Circuitos Elétricos 2

Circuitos Elétricos Aplicados

Prof. Dr.-Ing. João Paulo C. Lustosa da Costa
Universidade de Brasília (UnB)
Departamento de Engenharia Elétrica (ENE)
Laboratório de Processamento de Sinais em Arranjos
Caixa Postal 4386
CEP 70.919-970, Brasília - DF

Homepage: http://www.pgea.unb.br/~lasp

Transformada Inversa de Laplace (1)

- Tendo em vista que nos circuitos os componentes tem valores reais, então as funções de transferências são racionais e da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

Zeros = raízes do numerador
Pólos = raízes de denominador

$m \leq n$

- Por esta razão pode-se expandir as funções de transferências em frações parciais:

$$F(s) = K_0 + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} + \frac{P_2(s)}{Q_2(s)}; \; g(P_i) < n_i$$

- Se m < n e os pólos são simples, então tem-se:

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s + p_n}$$

Transformada Inversa de Laplace (2)

- No caso de pólos conjugados simples tem-se

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} + \cdots$$

- No caso de pólos conjugados com exponencial *r* tem-se

$$\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s+p_1)^r} = \frac{K_{11}}{(s+p_1)} + \frac{K_{12}}{(s+p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1r}}{(s+p_1)^r} + \cdots$$

- No caso de pólos simples tem-se também

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s+p_n}$$

$$\left.\frac{(s+p_i)\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)}\right|_{s=-P_i} = 0 + \cdots + 0 + K_i + 0 + \cdots + 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

- Utilizando expansão em frações parciais a transformada inversa é imediata!
  - $\Rightarrow$ O problema se resume a encontrar as constantes *K*.

Exemplo de Transformada Inversa de Laplace para o caso de pólos simples (1)

$$F(s) = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)}$$

- Expandindo em frações parciais:

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} + \frac{K_4}{s+5}$$

- Cálculo dos coeficientes (resíduos):

$$K_1 = sF(s)\big|_{s=0} = \frac{12\times1\times3}{2\times4\times5} = \frac{9}{10}$$

$$K_2 = (s+2)F(s)\big|_{s=-2} = \frac{12(-1)(1)}{(-2)(2)(3)} = 1$$

$$K_3 = (s+4)F(s)\big|_{s=-4} = \frac{12(-3)(-1)}{(-4)(-2)(1)} = \frac{36}{8}$$

$$K_4 = (s+5)F(s)\big|_{s=-5} = \frac{12(-4)(-2)}{(-5)(-3)(-1)} = -\frac{32}{5}$$

- Forma da transformada inversa:

$$f(t) = \left(K_1 + K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}\right)u(t)$$

$\Rightarrow$ Degrau unitário p/ f(t) = 0, t < 0.

- Substituindo os coeficientes tem-se:

$$f(t) = \left(\frac{9}{10} + e^{-2t} + \frac{36}{8}e^{-4t} - \frac{32}{5}e^{-5t}\right)u(t)$$

Transformada Inversa de Laplace (3)

- No caso de pólos conjugados complexos tem-se também

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} + \cdots$$

$$(s+\alpha-j\beta)\mathbf{F}(s)\Big|_{s=-\alpha+j\beta} = K_1 = |K_1|\angle\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(s) = \frac{|K_1|\,\angle\theta}{s+\alpha-j\beta} + \frac{|K_1|\,\angle-\theta}{s+\alpha-j\beta} + \cdots$$

$$= \frac{|K_1|e^{j\theta}}{s+\alpha-j\beta} + \frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s+\alpha+j\beta} + \cdots$$

$\Rightarrow$ Aplicando o operador transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{F}(s)\right] = |K_1|e^{j\theta}e^{-(\alpha-j\beta)t} + |K_1|e^{-j\theta}e^{-(\alpha+j\beta)t}$$

$$= |K_1|e^{-\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta)} + e^{-j(\beta t+\theta)}\right] + \cdots$$

$\Rightarrow$ Substituindo a identidade na expressão anterior:

$$\cos\phi = \frac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2}$$

$$f(t) = 2\,|K_1|\,e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta) + \ldots$$

Transformada Inversa de Laplace (4)

- No caso de pólos múltiplos tem-se também

$$F(s)=\frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s+p_r)^4}=\frac{k_{11}}{s+p_1}+\frac{k_{12}}{(s+p_1)^2}+\frac{k_{13}}{(s+p_1)^3}+\frac{k_{14}}{(s+p_1)^4}$$

$$F(s)(s+p_1)^4\Big|_{s=-p_1}=k_{14}$$

$$\frac{d}{ds}\left[F(s)(s+p_1)^4\right]_{s=-p_1}=\frac{d}{ds}\left[(s+p_1)^4\left(\frac{k_{11}}{s+p_1}+\frac{k_{12}}{(s+p_1)^2}+\frac{k_{13}}{(s+p_1)^3}+\frac{k_{14}}{(s+p_1)^4}\right)\right]\Bigg|_{s=-p_1}$$

$$\frac{d}{ds}\left[F(s)(s+p_1)^4\right]_{s=-p_1}=\frac{d}{ds}\left[k_{11}(s+p_1)^3+k_{12}(s+p_1)^2+k_{13}(s+p_1)^1+k_{14}\right]_{s=-p_1}=\frac{d}{ds}\left[(s+p_1)^1k_{13}\right]_{s=-p_1}=k_{13}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[F(s)(s+p_1)^4\right]_{s=-p_1}=\frac{d}{ds}\left[3k_{11}(s+p_1)^2+2k_{12}(s+p_1)^1+k_{13}\right]_{s=-p_1}=\frac{d}{ds}\left[2k_{12}(s+p_1)^1\right]_{s=-p_1}=\left[2k_{12}\right]_{s=-p_1}$$

$$\frac{d^3}{ds^3}\left[F(s)(s+p_1)^4\right]_{s=-p_1}=\frac{d}{ds}\left[6k_{11}(s+p_1)^1+2k_{12}+0\right]_{s=-p_1}=\frac{d}{ds}\left[6k_{11}(s+p_1)^1\right]_{s=-p_1}=\left[6k_{13}\right]_{s=-p_1}$$

Transformada Inversa de Laplace (5)

- Fórmula geral para o caso de pólos múltiplos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+p)^n}\right]=\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-pt}$$

$$\mathbf{F}(s)=\frac{\mathbf{P}_1(s)}{\mathbf{Q}_1(s)(s+p_1)^r}=\frac{K_{11}}{s+p_1}+\frac{K_{12}}{(s+p_1)^2}+\cdots+\frac{K_{1r}}{(s+p_1)^r}+\cdots$$

$$(s+p_1)^r\mathbf{F}(s)\Big|_{s=-p_1}=K_{1r} \qquad \frac{d}{ds}\left[(s+p_1)^r\mathbf{F}(s)\right]\Big|_{s=-p_1}=K_{1r-1}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+p_1)^r\mathbf{F}(s)\right]\Big|_{s=-p_1}=(2!)K_{1r-2}$$

$$\boxed{K_{1j}=\frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}}\left[(s+p_1)^r\mathbf{F}(s)\right]\Big|_{s=-p_1}}$$

Exemplo de Transformada Inversa de Laplace para o caso de pólos múltiplos (1)

$$\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}$$

$$\mathbf{F}(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$f(t) = \left(K_{11}e^{-t} + K_{12}te^{-t} + K_{13}\left(\frac{1}{2}t^2e^{-t}\right) + K_2e^{-2t} \right)u(t)$$

$$K_2 = (s+2)F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{10(1)}{(-1)^3} = -10$$

$$K_{13} = (s+1)^3F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{10(2)}{(1)} = 20$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}\left((s+1)^3F(s)\right)\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left(\frac{10(s+3)}{s+2}\right)\Bigg|_{s=-1} = \frac{10(s+2)-10(s+3)}{(s+2)^2}\Bigg|_{s=-1} = \frac{-10}{(s+2)^2}\Bigg|_{s=-10} = -10$$

$$K_{11} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left((s+1)^3F(s)\right)\Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{2!}\frac{d}{ds}\frac{-10}{(s+2)^2} \longrightarrow K_{11} = \frac{1}{2}\frac{10\left(2(s+2)\right)}{(s+2)^4}\Bigg|_{s=-1} = \frac{10}{(s+2)^3}\Bigg|_{s=-1} = 10$$

Exemplo de Transformada Inversa de Laplace para o caso de pólos múltiplos (2)

Ache a transformada inversa

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)^2}$$

Fração parcial

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{K_{11}}{s+1}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

Resíduos

$$K_{12}=(s+1)^2F(s)|_{s=-1}=-1$$

$$\therefore \frac{d}{ds}(s+1)^2F(s)=1=K_{11}$$

$$f(t)=(e^{-t}-te^{-t})u(t)$$

Forma da inversa

$$f(t)=(K_{11}e^{-t}+K_{12}te^{-t})u(t)$$

$$K_{1j}=\frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}}\left[(s+p_1)^r\mathbf{F}(s)\right]\bigg|_{s=-p_1}$$

Exemplo de Transformada Inversa de Laplace para o caso de pólos múltiplos (3)

Ache a transformada inversa

$$F(s) = \frac{(s+2)}{s^2(s+1)}$$

Expansão em frações parciais

$$F(s) = \frac{(s+2)}{s^2(s+1)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{s+1}$$

Resíduos

$$K_2 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{(-1+2)}{(-1)^2} = 1$$

$$s^2F(s) = \frac{s+2}{s+1} = sK_{11} + K_{12} + K_2\frac{s^2}{(s+1)} \longrightarrow K_{12} = s^2F(s)|_{s=0} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{d}{ds}(s^2F(s))|_{s=0} = K_{11} \longrightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{(s+1)-(s+2)}{(s+1)^2}\bigg|_{s=0} = -1$$

Forma da inversa

$$f(t) = (K_{11} + K_{12}t + K_2e^{-t})u(t) \longrightarrow f(t) = (-1+2t+e^{-t})u(t)$$

Convolução (1)

- Dada a Equação Diferencial Ordinária (EDO) abaixo:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_0 u$$

$\Rightarrow$ existe uma função, h(t), $t \geq 0$, tal que:

$$y(t) = \int_0^t h(t-x)u(x)dx = h(t) \otimes u(t)$$

$\Rightarrow$ é uma solução particular da equação para $t \geq 0$.

- Propriedade da convolução:

$\Rightarrow$ Sejam f_1 e f_2 funções positivas no tempo, então

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$F(s) = F_1(s) F_2(s)$$

Convolução (2)

- Propriedade da convolução (demo usando definição):

$$\boldsymbol{F}(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda \right) e^{-st} dt$$

$$\boldsymbol{F}(s) = \int_0^{t} \left(\int_0^{\infty} f_1(t-\lambda) e^{-st} dt \right) f_2(\lambda) d\lambda$$

$$\boldsymbol{F}(s) = \int_0^{t} e^{-s\lambda} f_2(\lambda) d\lambda = \boldsymbol{F}_1(s) \int_0^{t} e^{-s\lambda} f_2(\lambda) d\lambda$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{F}_1(s) \boldsymbol{F}_2(s)}$$

Exemplo com Convolução (1)

- Encontre *Y(s)*

$$y(t)+\int_0^t e^{-2(t-x)}y(x)dx=t;\quad t>0$$

$$y(t)+e^{-2t}\otimes y(t)=t\Rightarrow$$

$$Y(s)+\frac{1}{s+2}Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

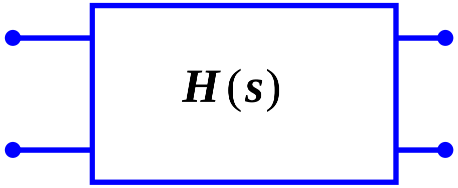
$$\left(1+\frac{1}{s+2}\right)Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{s^2(s+3)}$$

Exemplo com Convolução (2)

- Determine a resposta da rede utilizando convolução:

$$V_S(s) = \frac{1}{s}$$



$$V_0(s) = H(s)V_S(s)$$

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_S(s)} = \frac{10}{s+5}$$

$$V_0(s) = \frac{10}{s+5} \times \frac{1}{s}$$

$\Rightarrow$ Passando para o domínio do tempo:

$$\frac{10}{s+5} \leftrightarrow 10e^{-5t}u(t)$$

$$\frac{1}{s} \leftrightarrow u(t)$$

$$v_0(t) = 10e^{-5t}u(t) \otimes u(t)$$

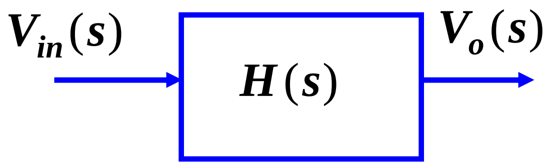
$\Rightarrow$ Cálculo da resposta no domínio do tempo via convolução:

$$v_0(t) = 10\int^{t} u(\lambda)e^{-5(t-\lambda)}d\lambda \quad = 10e^{-5t}\int_0^t e^{5\lambda}d\lambda \quad = 10e^{-5t}\left[\frac{1}{5}e^{\lambda}\right]_0^t$$

$$v_0(t) = 2e^{-5t}\left[e^t - 1\right] \quad = 2\left(1 - e^{-5t}\right); \ t \geq 0$$

Aplicação com Convolução (1)

- Modelo "caixa preta" para um sistema linear
  - ⇒ Sistema linear representado no domínio de Laplace



$$V_o(s) = H(s)V_{in}(s)$$

  - ⇒ A caixa preta descreve um sistema baseado apenas na entrada e saída do sistema. Não há informação alguma sobre o que tem na caixa preta.

- Como encontrar da forma mais simples *H(s)*?
  - ⇒ Usando uma função $V_{in}(s) = 1$, ou seja, no domínio do tempo $v_{in}(t) = \delta(t)$.
    - Para aplicações de áudio, $\delta(t)$ seria um disparo.
    - Logo, $V_o(s) = H(s)$, ou seja, no domínio do tempo $v_o(t) = h(t)$.
  - ⇒ Uma vez que *h(t)* foi encontrado, pode-se calcular a saída para qualquer entrada $v_{in}(t)$.

$$v_o(t) = \int_0^t h(t-x)v_{in}(x)dx$$

Aplicação com Convolução (2)

- Na prática, é difícil se obter um impulso extremamente estreito.
- Por isso, utilizam-se outras funções:
  - ⇒ função degrau

$$v_{in}(t) = u(t) \Rightarrow V_{in}(s) = \frac{1}{s}, V_{os}(s) = \frac{H(s)}{s}$$

$$\therefore H(s) = sV_o(s) \Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt} v_o(t)$$

  - ⇒ Logo, a resposta ao impulso pode ser obtida através da derivada da resposta ao degrau.
  - ⇒ Uma vez que se obtém a resposta ao impulso pode-se utilizar novamente para se calcular a resposta para qualquer entrada.

Teorma do Valor Inicial e do Valor Final

- Relação do comportamento da função no domínio do tempo com a função no domínio da freqüência complexa *s*
  - ⇒ Teorema do valor inicial
    - Assuma que $f(t)$ e $\dfrac{df(t)}{dt}$ tem transformada de Lapace, então:

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)}$$

  - ⇒ Teorema do valor final
    - Assuma que $f(t)$ e $\dfrac{df(t)}{dt}$ tem transformada de Lapace e que $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, então:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$$

Teorma do Valor Inicial e do Valor Final

- Demonstração
  - ⇒ Teorema do valor inicial
    - Assuma que $f(t)$ e $\frac{df(t)}{dt}$ tem transformada de Lapace, então:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \Big(\cancelto{0}{\lim_{s\to\infty} e^{-st}} \Big) dt = \lim_{s\to\infty} s\boldsymbol{F}(s) - f(0) \left\{ \text{Propriedade da diferenciação} \right.$$

$$0 = \lim_{s\to\infty} s\boldsymbol{F}(s) - f(0) \longrightarrow \boxed{\lim_{s\to\infty} s\boldsymbol{F}(s) = f(0)}$$