En factorisant par a et par b :

$$v_{n+2} = a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)$$

En identifiant v_{n+1} et v_n :

$$v_{n+2} = av_{n+1} + bu_n.$$

La suite $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n\geqslant 0}$ appartient donc à $\mathcal{E}$, l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

b) En posant les deux nombres réels :

$$\alpha = \frac{\mu u_0 - u_1}{\mu - \lambda} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\lambda u_0 - u_1}{\lambda - \mu}$$

Alors,

$$\alpha + \beta = u_0 \qquad \text{et} \qquad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1$$

c) Posons, pour n dans $\mathbb{N}$, la propriété P_n :

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

Initialisation. D'après la question précédente, les propriétés P_0 et P_1 sont vérifiées.

Hérédité : Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient vraies. On a :

$$u_{n+2} = a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)$$

Soit,

$$u_{n+2} = \lambda^n(\lambda\alpha a + b\alpha) + \mu^n(\beta a\mu + b\beta)$$

D'où,

$$u_{n+2} = \lambda^n\alpha(\lambda a + b) + \mu^n\beta(a\mu + b)$$

Or, $a\lambda + b = \lambda^2$ et $a\mu + b = \mu^2$:

$$u_{n+2} = \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2}$$

C'est exactement P_{n+2}.

d) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Les solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont $\lambda = 3$ et $\mu = 2$.
Il s'ensuit que $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n + 3^n$$