Exercice 78

Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R}^+$.

a) D'après le théorème 1,

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$$
$$b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$$
$$c+a \geqslant 2\sqrt{ca}$$

En réalisant le produit de ces 3 inégalités :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$$

b) En développant l'inégalité obtenue dans la question a :

$$2abc + a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) \geqslant 8abc$$

En ajoutant abc :

$$3abc + a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) \geqslant 9abc$$

Ainsi, en factorisant,

$$9abc \leqslant (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Exercice 79

Soit x la longueur du rectangle et y sa largeur.

Alors,

$$x+y=p$$

Le produit de deux réels positifs x et y de somme S est maximal lorsque $x=y=\frac{S}{2}$.

Par conséquent, l'aire du rectangle est majorée par $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ soit $\frac{p^2}{4}$.

L'aire est maximale lorsque le rectangle est un carré.

Exercice 80

Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, leur moyenne arithmétique est $m=\frac{x+y}{2}$, leur moyenne géométrique $g=\sqrt{xy}$, leur moyenne harmonique $h=\frac{2xy}{x+y}$.

D'après le théorème 1,

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

En effet,

$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$$