$$\sum_{K=1}^{n+1} u_K^3 = \left(\sum_{K=1}^{n+1} u_K\right)^2$$

Dans un premier temps, notons que :

$$\sum_{K=1}^{n+1} u_K^3 = \sum_{K=1}^{n} u_K^3 + u_{n+1}^3$$

Puis, grâce à P_n, en développant le carré, remarquons que :

$$\left(\sum_{K=1}^{n+1} u_K\right)^2 = \left(\sum_{K=1}^{n} u_K\right)^2 + 2u_{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + u_{n+1}^2$$

De même,

$$\sum_{K=1}^{n} u_K^3 = \left(\sum_{K=1}^{n} u_K\right)^2$$

Grâce à cette égalité, nous en déduisons que :

$$u_{n+1}^3 - u_{n+1} \cdot n(n+1) - u_{n+1}^2 = 0$$

Etant donné que $u_{n+1} > 0$, nous pouvons diviser par u_{n+1} :

$$u_{n+1}^2 - u_{n+1} - (n^2+n) = 0$$

Nous obtenons donc un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(2n+1)^2$, qui est strictement positif. $\mathcal{P}$ possède ainsi deux racines, à savoir $n+1$ et $-n$.
L'unique racine strictement positive est $n+1$.
Par conséquent,

$$u_{n+1} = n+1$$

C'est exactement P_{n+1}.

Ainsi, nous venons de démontrer que, nécessairement, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = n$$

Exercice 45

a) n est dans $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{K=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{K}\right) = \sum_{K=1}^{n} \ln\left(\frac{K+1}{K}\right)$$

Grâce aux propriétés de $\ln$,

$$\sum_{K=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{K}\right) = \sum_{K=1}^{n} \ln(K+1) - \ln(K)$$

Soit,

$$\sum_{K=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{K}\right) = \ln(n+1)$$