Premièrement, démontrons l'inégalité $\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'}$.

Partons de (*) et multiplions l'inégalité par $m > 0$:

$$bma < b'ma$$

Ajoutons nbb' :

$$nb'b + bma < nb'b + b'ma$$

En factorisant par b d'une part et, d'autre part, par b' :

$$b(ma'+nb') < b'(ma+nb)$$

En divisant par $b'(ma'+nb') > 0$:

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'}$$

Dorénavant, nous nous attacherons à démontrer l'inégalité $\frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}$

À nouveau, partons de (*) :

$$nba' < nb'a$$

Ajoutons $ma'a$:

$$ma'a + nba' < ma'a + nb'a$$

En factorisant le membre de gauche par a' et celui de droite par a, il vient :

$$a'(ma+nb) < a(ma'+nb')$$

En divisant par $a'(ma'+nb') > 0$, nous en concluons :

$$\frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}$$

A partir des deux inégalités démontrées, nous obtenons l'encadrement suivant :

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}$$

<u>Exercice 57</u>

Soient a, b, c des éléments de $]0, 1[$.

a) De manière immédiate,

$$a \leqslant 1$$
$$b \leqslant 1$$
$$c \leqslant 1$$

D'où,