De même,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Finalement,

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$$

<u>Exercice 69</u>

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{2022} |x-k|$

a) Par disjonction des cas :

- Si $x \geq 2022$, alors :

$$f(x) = 2022x - 2045253$$

- Si $x \leq 1$, alors :

$$f(x) = -2022x - 2045253$$

- Si $1 \leq x \leq 2021$, alors

$$\forall k \in [1, 2022], \ x-k \geq 0 \iff k \leq \lfloor x \rfloor$$

Et inversement,

$$\forall k \in [1, 2022], x-k < 0 \iff k > \lceil x \rceil$$

D'où,

$$f(x) = \lfloor x \rfloor x - \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k - x(2022 - \lfloor x \rfloor) + \sum_{k=\lfloor x \rfloor+1}^{2022} k$$

Nous en déduisons que :

$$f(x) = x(2\lfloor x \rfloor - 2022) - \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k + \sum_{k=\lfloor x \rfloor+1}^{2022} k$$

Par conséquent f est croissante sur $[1012 ; +\infty[$, décroissante sur $]-\infty ; 1011]$ (strictement à chaque fois) et constante sur $[1011 ; 1012[$.

b) f atteint son minimum sur $[1011 ; 1012[$:

$$f(1011) = 1011(2\lfloor 1011 \rfloor - 2022) - \sum_{k=1}^{\lfloor 1011 \rfloor} k + \sum_{k=\lfloor 1011 \rfloor+1}^{2022} k$$

Soit,

$$f(1011) = 1011^2$$

Finalement,

$$f(1011) = 1022121$$

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1022121.