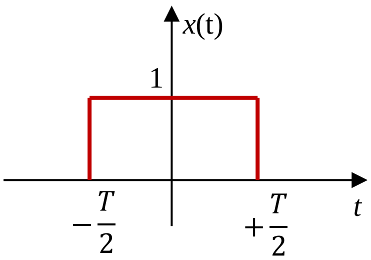
Responsable : F.ACHOURI

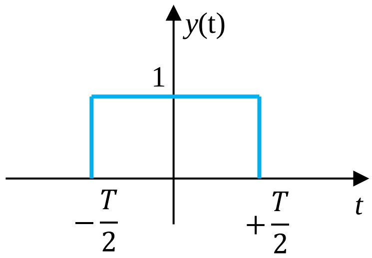
Corrigé de la Série de TD: Produit de convolution

Corrigé de l'Exercice 1 :

Evaluez graphiquement le produit de convolution entre deux signaux rectangulaires identiques d'amplitude 1 et de largeur T



*



Pour faire une évaluation graphique d'un produit de convolution, on suit ces étapes:

- Rotation de l'une des fonctions / YY $\rightarrow\ f(-\tau)$
- Effectuer un décalage temporel vers la gauche
- Calcul du produit de l'intersection de deux fonctions (Calcul de l'aire ou l'intégrale).

Les deux signaux sont identique, alors, le décalage de l'un ou l'autre et la même chose.

$$x(t) = y(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

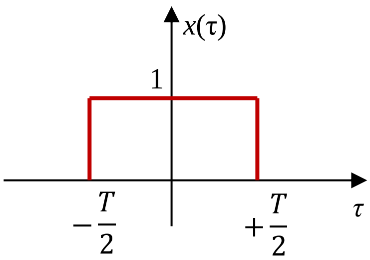
On fixe x(t) et on inverse dans le temps et on décale y (t)

On a l'intégrale de produit de convolution est donné

$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

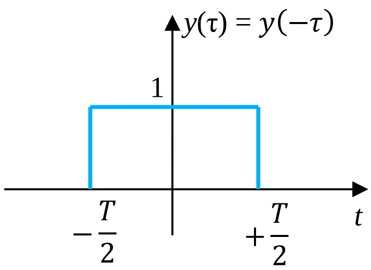
Ici, τ est la variable temporelle, t est le décalage temporel vers la gauche.

$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq \tau \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



$$y(\tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq \tau \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$,

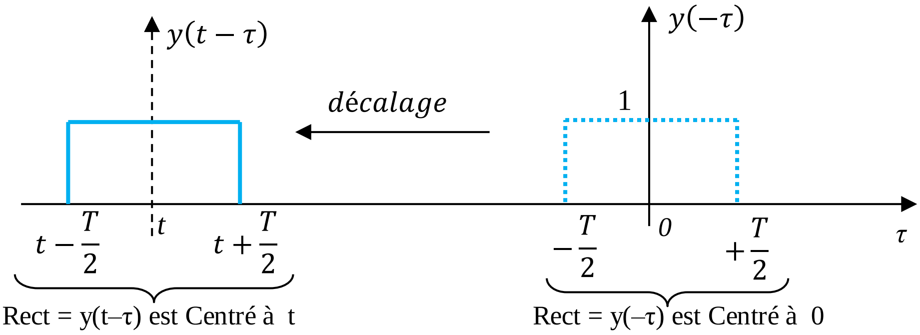
$$y(-\tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq \tau \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



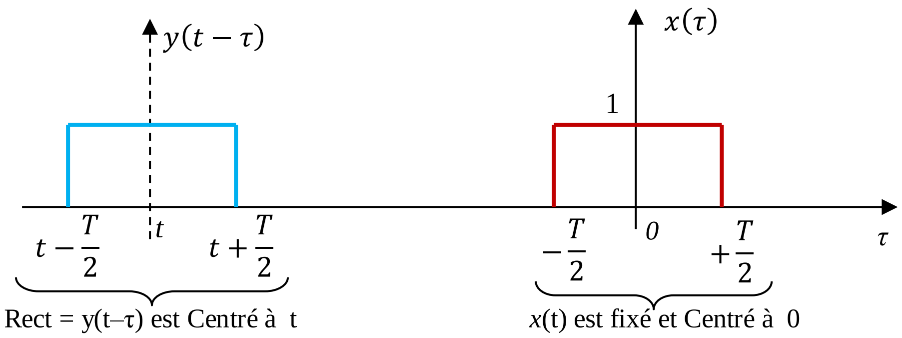
On remarque bien que $y(\tau) = y(-\tau)$ car $y(\tau)$ est un signal pair.

Maintenant, effectuant un décalage de t vers la gauche

$$y(-\tau+t) = y(t-\tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t-\tau \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} , \quad y(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t-\frac{T}{2} \leq \tau \leq t+\frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Etape 1 :



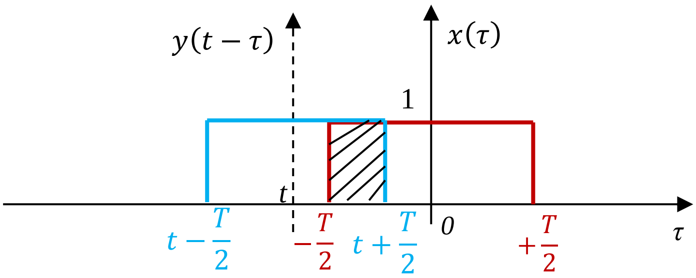
On a

$t+\frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \rightarrow$ ou pour $t < -T$ L'intersection entre les deux signaux est nulle

Alors : $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = 0$

Etape 2 :

Dans cette étape, on translate vers la droite le signal qui est déjà décalé vers la gauche $y(t-\tau)$ de telle sorte ce signal coupe $x(\tau)$ qui est fixé à l'origine 0.



On a

$-\frac{T}{2} < t+\frac{T}{2} < 0 \rightarrow$ ou pour $-T < t < -\frac{T}{2}$ L'intersection entre les deux signaux existe

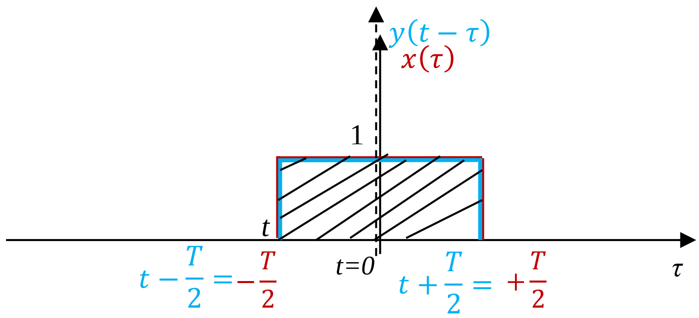
Le produit de convolution se fait soit par le calcul de la surface hachurée en noir

: $x(t)*y(t) = \left[\left(t+\frac{T}{2}\right)-\left(-\frac{T}{2}\right)\right].1 = t+T$

Ou bien, on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection entre $\left[-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}\right]$

$$x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (1).(1)d\tau = [\tau]_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} = t+T$$

Etape 3 :



On a

$t-\frac{T}{2} = -\frac{T}{2}$ et $t+\frac{T}{2} = +\frac{T}{2}$ $et\ t=0 \rightarrow$ ou pour $t=0$ L'intersection entre les deux signaux existe

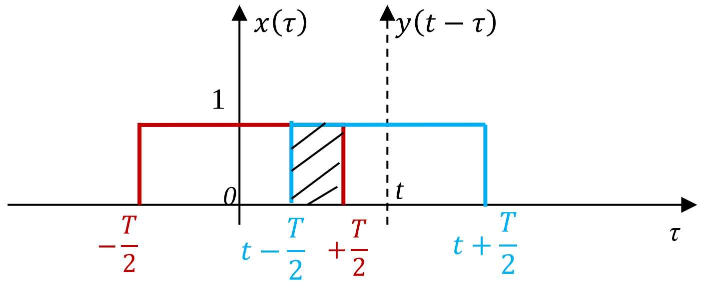
Le produit de convolution se fait soit par le calcul de l'aire hachurée en noir

: $x(t)*y(t) = \left[\left(+\frac{T}{2}\right)-\left(-\frac{T}{2}\right)\right].1 = T$

Ou bien, on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}(1).(1)d\tau=[\tau]_{-\frac{T}{2}}^{0}=\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}(1).(1)d\tau=[\tau]_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}=\mathrm{T}$$

Étape 4 :



On a

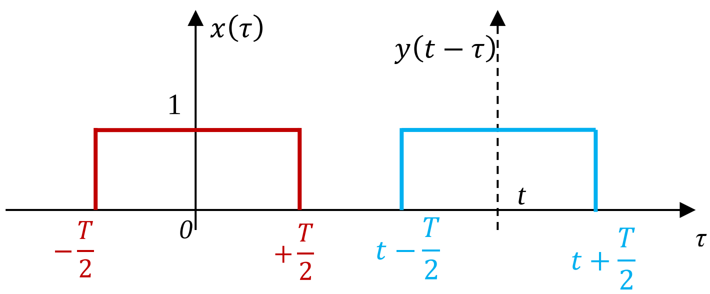
$0<t-\frac{T}{2}<+\frac{T}{2}$ $\;et\;$ $t+\frac{T}{2}>+\frac{T}{2}\rightarrow$ ou pour $\frac{T}{2}<t<T$ L'intersection entre les deux signaux existe

Le produit de convolution se fait soit par le calcul de l'aire hachurée en noir : $x(t)*y(t)=\left[\left(+\frac{T}{2}\right)-\left(t-\frac{T}{2}\right)\right].1=-t+T$

Ou bien, on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{t-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}(1).(1)d\tau=[\tau]_{t-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}=-t+T$$

Étape 5:



On a

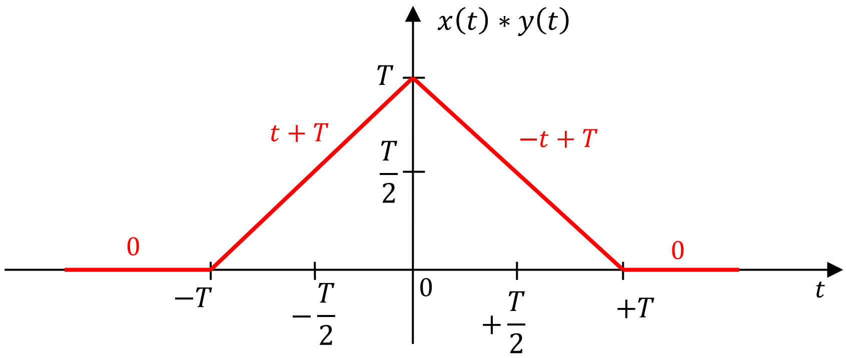
$t-\frac{T}{2}>+\frac{T}{2}\rightarrow$ ou pour $\boxed{t>+T}$ L'intersection entre les deux signaux est nulle

Alors : $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=0$

On récapitule :

$$x(t)*y(t)=\begin{cases}0 & t<-T\\ t+T & -T<t<-\frac{T}{2}\\ T & t=0\\ -t+T & \frac{T}{2}<t<T\\ 0 & t>+T\end{cases}$$

La représentation de $x(t)*y(t)$



Le produit de convolution de deux signaux rectangulaire identiques donne un signal triangulaire.

$$x(t)*y(t)=\begin{cases}T-|t| & -T\leq t\leq +T\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

- Vérification analytique de la relation $x(t)*y(t)=rect\left(\frac{t}{T}\right)*rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$x(t)*y(t)=rect\left(\frac{t}{T}\right)*rect\left(\frac{t}{T}\right)\rightarrow$ Par l'application du théorème de Plancherel, on a

$$TF\{x(t)*y(t)\}=TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)*rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\}=TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\}.TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\}$$

$$TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\}.TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\}=\big(T.sinc(Tf)\big).\big(T.sinc(Tf)\big)=T^2.sinc^2(Tf)$$

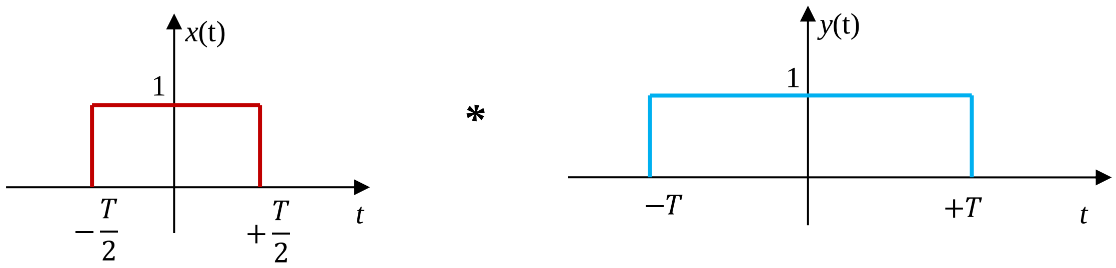
Pour revenir au domaine temporel et répondre à la question, on effectue la transformée de Fourier inverse :

$TF^{-1}\{T^2.sinc^2(Tf)\}=T.TF^{-1}\{T.sinc^2(Tf)\}=T.tri\left(\frac{t}{T}\right)$, voir la table de transformée de Fourier

D'où :

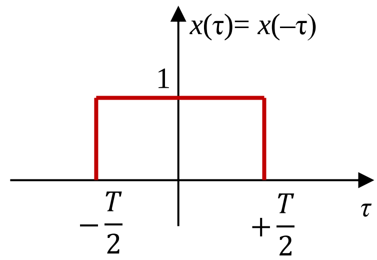
$$x(t)*y(t)=rect\left(\frac{t}{T}\right)*rect\left(\frac{t}{T}\right)==T.tri\left(\frac{t}{T}\right)$$

- Evaluez graphiquement le produit de convolution entre deux signaux rectangulaires $Rect_1$ et $Rect_2$ d'amplitude 1 et de largeur T et 2T respectivement.



Pour faire ce produit de convolution, On fixe l'un des signaux et on inverse dans le temps et décales l'autre (**le produit de convolution est commutatif**)

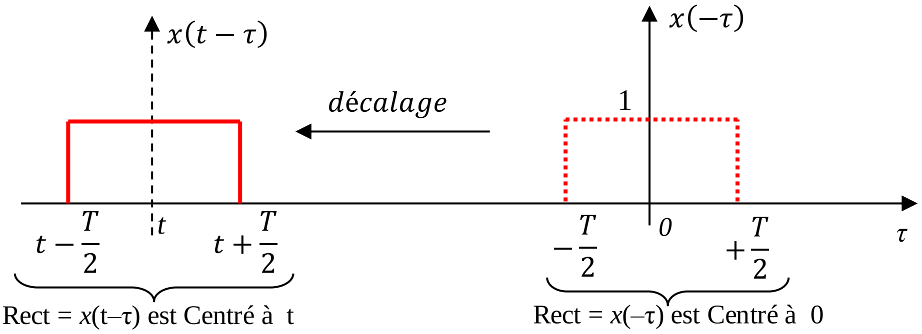
Par exemple, on fixe y(t) et on inverse et on décale *x*(t), ça va donner la même chose si on fait le contraire.



$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \le \tau \le +\frac{T}{2} \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases} = x(-\tau) \quad , le\ signal\ est\ pair$$

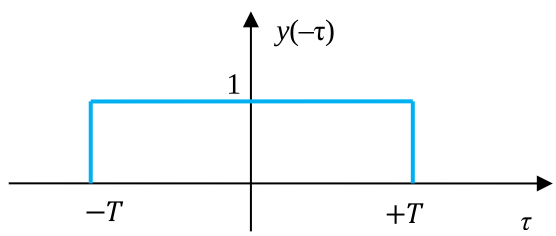
On le décale vers la gauche d'une valeur t

$$x(-\tau + t) = x(t - \tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \le -\tau + t \le +\frac{T}{2} \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & t - \frac{T}{2} \le \tau \le t + \frac{T}{2} \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$



$$y(-\tau) = \begin{cases} 1 & -T \le -\tau \le +T \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

$$y(-\tau) = \begin{cases} 1 & -T \le \tau \le +T \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases} = y(\tau)$$



<u>Etape 1 :</u>

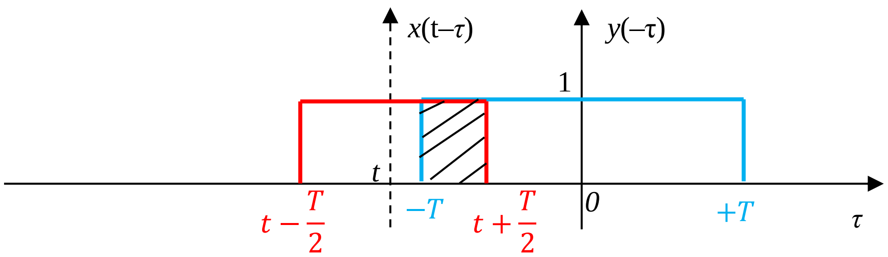
On a

$t+\frac{T}{2}<-T \;\rightarrow\;$ ou pour $\;t<-\frac{3T}{2}\;$ L'intersection entre les deux signaux est nulle

Alors : $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=0$

Etape 2 :

Dans cette étape, on translate vers la droite le signal qui est déjà décalé vers la gauche $x(t-\tau)$ de telle sorte ce signal coupe $y(\tau)$ qui est fixé à l'origine 0.



On a

$-T<t+\frac{T}{2}<0 \;\rightarrow\;$ ou pour $\;-\frac{3T}{2}<t<-\frac{T}{2}\;$ L'intersection entre les deux signaux existe

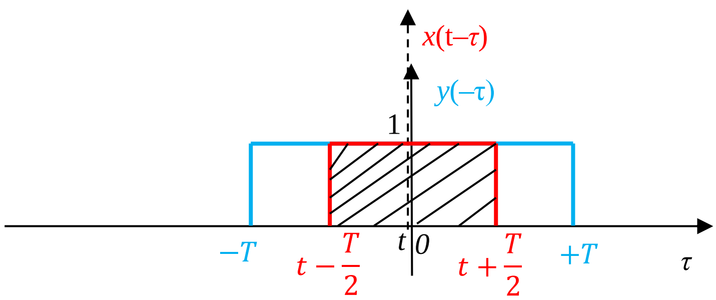
Le produit de convolution se fait soit par le calcul de la surface hachurée en noir

: $x(t)*y(t)=\left[\left(t+\frac{T}{2}\right)-(-T)\right].1=t+\frac{3T}{2}$

Ou bien, on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection entre $\left[-T\,,t+\frac{T}{2}\right]$

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-T}^{t+\frac{T}{2}}(1).(1)d\tau=[\tau]_{-T}^{t+\frac{T}{2}}=t+\frac{3T}{2}$$

Etape 3 :



On a

$-T < t - \frac{T}{2} < 0 \;\; et \;\; 0 < t + \frac{T}{2} < +T \;\; et \;\; t = 0 \;\; \rightarrow$ ou pour $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \;\; et \;\; t = 0$ L'intersection entre les deux signaux existe

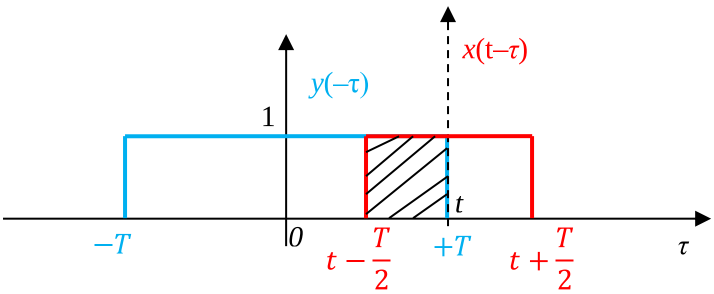
Le produit de convolution se fait soit par le calcul de l'aire hachurée en noir

: $x(t) * y(t) = \left[\left(t + \frac{T}{2}\right) - \left(t - \frac{T}{2}\right)\right].1 = T$

Ou bien, on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (1).(1)d\tau = [\tau]_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} = \mathrm{T}$$

Étape 4 :



On a

$0 < t - \frac{T}{2} < +T \;\; et \;\; t + \frac{T}{2} > +T \;\; \rightarrow$ ou pour $\frac{T}{2} < t < \frac{3T}{2}$ L'intersection entre les deux signaux existe

Le produit de convolution se fait soit par le calcul de l'aire hachurée en noir

: $x(t) * y(t) = \left[(+T) - \left(t - \frac{T}{2}\right)\right].1 = -t + \frac{3T}{2}$

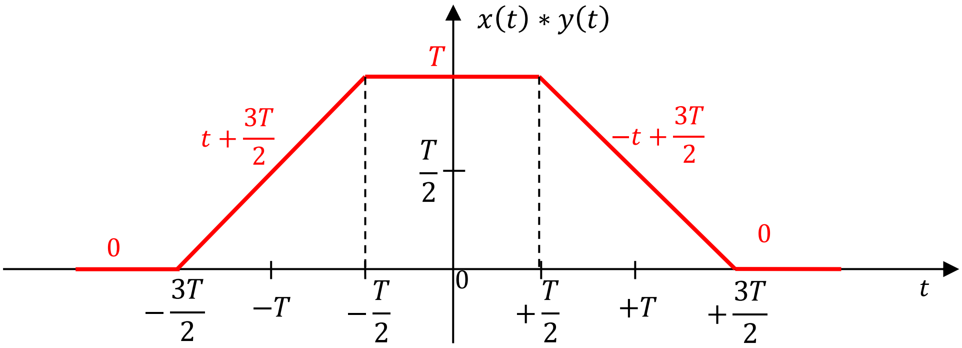
Ou bien, on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t-\frac{T}{2}}^{+T} (1).(1)d\tau = [\tau]_{t-\frac{T}{2}}^{+T} = -t + \frac{3T}{2}$$

On récapitule :

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{3T}{2} \\ t + \frac{3T}{2} & -\frac{3T}{2} < t < -\frac{T}{2} \\ T & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ -t + \frac{3T}{2} & \frac{T}{2} < t < \frac{3T}{2} \\ 0 & t > +\frac{3T}{2} \end{cases}$$

La représentation de $x(t) * y(t)$



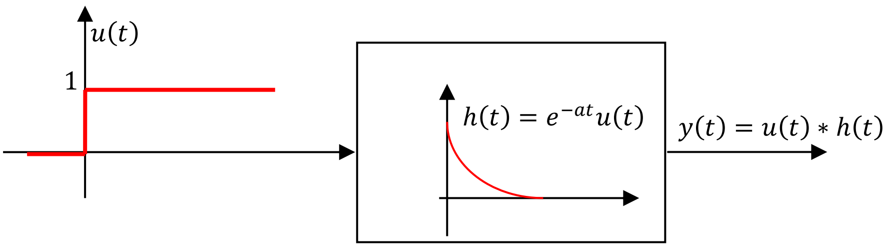
Si les largeurs des deux rectangles sont différentes, le résultat de produit de convolution graphique est un trapèze, il n'est pas triangle comme le premier résultat où les largeurs sont identiques.

<u>Corrigé de l'Exercice 2 :</u>

- **<u>Représenter $x(t)$ et $h(t)$</u>**

$x(t) = u(t)$: *echelon unité*, est un signal d'entrée d'un système linéaire définition par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

$y(t) = u(t) * h(t)$ est le signal de sortie résultant du produit de convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du système $h(t)$.

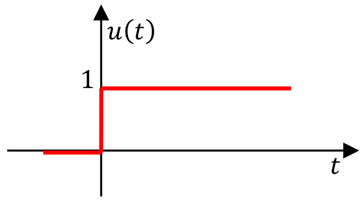


- **<u>Calcul et représentation de la sortie y(t):</u>**

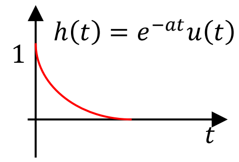
Intégrale de produit de convolution

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



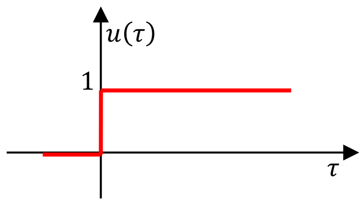
$$h(t) = e^{-at}u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



On suit le même processus de calcul de produit de convolution que précédemment.

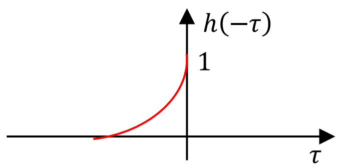
On fixe u(t) et on inverse et on décale d'une valeur t le signal h(t) vers la gauche.

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \geq 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$



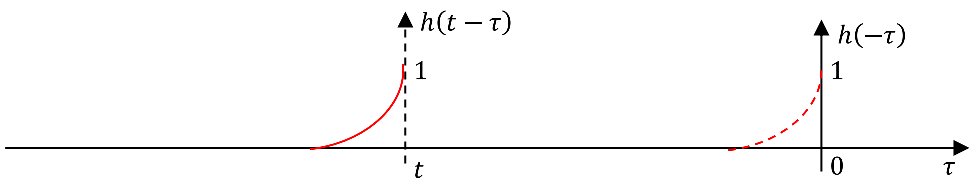
Inversement de h(t)

$$h(-\tau) = \begin{cases} e^{+a\tau} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

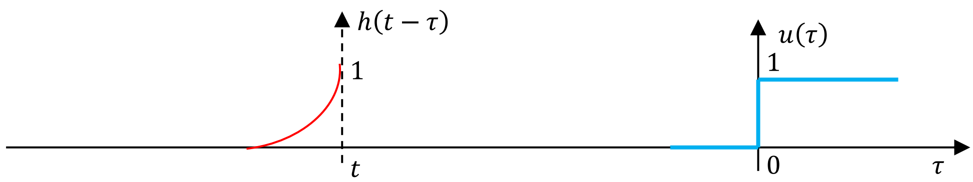


Inversement et décalage de h(t)

$$h(-\tau + t) = h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a(t-\tau)} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad , a > 0$$



<u>Étape 1 :</u>

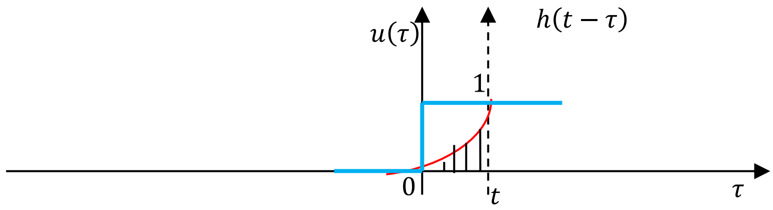


On a pour $t < 0$, l'intersection entre les deux signaux est nulle

Alors :

$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$

Etape 2 :



On translate le signal $h(t-\tau)$ vers la droite de telle sorte ce signal coupe $u(\tau)$, ensuite, on calcule le résultat d'intersection

On a pour $t > 0$, l'intersection entre les deux signaux existe

Alors :

$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1.e^{-a(t-\tau)}d\tau$

$$y(t) = u(t) * h(t) = e^{-at}\int_0^t e^{+a\tau}d\tau = e^{-at}\left[\frac{1}{a}e^{+a\tau}\right]_0^t$$

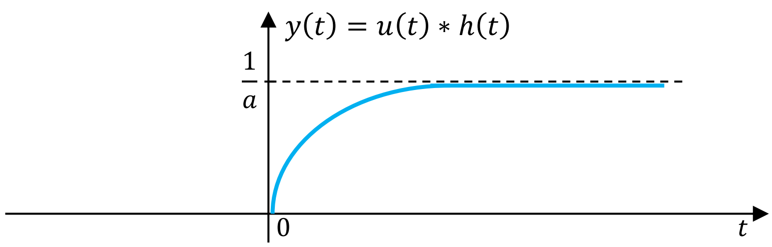
$$y(t) = u(t) * h(t) = e^{-at}\left(\frac{1}{a}e^{+at} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\,, \quad a > 0$$

Même si on continue la procédure de translation vers la droite, on trouve le même résultat.

Alors, on peut se limiter sur un seul calcul.

Représentation de $y(t) = u(t) * h(t)$

$y(0) = 0$
$y(+\infty) = \frac{1}{a}$



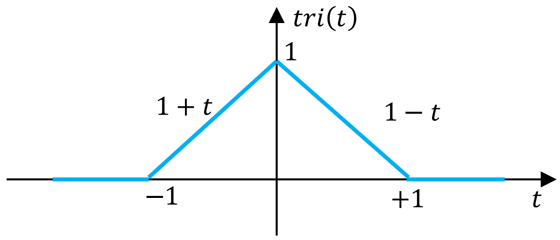
Corrigé de l'Exercice 3:

Soit h(t) un signal triangulaire $tri_2(t)$, et x(t) un signal rectangulaire.

Calculer et représenter $y(t) = x(t) * tri_2(t)$

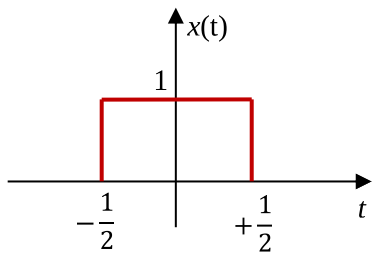
Représentation de $tri_2(t)$, et x(t)

$$tri_2(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -1 \le t \le +1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = tri(t)$$



L'indice 2 est la largeur du signal tri(t)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le +\frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Calcul du produit de convolution $y(t) = x(t) * tri_2(t)$

On procède de la même manière que précédemment pour effectuer ce calcul.

On fixe l'un de ces deux signaux, on inverse et on décale l'autre, le choix est facultatif.

Faisant ce choix:

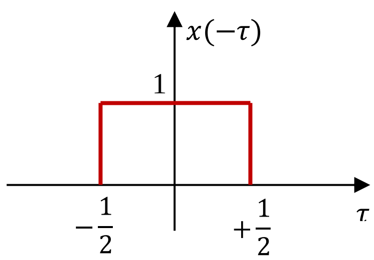
On fixe le signal tri(t) à l'origine, et les autres opérations se font sur x(t).

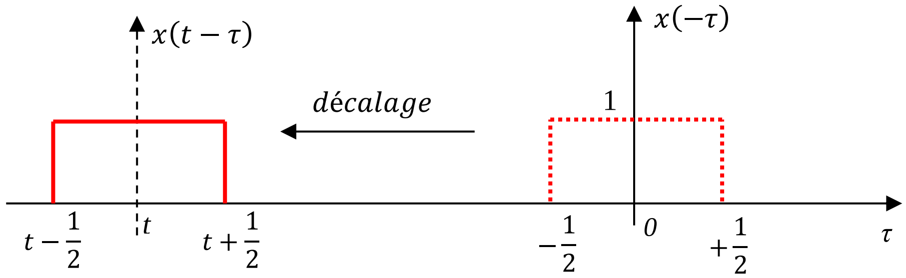
Rappelant l'intégrale de convolution:

$$y(t) = tri(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} tri(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

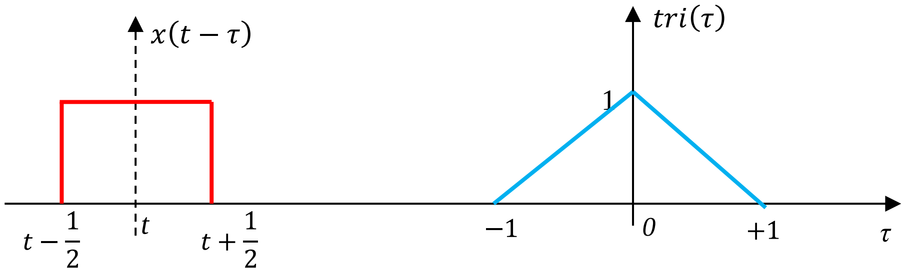
x(t) est pair, alors $x(\tau) = x(-\tau)$

$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le +\frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} = x(-\tau)$$





Etape 1 :



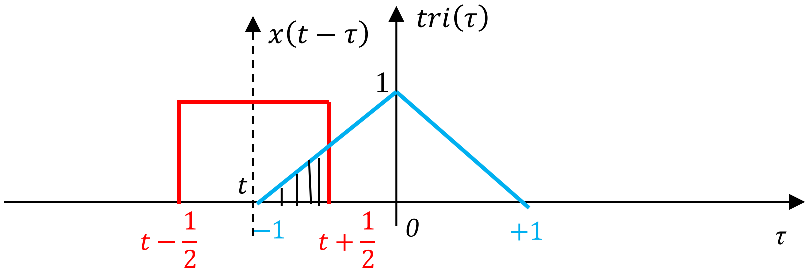
On a

$t+\frac{1}{2}<-1 \;\rightarrow$ ou pour $t<-\frac{3}{2}$ L'intersection entre les deux signaux est nulle

Alors : $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=0$

Etape 2 :

Dans cette étape, on translate vers la droite le signal qui est déjà décalé vers la gauche $x(t-\tau)$ de telle sorte ce signal coupe $y(\tau)$ qui est fixé à l'origine 0.



On a

$-1<t+\frac{1}{2}<0 \;\rightarrow$ ou pour $-\frac{3}{2}<t<-\frac{1}{2}$ L'intersection entre les deux signaux existe

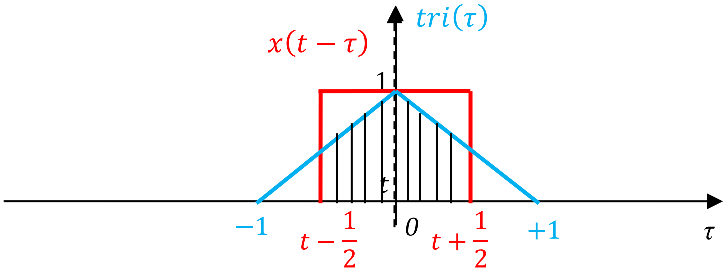
on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection entre $\left[-1\,,t+\frac{1}{2}\right]$

$$tri(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}tri(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{t+\frac{1}{2}}(1+\tau).(1)d\tau=\left[\tau+\frac{1}{2}\tau^2\right]_{-1}^{t+\frac{1}{2}}$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1\right)=\left(t+\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(t^2+t+\frac{1}{4}+1\right)$$

$$tri(t)*x(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{3t}{2}+\frac{9}{8}=\frac{4t^2+12t+9}{8}$$

Etape 3



On a

$-1 < t-\frac{1}{2} < 0$ et $0 < t+\frac{1}{2} < +1$ et $t=0$ $\rightarrow$ ou pour $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ et $t=0$ L'intersection entre les deux signaux existe

on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection

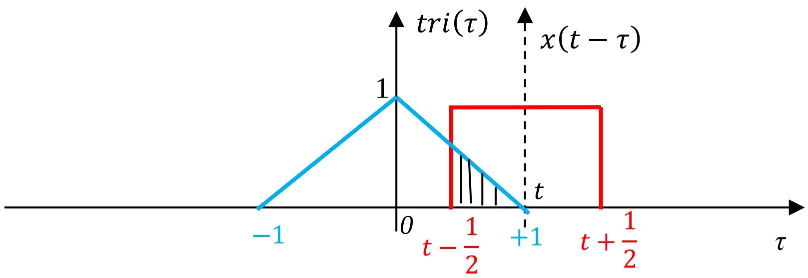
$$tri(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{t-\frac{1}{2}}^{0}(1).(1+\tau)d\tau+\int_{0}^{t+\frac{1}{2}}(1).(1-\tau)d\tau$$

$$tri(t)*x(t)=\left[\tau+\frac{1}{2}\tau^2\right]_{t-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\tau-\frac{1}{2}\tau^2\right]_{0}^{t+\frac{1}{2}}$$

$$tri(t)*x(t)=-\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$tri(t)*x(t)=1-t^2-\frac{1}{4}=\frac{3-4t^2}{4}$$

Etape 4 :



On a

$0 < t-\frac{1}{2} < +1$ $\rightarrow$ ou pour $+\frac{1}{2} < t < -\frac{3}{2}$ L'intersection entre les deux signaux existe

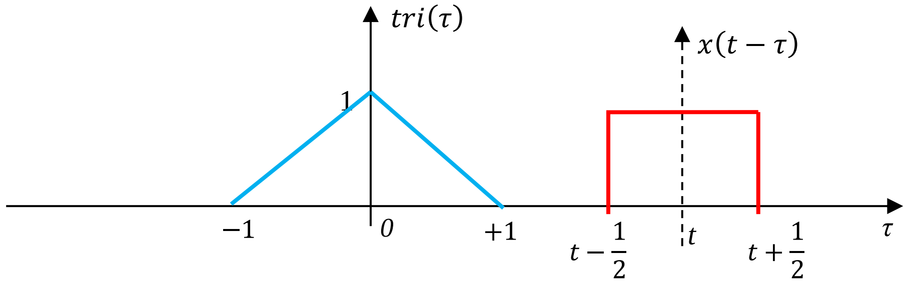
on calcule l'intégrale de produit de convolution de l'intersection entre $\left[t-\frac{1}{2},1\right]$

$$tri(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} tri(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{t-\frac{1}{2}}^{1} (1-\tau).(1)d\tau = \left[\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_{t-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left(1 - \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{3}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{3t}{2} - \frac{3}{8}\right)$$

$$tri(t) * x(t) = -\frac{4t^2}{8} - \frac{3t}{2} + \frac{9}{8} = \frac{4t^2 - 12t + 9}{8}$$

Etape 5 :



On a

$t - \frac{1}{2} > +1 \;\rightarrow\;$ ou pour $\; t > \frac{3}{2}$ L'intersection entre les deux signaux est nulle

Alors : $tri(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} tri(\tau)x(t-\tau)d\tau = 0$

On récapitule :

$$tri(t) * x(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{3}{2} \\ \frac{4t^2 + 12t + 9}{8} & -\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2} \\ \frac{3 - 4t^2}{4} & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ \frac{4t^2 - 12t + 9}{8} & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \\ 0 & t > +\frac{3}{2} \end{cases}$$