Circuitos Elétricos 2

Circuitos Elétricos Aplicados

Prof. Dr.-Ing. João Paulo C. Lustosa da Costa

Universidade de Brasília (UnB)

Departamento de Engenharia Elétrica (ENE)

Laboratório de Processamento de Sinais em Arranjos

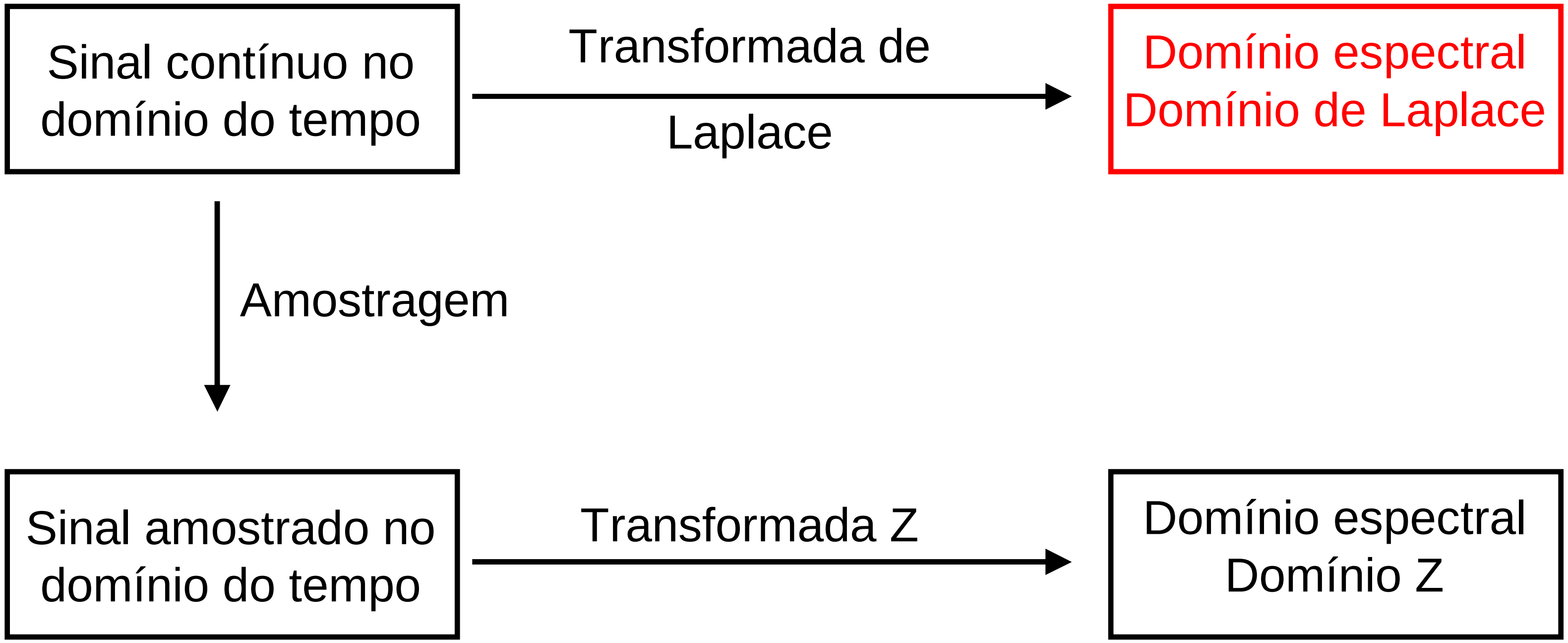
Caixa Postal 4386

CEP 70.919-970, Brasília - DF

Homepage: http://www.pgea.unb.br/~lasp

Transformada de Laplace (1)

- Aplicação em sinais



⇒ A transformada de Laplace é para sinais contínuos.

⇒ A transformada Z não será estudada neste curso.

Transformada de Laplace (2)

- Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \boldsymbol{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

⇒ onde a freqüência complexa *s* é definida como: $s = \sigma + j\omega$

⇒ admite-se que $f(t) = 0, \text{ para } t < 0.$ Input em *t* = *0*.

- Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \boldsymbol{F}(f) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

⇒ onde $\omega = 2\pi f$

- A transformada de Fourier não será estudada neste curso.
- Notar que a transformada de Fourier é um caso da transformada de Laplace quando $\sigma = 0.$

Transformada de Laplace (3)

- Por que usar a transformada de Laplace?
  - ⇒ No domínio de Laplace podem ser visto ***comportamentos*** que ***não são claros no domínio do tempo***. Por exemplo, pontos de instabilidade de um sistema de controle.
  - ⇒ ***Resolução de circuitos transientes*** de forma mais simples que resolvendo Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) no domínio do tempo.

- Significado da transformada através de projeções de funções

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \boldsymbol{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

  - ⇒ para cada valor de *s*, onde $s = \sigma + j\omega$, projeta-se *f(t)* sobre a exponencial complexa e^{-st}.

Transformada de Laplace (4)

- Condição suficiente para a existência da transformada de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t}|f(t)|dt < \infty$$

$\Rightarrow$ para algum σ.

- A transformada de Laplace não existe por exemplo para super exponenciais.

$\Rightarrow$ por exemplo, e^{t^2}.

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e^{t\cdot(t-\sigma)} = \infty}$$

- Transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{F}(s)\right] = f(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} f(t)e^{st}ds$$

$\Rightarrow$ onde $\sigma_1 > \sigma$

Transformada de Laplace (5)

- Na prática a transformada inversa de Laplace
  - ⇒ é calculada através da ***tabela de pares de transformadas***
  - ⇒ ou seja, não se precisa calcular a integral da transformada inversa
  - ⇒ ***Unicidade da Transformada de Laplace***
    - duas funções no domínio do tempo não podem ter a mesma transformada de Laplace.

Exemplos de Transformadas de Laplace (1)

- Exemplo 13.1 da referência 1: função degrau unitário *u(t)*

$\Rightarrow$ Derivada zero em todos os pontos exceto na origem.

$$u(t)\begin{cases} 0 \ \text{ para } \ t < 0 \\ 1 \ \text{ para } \ t > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Cálculo da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \boldsymbol{U}(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (2)

- Função degrau unitário *u(t)*
  - ⇒ Cálculo da transformada de Laplace

$$U(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

  - ⇒ Par da Transformada de Laplace

$$u(t) \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t > 0 \end{cases} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

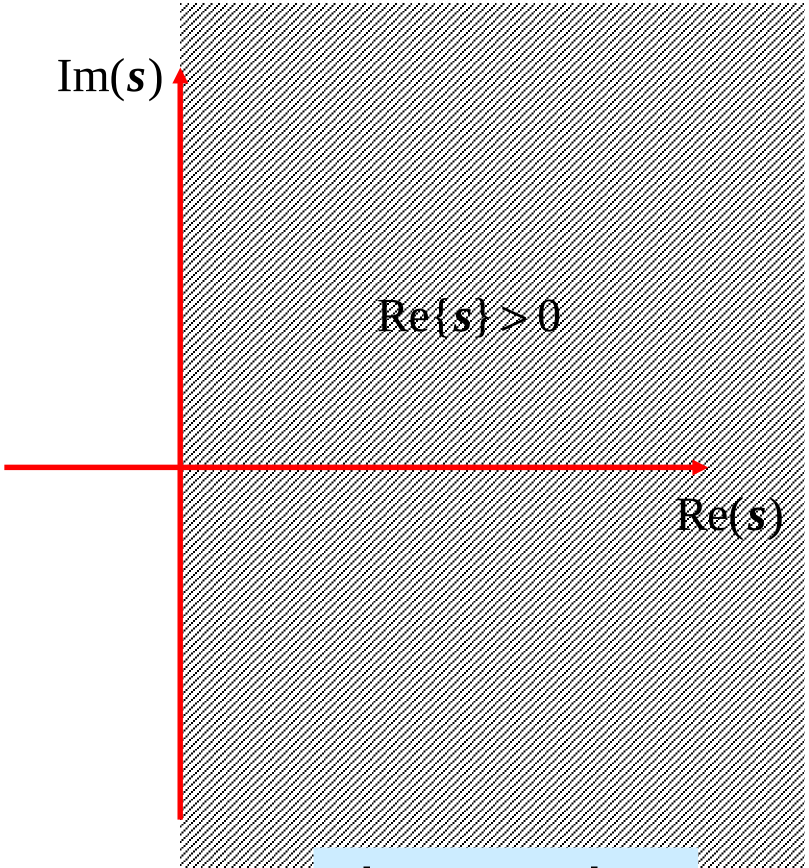
$$\sigma > 0$$

↓

Região de convergência

Região de Convergência

- Checando a região de convergência (Region of Convergence, RoC)



Plano complexo

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\sigma > 0$$

$$\mathrm{Re}\{s\} = \sigma$$

$$\mathrm{Im}\{s\} = \omega$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (3)

- Função degrau unitário defasado no tempo *u(t - a)*

$$u(t-a)\begin{cases} 0 \text{ para } t < a \\ 1 \text{ para } t > a \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Cálculo da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[u(t-a)\right] = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty 1 \cdot e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\left[u(t-a)\right] = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st}\Big|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

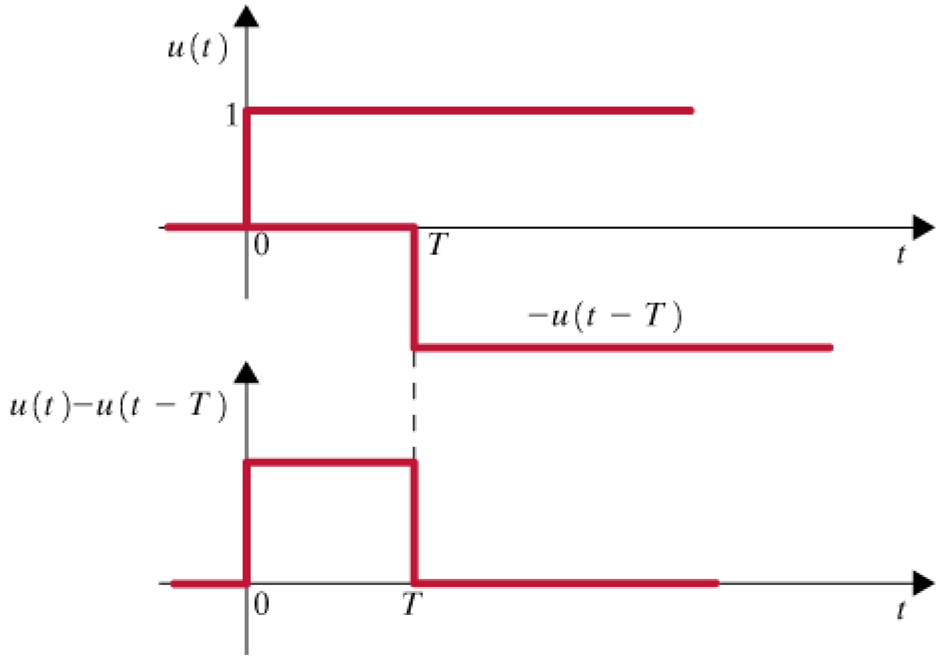
$\Rightarrow$ Par da transformada de Laplace

$$f(t) = u(t-a) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \boldsymbol{F}(s) = \frac{e^{-as}}{s} = \boldsymbol{U}(s)e^{-as}$$

$$\sigma > 0$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (4)

- Função pulso de largura T: *u(t) – u(t - T)*



$\Rightarrow$ Utilizando os pares da transformada de Laplace calculados anteriormente

$$f(t) = u(t) - u(t-T)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \qquad \sigma > 0$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (5)

- Exemplo 13.2 da referência 1: função impulso unitário
  - ⇒ conhecido como delta de Dirac
  - ⇒ A largura *T* do pulso retangular tende a zero e a amplitude é *1/T*

  - $$f(t) = \frac{1}{T}\left[u\left(t - t_0 + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - t_0 - \frac{T}{2}\right)\right]$$
  - $$\boldsymbol{F}(s) = \frac{1}{Ts}\left[e^{-\left(t_0 - \frac{T}{2}\right)s} - e^{-\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)s}\right]$$

  - $$\lim_{T \to 0} f(t) = \delta(t - t_0)$$
  - $$\lim_{T \to 0} \boldsymbol{F}(s) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{Ts}\left[e^{-\left(t_0 - \frac{T}{2}\right)s} - e^{-\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)s}\right]$$

  - ⇒ Aplicando L'Hôpital no limite acima

Exemplos de Transformadas de Laplace (6)

- Exemplo 13.2 da referência 1: função impulso unitário
  - ⇒ Aplicando L'Hôpital no limite fica

$$\lim_{T\to 0} F(s) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{s}\left[\frac{s}{2}e^{-\left(t_0-\frac{T}{2}\right)s} + \frac{s}{2}e^{-\left(t_0+\frac{T}{2}\right)s}\right]$$

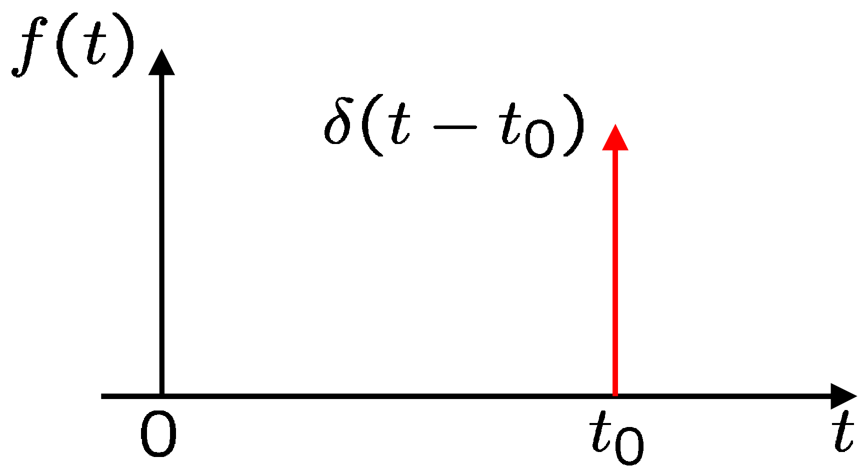
$$\lim_{T\to 0} F(s) = \frac{1}{2}e^{-t_0 s} + \frac{1}{2}e^{-t_0 s} = e^{-t_0 s}$$

  - ⇒ Par da transformada de Laplace

$$\boxed{\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-t_0 s}}$$

  - ⇒ Para $t_0 = 0$, tem-se:

$$\boxed{\delta(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \quad 1}$$



Exemplos de Transformadas de Laplace (7)

- Propriedade da amostragem através do impulso de Dirac

$$f(t)\delta(t-t_0) = 0, \text{ para } t \neq t_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0), \text{ para } t_1 < t_0 < t_2$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (8)

- Função exponencial e^{-at}

$$f(t) = e^{-at}, \text{ onde } a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Cálculo da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = \boldsymbol{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st}dt = \frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a}\Big|_0^{\infty}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a}, \sigma > -a \qquad \rightarrow s + a > 0$$

$\Rightarrow$ Par da transformada de Laplace

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \ \frac{1}{s+a}$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (9)

- Função $f(t) = t$
  - ⇒ Cálculo da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \boldsymbol{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt$$

- Integração por partes

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \cancelto{0}{\frac{-e^{-st}}{s}t\Big|_0^\infty} - \int_0^\infty \frac{-e^{-st}}{s}dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{s^2}$$

  - ⇒ Par da transformada de Laplace

$$t \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2}$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (10)

- Função cosseno: *f(t) = cos(ωt)*
  - ⇒ Cálculo da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \boldsymbol{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \cos(\omega t)e^{-st}dt$$

- Utilizando a identidade de Euler:

$$\cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t) = e^{j\omega t} \longrightarrow \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})e^{-st}dt$$

  - ⇒ Utilizando o seguinte par da transformada de Laplace

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1 = -j\omega \\ a_2 = j\omega \end{array}$$

Exemplos de Transformadas de Laplace (11)

- Função cosseno: *f(t) = cos(ωt)*
  - ⇒ Cálculo da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{j\omega t}e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-j\omega t}e^{-st}dt\right)$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

  - ⇒ Par da transformada de Laplace

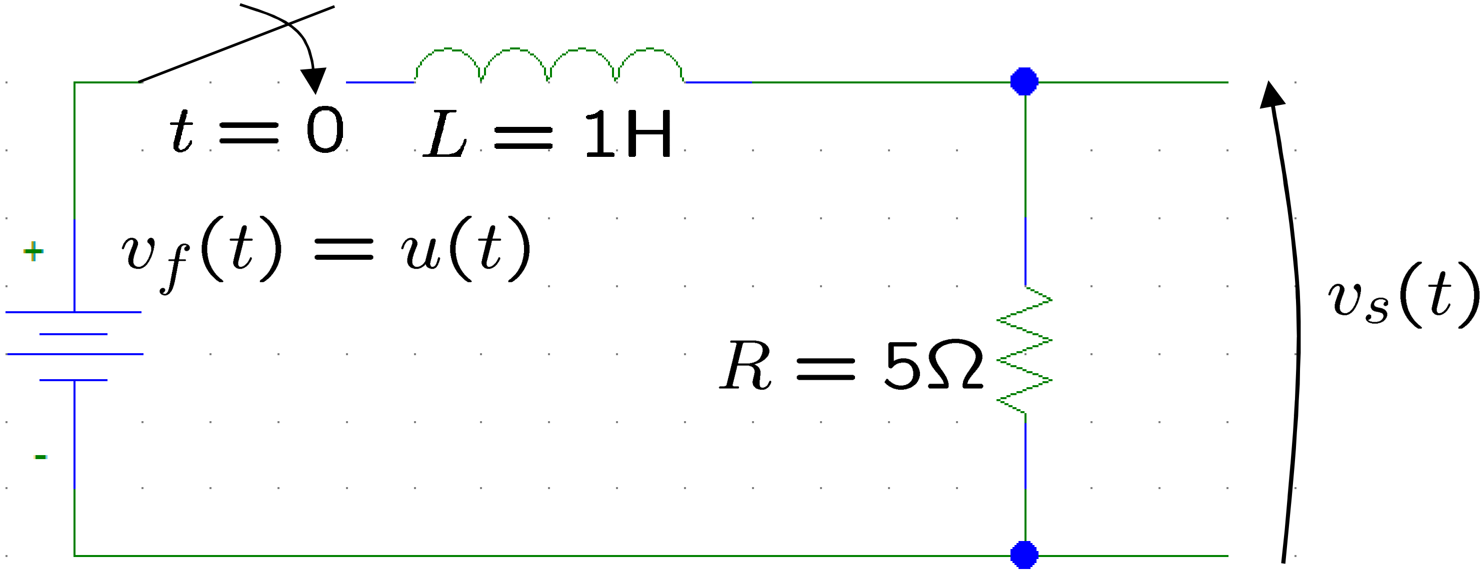
$$\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Tabela de Pares de Transformada de Laplace

$\delta(t)$	1	$\text{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\cos(bt)$	$\dfrac{s^2}{s^2+b^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	$e^{-at}\text{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$		
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$		
$\dfrac{t^n e^{-at}}{n!}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$		

Exemplo de Aplicação da Transformada de Laplace (1)

- Considere uma rede com a seguinte função de transferência



⇒ Determine a saída da rede

- Solução via EDO: circuitos elétricos 1
- Solução via transformada de Laplace: circuitos elétricos 2

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{\boldsymbol{V}_s(s)}{\boldsymbol{V}_F(s)} = \frac{5}{s+5}, \text{ onde } \boldsymbol{V}_F(s) = \frac{1}{s}$$

Exemplo de Aplicação da Transformada de Laplace (2)

⇒ Cálculo da saída no domínio de Laplace

$$V_s(s) = \frac{5}{s+5} \cdot \frac{1}{s}$$

⇒ Antes de utilizar a tabela de pares da transformada de Laplace

- expansão em frações parciais

$$V_s(s) = \frac{5}{s+5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+5} \longrightarrow \begin{cases} K_0 = 1 \\ K_1 = -1 \end{cases}$$

$$V_s(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}$$

⇒ Equivale aos casos do degrau unitário e da exponencial da tabela

$$V_s(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}$$

$$v_s(t) = u(t) - e^{-5t}u(t) = \left(1 - e^{-5t}\right)u(t)$$

Tabela de Pares com Propriedades da Transformada de Laplace (1)

⇒ **Escalonamento da magnitude** $A f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; A\boldsymbol{F}(s)$

⇒ **Adição/subtração** $f_1(t) \pm f_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \boldsymbol{F}_1(s) \pm \boldsymbol{F}_2(s)$

⇒ Escalonamento no tempo $f(at) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{a}\boldsymbol{F}\left(\frac{s}{a}\right)$

⇒ **Defasagem no tempo** $f(t)u(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t+t_0)]$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-t_0 s}\boldsymbol{F}(s)$$

⇒ **Defasagem na freqüência** $e^{-at}f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \boldsymbol{F}(s+a)$

⇒ Diferenciação $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; s^n\boldsymbol{F}(s) - s^{n-1}f(0)\ldots - s^0 f^{n-1}(0)$

⇒ Multiplicação por *t* $t f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; -\frac{d\boldsymbol{F}(s)}{ds}$

Tabela de Pares com Propriedades da Transformada de Laplace (2)

⇒ **Multiplicação por *t***

$$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet (-1)^n \frac{d^n \boldsymbol{F}(s)}{ds^n}$$

⇒ Divisão por *t*

$$\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \int_s^{\infty} \boldsymbol{F}(\lambda) d\lambda$$

⇒ Integração

$$\int_0^t f(\lambda) d\lambda \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \boldsymbol{F}(s)$$

⇒ Convolução

$$\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \boldsymbol{F}_1(s) \boldsymbol{F}_2(s)$$

Exemplos de Transformada de Laplace (1)

- Exemplo: **ACHE A TRANSF DE LAPLACE DE** $x(t) = \cos(3t + \pi/3)$

$$x(t) = \cos\pi/3\cos 3t - \sin\pi/3\sin 3t$$

$$X(s) = \cos\pi/3\frac{s}{s^2+9} - \sin\pi/3\frac{3}{s^2+9}$$

- Exemplo: $f(t) = e^{-3t}\cos(10t)$

$$y(t) = \cos 10t \Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2+100} \text{ (da tabela)}$$

$$f(t) = e^{-3t}y(t) \Rightarrow F(s) = Y(s+3) = \frac{s+3}{(s+3)^2+100}$$

- Exemplo: $x(t) = 1 + 2t + 6t^3$

$$X(s) = \frac{1}{s} + 2\frac{1}{s^2} + 6\frac{3!}{s^4}$$

Exemplos de Transformada de Laplace (2)

- Exemplo: ACHE A TRANSFORMA DA DE

$$f(t) = te^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1)$$

$$f(t) = (t-1+1)e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) + e^{-(t-1)}u(t-1) \\ &\quad - e^{-(t-1)}u(t-1) \\ &= (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) \end{aligned}$$

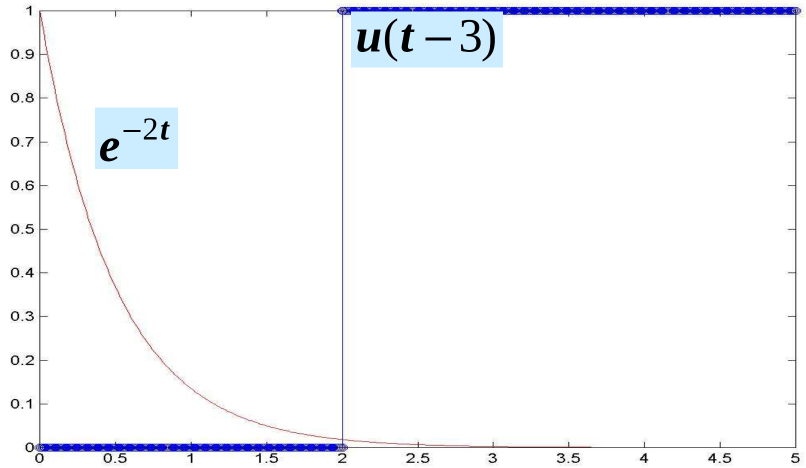
$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$te^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\therefore (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}$$

Exemplos de Transformada de Laplace (3)

- Exemplo: $f(t) = e^{-2t}u(t-3)$



$$f(t) = e^{-2(t-3+3)}u(t-3)$$
$$= e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3)$$

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2} \Rightarrow e^{-2(t-3)}u(t-3) \leftrightarrow e^{-3s}\frac{1}{s+2}$$

$$F(s) = e^{-6}\frac{e^{-3s}}{s+2}$$

Exemplos de Transformada de Laplace (4)

- Exemplo: $x(t) = \sin(2t - \pi/6)u(t-2)$

$$x(t) = \sin(2(t-2+2) - \pi/6)u(t-2)$$

$$\theta = 4 - \pi/6$$

$$x(t) = \sin(2(t-2) + \theta)u(t-2)$$

$$x(t) = \cos\theta \sin(2(t-2))u(t-2) + \sin\theta \cos(2(t-2))u(t-2)$$

$$\sin 2t u(t) \leftrightarrow \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \sin(2(t-2))u(t-2) \leftrightarrow e^{-2s}\frac{2}{s^2+4}$$

$$\cos 2t u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \cos(2(t-2))u(t-2) \leftrightarrow e^{-2s}\frac{s}{s^2+4}$$

$$X(s) = e^{-2s}\left(\cos\theta \frac{2}{s^2+4} + \sin\theta \frac{s}{s^2+4}\right)$$

Exemplos de Transformada de Laplace (5)

- Exemplos: A) $f(t) = e^{-4t}(t - e^{-t})$ $= te^{-4t} - e^{-5t}$ $= \dfrac{1}{(s+4)^2} - \dfrac{1}{s+5}$

B) $g(t) = \dfrac{te^{-4x}}{a^2+4}$ $G(s) = \dfrac{e^{-4x}}{a^2+4}\mathcal{L}[t]$ $G(s) = \dfrac{e^{-4x}}{s^2(a^2+4)}$

C) $x(t) = \cos(bt)u(t-1)$ $X(s) = e^{-s}\mathcal{L}[\cos(b(t+1))]$

$$\cos(b(t+1)) = \cos b \cos bt - \sin b \sin bt$$

$$\mathcal{L}[\cos(b(t+1))] = \cos b \frac{s}{s^2+b^2} - \sin b \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$X(s) = e^{-s}\left(\cos b \frac{s}{s^2+b^2} - \sin b \frac{b}{s^2+b^2}\right)$$

Exemplos de Transformada de Laplace (6)

- Exemplos:

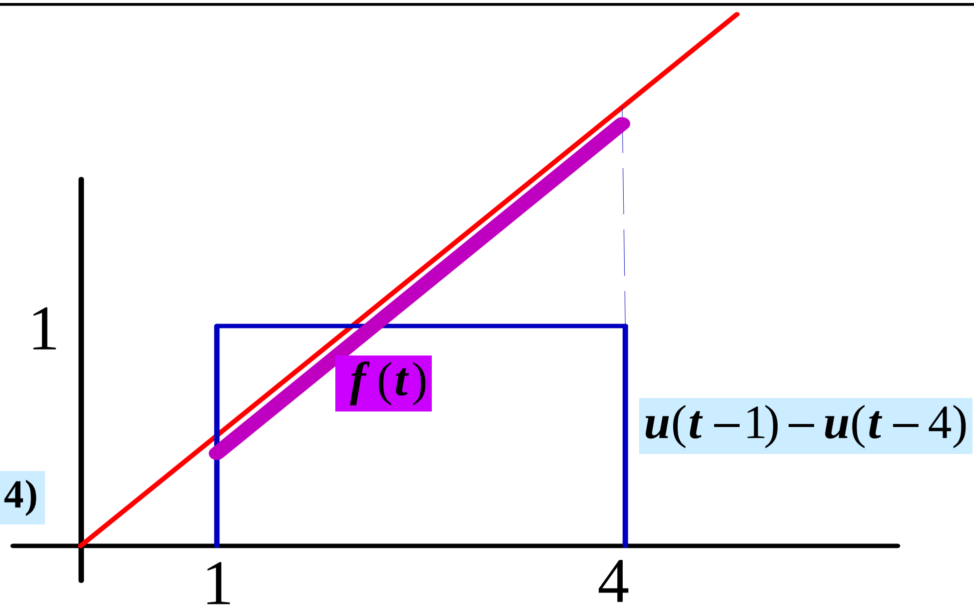
$$f(t)=\begin{cases} t & 1\le t\le 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f(t)=t(u(t-1)-u(t-4))$$

$$f(t)=(t-1+1)u(t-1)-(t-4+4)u(t-4)$$

$$f(t)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)-(t-4)u(t-4)-4u(t-4)$$

$$F(s)=e^{-s}\frac{1}{s^2}+e^{-s}\frac{1}{s}-e^{-4s}\frac{1}{s^2}-4e^{-4s}\frac{1}{s}$$



Usando a definição

$$F(s)=\int_1^4 te^{-st}dt$$

Transformada Inversa de Laplace (1)

- A maioria da funções de transferência no domínio da freqüência são da forma:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

Zeros = raízes do numerador
Pólos = raízes de denominador

$m \leq n$

- Desta forma podemos expandir em frações parciais

$$F(s) = K_0 + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} + \frac{P_2(s)}{Q_2(s)}; \; g(P_i) < n_i$$

Pólos conjugados simples

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

$$= \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_1^*}{s + \alpha + j\beta} + \cdots$$

Se m<n e os pólos são simples

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s + p_n}$$

Transformada Inversa de Laplace (2)

- Desta forma podemos expandir em frações parciais

$$F(s) = K_0 + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} + \frac{P_2(s)}{Q_2(s)};\ g(P_i) < n_i$$

Pólos com exponencial *r*

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s+p_1)^r}$$

$$= \frac{K_{11}}{(s+p_1)} + \frac{K_{12}}{(s+p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1r}}{(s+p_1)^r} + \cdots$$

$\Rightarrow$ Encontrando os coeficientes *K* das frações parciais a transformação para o domínio do tempo é imediata.

Exemplo de Transformada Inversa de Laplace (1)

- Exemplo:

$$F(s)=\frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)}$$

Escreva as frações parciais

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+4}+\frac{K_4}{s+5}$$

Determine os coeficientes (resíduos)

$$K_1=sF(s)\big|_{s=0}=\frac{12\times 1\times 3}{2\times 4\times 5}=\frac{9}{10}$$

$$K_2=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\frac{12(-1)(1)}{(-2)(2)(3)}=1$$

$$K_3=(s+4)F(s)\big|_{s=-4}=\frac{12(-3)(-1)}{(-4)(-2)(1)}=\frac{36}{8}$$

$$K_4=(s+5)F(s)\big|_{s=-5}=\frac{12(-4)(-2)}{(-5)(-3)(-1)}=-\frac{32}{5}$$

Ache o inverso de cada termo e escreva o resultado final

$$f(t)=\left(\frac{9}{10}+e^{-2t}+\frac{36}{8}e^{-4t}-\frac{32}{5}e^{-5t}\right)u(t)$$

O degrau unitário é necessário para fazer a função 0 para t<0

"FORMA" da transformada inversa

$$f(t)=\left(K_1+K_2e^{-2t}+K_3e^{-4t}+K_4e^{-5t}\right)u(t)$$

Transformada Inversa de Laplace no MATLAB (1)

```
>> sym s t
>> ilaplace(12*(s+1)*(s+3)/(s*(s+2)*s+4)*(s+5))
ans=
9/10+exp(-2*t)+(9/2)*exp(-4*t)-32/5*exp(-5*t)
```

Exemplo de Transformada Inversa de Laplace (2)

- Exemplo: **Ache a transformada inversa**

1. Fração Parcial
2. Resíduos
3. Inverso de cada termo

A) $F(s) = \dfrac{10(s+6)}{(s+1)(s+3)}$ $= \dfrac{K_1}{s+1} + \dfrac{K_2}{s+3}$ **Fração Parcial**

Inverso de cada termo

$K_1 = (s+1)F(s)\big|_{s=-1}$ $= \dfrac{10(-1+6)}{(-1+3)}$

$f(t) = \left(25e^{-t} - 15e^{-3t}\right)u(t)$

resíduos

$K_2 = (s+3)F(s)\big|_{s=-3}$ $= \dfrac{10(-3+6)}{(-3+1)}$

Faça a função zero para t<0

$$\textbf{Solução :}\quad f(t) = (K_1 e^{-t} + K_2 e^{-3t})u(t)$$

B) $F(s) = \dfrac{12(s+2)}{s(s+1)}$ $= \dfrac{K_1}{s} + \dfrac{K_2}{s+1}$ $f(t) = (K_1 + K_2 e^{-t})u(t)$

$K_1 = sF(s)\big|_{s=0} = \dfrac{12(2)}{1}$

$f(t) = (24 - 12e^{-t})u(t)$

$K_2 = (s+1)F(s)\big|_{s=-1}$ $= \dfrac{12(-1+2)}{-1}$

Exemplo de Transformada Inversa de Laplace (3)

- Exemplo:

$$Y(s)=\frac{10(s+2)}{s(s^2+4s+5)}$$

$$f(t)=2|K_1|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)+\ldots$$

$$s^2+4s+5=(s+2-j1)(s+2+j1)$$

$$Y(s)=\frac{10(s+2)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)}=\frac{K_0}{s}+\frac{K_1}{s+2-j1}+\frac{K_1^*}{s+2+j1}$$

USE radianos no expoente

$$K_0=sY(s)\big|_{s=0}=\frac{10(2)}{(2-j1)(2+j1)}=\frac{20}{5}=4$$

$$K_1=(s+2-j1)Y(s)\big|_{s=-2+j1}=\frac{10(j1)}{(-2+j1)(j2)}=\frac{5}{\sqrt{5}\angle 153.43^\circ}=2.236\angle -153.43^\circ=2.236e^{-j2.678}$$

$$y(t)=\left(4+2\times 2.236\cos(t-2.678)\right)u(t)$$