• Si n est impair alors il peut s'écrire sous la forme $2K+1$ avec K un entier relatif. D'où,

$$u_{n+1} = n - u_n = 2K+1 - \left\lfloor \frac{2K+1}{2} \right\rfloor = K+1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

C'est exactement P_{n+1}.

Exercice 10

Il semble que, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}$$

Démontrons cette hypothèse par récurrence, en posant, pour n dans $\mathbb{N}$ la propriété P_n :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}$$

Initialisation. Par définition de Δ_n,

$$\Delta_0 = F_0 \times F_2 - F_1^2$$

Soit,

$$\Delta_0 = -1$$

La propriété P_0 est vérifiée.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Par définition de Δ_n, il vient que :

$$\Delta_{n+1} = F_{n+1} F_{n+3} - F_{n+2}^2$$

Il s'ensuit que,

$$\Delta_{n+1} = F_{n+1} \times (F_{n+2} + F_{n+1}) - (F_{n+1} + F_n)^2$$

Soit,

$$\Delta_{n+1} = F_{n+1} F_{n+2} - 2F_n F_{n+1} - F_n^2$$

D'où,

$$\Delta_{n+1} = F_{n+1} (F_{n+1} + F_n) - 2F_n F_{n+1} - F_n^2$$

En développant puis en factorisant par F_n, on a :

$$\Delta_{n+1} = F_{n+1}^2 - F_n (F_n + F_{n+1})$$

En identifiant l'expression de F_{n+2} :

$$\Delta_{n+1} = F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}$$

Donc,

$$\Delta_{n+1} = -1 \times \Delta_n = (-1)^{n+2}$$