Exercice 4

On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$\ln(t_{n+1}) = \ln\left(\frac{\sqrt{t_n}}{e}\right) = \frac{1}{2}\ln(t_n) - 1$$

D'après l'exercice précédent, $\ln(t_n) = \left(\ln(t_0) + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$.

Ainsi,

$$\ln(t_n) = 2 \times \frac{1}{2^n} + 2 = \frac{1}{2^{n-1}} + 2.$$

La suite $(\ln(t_n)_{n\geq 0})$ converge donc vers 2.

Exercice 5

On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

Par conséquent,

$$x_{n+2} = \underbrace{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}_{x_{n+1}} + x_{n+1}$$

D'où,

$$x_{n+2} = 2x_{n+1}$$

Par réindiçage, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = 2x_n$$

Et,

$$x_0 = 1$$

Exercice 6

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+\frac{cx^2}{1+cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2+cx^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}.$$

De même,

$$f(f(f(x))) = \frac{x}{\sqrt{1+3cx^2}}$$

Il semblerait donc que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\underbrace{f(f(\ldots(x)))}_{n \text{ fois}} = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$.