Soit,

$$\frac{1}{q+1} = \frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{q+1} > \frac{m'}{n'}$$

Or, $m' \in \{1, \ldots, m-1\}$ donc $m' \leqslant m-1$. D'après notre hypothèse de récurrence, $\frac{m'}{n'}$ peut s'écrire comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts, tous strictement supérieurs $q+1$.

Il s'ensuit alors que $\frac{m}{n}$ peut s'écrire comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts.

C'est exactement P_m.

c) Nous obtenons ainsi un algorithme de décomposition que nous pouvons écrire en Python :

```
m, n = map(int, input("Fraction a/b comprise entre 0 et 1: ").split("/"))
fractionsUnitaires = []
while m != 1 :
        q = n // m
        r = n % m
        fractionsUnitaires.append(q+1)
        m = m - r
        n = n * (q+1)
fractionsUnitaires.append(n)
print("+".join([f"1/{fractionUnitaire}" for fractionUnitaire in fractionsUnitaires]))
```

En appliquant cet algorithme à $x = \frac{5}{17}$, nous obtenons :

$$\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}$$

Exercice 15

a) Pour n dans $\mathbb{N}$ et K dans $\mathbb{N}^*$,

$$\frac{n+1-K}{K} < \left\lfloor \frac{n+1}{K} \right\rfloor \leqslant \frac{n+1}{K}$$

On pose, pour n dans $\mathbb{N}$, la propriété $P(n)$:

$$u_n \geqslant n+1$$

Initialisation. L'initialisation est immédiate car $u_0 = 1$.

Hérédité. Soit maintenant n un entier naturel. Supposons P_K vraie pour tout K de $\{0, \ldots, n\}$.