D'où,

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = \sum_{K=1}^{n} P(K) - P(K-1)$$

Par téléscopage, il s'ensuit :

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = P(n)$$

C'est-à-dire,

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

En factorisant,

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Trouvons quatre réels a, b, c, d tels que, si :

$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx,$$

on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^3$$

En développant,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4ax^3 + x^2(-6a+3b) + x(4a-3b+2c) - a + b - c + d = x^3$$

Par identification,

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -6a + 3b = 0 \\ 4a - 3b + 2c = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases}$$