On remarque l'égalité suivante :

$$\sum_{K=0}^{n} Kx^K = x \sum_{K=0}^{n} Kx^{K-1}$$

Naturellement, il vient :

$$\sum_{K=0}^{n} Kx^K = \frac{nx^{n+2} - x^{n+1}(n+1) + x}{(x-1)^2}$$

Pour $x = 1$,

$$\sum_{K=0}^{n} Kx^K = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Soit $x \in]-1;1[$.

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} |nx^n|$.

Notons l'égalité suivante :

$$|nx^n| = \frac{1}{\ln(|x|)} n \ln(|x|) e^{n \ln(|x|)}$$

Il vient alors :

$$\lim_{n \to +\infty} |nx^n| = 0$$

Et donc

$$\lim_{n \to +\infty} nx^n = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{K=0}^{n} Kx^K = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Exercice 41

On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{K=n}^{2n} \frac{1}{K}$.

Alors :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{K=n+1}^{2n+2} \frac{1}{K}\right) - \left(\sum_{K=n}^{2n} \frac{1}{K}\right)$$

Soit :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{K=n+1}^{2n} \frac{1}{K}\right) - \left(\sum_{K=n+1}^{2n} \frac{1}{K}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$$