Nous en déduisons ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} \ln\left(\frac{K+1}{K}\right) = +\infty$$

b) n est un entier supérieur ou égal à 2.

$$\sum_{K=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = \sum_{K=2}^{n} \ln(K^2 - 1) - \ln(K^2)$$

En développant l'identité remarquable,

$$\sum_{K=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = \sum_{K=2}^{n} \ln(K+1) + \ln(K-1) - 2\ln(K)$$

D'où,

$$\sum_{K=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = \left(\sum_{K=2}^{n} \ln(K+1) - \ln(K)\right) - \left(\sum_{K=1}^{n} \ln(K) - \ln(K-1)\right)$$

Finalement,

$$\sum_{K=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{K=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{2}\right)$$

Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{K=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) = -\ln(2)$$

Exercice 46

Déterminons trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; -2\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

C'est-à-dire,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; -2\}, \quad x^2(a+b+c) + x(3a+2b+c) + 2a = 1$$

Soit,

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$$

Et ainsi,