

TD n°1 – Convolution et Corrélation
Eléments de CORRIGE

Exercice 1 :

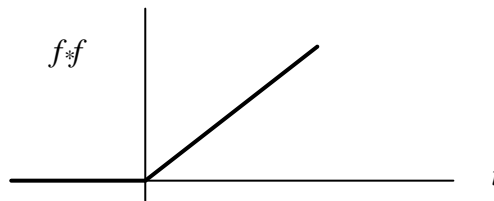
Soit le signal échelon $f(t) = E_0 U(t)$, d'amplitude E_0 .
Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(t)$ par lui-même (auto-convolution).

SOLUTION :

Pas de problème particulier. Si $t < 0$, il n'y a pas de recouvrement. Si $t > 0$, il y a recouvrement entre 0 et t .

On obtient :

$$f * f = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 U(t) E_0 U(t - \tau) d\tau = \begin{cases} E_0^2 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$



Exercice 2 :

On définit la fonction *Rect* par :

$$f(t) = \text{Rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\tau/2, +\tau/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour un rectangle centré sur «*centre*», de hauteur 1 et d'une largeur donnée par «*largeur*», on utilisera la notation :

$$\text{Rect}\left(\frac{t - \text{centre}}{\text{largeur}}\right)$$

Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(t) = 3 \text{ Rect}(t-1/2) + \text{Rect}((t-2)/2) \\ g(t) = \text{Rect}(t/2)$$

Trouver la convolution $f * g$.

SOLUTION :

la convolution $f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$; on a le choix de déplacer n'importe quelle fonction par rapport à l'autre. Il est plus évident de déplacer $g(t)$ par rapport à $f(t)$. Le produit $g(t-\tau)f(\tau)$ est nul pour $t < -1$, donc le produit de convolution est nul sur cet intervalle.

Pour $-1 < t < 0$, le chevauchement se produit dans l'intervalle 0 à $t+1$. Dans cet intervalle, la fonction $g(t-\tau)=1$ et la fonction $f(\tau)=3$, le produit de convolution est :

$$\int_0^{t+1} 3d\tau = 3[t]_0^{t+1} = 3(t+1)$$

Pour $0 < t < 1$, le chevauchement se produit aussi dans l'intervalle 0 à $t+1$. Dans cet intervalle, la fonction $g(t-\tau)=1$, mais la fonction $f(\tau)$ est définie différemment sur deux parties de l'intervalle de chevauchement : $f(\tau) = 3$ pour $0 < \tau < 1$ et $=1$ pour $1 < \tau < t+1$.

donc le produit simple doit être évalué aussi par intervalle et le produit de convolution est par conséquence somme de deux intégrales :

$$\int_0^1 3d\tau + \int_1^{t+1} 1d\tau = 3 + (t+1-1) = 3+t$$

Pour $1 < t < 2$ le chevauchement se produit dans l'intervalle $t-1$ à $t+1$. Dans cet intervalle, la fonction $g(t-\tau)=1$, mais la fonction $f(\tau)$ est définie différemment sur deux parties de l'intervalle de chevauchement donc le produit simple doit être évalué aussi par intervalle et le produit de convolution est par conséquence somme de deux intégrales :

$$\int_{t-1}^1 3d\tau + \int_1^{t+1} 1d\tau = 3(1-(t-1)) + (t+1-1) = 3(2-t) + t = 6-2t$$

Pour $2 < t < 4$, le chevauchement se produit dans l'intervalle $t-1$ à 3. Dans cet intervalle, les fonctions f et g valent 1.

Le produit de convolution est :

$$\int_{t-1}^3 1d\tau = 3-(t-1) = 4-t$$

Le produit est nul pour $t > 4$, donc le produit de convolution est nul sur cet intervalle.

Enfin, le produit de convolution est :

0 pour $t < -1$

$3(t+1)$ pour $-1 < t < 0$

$3+t$ pour $0 < t < 1$

$6-2t$ pour $1 < t < 2$

$4-t$ pour $2 < t < 4$

0 pour $t > 4$

d'où la représentation graphique de la convolution.

Exercice 3 :

Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$g(t) = U(t)$$

Donner les expressions analytiques de la convolution dans les 3 régions de définition.

Le produit de convolution est nul pour la région $t < 0$:

Quand t dépasse zéro nous devons considérer la région $0 < t < 1$:

La convolution dans cette région est :

$$\int_0^t f(t-\tau)U(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) d\tau = t[\tau]_0^t - \frac{1}{2}[\tau^2]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

La dernière région à considérer est $t > 1$ où nous avons :

La convolution est :

$$\int_{t-1}^t f(t-\tau)U(\tau) d\tau = \int_{t-1}^t (t-\tau) d\tau = t[\tau]_{t-1}^t - \frac{1}{2}[\tau^2]_{t-1}^t = t(t - (t-1)) - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{(t-1)^2}{2}\right) = t - \left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Remarque : ce résultat est immédiat en remarquant que l'aire du triangle = $B \cdot H / 2 = 1 \cdot 1 / 2$.

Exercice 4 :

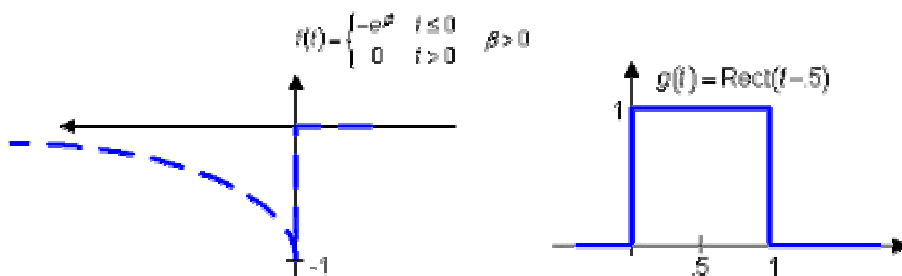
Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(t) = \begin{cases} -e^{\beta t} & \text{pour } t \leq 0 \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

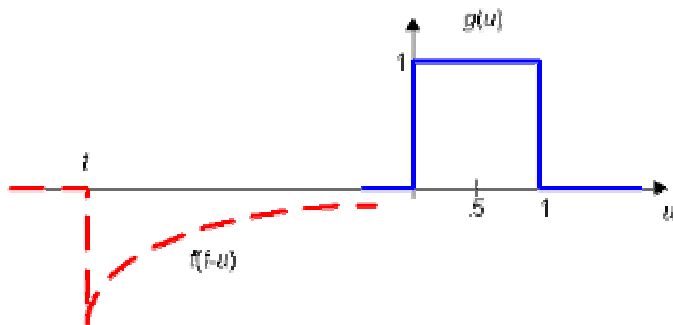
$$g(t) = \text{Rect}(t - 1/2)$$

Représenter f et g puis donner les expressions analytiques de la convolution dans les différentes régions de définition.

SOLUTION :



Prenons l'exponentielle pour faire le déplacement :

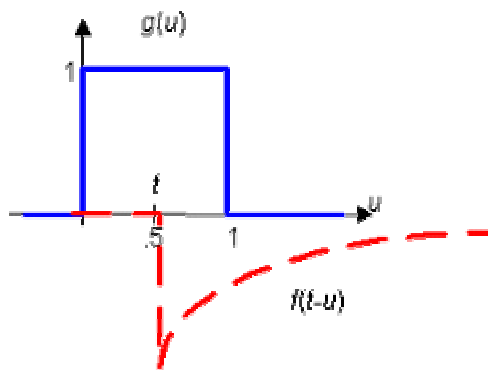


Il y a trois régions de définition pour la convolution. Pour $t < 0$, l'exponentielle recouvre tout le rectangle. L'intégration couvre $0 < u < 1$ où le rectangle vaut 1, et où $f(t-u)$ est égale à $-e^{\beta t} e^{-\beta u}$.

Dans cette région de définition,

$$f * g = \int_0^1 -e^{\beta t} e^{-\beta u} du = -e^{\beta t} \left[\frac{e^{-\beta u}}{-\beta} \right]_0^1 = \frac{e^{\beta t}}{\beta} (e^{-\beta} - 1)$$

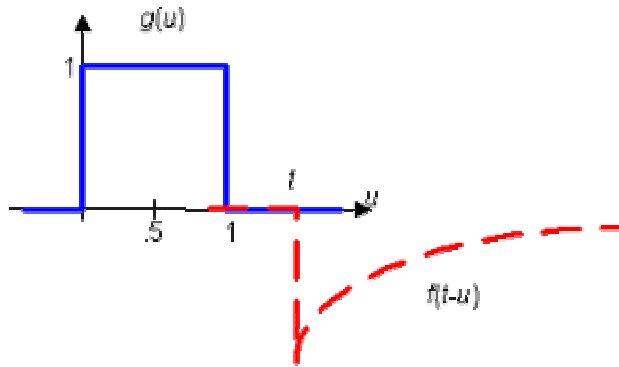
Pour $0 < t < 1$, l'exponentielle couvre partiellement le rectangle :



L'intégrale sera donc de t à 1 pour cette région :

$$f * g = \int_t^1 -e^{\beta t} e^{-\beta u} du = -e^{\beta t} \left[\frac{e^{-\beta u}}{-\beta} \right]_t^1 = \frac{e^{\beta t}}{\beta} (e^{-\beta} - e^{-\beta t}) = \frac{e^{-\beta} e^{\beta t} - 1}{\beta}$$

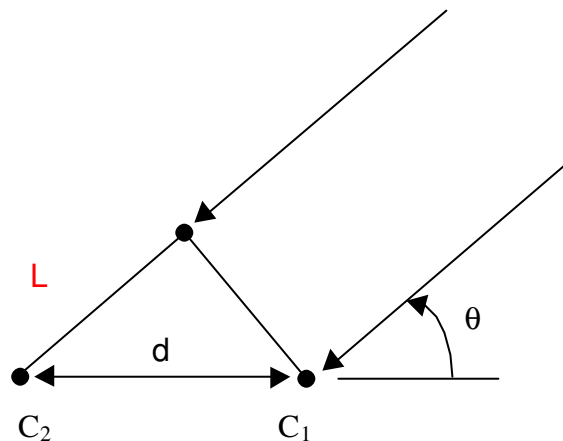
Quant $t > 1$, il n'y a pas de recouvrement entre $f(t-u)$ et $g(u)$, donc la convolution est nulle.



Exercice 5 :

Estimation de la direction d'une source

Soit une source que l'on peut considérer comme étant à l'infini. Il est possible, à l'aide de deux capteurs C_1 et C_2 (cf. fig. 1) d'estimer la direction θ de cette source.



Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$, les 2 signaux reçus par les capteurs C_1 et C_2 .

On peut considérer que le signal reçu par le capteur C_2 est identique à celui reçu par le capteur C_1 mais retardé du temps t_0 mis par l'onde pour parcourir la différence de trajet.

1) Trouver la relation qui permet d'exprimer t_0 en fonction de d , V et θ .

Avec :
 d : distance entre les 2 capteurs
 V : vitesse de l'onde
 θ : direction de la source

SOLUTION :

$$L = V \cdot t_0$$

$$\cos \theta = L / d$$

d'où

$$t_0 = \frac{d \cdot \cos \vartheta}{V}$$

d et V sont connus. Pour déterminer θ , il suffit de calculer t_0

2) On suppose que la source est un signal $x(t)$ ayant la forme : $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$

On pose : $x_1(t) = x(t)$
et $x_2(t) = x(t - t_0)$

Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{12}(\tau)$ entre les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Solution :

$$R_{12} = \int_{-\alpha}^{\alpha} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) \cdot dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} x(t) \cdot x(t - t_0 + \tau) \cdot dt$$

$$R_{12} = \int_{-\alpha}^{\alpha} a \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot a \sin(\omega(t - t_0 + \tau) + \varphi) \cdot dt = a^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(\omega t + \omega(\tau - t_0) + \varphi) \cdot dt$$

$$R_{12} = \frac{a^2}{2} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(\omega(\tau - t_0)) \cdot dt - \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(2\omega t + 2\varphi + \omega(\tau - t_0)) \cdot dt \right]$$

car $\sin(a) \cdot \sin(b) = 0.5 \cdot [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

Comme $\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(2\omega t + 2\varphi + \omega(\tau - t_0)) \cdot dt = 0$

$$R_{12} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos(\omega(\tau - t_0)) \cdot [t]_{-\alpha}^{\alpha} = \alpha \cdot a^2 \cdot \cos(\omega(\tau - t_0))$$

On obtient donc $R_{12} = \beta \cdot \cos[\omega(\tau - t_0)]$

Comment la fonction d'intercorrélation nous permet-elle de déterminer la valeur t_0 ?

Solution :

La fonction d'intercorrélation des 2 signaux est tout simplement la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ décalée de t_0 .

$$R_{12}(\tau) = R_x(\tau - t_0)$$

On peut donc estimer t_0 en calculant le maximum de la fonction $R_{12}(\tau)$

Dans notre exemple :

$\cos [\omega(\tau - t_0)]$ prend comme valeur maximale 1 lorsque $\tau = t_0$.

Lorsque t_0 est connu, on peut en déduire θ en utilisant la formule $t_0 = \frac{d \cdot \cos \vartheta}{V}$