De même, d'après le théorème 1,

$$2\sqrt{xy} \leq x + y$$

D'où,

$$\frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

En multipliant par xy, il vient :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$$

Ainsi,

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Il y a égalité si et seulement si $x = y$.

Exercice 81

On se donne deux nombres réels strictement positifs a et b, on considère les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

a) Pour $n \geq 1$, d'après le théorème 1,

$$2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n$$

Soit,

$$\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}$$

En effet,

$$(\sqrt{a_n})^2 + (\sqrt{b_n})^2 - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0$$

Nous en déduisons que, pour $n \geq 1$,

$$a_n \geq b_n$$

Dès lors,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}(a_n - b_n) \leq 0$$

Et, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}} \geq 1.$$