$$u_{\lfloor n/6 \rfloor} \leqslant 2\left(\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor + 1\right)$$

Donc,

$$u_{n+1} \leqslant 2\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 3\right)$$

En effet, pour n et K dans $\mathbb{N}$,

$$\left\lfloor\frac{n}{K}\right\rfloor \leqslant \frac{n}{K}$$

Finalement,

$$u_{n+1} \leqslant 2(n+3) \leqslant 2(n+2)$$

C'est exactement P_{n+1}.

Exercice 16

Posons, pour n dans $\mathbb{N}$, la propriété P_n :

> n peut s'écrire $s_1 + \cdots + s_m$ où $m \in \mathbb{N}^*$, où les s_i sont dans S et où, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, m\}$, s_i ne divise pas s_j.

Initialisation. L'initialisation est immédiate. En effet,

$$1 = 2^0 \times 3^0$$

La propriété P_0 est donc vérifiée.

Hérédité. Soit maintenant n un entier naturel. Supposons P_K vraie pour tout K de $\{1, \ldots, n\}$. Deux cas se présentent.

- L'entier $n+1$ est pair et s'écrit donc $2s_1 + 2s_2 + 2s_3 + \cdots + 2s_m$. Pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, m\}$, s_i ne divise pas s_j. En effet, si ce n'était pas le cas, la propriété $P_{\frac{n+1}{2}}$ ne serait pas vérifiée, ce qui est absurde.

- L'entier $n+1$ est impair et s'écrit donc $3^K + q$ où K est un entier naturel tel que $3^K \leqslant n+1 < 3^{K+1}$ et où q est un entier naturel pair. En effet, un nombre impair s'écrit comme somme d'un nombre impair et d'un nombre pair. De manière évidente, $3^K > q$ et il s'ensuit que la propriété P_{n+1} est vérifiée puisque q respecte la propriété et qu'aucun élément de S intervenant dans la décomposition de q ne divise (ou n'est divisible par) 3^K.

La propriété P_{n+1} est donc vérifiée.

Exercice 17

Soient a, b, c et d des rationnels tels que :

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$$

Il vient alors :

$$a - c = \sqrt{2}(d - b)$$