simplesmente a soma da probabilidades individuais. Por exemplo, a probabilidade que o dado mostrará um número dois ou um número cinco é $1/6 + 1/6 = 1/3$. Para expressar a probabilidade de uma variável discreta, em geral, usa-se a letra P maiúscula, ou seja $P(x)$ é a probabilidade $\text{Prob}[x = X_i]$ que a variável x tem o valor X_i.

1.1.2 Variáveis Aleatórias Contínuas

O conceito de probabilidade é substituído por *densidade* de probabilidade $0 \leq p(x) < \infty$, usando a letra p minúscula. O domínio da variável em geral são os números reais, ou seja $x \in \mathbb{R}$. Não mais pode se falar em probabilidade de a variável assumir um determinado valor X específico do domínio contínuo, pois esse valor da

[1]Um processo estocástico está sujeito a variáveis que somente têm um valor com uma certa probabilidade, ou densidade de probabilidade. Por exemplo, não se pode dizer o número que um dado vai exibir quando lançado. O contrário de estocástico é determinístico, ou seja o valor da variável é bem definido.

probabilidade é zero[2], ou seja $P(x) = 0$. Somente pode-se determinar a probabilidade que a variável está caindo dentro de um intervalo $[a, b]$ do domínio, ou seja Prob$[a \leq x \leq b]$. Integrando sobre todo o domínio resulta em probabilidade de 100%, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) = 1.$$

1.2 Distribuições de Variáveis Aleatórias

O modelo do processo estocástico é uma distribuição da variável aleatória. Mais uma vez tem que se principalmente distinguir distribuições de variáveis aleatórias discretas e distribuições de variáveis aleatórias contínuas.

Neste trabalho, nenhuma distribuição discreta é usada. Os representantes da distribuições contínuas são as distribuições, Normal (Gaussiana), Weibull e Pareto generalizada.

A *função distribuição acumulada* (FDA) para uma variável aleatória discreta X, que tenha alguma ordem $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$, sujeito a uma *função de probabilidade* $P(X)$ é definida como

$$F(X) = \sum_{X_i \leq X} P(X_i), \tag{1}$$

ou seja a probabilidade que o valor da variável seja qualquer valor até o valor X_i. Por exemplo, no dado, tem-se $F(4) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 4/6 = 2/3$.

Uma variável aleatória contínua x é sujeita a uma *função densidade de probabilidade* (FDP) $p(x)$. A função distribuição acumulada (FDA) para uma variável aleatória contínua é definida como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du, \tag{2}$$

ou seja, a probabilidade que o valor da variável seja qualquer valor até o valor x. É equivalente à área debaixo da distribuição até o valor x. Neste trabalho, $F(x)$ deve ser calculado, usando integração numérica. Além disso, o ambiente de programação já tem uma função FDA pronta para cada distribuição, o que pode ser usado como referência (forma fechada).

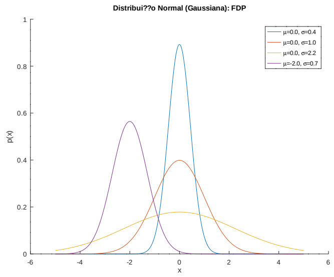
Cada distribuição de uma variável aleatória tem o seu próprio método de *estimar* um parâmetro baseado em um conjunto de dados, junto com o modelo da distribuição. Por exemplo, a distribuição Normal (Gaussiana) tem dois parâmetros, a média μ e a variância σ^2. Dado um conjunto de n amostras x_i que supostamente são originais dessa distribuição, é média é simplesmente estimada como média aritmética das amostras $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. O "chapéu" distingue o valor estimado do valor verdadeiro μ. O valor verdadeiro somente é conhecimento do "dono" do processo estocástico, no caso deste modelo, o dono é o gerador de números aleatórios. Na realidade, em geral, os parâmetros verdadeiros não são acessíveis, pois não se conhece todas as influências que possam modificar a variável aleatória.

1.3 Distribuição Normal (Gaussiana)

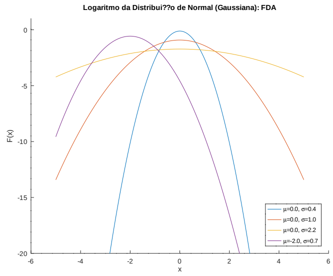
A distribuição mais importante é a distribuição normal, ou Gaussiana, $p(x; \mu, \sigma^2)$, (σ = "sigma"). Os dois parâmetros são a média μ e a variância σ^2, ou alternativamente à variância, o desvio padrão $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Muitas variáveis aleatórias na natureza e em ambientes técnicos obedecem a esta densidade, por exemplo, a voltagem de uma tomada. A Gaussiana tem a forma de um sino com um único máximo em $x = \mu$, decaindo simetricamente, quando se afasta do máximo. Frequentemente, em vez da Gaussiana, usa-se o seu logaritmo natural, mostrado

[2]Esse fato pode parecer estranho, mas é consistente. Considere o exemplo da probabilidade que uma pessoa tenha exatamente 20 anos de idade. É zero, pois ninguém tem exatamente 20.00000000... anos. O que realmente tem-se em mente, é a probabilidade acumulada, não nula, Prob$[20 \leq x < 21]$. No caso da variável contínua, acumular significa integrar, neste exemplo entre 20 e 21.

aqui também.



$$p(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{3}$$

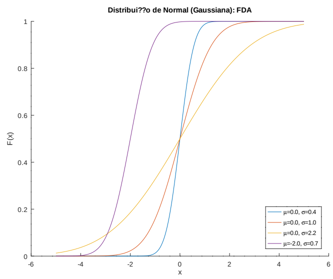


$$\ln p(x;\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2}\left[2\ln\sigma + \ln 2 + \ln\pi + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]. \tag{4}$$

Expressa-se o fato que a variável aleatória x segue a distribuição normal como

$$x \sim N(\mu, \sigma^2). \tag{5}$$

A FDA da distribuição normal é



$$F(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right), \tag{6}$$

onde “erf” é a *função de erro* (implementada no sistema).

Uma *amostragem* consiste em um conjunto de dados (população) $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} := \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}, \tag{7}$$

de cardinalidade

$$n = |\mathcal{D}|,$$

ou seja, temos n amostras a nossa disposição para estimar os dois parâmetros μ e σ. No caso da distribuição normal existe uma forma fechada para esse fim, ou seja, temos uma regra direta.

Para a estimada da média temos

$$\widehat{\mu} = \widehat{\mathbb{E}}[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{8}$$

onde $\mathbb{E}[x]$ significa o valor esperado da variável aleatória, analiticamente definido como

$$\mathbb{E}[x] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \tag{9}$$

em que $p(x)$ é a distribuição da variável para o valor x e dx é o intervalo infinitesimal em torno de x. O símbolo do chapéu “$\widehat{\ }$” significa que não se sabe o valor, mas tenta-se o melhor para estimar o valor, usando a informação a disposição.

Para a estimada da variância temos

$$\widehat{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}[(x-\mu)^2] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\widehat{\mu})^2. \tag{10}$$

A estimativa da variância já usa um valor que é resultado de uma estimativa, nomeadamente a média estimada $\widehat{\mu}$. A divisão da soma por $(n-1)$, em vez da esperada divisão por n tem o efeito de eliminar o viés (*bias*) da estimativa. Esse ajuste é chamado *correção de Bessel*. Na prática, esse detalhe em princípio tem pouca relevância, especialmente se houverem muitos padrões de treinamento. Nesse caso, a divisão por $(n-1)$ converge assintoticamente para a de n.

Tarefas:

1. Implemente a FDP da eq. (3) em forma de função anônima `FDP_Normal = @(x, mu, sigma) ...`;
2. Compare o resultado da sua implementação "caseira" com a do sistema `normpdf`, imprimindo a diferença (tem que ser (numericamente) zero);
3. Replique o gráfico da página do Wikipédia, variando os dois parâmetros, `https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_normal`. Ajuda: Tem um exemplo como produzir um gráfico parametrizado anexado ao material deste trabalho;
4. Repita os passos anteriores para a FDA da eq. (6) da distribuição normal;
5. Sejam dados os valores dos dois parâmetros $\mu = -2$ e $\sigma^2 = 0.5$ (curva verde nos gráficos no Wikipédia). Usando a função inversa `erfinv` da função de erro `erf`, qual é o valor de x para que a FDA tenha um valor de 99% (99º percentil)? Ajuda: Solução: $x = -2 + \mathrm{erfinv}(\frac{49}{50}) \approx -0.35502364287\ldots$
6. Usando o valor exato de x da questão anterior, faça uma integração numérica para obter o valor aproximado da FDA. Quantas subdivisões são necessárias para ter um erro menor que 10^{-2}, usando os métodos dos Trapézios, 1/3 de Simpson, e Quadratura Gaussiana, respectivamente? O limite inferior da integração deve ser $a = \mu - 10\sigma$.
7. Determine numericamente, por bissecção, o valor do argumento x para que a FDA tenha o valor de 99%. Compare com a solução analítica. O intervalo inicial da bissecção seja $[-1, 0]$.
8. Gere $n = 1000$ amostras sujeitas à distribuição normal com $\mu = -2$ e $\sigma = 0.7$. Use um gerador de números aleatórios para este fim. Para assegurar a reproduzibilidade, a semente do gerador é definida como `semente = 2021`. Ajuda: Use o comando `randn('seed', semente)` para fixa a semente. Ajuda: Os primeiro três valores da sequência pseudoaleatória são $x_1 = -2.6242, x_2 = -1.2363, x_3 = -2.2256$.
9. Estime os dois parâmetros $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$, usando as eq. (8) e eq. (10). Qual é a diferença em relação aos valores verdadeiros $\mu = -2$ e $\sigma = 0.7$?

1.4 Aquisição de Dados Estatísticos Reais

Vamos usar como objeto do estudo a velocidade de vento de uma estação de medição de dados meteorológicos. O histórico de uma ou mais variáveis aleatórias, como, por exemplo, a velocidade de vento, permite a analise estatística dessas variáveis. Em uma primeira tentativa vamos assumir que as amostragens obedeçam a uma distribuição normal, ou seja, temos que estimar os respectivos parâmetros μ e σ. A fonte de dados é a página `https://www.ndbc.noaa.gov` do Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos (*National Weather Service*), mais especificamente o Centro Nacional de Dados de Boias (*National Data Buoy Center*)

Tarefas:

1. Identifique a página da estação RDDA2 – 9491094 "*Red Dog Dock*", situada na posição 7.575 N 164.067 W (67°34'31" N 164°4'0" W) perto da costa do estado do Alasca. Ela fornece seis variáveis, de seis em seis minutos, 1) direção do vento, 2) velocidade de vento, 3) rajadas de vento, 4) pressão atmosférica, 5) temperatura do ar, e, 6) temperatura da água.
2. Adquira todos os valores históricos do ano 2020, baixando o arquivo de texto comprimido "rdda2h2020.txt.gz", e depois o descompacte. Este arquivo está em formato CSV ("Comma separated values"), representando uma tabela com um pequeno cabeçalho com os nomes e eventualmente unidades das variáveis disponíveis. As colunas são tipicamente separadas por espaços, virgulas, ponto e virgulas, ou caracteres de tabulação (TAB).

3. Abra via Octave o arquivo (comando `fopen`) e extraia a coluna com a velocidade de vento, retornando um vetor. Ajuda: O tamanho do vetor é $n = 83313$. Comandos úteis são `fopen, fclose, feof, fgetl, textscan, cell2mat`. Recomenda-se salvar o vetor pelo comando `save` em formato binário, para facilmente recarregar após pelo comando `load`.

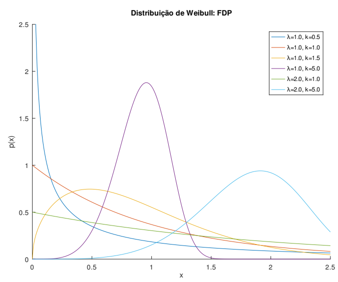
4. Elimine todos os *outliers*, ou seja, valores não plausíveis. Seja definido um valor v da velocidade de vento, com o limiar $\tau = 50.0$ como
$$0 < v \leq \tau.$$
Após este passo, a quantidade de amostras será menor que antes.

5. Substitua todos os valores nulos por um valor mínimo $v_{\min} = 0.1$ m/s. Isso é necessário, pois a estimativa de parâmetros na distribuição de Weibull tem que calcular o logaritmo de um valor. Código em Octave, sendo aqui `v` o vetor de vento:

```
min_wind_speed = 0.1;
v(v==0) = min_wind_speed;
```

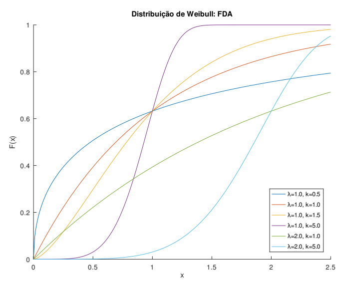
1.5 Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull de uma variável aleatória contínua para valores não negativos tem dois parâmetros $k \in \mathbb{R}_{>0}$ (forma) e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ (escala), e é definida como



$$p(x; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \tag{11}$$

A FDA da distribuição Weibull é



$$F(x; k, \lambda) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \tag{12}$$

A estimativa do parâmetro k com n amostras $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ não tem fórmula fechada. A função de iteração é

$$1/\phi(k) = \frac{\overline{x^k \ln(x)}}{\overline{x^k}} - \overline{\ln(x)}, \tag{13}$$

onde o sobrelinhado novamente significa a média da expressão por baixo do sobrelinhado sobre todas as n amostras. Por conveniência o lado esquerdo da eq. (13) está invertido e tem que ser invertido para obter o lado direito da função de iteração $\phi(k)$ da eq. (13) em busca do parâmetro k.

A função de iteração retorna a estimativa atualizada

$$k^{(j+1)} = \phi(k^{(j)}),$$

dada a estimativa atual $k^{(j)}$. Como valor inicial pode definir

$$k^{(0)} := 1.$$

Finalmente, o segundo parâmetro λ da distribuição Weibull pode ser obtido deterministicamente como

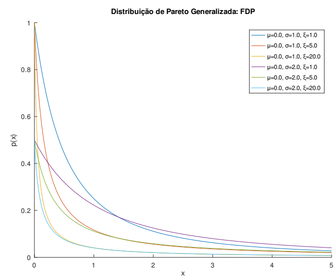
$$\hat{\lambda} = \sqrt[\hat{k}]{\overline{x^{\hat{k}}}}. \tag{14}$$

Tarefas:

1. Implemente a FDP da eq. (11) em forma de função anônima `FDP_Weibull = @(x, lambda, k) ...;`
2. Compare o resultado da sua implementação "caseira" com a do sistema `wblpdf`, imprimindo a diferença (tem que ser (numericamente) zero);
3. Replique o gráfico da página do Wikipédia, variando os dois parâmetros, `https://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution`.
4. Repita os passos anteriores para a FDA da eq. (12);
5. Usando os dados estatísticos da velocidade do vento, estime os dois parâmetros $\hat{k}$ e $\hat{\lambda}$, pelas eq. (13) e eq. (14).

1.6 Distribuição de Pareto Generalizada

A distribuição de Pareto Generalizada de uma variável aleatória contínua x para valores não negativos tem três parâmetros, a localização $\mu \in \mathbb{R}$, a escala $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ e a forma $\xi \in \mathbb{R}$. Ela é definida como

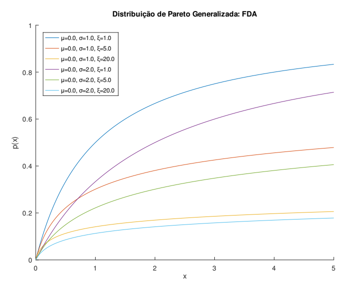


$$p(x; \mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{\left(-\frac{1}{\xi}-1\right)}, \tag{15}$$

onde o suporte da variável x em relação aos três parâmetros é

$$\begin{cases} x \geq \mu, & \text{se} \quad \xi \geq 0 \\ \mu \geq x \geq \mu - \sigma/\xi, & \text{se} \quad \xi < 0 \end{cases}$$

A FDA da distribuição de Pareto Generalizada é



$$F(x; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{se} \quad \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right), & \text{se} \quad \xi = 0, \end{cases} \tag{16}$$

com o mesmo suporte do caso da FDP.

Vamos desconsiderar o parâmetro localização μ, ou seja, $\mu = 0$. Temos que estimar a escala σ e a forma ξ, usando o conjunto de dados da eq. (7).

Define se primeiro um novo parâmetro que unifica σ e ξ como

$$\theta := \xi/\sigma. \tag{17}$$

A estimativa $\hat{\theta}$ do parâmetro θ com n amostras $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ não tem fórmula fechada. A primeira tarefa é definir a verossimilhança.

Com uma amostragem x fixa, com origem de uma densidade, variando os parâmetros da densidade, o valor da densidade $p(x)$ tem o significado de uma *verossimilhança*.

$$\mathcal{L}(\theta|x) := p(x; \theta). \tag{18}$$

Assumindo que todas as amostras x_i são independentes entre eles, e tirados das mesma distribuição ("iid"), a verossimilhança do conjunto todo é

$$\mathcal{L}(\theta|\{x_1, \ldots, x_n\}) = \mathcal{L}(\theta|\mathcal{D}), \tag{19}$$

e o seu logaritmo ("log-likelihood function")é

$$\ell(\theta|\mathcal{D}) := \ln \mathcal{L}(\theta|\mathcal{D}) = \ln \left[\mathcal{L}(\theta|x_1) \cdot \mathcal{L}(\theta|x_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}(\theta|x_n)\right] = \sum_{i=1}^{n} \ln \mathcal{L}(\theta|x_i). \tag{20}$$

O objetivo é achar o parâmetro θ que maximiza $\ell(\theta|\mathcal{D})$, ou equivalentemente minimiza o valor negativo, formalmente

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \ell(\theta|\mathcal{D}) = \arg\min_{\theta} \left[-\ell(\theta|\mathcal{D})\right]. \tag{21}$$

Para distribuição de Pareto Generalizada temos como verossimilhança

$$\ell(\theta|\mathcal{D}) = -n - \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - \theta x_i) - n \ln \left[-(n\theta)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - \theta x_i)\right]. \tag{22}$$

Considerando o argumento do logaritmo que tem que ser positivo para obter um valor real de volta, o argumento de θ é limitado em

$$\theta < \frac{1}{x_{\max}},$$

onde $x_{\max}$ é o maior valor do conjunto de valores da eq. (7).

A derivada da função do logaritmo da verossimilhança é, usando a regra da cadeia

$$\ell'(\theta|\mathcal{D}) = \frac{d\ell(\theta|\mathcal{D})}{d\theta} = \frac{n^2\theta \left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} - \frac{x_i}{-\theta x_i + 1}}{n\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(-\theta x_i + 1)}{n\theta^2}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \ln(-\theta x_i + 1)} - \sum_{i=1}^{n} - \frac{x_i}{-\theta x_i + 1}. \tag{23}$$

Dada uma sequência $\mathcal{D}$ de n amostras, é possível calcular um único valor $\ell(\theta) \in \mathbb{R}$ da função da eq. (22) para um certo valor de θ, e também para a sua derivada da eq. (23). Dessa maneira é possível variar o valor de θ, a partir de um valor mínimo, e aumentar gradualmente até o valor máximo para obter dois vetores que possam ser analisados e desenhados, verossimilhança ℓ, e sua derivada ℓ' como função do parâmetro θ.

Uma condição necessária para a verossimilhança ℓ ter um máximo da eq. (21), é que a sua derivada seja nula, ou seja,

$$\ell' = 0.$$

O valor do parâmetro θ que satisfaz esta condição é a solução $\hat{\theta}$. Assim o parâmetro da forma da distribuição de Pareto Generalizada pode ser obtido como

$$\hat{\xi} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - \hat{\theta} x_i). \tag{24}$$

Com esse valor ótimo na mão, o parâmetro da escala da distribuição, pode ser estimado como

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\xi}}{\hat{\theta}}. \tag{25}$$

Tarefas:

1. Implemente a FDP da eq. (15) em forma de função anônima;

2. Replique o gráfico da página do Wikipédia, variando os dois parâmetros,
`https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Pareto_distribution`;

3. Repita os passos anteriores para a FDA da eq. (16);

4. Usando os dados da velocidade de vento, estime os dois parâmetros $\hat{\sigma}$ e $\hat{\xi}$. Ajuda: Tem que implementar a função do logaritmo da verossimilhança eq. (22) e sua derivada eq. (23). Tem que usar um método de determinação de raízes para obter $\hat{\theta}$;

5. Replique os gráficos da fig. 1. O primeiro mostra o *histograma* dos dados da velocidade de vento com 50 *bins*, junto com as três distribuições ajustadas. O gráfico deve funcionar, variando a quantidade de *bins*, ou seja, as curvas não podem desviar muito do histograma. Para isso as curvas das distribuições têm que ser multiplicadas por um escalar que se baseia na largura de um *bin* (desafio). O segundo gráfico mostra a função de verossimilhança e a sua derivada, e o valor de $\hat{\theta}$. O terceiro gráfico mostra todas as amostras da velocidade de vento após a eliminação dos valores inválidos. Após a eliminação desses valores, há um ligeiro deslocamento de alguns valores, pois faltam algumas amostras, porém isso não é considerado na análise seguinte.

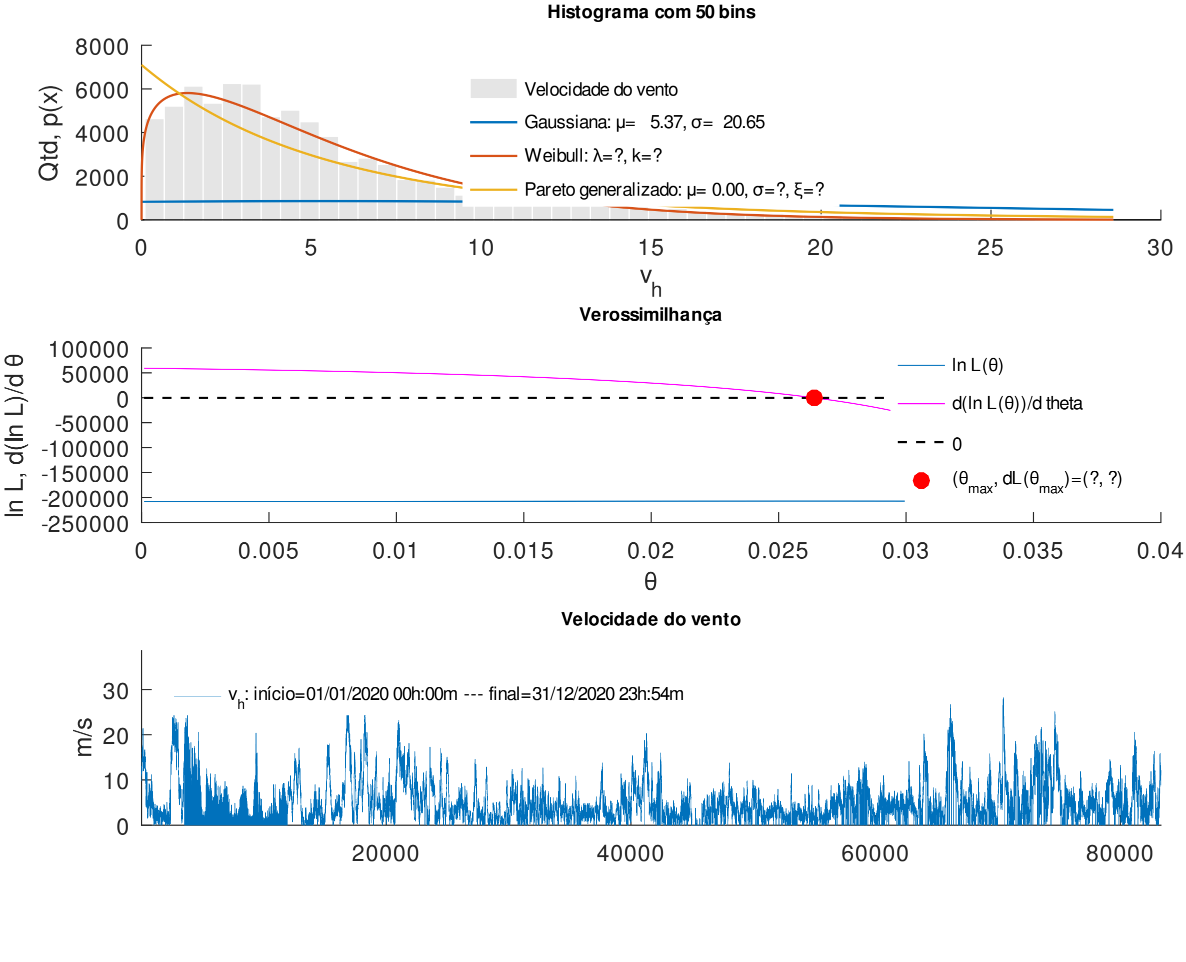


Figura 1: Gráficos das distribuições.

2 Programação

Recomenda-se resolver os problemas por partes. Não programe tudo e depois teste. Ande em passos pequenos, testando cada etapa. Após a aprovação da parte, segue em frente com a próxima tarefa. O programa deve ser bem comentado dentro do código. Neste trabalho, é possível concentrar todas as funcionalidades em um único arquivo. Deve existir um arquivo principal, em forma de script, com o nome `main.m` `trab.m` para facilitar a execução para mim.

Referências

- https://pt.wikipedia.org/wiki/Vari%C3%A1vel_aleat%C3%B3ria
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_densidade
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_distribui%C3%A7%C3%A3o_acumulada
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_normal
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_de_Weibull
- https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Pareto_distribution
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Energia_e%C3%B3lica

Elaboração: O resultado deve ser código em Octave que produz as tabelas e gráficos para o problema apresentado. O usuário (neste caso o professor) não deve ter o trabalho de digitar nada, além da linha de comando no Octave que executa o programa principal. Este script principal deve ter o nome `main.m`.

O produto final deve ser um arquivo no formato `zip` com a seguinte sintaxe: `aluno1+aluno2+aluno3.zip`, a ser submetido como resposta por um dos autores. O arquivo `aluno1+aluno2+aluno3.zip` deve conter uma **única** pasta. Duas subpastas devem conter o código fonte e a documentação do projeto.

A documentação deve ser em forma de descrição de projeto, preferencialmente gerado por LaTeX, (ou LibreOffice) contendo os seguintes tópicos:

- Capa do Projeto
  - Título
  - Autoria
  - Data
  - Resumo
- Introdução
- Objetivos
- Metodologia
- Resultados e Avaliação
- Referências Bibliográficas

Qualquer dúvida, ou descobriu um erro no texto? Não hesite em me contactar por E-mail institucional `thomas.rauber@ufes.br` ou na aula (preferencialmente no início, ou no final).

Última atualização: 6 de outubro de 2021, 08:03

A SER CONTINUADO ... NÃO DEIXE PARA ÚLTIMA HORA. ME PROCURE EM CASO DE DÚVIDA!

Bom trabalho!