

Par disjonction des cas,

- Si $\langle x \rangle < 0,5$ et $\langle y \rangle < 0,5$ alors :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$

Et,

$$\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \quad \text{de même que} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

Ainsi,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

Finalement :

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 0$$

- Si $\langle y \rangle \geq 0,5$ et $\langle x \rangle \geq 0,5$ alors :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Et,

$$\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{de même que} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$$

Ainsi,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 + 2\lfloor y \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - 1 - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

Finalement :

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 1$$

- Si $\langle x \rangle < 0,5$ et $\langle y \rangle \geq 0,5$ et $\langle x \rangle + \langle y \rangle < 1$ ou $\langle x \rangle \geq 0,5$ et $\langle y \rangle < 0,5$ et $\langle x \rangle + \langle y \rangle < 1$ alors :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$

Et,

$$\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \quad \text{de même que} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$$

Où,

$$\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{de même que} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

Dans les deux cas,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 1$$

- Si $\langle x \rangle < 0,5$ et $\langle y \rangle \geq 0,5$ et $\langle x \rangle + \langle y \rangle \geq 1$ ou $\langle x \rangle \geq 0,5$ et $\langle y \rangle < 0,5$ et $\langle x \rangle + \langle y \rangle \geq 1$ alors :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Et,

$$\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \quad \text{de même que} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$$