On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$, pour éviter toute ambi

$$F_n(x) = f(\underbrace{f(\dots(x)))}_{n \text{ fois}}$$

Démontrons par récurrence notre hypothèse.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n la propriété

$$F_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

Initialisation : voir la définition de la fonction

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. On a donc :

$$F_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

Alors :

$$f(F_n(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}}{\sqrt{1+\frac{cx^2}{1+ncx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2+cx^2}}$$

Finalement :

$$F_{n+1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}$$

C'est exactement P_{n+1}.

Exercice 7

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit P_n la propriété :

$$u_n = 2^n + 3^n$$

Etablissons P_n par une récurrence à 2 termes.

Initialisation. Les propriétés P_0 et P_1 sont vérifiées. En effet :

$$2^0+3^0 = 2 = u_0 \quad \text{et} \quad 2^1+3^1 = 5 = u_1.$$

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient vraies. Par définition de la suite :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Grâce aux propriétés P_n et P_{n+1} :

$$u_{n+2} = 5\times 2\times 2^n + 3\times 3^n \times 5 - 6\times 2^n - 6\times 3^n$$

En simplifiant :

$$u_{n+2} = 4\times 2^n + 9\times 3^n$$