$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$$

Par conséquent, en posant $a = f(1)$,

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax$$

d) Démontrons que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
Partons de la fonction partie entière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \leqslant \lfloor nx \rfloor + 1$$

Il s'ensuit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$$

Or, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ est un rationnel.

D'après le théorème des gendarmes, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ tend vers x lorsque n tend vers $+\infty$.

e) Nous venons de démontrer que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
La fonction f étant continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il vient, grâce à la propriété démontrée en c) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$$

Exercice 25

Si a, b, c et d sont des nombres réels non nuls,

$$A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \quad ; \quad B = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \quad ; \quad C = \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

Exercice 26

a) $\ln(56) - \ln(7) + \ln(4) = \ln(56) - \ln(28)$

Soit,

$$\ln(56) - \ln(7) + \ln(4) = \ln(2)$$

b) $\ln(\sqrt{216}) = \ln\left((6^3)^{1/2}\right)$

D'où,

$$\ln(\sqrt{216}) = \frac{3}{2}\ln(6)$$

c) $\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7}) = 2\ln(7) + \ln(3) + \ln(7) - \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(7)$

Soit,

$$\ln(49) + \ln(21) - 3\ln(3\sqrt{7}) = \frac{5}{2}\ln(7).$$