En supposant que $a \neq c$ et $b \neq d$,

$$\frac{a-c}{d-b} = \sqrt{2}$$

Ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi, $a = c$ et $b = d$.

Exercice 18

En raisonnant par l'absurde, on suppose que $\sqrt{3}$ est rationnel. On peut donc écrire :

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

où p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ et où la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. En élevant au carré, il vient,

$$3q^2 = p^2$$

Par conséquent, p^2 est un multiple de 3. Il s'ensuit que p est un multiple de 3 et s'écrit donc $3p'$ où $p' \in \mathbb{N}^*$. En effet, considérons K un entier naturel non nul qui n'est pas multiple de 3. Deux cas se présentent :

- $K = 3K' + 1$ où $K' \in \mathbb{N}$
  Alors,
  $$K^2 = 3(3K'^2 + 2K') + 1$$
  K^2 n'est donc pas un multiple de 3.

- $K = 3K' + 2$ où $K' \in \mathbb{N}$
  Alors,
  $$K^2 = 3(3K'^2 + 4K' + 1) + 1$$
  K^2 n'est donc pas un multiple de 3.

On a donc :

$$q^2 = 3p'^2,$$

égalité qui montre que q^2 est multiple de 3, donc que q est multiple de 3. Les deux entiers p et q admettent 3 comme diviseur commun, ce qui contredit l'hypothèse.

Démontrons que la racine carré d'un entier, qui n'est pas un carré parfait, est irrationnelle.

Soit n un entier naturel non nul qui n'est pas un carré parfait. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{n}$ est rationnel. On peut donc écrire

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q}$$

où p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ et où la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. En élevant au carré, il vient :

$$n = \frac{p^2}{q^2}$$