Circuitos Elétricos 2

Circuitos Elétricos Aplicados

Prof. Dr.-Ing. João Paulo C. Lustosa da Costa

Universidade de Brasília (UnB)

Departamento de Engenharia Elétrica (ENE)

Laboratório de Processamento de Sinais em Arranjos

Caixa Postal 4386

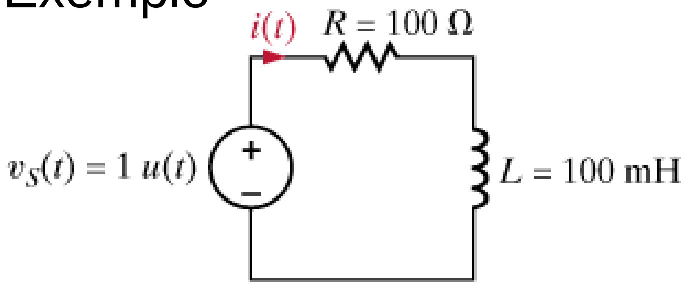
CEP 70.919-970, Brasília - DF

departamento
de engenharia
elétrica

Homepage: http://www.pgea.unb.br/~lasp

Análise de Circuitos
com Transformada de Laplace (1)

- Exemplo



$$\text{KVL}: \; v_S(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t)$$

Equação complementar

$$Ri_C(t) + L\frac{di_C}{dt}(t) = 0 \Rightarrow i_C(t) = K_C e^{-\alpha t}$$

$$RK_C e^{-\alpha t} + LK_C(-\alpha e^{-\alpha t}) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{R}{L}$$

Solução particular para esse caso

$$i_p(t) = K_p$$

$$\Rightarrow v_S = 1 = RK_p$$

$$i(t) = \frac{1}{R} + K_C e^{-\frac{R}{L}t}$$

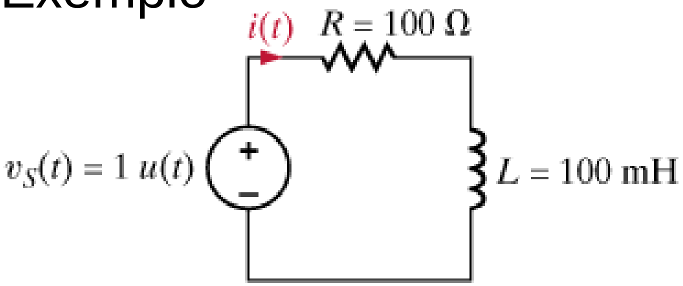
Use valor de contorno

$$v_S(t) = 0 \; p/ \; t < 0 \Rightarrow i(0) = 0$$

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right); \; t > 0$$

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (2)

- Exemplo



$$v_S(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t)$$

$$V_S(s) = RI(s) + L\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right]$$

$$\therefore \frac{1}{s} = RI(s) + LsI(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{s(R+Ls)}$$

$$I(s) = \frac{1/L}{s(R/L+s)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+R/L}$$

Apenas álgebra!

$$K_1 = sI(s)|_{s=0} = \frac{1}{R}$$

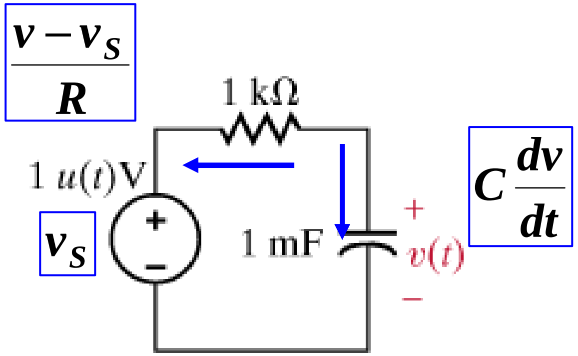
$$K_2 = (s+R/L)I(s)|_{s=-R/L} = -\frac{1}{R}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right);\ t > 0$$

Não há necessidade de solução particular e complementar

Análise de Circuitos
com Transformada de Laplace (3)

- Encontre v_s



Modelo usando KCL $C\frac{dv}{dt}+\frac{v-v_S}{R}=0$

$$RC\frac{dv}{dt}+v=v_S$$

$$RC\mathcal{L}\left[\frac{dv}{dt}\right]+V(s)=V_S(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dv}{dt}\right]=sV(s)-v(0)=sV(s)$$

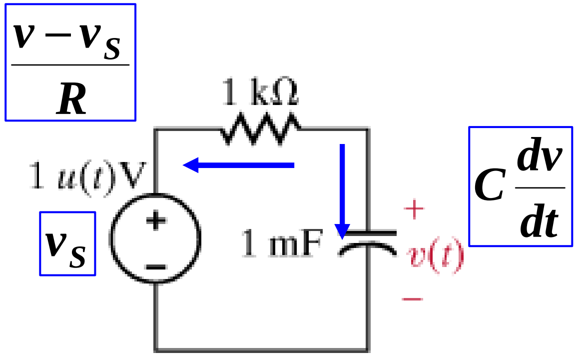
$$v_S(t)=0,\ t<0\Rightarrow v(0)=0$$

$$v_S=u(t)\Rightarrow V_S(s)=\frac{1}{s}$$

$$V(s)=\frac{1}{s(RCs+1)}=\frac{1/RC}{s(s+1/RC)}$$

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (4)

- Encontre v_s



$$V(s) = \frac{1}{s(RCs+1)} = \frac{1/RC}{s(s+1/RC)}$$

Use frações parciais p/ determinar inversa

$$V(s) = \frac{1/RC}{s(s+1/RC)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1/RC}$$

$$K_1 = sV(s)|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = (s+1/RC)V(s)|_{s=-1/RC} = -1$$

Condição inicial dada implicitamente

$$v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}},\ t \geq 0$$

Modelos dos Elementos de Circuitos (1)

- Método para resolver circuitos
  - ⇒ escrever EDO do circuito
  - ⇒ aplicar a transformada de Laplace para converter EDO em equação algébrica
- Modelos dos Elementos de Circuitos
  - ⇒ Resistor

Fontes independentes

$$v_S(t) \to V_S(s)$$

$$i_S(t) \to I_S(s)$$

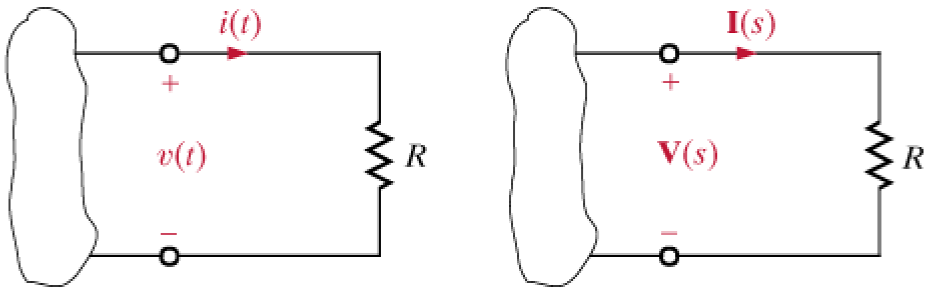
Fontes dependentes

$$v_D(t) = Ai_C(t) \to V_D(s) = AI_C(s)$$

$$i_D(t) = Bv_C(t) \to I_D(s) = BV_C(s)$$

...

Resistor

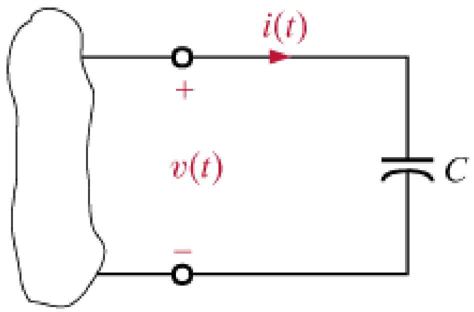


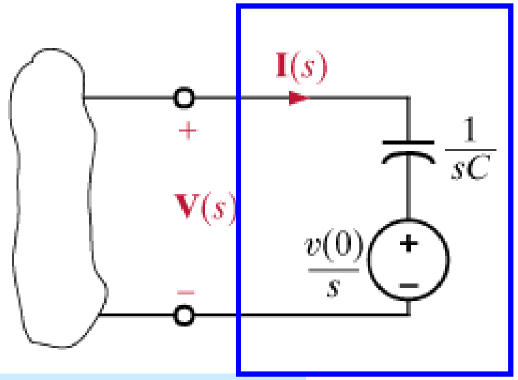
(a)

$$\boldsymbol{v(t) = Ri(t) \Rightarrow V(s) = RI(s)}$$

Modelos dos Elementos de Circuitos (2)

- Capacitor em série com fonte de tensão



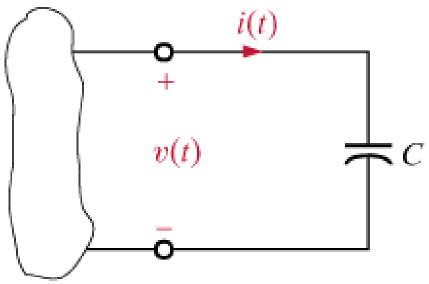


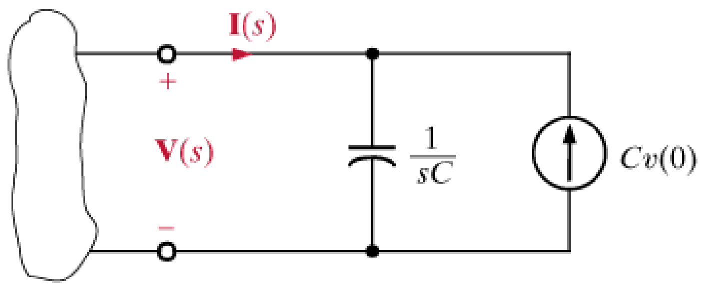
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx + v(0)$$

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

- Capacitor em paralelo com fonte de corrente

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx + v(0)$$

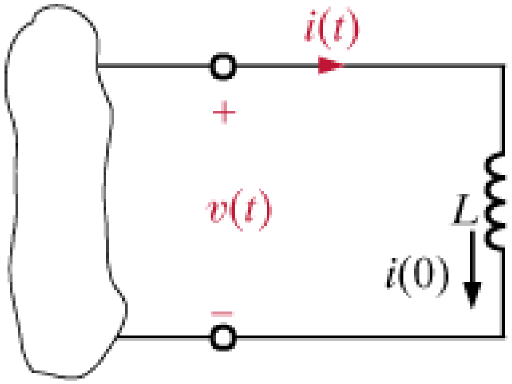




$$I(s) = CsV(s) - Cv(0)$$

Modelos dos Elementos de Circuitos (3)

- Indutor



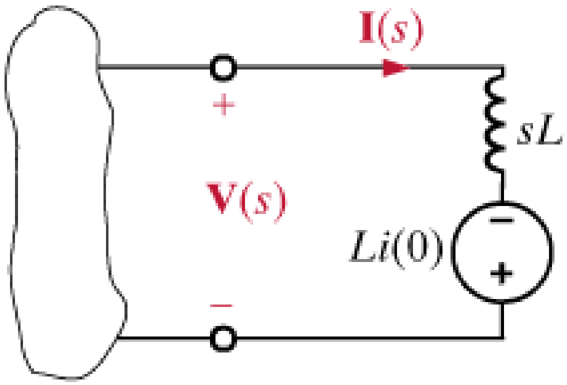
$$\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right] = sI(s) - i(0)$$

$$v(t) = L\frac{di}{dt}(t) \Rightarrow V(s) = L(sI(s) - i(0))$$

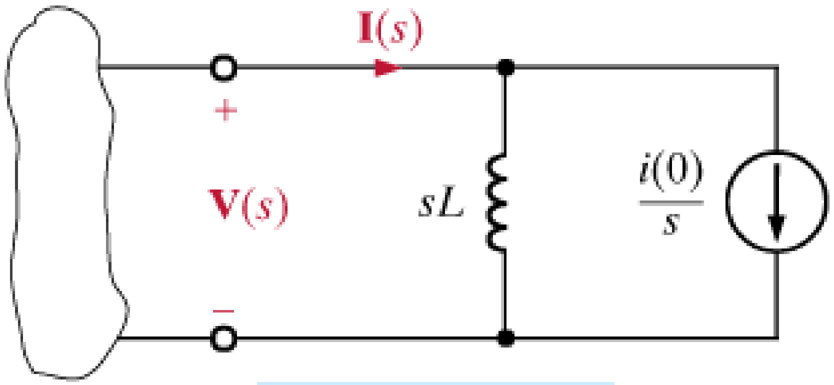
$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls} + \frac{i(0)}{s}$$

$\Rightarrow$ em série com fonte de tensão

$\Rightarrow$ em paralelo com fonte de corrente



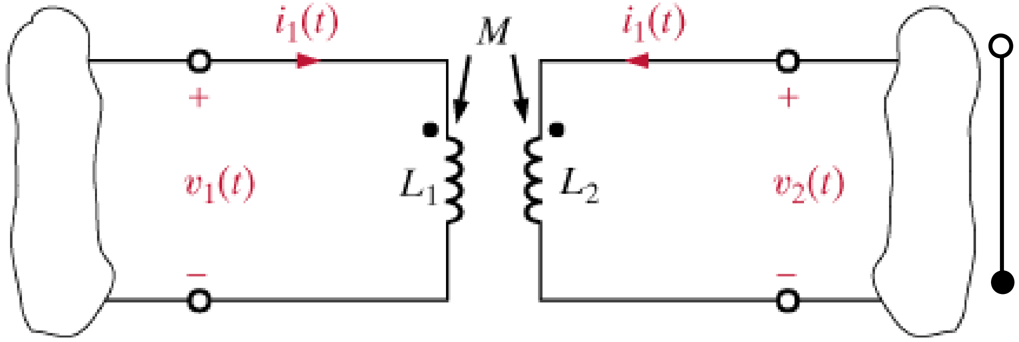
$$V(s) = LsI(s) - Li(0)$$



$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls} + \frac{i(0)}{s}$$

Modelos dos Elementos de Circuitos (4)

- Indutância mútua

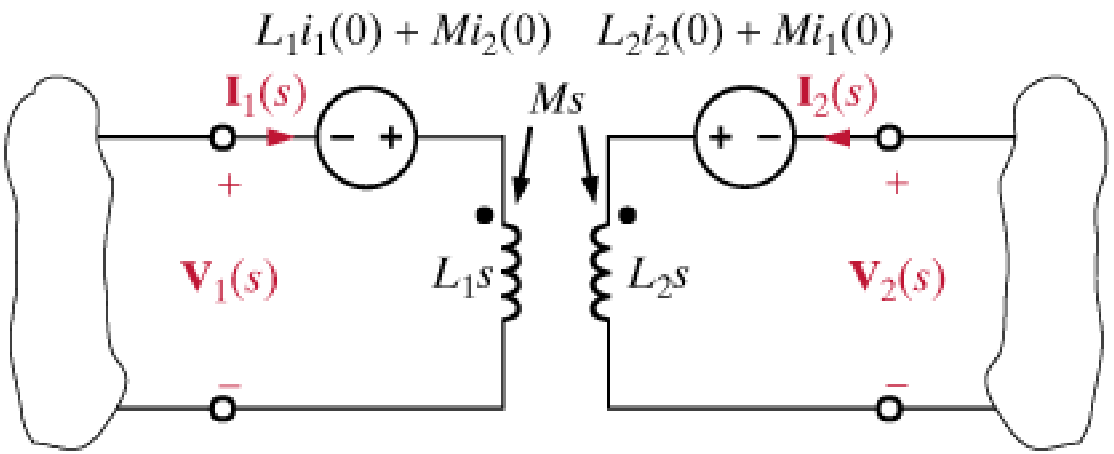


$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t)$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1}{dt}(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}(t)$$

$$V_1(s) = L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(0) + M s I_2(s) - M i_2(0)$$

$$V_2(s) = M s I_1(s) - M i_1(0) + L s I_2(s) - L i_2(0)$$

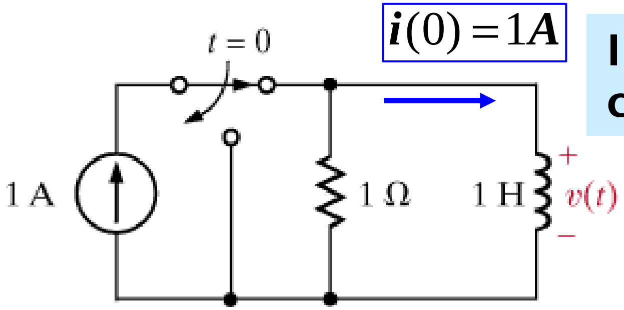


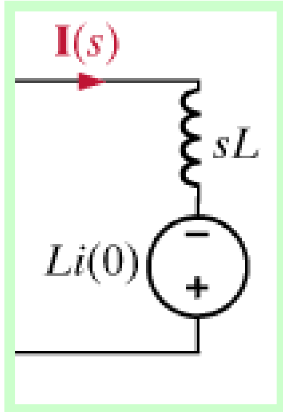
Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (5)

- Exemplo
  - ⇒ Determinar tensão no indutor

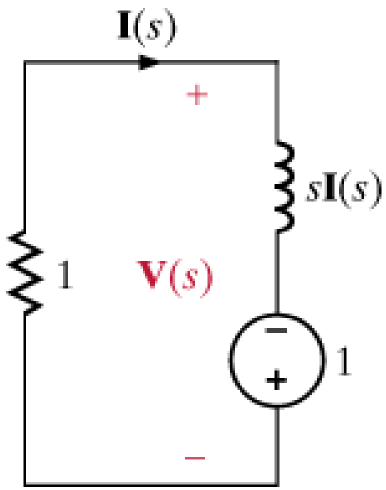
$\boxed{i(0)=1A}$

Indutor com corrente inicial





  - ⇒ Transformando fonte de corrente em fonte de tensão



KVL: $1=(1+s)I(s)$

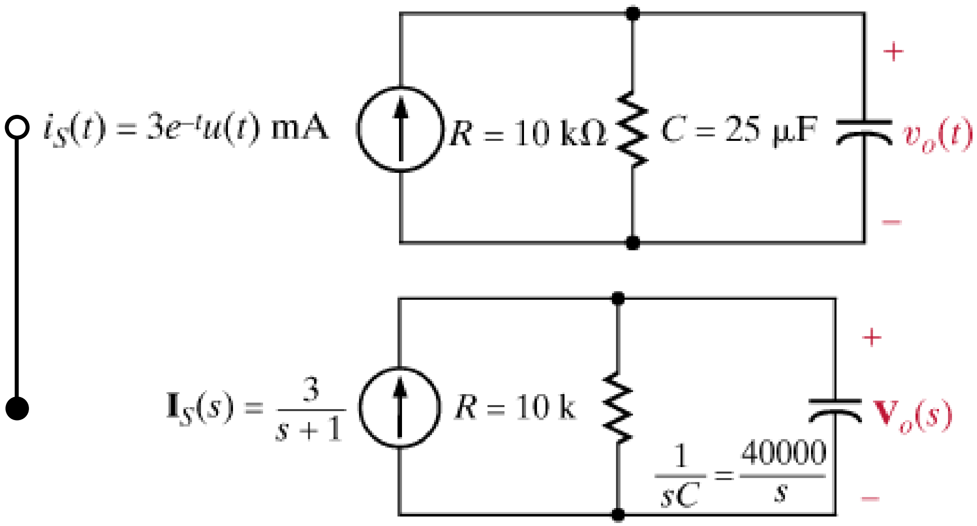
Lei Ohm

$$V(s)=-1\times I(s)\Rightarrow V(s)=-\frac{1}{s+1}$$

Análise de Circuitos
com Transformada de Laplace (6)

- Exemplo
  - ⇒ Transforme o circuito para o domínio *s* e encontrar tensões no domínio do tempo

$$i_S(t) = 0,\ t < 0 \Rightarrow v_o(0) = 0$$



$$V_o(s) = \left(R \parallel \frac{1}{Cs} \right) I_S(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{R}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} I_S(s)$$

$$V_o(s) = \frac{120}{(s+4)(s+1)} = \frac{K_1}{s+4} + \frac{K_2}{s+1}$$

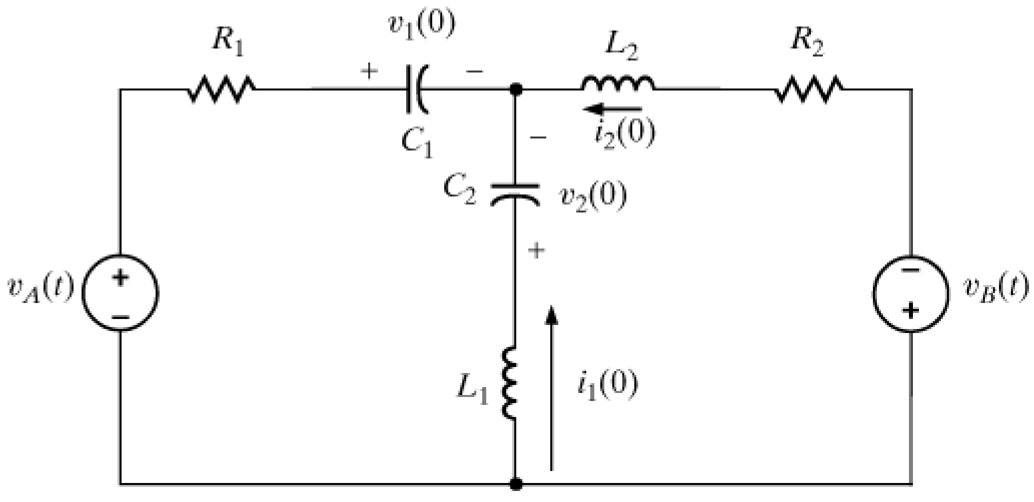
$$K_1 = (s+4)V_o(s)\,|_{s=-4} = -40$$

$$K_2 = (s+1)V_o(s)\,|_{s=-1} = 40$$

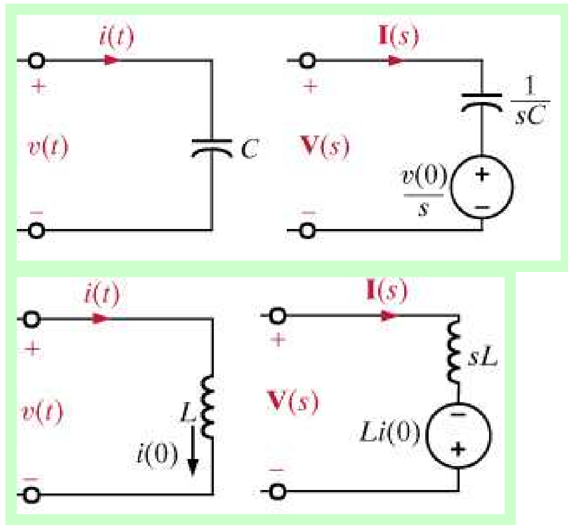
$$v_o(t) = 40\left[e^{-t} - e^{-4t}\right]u(t)$$

Análise de Circuitos
com Transformada de Laplace (7)

- Exemplo com elementos armazenadores energizados



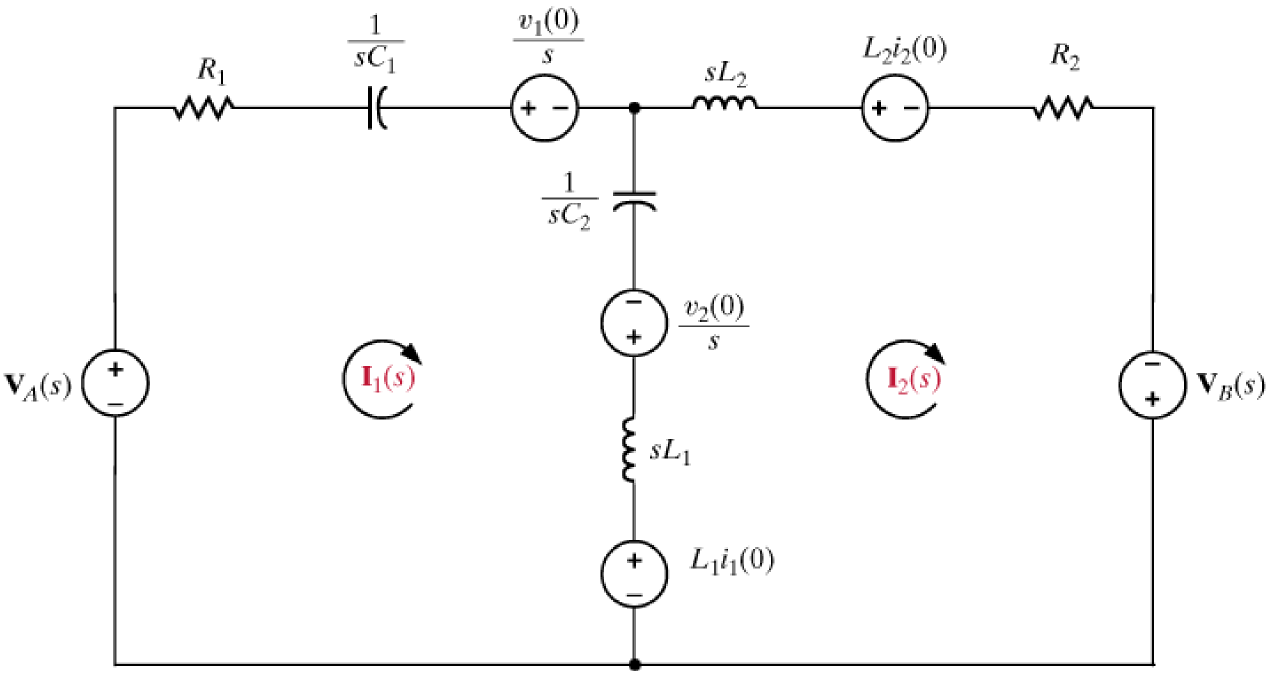
(a)



$\Rightarrow$ Substituir os elementos energizados por elementos não energizados com fontes

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (8)

- Exemplo com elementos armazenadores energizados



Malha 1

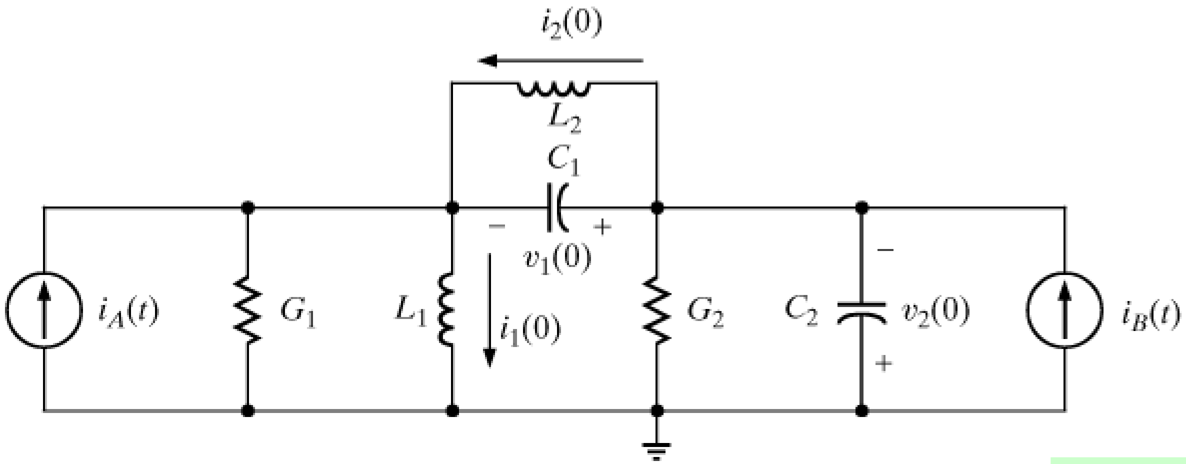
$$-V_A(s) + R_1 I_1(s) + \frac{1}{sC_1} I_1(s) + \frac{1}{sC_2}(I_1(s) - I_2(s)) + L_1 s(I_1(s) - I_2(s))$$
$$+\frac{v_1(0)}{s} - \frac{v_2(0)}{s} + L_1 i_1(0) = 0$$

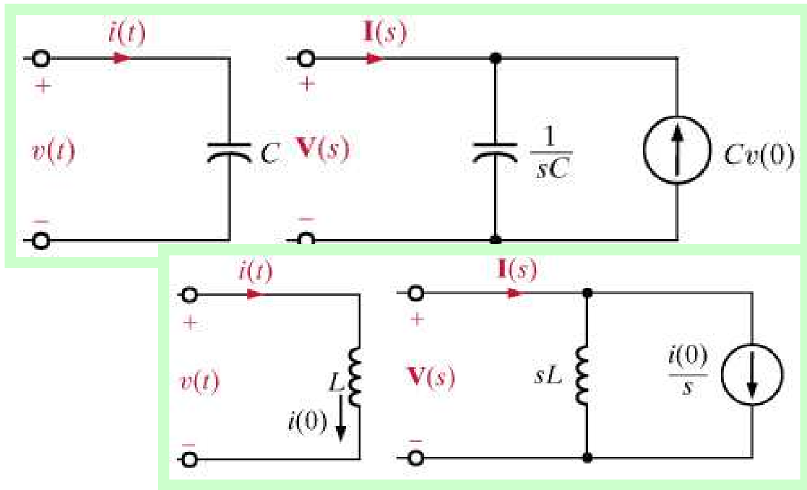
Malha 2

$$-V_B(s) - L_1 i_1(0) + \frac{v_2(0)}{s} + L_2 i_2(0) + L_1 s(I_2(s) - I_1(s))$$
$$+\frac{1}{C_2 s}(I_2(s) - I_1(s)) + (L_2 s + R_2) I_2(s) = 0$$

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (9)

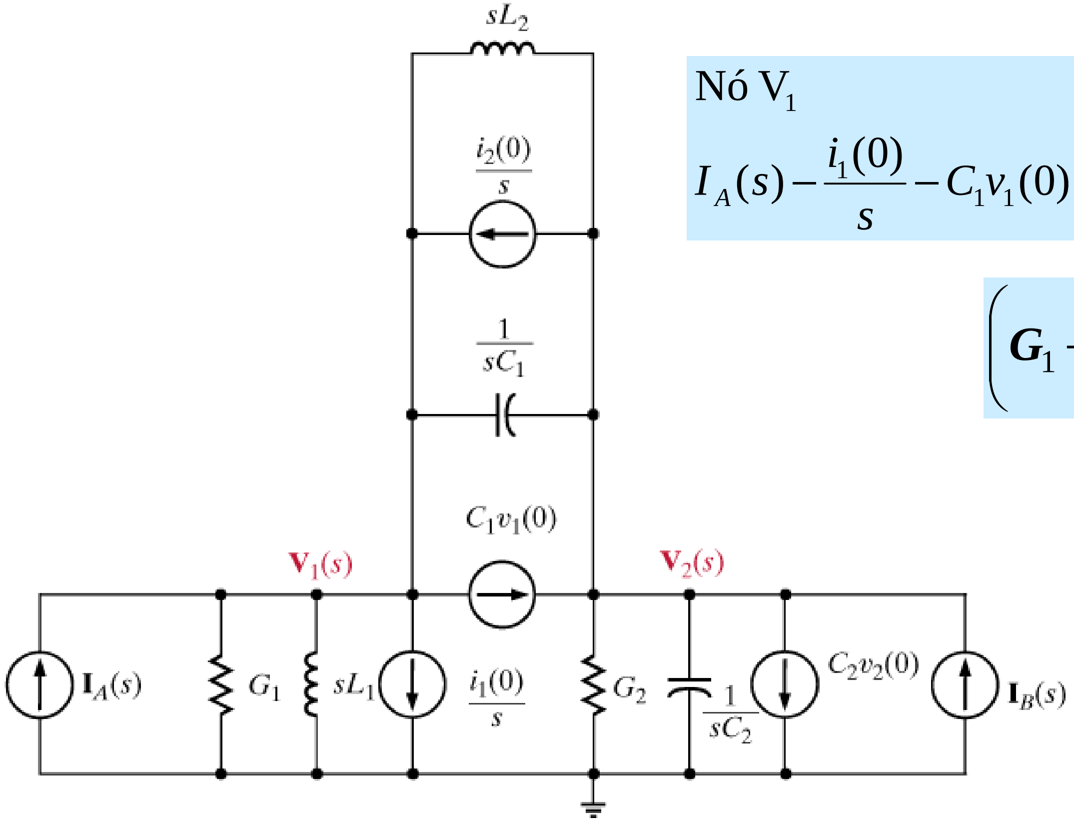
- Exemplo com elementos armazenadores energizados





Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (10)

- Exemplo com elementos armazenadores energizados



Nó V_1

$$I_A(s) - \frac{i_1(0)}{s} - C_1 v_1(0) + \frac{i_2(0)}{s} =$$

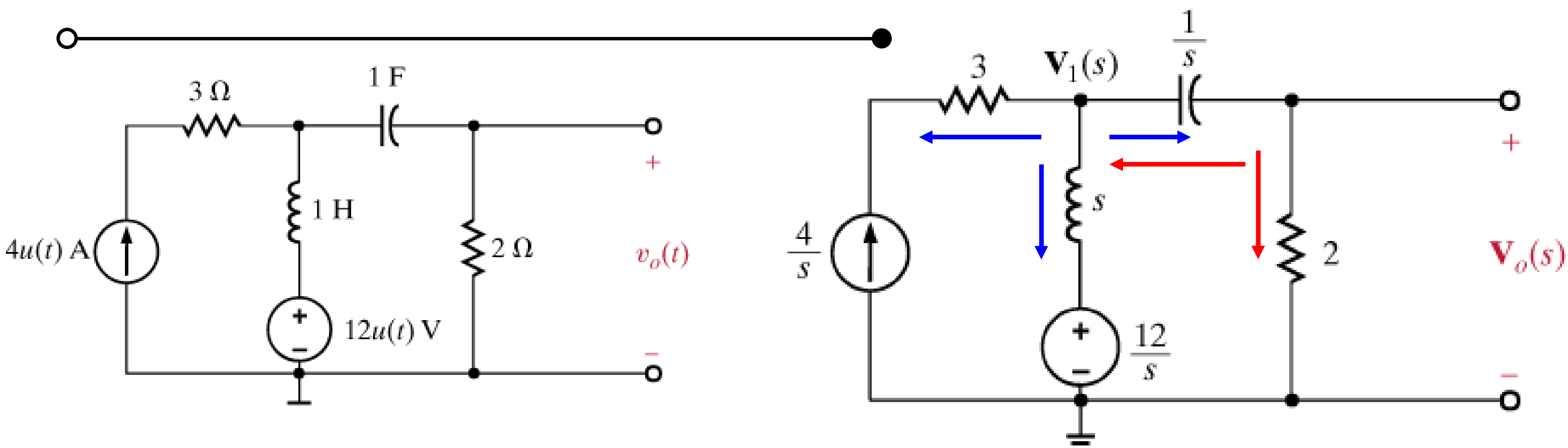
$$\left(G_1 + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} + C_1 s\right) V_1(s) - \left(\frac{1}{L_2 s} + C_1 s\right) V_2(s)$$

Nó V_2

$$I_B(s) - C_2 v_2(0) + C_1 v_1(0) - \frac{i_2(0)}{s} = \left(G_2 + C_2 s + C_1 s + \frac{1}{L_2 s}\right) V_2(s) - \left(C_1 s + \frac{1}{L_2 s}\right) V_1(s)$$

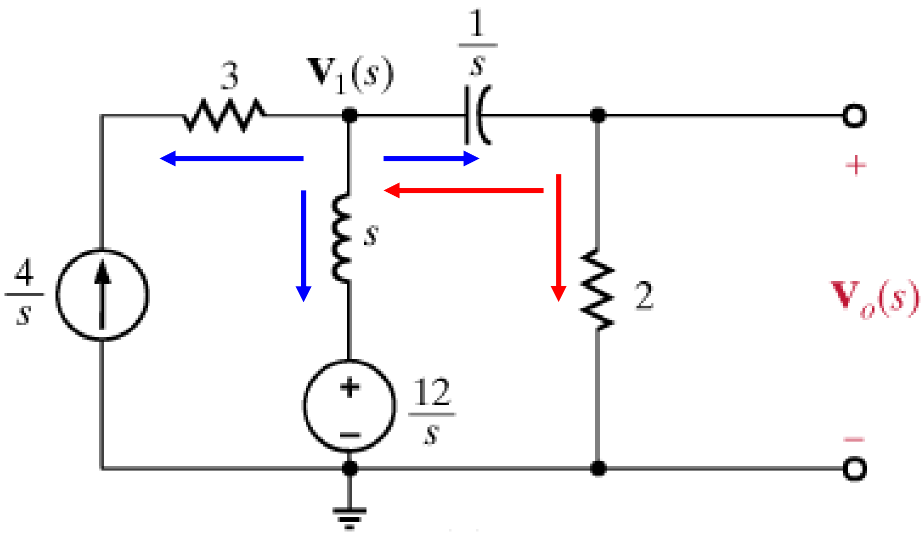
Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (11)

- Exemplo: encontre $v_o(t)$ usando análise dos nós, de malha, superposição, transformação de fonte, Thévenin, e Norton.
  - ⇒ Assumir condições iniciais nulas.
  - ⇒ Transformando para o domínio *s*



Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (12)

- Exemplo: encontre $v_o(t)$ usando análise dos nós, de malha, superposição, transformação de fonte, Thévenin, e Norton.
  - $\Rightarrow$ Assumir condições iniciais nulas.
  - $\Rightarrow$ **Análise dos nós**



KCL @ V_1

$$-\frac{4}{s}+\frac{V_1(s)-\frac{12}{s}}{s}+\frac{V_1(s)-V_o(s)}{\frac{1}{s}}=0 \quad \times s$$

KCL@V_o

$$\frac{V_o(s)}{2}+\frac{V_o(s)-V_1(s)}{\frac{1}{s}}=0 \quad \times 2$$

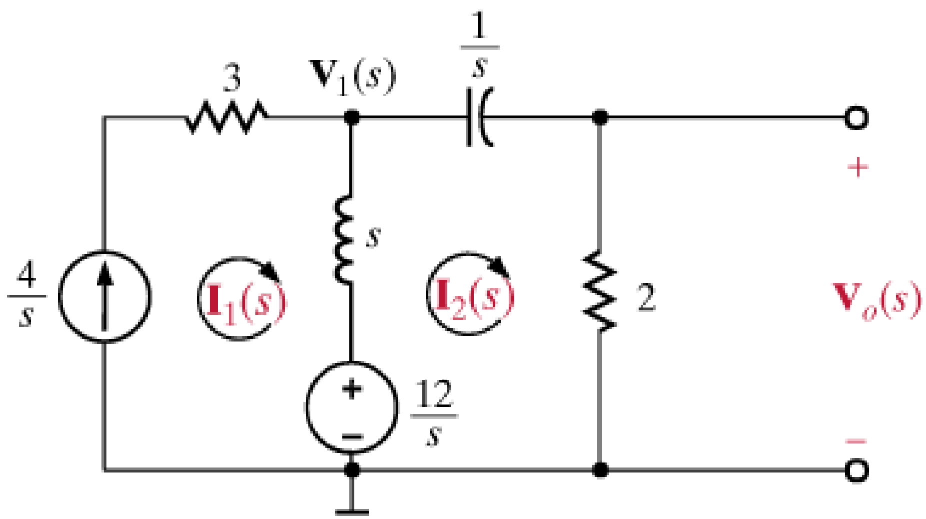
$$(1+s^2)V_1(s)-s^2V_o(s)=\frac{4s+12}{s} \quad \times 2s$$

$$-2sV_1(s)+(1+2s)V_o(s)=0 \quad \times(1+s^2)$$

$$V_o(s)=\frac{8(s+3)}{(1+s)^2}$$

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (13)

- Exemplo: encontre $v_o(t)$ usando análise dos nós, de malha, superposição, transformação de fonte, Thévenin, e Norton.
  - ⇒ Assumir condições iniciais nulas.
  - ⇒ **Análise de malhas**



Malha 1

$$I_1(s) = \frac{4}{s}$$

Malha 2

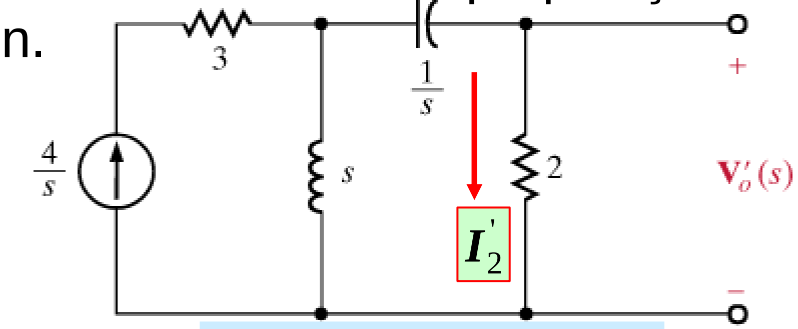
$$s(I_2(s) - I_1(s)) + \frac{1}{s} I_2(s) + 2I_2(s) = \frac{12}{s}$$

$$\boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{s}) = \frac{4(\boldsymbol{s}+3)}{(\boldsymbol{s}+1)^2}$$

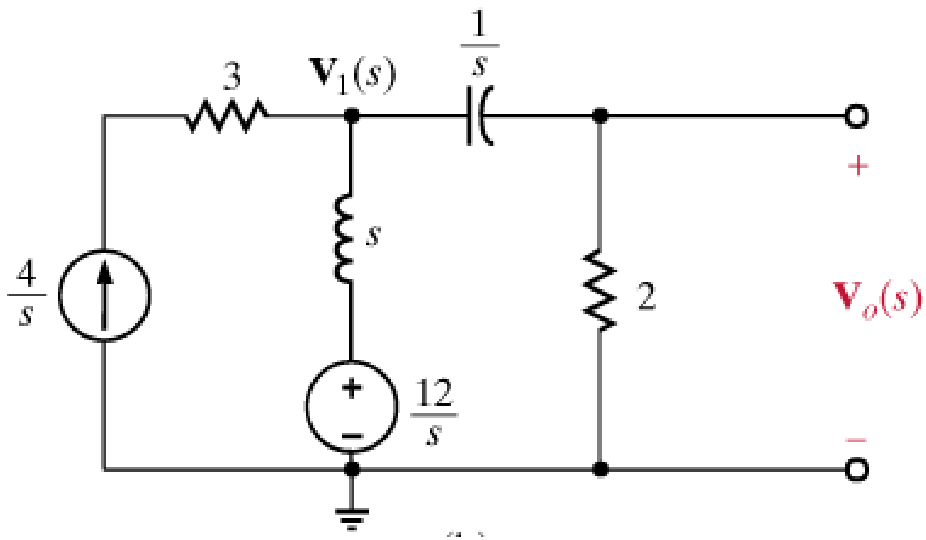
$$\boldsymbol{V_o}(\boldsymbol{s}) = 2\boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{s}) = \frac{8(\boldsymbol{s}+3)}{(\boldsymbol{s}+1)^2}$$

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (14)

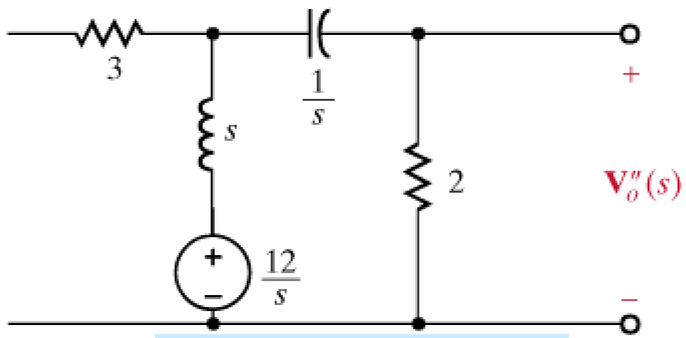
- Exemplo: encontre $v_o(t)$ usando análise dos nós, de malha, superposição, transformação de fonte, Thévenin, e Norton.
  - ⇒ Assumir condições iniciais nulas.
  - ⇒ **Superposição**



$$V_o'(s) = 2 \times \frac{s}{2 + \frac{1}{s} + s} \times \frac{4}{s}$$



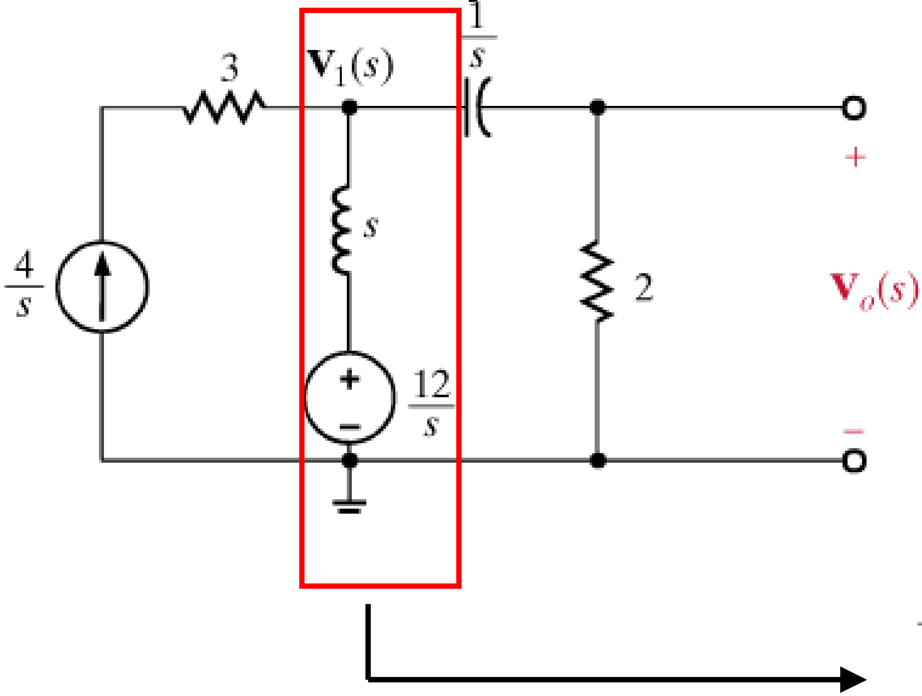
$$V_o(s) = V_o'(s) + V_o''(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$



$$V_o''(s) = \frac{2}{2 + \frac{1}{s} + s} \times \frac{12}{s}$$

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (15)

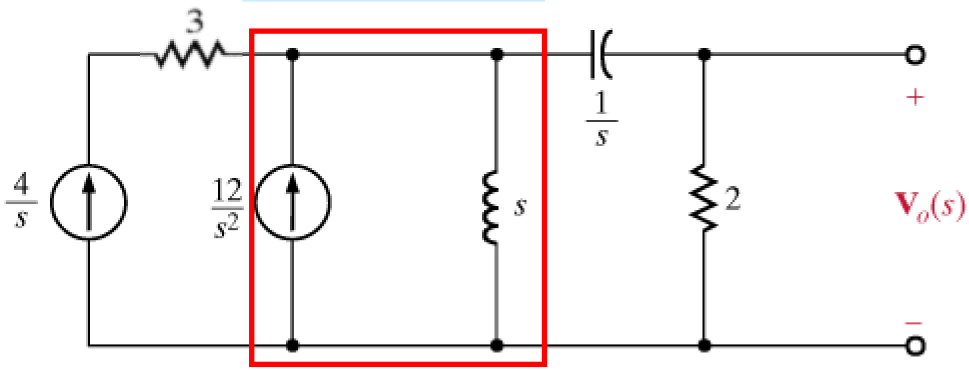
- Exemplo: encontre $v_o(t)$ usando análise dos nós, de malha, superposição, transformação de fonte, Thévenin, e Norton.
  - ⇒ Assumir condições iniciais nulas.
  - ⇒ **Transformação de fonte**



Combinando todas as fontes e usando fonte de corrente

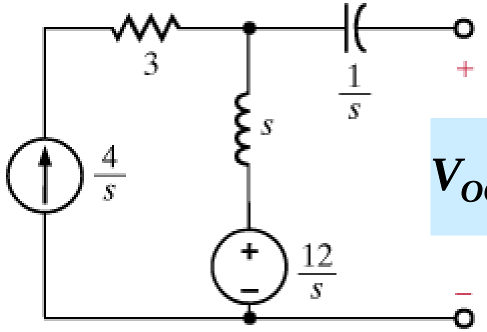
$$V_o(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2}\left(\frac{4}{s} + \frac{12}{s^2}\right)$$

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

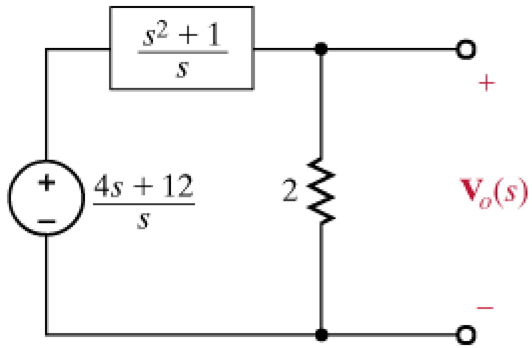


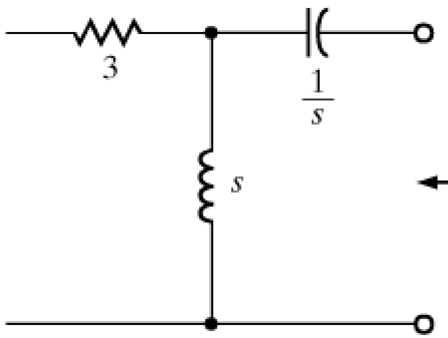
Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (16)

- Exemplo: encontre $v_o(t)$ usando análise dos nós, de malha, superposição, transformação de fonte, Thévenin, e Norton.
  - $\Rightarrow$ Assumir condições iniciais nulas.
  - $\Rightarrow$ **Thévenin**



$$V_{OC}(s)=\frac{12}{s}+s\frac{4}{s}=\frac{4s+12}{s}$$





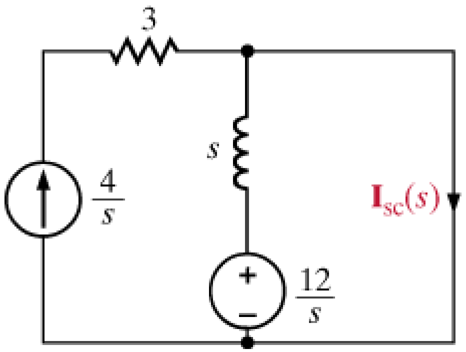
$$Z_{Th}=\frac{1}{s}+s=\frac{s^2+1}{s}$$

$$V_o(s)=\frac{2}{2+\dfrac{s^2+1}{s}}\,\frac{4s+12}{s}$$

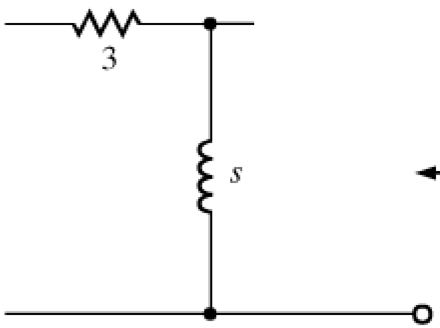
$$V_o(s)=\frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

Análise de Circuitos com Transformada de Laplace (17)

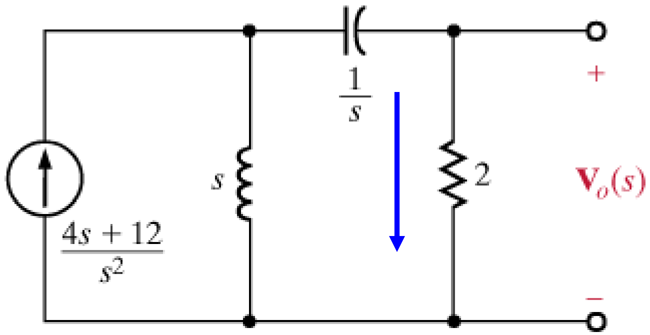
- Exemplo: encontre $v_o(t)$ usando análise dos nós, de malha, superposição, transformação de fonte, Thévenin, e Norton.
  - $\Rightarrow$ Assumir condições iniciais nulas.
  - $\Rightarrow$ **Norton**



$$I_{SC}(s) = \frac{4}{s} + \frac{12/s}{s} = \frac{4s+12}{s^2}$$



$$\leftarrow Z_{Th} = s$$



Divisor de corrente

$$V_o(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \frac{4s+12}{s^2}$$

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$