Par conséquent, f'' est constante.

c) On en conclut que f est un polynôme du second degré dont l'unique racine a pour antécédent 0. La fonction f est donc de la forme :

$$x \mapsto ax^2$$

Exercice 24

a) Prenons $x = y = 0$. Il vient alors aisément que :

$$f(0) = 0$$

Prenons désormais $y = -x$. Il s'ensuit :

$$f(0) = f(x) + f(-x)$$

Soit,

$$-f(x) = f(-x) \quad \text{pour tout réel } x.$$

Ainsi, la fonction f est impaire.

b) On pose, pour n dans $\mathbb{N}$, la propriété P_n :

$$f(nx) = n f(x) \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Initialisation. L'initialisation est immédiate. En effet, d'après a), $f(0) = 0$.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n soit vrai. Alors :

$$f(nx + x) = f(nx) + f(x)$$

Grâce à P_n,

$$f(nx + x) = n f(x) + f(x)$$

Soit,

$$f((n+1)x) = (n+1) f(x)$$

C'est exactement P_{n+1}.

c) Pour p et q dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ respectivement, d'après la propriété démontrée ci-dessus :

$$f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = p\, f(1)$$

De même,

$$f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = q\, f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Soit,

$$p f(1) = q f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Finalement,