Exercice 2

Ici, nous allons montrer par récurrence :

Si $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un entier impair $\lambda_n$ tel que :

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$$

Pour $n$ dans $\mathbb{N}$, on note $P_n$ la propriété

Il existe un entier impair $\lambda_n$ tel que :

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$$

Initialisation. On a $n = 0$ :

$$5^{2^0} = 5$$

$$1 + \lambda_n 2^2 = 1 + 4\lambda_n$$

On résout donc l'équation suivante

$$5 = 1 + 4\lambda_n \Longleftrightarrow 4 = 4\lambda_n \Longleftrightarrow \lambda_n = 1$$

Or, $1$ est bien impair.

La propriété $P_1$ est vraie.

Hérédité. Fixons $n$ dans dans $\mathbb{N}$ tel que $P_n$ soit vraie. On a donc :

$\lambda_n$ un entier impair tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$

En mettant le tout au carré, on obtient :

$$\left(5^{2^n}\right)^2 = \left(1 + \lambda_n 2^{n+2}\right)^2$$

Soit, $5^{2^{n+1}} = 1 + 2\lambda_n 2^{n+2} + \lambda_n^2 2^{2n+4} = 1 + \lambda_n 2^{n+3} + \lambda_n^2 2^{2n+4}$

Nous factorisons par $\lambda_n 2^{n+3}$ :

$$5^{2n+1} = 1 + (\lambda_n + 2\lambda_n^2) 2^{n+3}$$

On pose $\lambda_{n+1} = \lambda_n + 2\lambda_n^2$ qui est bien impair puisque $\lambda_n$ l'est.

C'est exactement $P_{n+1}$.