

DESCRIÇÃO

As sentenças abertas e predicados, o conjunto universo, o conjunto verdade, o quantificador universal e existencial, as variáveis livres e ligadas e a negação de fórmulas quantificadas.

PROPÓSITO

Conhecer, por meio do estudo do cálculo dos predicados, ferramentas importantes para as áreas da Computação e da Matemática, que permitirão formular novos enunciados a partir de outros, usando quantificadores.

PREPARAÇÃO

Antes de iniciar o conteúdo deste tema, tenha em mãos papel e caneta.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Definir o conjunto universo e o conjunto verdade de sentenças abertas e predicados

MÓDULO 2

Reconhecer os quantificadores universal e existencial

MÓDULO 3

Identificar variáveis livres e ligadas e a negação de proposições com quantificadores

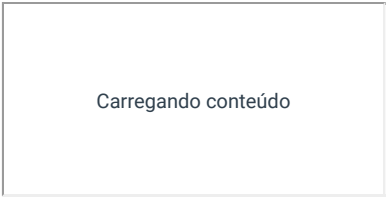
MÓDULO 4

INTRODUÇÃO

Neste conteúdo, estudaremos os quantificadores, que são operadores importantes na formulação de novos enunciados. Os quantificadores também estão presentes no nosso cotidiano quando falamos, por exemplo: “Todas as mulheres são boas professoras” ou “Nenhum homem é elegante”.

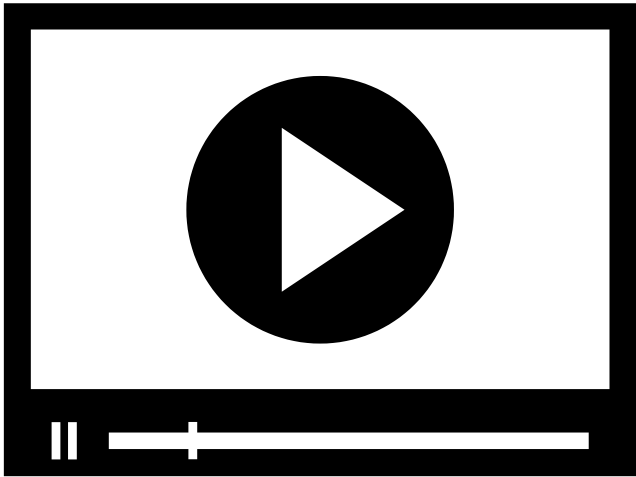
Ou seja, conheceremos outras ferramentas que contribuem não só para validarmos argumentos, mas também para compreendermos que, na área da Matemática, são importantes nos métodos de demonstração e, na área da Computação, contribuem para a compreensão de algoritmos e programas. Essas ferramentas fazem parte do cálculo dos predicados.

Definiremos sentença aberta, conjunto universo e conjunto verdade, predicados e operações lógicas; identificaremos os quantificadores universal e existencial, com uma ou mais variáveis; estudaremos as variáveis livres e ligadas, aprenderemos a negar expressões quantificadas; e, finalmente, conheceremos algumas aplicações do cálculo de predicados na Computação.



MÓDULO 1

- Definir o conjunto universo e o conjunto verdade de sentenças abertas e predicados



O CONCEITO DE SENTENÇA ABERTA SIMPLES E COMPOSTA

Antes de iniciarmos o conteúdo deste módulo, assista ao vídeo a seguir e conheça o conceito de sentenças abertas em contraposição ao conceito de proposição. Vamos lá?



Antes de definirmos conjunto universo, conjunto verdade e predicados precisamos compreender o que vem a ser uma sentença aberta que possui alguma variável (uma ou mais variáveis).

SENTENÇAS ABERTAS

Considere a seguinte oração:

“Alguém foi um craque do futebol na Argentina”

Você consegue dizer se essa oração é verdadeira ou falsa?

A resposta é “certamente não”. Veja que não é possível afirmar se essa oração é verdadeira ou falsa, pois o sujeito não está muito claro, uma vez que “Alguém” é um pronome indefinido. Portanto, não consideramos esse tipo de oração uma sentença ou proposição.

Agora suponhamos que o pronome “Alguém” seja substituído pelo nome do jogador Maradona:

“Maradona foi um craque do futebol na Argentina”

Veja que a sentença é verdadeira.

Suponhamos que o pronome “Alguém” seja substituído pelo nome do jogador Pelé:

“Pelé foi um craque do futebol na Argentina”

Essa sentença, então, nesse caso, torna-se uma proposição falsa.

ATENÇÃO

Ou seja, nessa oração, o pronome “Alguém” é variável, isto é, pode ser substituído por um nome que fará com que essa sentença tenha um valor verdadeiro ou falso. A partir disso, podemos dizer que temos uma sentença aberta ou uma proposição aberta.

Agora vamos considerar a sentença $2x - 3 = 5$. Quando substituímos a variável x , por exemplo, pelo valor 4, temos:

$$2x - 3 = 5$$

$$2(4) - 3 = 5$$

$$8 - 3 = 5$$

$$5 = 5$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Veja que essa sentença se torna uma proposição verdadeira.

Agora vamos substituir a variável x pelo valor 2.

$$2x - 3 = 5$$

$$2(2) - 3 = 5$$

$$4 - 3 = 5$$

$$1 \neq 5$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Essa sentença, para $x = 2$, é falsa.

COMENTÁRIO

Dizemos, nesse caso, que a sentença $2x - 3 = 5$ é uma sentença aberta na variável x . Podemos atribuir qualquer valor numérico para a variável x e avaliar se o resultado se torna uma proposição verdadeira ou falsa.

Agora podemos definir uma sentença aberta do seguinte modo de **forma mais precisa**:

Vamos considerar um conjunto A (não vazio) e “a” um elemento desse conjunto. Ou seja, $a \in A$.

Definimos uma sentença aberta no conjunto A ou uma sentença aberta com uma variável no conjunto A como sendo uma expressão que chamamos de $p(x)$, tal que para todo elemento “a” do conjunto A, $p(a)$ pode assumir o valor lógico V (verdadeiro) ou F (falso).

Em outras palavras, dizemos que $p(x)$ é uma sentença aberta no conjunto A se, e somente se, $p(x)$ assumir o valor verdadeiro ou falso sempre que substituirmos a variável x por qualquer **elemento arbitrário** do conjunto A.

Também podemos chamar a sentença aberta em A de **função proposicional em A** ou **condição em A**.

Observação: lembre-se de que sentença ou proposição é uma oração declarativa verdadeira ou falsa.

EXEMPLOS

Considerando o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, temos os seguintes exemplos de sentenças abertas:

$$x + 2 > 10$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x + 2 > 10$$

Para $x = 1$, por exemplo, temos que $1 + 2 > 10$ (falso).

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Para $x = 2$, temos que

$$2^2 - 5(2) + 6 = 0$$

$$4 - 10 + 6 = 0 \text{ (VERDADEIRO).}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

CONJUNTO UNIVERSO

Chamamos de conjunto universo ou domínio da sentença aberta (**em geral, usamos a letra U**), ou simplesmente universo, o conjunto formado por todos os elementos com os quais estamos verificando um determinado assunto.

EXEMPLOS

Vejamos alguns exemplos:

$$x + 15 = 8$$

$$x + 15 < 8$$

$$x + 15 = 8$$

Considere a expressão $x + 15 = 8$ uma sentença aberta em \mathbb{Z} (o conjunto dos números inteiros formado por números positivos e negativos). Nesse caso, $\cup = \mathbb{Z}$.

Resolvendo essa equação, encontramos o seguinte resultado:

$$x + 15 = 8$$

$$x = 8 - 15$$

$$x = - 7$$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Note que o valor encontrado $x = - 7$ é um elemento do conjunto universo $\cup = \mathbb{Z}$. Portanto, $- 7$ é o valor da variável que torna a sentença verdadeira.

$$x + 15 < 8$$

Agora considerando a expressão $x + 15 < 8$. Vamos atribuir um valor qualquer à variável x , por exemplo, -5 . Temos:

$$x + 15 < 8$$

$-5 + 15 < 8$

$10 < 8$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Veja que esse valor torna a sentença falsa.

CONJUNTO VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto universo A . Chamamos de conjunto verdade de $p(x)$, o conjunto formado por todos os elementos $a \in A$, tal que $p(a)$ é uma proposição verdadeira.

Denotamos o conjunto verdade por:

$V_p = \{x \mid x \in A \wedge (p(x)) \text{ é V}\}$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Também podemos usar:

$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$

$V_p = \{x \in A \mid p(x)\}$

ATENÇÃO

$V_p \subset A$ (o conjunto verdade de $p(x)$ em A é um subconjunto do conjunto universo A).

EXEMPLOS

Vejamos alguns exemplos:

$2x^2 + 5x = 0$

$x + 15 < 8$

$$2x^2 + 5x = 0$$

Considere a sentença aberta $2x^2 + 5x = 0$ em \mathbb{Z} . Vamos determinar o seu conjunto verdade resolvendo a equação do 2º grau.

Solução:

$$2x^2 + 5x = 0$$

$$x(2x + 5)= 0$$

$$x = 0$$

$$2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$V_p = \{ x | x \in \mathbb{Z} \wedge 2x^2 + 5x = 0 \}$$

$$V_p = \{ 0 \}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$x + 10 < 3$$

Considere a sentença aberta $x + 10 < 3$ em \mathbb{N} . Vamos determinar o seu conjunto verdade resolvendo a inequação.

$$x + 10 < 3$$

$x < 3 - 10$

$x < -7$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

O conjunto dos números naturais é formado somente por números positivos. Portanto, o conjunto universo é vazio.

$V_p = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x + 10 < 3 \}$

$V_p = \emptyset$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Com relação às sentenças abertas, podemos considerar diferentes situações:

$p(x)$ MANIFESTA UMA CONDIÇÃO UNIVERSAL NO CONJUNTO A.

Por exemplo:

Seja “ $2x + 1 > x$ ” uma sentença aberta em \mathbb{N} .

Veja que todos os elementos de \mathbb{N} fazem parte do conjunto verdade. $V_p = \mathbb{N}$

$p(x)$ MANIFESTA UMA CONDIÇÃO POSSÍVEL NO CONJUNTO A.

Por exemplo:

Seja “ $2x + 3 > 6$ ” uma sentença aberta em \mathbb{N} .

Nessa sentença, apenas alguns elementos de \mathbb{N} fazem parte do conjunto verdade.

$V_p = \{2, 3, 4, \dots\}$

$p(x)$ MANIFESTA UMA CONDIÇÃO IMPOSSÍVEL NO CONJUNTO A.

Por exemplo:

Seja “ $x + 3 = x$ ” uma sentença aberta em \mathbb{N} .

Nessa sentença, nenhum elemento de \mathbb{N} faz parte do conjunto verdade. $V_p = \emptyset$

CONJUNTO VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM DUAS VARIÁVEIS

As sentenças abertas também podem ter mais de uma variável. Vamos verificar como é o conjunto verdade de uma sentença aberta com duas variáveis.

Numa sentença aberta com duas variáveis, consideramos dois conjuntos, A e B. Seja “a” um elemento do conjunto A, ($a \in A$) e “b” um elemento do conjunto B, ($b \in B$). Chamamos de sentença aberta em $A \times B$, uma expressão $p(x, y)$ em que $p(a, b)$ pode assumir o valor lógico falso (F) ou verdadeiro (V) para todo par ordenado $(a, b) \in A \times B$.

📢 ATENÇÃO

Ao retirar o modal, também trocar o texto da caixa de atenção para:

Sejam dois conjuntos A e B; dizemos que o produto cartesiano de A por B é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , em que $a \in A$ e $b \in B$. O produto cartesiano de A por B é indicado por $A \times B$ (lê: A cartesiano B), assim:
 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

$$A \times B$$

Lê-se: A cartesiano B

Vejamos exemplos de sentença aberta com duas variáveis:

EXEMPLOS

1. Considere os conjuntos A e B, em que $A = \{1, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Dadas as expressões a seguir, vamos verificar que elas são sentenças abertas em $A \times B$.

Podemos definir que uma expressão $p(x, y)$ é uma sentença aberta em $A \times B$ se, e somente se, $p(x, y)$ é verdadeira ou falsa sempre que as variáveis x e y são substituídas pelos elementos a e b de qualquer par ordenado pertencente ao produto cartesiano $A \times B$.

SOLUÇÃO

Agora vamos definir o que entendemos por conjunto verdade de uma sentença aberta com duas variáveis: é o conjunto de todos os elementos $(a, b) \in A \times B$, tais que $p(a, b)$ é uma proposição verdadeira.

Denotamos o conjunto verdade por:

$$V_p = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x, y) \text{ é } V\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Também podemos usar:

$$V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid p(x, y) \}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Observação: $V_p \subset A \times B$ (o conjunto verdade de $p(x, y)$ em A\texttimes B é um subconjunto do conjunto $A \times B$).

2. Considere a sentença aberta $x + y = 6$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, em que \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais. O conjunto verdade é

$$V_p = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge x + y = 6\} = \{(1, 5), (3, 3), (2, 4)\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Considere a sentença aberta $x + 2 > y$ em $A \times B$, em que $A = 1, 2, 3$ e $B = \{4, 5\}$. O conjunto verdade é

$$V_p = \{(x, y) \in A \times B \wedge x + 2 > y\} = \{(3, 4)\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

PREDICADOS

Vamos considerar inicialmente a seguinte expressão:

“Paulo é inteligente”

Nessa expressão, temos:

Sujeito: Paulo.

Predicado: inteligente.

Note que inteligente é uma propriedade ou característica de Paulo.

Agora veja as seguintes expressões:

“x é alto e elegante”

“x é professor de y”

Nessas expressões, temos agora a presença de variáveis.

📣 ATENÇÃO

Na afirmação “ x é alto e elegante”, por exemplo, x é o sujeito e alto e elegante é o predicado. Veja que o predicado é utilizado para representar a propriedade de ser alto e elegante.

Portanto, fica fácil compreender que o predicado atribui ao sujeito uma propriedade ou uma característica.

Representamos um predicado, por exemplo, por $p(x)$ ou $p(x, y)$.

Por exemplo:

$p(x)$ denota a afirmação “ x é alto e elegante”

$q(x, y)$ denota a afirmação “ x é professor de y ”

Na lógica dos predicados, eles são representados por meio dos símbolos predicativos: p, q, r, \dots etc. e variáveis: x, y, z, \dots etc.

Veja alguns exemplos de predicados:

★ EXEMPLO

a) $p(x) = “2x = 8”$

b) $q(x) = “5x - 10 = 0”$

c) $r(x, y) = “x + y > 2”$

EXEMPLOS

Vejamos exemplos de predicados:

a) Dado o predicado $p(x) = “x^2 - 6x + 5 = 0”$, determine o seu conjunto verdade em \mathbb{N} , em que \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais.

SOLUÇÃO

b) Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 1\}$ e $B = \{-1, 0, 3\}$, determine o conjunto verdade de $p(x, y) = “x + y > 2”$, $x \in A$ e $y \in B$.

SOLUÇÃO

Vamos determinar inicialmente o produto cartesiano $A \times B$.

$A \times B = \{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 3), (0, -1), (0, 0), (0, 3), (1, -1), (1, 0), (1, 3)\}$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Veja que os únicos pares ordenados que tornam $p(x, y)$ verdadeira são $(0, 3)$ e $(1, 3)$.

Substituindo o par $(0, 3)$ em $x + y > 2$, temos $0 + 3 > 2$ (verdadeiro);

Substituindo o par $(1, 3)$ em $x + y > 2$, temos $1 + 3 > 2$ (verdadeiro);

Logo, o conjunto verdade é $V_p = \{(0, 3), (1, 3)\}$.

OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE SENTENÇAS ABERTAS

As operações de sentenças abertas ocorrem por meio da utilização dos conectivos lógicos do cálculo proposicional. A partir da combinação de sentenças por meio dos conectivos, formamos novas sentenças abertas ou proposições.

Veja os conectivos lógicos:

\neg **(NÃO)**

Negação

\wedge **(E)**

Conjunção

\vee **(OU)**

Disjunção

\rightarrow **(SE... ENTÃO)**

Condicional

\leftrightarrow **(SE, E SOMENTE SE)**

Bicondicional

Com essas operações, obteremos um conjunto verdade para cada operação, como veremos a seguir.

Agora vamos analisar cada operação sobre as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A, e um elemento $a \in A$ seguida de um exemplo. Cada sentença aberta possui um conjunto verdade dado por V_p e V_q , respectivamente.

OPERAÇÃO NEGAÇÃO

A operação de negação da sentença aberta $p(x)$ é a sentença $\neg p(x)$ em A.

Exemplo: considerando o conjunto universo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (conjunto dos números naturais).

Seja a sentença aberta $p(x)$: $x + 2 < 6$.

$V_p = \{1, 2, 3\}$.

O conjunto verdade é

$V_{\neg p} = C_{\mathbb{N}}V_p = \mathbb{N} - V_p = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$.

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Observação: $C_{\mathbb{N}}V_p$ é o complementar em relação a \mathbb{N} .

OPERAÇÃO CONJUNÇÃO

Operação de conjunção é a sentença aberta $p(x)\wedge q(x)$ em A, satisfeita por um elemento $a \in A$. Essa operação tem o valor lógico verdadeiro quando $a \in A$ satisfaz $p(x)eq(x)$.

Exemplo: considerando o conjunto universo \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros).

Sejam as sentenças $p(x): x^2 + 6x + 5 = 0$ e $q(x): x^2 + 5x = 0$.

Temos: $p(x)\wedge q(x)$.

A sentença aberta $p(x)$ tem conjunto verdade $V_p = \{-1, -5\}$.

A sentença aberta $q(x)$ tem conjunto verdade $V_q = \{0, -5\}$.

Veja que o conjunto verdade de $p(x)\wedge q(x)$ é

$$V_{p\wedge q} = V_p \cap V_q = \{-1, -5\} \cap \{0, -5\} = \{-5\}.$$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

OPERAÇÃO DISJUNÇÃO

Operação de disjunção é a sentença aberta $p(x)\vee q(x)$ em A. Essa sentença é verdadeira se $a \in A$ satisfaz pelo menos uma das sentenças abertas $p(x)eq(x)$ em A.

Exemplo: considerando o conjunto universo \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros).

Sejam as sentenças $p(x): x^2 + 6x + 5 = 0$ e $q(x): x^2 + 5x = 0$.

Temos: $p(x)\vee q(x)$.

A sentença aberta $p(x)$ tem conjunto verdade $V_p = \{-1, -5\}$.

A sentença aberta $q(x)$ tem conjunto verdade $V_q = \{0, -5\}$.

Veja que o conjunto verdade de $p(x)\vee q(x)$ é

$$V_{p\vee q} = V_p \cup V_q = \{-1, -5\} \cup \{0, -5\} = \{0, -1, -5\}.$$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

OPERAÇÃO CONDICIONAL

Operação condicional é a sentença aberta $p(x)\rightarrow q(x)$ em A. A condicional tem o valor falso quando todo elemento $a \in A$ satisfaz a sentença aberta $p(x)$ e não satisfaz a sentença $q(x)$.

Exemplo: considerando o conjunto universo \mathbb{N} (conjunto dos números naturais).

Sejam as sentenças $p(x): x + 1 < 6$ e $q(x): x$ é divisor de 10.

Temos: $p(x)\rightarrow q(x)$.

A sentença aberta $p(x)$ tem conjunto verdade $V_p = \{1, 2, 3, 4\}$.

A sentença aberta $q(x)$ tem conjunto verdade $V_q = \{1, 5, 10\}$.

Observação: usando equivalência estudada no cálculo proposicional, temos que:

$$p(x)\rightarrow q(x)\Leftrightarrow \neg p(x)\vee q(x)$$

Com essa equivalência garantimos que os conjuntos verdade coincidem.

Logo, o conjunto verdade de $p(x)\wedge q(x)$ é

$$V_{p \rightarrow q} = V_{\neg p \vee q} = V_{\neg p} \cup V_q = C_{\mathbb{N}} V_p \cup V_q$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V_p = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V_{\neg p} = C_{\mathbb{N}} V_p = \mathbb{N} - V_p = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V_q = \{1, 5, 10\}$$

$$V_{p \rightarrow q} = V_{\neg p} \cup V_q = \{5, 6, 7, \dots\} \cup \{1, 5, 10\} = \mathbb{N} - \{2, 3, 4\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

OPERAÇÃO BICONDICIONAL

Operação bicondicional é a sentença aberta $p(x) \leftrightarrow q(x)$ em A. A bicondicional tem o valor lógico verdadeiro quando os valores do elemento $a \in A$ satisfazem $p(x) e q(x)$ ou quando satisfazem $\neg p(x) e \neg q(x)$.

Exemplo: considerando o conjunto universo \mathbb{N} (conjunto dos números naturais).

Sejam as sentenças $p(x)$: $x + 1 < 6$ e $q(x)$: x é divisor de 10.

Temos: $p(x) \rightarrow q(x)$.

A sentença aberta $p(x)$ tem conjunto verdade $V_p = \{1, 2, 3, 4\}$.

A sentença aberta $q(x)$ tem conjunto verdade $V_q = \{1, 5, 10\}$.

Conjunto verdade da bicondicional: $V_{p \leftrightarrow q} = V_{p \rightarrow q} \cap V_{q \rightarrow p}$.

Vamos determinar:

$$V_{p \rightarrow q} = V_{\neg p \vee q} = V_{\neg p} \cup V_q = C_{\mathbb{N}} V_p \cup V_q$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V_p = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V_{\neg p} = C_{\mathbb{N}} V_p = \mathbb{N} - V_p = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V_q = 1, 5, 10$$

$$V_{p \rightarrow q} = V_{\neg p} \cup V_q = \{5, 6, 7, \dots\} \cup \{1, 5, 10\} = \mathbb{N} - \{2, 3, 4\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V_{q \rightarrow p} = V_{\neg q \vee p} = V_{\neg q} \cup V_p = C_{\mathbb{N}} V_q \cup V_p$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V_q = \{1, 5, 10\}$$

$$V_{\neg q} = C_{\mathbb{N}} V_q = \mathbb{N} - V_q = \mathbb{N} - \{1, 5, 10\} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \dots\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V_p = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V_{q \rightarrow p} = V_{\neg q} \cup V_p = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \dots\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \mathbb{N} - \{5, 10\}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Conjunto verdade da bicondicional:

$V_{p \leftrightarrow q} = V_{p \rightarrow q} \cap V_{q \rightarrow p} = [\mathbb{N} - 2, 3, 4] \cap [\mathbb{N} - \{5, 10\}] = \mathbb{N} - \{2, 3, 4, 5, 10\}$

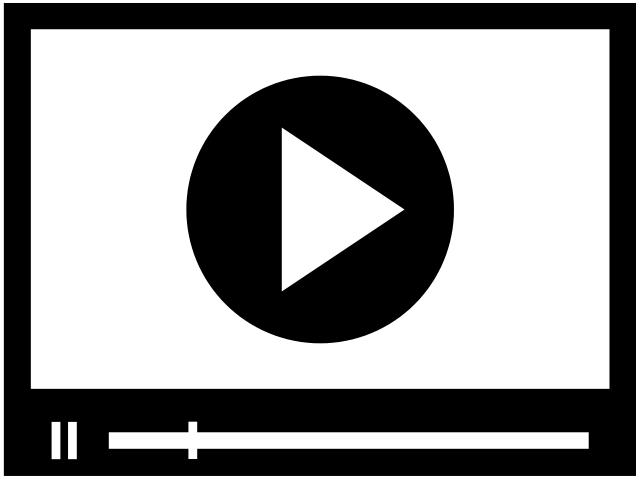
☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Os exemplos anteriores sugerem que podemos gerar novas sentenças abertas compostas, que obtemos por meio dos conectivos lógicos.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

MÓDULO 2

🕒 Reconhecer os quantificadores universal e existencial



PROPOSIÇÕES QUANTIFICADAS

Antes de iniciarmos o conteúdo do módulo 2, que tal assistir ao vídeo a seguir? Nele você confere o conceito de proposições quantificadas.



Estudamos quando uma sentença aberta é definida em um determinado conjunto, definimos conjunto universo, conjunto verdade e, por último, os predicados. É importante conhecer esses conceitos, pois eles serão utilizados agora no estudo dos quantificadores.

Vamos começar pensando nas expressões:

“para todo”

“qualquer que seja”

“existe pelo menos um”

Essas expressões, entre outras, são usadas em frases muito comuns no nosso cotidiano. Por exemplo, quando falamos “Todos os homens são elegantes”. Veja que temos um conjunto formado por homens elegantes. Ser elegante é a propriedade desse conjunto. Dessa forma, todos os homens estão atendendo a essa propriedade, que é ser elegante.

Alternativamente, podemos falar que “Existe pelo menos um homem que não é elegante”. Veja que no conjunto formado por homens elegantes existe um homem que não é elegante.

Agora considere a seguinte sentença matemática:

“Para todo x , $x < 2$ ”

Veja que essa sentença tem o predicado “ $x < 2$ ”, que apresenta a propriedade da variável x que é “ser menor do que 2”. Acompanhando esse predicado, temos a expressão “para todo”.

SAIBA MAIS

A palavra “todos” e as expressões “existe pelo menos um” e “para todos” são chamadas de quantificadores.

Utilizamos, então, dois quantificadores que serão objeto do nosso estudo: o quantificador universal e o quantificador existencial. Veremos que também podem ser utilizados quantificadores para transformar sentenças abertas em sentenças fechadas.

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Vamos analisar, inicialmente, duas sentenças abertas:

(I) A SENTENÇA ABERTA $P(x)$ DADA POR “ $x + 2 > x$ ”

Essa sentença é aberta no conjunto dos números naturais (\mathbb{N}), ou seja, o conjunto universo ou o domínio é \mathbb{N} , em que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

COMENTÁRIO

Não podemos esquecer de definir sempre o conjunto universo, pois é nesse conjunto que analisaremos os valores para atribuímos à variável x .

Agora devemos verificar se o valor atribuído a x torna a sentença aberta $P(x)$ uma proposição verdadeira. No conjunto dos números naturais, vamos considerar $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.

Para $x = 1$, temos “ $1 + 2 > 1$ ” verdadeira.



Para $x = 2$, temos “ $2 + 2 > 2$ ” verdadeira.



Para $x = 3$, temos “ $3 + 2 > 3$ ” verdadeira.

ATENÇÃO

Podemos observar que $P(x) = “x + 2 > x”$ é, na verdade, uma proposição verdadeira para todos os valores de x no conjunto dos números naturais.

Com relação ao conjunto verdade, dizemos que ele é o próprio conjunto dos números naturais.

$$V_p = \mathbb{N}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Lembrando que estamos usando V_p como notação para o conjunto verdade.

(II) A SENTENÇA ABERTA $P(x) = “x^2 = x”$

Agora vamos considerar a sentença aberta $P(x) = “x^2 = x”$ no conjunto dos números reais (\mathbb{R}), ou seja, o conjunto universo é \mathbb{R} .

Observe que essa sentença não é verdadeira para todos os números reais x . Veja:

Para $x = 1$, temos “ $(1)^2 = 1$ ” verdadeira.



Para $x = -1$, temos “ $(-1)^2 = -1$ ” falsa, pois $(-1)^2 = 1 \text{ e } 1 \neq -1$.



Logo, $P(-1)$ é falsa.

Nesse caso, dizemos que encontramos um contraexemplo.

Agora podemos compreender o quantificador universal a partir da análise dos exemplos anteriores.

Dada uma proposição ou sentença aberta $P(x)$ em A, em que A é o conjunto universo ou domínio ($A \neq \emptyset$) e o conjunto verdade $V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$. Veja que, quando todos os elementos do conjunto universo A satisfazem $P(x)$, podemos dizer que $P(x)$ torna-se uma proposição verdadeira para todos os valores de x em A. O conjunto verdade é $V_p = A$.

O quantificador universal é representado pelo símbolo (\forall) .

Dessa forma, usaremos o quantificador universal quando nos referirmos a todos os elementos do conjunto universo.

COMO ESCREVER “PARA TODO x EM A, $P(x)$ ” COM A SIMBOLOGIA DA LÓGICA MATEMÁTICA?

É simples, veja:

Para representarmos as expressões “para todos” e “qualquer que seja”, devemos colocar o símbolo \forall seguido do x antes de $P(x)$. Podemos dizer que $\forall x$ representa uma operação lógica que tem por finalidade transformar uma sentença aberta $P(x)$ em A, que não tem nenhum valor lógico, numa sentença verdadeira ou falsa. Essa operação é denominada quantificação universal.

$(\forall x \in A)(p(x))$ (PARA TODO X, P(X) É VERDADEIRA)

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$\forall x$ (Lê-se: para todo x ou qualquer que seja x)

Também podemos escrever:

$\forall x \in A, p(x)$ **OU** $\forall x \in A : p(x)$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

EXEMPLO

Veja como fica a sentença aberta dada em (I):

Com relação à sentença aberta $P(x)$, dada por “ $x + 2 > x$ ” em \mathbb{N} , podemos escrever:

$$(\forall x \in \mathbb{N})(x + 2 > x)$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

É uma sentença ou proposição verdadeira.

Nesse caso, temos:

$$V_p = x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x + 2 > x) = \mathbb{N} \quad \textbf{VERDADEIRA}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Veja como fica a sentença aberta dada em (II):

Com relação à sentença aberta $P(x)$ representada por " $x^2 = x$ " no conjunto dos números reais (\mathbb{R}), podemos escrever:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

É uma sentença ou proposição falsa.

Nesse caso, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 = x)\} \neq \mathbb{R} \quad \textbf{FALSA}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Quando o conjunto universo é finito, dizemos que a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$ é equivalente à conjunção.

Por exemplo:

Vamos considerar a sentença aberta $p(x) = "x \text{ é par}"$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Então temos que:

$$(\forall x \in A)(x \text{ é par}) \Leftrightarrow (2 \text{ é par} \wedge 4 \text{ é par})$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

(I) A SENTENÇA ABERTA $P(x)$ DADA POR “ $x > 4$ ”

Vamos analisar, inicialmente, duas sentenças:

Essa sentença é aberta no conjunto dos números reais (\mathbb{R}).

Veja que para todos os números reais essa sentença não é verificada; ela é falsa. Observe:

Para $x = 1$, temos “ $1 > 4$ ” falsa.



Para $x = 5$, temos “ $5 > 4$ ” verdadeira.

Note que no conjunto dos números reais existe pelo menos um elemento x que satisfaz a propriedade $P(x)$.

Portanto, $P(x) = “x > 4”$ é verdadeira e o conjunto verdade, pois, é $V_p \neq \emptyset$.

(II) A SENTENÇA ABERTA $P(x)$ DADA POR “ $x = x + 2$ ”

Agora vamos considerar a sentença aberta $P(x)$ dada por “ $x = x + 2$ ” no conjunto dos números reais (\mathbb{R}), ou seja, o conjunto universo é \mathbb{R} .

Observe que essa sentença é falsa para todos os números reais x . Veja:

Para $x = 1$, temos “ $1 = 1 + 2$ ” falsa.



Para $x = -1$, temos “ $-1 = -1 + 2$ ” falsa.



Para $x = 2$, temos “ $2 = 2 + 2$ ” falsa.



Logo, $P(x)$ é falsa e o conjunto verdade é $V_p = \emptyset$.

Agora podemos definir o quantificador existencial.

Dada uma proposição ou sentença aberta $P(x)$ em A , em que A é o conjunto universo ou domínio ($A \neq \emptyset$) e o conjunto verdade $V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$. Quando existe pelo menos um elemento do conjunto universo A que satisfaz $P(x)$, podemos dizer que $P(x)$ torna-se verdadeira. Ou seja, o conjunto verdade é não vazio: $V_p \neq \emptyset$.

COMENTÁRIO

Com relação ao quantificador existencial temos, por exemplo, as expressões: existe pelo menos um, existe algum, algum e existe.

O quantificador existencial é representado pelo símbolo (\exists) .

COMO ESCREVER “EXISTE x EM A , $P(x)$ ”, “PARA ALGUM $x \in A$, $P(x)$ ” OU “EXISTE PELO MENOS UM x EM A , TAL QUE $P(x)$ ” COM A SIMBOLOGIA DA LÓGICA MATEMÁTICA?

Para representarmos as expressões “Para algum”, “Existe” e “Existe pelo menos um” usaremos o símbolo \exists seguido do \exists antes de $P(x)$.

$$(\exists x)(p(x))$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$\exists x$ (Lê-se: Existe x ou existe pelo menos um x ou existe algum x)

O quantificador existencial também é um operador lógico que tem por finalidade transformar uma sentença aberta $P(x)$ em A , que não tem nenhum valor lógico, numa sentença verdadeira ou falsa. A operação é denominada quantificação existencial.

COMENTÁRIO

Podemos usar também as seguintes notações: $(\exists x \in A)(p(x))$ ou $\exists x \in A : p(x)$ ou $\exists x \in A, p(x)$.

EXEMPLO

Veja como fica a sentença aberta dada em (I):

Com relação à sentença aberta $P(x)$ dada por “ $x > 4$ ” no conjunto dos números reais (\mathbb{R}) , podemos escrever:

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x > 4)$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

É uma sentença ou proposição verdadeira.

Nesse caso, temos:

$$V_p = \{x | x \in R \wedge "x > 4"\} \neq \emptyset \text{ VERDADEIRA}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Veja como fica a sentença aberta dada em (II):

Com relação à sentença aberta $P(x)$ dada por “ $x = x + 2$ ” no conjunto dos números reais (\mathbb{R}) , podemos escrever:

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x = x + 2)$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

É uma sentença ou proposição falsa.

Nesse caso, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge "x = x + 2"\} = \emptyset \text{ FALSA}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Quando o conjunto universo é finito, dizemos que a proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ é equivalente à disjunção.

Por exemplo:

Vamos considerar a sentença aberta $p(x) = “x \text{ é ímpar}”$ em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Então temos que:

$$(\exists x \in A)x \text{ é ímpar} \Leftrightarrow 1 \text{ é ímpar} \vee 3 \text{ é ímpar} \vee 5 \text{ é ímpar} \vee 7 \text{ é ímpar}$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

COMENTÁRIO

Considerando a expressão do tipo: $(\exists x)(x \text{ é } elegante)$ “Existe pelo menos um x ou existe algum x , tal que x é elegante”, ela é verdadeira se considerarmos o conjunto universo A das pessoas que não são elegantes.

QUANTIFICADOR DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Vamos considerar uma sentença aberta $p(x): x^2 = 25$ em \mathbb{N} (conjunto dos números naturais).

Ao resolvermos essa equação, encontramos duas raízes: 5 e -5 .

ATENÇÃO

Como o conjunto universo que estamos considerando é \mathbb{N} , não consideramos o valor negativo -5. Dessa forma, temos apenas um único valor ($x = 5$), no conjunto dos números naturais, que confirma a existência da sentença aberta e faz com que seu valor lógico seja verdadeiro.

Quando temos situações como essa em que existe “um e um só $x \in A$ tal que $p(x)$ ” ou “existe um único $x \in A$ ” que satisfaz a sentença aberta $p(x)$ em A, então estamos falando do quantificador de existência e unicidade.

Notação: $(\exists!x \in A)(p(x))$

Chamamos o símbolo $\exists!$ de quantificador existencial de unicidade.

Lê-se: “Existe um e apenas um”.

$\exists!$

Lê-se: “Existe um e apenas um”.

★ EXEMPLO

Considere o conjunto universo $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e a sentença aberta em A dada por $p(x)$: “ x é par”.

Veja que existe apenas um elemento de A que satisfaz a propriedade de ser par, que é 4.

Portanto, $x = 4$ é o único valor que torna essa sentença aberta em fechada.

$(\exists!x \in A)x \text{ é par}$

QUANTIFICAÇÃO SOBRE SENTENÇAS ABERTAS COM MAIS DE UMA VARIÁVEL

Vamos analisar sentenças abertas em A com mais de uma variável. É muito comum nos depararmos com sentenças abertas que apresentam mais de uma variável. Usamos os quantificadores (universal e existencial) sobre elas e elas se transformam em outra sentença aberta com menos variáveis livres.

Por exemplo:

Vamos considerar uma expressão do tipo: $(\exists x \in A)(x + y < 8)$ em que A é o conjunto universo definido por $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Note que não conhecemos o valor lógico dessa expressão (que é uma sentença aberta na variável y), pois temos duas variáveis x e y .

📢 COMENTÁRIO

A variável x está definida no conjunto A, mas desconhecemos os valores de y . Isso faz com que y assuma qualquer valor, e por esse motivo chamamos y de variável livre.

Também podemos ter expressões do tipo: $(\forall y \in A)(x + y < 8)$ em que A é o conjunto universo definido por $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Veja que nessa expressão a variável y está definida no conjunto A, mas nada sabemos sobre a variável x . Para determinarmos o valor lógico da expressão dada, dependemos da variável x . Como x pode assumir qualquer valor do conjunto universo escolhido, dizemos que é uma variável livre.

EXEMPLOS

Vejamos alguns exemplos:

1. Determine o conjunto verdade das sentenças abertas em que o conjunto universo das variáveis x e y é $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) $(\forall x \in A)(2x + y < 11)$

SOLUÇÃO

Veja que o conjunto verdade é vazio, pois considerando $x = 6$, a propriedade não é verificada.

$2(6) + y < 11$ é falso para qualquer valor y de A.

b) $(\exists y \in A)(2x + y < 11)$

SOLUÇÃO

O conjunto verdade é $\{1, 2, 3\}$. A propriedade é verificada, pois, para qualquer y em A, a sentença aberta $2x + y$ torna-se uma proposição verdadeira.

Sentenças abertas podem conter quantificadores diferentes para cada variável.

Por exemplo:

Considerando os conjuntos A, B e C, temos:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(p(x, y))$$

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(p(x, y))$$

Lê-se: “Para todo x em A existe um y em B tal que $p(x, y)$ ”.

$$(\exists x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in C)(p(x, y, z))$$

Verifique o valor lógico das sentenças abertas indicadas.

2. Considere o conjunto universo \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros) e a proposição $(\forall x)(\exists y)(x < y)$.

Observe que, para cada inteiro x , existe um inteiro y ainda maior. Logo, o valor lógico dessa proposição é verdadeiro.

Trocando a ordem dos quantificadores $(\exists y)(\forall x)(x < y)$, obtemos uma sentença diferente. Nesse caso, o valor lógico da proposição é falso.

Agora é a hora de pôr a Mão na massa. Vamos começar?

MÃO NA MASSA

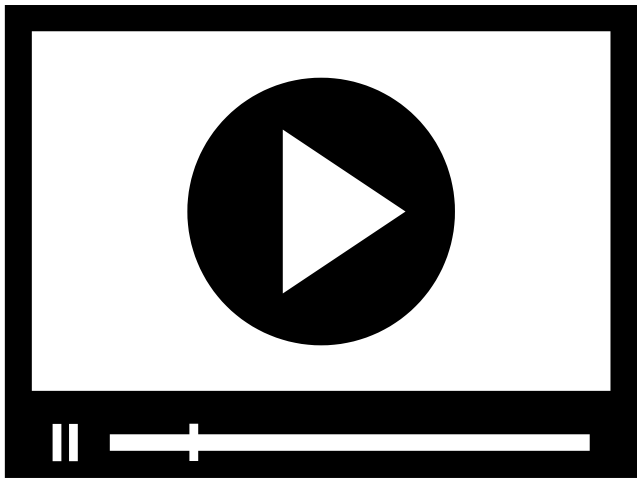
SOLUÇÃO



VERIFICANDO O APRENDIZADO

MÓDULO 3

- Identificar variáveis livres e ligadas e a negação de proposições com quantificadores



NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES QUANTIFICADAS

Agora que você chegou ao módulo 3, que tal assistir a um vídeo e conhecer as variáveis livres e variáveis ligadas e a negação de sentenças abertas compostas? Vamos lá!



VARIÁVEIS LIVRES E VARIÁVEIS LIGADAS

As variáveis no cálculo de predicados, presentes nas sentenças abertas, podem ser variáveis livres ou ligadas, mas, para verificarmos essas variáveis, precisamos analisar o alcance ou abrangência (chamado de escopo) dos quantificadores presentes nas proposições.

Consideremos a expressão do tipo: $(\exists x)(x + y < 4)$, onde A é o conjunto-universo definido por $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Note que não conhecemos o valor lógico dessa expressão, pois temos duas variáveis: x e y . A variável x está definida no conjunto A e podemos dizer que é uma variável ligada ao quantificador existencial, pois os seus valores estão definidos em A.

ATENÇÃO

Não conhecemos a variável y , então dizemos que y é uma variável livre. Ela não possui nenhum valor fixo ou particular.

Na verdade, a expressão dada é uma sentença aberta, e não uma proposição!

NEGAÇÃO DE SENTENÇAS ABERTAS COM O QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Vamos considerar a expressão abaixo e o conjunto universo H de todos os homens.

$$(\forall x \in H)(x \text{ é bom motorista})$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Nessa expressão, temos que “para todos as pessoas de H, tais pessoas – os homens, são bons motoristas”. Para negar essa expressão com a presença do quantificador universal, basta colocar a negação antes do quantificador.

$$\neg [(\forall x \in H)(x \text{ é bom motorista})]$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Quando colocamos a negação na frente do quantificador universal, dizemos que “não é verdade que todos os homens são bons motoristas”.

Portanto, a negação de proposição com quantificador universal é equivalente a:

$$\sim (\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x(\sim p(x))$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Alternativamente, podemos escrever:

$$(\exists x)(x \text{ não é bom motorista})$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Na linguagem corrente, temos: existe pelo menos um homem que não é bom motorista.

⊕ SAIBA MAIS

Na linguagem corrente, temos algumas expressões que podemos usar para negar o quantificador universal: “Pelo menos um”, “ao menos um”, “existe um”, “algum” ou “existe pelo menos um”. Todos seguidos do “não”.

EXEMPLO

Dê a negação da sentença: $(\forall x)(x - 3 \geq 4)$.

SOLUÇÃO

A negação é equivalente a $\neg(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg p(x))$

$$\neg(\forall x)(x - 3 \geq 4) \Leftrightarrow \exists x(x - 3 < 4)$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Agora é a hora de pôr a Mão na massa. Vamos lá?

MÃO NA MASSA

SOLUÇÃO

NEGAÇÃO DE SENTENÇAS ABERTAS COM O

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Vamos considerar a expressão na linguagem natural: “Alguns homens são bons motoristas”.

Considerando o conjunto universo H de todos os homens, temos:

$$(\exists x \in H)(x \text{ é bom motorista})$$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Para negar essa expressão com a presença do quantificador existencial, basta colocar a negação antes do quantificador.

$$\neg(\exists x \in H)(x \text{ é bom motorista})$$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

🔄 RELEMBRANDO

Lembre-se de que quando colocamos a negação na frente do quantificador universal \forall , dizemos que “não é verdade que todos os homens são bons motoristas”.

Portanto, a negação de proposição com quantificador existencial é equivalente a:

$$\neg(\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg p(x))$$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Alternativamente, podemos escrever:

$$(\forall x)(x \text{ não é bom motorista})$$

❑ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Na linguagem corrente, temos: todos os homens não são bons motoristas.

Na linguagem corrente, temos algumas expressões que podemos usar para negar o quantificador existencial.

Veja algumas dessas expressões:

NEGAÇÃO DO “ALGUM”

Podemos usar: nenhum, todo, seguido de não.

Exemplo: alguns homens são bons motoristas.

Negação: **nenhum** homem é bom motorista.

Todo homem **não** é bom motorista.

NEGAÇÃO DO “NENHUM”

Podemos usar: algum, pelo menos um.

Exemplo: nenhum homem é elegante.

Negação: **algum** homem é elegante.

Pelo menos um homem é elegante.

EXEMPLO

1. Dê a negação da sentença: $(\exists x)(x + 3 = x)$.

SOLUÇÃO

A negação é equivalente a $\neg(\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg p(x))$

$$\neg(\exists x)(x + 3 = x) \Leftrightarrow (\forall x \in R)(x + 3 \neq x)$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Dê a negação da sentença: $(\forall x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))$.

SOLUÇÃO

Nessa sentença, vamos aplicar a regra de negação da conjunção.

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

Temos, então:

$$\neg[(\forall x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))]$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$\neg(\forall x \in A)(p(x)) \vee \neg(\exists x \in A)(q(x))$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$(\exists x \in A)(\neg p(x)) \vee (\forall x \in A)(\neg q(x))$$

☐ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Agora é a hora de pôr a Mão na massa mais uma vez:

MÃO NA MASSA

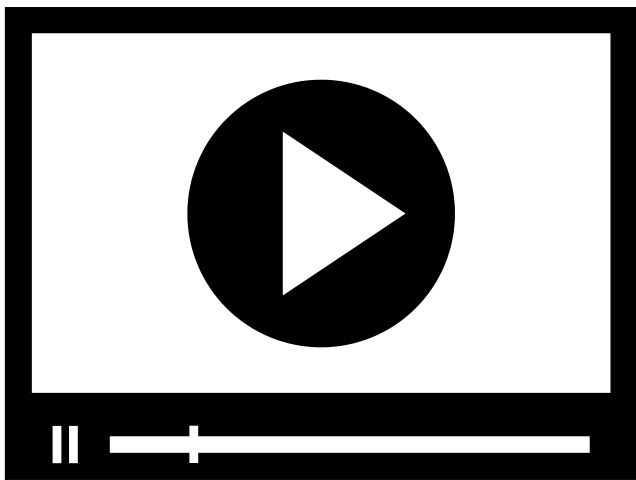
SOLUÇÃO



VERIFICANDO O APRENDIZADO

MÓDULO 4

- Identificar aplicações do cálculo de predicados na Computação



UTILIDADE DO CÁLCULO DOS PREDICADOS NA ÁREA DE COMPUTAÇÃO

Muito bem! Até aqui você já teve muitos conhecimentos novos. Para dar continuidade ao aprendizado, assista ao vídeo a seguir e veja a importância do cálculo dos predicados nas aplicações computacionais.



Conhecemos nos módulos anteriores a lógica de predicados. Foi mencionada anteriormente sua importância, não só nas demonstrações na Matemática, mas também na Computação com aplicações muito importantes. Neste módulo, conheceremos algumas das aplicações do cálculo de predicados na área de Computação.

PROGRAMAÇÃO LÓGICA

Usando o conhecimento do cálculo proposicional, analisamos a validade de um argumento a partir da análise das premissas ou hipóteses. Para isso, fazemos uso das regras de inferência. Esse processo também ocorre com o cálculo de predicados.

Ou seja, considerando que as premissas são verdadeiras, concluímos que o resultado (conclusão) é verdadeiro.

Na Computação, uma das primeiras linguagens concebidas para implementar tais procedimentos foi a linguagem de programação Prolog.

VOCÊ SABIA

A linguagem Prolog foi desenvolvida em 1972 por Alain Colmerauer e seus associados na Universidade de Marseille, na França, com o propósito inicial de traduzir linguagens naturais, e tem uma importância considerável na área de Inteligência Artificial.

Podemos citar como uma característica o fato de ser uma linguagem declarativa, também chamada de linguagem descritiva. Isso significa que, dado um problema, ela faz uso do cálculo proposicional e do cálculo de predicados para indicar como o problema deve ser resolvido. Isso é feito por meio da interpretação de quais hipóteses são verdadeiras.

A linguagem Prolog é formada basicamente de **fatos** ou **informações** sobre objetos que desejamos analisar; regras de inferência e perguntas que podemos fazer sobre os objetos dados.

ATENÇÃO

Para resolver um determinado problema, o programa Prolog recorre a uma base de dados formada por fatos e regras. A partir dessa base de dados, determina-se se uma conclusão tem valor lógico verdadeiro ou falso.

Agora vamos entender o que é um fato. É a partir dos fatos que os predicados são definidos, pois a estrutura de um fato é formada por um predicado e seus objetos ou argumentos. Veja:

PREDICADO (OBJETO 1, OBJETO 2, ...).

Veja alguns exemplos:

AMIGO(PAULO, CARLOS)

Observe que definimos uma relação entre dois objetos, “paulo e carlos”.

“Paulo é amigo de Carlos”

MÃE(MARIA, PEDRO)

“Maria é mãe de Pedro”

GOSTA(PAULA, PEDRO)

“Paula gosta de Pedro”

Atenção: o predicado representa uma característica do objeto quando temos apenas 1 objeto.

★ EXEMPLO

estudiosa(maria).

“Maria é estudiosa”

Usamos letras minúsculas para escrever os nomes dos predicados e dos objetos. Como podemos observar nos exemplos anteriores, o predicado vem na frente dos objetos, que são separados por vírgula.

Por convenção, temos o predicado(x, y), que indica “ x predicado y ”. Assim, em come(gato, peixe), temos: “Gato come peixe”.

Veja que trocar a ordem dos objetos pode alterar o valor lógico.

★ EXEMPLO

come(gato, peixe), temos: “Gato come peixe” – valor lógico verdadeiro.

come(peixe, gato), temos: “Peixe come gato” – valor lógico falso.

Também podemos fazer perguntas. Na programação Prolog, uma pergunta tem a seguinte estrutura:

? - POSSUI(CARLOS, COMPUTADOR).

ESTAMOS PERGUNTANDO SE “CARLOS POSSUI UM COMPUTADOR”.

O programa Prolog responde “sim” ou “não”.

📣 ATENÇÃO

Vale sinalizar que a linguagem Prolog não responde simplesmente “sim” ou “não”; ela vai muito além disso, pois, utilizando regras, unifica informações, analisa os fatos, encontra valores para as variáveis em questão que podem indicar o valor lógico da conclusão.

A resposta “não” no Prolog indica que não foi possível chegar à conclusão ou provar o fato dado a partir das informações encontradas no banco de dados.

★ **EXEMPLO**

Vamos considerar o seguinte banco de dados:

engenheiro(luis). Significa: Luis é engenheiro.

engenheiro(carlos). Significa: Carlos é engenheiro.

carioca(luis). Significa: Luis é carioca.

Vamos fazer a seguinte pergunta:

? – carioca(carlos).

Significa: Carlos é carioca?

Note que não é possível afirmar que Carlos é carioca se considerarmos os fatos dados.

Na pergunta também podemos fazer uso de variáveis que são denotadas por letras maiúsculas.

EXEMPLOS

1. Considere um banco de dados com instâncias da relação gosta:

gosta(paula, chocolate).

gosta(paula, carlos).

gosta(mario, paula).

Pergunta:

ATENÇÃO

O Prolog examina os fatos na ordem em que estes se encontram no banco de dados e encontrando um fato que satisfaça a pergunta, ele atribui o valor encontrado à variável usada na pergunta em questão. Além disso, o Prolog também marca a posição no banco de dados em que a atribuição foi realizada.

Caso o usuário entre com o comando para que a busca seja realizada, o Prolog reiniciará a busca a partir da posição em que havia parado. No caso da pergunta anterior, o programa, então, responderia: X = carlos.

Outra pergunta:

? – gosta(mario, X).

X = paula

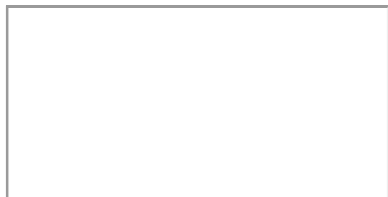
COMENTÁRIO

Veja que mostramos até agora perguntas simples, mas à medida que essas perguntas ficam mais complexas, é necessário fazer uso dos conectivos lógicos e símbolos da aritmética, se necessários.

2. “Será que Luiza gosta de maratona e Carlos gosta de meia-maratona?”

Pergunta:

? – gosta(luiza, maratona), gosta(carlos, meia-maratona)



EXEMPLO

Luiza gosta de todas as pessoas que gostam de corrida.

Podemos escrever:

Luiza gosta de X se X gosta de corrida.

As regras, na linguagem Prolog, possuem duas partes e elas são conectadas pelo símbolo “:-” que representa o “se”.

A linguagem de programação Prolog, bem como as linguagens da família Lisp, foram as primeiras linguagens de programação concebidas para a definição de sistemas lógicos.

SAIBA MAIS

Lisp (do inglês List Processing) é uma família de linguagens formais matemáticas, concebida por John McCarthy em 1958. Sua estrutura de dados básica é a lista, que representa tanto os dados quanto os programas, sendo conhecida como uma linguagem funcional por ser um mecanismo formal para manipular funções matemáticas. Lisp possui várias implementações, como Common Lisp, Scheme, Clojure, e se tornou, juntamente com o Prolog, nos anos 1970 e 1980, uma das principais linguagens da comunidade de Inteligência Artificial.

A linguagem Prolog possui diversas aplicações, sendo as principais na área de Computação Simbólica:

Prova automática de teoremas e semântica;

Solução de equações simbólicas;

Bancos de dados relacionais;

Processamento de linguagem natural;

Sistemas especialistas;

Planejamento automático de atividades;

Aplicações em jogos (xadrez, damas, jogo da velha etc.);

Compiladores etc.

No próximo tópico, vamos nos concentrar em uma dessas aplicações, os chamados sistemas especialistas.

SISTEMAS ESPECIALISTAS

Sistemas especialistas são uma aplicação importante do cálculo dos predicados. Foram criados por pesquisadores da área de Inteligência Artificial, com o objetivo de simular o raciocínio de um profissional especialista em alguma área de conhecimento, para uma tomada de decisão específica.

A base de dados desse sistema é formada por fatos e regras capazes de ajudar de forma eficiente o usuário na tomada de decisão e dar sugestões aos usuários. Isso ocorre por meio de regras que analisam informações e simulações do raciocínio do homem em uma determinada área de estudo. Com as simulações, surgem questionamentos com relação à tomada de decisão.

Esse tipo de sistema foi desenvolvido, por exemplo, com a finalidade de:

Simular diagnósticos na área médica, uma vez que se tem as informações fornecidas pelos pacientes;

Tomada de decisões gerenciais em fábricas;

Decisões baseadas em pesquisa de mercado;

Declaração de imposto de renda.

ATENÇÃO

Note que, nesse sistema, as informações não são quantitativas, e sim qualitativas. É importante extrair o máximo de informações possíveis do especialista humano. Assim, temos tomadas de decisão mais eficientes.

Com relação a regras, elas podem ser simples ou complexas em que o número de operadores lógicos é maior. Por exemplo:

REGRA: “SE CARLA NÃO ESTUDAR, ENTÃO ELA NÃO SERÁ APROVADA NA DISCIPLINA.”

O sistema especialista possui fatos referentes ao problema estudado. Os usuários fornecem as informações e, a partir disso, o sistema procura por regras para unir as premissas às informações dadas.

Segundo Hayes-Roth (1983), os sistemas especialistas podem ser classificados nas seguintes categorias:

Interpretação	Inferem descrições de situações a partir da observação de fatos.
Predição	Deduzem consequências prováveis de determinadas situações.
Diagnóstico	Deduzem conclusões a partir de fatos observados.
Projeto	Configuram objetos sob dadas restrições.
Planejamento	Criam iniciativas para se atingir metas.
Monitoramento	Comparam fatos observados para detectar vulnerabilidades.
Depuração	Fornecem soluções incrementais para problemas complexos.
Conserto	Executam um plano para administrar uma solução prescrita.
Instrução	Diagnosticam, avaliam e reparam o comportamento do aluno.
Controle	Interpretam, preveem, reparam e monitoram comportamentos do sistema.

☐ **Atenção!** Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

 Categorias dos sistemas especialistas.

PROVA DE CORREÇÃO

Outra utilização do cálculo de predicados diz respeito à correção de programas desenvolvidos com linguagens de programação tradicionais. A verificação do programa tem por finalidade garantir que o programa está correto, atendendo às especificações dadas pelo usuário.

COMENTÁRIO

Note que a verificação é diferente da validação, que busca garantir que os requisitos do cliente sejam atendidos e, portanto, vai além da correção de programas.

A verificação é realizada por meio da “prova de correção”, em que se usa a lógica formal com o intuito de provar que quaisquer variáveis de entrada que atendem às especificações de predicados e as variáveis de saída produzidas pela execução do programa satisfazem outras propriedades específicas.

Tal prova é baseada na verificação da correção de trechos de programa que incluam comandos presentes em toda linguagem de programação, tais como:

Comandos de atribuição de valores a variáveis.

Comandos condicionais (*IF THEN ELSE*).

Comandos com laços de repetição (*LOOP, FOR, REPEAT UNTIL, WHILE* etc.).

Além da prova de correção, os testes de programas envolvem conjuntos de dados para testes. Eles mostram que os valores de saída são bons à medida que os valores de entrada são aceitáveis.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim finalizamos nosso estudo da lógica de predicados, também chamado de cálculo de predicados. Estudamos os quantificadores, mas antes vimos o que é uma sentença aberta, como determinar o conjunto verdade de sentenças abertas de acordo com o conjunto universo dado. Estudamos os predicados e as operações lógicas usando o conhecimento adquirido no cálculo proposicional. Aprendemos a trabalhar com os quantificadores e a realizar operações lógicas com eles.

Apresentamos um breve estudo dos predicados, considerando que são ferramentas da lógica importantes para os estudantes da área da Computação e da Matemática. Na Computação, temos linguagens de programação que utilizam a lógica dos predicados, os conectivos lógicos e as regras de inferência. Por último, apresentamos algumas aplicações do cálculo de predicados na Computação.

É importante ressaltar que o conhecimento da Lógica em geral e do Cálculo de Predicados, em especial, é relevante e necessário para o bom desenvolvimento em outras disciplinas, assim como na compreensão de situações do cotidiano.



PODCAST

PODCAST

Para encerrar nosso estudo sobre cálculo de predicados, ouça nosso podcast sobre o tema e aprofunde seus conhecimentos.



REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Iniciação à Lógica Matemática**. 18. ed. São Paulo: Nobel, 2002.

BARBOSA, M. A. **Introdução à Lógica Matemática para Acadêmicos** [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2017. (Série Matemática em Sala de Aula).

BARROS, D. M. **Raciocínio Lógico, Matemático e Quantitativo**. São Paulo: Novas Conquistas São Paulo, 2001. (Série Concursos Públicos).

DAGHLIAN, J. **Lógica e Álgebra de Boole**. 4. ed. 16. reimpr. São Paulo: Atlas, 2012.

FERNANDES, D. C. R. **Lógica Matemática**. Rio de Janeiro: SESES, 2016. 136 p.

GERSTING, J. L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HAYES-ROTH, F. *et al.* **Building Expert Systems**. Boston: Addison-Wesley, 1983.

HEGENBERG, L. **Lógica: o cálculo de predicados**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

LEITE, A. E.; CASTANHEIRA, N. P. **Raciocínio Lógico e Lógica Quantitativa** [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2017. (Coleção Desmistificando a Matemática).

MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. **Lógica e Linguagem Cotidiana** – verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

EXPLORE+

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste conteúdo, leia:

O artigo: “Há uma definição absoluta de quantificadores? (Is there an absolute definition of quantifiers?)”, de Ângela Pereira. Nesse artigo, a autora fala sobre a contribuição de diversos pensadores no estudo dos quantificadores.

Veja, no artigo de Paulo Marcelo Tasinaffo, “Um breve histórico do desenvolvimento da lógica matemática e o surgimento da teoria da computação”, o desenvolvimento histórico da lógica matemática e suas contribuições para o surgimento da teoria da computação.

Assista:

Ao vídeo “O que é o tal do Algoritmo? – Lógica e Programação”. Nesse vídeo, a influência da lógica na computação é apresentada de maneira informal, por meio do conceito de algoritmo.

CONTEUDISTA

Ana Lucia de Sousa

 CURRÍCULO LATTES