En identifiant les puissances :

$$u_{n+2} = 2^2 \times 2^n + 3^2 \times 3^n$$

Finalement :

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$

C'est exactement P_{n+2}.

Exercice 8

Il semble que, pour n dans $\mathbb{N}$, $u_n = 2^n$

Démontrons cette hypothèse récurrence double, en posant pour n dans $\mathbb{N}$, la propriété $P_n : u_n = 2^n$

Initialisation. Les propriétés P_0 et P_1 sont vérifiées. En effet :

$$2^0 = 1 = u_0 \quad \text{et} \quad 2^1 = 2 = u_1$$

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient vraies. Il vient alors que :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$$

Grâce aux propriétés P_n et P_{n+1},

$$u_{n+2} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} = \frac{2^{2n+2}}{2^n} = 2^{n+2}$$

C'est exactement P_{n+2}.

Exercice 9

Il semble que, pour n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Démontrons cette hypothèse par récurrence, en posant, pour n dans $\mathbb{N}$, la propriété P_n : $u_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Initialisation. La propriété P_0 est vérifiée :

$$\left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor = 0 = u_0$$

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Par définition de la suite,

$$u_{n+1} = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Travaillons par disjonction des cas.

- Si n est pair alors il peut s'écrire sous la forme $2K$ avec K un entier relatif. D'où,

$$u_{n+1} = n - u_n = 2K - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = K = \frac{n}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$