# Exercice 12

a) Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle $\lambda$. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite telle que, avec $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbb{R}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \alpha\lambda^n + \beta n \lambda^n$$

Par définition de la suite,

$$v_{n+2} = \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2}$$

Soit,

$$v_{n+2} = \alpha\lambda^{n+2} + \beta n\lambda^{n+2} + 2\lambda(\beta\lambda^{n+1})$$

Or, $\lambda$ étant l'unique racine réelle de l'équation $x^2 = ax+b$, $2\lambda = a$, et :

$$v_{n+2} = v_n(a\lambda + b) + a\beta\lambda^{n+1}$$

En développant,

$$v_{n+2} = a(\beta\lambda^{n+1} + \alpha\lambda^{n+1} + \beta n\lambda^{n+1}) + bv_n$$

Finalement,

$$v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$$

Par conséquent, pour $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{E}$, l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

b) En posant la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, élément de $\mathcal{E}$, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Et, pour n dans $\mathbb{N}$, posons la propriété $P_n$ :

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$$

Initialisation. En posant $\alpha = u_0$ et $\beta = \dfrac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}$, on a :

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad u_1 = \alpha\lambda + \beta\lambda$$

Les propriétés $P_0$ et $P_1$ sont donc vérifiées.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $P_n$ et $P_{n+1}$ soient vraies. Alors,

$$u_{n+2} = a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n)$$

Soit,

$$u_{n+2} = \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda a\lambda^n + \beta n\lambda^n(a\lambda + b)$$