$$ab \leq 1$$
$$bc \leq 1$$
$$ca \leq 1$$

Ce qui équivaut à :

$$ab - 1 \leq 0$$
$$bc - 1 \leq 0$$
$$ca - 1 \leq 0$$

Donc,
$$(ab-1)(bc-1) \geq 0$$

Et,
$$(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leq 0$$

b) En développant l'inégalité ci-dessus,

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 + 1 \geq bc + ca + ab + a^2b^2c^2$$

Or, $abc > 0$. Il vient ainsi :

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$$

<u>Exercice 58</u>

Soient x et y deux éléments de $]-1,1[$:

$$|x| < 1 \quad \text{et} \quad |y| < 1$$

D'où,
$$|x| + |y| < 2 \quad \text{et} \quad 1 + |x|.|y| < 2$$

Ainsi,
$$\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$$

Par conséquent,
$$-1 < z < 1$$

Le nombre réel $z = \dfrac{x+y}{1+xy}$ appartient donc à $]-1,1[$

<u>Exercice 59</u>

a) Lorsque x décrit l'intervalle $[-2, +\infty[$:

- x^2 décrit l'intervalle $[0, +\infty[$
- x^3 décrit l'intervalle $[-8, +\infty[$

b) Lorsque x décrit l'intervalle $]-4, 5] \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{x}$ décrit l'ensemble

$$\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$$