Finalement, $\mathcal{S} = \left[\frac{5}{3} ; 3\right]$

Exercice 75

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $A = (x^2-3)(1-\sqrt{x})(|x|-6)|4x+3|$.
Notons que A est du signe de $(x^2-3)(1-\sqrt{x})(|x|-6)$.

x	0		1		$\sqrt{3}$		6		$+\infty$
x^2-3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\sqrt{x}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\lvert x-6\rvert$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
A		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\mathcal{S} = [0 ; 1[\cup]\sqrt{3} ; 6[$

Exercice 76

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{10}$$

Il vient :

$$\sqrt{n+1} \leqslant \frac{1}{10} + \sqrt{n}$$

En élevant au carré, il s'ensuit :

$$\frac{1}{5}\sqrt{n} \geqslant \frac{99}{100}$$

Soit,

$$n \geqslant 24{,}5025$$

Enfin,

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 25\}$$

Exercice 77

a) Déterminons, selon la valeur de x, le signe de :

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$$

Il vient, si $f(x) \geqslant 0$:

$$\sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{2x-3}$$

Alors :

$$x \leqslant 2$$

Par conséquent, la fonction f est positive sur $]-\infty ; 2]$.