Finalement,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

Nous en déduisons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Exercice 42

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Tout d'abord, remarquons que l'écart entre deux carrés parfaits consécutifs, notés n^2 et $(n+1)^2$, vaut $2n+1$.

Par conséquent, il vient de manière immédiate qu'il existe, pour n un élément de $\mathbb{N}$, exactement $2n+1$ entiers notés i tels que :

$$\lfloor \sqrt{i} \rfloor = n$$

Nous en déduisons ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2k + 2$$

C'est-à-dire :

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \quad + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) + n$$

Soit,

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(2n-1)}{6} + n$$

Enfin,

$$S_n = \frac{n(4n^2 - 3n + 5)}{6}$$

Exercice 43

Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n la propriété

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

Initialisation. La vérification de P_1 est immédiate. En effet,

$$H_2 \times 2 - 2 = 1$$

Et,

$$H_1 = 1$$

L'égalité est ainsi vérifiée.

Hérédité. Fixons un entier $n \geq 2$ tel que P_n soit vraie. Alors :