Or, en prenant $x = y = 1$, il vient :

$$f(1) = 2f(1)$$

C'est pourquoi,

$$f(1) = 0$$

Ainsi, en calculant la primitive de f', il s'ensuit que f est de la forme :

$$x \mapsto a\ln(x)$$

Synthèse. Soit f une telle fonction. On dispose d'un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = a\ln(x)$$

Cherchons si f est solution du problème. D'abord, f est dérivable. Ensuite, pour $(x, y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2$, on a :

$$f(xy) = a\ln(xy) = a\ln(x) + a\ln(y)$$

et,

$$f(x) + f(y) = a\ln(x) + a\ln(y)$$

En conclusion, les solutions du problème sont les fonctions :

$$x \mapsto a\ln(x), \quad a \in \mathbb{R}$$

Exercice 23

a) Prenons $x = y = 0$. Il vient :

$$2f(0) = 4f(0)$$

D'où,

$$f(0) = 0$$

Montrons que f est paire.
Prenons $y = x$. Il s'ensuit que :

$$2f(x) = f(2x) - 2f(x)$$

Prenons désormais $y = -x$. Ainsi,

$$2f(x) = f(2x) - 2f(-x)$$

Par identification, on en déduit que, pour tout réel x,

$$f(-x) = f(x)$$

Fixons x et dérivons par rapport à y :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(y)$$

En prenant $y = 0$, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, \; f''(x) = f''(0)$