Exercice 37

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n^2+n}{3}.$$

Ainsi, pour n dans $\mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

C'est-à-dire,

$$u_n = \frac{n^2+n}{3} - \frac{(n-1)^2+n-1}{3}$$

Enfin,

$$u_n = \frac{2n}{3}$$

Ce qui est aussi valable pour $n=0$ car $u_0 = 0$.

Exercice 38

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

La somme des nombres de la i-ième ligne vaut $\sum_{k=1}^{n} ki$.

On note M la moyenne des entiers de la table, qui comporte par ailleurs n lignes.
D'où,

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} ki \right)}{n^2}$$

Par linéarité de la somme,

$$M = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k \right) \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)}{n^2}$$

Soit,

$$M = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}{n^2}$$

Finalement,

$$M = \frac{(n+1)^2}{4}$$