Controle Robusto
Atividade Avaliativa *Complemento de Schur*
Peso 1

Valter J. S. Leite, Marcio J. Lacerda

25 de outubro de 2024

Instruções

Entrega via Sigaa. Sugiro que faça à mão e depois digitalize a solução no formato PDF. Você encontra alguns exercícios que (podem) exigir a aplicação do Complemento de Schur. Nem sempre é possível uma solução. A ideia central deste exercício é reconhecer os casos possíveis de usar o complemento de Schur e quando o seu uso introduz conservadorismo. Esteja atento a esses aspectos!

1. Para todos os casos abaixo, assuma as restrições adicionais sobre as variáveis P e R: $P^\top = P > 0$ e $R^\top = R > 0$. Obtenha em cada situação uma expressão na forma de LMI.
   (a) $A^\top PA - Q < 0$.
   (b) $A^\top PA + Q < 0$.
   (c) $A^\top P + PA + PRP < 0$.
   (d) $A^\top PA - P + PRP < 0$.
   (e) $A^\top P + PA + (PB - C)^\top R^{-1}(PB - C) < 0$.

2. Sendo $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, transforme o problema de encontrar uma matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|DMD^{-1}\| < 1$ em um problema de otimização na forma de uma LMI.

3. Sabendo que $P^\top(\alpha) = P(\alpha) > 0$ e que $Q^\top(\alpha) = Q(\alpha) > 0$, mostre que

$$\begin{bmatrix} A^\top(\alpha)P(\alpha)A(\alpha) + \beta Q(\alpha) - P(\alpha) & A^\top(\alpha)P(\alpha)A_d(\alpha) \\ \star & A_d^\top(\alpha)P(\alpha)A_d(\alpha) - Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0$$

   é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha)A_d(\alpha) \\ \star & \beta Q(\alpha) - P(\alpha) & 0 \\ \star & \star & -Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0.$$

   Note que nas desigualdades matriciais acima, o símbolo $\star$ é usado para denotar o bloco matricial diagonalmente simétrico. As condições deste item serão estudadas posteriormente no curso para analisar a estabilidade de sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados, que podem ser modelados pela equação a diferenças: $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d(k)}$.

4. Sendo γ um escalar real positivo, determine uma expressão na forma de LMI para a desigualdade:
$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \gamma^{-2}C'C & PB + \gamma^{-2}C'D \\ \star & \gamma^{-2}D'D - \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{1}$$
de forma que as matrizes C e D não apareçam em produtos com elas mesmas ou com outras matrizes.

   Este problema está associado ao cálculo do custo $\mathcal{H}_\infty$, γ, de um sistema dado por
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \tag{2}$$

5. Sendo γ um escalar real positivo, determine uma expressão na forma de LMI para a desigualdade:
$$\begin{bmatrix} P - A'PA - \gamma^{-2}C'C & A'PB + \gamma^{-2}C'D \\ \star & \mathbf{I} - B'PB - \gamma^{-2}D'D \end{bmatrix} > 0 \tag{3}$$
de forma que as matrizes C e D não apareçam em produtos com elas mesmas ou com outras matrizes.

   Este problema está associado ao cálculo do custo $\mathcal{H}_\infty$, γ, de um sistema dado por
$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k) \\ z(k) &= Cx(k) + Dw(k) \end{aligned} \tag{4}$$

6. Programe a condição (3) com o objetivo de minimizar o valor de γ. Note que γ^{-2} é não linear.

7. Programe a condição que você obteve no item 5, sem produtos das matrizes C e D, com o objetivo de minimizar o valor de γ.

8. Discretize o sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$
considerando o tempo de amostragem $T = 0{,}1$ e calcule o valor de γ usando os programas dos itens 6 e 7.

9. Plote o diagrama de Bode do sistema discretizado e compare o máximo valor do diagrama de Bode com os valores de γ obtidos no item anterior.