Exercice 65

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$.

Par disjonction des cas,

- $a > b$. Alors, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} \quad \text{et donc,} \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

De même que,

$$\sqrt{|a-b|} = \sqrt{a-b}$$

Evidemment,

$$a \leqslant a - b + 2\sqrt{b}\sqrt{a-b} + b$$

Il s'agit d'une identité remarquable, d'où :

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a-b} + \sqrt{b}$$

Soit,

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant \sqrt{a-b}$$

L'inégalité souhaitée est démontrée

- $a < b$. Alors, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \text{et donc,} \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

De même que,

$$\sqrt{|a-b|} = \sqrt{b-a}$$

Evidemment,

$$b \leqslant b - a + 2\sqrt{a}\sqrt{b-a} + a$$

Il s'agit d'une identité remarquable, d'où :

$$\sqrt{b} \leqslant \sqrt{b-a} + \sqrt{a}$$

Soit,

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b-a}$$

L'inégalité souhaitée est démontrée.

- $a = b$ alors $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a-b}$