Or, p et q étant premiers entre eux, et n étant un entier naturel, alors $q^2 = 1$ et,

$$n = p^2$$

Ce qui est absurde car n n'est pas le carré d'un entier naturel.

Exercice 19

Par l'absurde, supposons que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est rationnel. On peut donc écrire :

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{p}{q}$$

où p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ et où la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Ainsi,

$$q\ln(3) = p\ln(2) \quad \text{où } p \text{ et } q \text{ sont des éléments de } \mathbb{N}^*$$

En utilisant les propriétés de ln,

$$\ln(3^q) = \ln(2^p)$$

Soit,

$$3^q = 2^p$$

Ce qui est absurde : une puissance de 3 n'est égale à aucune puissance de 2.

Exercice 20

a)
Soit α un nombre irrationnel. Par l'absurde, supposons que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est rationnelle :

$$\frac{p}{q} + \alpha = \frac{p'}{q'}$$

où p, q, p' et q' sont des éléments de $\mathbb{N}^*$. Alors,

$$\alpha = \frac{p'q - q'p}{qq'}$$

Ce qui est absurde car α est irrationnel.

b) Soit α un nombre irrationnel. Par l'absurde, supposons que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel :

$$\frac{p}{q}\alpha = \frac{p'}{q'}$$

où p, q, p' et q' sont des éléments de $\mathbb{N}^*$. Alors,

$$\alpha = \frac{p'q}{q'p}$$

Ce qui est absurde car α est irrationnel.