Or, pour n dans $\mathbb{N}$,

$(K^2+5K+5) \in \mathbb{N}$ en tant que somme d'entiers naturels

Ainsi, nous venons de démontrer que n+1 est le carré d'un entier.

<u>Exercice 32</u>

Soient x et y deux nombres réels.

En complétant un carré,

$$x^4+4y^4 = (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$$

On remarque une identité et ainsi,

$$x^4+4y^4 = (x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = \left((x-y)^2+y^2\right)\left((x+y)^2+y^2\right)$$

<u>Exercice 33</u>

Soit

$$a = \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}$$

Calculons tout d'abord a^3:

$$a^3 = 1+\sqrt{\frac{152}{27}} - 3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right)^2\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right)^2\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right) + \left(+1-\sqrt{\frac{152}{27}}\right)$$

En simplifiant, et en factorisant par 3 puis par a, il vient :

$$a^3 = 2-3a\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right)$$

Soit,

$$a^3 = 2-3a\sqrt[3]{\frac{152}{27}-1}$$

En calculant,

$$a^3 = 2-3a \times \frac{5}{3}$$

Finalement,

$$a^3+5a = 2.$$