## Exercice 27

Pour tous nombres i et j différents tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, il existe un réel $r_{ij}$ non nul tel que

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{r_{i,j} . a_j}{r_{i,j} . b_j} .$$

Ainsi,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{(r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n})\, a_1}{(r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n})\, b_1} = \frac{a_1}{b_1} .$$

Par conséquent, tous les nombres $\frac{a_i}{b_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont égaux à $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$.

## Exercice 28

Partons de l'égalité évidente suivante :

$$8 + 4\sqrt{3} = 8 + 4.\sqrt{3}$$

En utilisant les propriétés sur les racines :

$$8 + 4\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{2} . \sqrt{6}$$

Soit,

$$8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{2} . \sqrt{6} + (\sqrt{2})^2$$

Il s'agit d'une identité remarquable pour le membre droite. De plus, nous pouvons factoriser le membre de gauche par 4. Ainsi,

$$4(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$$

En prenant la racine carrée, il vient :

$$2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

## Exercice 29

$x$ et $y$ étant dans $\mathbb{K}$, on pose :

$$x = a + b\sqrt{2} \quad \text{et} \quad y = a' + b'\sqrt{2}$$

où $a$, $a'$, $b'$ et $b$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$.

Alors,

$$x - y = a + b\sqrt{2} - a' - b'\sqrt{2}$$

Soit,

$$x - y = (a - a') + (b - b')\sqrt{2}$$

où $a - a'$ et $b - b'$ sont bien des éléments de $\mathbb{Q}$. Par conséquent, $x - y$ est dans $\mathbb{K}$.