Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ croissante.

b) Les deux suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Si bien que, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étant décroissante et minorée, est convergente.

De plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$b_n \leqslant a_n$$

Or, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante :

$$b_n \leqslant a_1$$

La suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante et majorée : elle converge.

Il vient naturellement :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right)$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Exercice 82

Soient a, b, c trois éléments de $[0,1]$.

Considérons les deux intervalles $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2},1\right]$ formant une partition de $[0,1]$.

Par le principe des tiroirs, l'un de ces deux intervalles contient au moins deux nombres, qui seront notés par la suite x et y.

Par disjonction des cas :

- Si cet intervalle est $\left[0,\frac{1}{2}\right[$:

$$x < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y < \frac{1}{2}$$

Alors,

$$y - 1 < -\frac{1}{2}$$

Et,

$$x(y-1) > -\frac{1}{4}$$

Finalement,

$$x(1-y) < \frac{1}{4}$$