Exercice 1. Ici, nous allons montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n la propriété

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Initialisation. La vérification de P_1 est immédiate

$$1^3 = 1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = 1^3$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. On a donc :

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Alors :

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \qquad (n+1)^3 + (1^3+2^3+\dots+n^3)$$

D'où, grâce à P_n :

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

Mais :

$$(n+1)^3 = \frac{4(n+1)^3}{4},$$

Ainsi :

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2(4(n+1)^3)}{4}$$

Soit :

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

En identifiant l'identité remarquable :

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

En fin de compte :

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

C'est exactement P_{n+1}.