Exercice 63

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que :

$$\forall k \in \{n+1, \dots, 2n\}, \quad \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$$

C'est pourquoi

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

Soit,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2n}$$

Enfin,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}$$

Exercice 64

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, a dans $]1, +\infty[$. Notons que :

$$a^{-1} \geqslant a^{-n}$$

D'où,

$$\frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}} \leqslant 1$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}} \leqslant n$$

Il vient alors :

$$\frac{1-\frac{1}{a^n}}{1-\frac{a^{n-1}}{a^n}} \leqslant n$$

Nous en déduisons que

$$\frac{a^n-1}{a^n-a^{n-1}} \leqslant n$$

En factorisant le dénominateur :

$$\frac{a^n-1}{a^{n-1}(a-1)} \leqslant n$$

Finalement,
$$\frac{a^n-1}{a-1} \leqslant na^{n-1}$$