# Circuitos Elétricos 2

# Circuitos Elétricos Aplicados

***Prof. Dr.-Ing. João Paulo C. Lustosa da Costa***
Universidade de Brasília (UnB)
Departamento de Engenharia Elétrica (ENE)
**Laboratório de Processamento de Sinais em Arranjos**
Caixa Postal 4386
CEP 70.919-970, Brasília - DF

Homepage: http://www.pgea.unb.br/~lasp

# Resposta em Regime Estacionário de uma Rede

1. Substitua o sinal periódico por sua série de Fourier
2. Determine a resposta em regime estacionário de cada harmônico
3. Some as respostas em regime estacionário de cada harmônico

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = |H(j\omega)|\angle\phi(\omega)^{\circ}$$

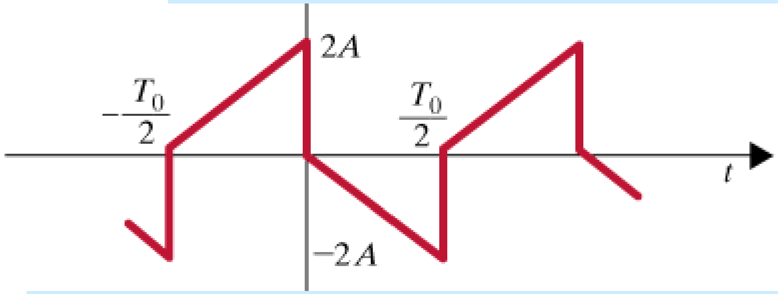
$$\longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow$$

$$|c|e^{j(\omega_1 t+\theta)} \longrightarrow |c||H(j\omega_1)|e^{j(\omega_1 t+\theta+\phi(\omega_1))}$$

$$|D|\cos(\omega_1 t+\theta) \longrightarrow |D||H(j\omega_1)|\cos(\omega_1 t+\theta+\phi(\omega_1))$$

# Exemplo de Resposta em Regime Estacionário de uma Rede (1)

$$v(t):\ A = 5,\ T_0 = \pi, wo = 2\pi/\pi = 2$$

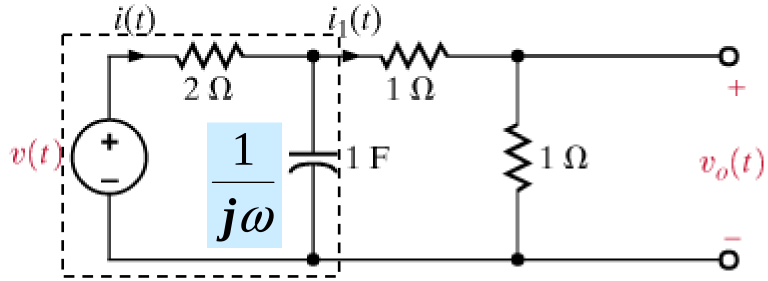



$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\ \text{ímpar}}}^{\infty} \left( \frac{20}{n\pi} \sin 2nt - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos 2nt \right)$$

$$D_1\angle\theta_1 = -\frac{40}{\pi^2} - j\frac{20}{\pi} = 7.5\angle -122^\circ$$

$$D_3 = -\frac{40}{9\pi^2} - j\frac{20}{3\pi} = 2.2\angle -102^\circ$$

$$D_5\angle\theta_5 = 1.3\angle -97^\circ, D_7\angle\theta_7 = 0.92\angle -95^\circ$$




$$V_{th} = \frac{1}{1+2j\omega} V(j\omega)$$

$$Z_{th} = 2//\frac{1}{j\omega} = \frac{2}{2j\omega+1}$$

$$V_o(j\omega) = \frac{1}{2+Z_{th}} V_{th}(j\omega)$$

$$V_o(j\omega) = \frac{1}{2+\frac{2}{2j\omega+1}} \frac{1}{1+2j\omega} V(j\omega)$$

$$\boxed{V_o(j\omega) = \frac{1}{4+4j\omega} V(j\omega)}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_o t + \theta_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[D_n\angle\theta_n e^{jn\omega_o t}\right]$$

# Exemplo de Resposta em Regime Estacionário de uma Rede (2)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_o t + \theta_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[D_n \angle\theta_n e^{jn\omega_o t}\right]$$

$$v\ (t) = 7.5\cos(2t - 122^0) + 2.2\cos(6t - 102^0) + 1.3\cos(10t - 97^0) + 0.91\cos(14t - 95^0) + \ldots$$

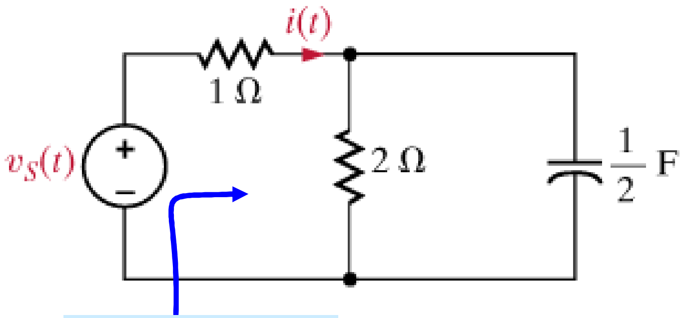
$$v_o(w_0) = \frac{7.5\angle -122^0}{4 + j8} = 0.84\angle -185.4^0 \qquad v_o(3w_0) = \frac{2.2\angle -102^0}{4 + j24} = 0.09\angle -182.5^0$$

$$v_o(5w_0) = \frac{1.3\angle -97^0}{4 + j40} = 0.03\angle -181.6^0 \qquad v_o(7w_0) = \frac{0.9\angle -95^0}{4 + j56} = 0.017\angle -181^0$$

$$v_o(t) = 0.84\cos(2t - 185.4^0) + 0.09\cos(6t - 182.5^0) + 0.03\cos(10t - 181.5^0) + 0.017\cos(14t - 181^0)\ldots$$

# Exemplo de Resposta em Regime Estacionário de uma Rede (3)

- Determine a expressão p/ corrente *i(t)* no regime estacionário




$$Z = 1 + 2 \| \frac{2}{j\omega}$$

$$v_S(t) = \frac{20}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nt$$

$$D_0 = \frac{20}{\pi};\ \ D_n = \frac{40}{\pi(4n^2-1)} \angle 180°,\ n \geq 1;\ \omega_n = 2n$$

$$Z(j\omega) = 1 + \frac{\frac{4}{j\omega}}{2 + \frac{2}{j\omega}} = 1 + \frac{4}{2 + j2\omega} = \frac{6 + j2\omega}{2 + j2\omega} = \frac{3 + j\omega}{1 + j\omega}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{3 + j\omega}$$

$$I(j\omega) = \frac{V_S(j\omega)}{Z(j\omega)} = Y(j\omega) V_S(j\omega)$$

# Exemplo de Resposta em Regime Estacionário de uma Rede (4)

- Determine a expressão p/ corrente *i(t)* no regime estacionário

$$I(j\omega)=\frac{V_S(j\omega)}{Z(j\omega)}=Y(j\omega)V_S(j\omega)$$

$$Y(j\omega)=\frac{1+j\omega}{3+j\omega}$$

$$I(j2n)=Y(j2n)D_n=\frac{1+j2n}{3+j2n}D_n \quad \text{fasor p/ n-ésimo harmônico}$$

$$Y(0)=\frac{1}{3}$$

$$Y(j2n)=\sqrt{\frac{1+4n^2}{9+4n^2}}(\angle\tan^{-1}2n-\angle\tan^{-1}(2n/3))$$

$$i(t)=Y(0)D_0+\sum_{n=1}^{\infty}|Y_n||D_n|\cos(2nt+\angle Y_n)$$

# Potência Média (1)

- Numa rede com fontes periódicas (de mesmo período), a tensão e a corrente no elemento são da mesma forma

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn})$$

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in})$$

- Definição de potência média: $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_o}^{t_o+T} v(t)i(t)dt$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}$$

$$v(t)i(t) = V_{dc}I_{dc} + \cancel{V_{dc}\sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in})} + \cancel{I_{dc}\sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn})}$$

$$+ \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} V_{n_1} I_{n_2} \cos(n_1\omega_0 t - \theta_{vn_1})\cos(n_2\omega_0 t - \theta_{in_2})$$

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} V_{n_1} I_{n_2} \cos(n_1\omega_0 t - \theta_{vn_1})\cos(n\omega_0 t - \theta_{in_2}) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{V_{n1}I_{n2}}{2}\left[\begin{array}{l} \cancel{\cos((n_1 + n_2)\omega_0 t - (\theta_{vn_1} + \theta_{in_2}))} \\ \cancel{+\cos((n_1 - n_2)\omega_0 t - (\theta_{vn_1} - \theta_{in_2}))} \end{array}\right]$$

# Potência Média (2)

- Logo a potência média é dada por:

$$\textbf{Potência Média } P = V_{dc} I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{vn} - \theta_{in})$$

# Exemplo de Cálculo de Potência Média (1)

- Determine a potência média

$$v(t) = 64 + 36\cos(377t + 60°) - 24\underline{\cos(7}54t + 102°)[V]$$

$$i(t) = 1.8\cos(377t + 45°) + 1.2\cos(754t + 100°)[A]$$

$$-\cos\alpha = \cos(\alpha - 180°)$$

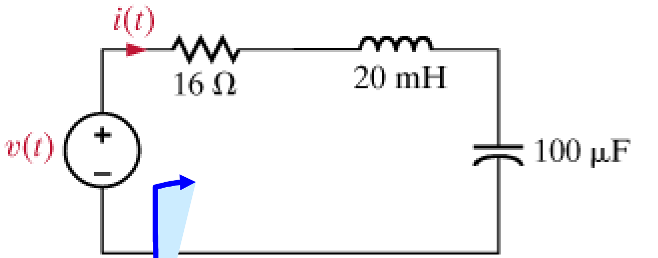
$$\textbf{Potência Média} \quad P = V_{dc} I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{vn} - \theta_{in})$$

$$P = 64 * 0 + 0.5(36 \times 1.8\cos(15°) + 24 \times 1.2\cos(102° - 180° - 100°))$$

$$P = \frac{62.59 - 28.78}{2} = 16.91[W]$$

# Exemplo de Cálculo de Potência Média (1)

- Determine a corrente, *i(t)*, e a potência média absorvida pela rede




$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = 42 + 16\cos(377\boldsymbol{t} + 30°) + 12\cos(754\boldsymbol{t} - 20°)[\boldsymbol{V}]$$

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{j}\omega) = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{jL}\omega + \frac{1}{\boldsymbol{jC}\omega} \qquad \boldsymbol{I}(\boldsymbol{j}\omega) = \frac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{j}\omega)}{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{j}\omega)}$$

$$\omega = 377$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{j}377) = 16\angle 30°,$$

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{j}377) = 16 + \boldsymbol{j}0.020\times 377 - \boldsymbol{j}\frac{1}{10^{-4}377}$$

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{j}377) = \frac{16\angle 30°}{16 + \boldsymbol{j}7.54 - \boldsymbol{j}26.53} = 0.64\angle 79.88°$$

# Exemplo de Cálculo de Potência Média (2)

- Determine a corrente, *i(t)*, e a potência média absorvida pela rede

$$\omega = 754$$

$$V(j754) = 12\angle -20°,$$

$$Z(j754) = 16 + j0.020 \times 754 - j\frac{1}{10^{-4} \times 754}$$

$$I(j754) = \frac{12\angle -20°}{16 + j15.08 - j13.26} = 0.75\angle -26.49°$$

$$\omega = 0$$

capacitor é um circuito aberto $(Z = \infty)$

$$I(j0) = 0$$

$$i(t) = 0.64\cos(377t + 79.88°) + 0.75\cos(754t - 26.49°)$$

Potência média $P = V_{dc}I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{vn} - \theta_{in})$

$$P = 42(0) + \frac{16 \times 0.64\cos(-49.88°) + 12 \times 0.75\cos(6.49°)}{2}$$

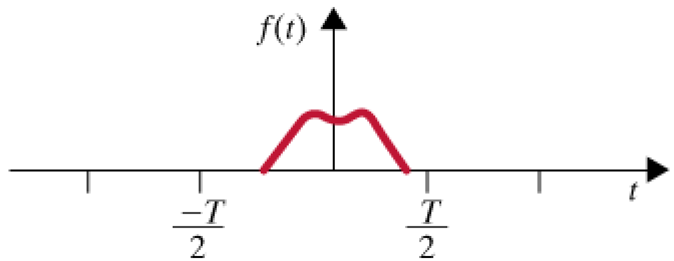
# Transformada de Fourier (1)

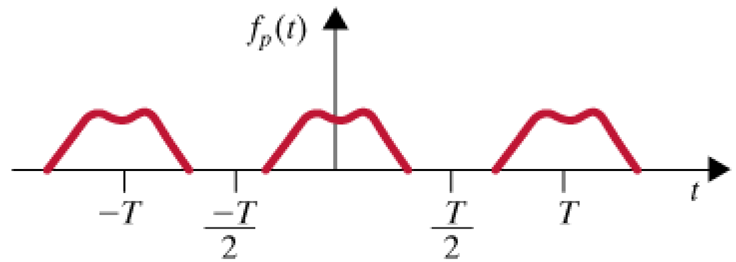
- Definições:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)] \qquad f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

- Visão da Transformada de Fourier:




$\Rightarrow$ uma função periódica pode ser vista como uma função de período infinito

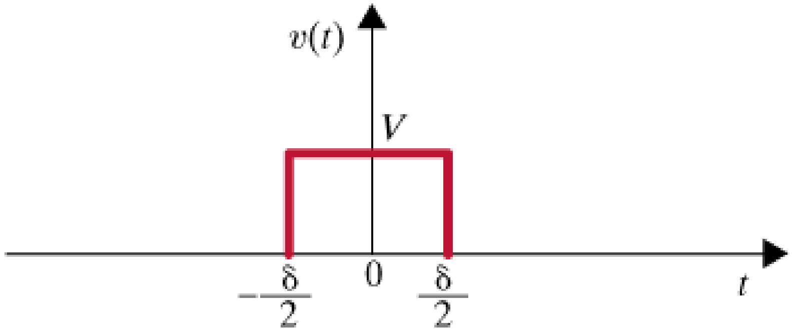
$$f_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \qquad f_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\frac{1}{T} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\frac{2\pi}{T}=\Delta\omega \qquad n\Delta\omega \approx \omega_n \qquad T\rightarrow\infty$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}dt \qquad c_n T=\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt$$

# Exemplo da Transformada de Fourier (1)

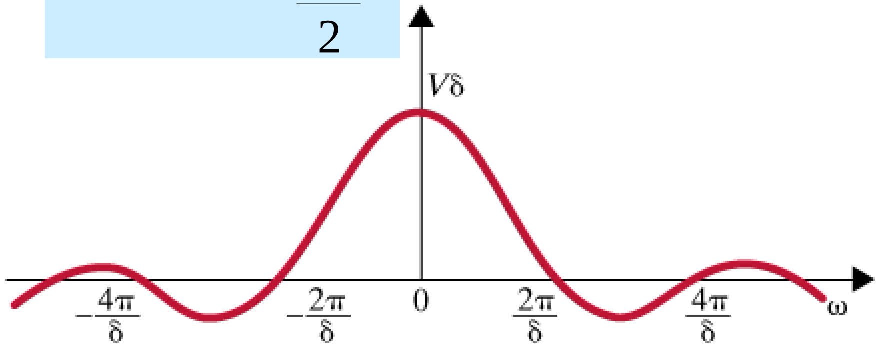
- Determine a transformada de Fourier:




$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = V \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{-j\omega t} dt$$

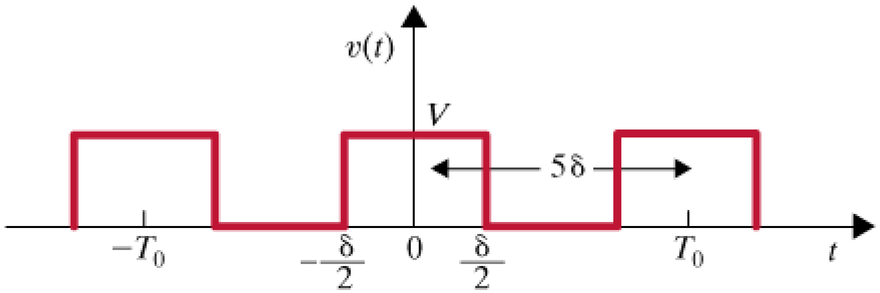
$$V(\omega) = V\left[-\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\right]_{-\delta/2}^{\delta/2} = V \frac{e^{j\omega\delta/2} - e^{-j\omega\delta/2}}{j\omega}$$

$$V(\omega) = V\delta \frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}}$$

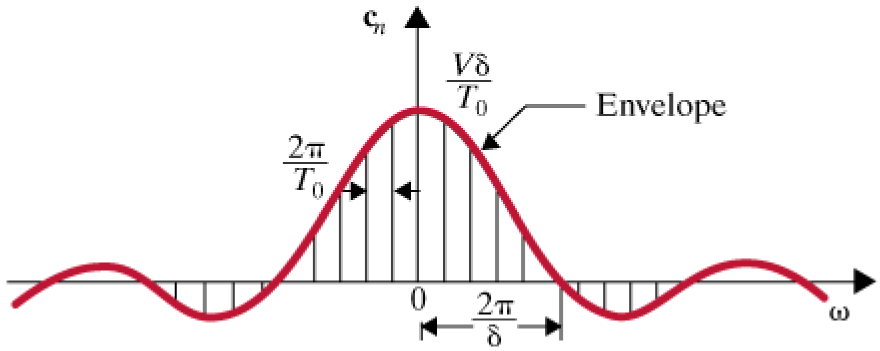


# Exemplo da Transformada de Fourier (2)

- Determine a transformada de Fourier:
  - ⇒ Comparando com o espectro de uma função periódica relacionada




$$c_n = \frac{V\delta}{T_0}\frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}}$$




**Espectro p/ $T_0 = 5\delta$**

# Exemplo da Transformada de Fourier (3)

- Determine a transformada de Fourier do impulso unitário:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$$

**Propriedade da amostragem do impulso**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a)$$

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega a}$$

- Determine a transformada de Fourier de $f(t) = e^{j\omega_o t}$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

**Considere** $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ **e ache a função correspondente no domínio do tempo**

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega\text{-}\omega_0)$$

# Exemplo da Transformada de Fourier (4)

- Determine $F(\omega) = \mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$

$$f(t) = \sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \Rightarrow F(\omega) = \frac{2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0)}{2j}$$

$$F(\omega) = j\pi\left[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right]$$

# Tabela de Pares da Transformada de Fourier

| $f(t)$ | $F(\omega)$ |
|---|---|
| $\delta(t - a)$ | $e^{-j\omega a}$ |
| $A$ | $2\pi A\delta(\omega)$ |
| $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ |
| $\cos\omega_0 t$ | $\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega$ - |
| $\sin\omega_0 t$ | $j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta($ |
| $e^{-at}u(t), a > 0$ | $\dfrac{1}{a + j\omega}$ |
| $e^{-\alpha\|t\|}, a > 0$ | $\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$ |
| $e^{-at}\cos\omega_0 t u(t), a > 0$ | $\dfrac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$ |
| $e^{-at}\sin\omega_0 t u(t), a > 0$ | $\dfrac{\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$ |

# Tabela de Propriedades da Transformada de Fourier

| $f(t)$ | $F(\omega)$ | Property |
|---|---|---|
| $Af(t)$ | $A\mathbf{F}(\omega)$ | Linearity |
| $f_1(t) \pm f_2(t)$ | $\mathbf{F}_1(\omega) \pm \mathbf{F}_2(\omega)$ | |
| $f(at)$ | $\frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a > 0$ | Time-scaling |
| $f(t - t_0)$ | $e^{-j\omega t_0}\mathbf{F}(\omega)$ | Time-shifting |
| $e^{j\omega t_0} f(t)$ | $\mathbf{F}(\omega - \omega_0)$ | Modulation |
| $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ | $(j\omega)^n \mathbf{F}(\omega)$ | |
| $t^n f(t)$ | $(j)^n \frac{d^n \mathbf{F}(\omega)}{d\omega^n}$ | Differentiation |
| $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x)\, dx$ | $\mathbf{F}_1(\omega)\mathbf{F}_2(\omega)$ | |
| | | Convolution |
| $f_1(t) f_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_1(x)\mathbf{F}_2(\omega - x)\, dx$ | |

# Propriedade da Convolução

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \right] e^{-j\omega t} dt$$

**Mudando ordem da integração**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) e^{-j\omega t} dt \right] dx$$

**Mudando variáveis de integração**

$$u = t - x \Rightarrow t = u + x$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(u) e^{-j\omega(u+x)} du \right] dx$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(u) e^{-j\omega u} e^{-j\omega x} du \right] dx$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega x} dx \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega u} du \right]$$

$$F(\omega) = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

# Aplicação da Convolução

$v_i(t)$ → $h(t)$ → $v_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x)v_i(x)dx$

**A saída (resposta) de uma rede pode ser computada a partir da transformada de Fourier**

$\mathbf{V}_i(\omega)$ → $\mathbf{H}(\omega)$ → $\mathbf{V}_o(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\,\mathbf{V}_i(\omega)$

- Exemplo
  - ⇒ Use a transformada de Fourier para determinar $v_0(t)$

$v_i(t)$ → $h(t)$ → $v_o(t)$

$v_i(t) = e^{-t}u(t)$

$h(t) = e^{-2t}u(t)$

**(e todas as condições iniciais são zero)**

**Da tabela de transfomadas**

| | |
|---|---|
| $e^{-at}u(t), a > 0$ | $\dfrac{1}{a + j\omega}$ |

$$V_o(\omega) = H(\omega)V_i(\omega)$$
$$= \frac{1}{j\omega+2}\,\frac{1}{j\omega+1}$$

**Use frações parciais**

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+1}$$

$$A_1 = (s+2)V_o(s)\,|_{s=-2} = -1$$
$$A_2 = (s+1)V_o(s)\,|_{s=-1} = 1$$

$$V_o(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{j\omega+2}$$
$$v_o(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

# Teorema de Parseval

- Considere f(t) uma tensão aplicada a um resistor de 1 Ω

$$p(t) = v(t)i(t) = |f(t)|^2$$

- Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$\Rightarrow$ por definição, o lado esquerdo é a energia do sinal

$$|f(t)|^2 = \text{potência (ou densidade de energia no tempo)}$$

$$|F(\omega)|^2 = \text{Densidade de energia no domínio da freqüência}$$

- Teorema de Parseval permite a determinação da energia de um sinal numa dada faixa de freqüência.
- Se a transformada de Fourier tem uma grande amplitude numa faixa de freqüência, então o sinal tem uma energia significante naquela faixa.
- E se a magnitude a transformada de Fourier é zero (ou muito pequena) então o sinal não tem energia naquela faixa.