Il vient alors que :

$$\frac{n-1}{2} < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{n+1}{2}$$

$$\frac{n-2}{3} < \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \leqslant \frac{n+1}{3}$$

$$\frac{n-5}{6} < \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor \leqslant \frac{n+1}{6}$$

Mais :

$$u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}$$

C'est pourquoi,

$$u_{n+1} > \frac{n-5}{6} + \frac{n-2}{3} + \frac{n-1}{2} + 3$$

Soit,

$$u_{n+1} > n+1$$

Finalement,

$$u_{n+1} \geqslant n+2$$

C'est exactement P_{n+1}.

b) En calculant quelques termes de la suite, il semblerait que $C=2$.

Posons, pour n dans $\mathbb{N}$, la propriété P_n :

$$u_n \leqslant 2(n+1)$$

Initialisation. L'initialisation est immédiate :

$u_0 = 1$ et $2(1+1) = 4$

La propriété P_0 est donc vérifiée.

Hérédité. Soit n un entier naturel. Supposons P_K vraie pour tout K de $\{0, \dots, n\}$. Alors :

$$u_{\lfloor n/2 \rfloor} \leqslant 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$$

$$u_{\lfloor n/3 \rfloor} \leqslant 2\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1\right)$$