Exercice 60

a) Lorsque x décrit $[-2, +\infty[$ et y décrit $[2, +\infty[$, il vient intuitivement :

- $x + y$ décrit $[0, +\infty[$
- xy décrit $\mathbb{R}$
- $\frac{x}{y}$ décrit $[-1, +\infty[$

b) Lorsque x décrit $[-1, +\infty[$ et y décrit $]-\infty, 3]$, il vient intuitivement :

- $x + y$ décrit $\mathbb{R}$
- xy décrit $\mathbb{R}$
- $\frac{x}{y}$ décrit $\mathbb{R}$

Exercice 61

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Par disjonction des cas :

- $x > 0$ et $y > 0$. Alors,

$$|x| = x \quad \text{et} \quad |y| = y$$

D'où,

$$|x + y| = x + y \quad \text{et} \quad |x| + |y| = x + y$$

L'égalité est démontrée.

- $x < 0$ et $y < 0$. Alors,

$$|x| = -x \quad \text{et} \quad |y| = -y$$

D'où,

$$|x + y| = -x - y \quad \text{et} \quad |x| + |y| = -x + (-y)$$

L'égalité est démontrée.

- $x < 0$ et $y > 0$. Alors, de manière immédiate, $y > x$. De plus,

$$|x| = -x \quad \text{et} \quad |y| = y$$

D'où

$$|x + y| < y \quad \text{et} \quad |x| + |y| = -x + y$$

Or,

$$-x + y > y$$