Exercice 3

a) Soit b un réel, soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b$$

La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison b.
Par conséquent, pour $a = 1$:

$$u_{n+1} = u_0 + nb$$

b) Résolvons l'équation $x = ax + b$, où x, a et b sont des réels.

$$x = ax + b \iff x - ax = b \iff x = \frac{b}{1-a}.$$

Ainsi, $\ell = \frac{b}{1-a}$.

c) On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$u_n - \ell = v_n.$$

Démontrons que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique.
D'après la question précédente, $\ell = a\ell + b$.
D'où,

$$v_n = u_n - a\ell - b$$

Et,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - a\ell - b = a(u_n - \ell) = av_n$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$ et de raison a.

d) D'après la question précédente, on pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - \ell) \times a^n$$

Par conséquent,

$$u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)a^n + \ell$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente si $a = 0$ ou $u_0 = \ell = \frac{b}{1-a}$