Circuitos Elétricos 2

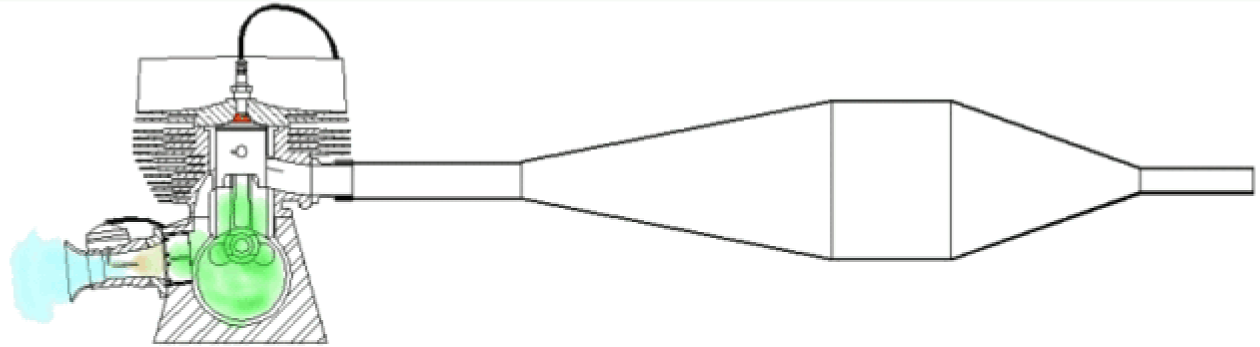
Circuitos Elétricos Aplicados

Prof. Dr.-Ing. João Paulo C. Lustosa da Costa
Universidade de Brasília (UnB)
Departamento de Engenharia Elétrica (ENE)
Laboratório de Processamento de Sinais em Arranjos
Caixa Postal 4386
CEP 70.919-970, Brasília - DF

Homepage: http://www.pgea.unb.br/~lasp

Circuitos Ressonantes (1)

- Ressonância:
  - ⇒ todo corpo possui uma freqüência natural própria
  - ⇒ ao se produzir vibrações na mesma freqüência da freqüênca natural, o corpo vai vibrar mais forte
- Em diversas áreas da ciência a ressonância é importante
  - ⇒ Motor de dois estágios com escapamento ressonante (Resonanzauspuff)

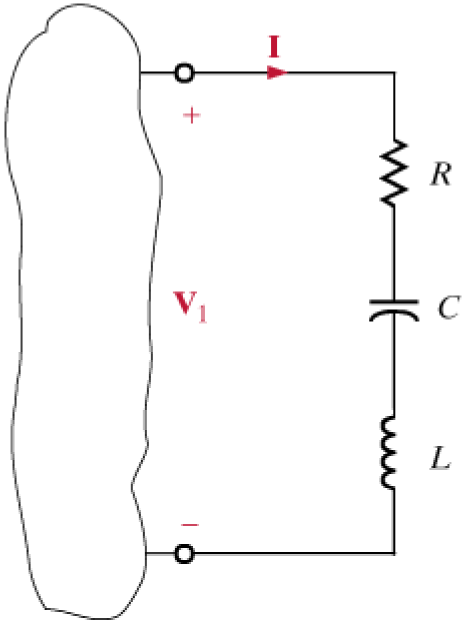


  - Fonte: http://de.wikipedia.org/wiki/Resonanzauspuff

  - ⇒ Mecânica, hidromecânica, acústica, engenharia elétrica, física atômica e física nuclear.

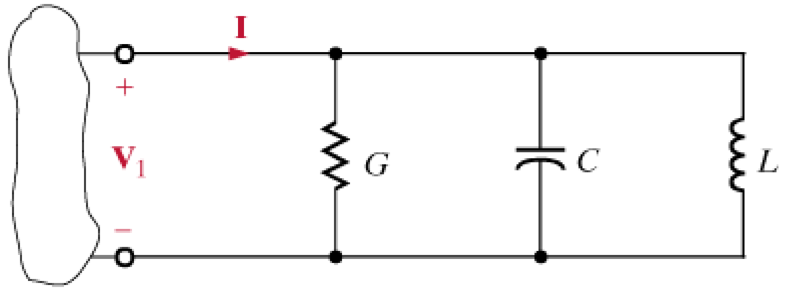
Circuitos Ressonantes (2)

- Circuitos ressonantes



Circuito RLC em série

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$



Circuito RLC em paralelo

$$Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

A reatância de cada circuito é zero quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\Rightarrow$ Na freqüência de ressonância, o circuito é puramente resistivo.

Propriedades dos Circuitos Ressonantes (1)

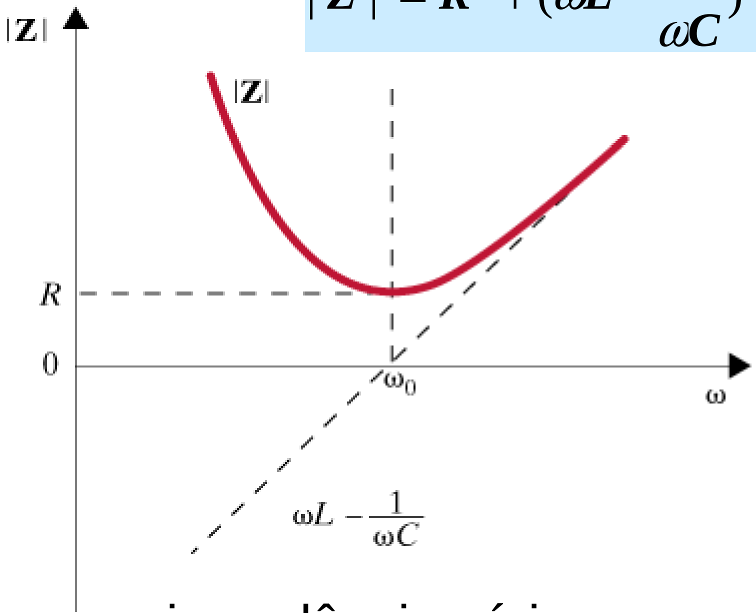
- Na ressonância, a impedância (série)/admitância (paralelo) é mínima

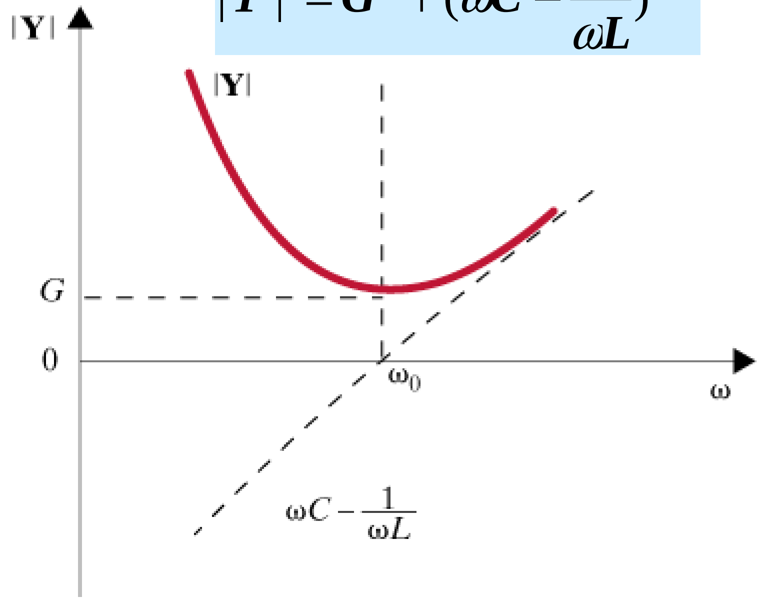
$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z|^2 = R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2$$

$$Y(j\omega) = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$|Y|^2 = G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2$$





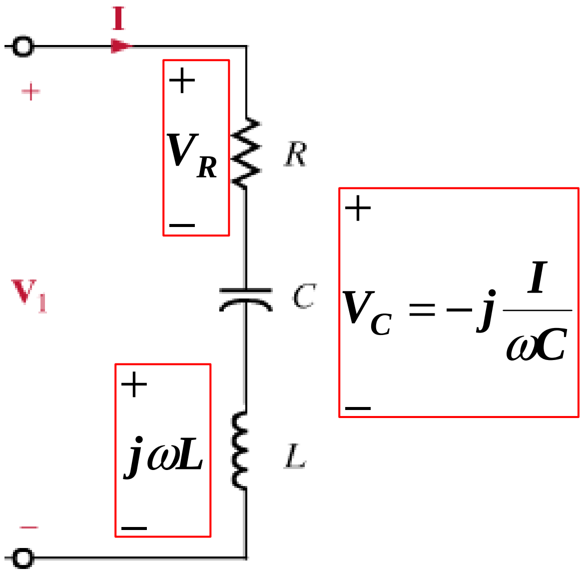
⇒ impedância série

- admitância paralelo

$$\text{Fator de qualidade: } Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$$

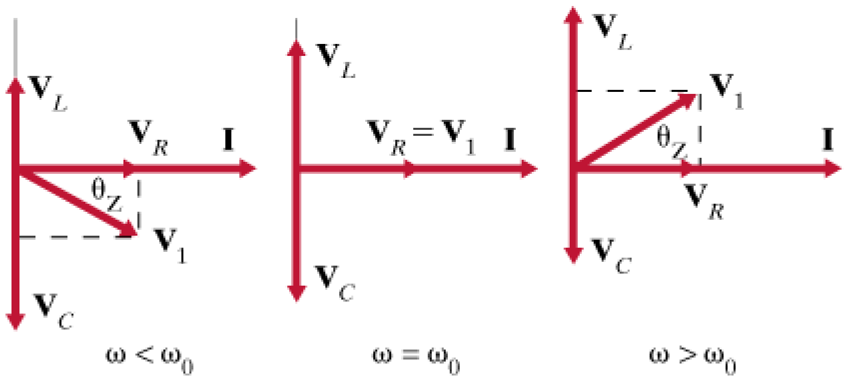
Propriedades dos Circuitos Ressonantes (2)

- O fator de potência é unitário



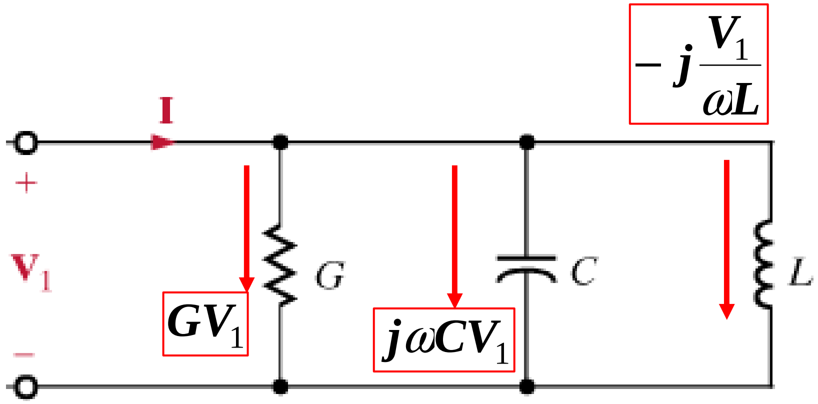
CIRCUITO	ABAIXO RESSONÂNCIA	ACIMA DA RESONÂNCIA
SÉRIE	CAPACITIVO	INDUTIVO

$\Rightarrow$ Diagrama fasorial



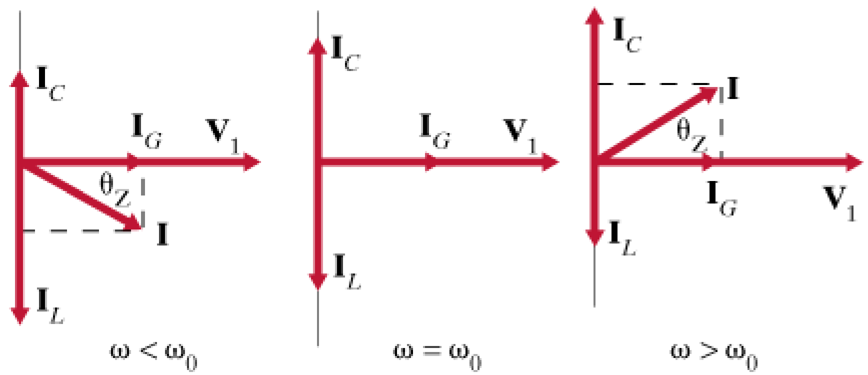
Propriedades dos Circuitos Ressonantes (3)

- O fator de potência é unitário



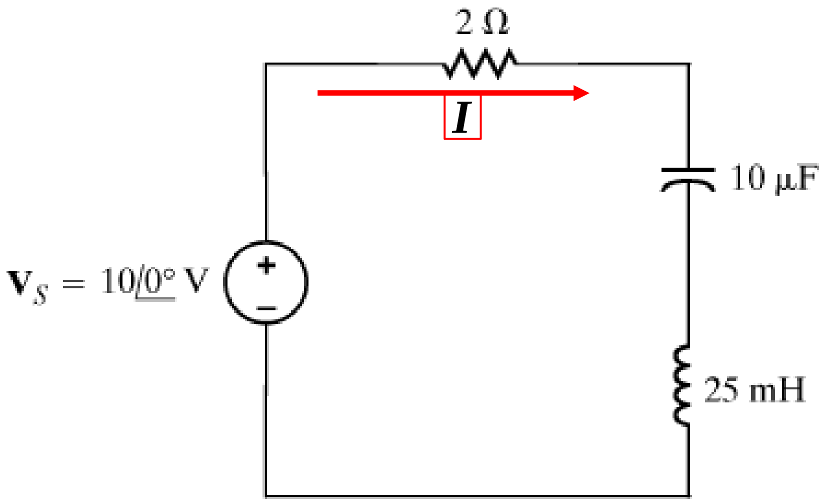
CIRCUITO	ABAIXO RESSONÂNCIA	ACIMA DA RESONÂNCIA
PARALELO	INDUTIVO	CAPACITIVO

⇒ Diagrama fasorial



Exemplo de Circuitos Ressonantes (1)

- Determinar a **freqüência de ressonância**, **tensão** em cada elemento **na ressonância** e o valor do **fator de qualidade**



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(25\times10^{-3}H)(10\times10^{-6}F)}} = 2000\,rad/s$$

Na ressonância, $Z = 2\Omega$

$$I = \frac{V_S}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{2} = 5A$$

$$\omega_0 L = (2\times10^3)(25\times10^{-3}) = 50\Omega$$

$$V_L = j\omega_0 L I = j50\times5 = 250\angle 90^\circ (V)$$

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L = 50\Omega$$

$$V_C = \frac{1}{j\omega_0 C} I = -j50\times5 = 250\angle -90^\circ$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{50}{2} = 25$$

Na ressonância

$$|V_L| = \omega_0 L \left|\frac{V_S}{R}\right| = Q|V_S|$$

$$|V_C| = Q|V_S|$$

Exemplo de Circuitos Ressonantes (2)

- Dado $L = 0,02H$ com um fator de qualidade 200, determine o capacitor necessário para formar um circuito ressonante em 1000 Hz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{LC}}} \Rightarrow 2\pi \times 1000 = \frac{1}{\sqrt{0.02\boldsymbol{C}}} \Rightarrow \boldsymbol{C} = 1.27\mu \boldsymbol{F}$$

$$\text{L com Q} = 200 \Rightarrow 200 = \frac{\omega_0 L}{R} \Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{2\pi \times 1000 \times 0.02}{200} = 1.59\Omega$$

O que acontece com o capacitor se o circuito é testado com uma tensão de 10 V?

Na ressonância

$$|V_L| = \omega_0 L \left|\frac{V_S}{R}\right| = Q|V_S|$$

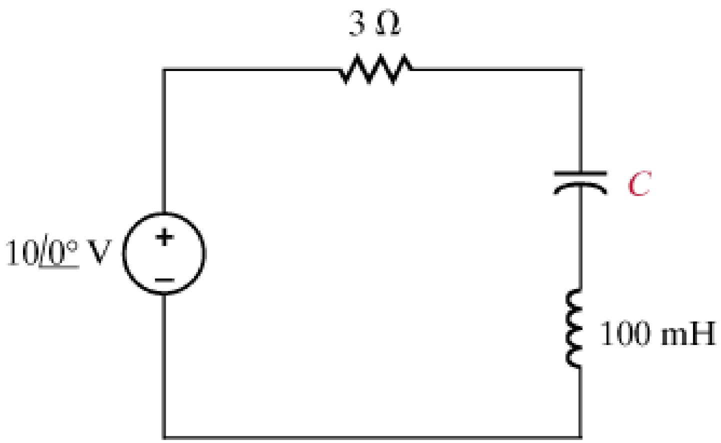
$$|V_C| = Q|V_S| \qquad \Rightarrow |\boldsymbol{V_C}| = 2000\boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{I} = \frac{10}{1.59} = 6.28\boldsymbol{A}$$

A potência reativa do capacitor é 12,56 kVA

Exemplo de Circuitos Ressonantes (3)

- Ache a **capacitância** para o circuito ficar em ressonância em 1800 rad/s, o fator ***Q*** e a **magnitude da tensão no capacitor**



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{LC}}} \qquad 1800 = \frac{1}{\sqrt{0.1(\boldsymbol{H})\times \boldsymbol{C}}} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \frac{1}{0.1\times 1800^2}$$

$$\boldsymbol{C} = 3.86\mu \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\omega_0 \boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}} \qquad \boldsymbol{Q} = \frac{1800\times 0.1}{3} = 60$$

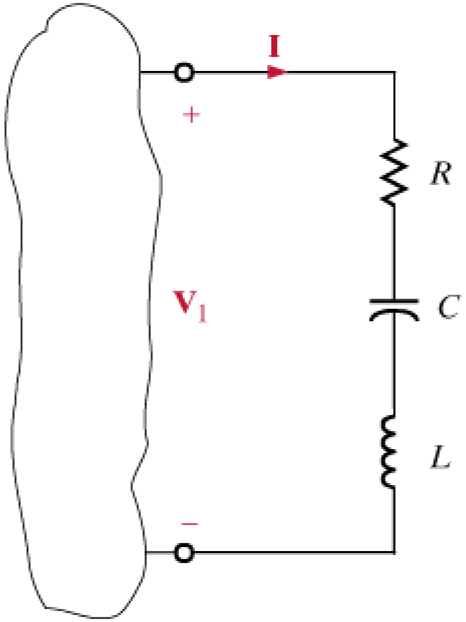
Na ressonância

$$|V_L| = \omega_0 L\left|\frac{V_S}{R}\right| = Q\,|V_S|$$

$$|V_C| = Q\,|V_S|$$

$$|\boldsymbol{V_C}| = 600\boldsymbol{V}$$

Ressonância para o circuito em série (1)



$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z|^2 = R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2$$

$$G_v = \frac{R}{Z}$$

$$G_v = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{Z(j\omega)}$$

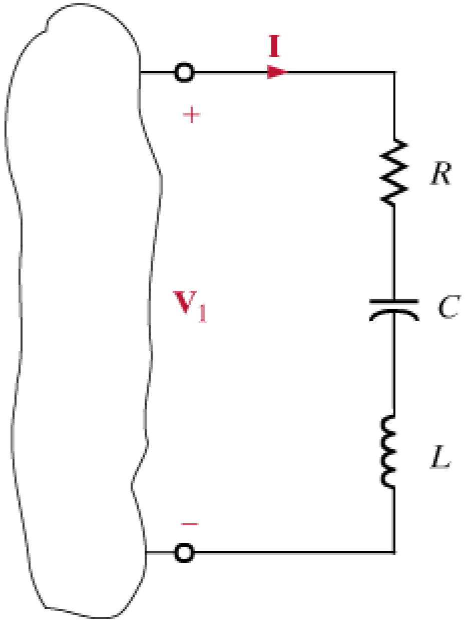
Na ressonância :

$$\omega_0 L = QR,\ \omega_0 C = \frac{1}{QR}$$

Ganho em tensão é

$$G_v = \frac{V_R}{V_1} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Ressonância para o circuito em série (2)

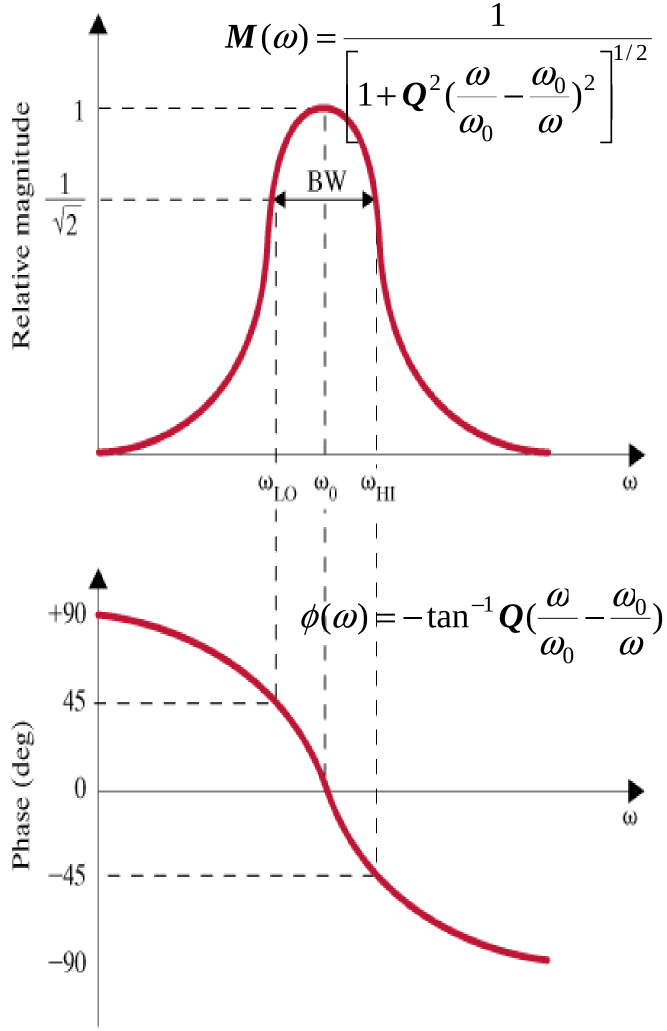


$$Z(j\omega) = R + j\frac{\omega}{\omega_0}QR - j\frac{\omega_0}{\omega}QR$$

$$= R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$$M(\omega) = |G_v|,\ \phi(\omega) = \angle G_v$$

Ressonância para o circuito em série (3)

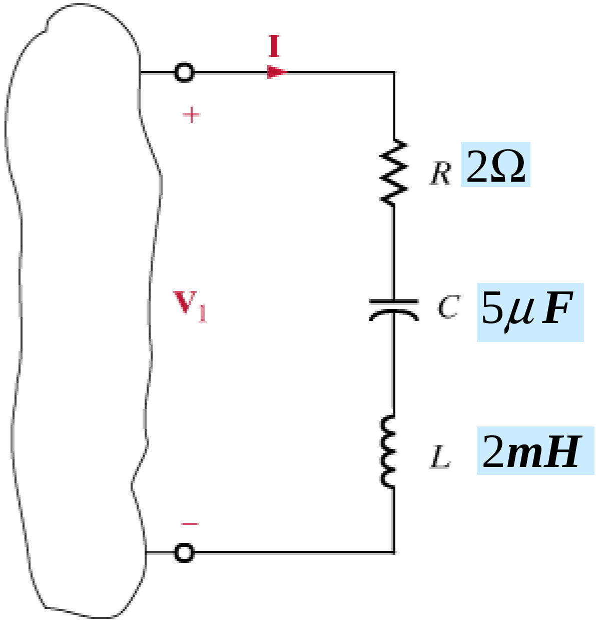


$$BW = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\omega_{HI/LO} = \omega_0 \left[\pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right]$$

Exemplo de aplicação de fator de qualidade (1)

- Determine a freqüência de ressonância, fator de qualidade e largura de banda quando R = 2 Ω e quando R = 0,2 Ω.



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \qquad BW = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(2\times10^{-3})(5\times10^{-6})}} = 10^4\, rad/s$$

R	Q
2	10
0.2	100

R	Q	BW(rad/s)
2	10	1000
0,2	100	100

$$Q = \frac{10000 \times 0.002}{R} \qquad BW = 10000/Q$$

Exemplo de aplicação de fator de qualidade (2)

- Dado um circuito RLC com as seguintes especificações: R = 4 Ω, ω_0 = 4000 rad/s e BW = 100 rad/s. Determine os valores de L e C.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \qquad BW = \frac{\omega_0}{Q}$$

1. Dada uma freq de ressonância e largura de faixa, determine Q.
2. Dado R, freqüência de ressonância e Q, determine L, C.

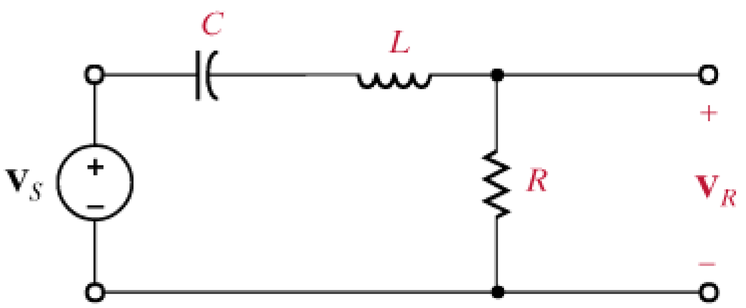
$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{4000}{100} = 40$$

$$L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{40 \times 4}{4000} = 0.040 H$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 RQ} = \frac{1}{4 \times 10^{-2} \times 16 \times 10^{6}} = 1.56 \times 10^{-6} F$$

Exemplo de aplicação de fator de qualidade (3)

- Dado um circuito RLC operando como filtro passa-baixa com a seguinte especificações: ω_0 = 1000 rad/s e BW = 100 rad/s.



$$G_v = \frac{R}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{Z(j\omega)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \qquad BW = \frac{\omega_0}{Q}$$

Estratégia:
1. Determinar Q
2. Usar freq. de ressonância e Q para encontrar duas equações com 3 incógnitas
3. Arbitrar um valor para uma das incógnitas

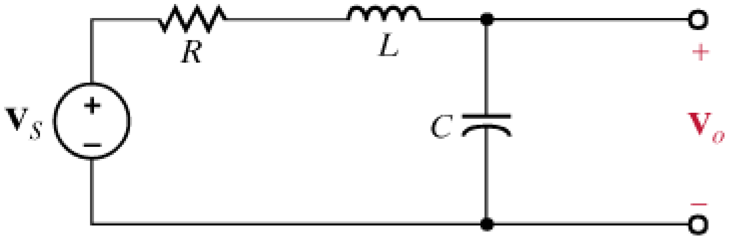
$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{1000}{100} = 10$$

Por exemplo $C = 1\mu F = 10^{-6} F$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow (10^3)^2 = \frac{1}{LC} \longrightarrow L = 1H$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \Rightarrow 10 = \frac{1000L}{R} \longrightarrow R = 100\Omega$$

Tensão no capacitor em circuito série RLC (1)



Na ressonância

$$|V_0| = Q\,|V_R|$$

Mas esta NÃO é a máxima tensão no capacitor
Vamos ver...

$$\left|\frac{\boldsymbol{V}_0}{\boldsymbol{V}_S}\right| = \left|\frac{\dfrac{1}{j\omega \boldsymbol{C}}}{\boldsymbol{R} + j\omega \boldsymbol{L} + \dfrac{1}{j\omega \boldsymbol{C}}}\right| = \left|\frac{1}{1-\omega^2 \boldsymbol{LC} + j\omega \boldsymbol{CR}}\right|$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{LC}}}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\omega_0 \boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{\omega_0 \boldsymbol{CR}}$$

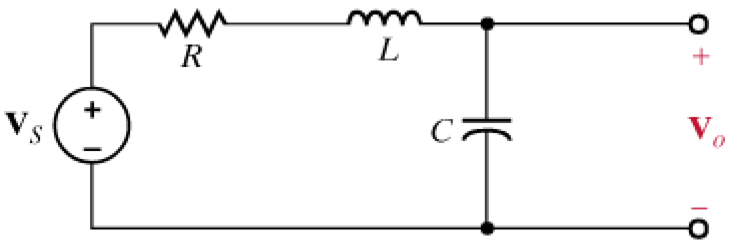
$$\boldsymbol{u} = \frac{\omega}{\omega_0};\ \boldsymbol{g} = \left|\frac{\boldsymbol{V}_0}{\boldsymbol{V}_S}\right|^2$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\left[(1-\boldsymbol{u}^2)^2 + \left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{Q}}\right)^2\right]}$$

$$\frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{u}} = 0 = \frac{2(1-\boldsymbol{u}^2)(-2\boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u}/\boldsymbol{Q})(1/\boldsymbol{Q})}{\left[(1-\boldsymbol{u}^2)^2 + \left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{Q}}\right)^2\right]^2}$$

$$\Rightarrow 2(1-\boldsymbol{u}^2) = \frac{1}{\boldsymbol{Q}^2}$$

Tensão no capacitor em circuito série RLC (2)



$$u_{max} = \frac{\omega_{max}}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad g_{max} = \frac{1}{\frac{1}{4Q^4} + \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}\right)} = \frac{Q^2}{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad |V_0| = \frac{Q|V_S|}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

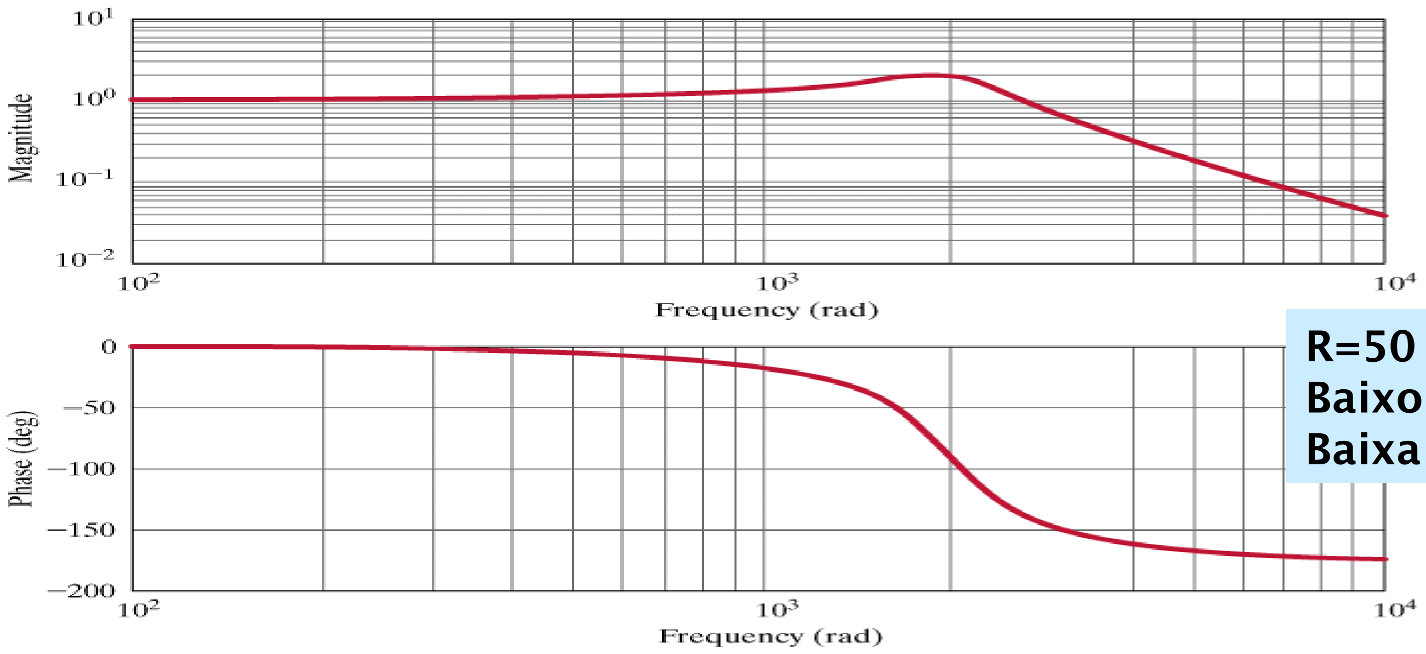
- Exemplo: Determine ω_0 e ω_{max} dado que L = 50 mH e C = 5 μF para os casos de R = 50 Ω e R = 1 Ω.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(5\times10^{-2})(5\times10^{-6})}} = 2000\, rad/s$$

$$Q = \frac{2000 \times 0.050}{R} \qquad \omega_{max} = 2000 \times \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

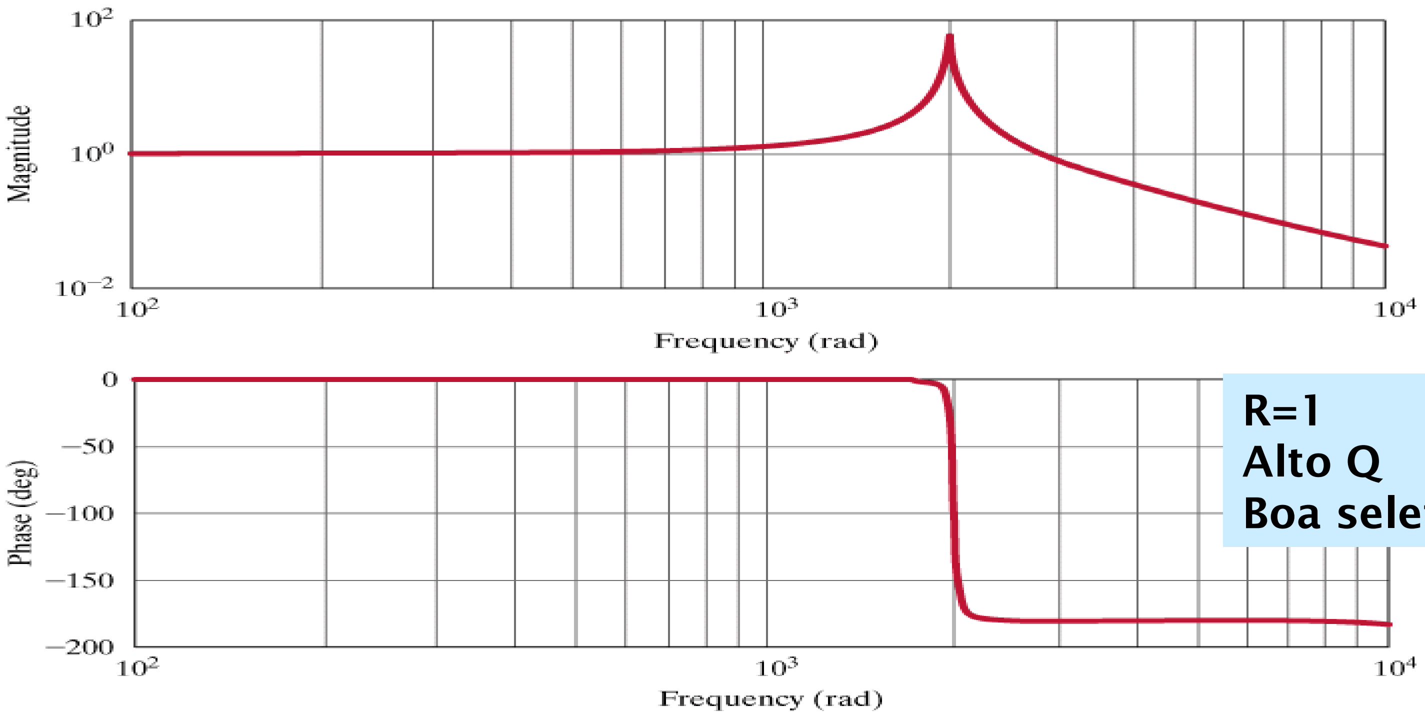
R	Q	Wmax
50	2	1871
1	100	2000

Tensão no capacitor em circuito série RLC (3)



R=50
Baixo Q
Baixa seletividade

Tensão no capacitor em circuito série RLC (4)



R=1
Alto Q
Boa seletividade

Circuito ressonante RLC em paralelo (1)

Impedância do circuito RLC em série

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z|^2 = R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2$$

Note equivalências

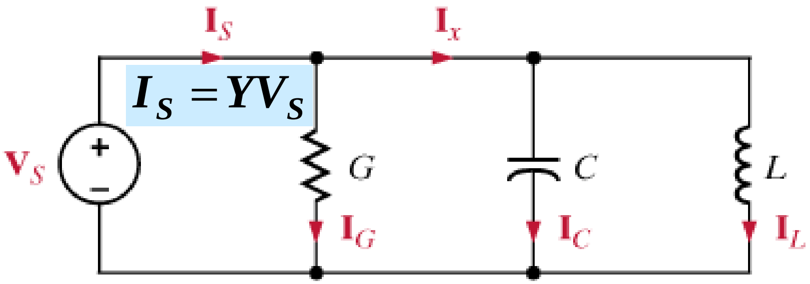
$R \leftrightarrow G, L \leftrightarrow C, C \leftrightarrow L$

$Z \leftrightarrow Y, V \leftrightarrow I$

Admitância em paralelo RLC

$$Y(j\omega) = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$|Y|^2 = G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2$$



RLC em série

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

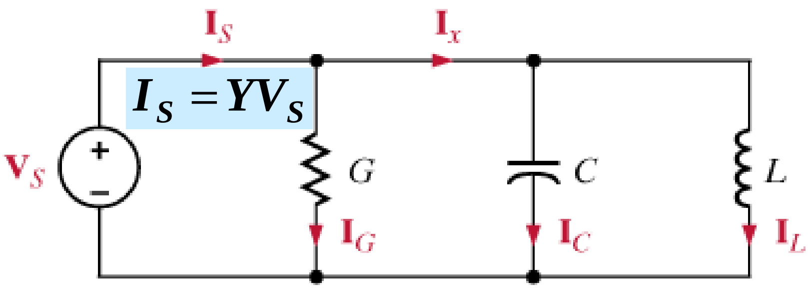
RLC em paralelo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG}$$

RLC série $BW = \frac{\omega_0}{Q}$

RLC paralelo $BW = \frac{\omega_0}{Q}$

Circuito ressonante RLC em paralelo (2)



$$\boldsymbol{I_S = YV_S}$$

$$\boldsymbol{I_G = GV_S = \frac{G}{Y} I_S}$$

$$\boldsymbol{I_C = j\omega C V_S = \frac{j\omega C}{Y} I_S}$$

$$\boldsymbol{I_L = \frac{1}{j\omega L} V_S = \frac{1/j\omega L}{Y} I_S}$$

Na ressonância

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow Y = G$$

$$I_G = I_S$$

$$I_C = -I_L$$

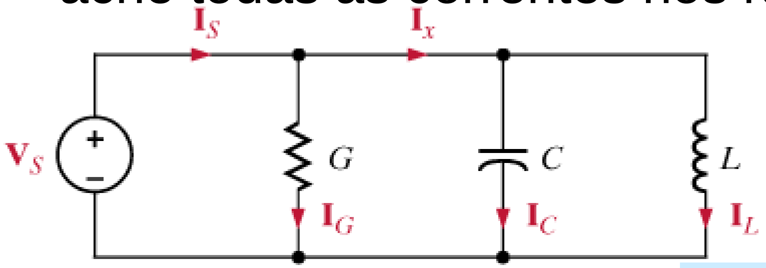
$$|I_C| = \frac{\omega_0 C}{G} |I_S|$$

$$|I_L| = \frac{1}{\omega_0 L G} |I_S|$$

$$\boldsymbol{= Q\,|I_S|}$$

Circuito ressonante RLC em paralelo (3)

- Assumindo que a fonte opera na freqüência de ressonância da rede, ache todas as correntes nos ramos.



$$\boldsymbol{I_G} = 0.01 \times 120\angle 0° = 1.2\angle 0°(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I_S}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{LC}}} = \frac{1}{\sqrt{0.120 \times (6 \times 10^{-4})}} = 117.85\,\boldsymbol{rad/s}$$

$$\boldsymbol{V_S} = 120\angle 0°, \quad \boldsymbol{G} = 0.01\boldsymbol{S}$$
$$\boldsymbol{C} = 600\mu\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{L} = 120\boldsymbol{mH}$$

$$\boldsymbol{I_C} = (1\angle 90°) \times (117.85) \times (600 \times 10^{-6}) \times 120\angle 0° = 8.49\angle 90°(\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{I_L} = 8.49\angle -90°(\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{I_x} = \underline{\qquad\qquad}$$

Na ressonância

$$\boldsymbol{I_G} = \boldsymbol{GV_S} = \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{I_S}$$

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow Y = G$$

$$\boldsymbol{I_C} = \boldsymbol{j\omega CV_S} = \frac{\boldsymbol{j\omega C}}{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{I_S}$$

$$I_G = I_S$$

$$I_C = -I_L$$

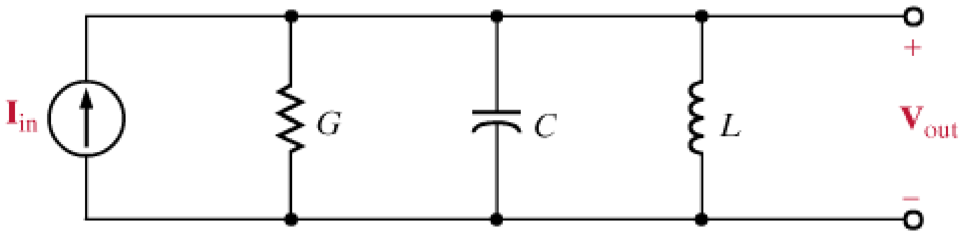
$$\boldsymbol{I_L} = \frac{1}{\boldsymbol{j\omega L}}\boldsymbol{V_S} = \frac{1/\boldsymbol{j\omega L}}{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{I_S}$$

$$|I_C| = \frac{\omega_0 C}{G}|I_S| \quad = \boldsymbol{Q}|\boldsymbol{I_S}|$$

$$|I_L| = \frac{1}{\omega_0 LG}|I_S|$$

Exemplo de circuitos ressonantes RLC em paralelo (1)

- Derive expressões para a freqüência de ressonância, freqüência de meia potência, BW e Q.



$$\omega_h = \mp \frac{G}{2C} + \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$BW = \omega_{HI} - \omega_{LO} = \frac{G}{C}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$V_{out} = \frac{I_{in}}{Y_T} \Rightarrow H = \frac{V_{out}}{I_{in}} = \frac{1}{Y_T}$$

$$Y_T = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$|H| = \left|\frac{1}{G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}\right| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

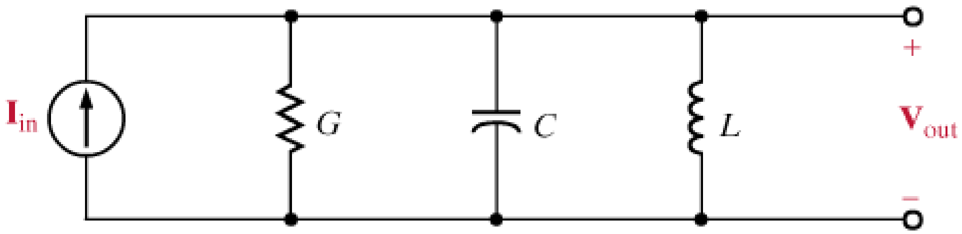
Freqüência de ressonância : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$|H_{max}| = \frac{1}{G} = R$$

Freqüência de meia potência $\Rightarrow |H(j\omega_h)|^2 = 0.5\,|H|^2_{max}$

Exemplo de circuitos ressonantes RLC em paralelo (2)

- Derive expressões para a freqüência de ressonância, freqüência de meia potência, BW e Q.



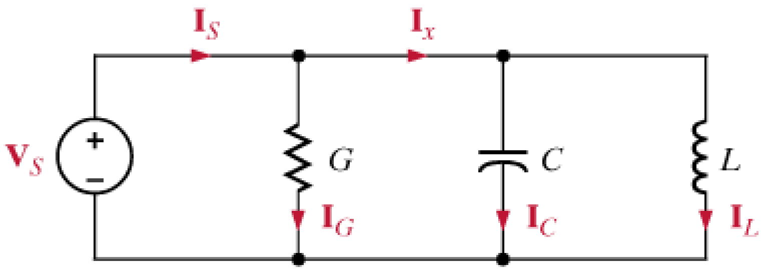
$$\text{Freqüência de ressonância}: \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad |\boldsymbol{H}_{\max}| = \frac{1}{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{R}$$

$$\text{Freqüência de meia potência} \Rightarrow |H(j\omega_h)|^2 = 0.5\,|H|^2_{\max}$$

$$\boldsymbol{G}^2 + \left(\omega_h \boldsymbol{C} - \frac{1}{\omega_h \boldsymbol{L}}\right)^2 = 2\boldsymbol{G}^2 \qquad \Rightarrow \omega_h \boldsymbol{C} - \frac{1}{\omega_h \boldsymbol{L}} = \pm \boldsymbol{G}$$

Exemplo de circuitos ressonantes RLC em paralelo (3)

- Determine a freqüência de ressonância, fator Q e BW para o circuito abaixo



$$R = 2k\Omega, L = 20mH, C = 150\mu F$$

RLC em paralelo

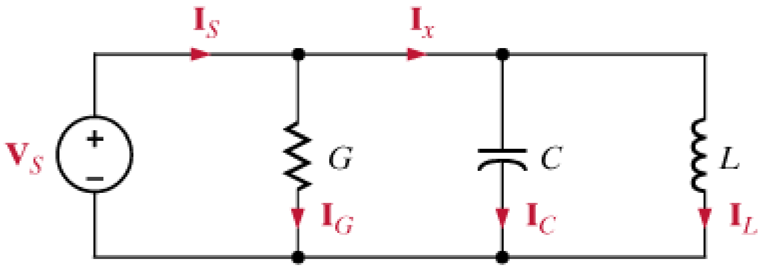
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G} \qquad BW = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(20\times10^{-3})(150\times10^{-6})}} = 577 rad/s$$

$$Q = \frac{577\times150\times10^{-6}}{(1/2000)} = 173$$

$$BW = \frac{577}{173} = 3.33 rad/s$$

Exemplo de circuitos ressonantes RLC em paralelo (4)



$R = 6k\Omega, BW = 1000 rad/s, Q = 120$

Determine L, C, ω_0

RLC em paralelo

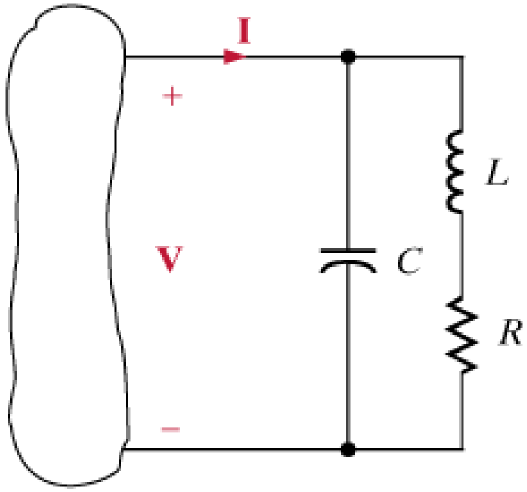
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} \qquad BW = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\omega_0 = Q \times BW = 120 \times 1000 = 1.2 \times 10^5 rad/s$$

$$C = \frac{Q}{R\omega_0} = \frac{120}{6000 \times 1.2 \times 10^5} = 0.167 \mu F$$

$$L = \frac{R}{Q\omega_0} = \frac{6000}{120 \times 1.2 \times 10^5} = 417 \mu H$$

Exemplo de circuitos ressonantes (1)



$$Y(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \times \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L}$$

$$Y(j\omega) = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

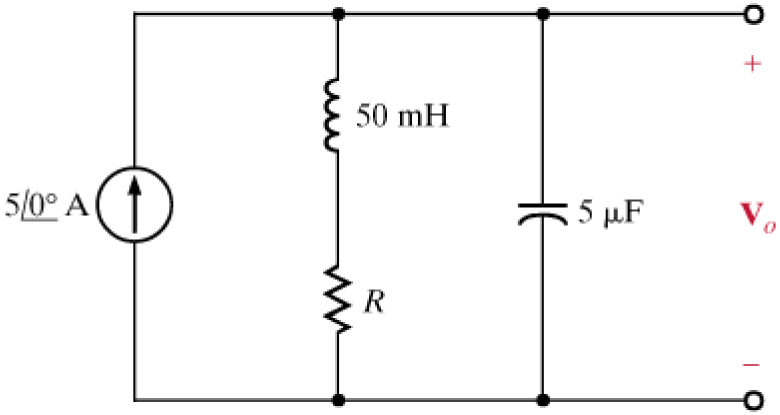
$$Y(j\omega) = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

$$Y \text{ real} \Rightarrow C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0 \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \Rightarrow \quad \omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}}$$

Exemplo de circuitos ressonantes (2)

Determine ω_0, ω_R para $R = 50\Omega$, 5Ω



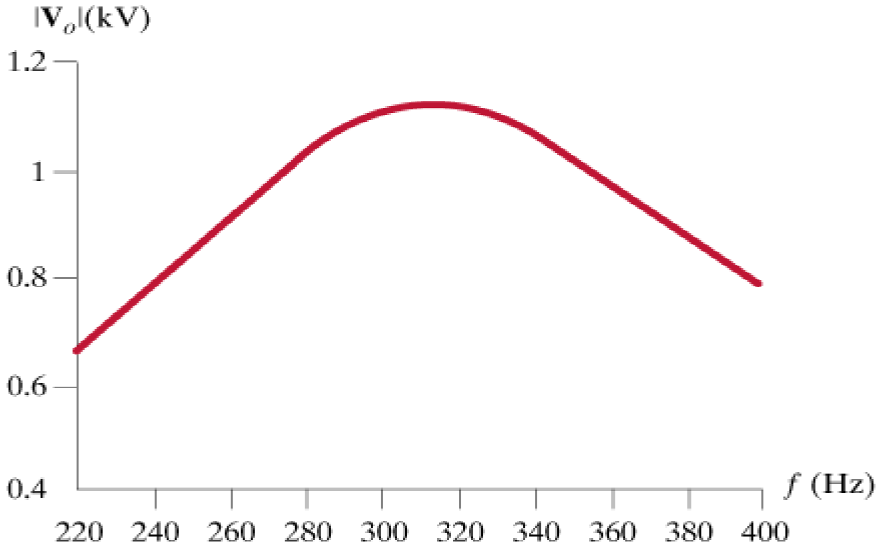
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \Rightarrow \omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(50\times10^{-3} H)(5\times10^{-6} F)}} = 2000 rad/s$$

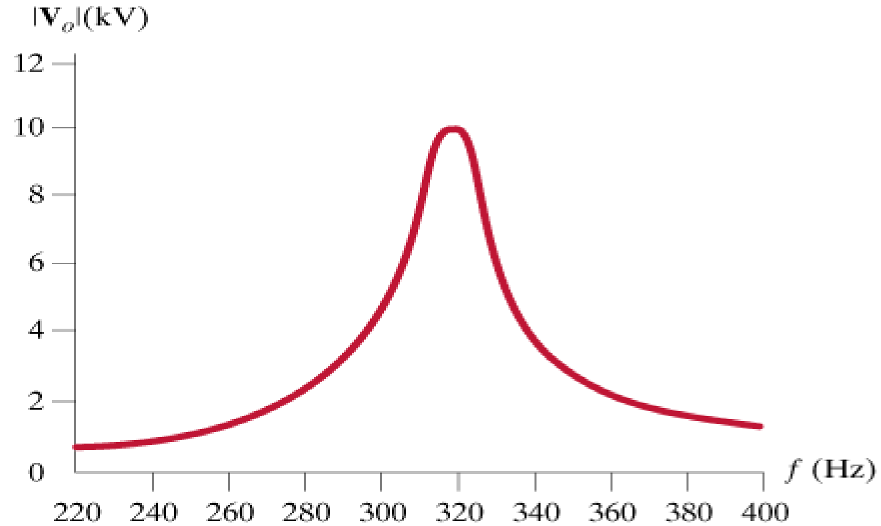
$$Q_0 = \frac{2000\times0.050}{R},\ \omega_R = 2000\sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}}$$

R	Q0	Wr(rad/s)	f(Hz)
50	2	1732	275.7
5	20	1997	317.8

Exemplo de circuitos ressonantes (3)



(a) $R = 50\ \Omega$



(b) $R = 5\ \Omega$