Exercice 66

Déterminons le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{K} + \sqrt{K+1}} \geqslant 2022$$

En multipliant le dénominateur par sa quantité conjuguée :

$$\sum_{K=1}^{n} -\sqrt{K} + \sqrt{K+1} \geqslant 2022$$

Par télescopage,

$$\sqrt{n+1} \geqslant 2023$$

Finalement,

$$n \geqslant 4092528$$

Exercice 67

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $x \leqslant y \leqslant z$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Donc,

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$$

Ainsi,

$$\frac{3}{x} \geqslant 1$$

D'où,

$$x \leqslant 3$$

De plus,

$$x > 1$$

Par disjonction des cas :

- $x = 2$. Alors,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

Mais,

$$\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$$

C'est pourquoi,

$$y \leqslant 4$$

De même,