$P_3$ est vérifiée.

Enfin,

$$4 = -1^2 - 2^2 + 3^2 \text{ et donc } m = 3,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1 \text{ et } \varepsilon_3 = 1$$

$P_4$ est donc vérifiée.

Hérédité. Fixons $n$ dans $\mathbb{N}$ tel que $P_n$ soit vraie. Démontrons $P_{n+1}$.

Grâce à $P_n$,

$$n = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i i^2$$

Ainsi,

$$n + 4 = \left(\sum_{i=1}^{m} (\varepsilon_i i^2)\right) + 4$$

En utilisant l'égalité précédemment démontrée en a),

$$n + 4 = \left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i i^2\right) + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$$

Soit, en posant $\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+4} = 1$ et $\varepsilon_{m+2} = \varepsilon_{m+3} = -1$,

$$n + 4 = \sum_{i=1}^{m+4} \varepsilon_i i^2$$

Et,

$$m + 4 \leqslant n + 7 \qquad \text{car, grâce à } P_n,\quad m \leqslant n + 3.$$

C'est exactement $P_{n+4}$.

Nous venons ainsi de démontrer cette propriété pour $x \in \mathbb{N}$ $(0 = 0^2)$. En prenant les opposés des coefficients $\varepsilon_i$, il vient que cette propriété est vraie pour $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 36

Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n \times \frac{1 + 2n - 1}{2}$$

Soit,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$