Par télescopage,

$$S_{k,n} = \binom{n+1}{r+1}$$

b) Décomposons le fait de prendre $r+1$ éléments parmi $\{1, \dots, n+1\}$.

Par disjonction des cas :

- Le plus grand élément tiré est $n+1$: il reste alors à tirer r éléments parmi n.
- Le plus grand élément tiré est n : il reste alors à prendre r éléments parmi $n-1$.

...

- Le plus grand élément tiré est $r+1$: il reste alors à prendre r éléments parmi r

Intuitivement, il vient donc :

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$$

Exercice 53

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}$$

Il vient :

$$A_n = 4^n \cdot \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2}$$

Enfin,

$$A_n = 4^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n}$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$B_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3}$$

Il s'ensuit :

$$B_n = \frac{2}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+4)!}{6}$$

D'où,

$$B_n = \frac{n+4}{3}$$