b) Pour j et n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{K=1}^{n} \left(H_{j+1}(K) - H_{j+1}(K-1)\right) = \sum_{K=1}^{n} \left(H_j(K)(j+1)\right)$$

Par linéarité de la somme,

$$\frac{1}{j+1} \cdot \sum_{K=1}^{n} \left(H_{j+1}(K) - H_{j+1}(K-1)\right) = \sum_{K=1}^{n} H_j(K)$$

Par téléscopage,

$$\sum_{K=1}^{n} H_j(K) = \frac{1}{j+1} \cdot H_{j+1}(n)$$

c) Remarquons l'égalité suivante :

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = \sum_{K=1}^{n} \left(H_2(K) - K\right)$$

Alors :

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{1}{3} H_3(n) - \frac{n(n+1)}{2}$$

Enfin,

$$\sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

De même,

$$\sum_{K=1}^{n} K^3 = \sum_{K=1}^{n} H_3(K) - 3K^2 - 2K$$

Soit,

$$\sum_{K=1}^{n} K^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1)$$

Finalement,

$$\sum_{K=1}^{n} K^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 52

Soient r et n deux entiers naturels tels que $r \leqslant n$,

$$S_{K,n} = \sum_{K=r}^{n} \binom{K}{r}$$

a) En utilisant la relation de Pascal :

$$\binom{K}{r} = \binom{K+1}{r+1} - \binom{K}{r+1}$$

valable pour K et n dans $\mathbb{N}$ avec $r+1 \leqslant K$, il vient :

$$S_{K,n} = \left[\sum_{K=r+1}^{n} \left(\binom{K+1}{r+1} - \binom{K}{r+1}\right)\right] + \binom{r}{r}$$