$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

Mais :

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n-1} H_k + H_n$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n + n$$

Cependant,

$$H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

En substituant H_n par cette expression, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_{n+1} - (n+1)$$

C'est exactement P_{n+1}.

Exercice 44

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$$

En premier lieu, posons $n=1$ et tentons de calculer u_1 :

$$u_1^3 = u_1^2$$

Nous savons que $u_1 > 0$ car $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels strictement positifs.
Résolvons l'équation d'inconnue x sur $\mathbb{R}_+^*$: $x^3 = x^2$.
Etant donné que $x \neq 0$, nous pouvons diviser les deux membres par x^2, et ainsi, $x=1$.

Nous en concluons que u_1 vaut 1.

Démontrons désormais que si u_1 vaut 1, alors nécessairement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n$$

Procédons par récurrence.

On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété P_n :

$$u_n = n$$

Initialisation. Elle est immédiate car nous venons de démontrer l'égalité suivante :

$$u_1 = 1$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. Par définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$,