C'est exactement P_{n+1}.

b) Pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\Delta_n = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2$$

Et, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

Ainsi,

$$\Delta_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \times \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}} - \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2$$

En développant,

$$\Delta_n = \frac{-\alpha^n \beta^{n+2} - \beta^n \alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta^{n+1}}{5}$$

En factorisant par $\alpha^n \beta^n$,

$$\Delta_n = \frac{\alpha^n \beta^n (-\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)}{5}$$

Or, $\alpha\beta = -1$.

$$\Delta_n = (-1)^n \times -\frac{(\alpha-\beta)^2}{5}$$

Mais, de manière évidente, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$. C'est pourquoi,

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}$$

<u>Exercice 11</u>

Soient a et b deux réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ. Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite telle que, avec α et β dans $\mathbb{R}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \alpha \lambda^n + \beta \mu^n$$

Par définition de la suite,

$$v_{n+2} = \alpha \lambda^{n+2} + \beta \mu^{n+2}$$

λ et μ étant les deux racines de l'équation $x^2 = ax + b$:

$$v_{n+2} = \alpha \lambda^n (a\lambda + b) + \beta \mu^n (a\mu + b)$$