Finalement,

$$u_{n+2} = \alpha \lambda^{n+2} + \beta (n+2) \lambda^{n+2}$$

C'est exactement P_{n+2}.

Exercice 13

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :

i) $\forall n \in A,\ 2n \in A$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Rightarrow n \in A$

a) On pose, pour m dans $\mathbb{N}$, la propriété P_m

$$2^m \in A$$

Initialisation. L'initialisation est immédiate car A contient 1 : la propriété P_0 est vérifiée.

Hérédité. Posons m dans $\mathbb{N}$ tel que P_m soit vraie. Ainsi,

$$2^m \in A$$

Or, d'après ii),

$$\forall n \in A,\ 2n \in A$$

Donc,

$$2 \times 2^m \in A$$

Finalement,

$$2^{m+1} \in A$$

C'est exactement P_{m+1}.

b) Posons, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété P_n (avec m dans $\mathbb{N}$ et $n < 2^m$) :

$$2^m - n \in A$$

Initialisation. D'après la question précédente, pour tout m dans $\mathbb{N}^*$,

$$2^m \in A$$

Ce qui équivaut à dire que, pour tout m dans $\mathbb{N}^*$,

$$2^m - 1 + 1 \in A$$

D'après ii), cela implique que

$$2^m - 1 \in A$$

C'est exactement P_1.

La propriété P_1 est donc vérifiée.