
Circuitos Elétricos 2

Circuitos Elétricos Aplicados

Prof. Dr.-Ing. João Paulo C. Lustosa da Costa

Universidade de Brasília (UnB)

Departamento de Engenharia Elétrica (ENE)

Laboratório de Processamento de Sinais em Arranjos

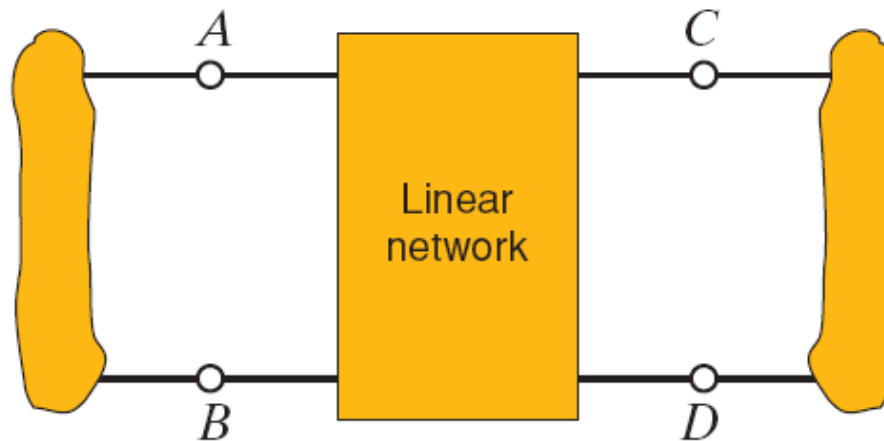
Caixa Postal 4386

CEP 70.919-970, Brasília - DF



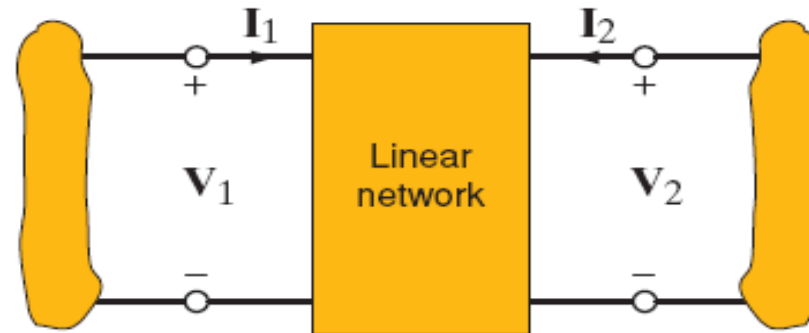
Homepage: <http://www.pgea.unb.br/~laspl>

Quadripolos



- ❑ Não há interesse na estrutura interna da rede.
- ❑ Uma descrição relacionando variáveis de entrada e saída é suficiente.
- ❑ Um modelo de quadripolo é uma descrição que relaciona tensão e corrente entre dois pares de terminais.

Parâmetros de Admitância



- ❑ A rede NÃO contém fontes independentes.
- ❑ Os parâmetros de admitância descrevem as correntes em termos de tensão.

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

- ❑ O índice 1 identifica a porta de entrada. O índice 2 identifica a porta de saída.
- ❑ y_{21} determina a corrente entrando na porta 2 quando a porta 2 é curto-circuitada e a tensão V_1 é aplicada na porta 1.
- ❑ Os parâmetros são obtidos diretamente das equações.

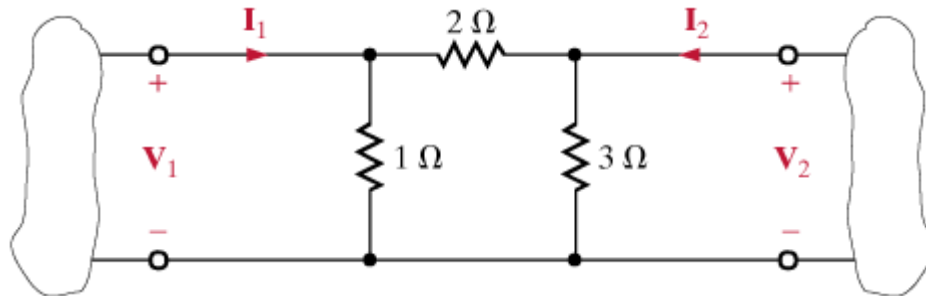
$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$



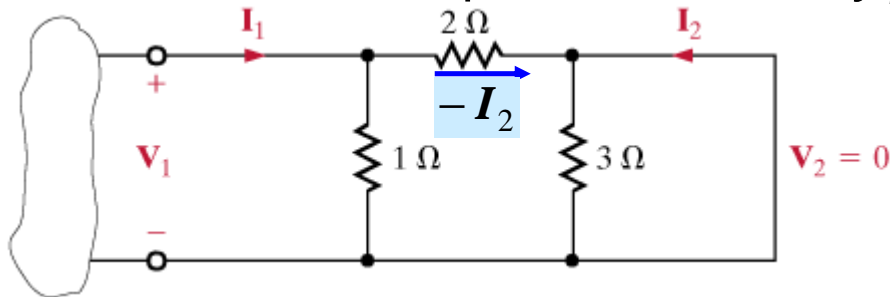
Exemplo de Parâmetros de Admitância

- Encontre os parâmetros de admitância da rede.



$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned}$$

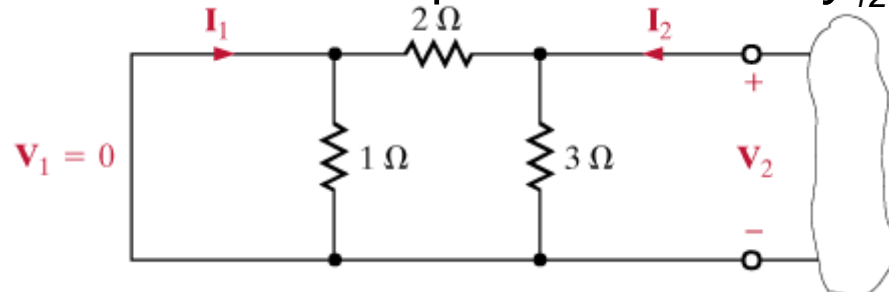
⇒ Circuito usado para determinar y_{11} e y_{21}



$$I_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)V_1 \Rightarrow y_{11} = \frac{3}{2}[S]$$

$$-I_2 = \frac{1}{1+2}I_1 \Rightarrow I_2 = -\frac{1}{2}V_1 \Rightarrow y_{21} = -\frac{1}{2}[S]$$

⇒ Circuito usado para determinar y_{12} e y_{22}



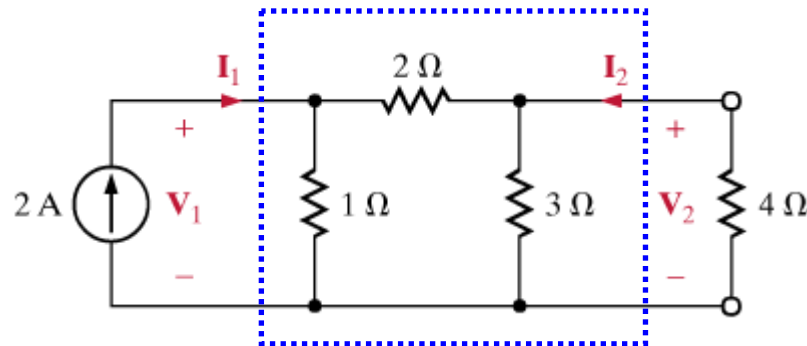
$$I_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)V_2 \Rightarrow y_{22} = \frac{5}{6}[S]$$

$$-I_1 = \frac{3}{2+3}I_2 = \frac{3 \times 5}{5 \times 6}V_2 \Rightarrow y_{12} = -\frac{1}{2}[S]$$



Aplicação do Modelo de Admitância

- Determine a corrente no resistor de 4Ω



$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

$$I_1 = \frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2$$

$$I_1 = 2A, \quad V_2 = -4I_2$$

$$I_2 = -\frac{1}{4}V_2$$

⇒ Resolvendo o sistema tem-se a corrente no resistor de 4Ω

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 \\ 0 &= -\frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right)V_2 \end{aligned}$$

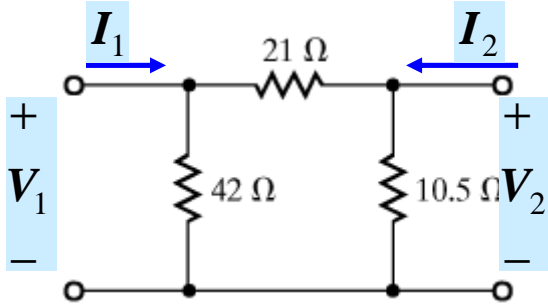


$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{13}{6}V_2 \\ V_2 &= \frac{8}{11}[V] \\ I_2 &= -\frac{2}{11}[A] \end{aligned}$$

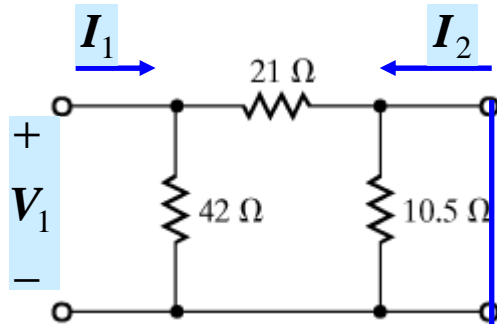


Exemplo de Modelo de Admitância

- Encontre os parâmetros de admitância



$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned}$$

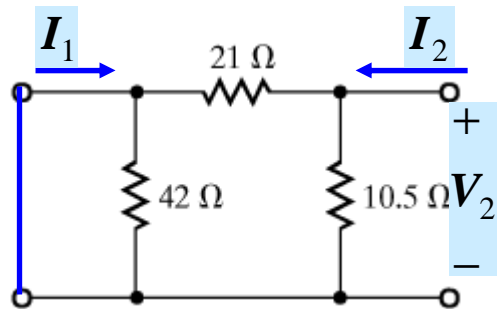


$$I_1 = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{42} \right) V_1 = \frac{3}{42} V_1$$

$$I_2 = -\frac{42}{21+42} I_1$$

$$y_{11} = \frac{1}{14} [S]$$

$$y_{21} = -\frac{1}{21} [S]$$



$$I_2 = \left(\frac{1}{10.5} + \frac{1}{21} \right) V_2$$

$$I_1 = -\frac{10.5}{21+10.5} I_2$$

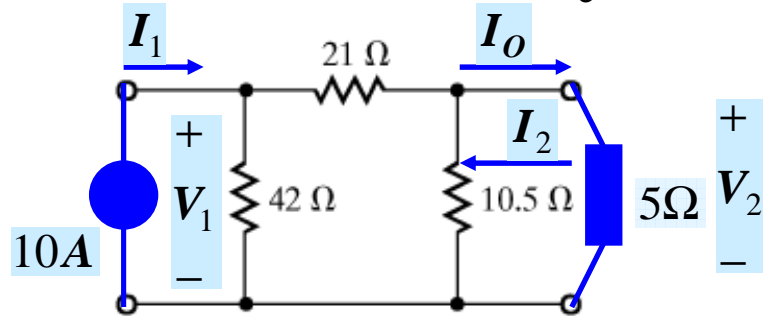
$$y_{22} = \frac{1}{7} [S]$$

$$y_{12} = -\frac{1}{21} [S]$$



Aplicação do Modelo de Admitância

- Determine a corrente I_o



Condições nas portas de I/O

$$I_1 = 10A$$

$$I_2 = -\frac{1}{5}V_2$$

$$I_o = -I_2$$

Substitua no modelo

$$10 = \frac{1}{14}V_1 - \frac{1}{21}(5I_o)$$

$$-I_o = -\frac{1}{21}V_1 + \frac{1}{7}(5I_o)$$

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

$$y_{11} = \frac{1}{14}[S]$$

$$y_{21} = -\frac{1}{21}[S]$$

$$y_{22} = \frac{1}{7}[S]$$

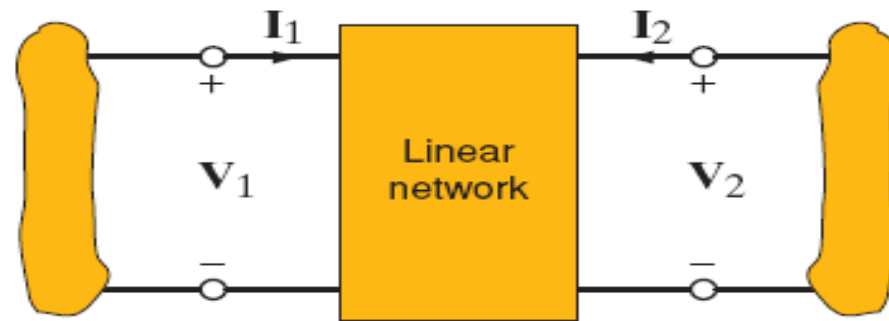
$$y_{12} = -\frac{1}{21}[S]$$

Resolva p/ a variável de interesse

$$I_o = \frac{420}{98}[A]$$



Parâmetros de Impedância



- A rede NÃO contém fontes independentes.

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned}$$

- Os parâmetros z são encontrados de forma semelhantes ao parâmetros y .

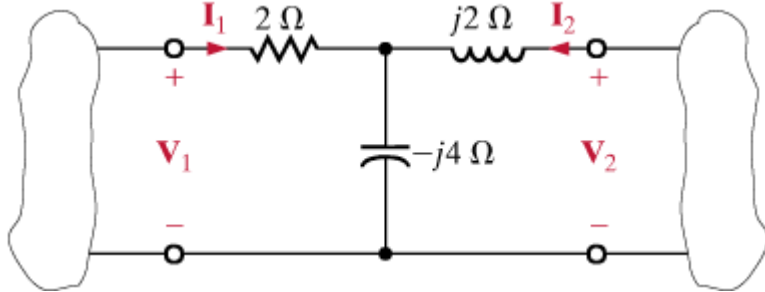
$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$



Exemplo de Cálculo dos Parâmetros de Impedância

- Encontre os parâmetros z .



$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

- Escrevendo as equações das malhas

$$V_1 = 2I_1 - j4(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = j2I_2 - j4(I_2 + I_1)$$

- Agrupando adequadamente

$$V_1 = (2 - j4)I_1 - j4I_2$$

$$V_2 = -j4I_1 - j2I_2$$

$$\Rightarrow z_{11} = 2 - j4\Omega$$

$$z_{12} = -j4\Omega$$

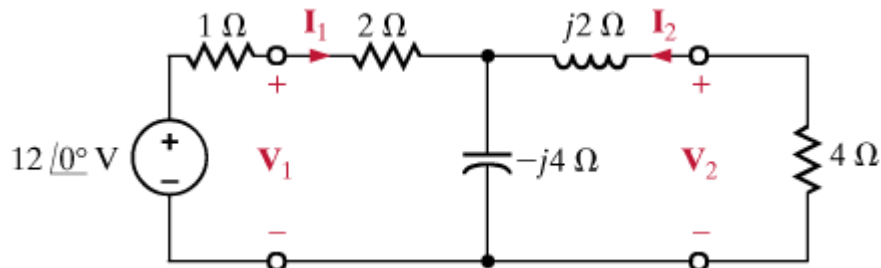
$$z_{21} = -j4\Omega$$

$$z_{22} = -j2\Omega$$



Exemplo de Aplicação dos Parâmetros de Impedância

- Use os parâmetros z para encontrar a corrente no resistor de 4Ω .



$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned}$$

⇒ Restrição na porta de saída

$$V_2 = -4I_2$$

⇒ Restrição na porta de entrada

$$V_1 = 12\angle 0^\circ - (1)I_1$$

$$V_1 = (2 - j4)I_1 - j4I_2$$

$$V_2 = -j4I_1 - j2I_2$$

$$12 = (3 - j4)I_1 - j4I_2 \quad \times j4$$

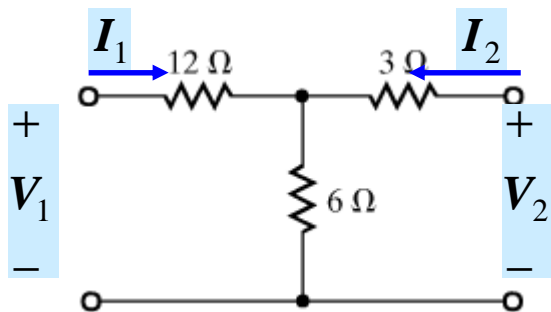
$$0 = -j4I_1 + (4 - j2)I_2 \quad \times (3 - j4)$$

$$48j = (16 + (4 - j2)(3 - j4))I_2 \quad \Rightarrow I_2 = 1.61\angle 137.73^\circ \text{ A}$$



Exemplo de Cálculo e Aplicação dos Parâmetros de Impedância

- Encontrar os parâmetros Z e a corrente na carga 4Ω com tensão de 24 V na ent.



$$V_1 = 12I_1 + 6(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = 3I_2 + 6(I_1 + I_2)$$

$$z_{11} = 18\Omega, \quad z_{12} = 6\Omega$$

$$z_{21} = 6\Omega, \quad z_{22} = 9\Omega$$

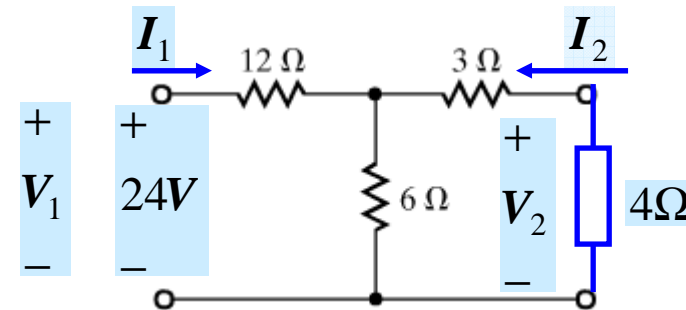
$$\text{restrição na porta de saída : } V_2 = -4I_2$$

$$\text{restrição na porta de entrada } V_1 = 24[V]$$

$$24 = 18I_1 + 6I_2$$

$$0 = 6I_1 + 13I_2 \quad \times (-3)$$

$$24 = (-39 + 6)I_2$$



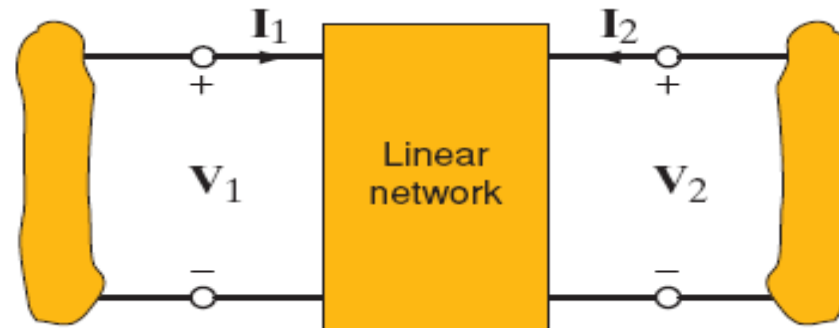
$$V_1 = 18I_1 + 6I_2$$

$$V_2 = 6I_1 + 9I_2$$

$$I_2 = -\frac{24}{33}[A]$$



Parâmetros Híbridos



- A rede NÃO contém fontes independentes.

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned}$$

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

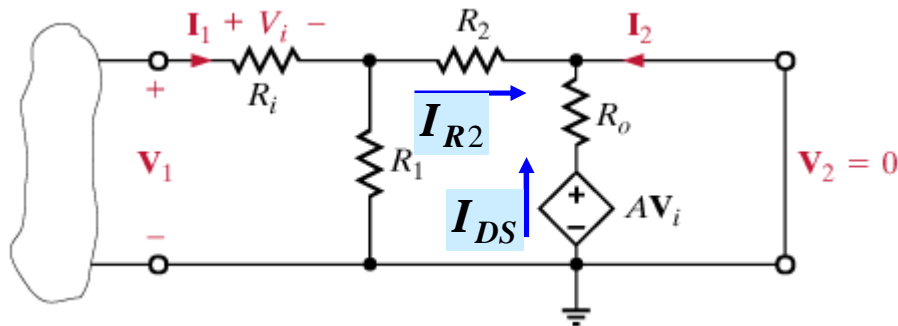
h_{11} = impedância de entrada de curto - circuito
 h_{12} = ganho inverso de tensão de circuito aberto
 h_{21} = ganho direto de corrente de curto - circuito
 h_{22} = admitância de saída de circuito aberto

- Estes parâmetros são muito comuns no modelamento de transistores.



Exemplo de Cálculo dos Parâmetros Híbridos

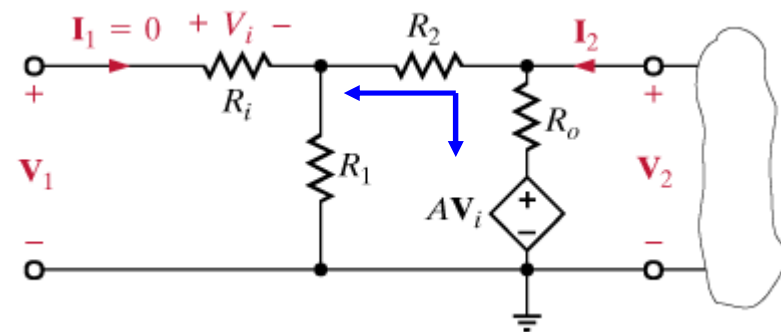
- Encontrar os parâmetros híbridos para o circuito abaixo.



$$V_1 = (R_i + R_1 \parallel R_2) I_1 \Rightarrow h_{11} = R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = -I_{R2} - I_{DS} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} I_1 - \frac{A R_i I_1}{R_o}$$

$$h_{21} = -\left(\frac{A R_i}{R_o} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$



$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2 \Rightarrow h_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

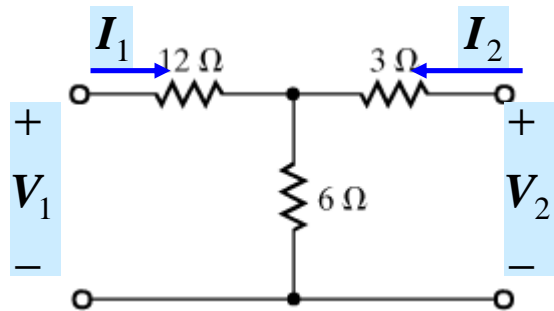
$$V_i = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{V_2}{R_o \parallel (R_1 + R_2)}$$

$$h_{22} = \frac{R_o + R_1 + R_2}{R_o (R_1 + R_2)}$$

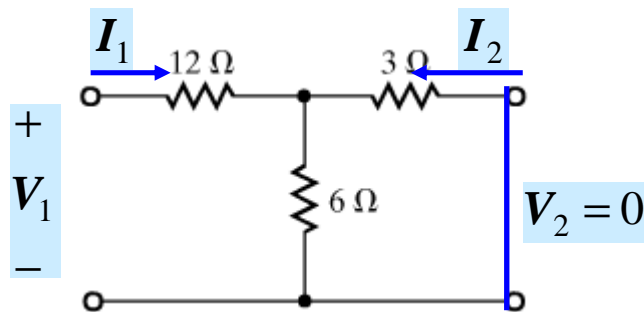


Exemplo de Cálculo dos Parâmetros Híbridos

- Encontrar os parâmetros híbridos para o circuito abaixo.

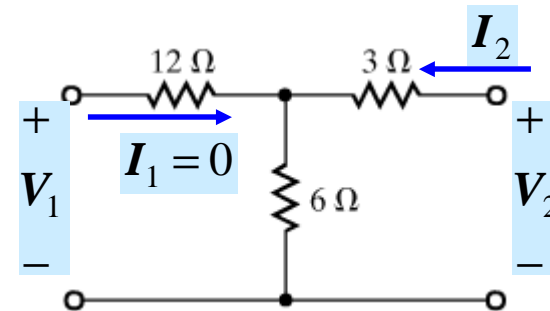


$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned}$$



$$V_1 = (12 + (6 \parallel 3)) I_1 \Rightarrow h_{11} = 14 \Omega$$

$$I_2 = -\frac{6}{3+6} I_1 \Rightarrow h_{21} = -\frac{2}{3}$$



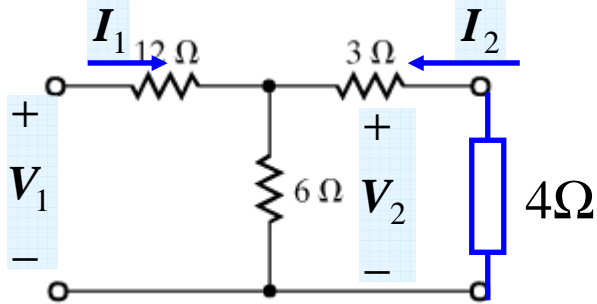
$$V_1 = \frac{6}{3+6} V_2 \Rightarrow h_{12} = \frac{2}{3}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{9} \Rightarrow h_{22} = \frac{1}{9} [S]$$



Exemplo de Cálculo dos Parâmetros Híbridos

- Determinar a impedância de entrada do quadripolo.



$$h_{11} = 14\Omega, \quad h_{12} = \frac{2}{3}$$

$$h_{21} = -\frac{2}{3} \quad h_{22} = \frac{1}{9}[S]$$

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

$$R_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

restrição na porta de saída : $V_2 = -4I_2$

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} (-4I_2)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} (-4I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{h_{21}}{1 + 4h_{22}} I_1$$

$$V_1 = \left(h_{11} - \frac{4h_{12}h_{21}}{1 + 4h_{22}} \right) I_1$$

$$R_{in} = 14 - \frac{4(2/3)(-2/3)}{1 + 4(1/9)} = 14 + \frac{16}{13} = 15.23\Omega$$

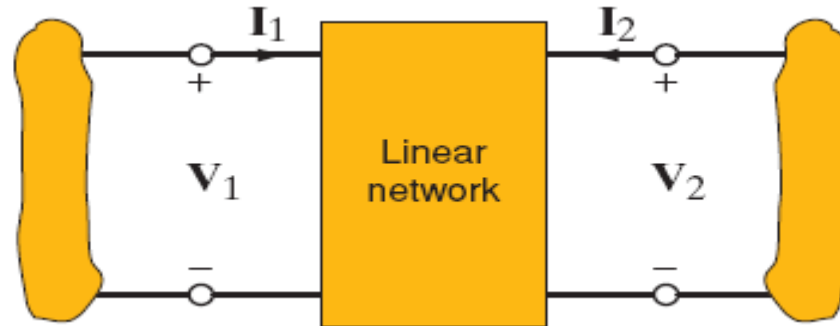
Verificação

$$R_{in} = 12 + 6 \parallel 7 = 12 + \frac{42}{13}\Omega$$



Parâmetros de Transmissão

□ Parâmetros $ABCD$



□ A rede NÃO contém fontes independentes.

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned}$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$B = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad D = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

A = relação de tensão de circuito aberto

B = negativo de transimpedância de curto - circuito

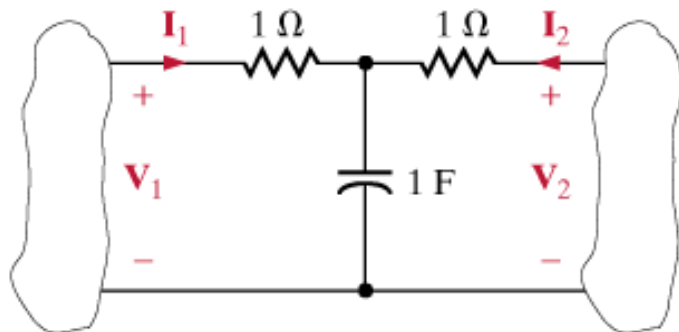
C = transadmitância de circuito aberto

D = negativo da relação de curto - circuito



Exemplo de Cálculo dos Parâmetros de Transmissão

- Determinar os parâmetros de transmissão.



qdo $I_2 = 0$

$$V_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega}} V_1 \Rightarrow A = 1 + j\omega$$

$$V_2 = \frac{1}{j\omega} I_1 \Rightarrow \frac{I_1}{V_2} = C = j\omega$$

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$B = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$D = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

qdo $V_2 = 0$

$$I_2 = - \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega}} I_1 = - \frac{1}{1 + j\omega} I_1 \Rightarrow D = 1 + j\omega$$

$$V_1 = \left[1 + \left(1 \parallel \frac{1}{j\omega} \right) \right] I_1 = \left[\frac{2 + j\omega}{1 + j\omega} \right] [-(1 + j\omega)] I_2$$

$$B = 2 + j\omega$$

