
Circuitos Elétricos 2

Circuitos Elétricos Aplicados

Prof. Dr.-Ing. João Paulo C. Lustosa da Costa

Universidade de Brasília (UnB)

Departamento de Engenharia Elétrica (ENE)

Laboratório de Processamento de Sinais em Arranjos

Caixa Postal 4386

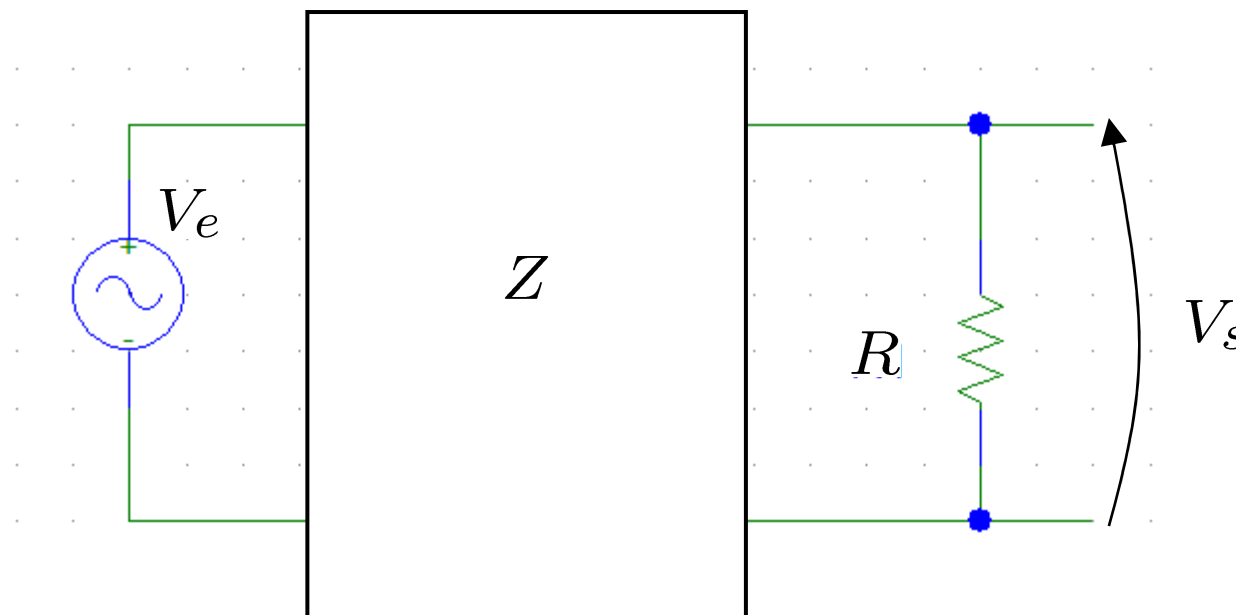
CEP 70.919-970, Brasília - DF



Homepage: <http://www.pgea.unb.br/~laspl>

Projeto de ganho de tensão com elementos passivos (1) – Aula 2

- É possível se ter um ganho de tensão apenas com elementos passivos? (Exemplo de projeto 8.25)



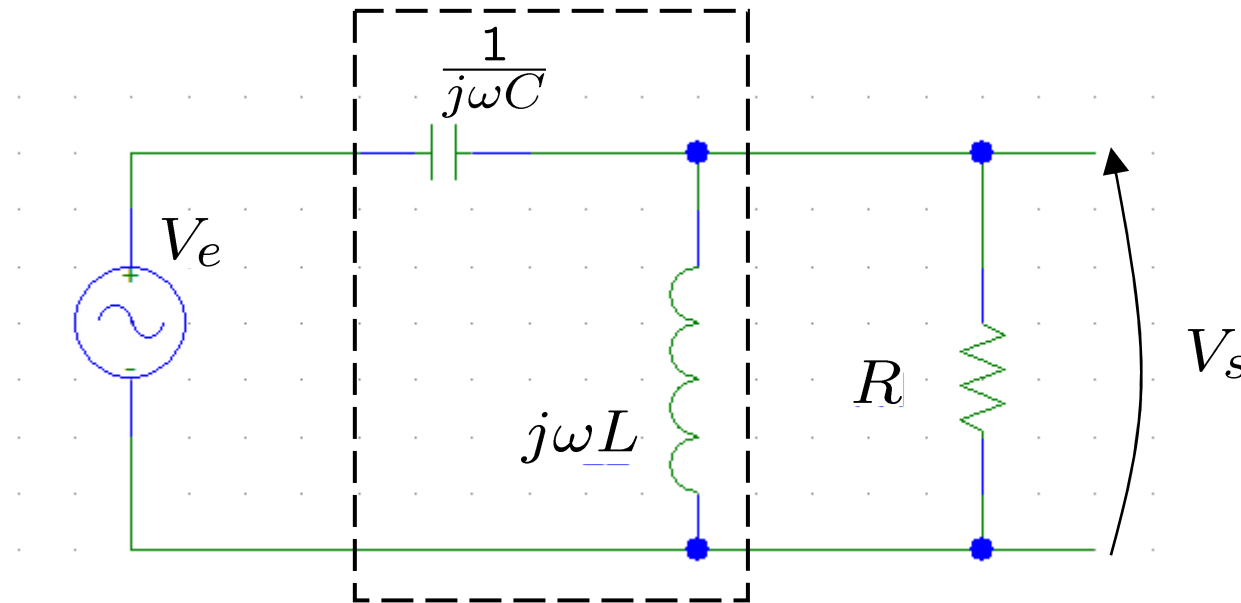
$$A = \left| \frac{V_s}{V_e} \right|$$



Projeto de ganho de tensão com elementos passivos (2) – Aula 2

- É possível se ter um ganho de tensão apenas com elementos passivos?

⇒ $A = 10$, $f = 1$ kHz e $R = 100\Omega$



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{(j\omega L) // R}{[(j\omega L) // R] + \frac{1}{j\omega C}}$$



Projeto de ganho de tensão com elementos passivos (3) – Aula 2

- Calculando o ganho...

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{L}{RC} + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j\omega L}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{RC}} \Rightarrow \text{circuito em ressonância } \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j\omega L}{\frac{L}{RC}} = j\omega RC$$

$$A = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \omega RC$$



Projeto de ganho de tensão com elementos passivos (4) – Aula 2

- ❑ Checando em MATLAB a curva de ganho variando f

$$A = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \left| \frac{j\omega L}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{RC}} \right|$$

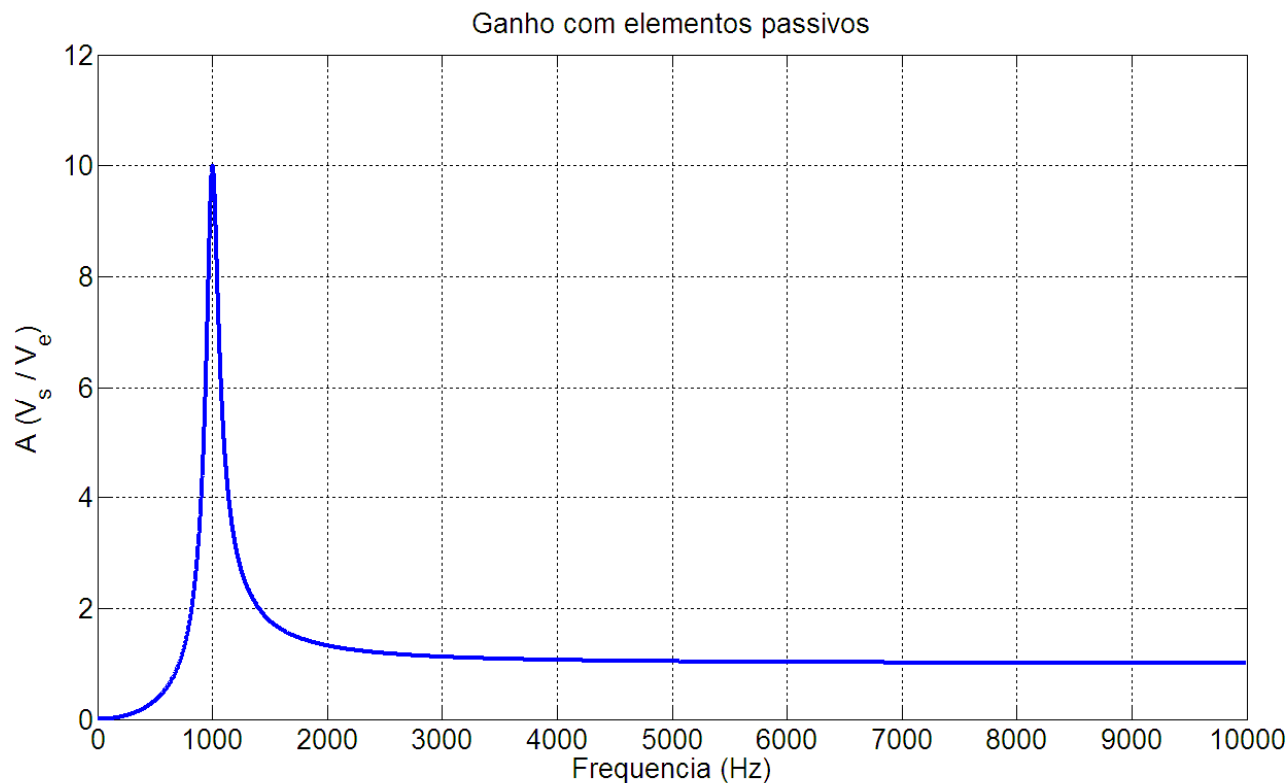
```
1 % Exemplo 3
2 % Circuitos Elétricos 2 & Circuitos Elétricos Aplicados
3 % Prof. Dr.-Ing. JP
4 % Dados do problema (exemplo de projeto 8.25)
5 - clear all;
6 - close all;
7 - f_dado = 1000; % H
8 - C = 15.9 * 10^-6; % Farad
9 - L = 1.59 * 10^-3; % Henry
10 - R = 100; % Ohm
11 % A = Vs/Ve
12 - f = 0.1:1:10^4;
13 - A_num = (i*2*pi*f*L);
14 - A_den = (i*(2*pi*f*L - ((2*pi*f*C).^(-1)) + L/(C*R)));
15 %
16 - axes('fontsize',20);
17 - plot(f,abs(A_num./A_den),'linewidth',3);
18 - xlabel('Frequencia (Hz)');
19 - ylabel('A (V_s / V_e)');
20 - title('Ganho com elementos passivos');
21 - grid on;
```



Projeto de ganho de tensão com elementos passivos (5) – Aula 2

- ☐ Checando em MATLAB a curva de ganho variando f

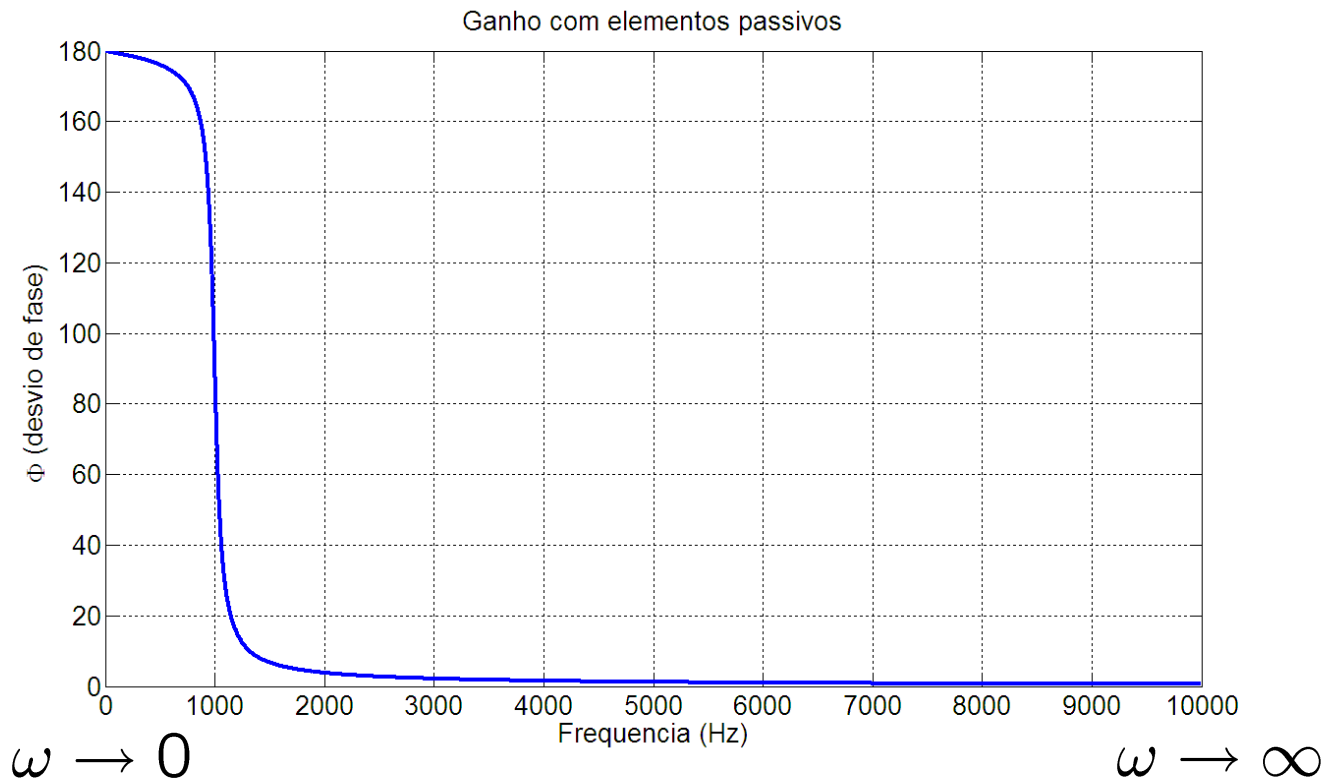
$$A = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \left| \frac{j\omega L}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{RC}} \right|$$



Projeto de ganho de tensão com elementos passivos (6) – Aula 2

- ☐ Checando em MATLAB a curva de ganho variando f

$$\Phi = \text{ang} \left(\frac{V_s}{V_e} \right) = \text{ang} \left(\frac{j\omega L}{j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{L}{RC}} \right)$$



Desempenho das redes em função de frequência (1)

□ Capítulos anteriores

⇒ frequência fixa em 60Hz

- desejava-se encontrar a magnitude ou a fase, ou seja, o fasor de tensão ou de corrente ou de impedância
- aplicação em sistemas de transmissão de energia elétrica

□ Neste capítulo

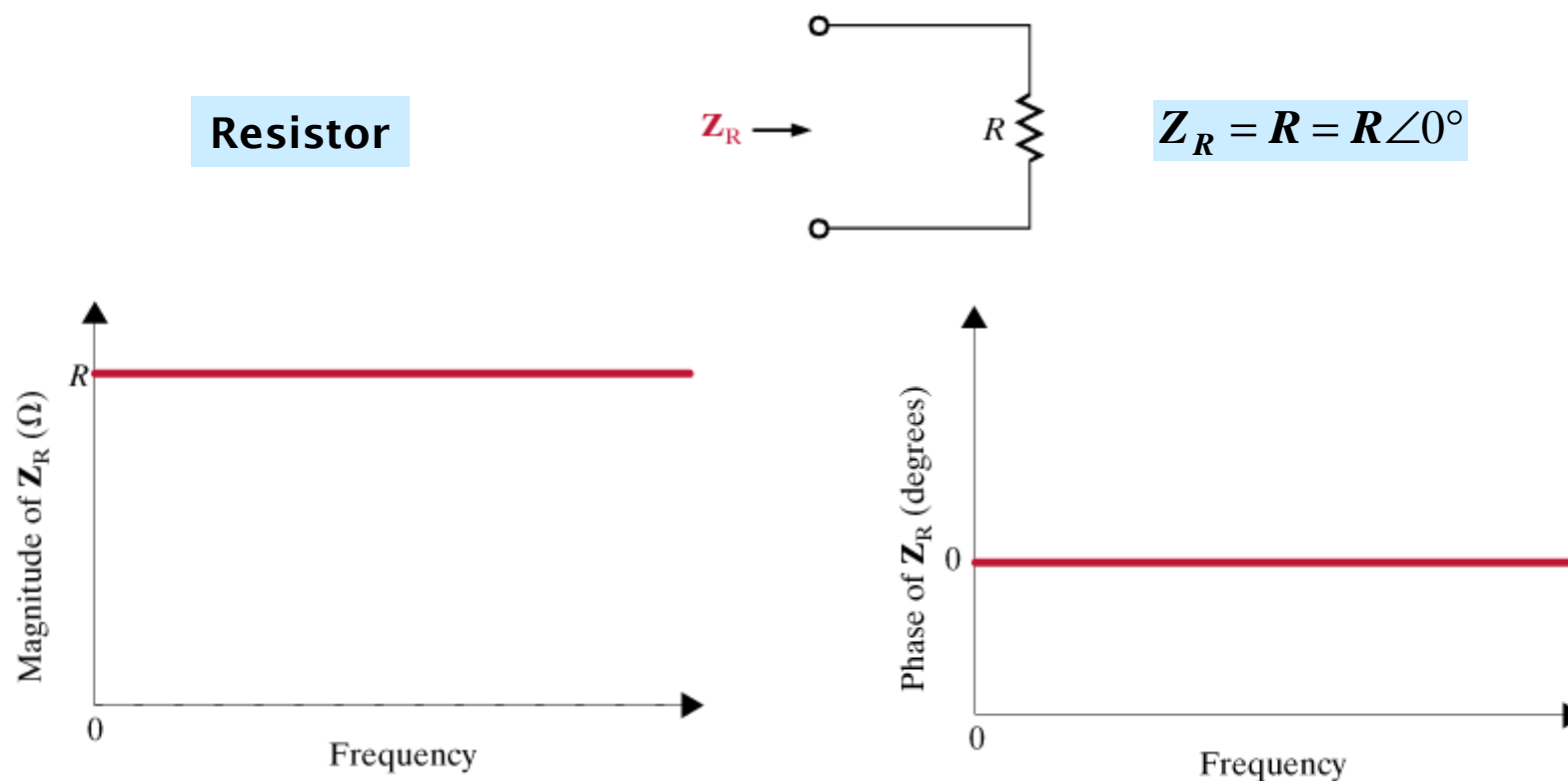
⇒ a frequência é variável

- a magnitude e a fase são funções da frequência
 - análise em função da frequência
- aplicação em sistemas de comunicação e em sistemas eletrônicos



Desempenho das redes em função de frequência (2)

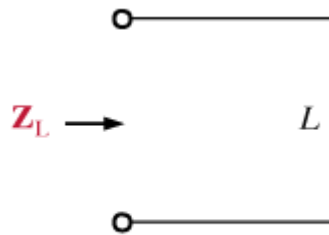
- Resposta em função da frequência para um resistor



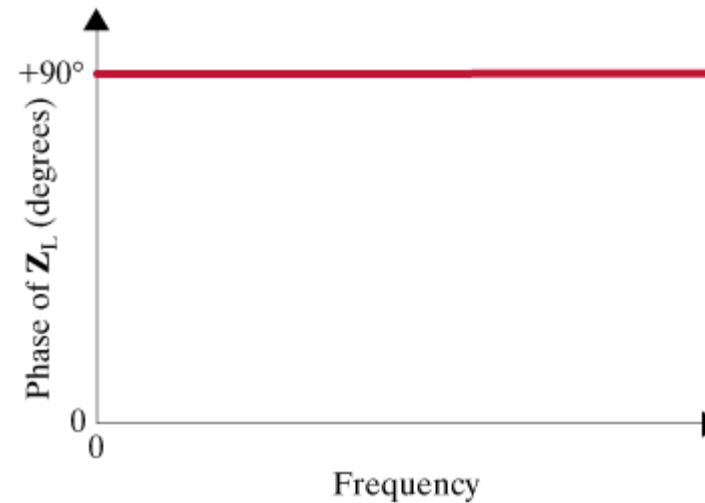
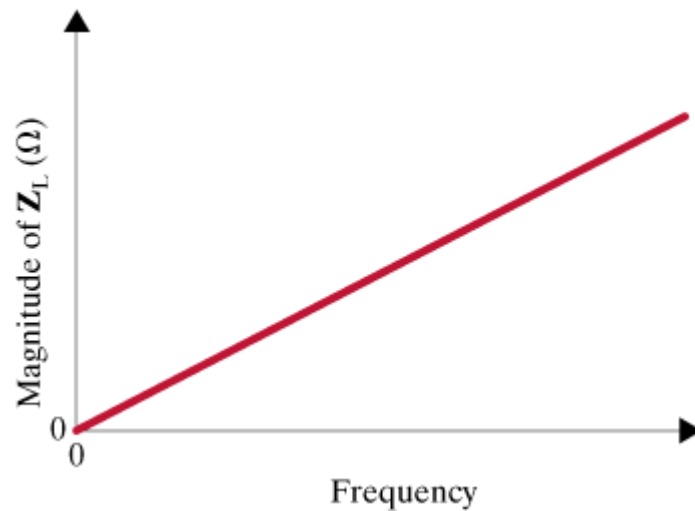
Desempenho das redes em função de frequência (3)

- Resposta em função da frequência para um indutor

Indutor



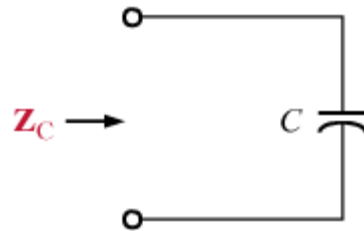
$$Z_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$



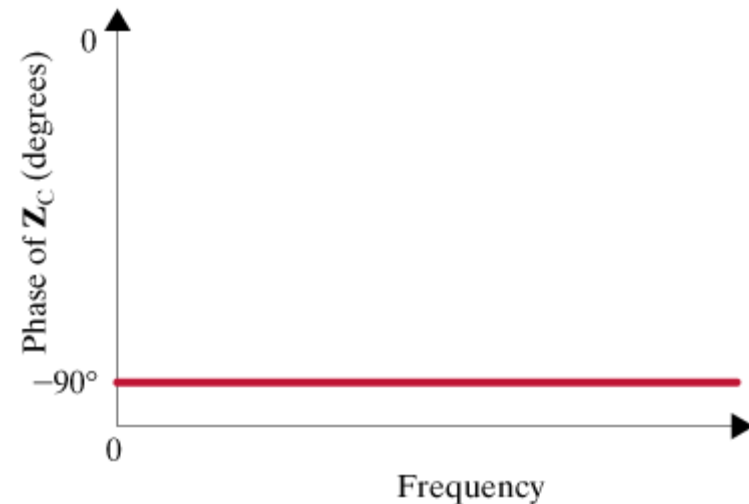
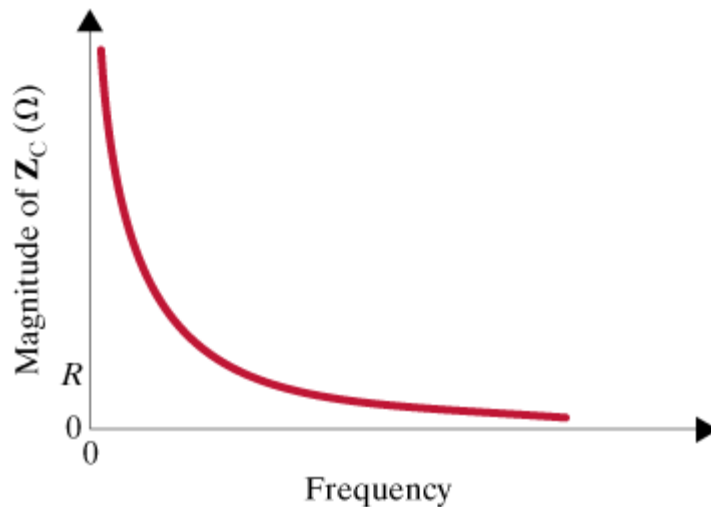
Desempenho das redes em função de frequência (4)

- Resposta em função da frequência para um capacitor

Capacitor

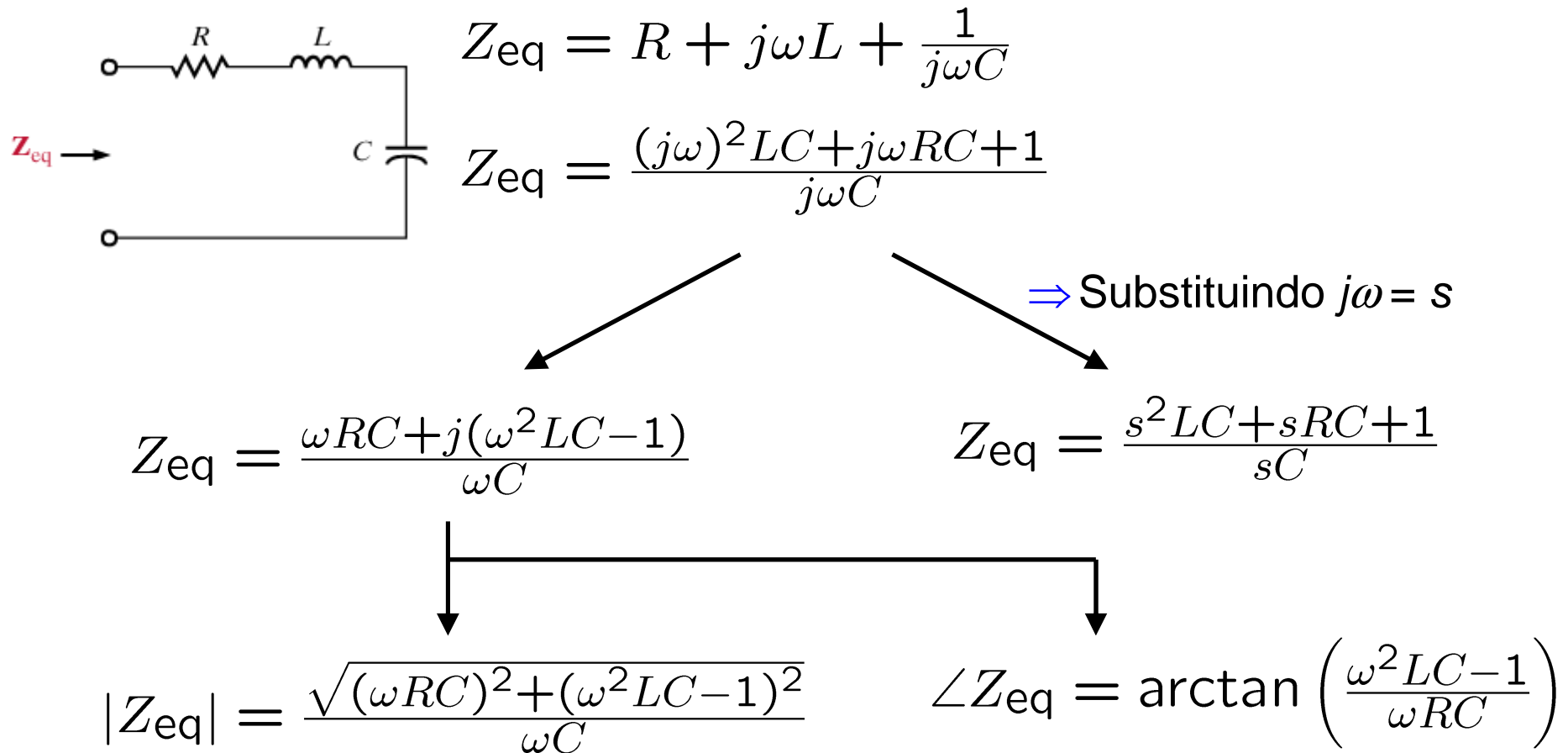


$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$



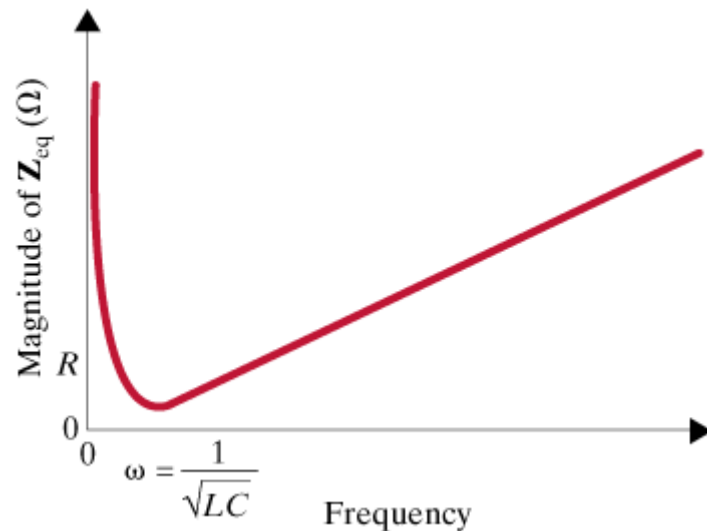
Desempenho das redes em função de frequência (5)

- Resposta em função da frequência para um circuito RLC

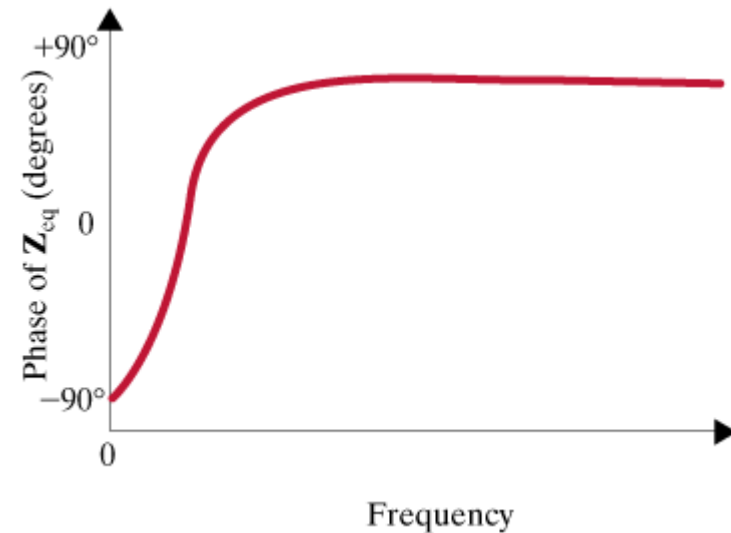


Desempenho das redes em função de frequência (6)

- Resposta em função da frequência para um circuito RLC



$$|Z_{eq}| = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}{\omega C}$$



$$\angle Z_{eq} = \arctan \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC} \right)$$



Desempenho das redes em função de frequência (7)

- Resposta em função da frequência para um circuito RLC

$$Z_{eq} = \frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC}$$

- Notação simplificada para componentes básicos

$$Z_R(s) = R \quad Z_L(s) = sL \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

- Para todos os casos a serem estudados, a impedância é da forma

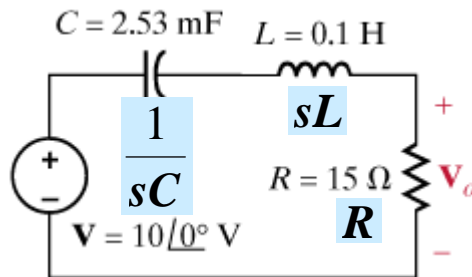
$$Z(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

⇒ os coeficientes dos polinômios no numerador e no denominador são reais por serem funções de L, R e C que são reais.



Desempenho das redes em função de frequência (8)

□ Exemplo 12.1 da referência [1]



$$V_o(s) = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} V_s$$

$$V_o(s) = \frac{sRC}{s^2LC + sRC + 1} V_s$$

$$s = j\omega$$

$$V_o(s) = \frac{j\omega RC}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1} V_s$$

$$V_o(s) = \frac{j\omega \cdot 15 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}}{(j\omega)^2 (0,1 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}) + j\omega (15 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}) + 1} 10\angle 0^\circ$$

⇒ MATLAB para plotar gráficos de resposta em frequência



Desempenho das redes em função de frequência (9)

- ❑ Usando MATLAB para encontrar magnitude e fase

$$Z(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

```
>> num = [a_m, a_{m-1}, ..., a_1, a_0];  
>> den = [b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0];  
>> freqs(num, den)
```

$$V_o(s) = \frac{j\omega \cdot 15 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}}{(j\omega)^2 (0,1 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}) + j\omega (15 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}) + 1} 10 \angle 0^\circ$$

$$a_1 = 15 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3} \cdot 10$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 15 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}$$

$$b_2 = 0,1 \cdot 2,53 \cdot 10^{-3}$$

```
» num=[15*2.53*1e-3,0];  
» den=[0.1*2.53*1e-3,15*2.53*1e-3,1];  
» freqs(num,den)
```



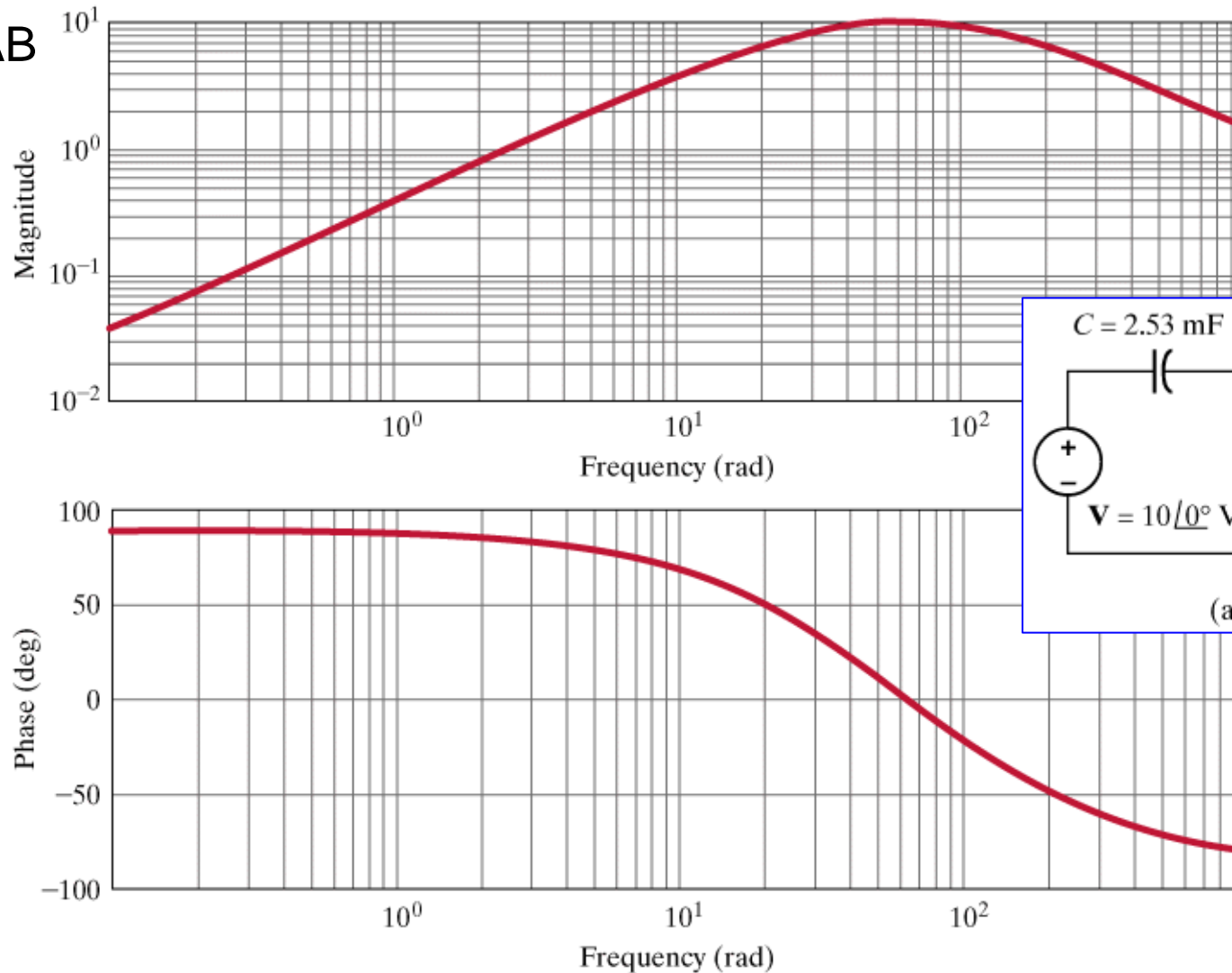
Desempenho das redes em função de frequência (10)

□ MATLAB

Log-log
plot

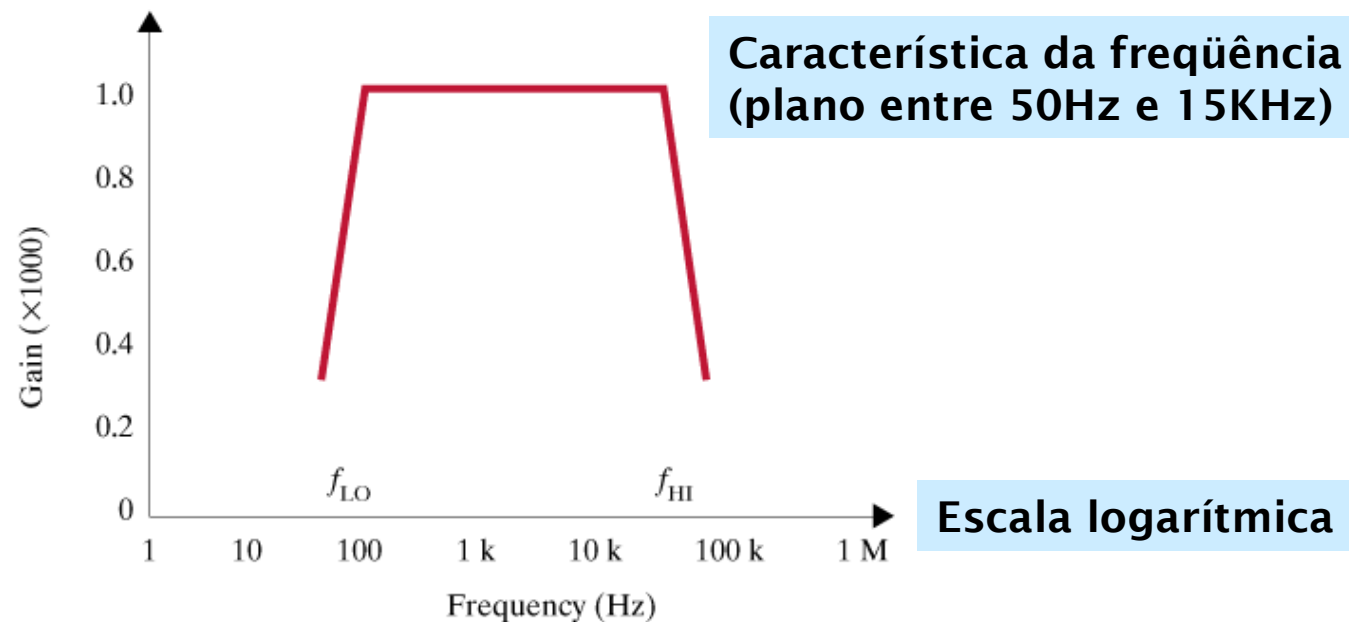
$$\frac{V_o}{V}$$

Semi-log
plot



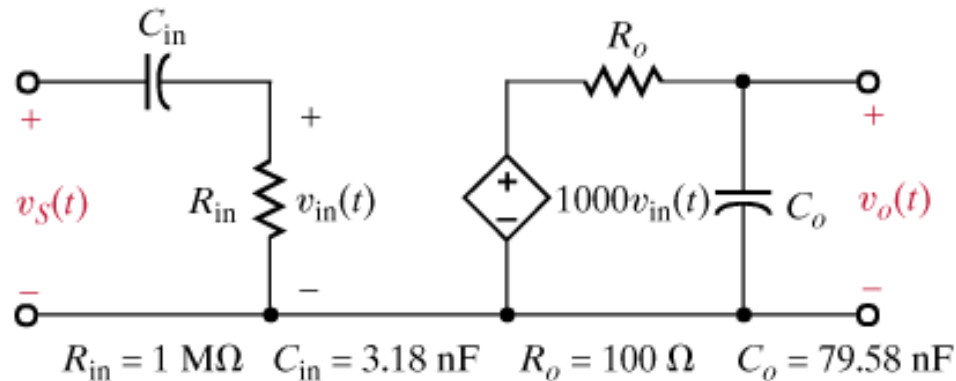
Desempenho das redes em função de frequência (10)

- Figura 12.6 da referência [1]: exemplo de amplificador estéreo



Desempenho das redes em função de frequência (10)

- Figura 12.6 da referência [1]: exemplo de amplificador estéreo



Amplificador operacional

$$G_v(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_F(j\omega)} \longrightarrow G_v(s) = \frac{V_s(s)}{V_F(s)}$$

$$G_v(s) = \frac{V_e(s)}{V_F(s)} \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \left(\frac{R_e}{R_e + \frac{1}{sC_e}} \right) 1000 \left(\frac{\frac{1}{sC_s}}{R_s + \frac{1}{sC_s}} \right)$$

$$G_v(s) = \left(\frac{sC_e R_e}{sC_e R_e + 1} \right) 1000 \left(\frac{1}{sC_s R_s + 1} \right)$$



Desempenho das redes em função de frequência (10)

□ Figura 12.6 da referência [1]: exemplo de amplificador estéreo

$$G_v(s) = \left(\frac{sC_e R_e}{sC_e R_e + 1} \right) 1000 \left(\frac{1}{sC_s R_s + 1} \right)$$

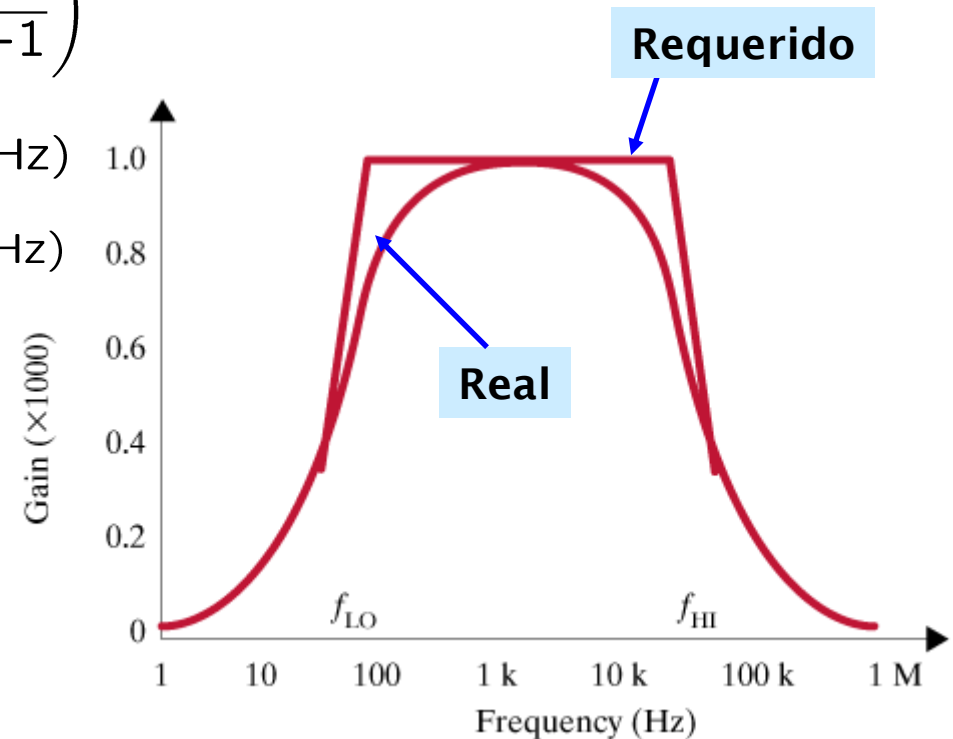
$$G_v(s) = \left(\frac{s}{s + 100\pi} \right) 1000 \left(\frac{1}{\frac{s}{40000\pi} + 1} \right)$$

$$(C_e R_e)^{-1} = (3,18 \cdot 10^{-9} \cdot 10^6)^{-1} \approx 100\pi (50\text{Hz})$$

$$(C_s R_s)^{-1} = (79,58 \cdot 10^{-9} \cdot 10)^{-1} \approx 40000\pi (20\text{kHz})$$

$$100\pi \ll |s| \ll 40000\pi$$

$$G(s) \approx \frac{s}{s} 1000 \frac{40000\pi}{40000\pi} \approx 1000$$



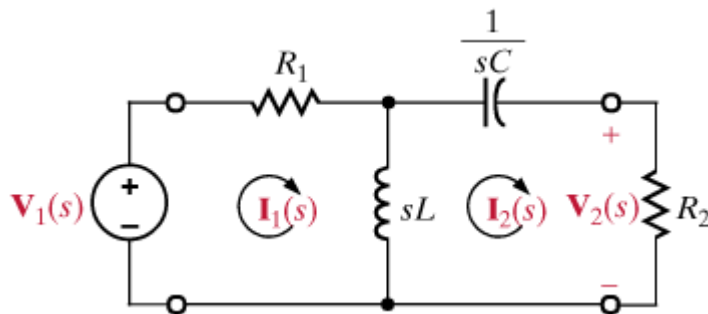
Desempenho das redes em função de frequência (11)

Funções de rede

⇒ Nomenclatura para as funções de transferência para um certo tipo de entrada e um certo tipo de saída

Ent	Saída	Func. De transf	Símbolo
Tensão	Tensão	Ganho em tensão	G_v(s)
Corrente	Tensão	Transimpedância	Z(s)
Corrente	Corrente	Ganho em corrente	G_i(s)
Tensão	Corrente	Transadmitância	Y(s)

Exemplo 12.2 da referência [1]



P/ achar as funções, de transferência temos que resolver o circuito

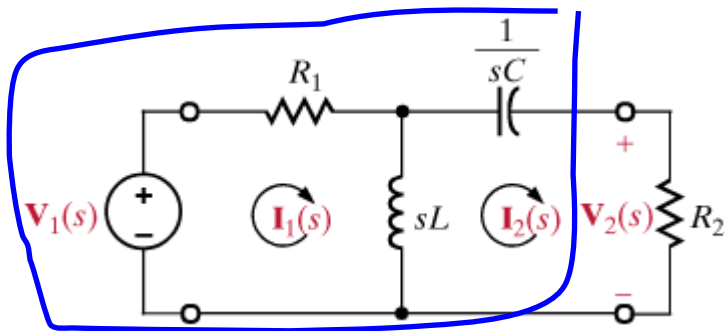
$$Y_T(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \Rightarrow \text{Transadmitância}$$

$$G_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \Rightarrow \text{Ganho de tensão}$$



Desempenho das redes em função de frequência (12)

- Exemplo 12.2 da referência [1]



$$Y_T(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \Rightarrow \text{Transadmitância}$$

$$G_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \Rightarrow \text{Ganho de tensão}$$

$$V_{OC}(s) = \frac{sL}{sL + R_1} V_1(s)$$

Livro usa análise de malhas. Usaremos Teorema de Thevenin

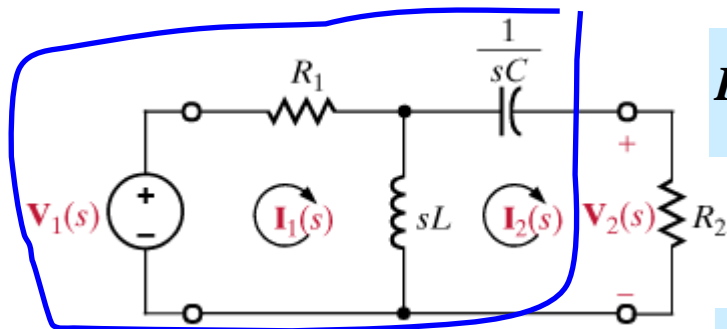
$$Z_{TH}(s) = \frac{1}{sC} + R_1 \parallel sL = \frac{1}{sC} + \frac{sLR_1}{sL + R_1}$$

$$Z_{TH}(s) = \frac{s^2 LCR_1 + sL + R_1}{sC(sL + R_1)}$$



Desempenho das redes em função de frequência (13)

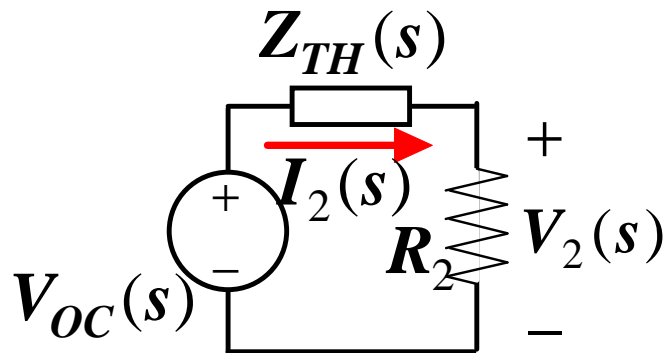
□ Exemplo 12.2 da referência [1]



$$I_2(s) = \frac{V_{OC}(s)}{R_2 + Z_{TH}(s)}$$

$$= \frac{\frac{sL}{sL + R_1} V_1(s)}{R_2 + \frac{s^2 LCR_1 + sL + R_1}{sC(sL + R_1)}} \times \frac{sC(sL + R_1)}{sC(sL + R_1)}$$

$$Y_T(s) = \frac{s^2 LC}{s^2 (R_1 + R_2) LC + s(L + R_1 R_2 C) + R_1}$$



$$G_v(s) = \frac{V_s(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2 I_2(s)}{V_1(s)} = R_2 Y_T(s)$$

Desempenho das redes em função de frequência (14)

PÓLOS E ZEROS

(Mais nomenclatura)

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Função de rede qualquer

Usando raízes, qq polinômio pode ser expresso como produtos de termos de primeira ordem

$$H(s) = K_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

z_1, z_2, \dots, z_m = zeros da função

p_1, p_2, \dots, p_n = pólos da função



Desempenho das redes em função de frequência (15)

□ Exemplo

zeros : $z_1 = -1$,

pólos : $p_1 = -2 + j2, p_2 = -2 - j2$

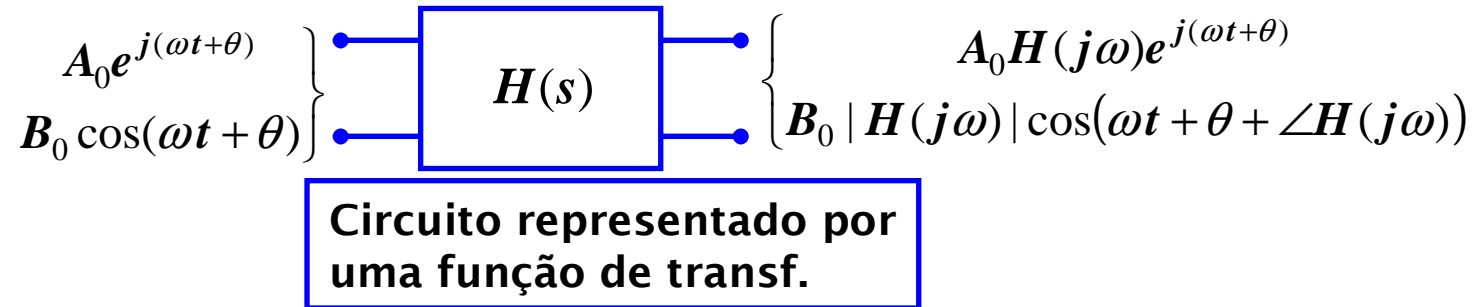
$H(0) = 1$

$$H(s) = K_0 \frac{(s+1)}{(s+2-j2)(s+2+j2)} = K_0 \frac{s+1}{s^2+4s+8}$$

$$H(0) = K_0 \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow H(s) = 8 \frac{s+1}{s^2+4s+8}$$



Análise de frequência com entradas senoidais (1)



- P/ estudar o comportamento do circuito como função da frequência, analisamos a função $H(j\omega)$ como função de ω .

⇒ Notação

$$M(\omega) = |H(j\omega)|$$

$$\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

- Gráficos $M(\omega)$, $\phi(\omega)$, como função de ω são chamados de diagrama de Bode.

$$\text{DIAGRAMAS DE BODE} \begin{cases} 20 \log_{10}(M(\omega)) \\ \phi(\omega) \end{cases} \text{ vs } \log_{10}(\omega)$$



Análise de frequência com entradas senoidais (2)

❑ História do decibel

Surgido para medir potência relativa (razão)

$$P_2 |_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P_2 |_{dB} = 10 \log \frac{V_2^2}{V_1^2} = 10 \log \frac{I_2^2}{I_1^2}$$

Usado

$$V |_{dB} = 20 \log_{10} |V|$$

$$I |_{dB} = 20 \log_{10} |I|$$

$$G |_{dB} = 20 \log_{10} |G|$$

Usando escala logarítmica, o gráfico tem características bem simples.



Análise de frequência com entradas senoidais (3)

Forma geral da função

Independente da freq.

Polos/zeros na origem

$$H(j\omega) = \frac{K_0 (j\omega)^{\pm N} (1 + j\omega\tau_1) [1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2] \dots}{(1 + j\omega\tau_a) [1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2] \dots}$$

$$\log(AB) = \log A + \log B$$

$$\log\left(\frac{N}{D}\right) = \log N - \log D$$

Termos de prim. ordem

Termos quadráticos representam pólos/zeros conjugados



Análise de frequência com entradas senoidais (4)

Forma geral da função

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} |H(j\omega)| &= 20\log_{10} K_0 \pm N 20\log_{10} |j\omega| \\ &+ 20\log_{10} |1 + j\omega\tau_1| + 20\log_{10} |1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2| + \dots \\ &- 20\log_{10} |1 + j\omega\tau_a| - 20\log_{10} |1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2| - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle z_1 z_2 &= \angle z_1 + \angle z_2 \\ \angle \frac{z_1}{z_2} &= \angle z_1 - \angle z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= 0 \pm N 90^\circ \\ &+ \tan^{-1} \omega\tau_1 + \tan^{-1} \frac{2\zeta_3\omega\tau_3}{1 - (\omega\tau_3)^2} + \dots \\ &- \tan^{-1} \omega\tau_a - \tan^{-1} \frac{2\zeta_b\omega\tau_b}{1 - (\omega\tau_b)^2} - \dots \end{aligned}$$

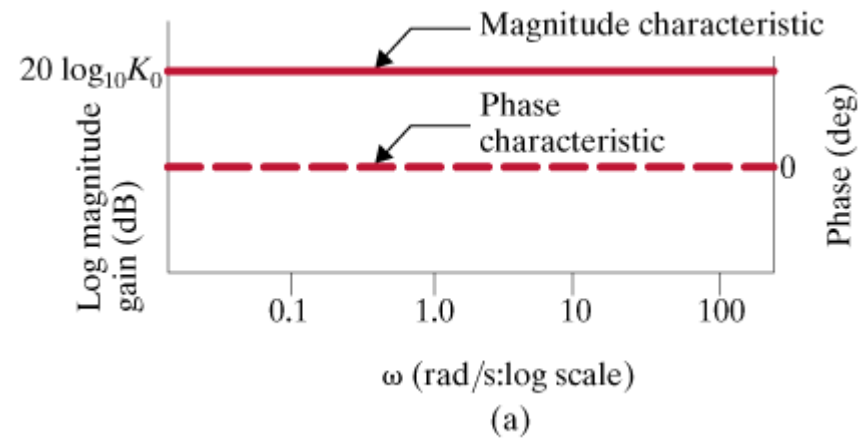
Coloque os termos básicos separadamente e adicione os resultados para obter a resposta final

Vamos examinar cada termo separadamente



Análise de frequência com entradas senoidais (5)

Termo constante



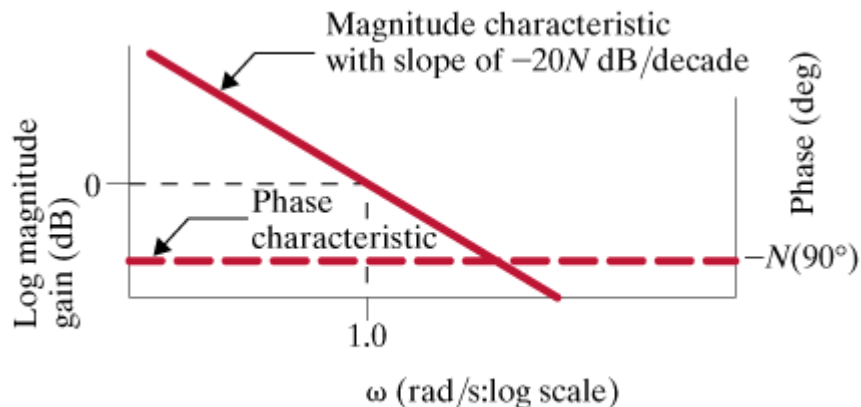
Análise de frequência com entradas senoidais (6)

o eixo x é $\log_{10} \omega$

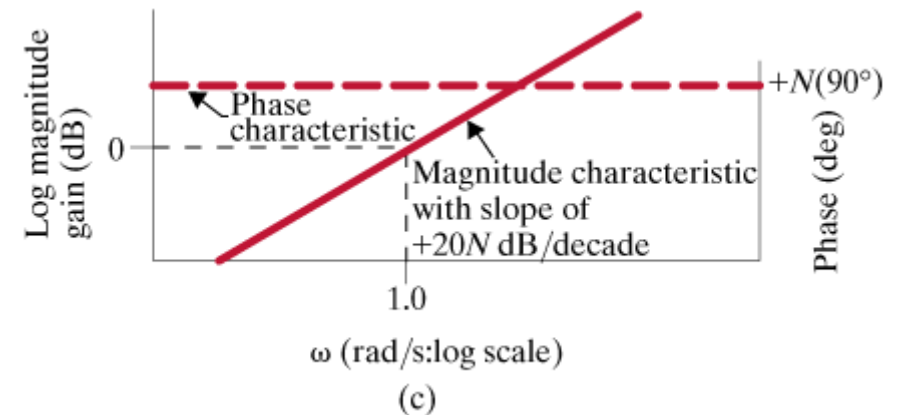
Isto é uma linha reta

Pólos/Zeros na origem

$$(j\omega)^{\pm N} \rightarrow \begin{cases} |(j\omega)^{\pm N}|_{dB} = \pm N \times 20 \log_{10}(\omega) \\ \angle(j\omega)^{\pm N} = \pm N 90^\circ \end{cases}$$



Pólo



Zero



Análise de frequência com entradas senoidais (7)

Pólo ou zero simples

$$1 + j\omega\tau \begin{cases} |1 + j\omega\tau|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \\ \angle(1 + j\omega\tau) = \tan^{-1} \omega\tau \end{cases}$$

$$\omega\tau \ll 1 \Rightarrow |1 + j\omega\tau|_{dB} \approx 0 \text{ assíntota de baixa freq}$$

$$\angle(1 + j\omega\tau) \approx 0^\circ$$

$$\omega\tau \gg 1 \Rightarrow |1 + j\omega\tau|_{dB} \approx 20 \log_{10} \omega\tau \text{ assíntota de alta freq. (20dB/dec)}$$

$$\angle(1 + j\omega\tau) \approx 90^\circ$$

As duas assíntotas se encontram em $\omega\tau = 1$ (freq. de corte)

Comportamento nas vizinhanças do joelho

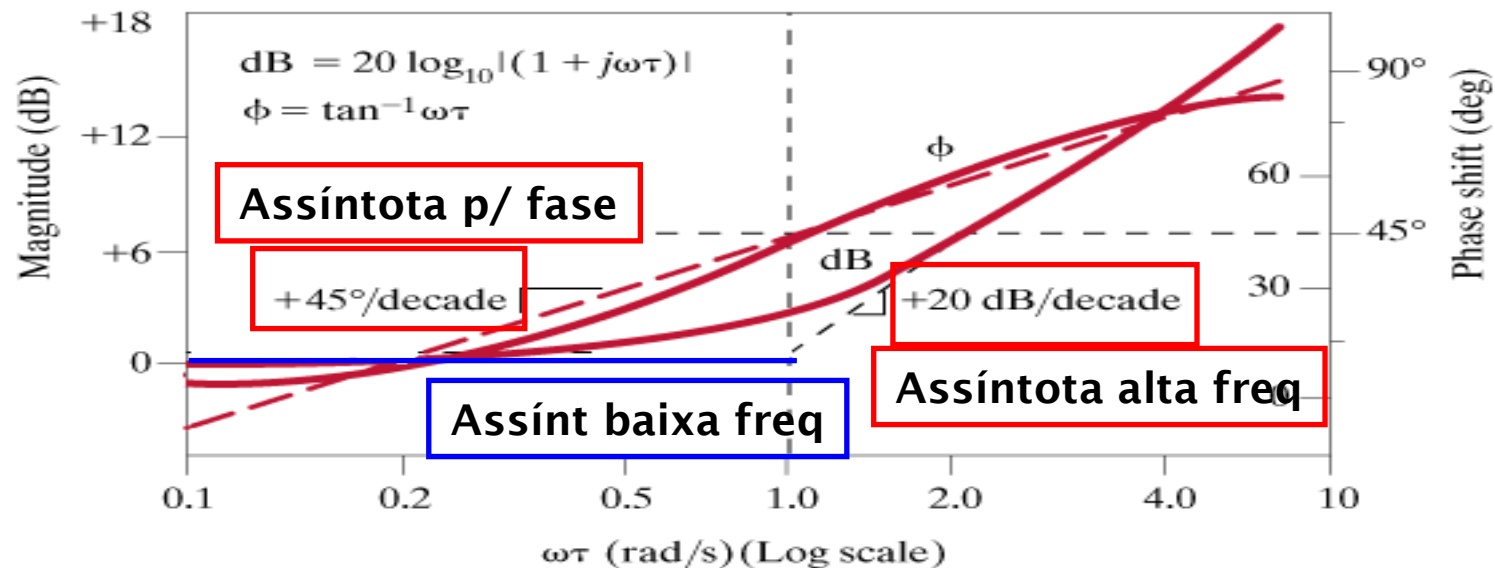
	Freq	Assíntota	Curva	Dist. da assíntota
f. corte/joelho	$\omega\tau = 1$	0dB	3dB	3
oitava acima	$\omega\tau = 2$	6dB	7db	1
oitava abaixo	$\omega\tau = 0.5$	0dB	1dB	1



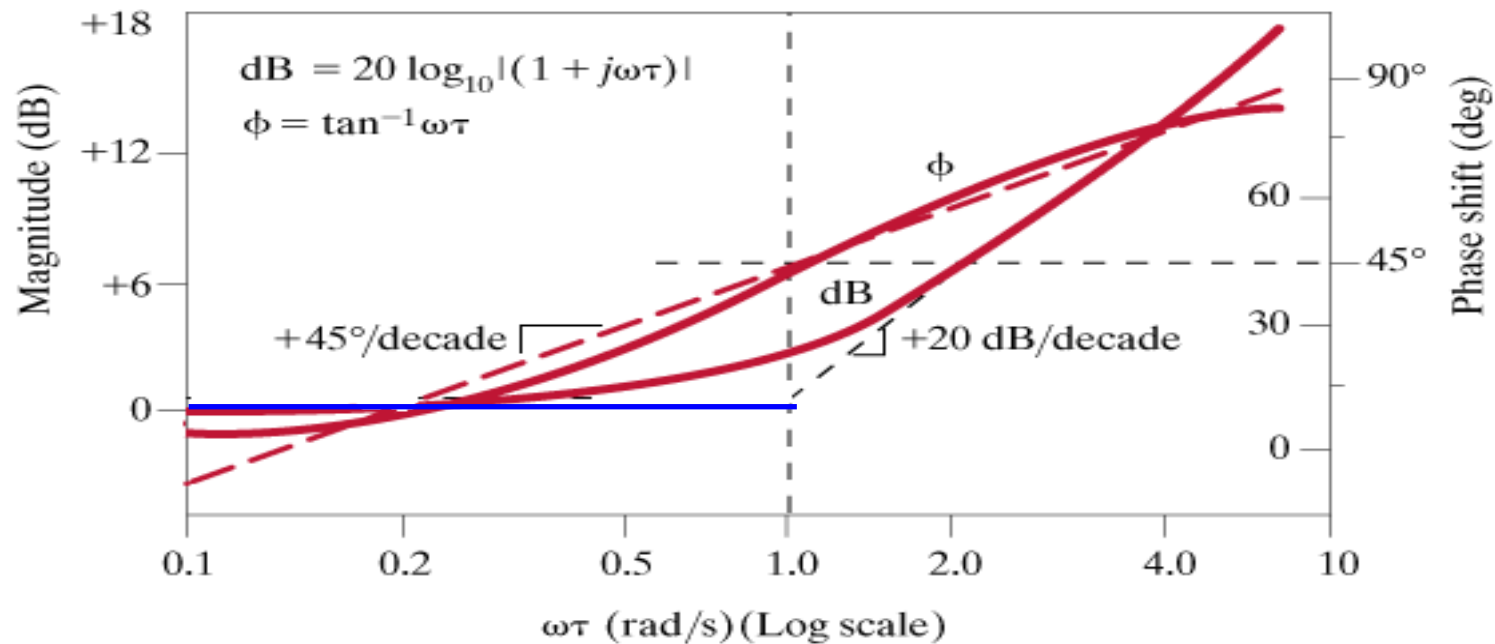
Análise de frequência com entradas senoidais (8)

Comportamento nas vizinhanças do joelho

	Freq	Assíntota	Curva	Dist. da assíntota
f. corte/joelho	$\omega\tau = 1$	0dB	3dB	3
oitava acima	$\omega\tau = 2$	6dB	7db	1
oitava abaixo	$\omega\tau = 0.5$	0dB	1dB	1



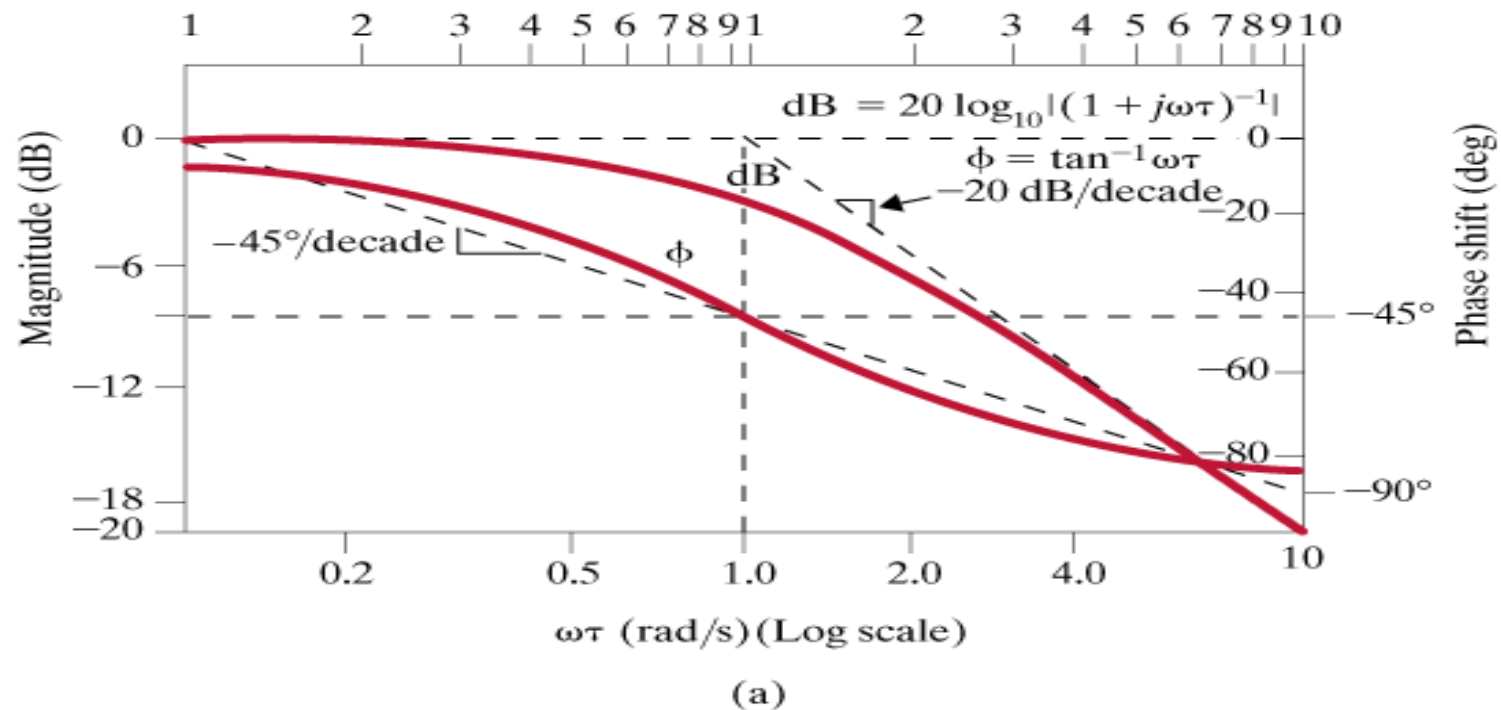
Análise de frequência com entradas senoidais (9)



Zero simples



Análise de frequência com entradas senoidais (10)



Pólo simples



Gráfico de magnitude e fase (1)

Desenhe assíntotas para cada termo

$$G_v(j\omega) = \frac{10(0.1j\omega + 1)}{(j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)}$$

Corte : 1,10,50

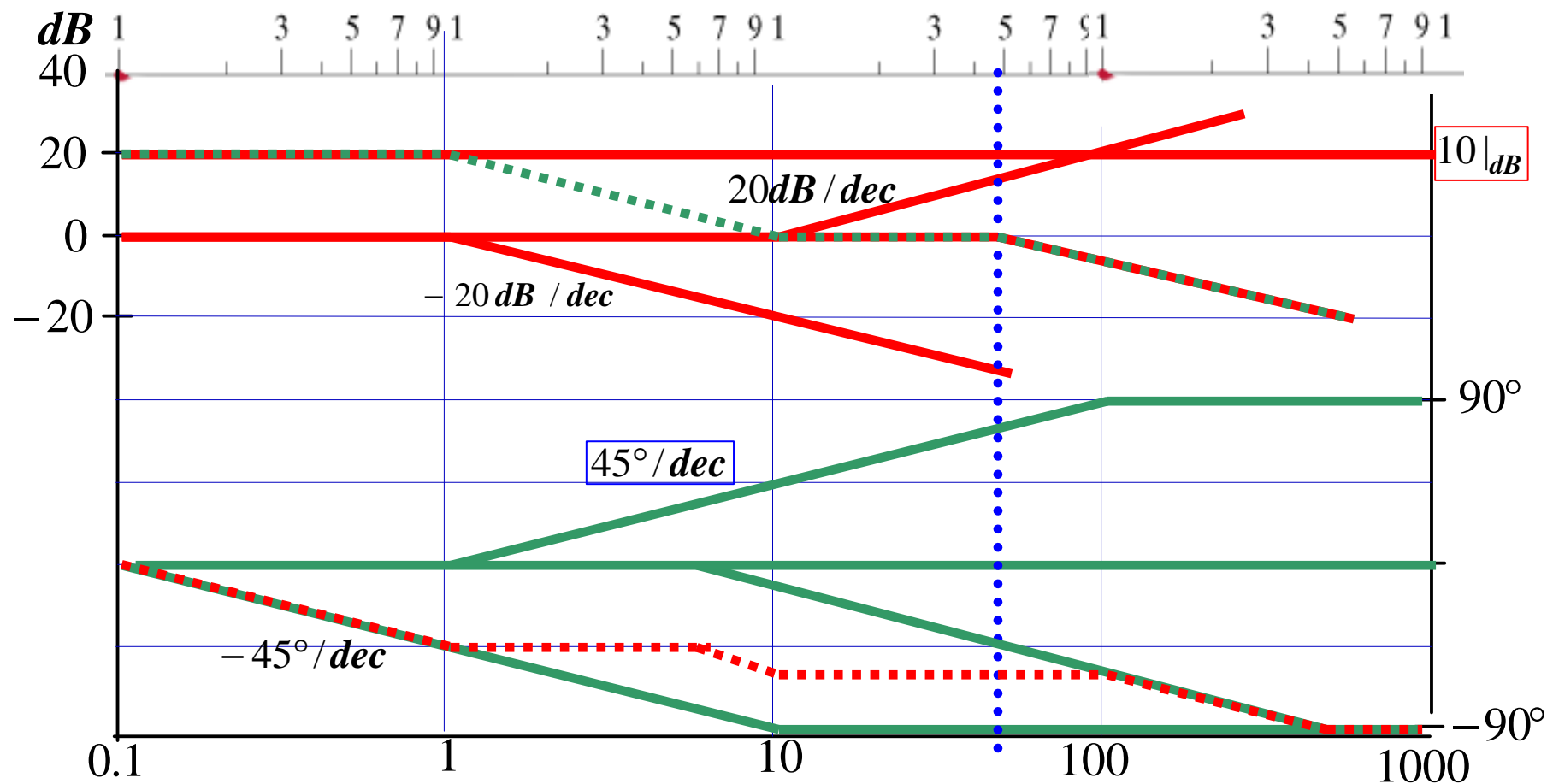


Gráfico de magnitude e fase (2)

