C'est pourquoi,

$$u_n = a^n \left(u'_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{a^{k+1}} \right)$$

Mais, $u'_0 = u_0$. D'où,

$$u_n = a^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k a^{n-k-1}$$

<u>Exercice 49</u>

Grâce à l'égalité

$$k \times k! = (k+1)! - k!,$$

il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!)$$

Par téléscopage,

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = (n+1)! - 1$$

<u>Exercice 50</u>

Grâce à l'égalité

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$

il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!}$$

Par téléscopage,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

<u>Exercice 51</u>

a) Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$,

$$H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1) = x(x+1)\dots(x+j-1)(x+j) - (x-1)x(x+1)\dots(x+j-1)$$

En factorisant par $H_j(x)$:

$$H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1) = H_j(x)((x+j) - (x-1))$$

Finalement,

$$H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1) = H_j(x)(j+1)$$