

Exercice 70

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$a = \lfloor x \rfloor \quad \text{et} \quad b = x - a$$

Par disjonction des cas :

- Si $b \geq 0,5$. Alors :

$$\lfloor 2x \rfloor = 2a + 1$$

C'est pourquoi,

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 1$$

- Si $b < 0,5$. Alors :

$$\lfloor 2x \rfloor = 2a$$

Et ainsi,

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$$

Par conséquent, si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Exercice 71

Soit $n \in \mathbb{N}$.

IP vient :

$$n(n+1) < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

IP s'ensuit :

$$2\sqrt{n+1}\sqrt{n} < 2n+1$$

Par ailleurs,

$$2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \geq 2n$$

Donc,

$$\lfloor 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \rfloor = 2n$$

Nous en déduisons que :

$$\lfloor (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \rfloor = 4n+1$$

Exercice 72

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On pose :

$$\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$$

et

$$\langle y \rangle = y - \lfloor y \rfloor$$