Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. On a donc $(n < 2^m)$:

$$2^m - n \in A$$

Soit,

$$2^m - n - 1 + 1 \in A$$

D'après ii), on a :

$$2^m - n - 1 \in A$$

C'est exactement P_{n+1}.

Finalement, comme tout entier naturel non nul peut s'écrire comme la différence entre une puissance de 2 strictement supérieure à 1 et un entier naturel non nul inférieur à cette même puissance de 2,

$$A = \mathbb{N}^*$$

Exercice 14

a) Soit x un rationnel de $]0, 1[$. On écrit donc

$$x = \frac{m}{n}, \quad (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad m < n.$$

On effectue la division euclidienne de n par m :

$$n = qm + r, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad r \in \{0, \dots, m-1\}.$$

On suppose que x n'est pas l'inverse d'un entier.

$$x - \frac{1}{q+1} = \frac{m}{n} - \frac{1}{q+1} = \frac{m}{qm+r} - \frac{1}{q+1} = \frac{m-r}{(qm+r)(q+1)}$$

Or, $(m-r) \in \{1, \dots, m-1\}$ et $(qm+r)(q+1)$ est bien un entier naturel non nul.

$x - \frac{1}{q+1}$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{m'}{n'}, \quad n' \in \mathbb{N}^*, \quad m' \in \{1, \dots, m-1\}.$$

b) Posons, pour m dans $\mathbb{N}^*$, la propriété P_m :

Tout rationnel de $]0, 1[$ s'écrivant sous la forme d'une fraction avec un numérateur inférieur ou égal à m s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts.

Initialisation. L'initialisation est immédiate.

Hérédité. Fixons m dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que P_{m-1} soit vraie. En reprenant les notations de a),

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} + \frac{1}{q+1}$$