c) $\sqrt{2}$ est irrationnel

$1-\sqrt{2}$ est irrationnel d'après les propriétés démontrées ci-dessus.

Et,

$$\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$$

$\sqrt{8}$ est irrationnel d'après l'exercice 18.

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Et,

$$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=4$$

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels.

Et, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

$\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels.

Et,

$$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$$

<u>Exercice 21</u>

$\sqrt{6}$ est irrationnel d'après la propriété démontrée dans l'exercice 18.

En raisonnant par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est rationnel. On peut donc écrire :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$

où p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$. En élevant au carré,

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\frac{p^2}{q^2}$$

En développant,

$$5+2\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2}$$

Soit,

$$\frac{p^2-5q^2}{2q^2}=\sqrt{6}$$

Ce qui est absurde car $\sqrt{6}$ est irrationnel.

<u>Exercice 22</u>

Analyse. Soit f une éventuelle solution. Fixons y et dérivons par rapport à x.

Il vient :

$$yf'(xy)=f'(x)$$

Prenons maintenant $x=1$, ce qui est possible puisque l'égalité précédente est vraie pour tout x. Il vient, pour tout y de $\mathbb{R}$:

$$f'(y)=\frac{1}{y}\times f'(1)$$