Soit,

$$m \geqslant \frac{n-1}{2}$$

b) D'après la question précédente, pour $m \leqslant \frac{n-1}{2}$,

$$\binom{n}{m+1} \geqslant \binom{n}{m}$$

Par disjonction des cas,

- Si n est pair, alors il peut s'écrire sous la forme $2K$ où K est un élément de $\mathbb{N}$. Il s'ensuit :

$$m \leqslant K-1$$

C'est-à-dire,

$$m+1 \leqslant K$$

Nous en déduisons que :

$$\binom{n}{0} \leqslant \binom{n}{1} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

- Si n est impair, alors il peut s'écrire sous la forme $2K+1$ où K est un élément de $\mathbb{N}$. Il s'ensuit :

$$m \leqslant K$$

Or,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = K$$

Nous en déduisons que :

$$\binom{n}{0} \leqslant \binom{n}{1} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

L'inégalité est donc démontrée.

c) D'après les questions a et b,

$$\sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} \leqslant \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Grâce à la formule du binôme de Newton,

$$2^n \leqslant (n+1) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Enfin,

$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$