Exercice 34

Intuitivement, il semblerait que :

$$E = (x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$$

Vérifions cette intuition en développant le membre de droite, que nous noterons A :

$$A = (x^2 - y^2 - 2yz - z^2)(x+y-z)(x-y+z)$$

Soit,

$$A = (x^2 - y^2 - 2yz - z^2)(x^2 - y^2 + 2yz - z^2)$$

Enfin,

$$A = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$

Notre intuition est vérifiée.

Exercice 35

a) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(x+3)^2 + x^2 - (x+1)^2 - (x+2)^2 = 4$$

b) Démontrons tout d'abord la propriété pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Nous allons procéder par récurrence, avec une disjonction des cas dans l'initialisation.

Nous posons effectivement, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété P_n :

Il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leqslant n+3$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{-1, 1\}^m$ tel que

$$n = \sum_{i=1}^{m} i^2 \varepsilon_i$$

Initialisation : démontrons P_1, P_2, P_3 et P_4.

Tout d'abord,

$1 = 1^2$ et donc $m = 1$, $\varepsilon_1 = 1$

P_1 est vérifiée.

De même,

$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ et donc $m = 4$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_4 = 1$

P_2 est vérifiée

Il vient aussi,

$3 = -1^2 + 2^2$ et donc $m = 2$, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$