De même,

$$xy = (a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2})$$

En développant,

$$xy = aa' + 2bb' + ab'\sqrt{2} + ba'\sqrt{2}$$

Soit,

$$xy = aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2}$$

Enfin, si $x \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \left(\frac{-b}{a^2-2b^2}\right)\sqrt{2}$$

où $\frac{a}{a^2-2b^2}$ et $\frac{-b}{a^2-2b^2}$ sont bien des éléments de $\mathbb{Q}$.

Par conséquent, si x et y sont dans $\mathbb{K}$, il en est de même de $x-y$, xy et, si $x \neq 0$, de $\frac{1}{x}$.

<u>Exercice 30</u>

Soient x, y, z trois nombres réels.

Développons le membre de gauche de l'égalité à vérifier :

$$(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = x^3 - x^3 + y^3 - y^3 + z^3 - z^3 + 3x^2y + 3y^2x + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$$

Soit, $(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 3x^2y + 3y^2x + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz + 3x^2z + 3y^2z$

Développons désormais le membre de droite :

$$3(x+y)(y+z)(z+x) = 3x^2y + 3y^2x + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz + 3x^2z + 3y^2z.$$

L'égalité est ainsi vérifiée.

<u>Exercice 31</u>

Soit K un élément de $\mathbb{N}$. Soit n le produit de quatre éléments de $\mathbb{N}^*$ consécutifs :

$$n = (K+1)(K+2)(K+3)(K+4)$$

En développant, il vient assez aisément :

$$n = K^4 + 10K^3 + 35K^2 + 50K + 24$$

D'où,

$$n+1 = K^4 + 10K^3 + 35K^2 + 50K + 25$$

Soit,

$$n+1 = (K^2+5K+5)^2$$