$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Grâce à l'expression précédente,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

Soit,

$$U_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{2(k+1)}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k}\right)$$

Par téléscopage,

$$U_n = \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4}$$

De manière immédiate,

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{4}.$$

Exercice 47

a) Trouvons trois réels a, b, c tels que, si :

$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx,$$

on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^2$$

En développant le membre de gauche,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3ax^2 + x(-3a+2b) + a - b + c = x^2$$

Par identification,

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ -3a + 2b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$