Exercice 39

Soit $x \in]-1;1[$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$

On reconnait la somme d'une progression géométrique ($x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$) :

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

De plus, $x \in]-1;1[$ C'est pourquoi,

$$\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$$

Il s'ensuit,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{-1}{x-1}$$

Et,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-x}$$

Exercice 40

a) Pour $x \neq 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_k = \sum_{i=0}^{k} x^i$

Calculons S'_n :

$$S'_k = \sum_{i=0}^{k} i x^{i-1}$$

Or,

$$S_k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

Ainsi,

$$S'_k = \frac{kx^{k+1} - x^k(k+1) + 1}{(x-1)^2}$$

On en déduit :

$$\sum_{i=0}^{k} i x^{i-1} = \frac{kx^{k+1} - x^k(k+1) + 1}{(x-1)^2}$$