Universitatea Politehnica din București
Facultatea de Automatică și Calculatoare
Departamentul de Calculatoare

ARBORI BICOLORI

Introducere

- Arborii binari de căutare prezintă un dezavantaj major
- Performanțele lor sunt bune dacă datele sunt inserate în ordine aleatoare
- Dacă însă datele sunt inserate în ordine crescătoare sau descrescătoare, aceste performanțe se degradează

Introducere

- Atunci când valorile inserate sunt deja ordonate (sau aproape ordonate), arborele rezultat este neechilibrat
- Arborii neechilibrați își pierd capabilitatea de căutare (sau inserare sau ștergere) rapidă a unui element

Arbori bicolori

- Arborii bicolori sunt arbori binari de căutare cu anumite proprietăți în plus
- Utilizarea arborilor bicolori reprezintă, în majoritatea cazurilor, cea mai eficientă soluție de echilibrare, cel puțin în cazul în care datele sunt păstrate în memorie

Arbori bicolori

- Arborii bicolori sunt arbori binari de căutare echilibraţi, fiind prima dată definiţi de Rudolf Bayer în 1972, sub formă de arbori simetrici
- Complexitatea operaţiei de căutare este egală cu **O(log n)**, **n** fiind numărul de noduri din arbore, datorită modului în care nodurile sunt plasate în mod simetric în subarborii stângi sau drepţi

Utilizarea arborilor bicolori

- Implementarea claselor TreeSet și TreeMap în Java
- Implementarea Completely Fair Scheduler (CFS) în kernelul Linux
- În cazul CFS, un arbore bicolor implementeză un “timeline” pentru executarea task-urilor viitoare
- Nodurile arborelui sunt etichetate în funcție de timpul de execuție al procesorului, exprimat în nanosecunde

Operaţii cu arbori bicolori

- Căutarea într-un arbore bicolor funcţionează la fel ca într-un arbore binar
- Inserarea și ștergerea se modifică semnificativ

Inserarea de sus în jos

- Inserarea în arborii bicolori se numește inserare de sus în jos (top-down)
- Arborele va suferi modificări structurale atunci când algoritmul îl parcurge de sus în jos, pentru a găsi locul în care va insera un nod

Inserarea de jos în sus

- O altă posibilitate este inserarea de jos în sus (bottom-up)
- Aceasta presupune găsirea locului în care se va insera nodul și efectuarea ulterioară a unor modificări structurale în arbore
- Inserarea de jos în sus este mai puțin eficientă, deoarece presupune două parcurgeri ale arborelui

Observații

- Un arbore fără ramuri degenerează într-o listă înlănțuită
- Ca și în cazul unei liste înlănțuite, trebuie să parcurgem, în medie, jumătate din numărul total de elemente, pentru a găsi un anume element

Observații

- Căutarea printr-un astfel de arbore, cu 10.000 de elemente, va necesita 5.000 de comparații, în timp ce, pentru un arbore echilibrat, numărul de comparații este cel mult 14
- Pentru date deja sortate, este indiferent dacă folosim un arbore binar de căutare sau o listă înlănțuită

Observații

- Datele parțial sortate vor genera arbori parțial dezechilibrați
- Deși nu au performanțe atât de scăzute ca arborii cu grad maxim de dezechilibru, arborii parțial dezechilibrați nu reprezintă o soluție optimă în ceea ce privește căutarea

Echilibrarea arborilor

- Fiecare nod din arbore trebuie să aibă un număr aproximativ egal de descendenți, atât în partea stângă, cât și în partea dreaptă
- Într-un arbore bicolor, echilibrarea este asigurată prin implementarea operației de inserare

Operația de inserare

- La inserarea unui element, funcția care efectuează operația verifică dacă se mențin anumite caracteristici ale arborelui
- În caz contrar, funcția modifică structura arborelui
- Prin menținerea acestor caracteristici, se păstrează starea de echilibrare a arborelui

Caracteristicile arborilor bicolori

- 1. Nodurile sunt colorate, fiecare nod este fie negru, fie roșu
- 2. Pe parcursul inserării și ștergerii, se asigură păstrarea unor aranjamente prestabilite ale acestor culori

Reguli de colorare

- La inserarea (sau la ștergerea) unui nod, trebuie respectate anumite reguli, numite **reguli de colorare**
- Respectarea acestor reguli asigură echilibrarea arborelui

Reguli de colorare

- **1**. Fiecare nod este **roșu** sau **negru**
- **2**. Rădăcina are întotdeauna culoarea **neagră**
- **3**. Dacă un nod este **roșu**, fiii săi trebuie să fie **negri** (reciproca nu este neapărat adevărată)
- **4**. Toate căile de la rădăcină spre frunze, sau spre fiii inexistenți, trebuie să conțină un număr egal de noduri **negre**

Observații

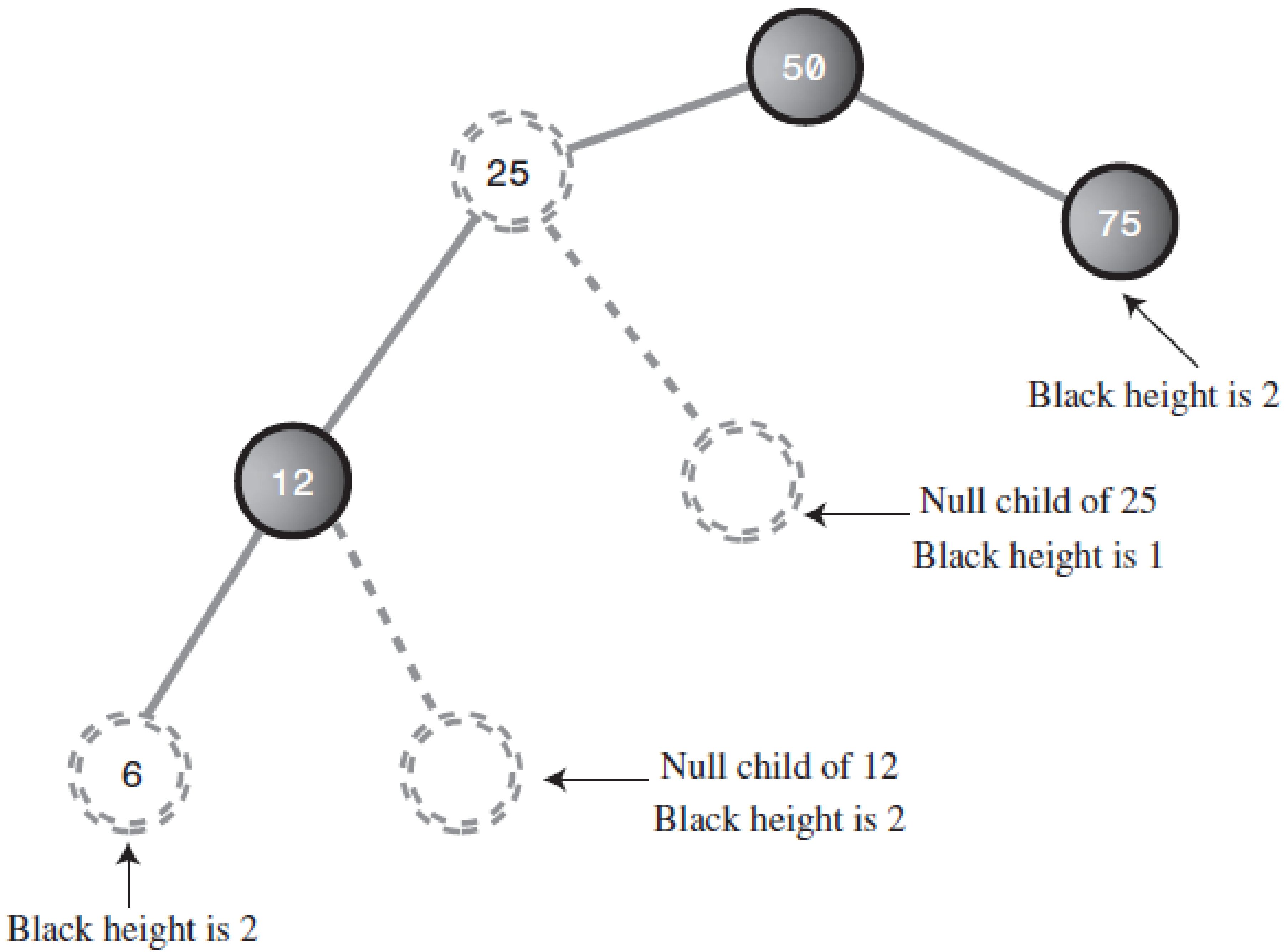
- Fiul inexistent din ultima regulă este de fapt un loc în care se poate atașa un fiu unui nod care nu este frunză
- Acesta este un potențial fiu stâng al unui nod cu un fiu drept, sau invers, un potențial fiu drept al unui nod cu un fiu stâng

Observații

- Numărul nodurilor negre de pe calea dintre rădăcină și o anumită frunză se numește **înălțime neagră**
- Ultima regulă mai poate fi enunțată astfel:
- **4**. Înălțimea **neagră** trebuie să fie constantă pentru toate căile de la rădăcină spre frunze

Fii inexistenți

- Un fiu inexistent este un posibil fiu al unui nod care nu este frunză
- Acest fiu nu există însă în arbore


50
25
75
12
6
Black height is 2
Null child of 25
Black height is 1
Null child of 12
Black height is 2
Black height is 2

Observații

- Calea de la rădăcină până la fiul drept al lui 25 (inexistent) are numai un singur nod negru, spre deosebire de căile spre nodurile 6 sau 75, care au două astfel de noduri
- Acest arbore nu respectă regula 4, deși ambele căi spre nodurile frunză au același număr de noduri negre

Observații

- Într-un arbore bicolor nu există pe un drum două noduri adiacente de culoare roşie, deoarece orice nod roşu are ambii fii de culoare neagră

Observații

- Dacă se consideră că cel mai scurt drum din arbore are numai noduri negre în număr de **k**, atunci cel mai lung drum din arbore are maxim dublu noduri, **2 * k**
- Toate drumurile au acelaşi număr de noduri negre, fapt care conduce la concluzia că drumul cel mai lung poate fi format doar din perechi de noduri adiacente de culori opuse

Observații

- Fiecare nod nou creat şi inserat are culoarea iniţială **roşie**
- Astfel se încearcă evitarea situaţiei în care este încălcată proprietatea că toate drumurile din arbore au acelaşi număr de noduri negre

Rotații

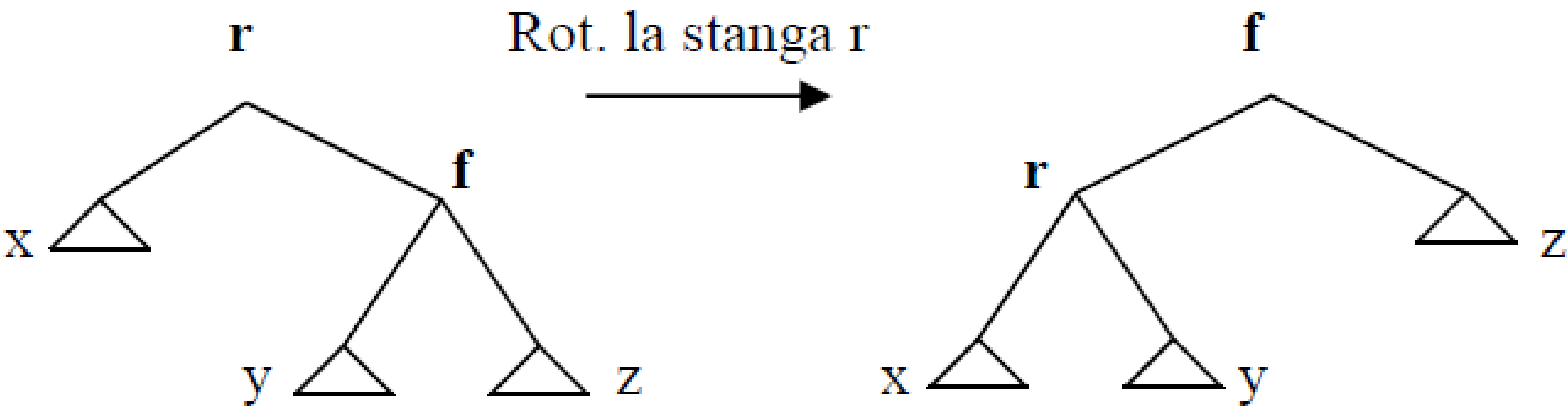
- Pentru a echilibra un arbore, este necesar să efectuăm o rearanjare fizică a nodurilor
- Dacă toate nodurile sunt la stânga rădăcinii, trebuie să deplasăm unele dintre ele în partea dreaptă
- Această deplasare se efectuează utilizând **rotații**

Rotații

- Rotațiile reprezintă modalități de rearanjare a nodurilor
- Acestea se folosesc pentru a rezolva două probleme:
- **1**. Ridicarea unora dintre noduri și coborârea altora, pentru a echilibra arborele
- **2**. Asigurarea respectării ordinii caracteristice arborilor binari de căutare

Rotație la stânga

- Rotația la **stânga** în subarborele cu rădăcina **r** coboară nodul **r** la stânga și aduce în locul lui fiul său drept **f**, iar **r** devine fiu stâng al lui **f** (val(**f**) > val(**r**))

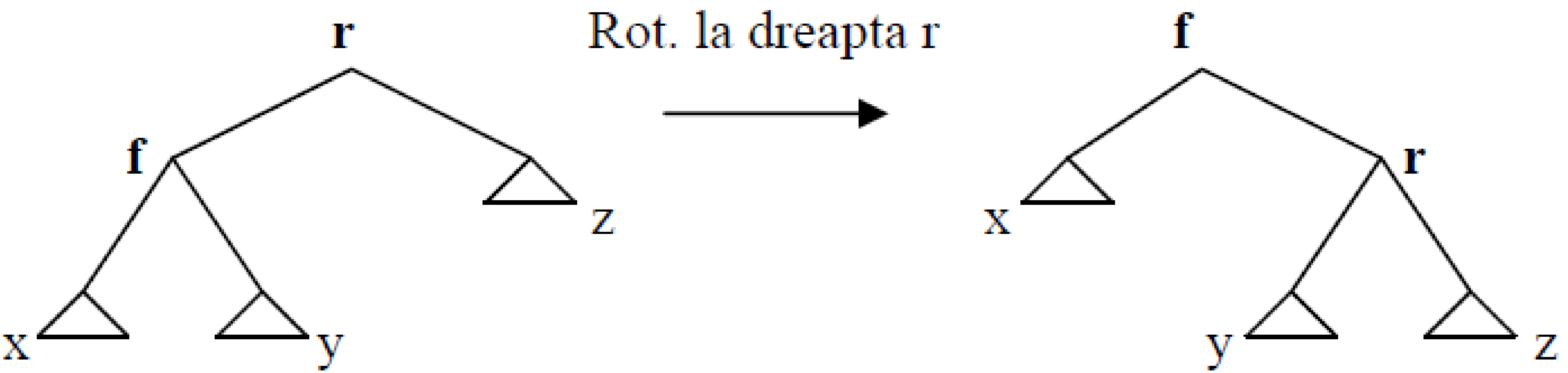


Observație

- Prin rotații se mențin relațiile dintre valorile nodurilor:
- **$x < r < f < z$**
- **$r < y < f$**

Rotație la dreapta

- Rotația la **dreapta** a nodului **r** coboară pe **r** la dreapta și aduce în locul lui fiul său stâng **f**
- Nodul **r** devine fiu drept al lui **f**



Observații

- Rotațiile au ca efect ridicarea (și coborârea) unor noduri în arbore și pot reduce înălțimea arborelui
- Pentru a ridica un nod (**f** în figurile anterioare) se rotește părintele nodului care trebuie ridicat (notat cu **r**), fie la dreapta, fie la stânga

Observații

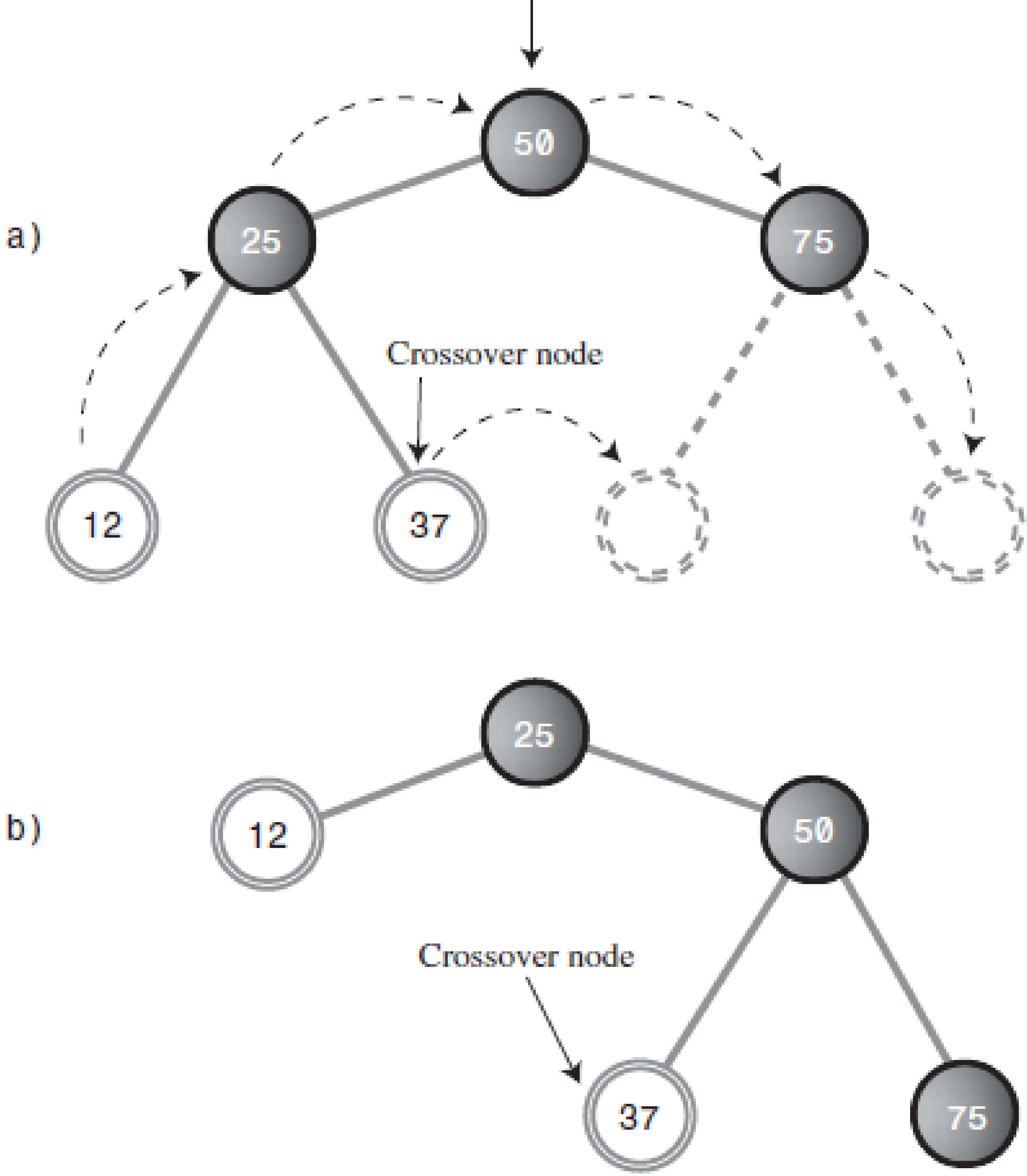
- Regulile de colorare și modificările culorilor se utilizează pentru a se putea decide când se execută o rotație
- Într-o rotație, nodurile nu efectuează rotații propriu-zise, ci doar relațiile dintre ele se modifică

Observații

- Unul dintre noduri este ales ca “vârf” al rotației
- Dacă efectuăm o rotație spre dreapta, acest “vârf” se va deplasa în jos și spre dreapta, în poziția fiului său drept
- Fiul stâng al nodului din vârf se va deplasa în sus, luând locul părintelui său

Observații

- Nodul din vârf nu reprezintă “centrul” rotației
- Orice nod poate fi vârful unei rotații, dacă dispune de fiul necesar
- Dacă se efectuează o rotație spre dreapta, nodul din vârf trebuie să aibă un fiu stâng
- Dacă se efectuează o rotație spre stânga, nodul din vârf trebuie să aibă un fiu drept


a)
50
25
75
Crossover node
12
37
b)
25
12
50
Crossover node
37
75

Un nod care traversează

- În urma rotației la dreapta, toate nodurile se vor deplasa
- Nodul 12 urmează deplasarea lui 25 în sus, iar fosta rădăcină 50 urmează deplasarea lui 75 în jos
- Nodul 37 s-a desprins de 25, al cărui fiu drept era, devenind fiul stâng al lui 50

Observații

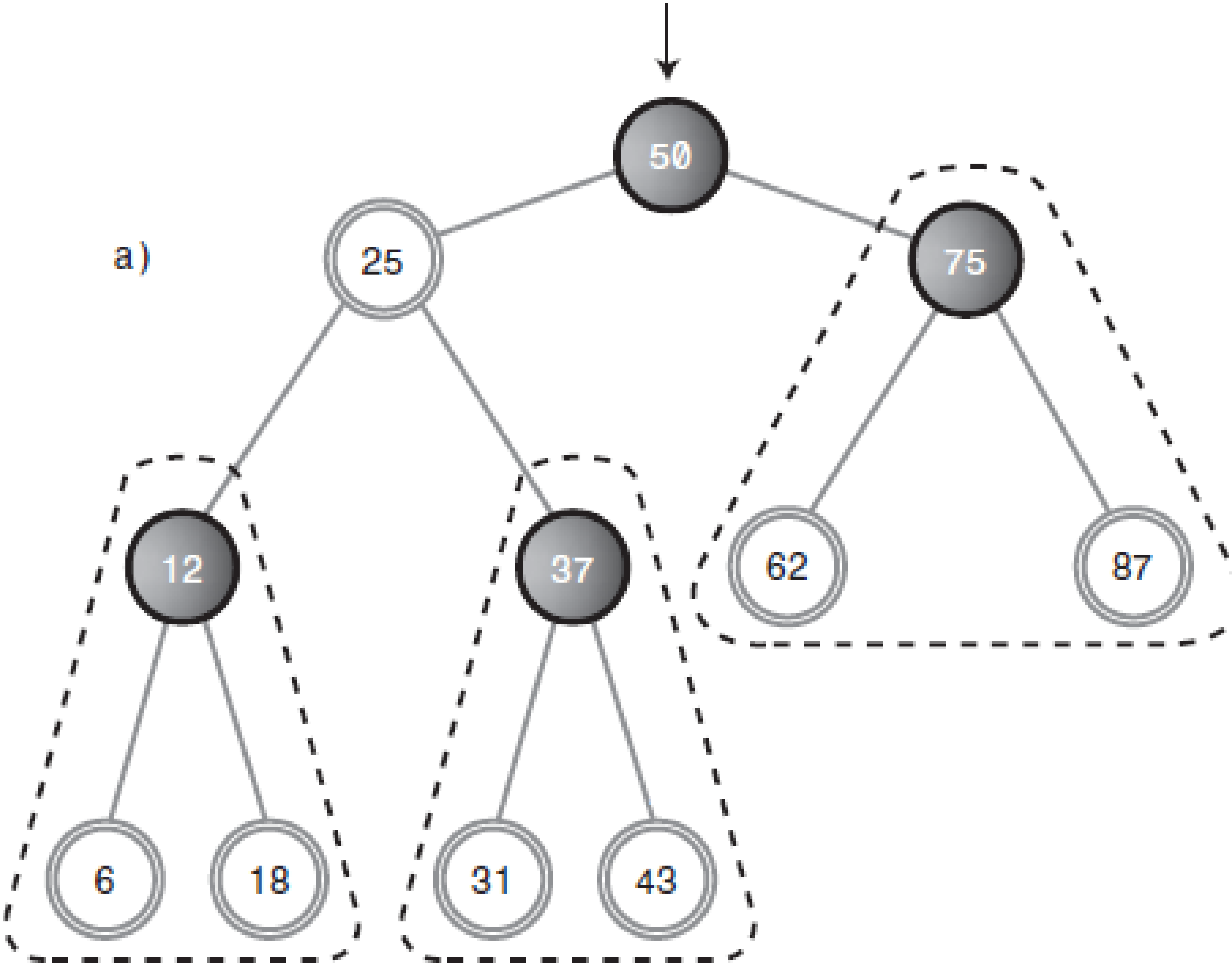
- Unele dintre noduri se deplasează în sus, altele în jos, dar 37 a traversat arborele
- Rotația a produs o încălcare a regulii 4, care va fi rezolvată mai târziu
- În poziția inițială, 37 se numește un **nepot interior** al nodului din vârf, 50, iar 12 este un **nepot exterior**

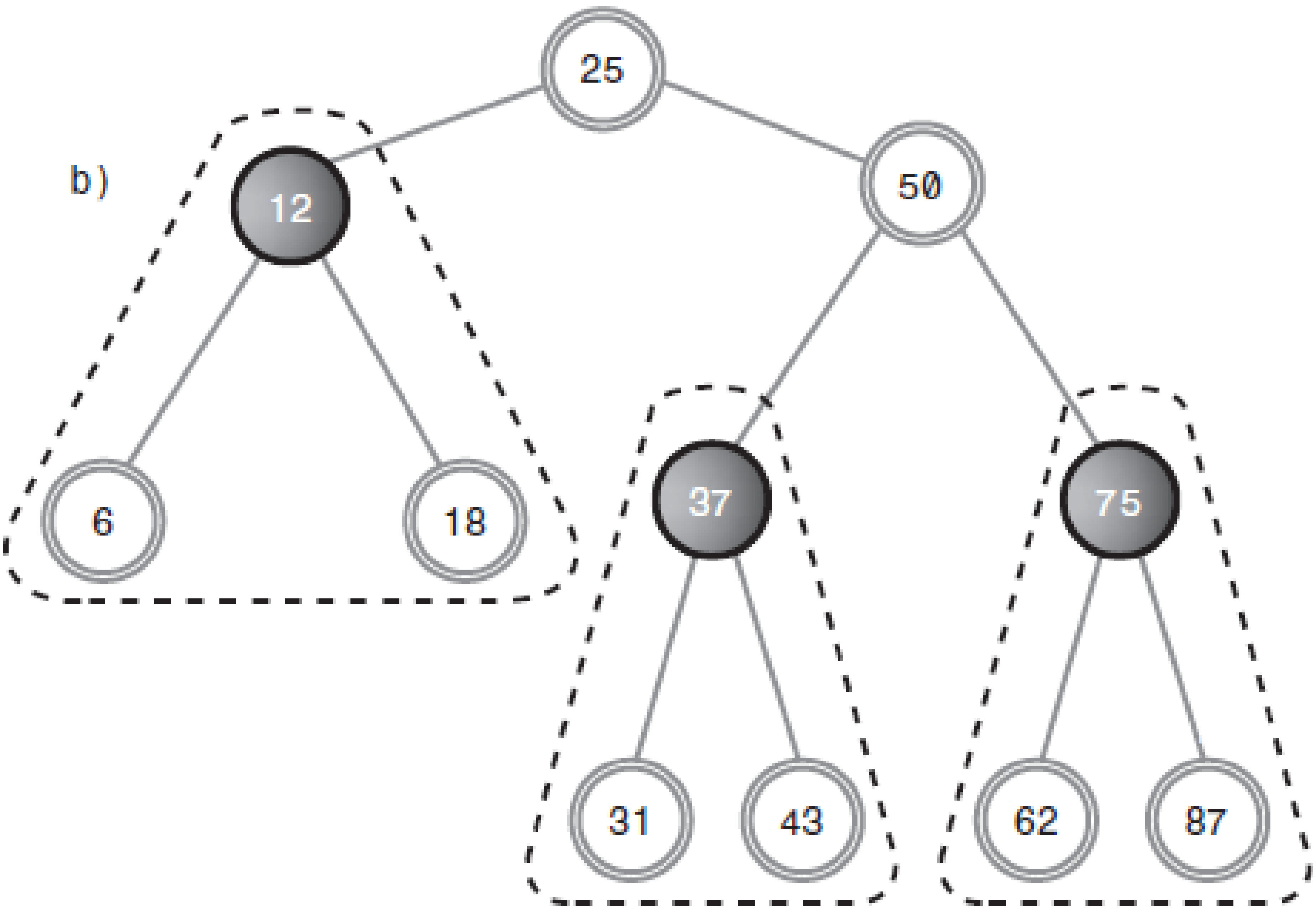
Observații

- Nepotul interior, dacă este fiul nodului care s-a deplasat în sus (fiul stâng al nodului din vârf, în cazul unui rotații la dreapta), va fi întotdeauna deconectat de la părintele său și reconectat cu fostul său bunic

Subarbori în mișcare

- În urma unei rotații, anumite noduri își modifică poziția
- Se pot deplasa însă sub-arbori întregi


a)
50
25
75
12
37
62
87
6
18
31
43


b)
25
12
50
6
18
37
75
31
43
62
87

Exemplu

- Într-o rotație la dreapta, având ca vârf rădăcina 50, se observă că mai multe noduri s-au deplasat simultan
- Nodul din vârf (50) își va înlocui fiul drept
- Fiul stâng (25) al nodului din vârf își înlocuiește fostul părinte
- Întregul subarbore cu rădăcina 12 se deplasează în sus

Exemplu

- Întregul subarbore cu rădăcina 37 traversează arborele, devenind fiul stâng al lui 50
- Subarborele cu rădăcina 75 se deplasează în jos
- Pozițiile relative ale nodurilor din același subarbore nu sunt afectate de rotație
- Întregul subarbore se deplasează solidar

Inserarea unui nod - Notații

- Utilizăm literele X, P și G pentru a nota o secvență de noduri înrudite
- X reprezintă un nod care a produs o încălcare a regulilor de colorare
- Uneori, X se referă la un nod nou inserat, iar alteori la un fiu, în cazul în care atât părintele, cât și fiul sunt de culoare roșie

Inserarea unui nod - Notații

- X este un anumit nod
- P este părintele lui X
- G este bunicul lui X (adică părintele lui P)
- Când se parcurge arborele în jos pentru a găsi locul de inserare, se efectuează o inversare a culorilor, oriunde se întâlnește un părinte negru cu doi fii roșii

Observații

- Această inversare provoacă uneori un conflict roșu-roșu (se încalcă regula 3)
- Dacă X este fiul roșu și P părintele roșu, conflictul se poate rezolva apelând la o rotație simplă sau dublă, după cum X este nepotul exterior sau interior al lui G
- Efectuând inversări de culoare și rotații, se ajunge la punctul de inserare și se inserează nodul

Observații

- După inserarea noului nod X, dacă P este negru, pur și simplu îi atașăm un fiu roșu
- Dacă P este roșu, avem două posibilități, după cum X este nepotul exterior sau interior al lui G
- Se efectuează două schimbări de culoare

Observații

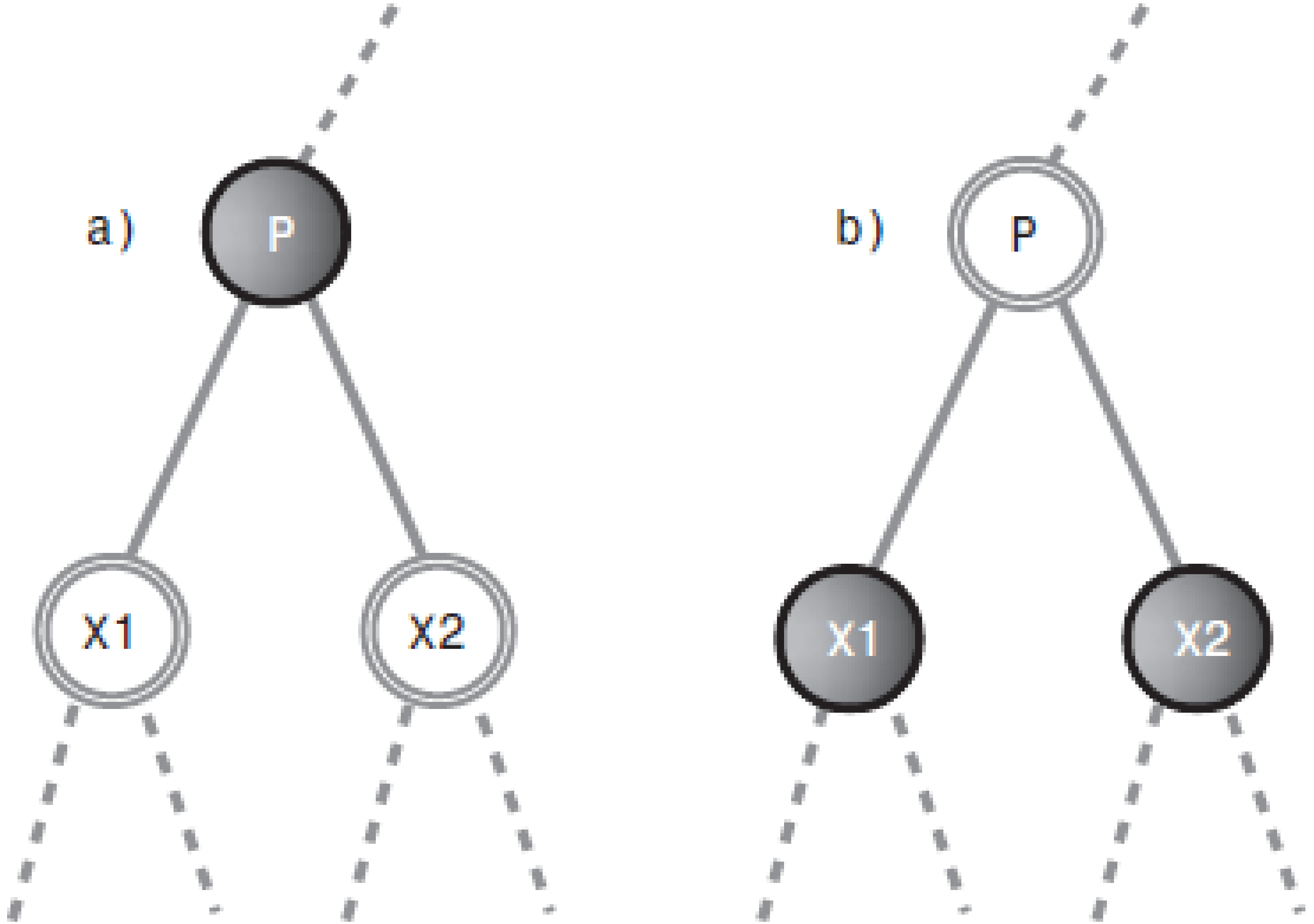
- Dacă X este nepot exterior, se efectuează o singură rotație
- Dacă X este nepot interior, se efectuează două rotații
- În urma acestor operații, arborele se va reechilibra

Inversări de culoare la parcurgerea descendentă a arborelui

- Metoda de inserare într-un arbore bicolor începe prin a efectua ceea ce se face și în cazul unui arbore binar de căutare – parcurgerea drumului de la rădăcină până la locul în care trebuie inserat nodul, deplasându-se la stânga sau la dreapta, în funcție de comparația dintre valoarea inserată și cheia nodului curent

Inversări de culoare

- Într-un arbore bicolor, găsirea locului de inserare se complică cu efectuarea unor inversări de culoare și a unor rotații
- La fiecare întâlnire a unui nod negru cu doi fii roșii, culoarea fiilor trebuie să devină neagră, iar a părintelui roșie (exceptând cazul în care părintele este nodul rădăcină, care rămâne întotdeauna negru)


a)
P
X1
X2
b)
P
X1
X2

Notații

- Se notează nodul din vârful triunghiului, care este negru, înainte de inversare, cu P
- Fie X1 și X2 fiul stâng, respectiv fiul drept al lui P
- Inversarea nu modifică numărul de noduri negre de pe căile de la rădăcină spre frunze (sau fii inexistenți), care trec prin P

Observații

- Toate aceste căi trec prin P și apoi prin X1 și X2
- Înainte de inversarea culorilor, doar P este negru, deci triunghiul (constând din nodurile P, X1 și X2) adaugă un singur nod negru acestor căi

Observații

- După inversarea culorilor, P nu mai este negru, dar ambii săi fii sunt, deci triunghiul contribuie tot cu un singur nod negru la fiecare din căile care îl parcurg
- Prin urmare, inversarea culorilor nu conduce la încălcarea regulii 4

Observații

- Inversarea culorilor este utilă, deoarece poate transforma frunzele roșii în frunze negre
- Astfel, va fi mai ușor să atașăm noi noduri roșii, fără a încălca regula 3

Observații

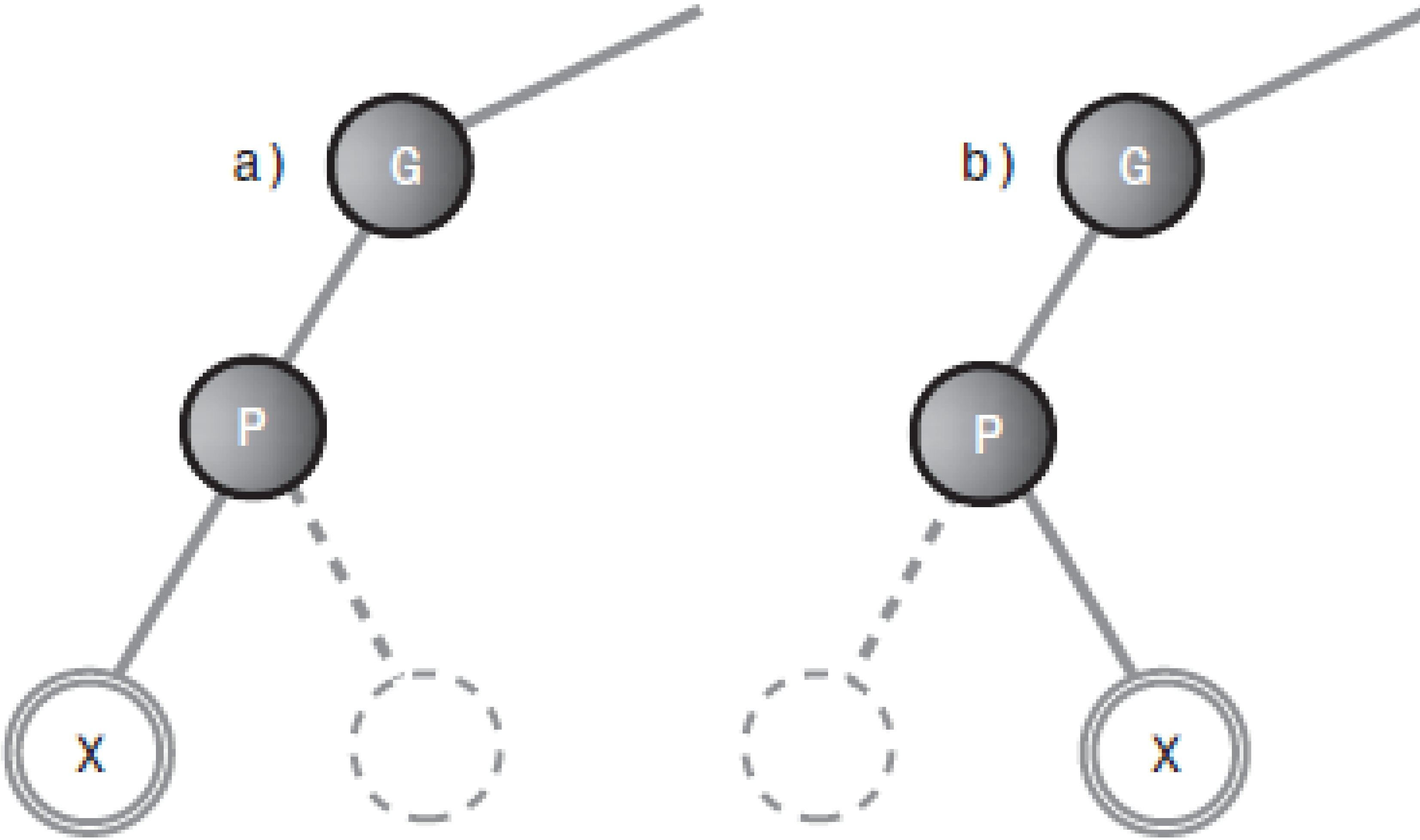
- Deși nu încalcă regula 4, inversarea culorilor poate duce la nerespectarea regulii 3
- Dacă părintele lui P este negru, nu se întâmplă nimic atunci când P va deveni roșu
- Dacă însă părintele lui P este roșu, după inversarea culorilor vor apărea două noduri roșii adiacente

Noduri roșii adiacente

- Situația trebuie rezolvată înainte de a continua parcurgerea arborelui, pentru a determina locul de inserare
- Soluția este efectuarea unei rotații
- După ce s-a găsit locul potrivit din arbore, efectuând (dacă este cazul) inversări de culori și rotații pe parcurs, se poate insera noul nod la fel ca într-un arbore binar de căutare

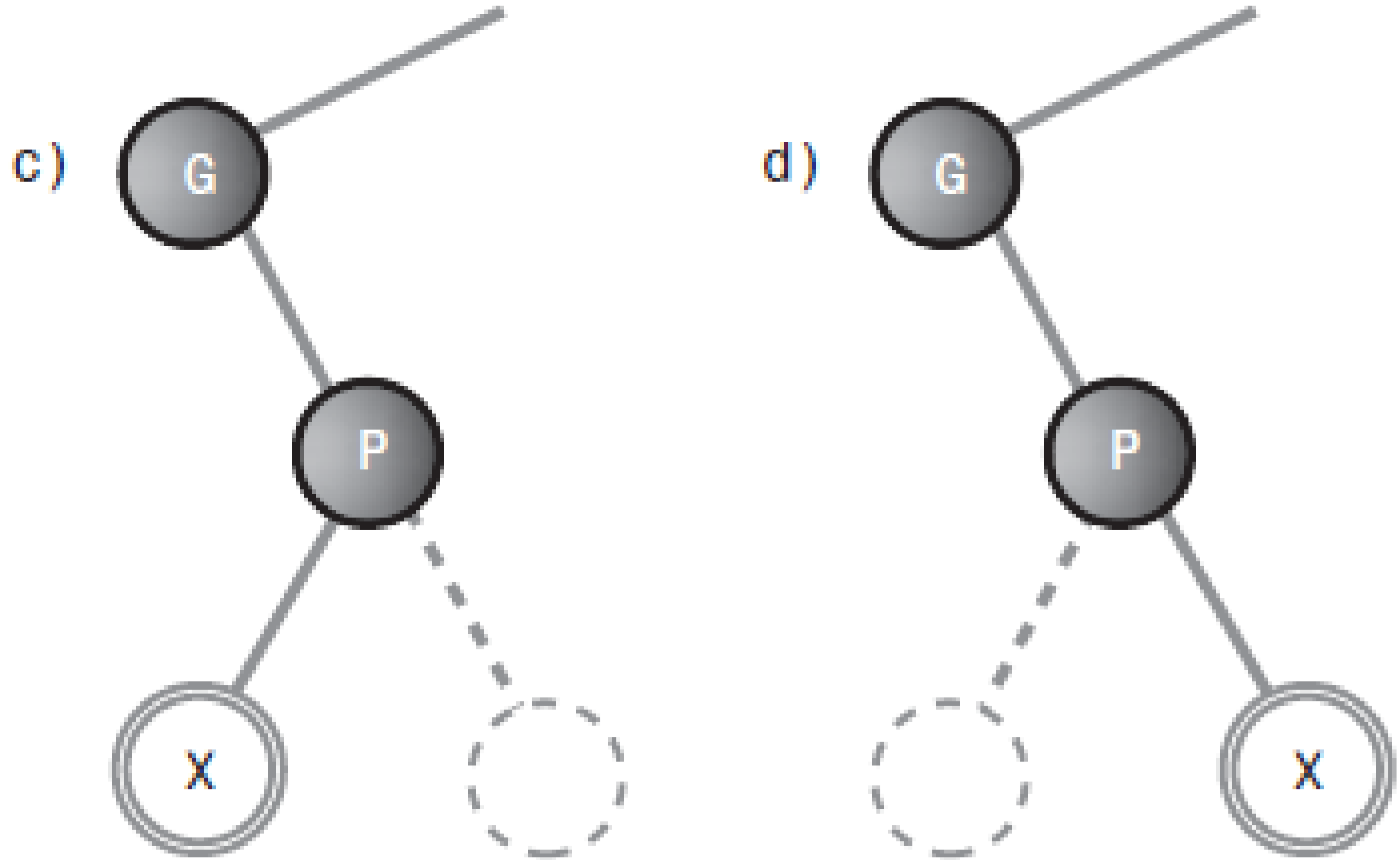
Rotații după inserarea nodului

- Inserarea unui nod poate conduce la încălcarea regulilor de colorare
- După inserare, trebuie să verificăm apariția unor abateri de la reguli, pe care (dacă există) să le corectăm
- Noul nod inserat, X, este întotdeauna **roșu**
- X poate fi poziționat în mai multe moduri, în raport cu P și G



Outside grandchild
(Left child)

Inside grandchild
(Right child)



Inside grandchild
(Left child)

Outside grandchild
(Right child)

Observații

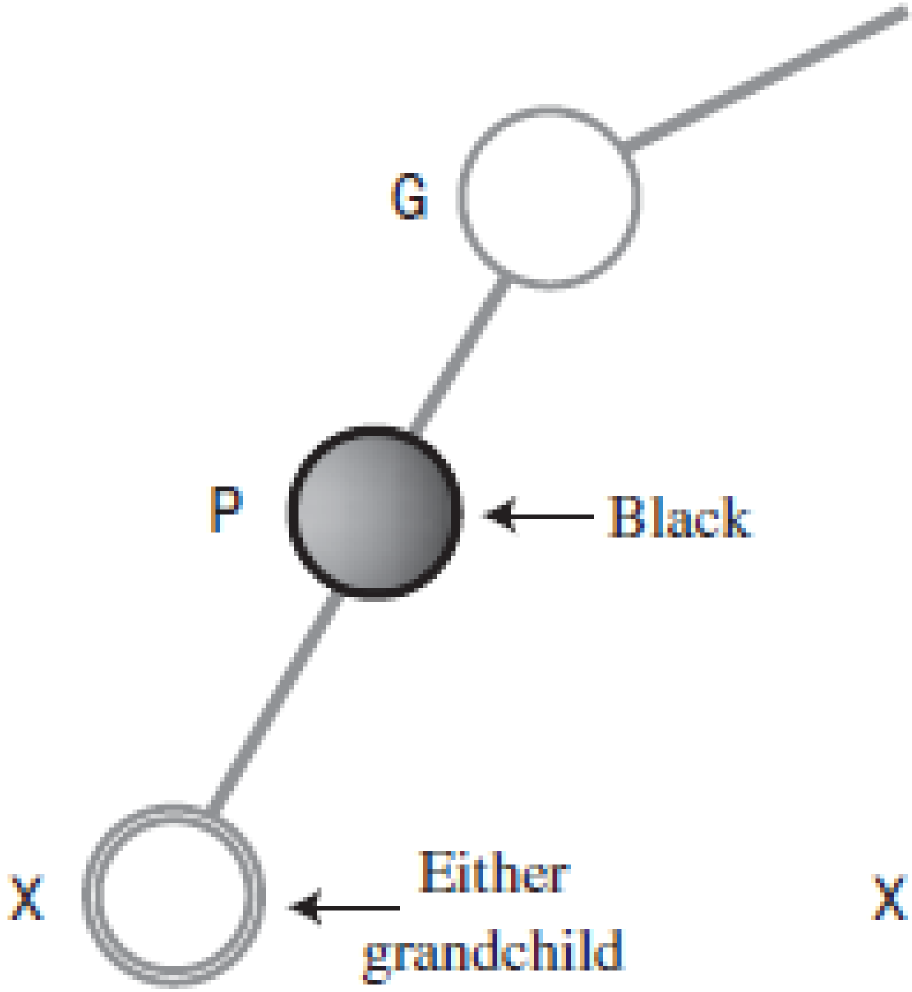
- X este un nepot exterior, dacă este situat față de părintele său P în aceeași parte în care acesta este situat în raport cu părintele său G
- X este nepot exterior pentru G, dacă:
  - X este fiu stâng al lui P și P este fiu stâng al lui G
  - X este fiu drept al lui P și P este fiu drept al lui G
- X este nepot interior al lui G, dacă este situat de partea opusă a lui P, față de cum este P situat în raport cu părintele său G

Observații

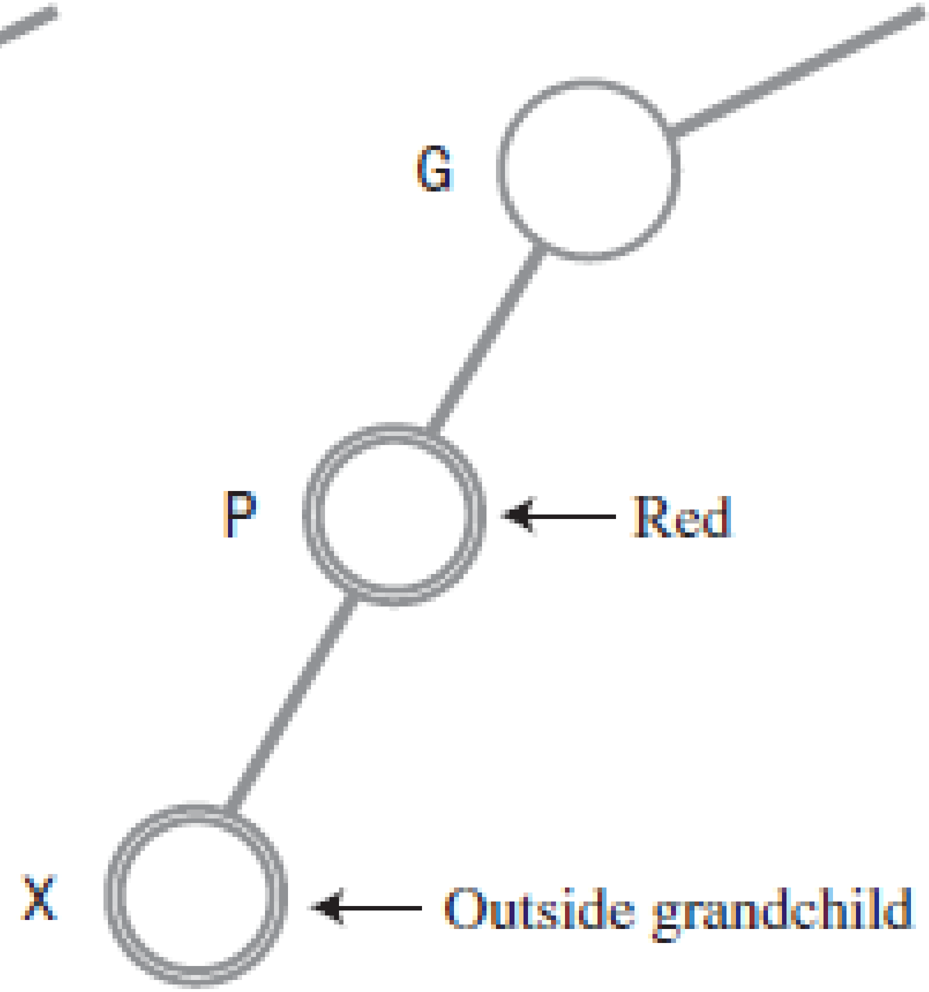
- Dacă X este un nepot exterior, poate fi fiul stâng sau drept al lui P, după cum P este la rândul său fiu stâng sau drept al lui G
- Există două situații similare în care X este nepot interior al lui G

3 moduri de dispunere a nodurilor

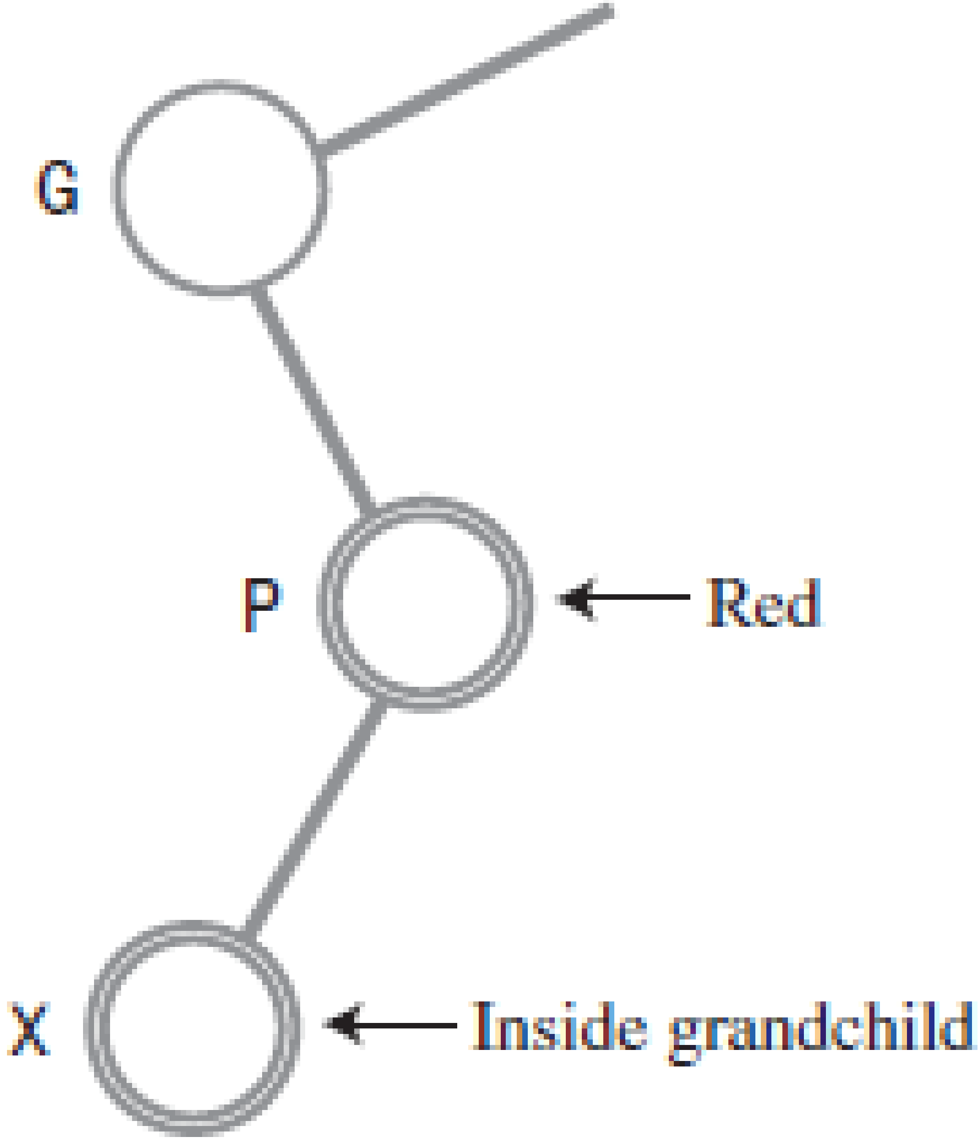
- Situațiile posibile după inserare:
- 1. P este negru
- 2. P este roșu și X este un nepot exterior al lui G
- 3. P este roșu și X este un nepot interior al lui G



a) Possibility 1: P is black



b) Possibility 2: P is red, and X is outside



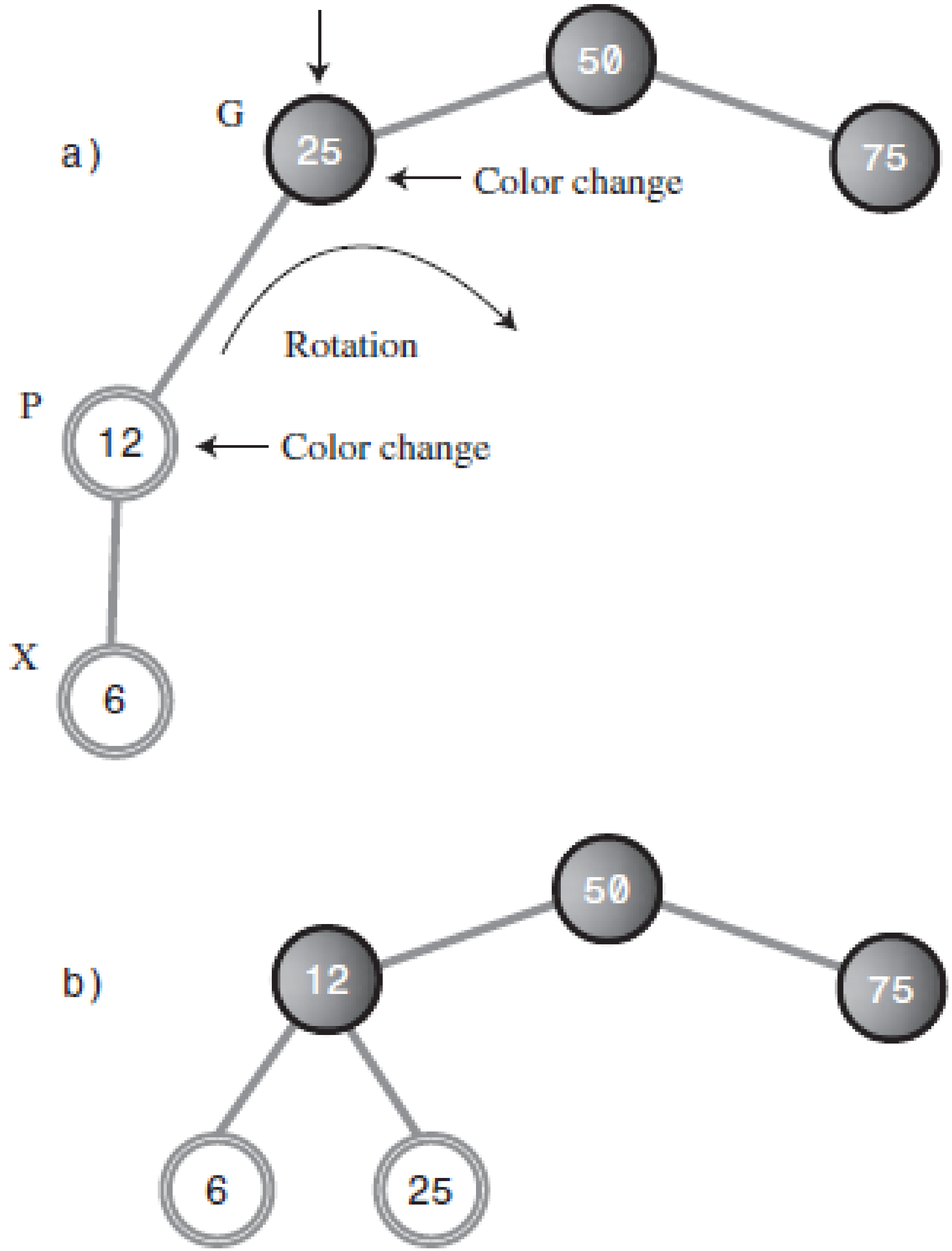
c) Possibility 3: P is red, and X is inside

Cazul 1 – P este negru

- Nodul nou inserat este întotdeauna **roșu**
- Dacă părintele este negru, nu apare un conflict de culoare roșu-roșu și nicio creștere unilaterală a numărului de noduri negre
- Regulile de colorare sunt respectate
- Inserarea este efectuată cu succes

Cazul 2 – P este roșu și X este exterior

- Sunt suficiente o rotație și câteva modificări ale culorilor
- Se poate reface corectitudinea de colorare (echilibrul arborelui) în 3 pași

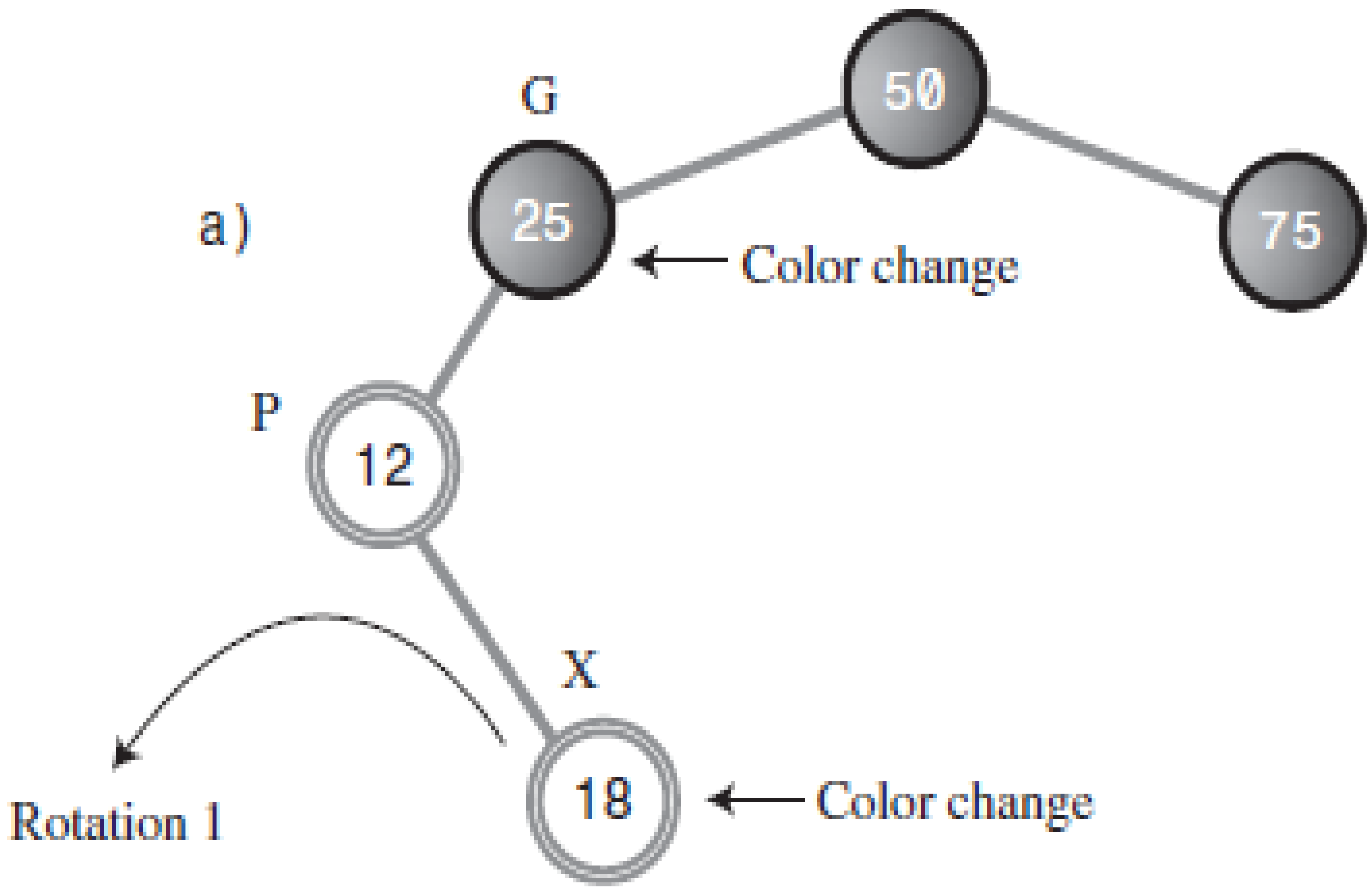

a)
G
25
50
75
Color change
Rotation
P
12
Color change
X
6
b)
50
12
75
6
25

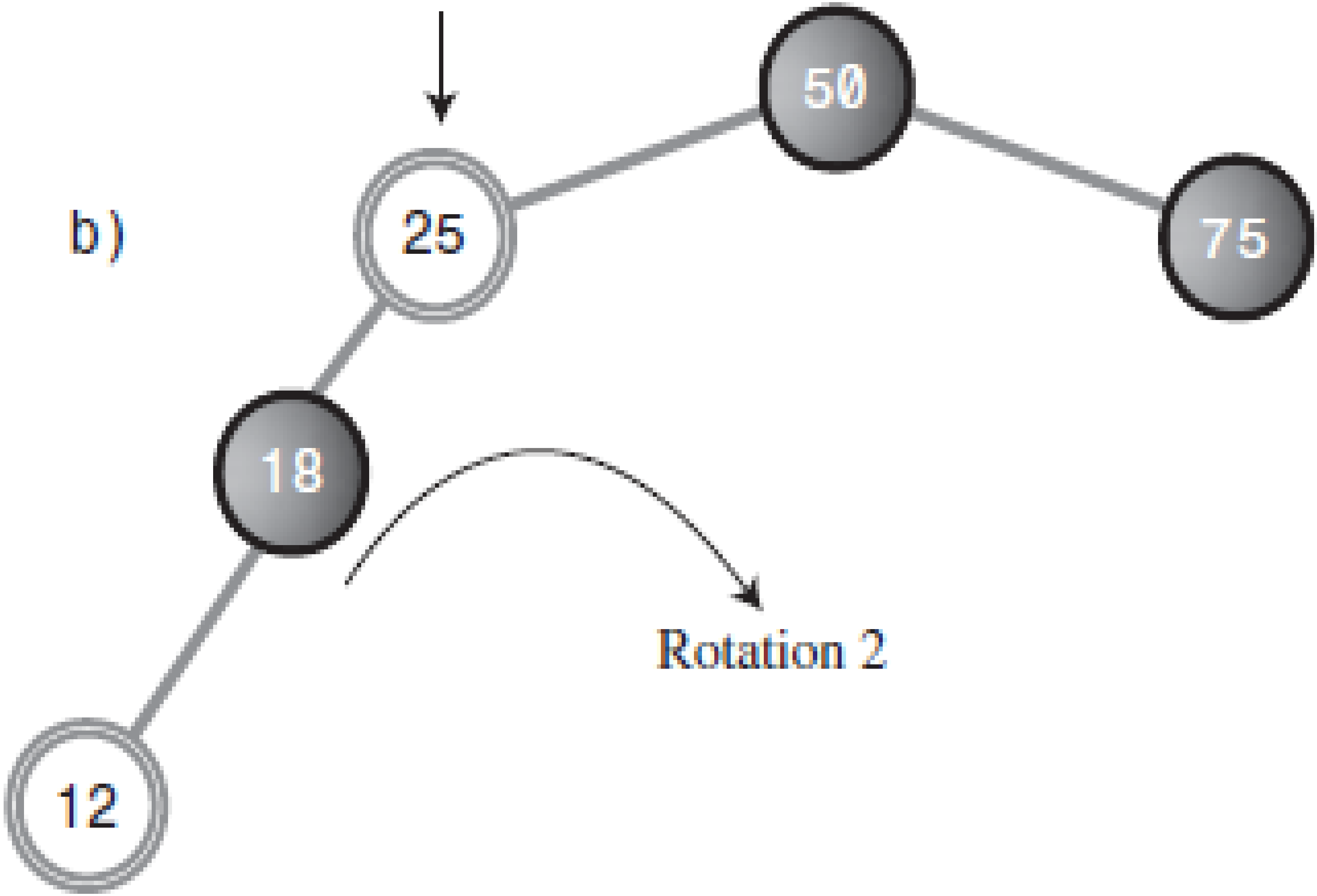
3 pași

- 1. Se modifică culoarea bunicului G (25) al lui X (6)
- 2. Se modifică culoarea părintelui P (12) al lui X (6)
- 3. Se efectuează o rotație cu nodul G (25) în vârf, în direcția care asigură ridicarea lui X (6) în arbore
- În exemplu, rotația se va efectua spre dreapta

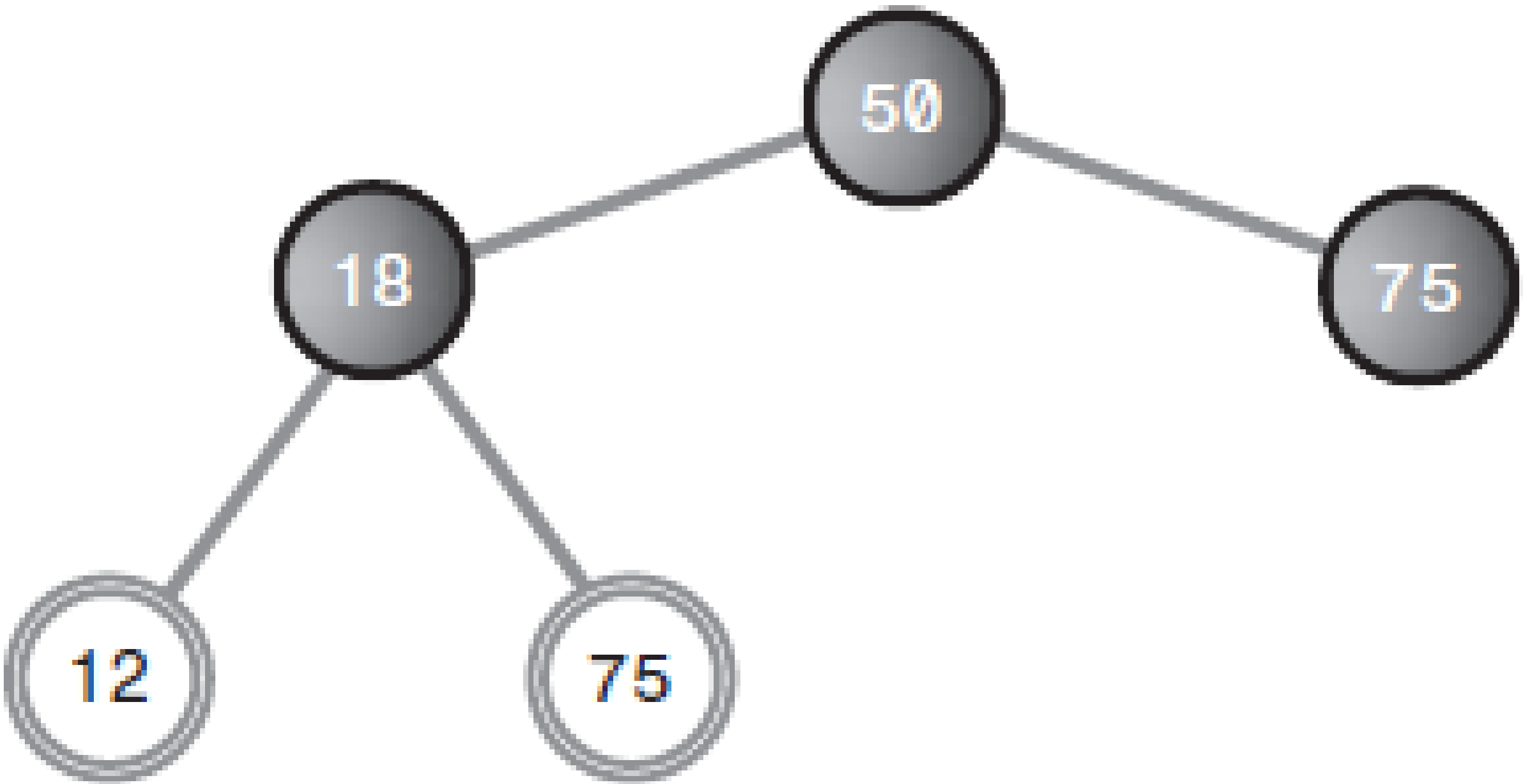
Cazul 3 – P este roșu și X este interior

- Avem nevoie de două rotații și o modificare a culorii unui nod


a)
G
50
25
75
Color change
P
12
X
18
Rotation 1
Color change


b)
25
50
75
18
12
Rotation 2

c)



Pași pentru echilibrarea arborelui

- 1. Se modifică culoarea bunicului lui X (25)
- 2. Se modifică culoarea lui X (18)
- 3. Se efectuează o rotație cu părintele P (12) situat în vârf, în direcția care asigură ridicarea lui X (spre stânga, în acest caz)
- 4. Se efectuează încă o rotație, cu bunicul lui X (25) în vârf, în direcția care asigură ridicarea lui X (18) (spre dreapta, în acest caz)

Observații

- Secvența de operații aduce arborele într-o configurație în care respectă regulile de colorare și îl reechilibrează
- Există un caz simetric în care P este fiul drept al lui G

Observații

- Utilizarea inversării culorilor, la parcurgerea descendentă, elimină situațiile în care o rotație poate propaga încălcări ale regulilor de colorare mai sus în arbore
- Operația asigură că una sau două rotații sunt suficiente pentru a restabili corectitudinea întregului arbore

Observații

- Datorită inversării culorilor, inserările în arborii bicolori sunt mult mai eficiente decât în alte tipuri de arbori echilibrați, cum sunt arborii AVL
- Inversările asigură suficiența unei singure parcurgeri descendente a arborelui

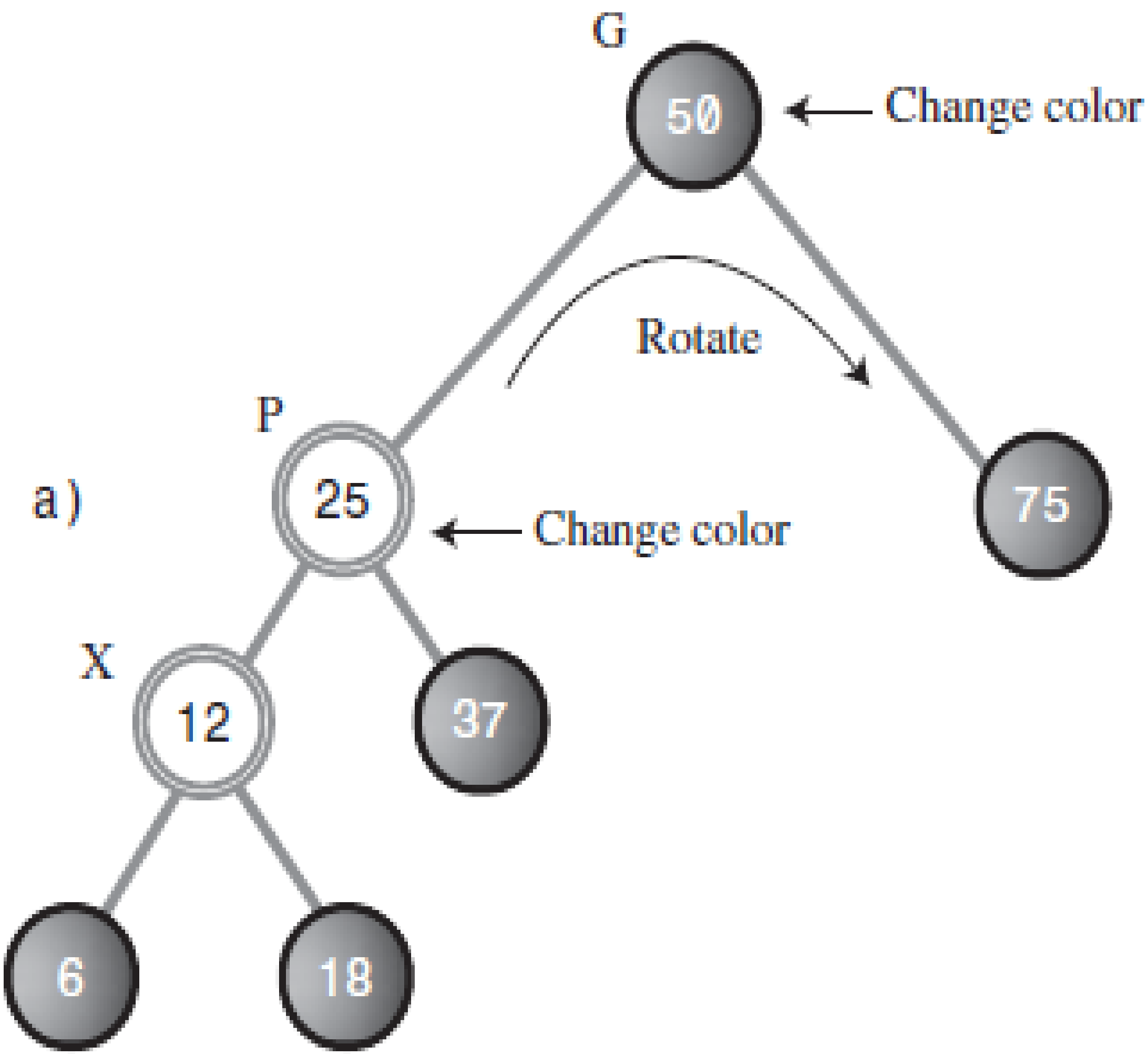
Rotații la parcurgerea descendentă

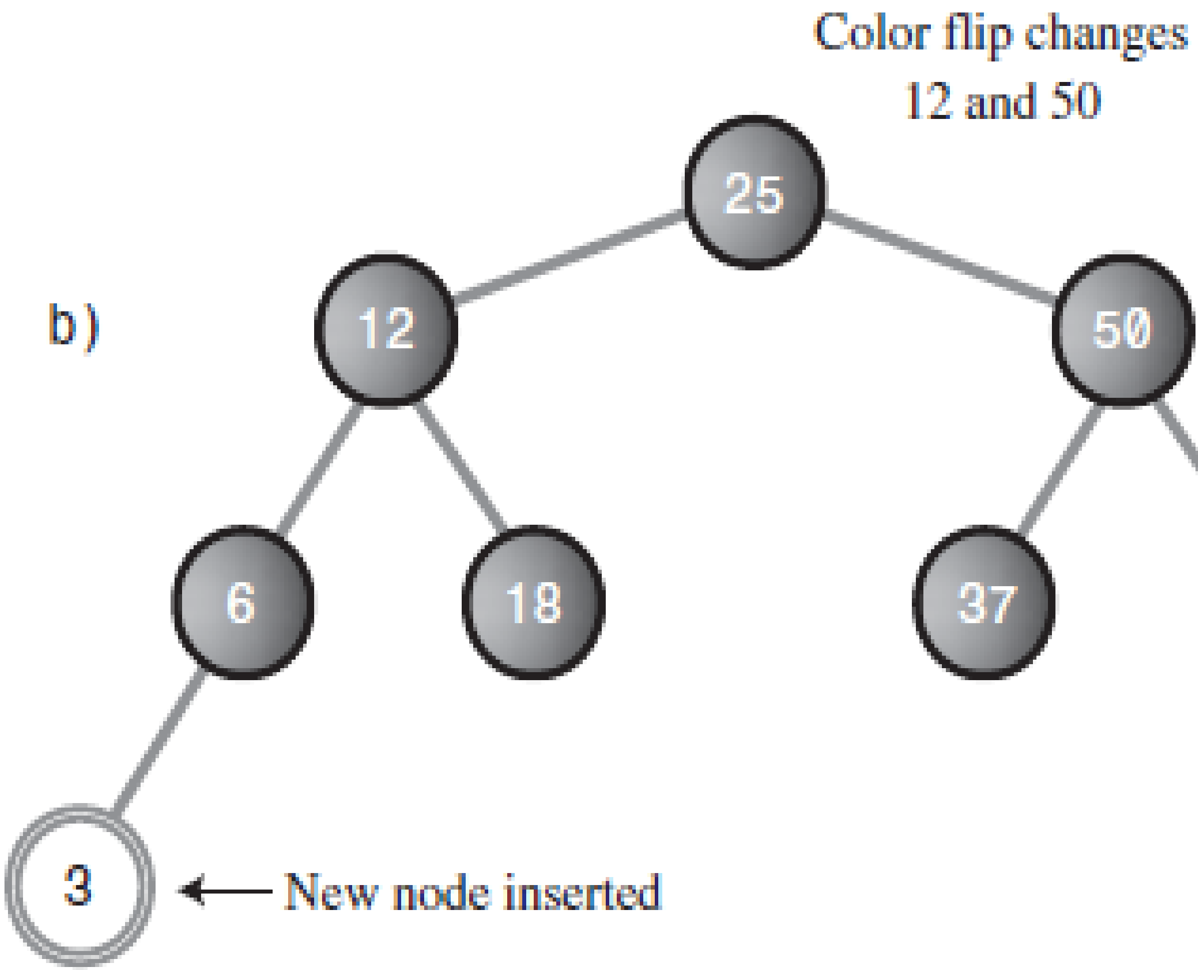
- Inversarea culorilor poate produce o încălcare a regulii 3 (un nod fiu și părintele său nu pot fi amândoi de culoare roșie)
- Această problemă se poate rezolva prin efectuarea unei rotații
- Există două posibilități – nodul implicat poate fi un nepot exterior sau interior

Nepot exterior

- Nod implicat – fiul din perechea părinte – fiu, care a provocat conflictul de colorare
- Metoda utilizată pentru a rezolva această situație este similară cu operația efectuată după inserarea unui nepot exterior
- Trebuie să efectuăm două modificări de culoare și o rotație

a)




Color flip changes
12 and 50
b)
25
12
50
6
18
37
75
3
New node inserted

Observații

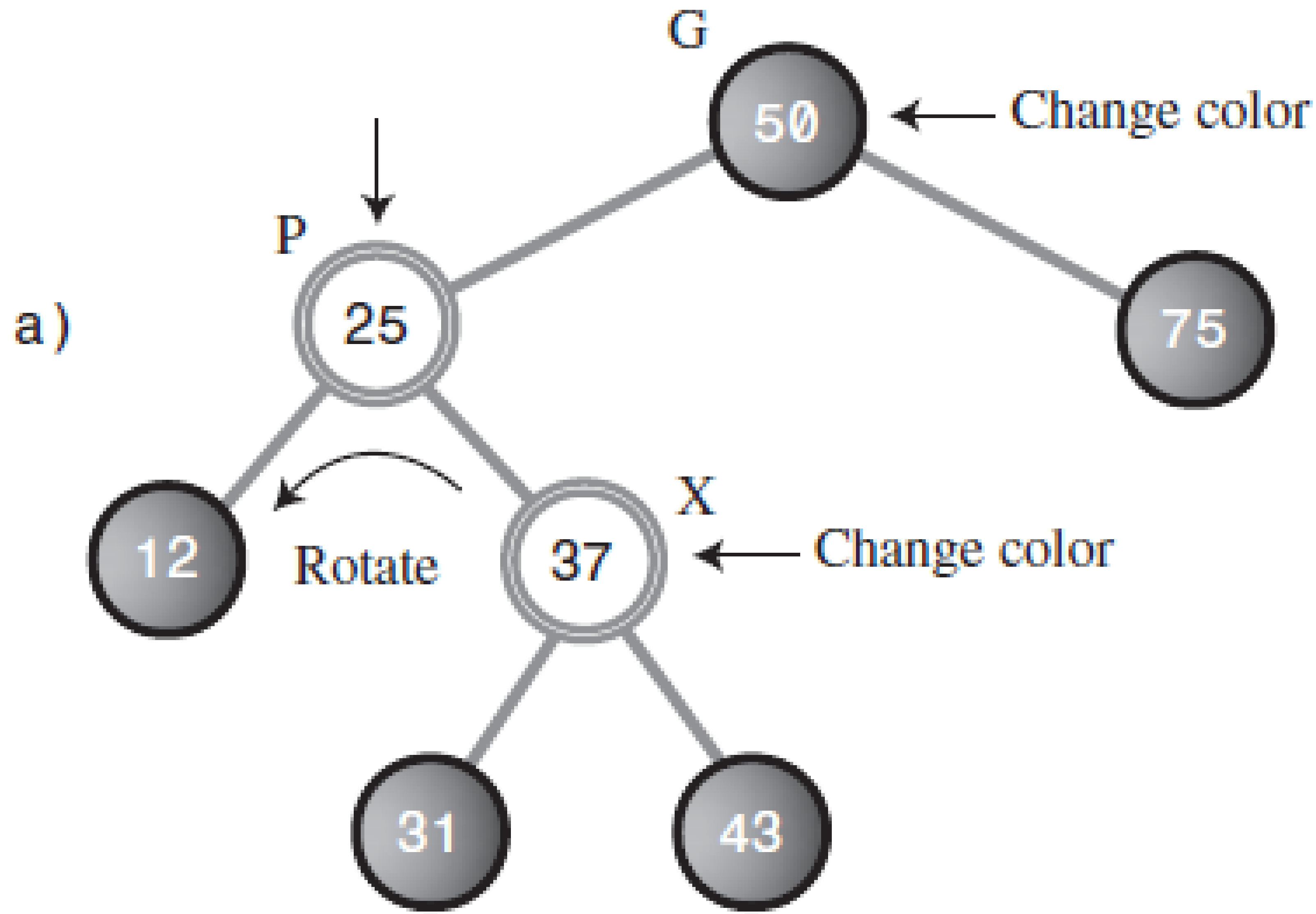
- Părintele lui X (12) este nodul P (25), iar bunicul lui X este G (50)
- 1. Se modifică culoarea bunicului G
- 2. Se modifică culoarea părintelui P
- 3. Se rotește arborele, cu bunicul lui X în vărf, în direcția care asigură ridicarea lui X (spre dreapta)

Observații

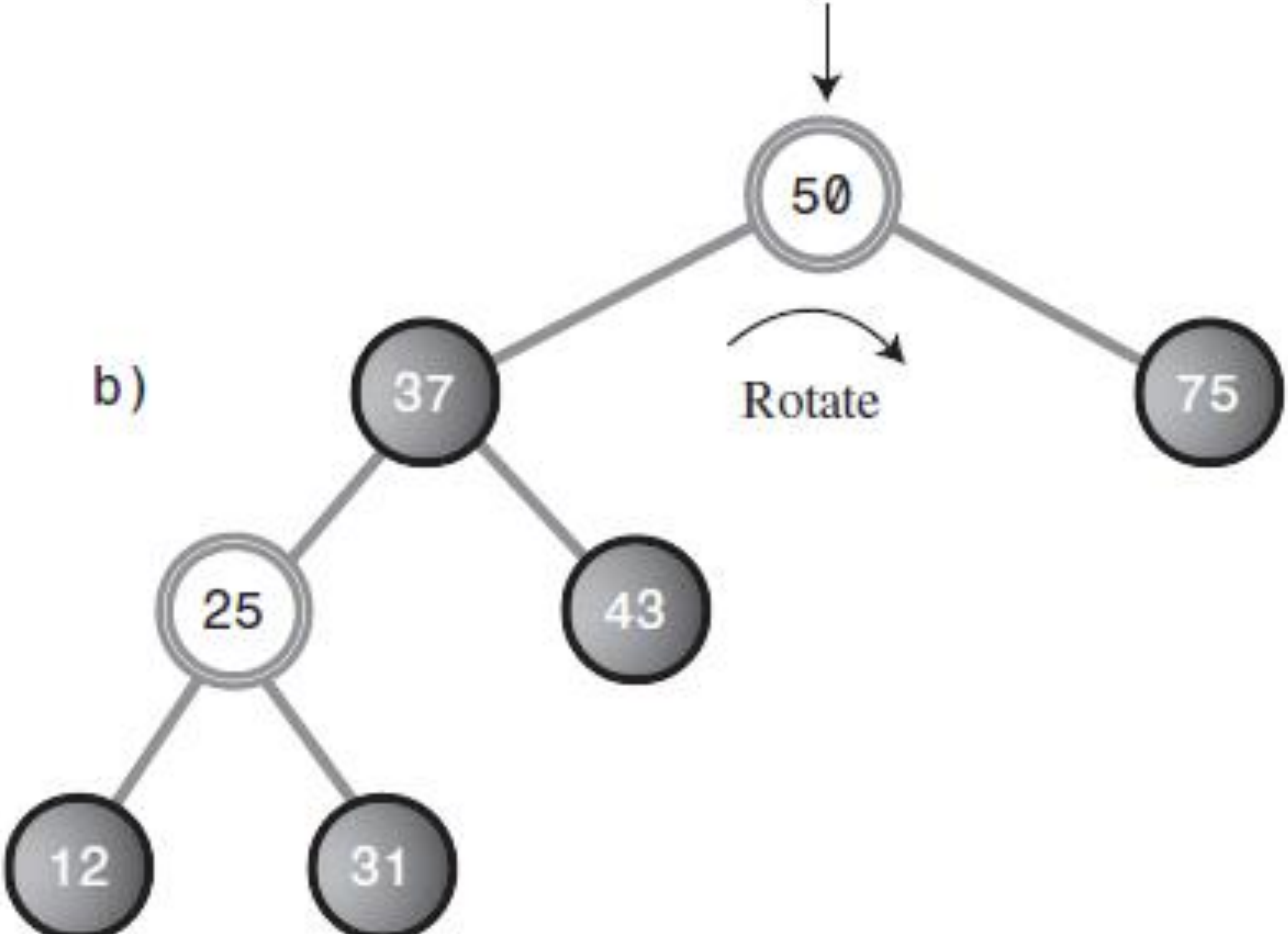
- Nodul cu valoarea 3 poate fi inserat acum în mod obișnuit
- Din cauză că părintele său, 6, este negru, inserarea se efectuează imediat

Nepot interior

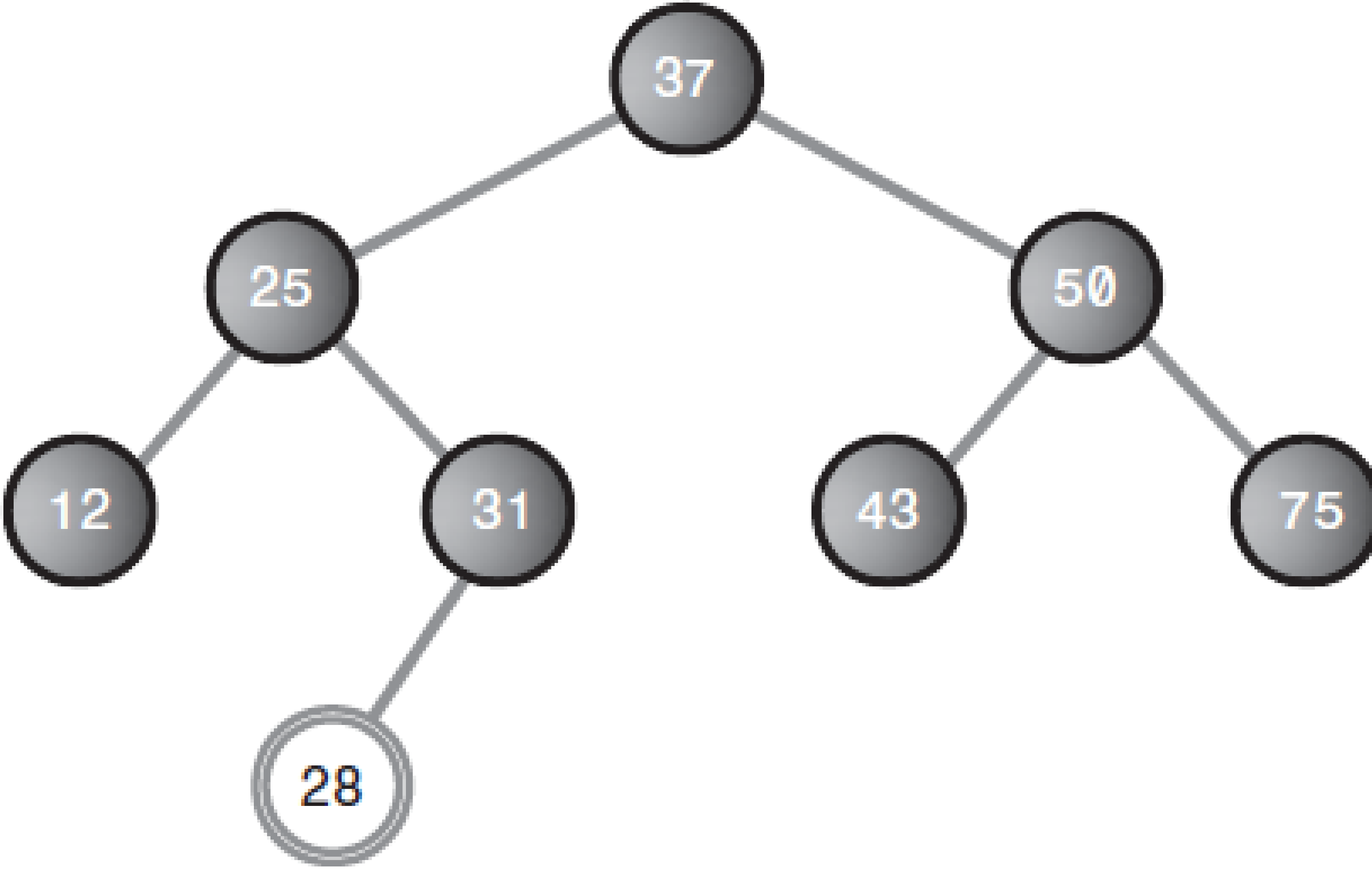
- Dacă nodul X, care produce un conflict de culoare la parcurgerea descendentă a arborelui, este un nepot interior, vor fi necesare două rotații pentru restabilirea regulilor în arbore
- Situația este asemănătoare cu operația efectuată după inserarea unui nepot interior


G
50
Change color
P
25
a)
75
12
Rotate
37
X
Change color
31
43

b)



c)



Rezolvarea conflictului de culoare

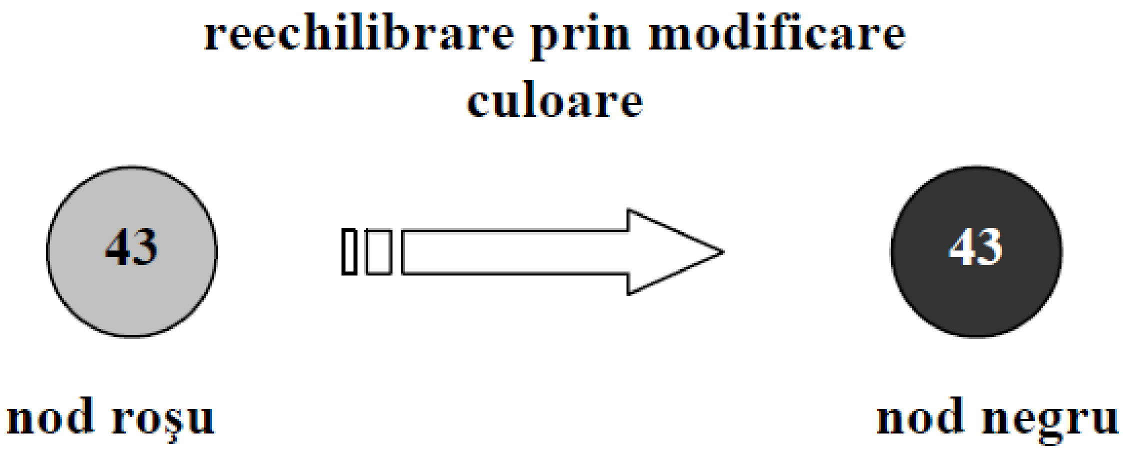
- 1. Se modifică culoarea lui G (50)
- 2. Se modifică culoarea lui X (37)
- 3. Se rotește subarborele cu P (25) în vârf, în direcția care asigură ridicarea lui X în arbore (spre stânga)
- 4. Se rotește arborele cu G în vârf, în direcția care asigură ridicarea lui X (spre dreapta)

Observații

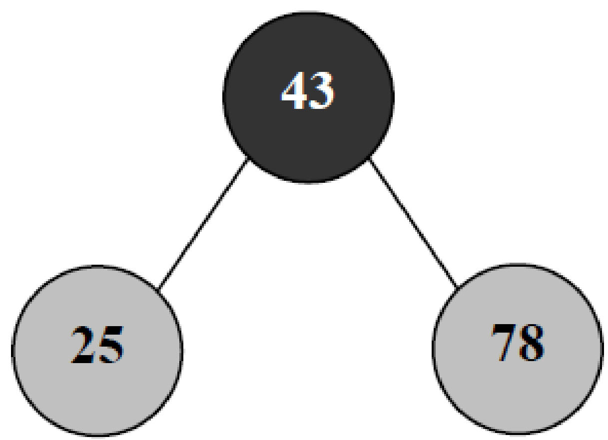
- Acum se poate insera nodul 28
- Culorile nodurilor 25 și 50 se vor inversa, cele două noduri devenind negre

Exemplu arbore bicolor

- Se consideră un arbore bicolor vid, în care se inserează valoarea 43
- Structura arborescentă trebuie reechilibrată prin modificarea culorii nodului rădăcină în negru

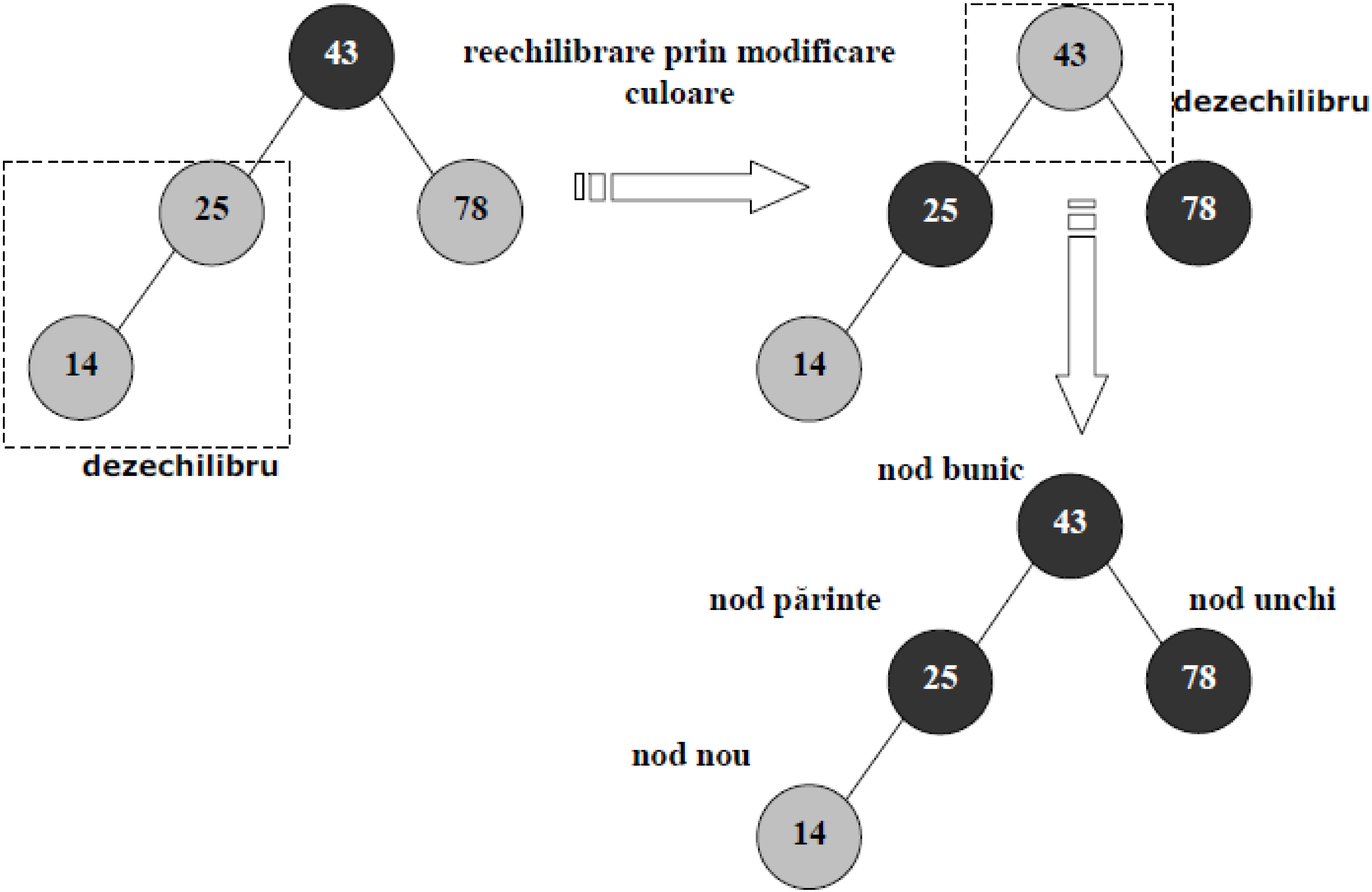


- Se inserează valorile 25 şi 78
- Nodurile nou create au culoare roşie şi nu este încălcată nicio regulă de colorare

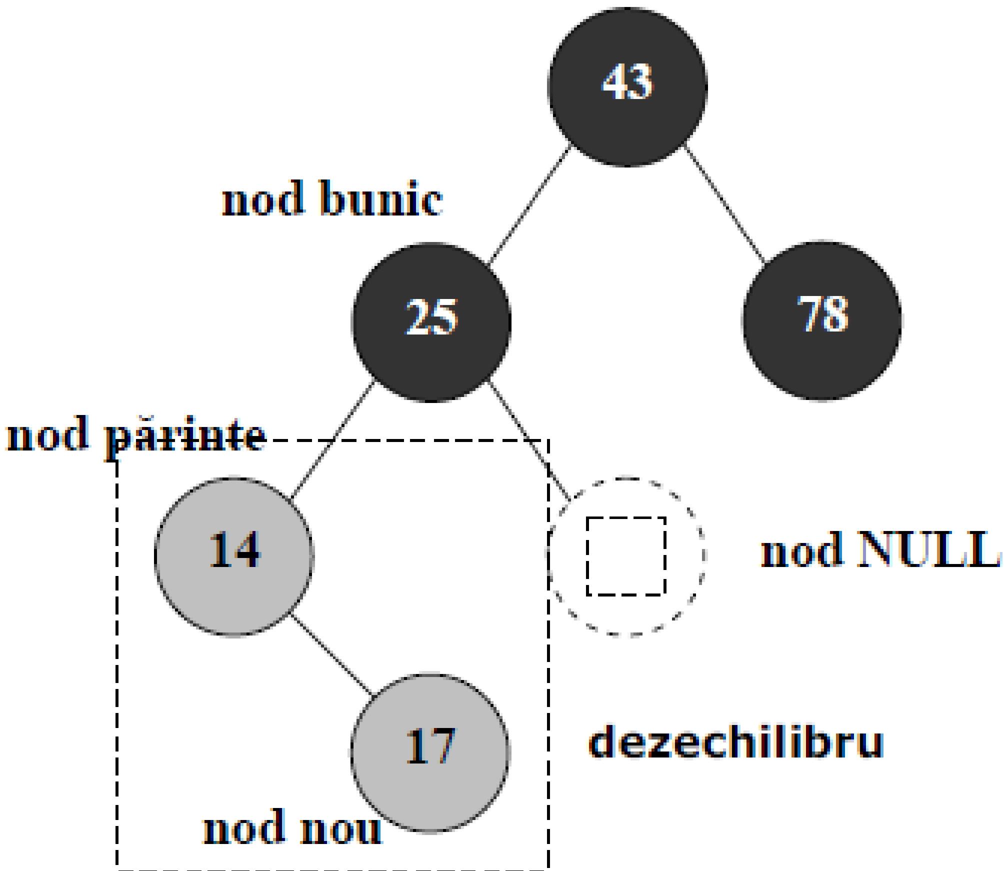


- Se inserează nodul cu valoarea 14
- Nodul nou creat este roşu, fapt care încalcă proprietăţile arborilor bicolori, deoarece un nod roşu are întotdeauna un nod negru ca părinte
- Dacă nodul este recolorat în negru, atunci toate drumurile din arbore nu vor avea acelaşi număr de noduri negre

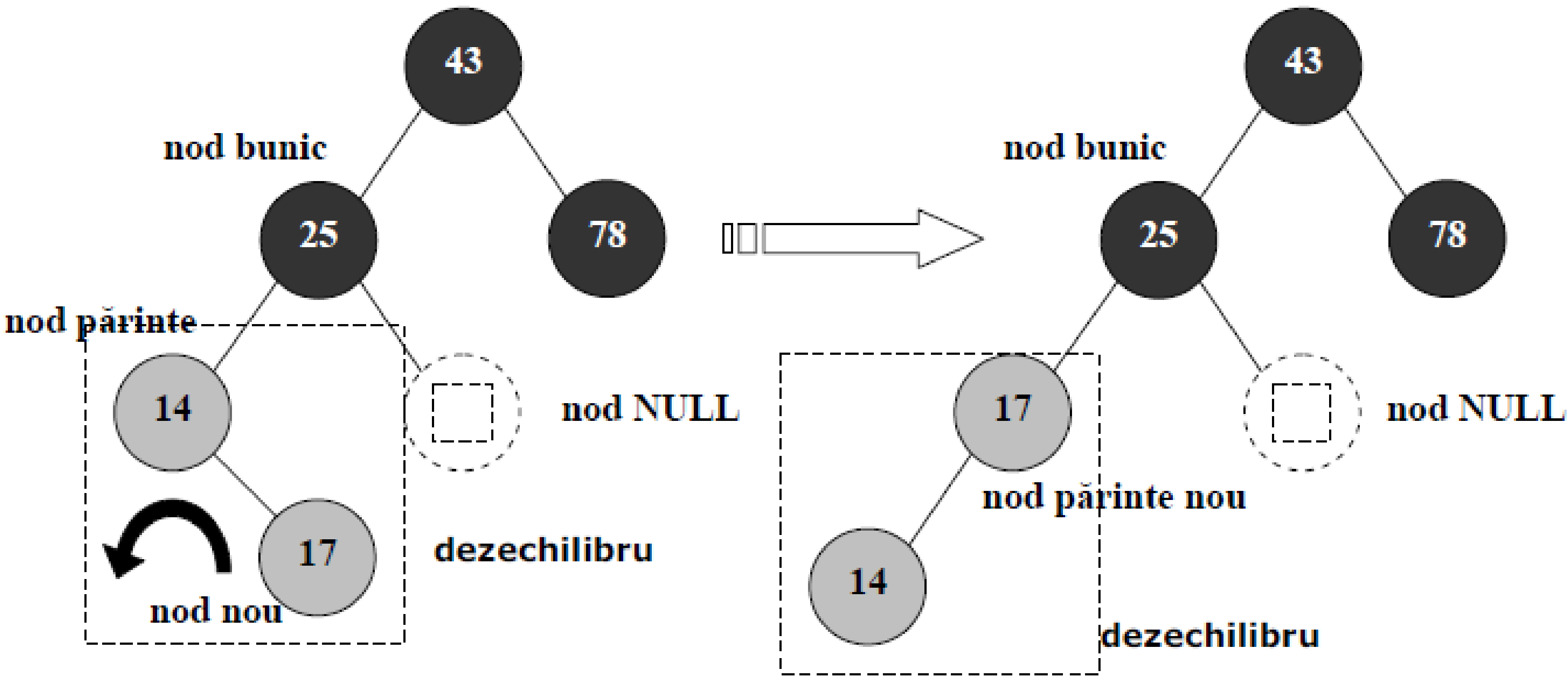
- Situaţia este analizată prin prisma nodului părinte şi a nodului unchi
- Dacă aceste două noduri sunt roşii, atunci ele îşi schimbă culoarea în negru, iar nodul bunic, părintele celor două noduri, devine negru
- Dacă prin modificarea culorii nodului bunic, arborele este dezechilibrat, atunci situaţia este remediată în manieră recursivă, până se ajunge la rădăcina arborelui


43
reechilibrare prin modificare culoare
43
dezechilibru
25
78
25
78
14
14
dezechilibru
nod bunic
43
nod părinte
nod unchi
25
78
nod nou
14

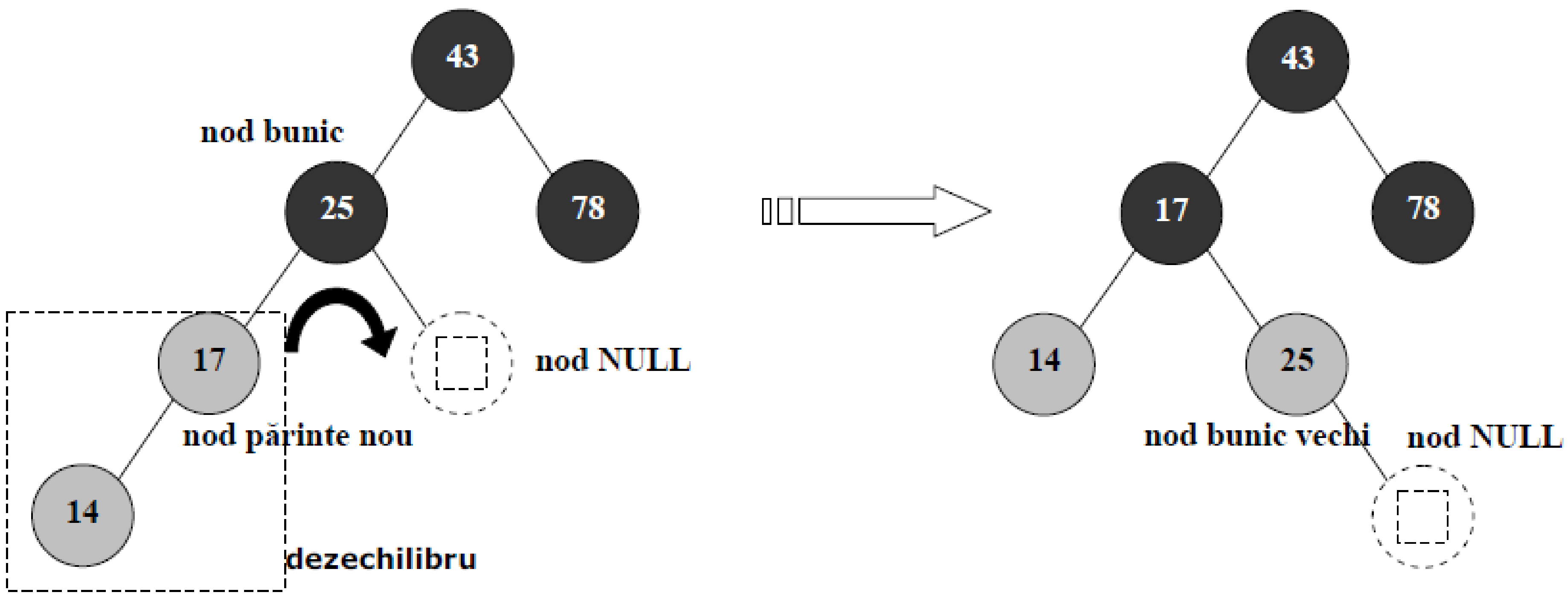
- Se inserează valorea 17
- Nodul nou are culoare roşie, fapt ce încalcă proprietatea arborelui bicolor, toate nodurile fiu ale unui nod roşu sunt negre



- Reechilibrarea arborelui în această situaţie este realizată printr-o rotaţie dublă
- Într-o primă fază, se realizează o rotaţie la stânga în nodul părinte
- Situația curentă este definită de faptul că:
  - nodul părinte are culoare roşie, dar nodul unchi este fie negru, fie nod inexistent
  - nodul nou creat este fiu dreapta pentru nodul părinte, care la rândul său este nod fiu stânga pentru nodul bunic

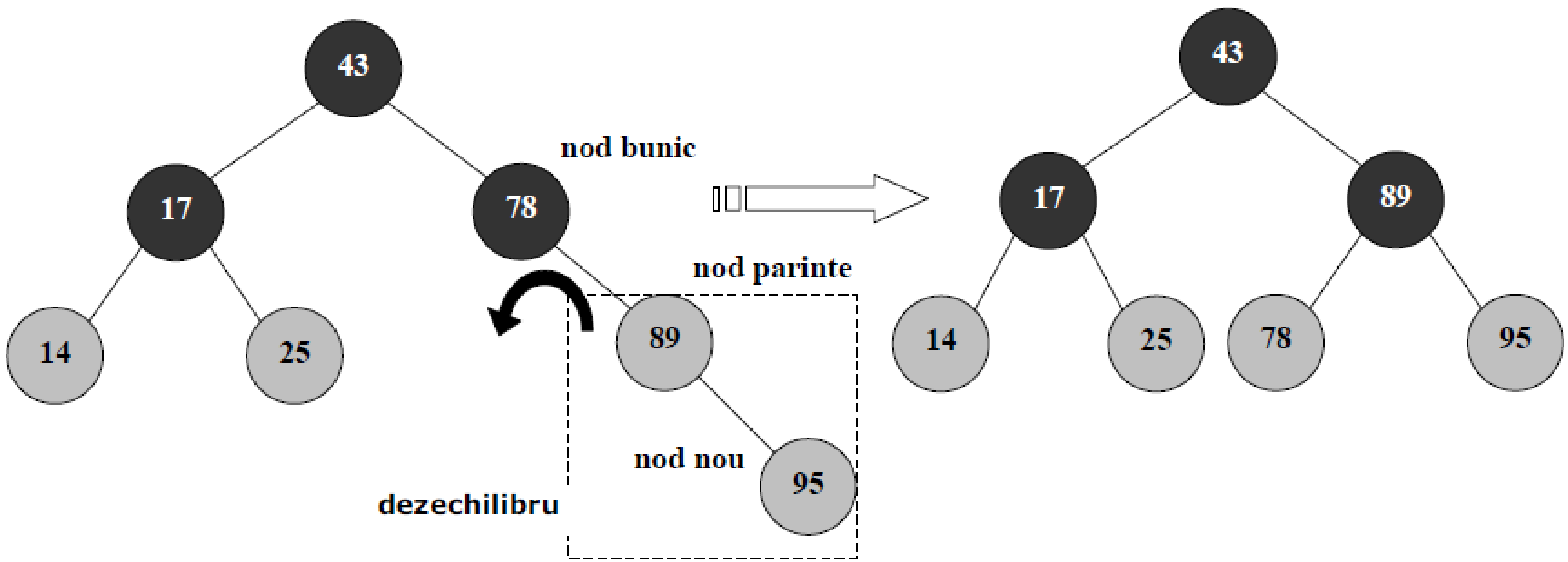

43
nod bunic
25
78
nod părinte
14
nod NULL
17
dezechilibru
nod nou
43
nod bunic
25
78
17
nod NULL
nod părinte nou
14
dezechilibru

- Este necesară a doua operaţie de rotaţie
- Rotaţia se realizează la dreapta, având sens opus cu direcţia nodului fiu faţă de nodul părinte
- Situația curentă este definită de condiţiile:
  - nodul părinte are culoare roşie, dar nodul unchi este fie negru, fie nod inexistent
  - noul nod părinte este fiu stânga pentru nodul bunic şi nodul nou inserat este fiu stânga pentru acesta
- Rotaţia este însoţită de o recolorare a nodurilor, astfel încât nodul bunic devine roşu şi noul nod părinte devine negru



43
nod bunic
25
78
17
nod NULL
nod părinte nou
14
dezechilibru
43
17
78
14
25
nod bunic vechi
nod NULL

- Se insereazӑ valorile 89 şi 95, în aceastӑ ordine



- În situația curentă, nodul părinte are culoare roşie, dar nodul unchi este fie negru, fie nod inexistent
- Nodul părinte este fiu dreapta pentru nodul bunic şi nodul nou inserat este fiu dreapta pentru acesta

Eficiența arborilor bicolori

- Ca și arborii binari de căutare, arborii bicolori permit efectuarea operațiilor de căutare, inserare și ștergere, într-un timp de O(logN)
- Pentru fiecare nod, este necesară mai multă memorie, pentru a memora culoarea și un pointer către nodul părinte

Eficiența arborilor bicolori

- Timpii necesari pentru inserare și ștergere cresc cu o valoare constantă, necesară efectuării inversării culorilor și rotațiilor la parcurgere și la locul inserării (ștergerii)
- În medie, inserarea presupune efectuarea unei rotații
- Inserarea se efectuează într-un timp de O(logN), dar este puțin mai lentă decât pentru un arbore binar de căutare

Operația de inserare

- Pe calea descendentă către locul de inserare, se verifică dacă nodul curent este negru, iar cei doi fii ai săi sunt amândoi roșii
- Dacă este astfel, se modifică culorile celor trei noduri (cu excepția cazului în care părintele este chiar rădăcina, care trebuie menținută neagră)

Operația de inserare

- După o inversare a culorilor, se verifică dacă nu se încalcă regula 3
- În acest caz, se execută rotațiile corespunzătoare: una pentru un nepot exterior, două pentru un nepot interior
- Când se ajunge la un nod frunză, se inserează nodul nou, cu mențiunea că acesta trebuie să fie roșu

Operația de inserare

- Se verifică încă o dată prezența conflictelor de culoare, executând rotațiile necesare
- Dacă se execută corect inversările de culori și rotațiile, înălțimile negre ale nodurilor se vor conserva, iar arborele va rămâne echilibrat

Concluzii

- Menținerea echilibrării unui arbore binar asigură efectuarea operației de căutare a unui nod din arbore într-un timp minim
- Inserarea unor date deja sortate va genera un arbore cu un grad de dezechilibru maxim, în care căutarea se va efectua într-un timp O(N)

Concluzii

- Modurile permise, în care pot fi dispuse nodurile dintr-un arbore bicolor, sunt specificate prin reguli de colorare
- Aceste reguli se aplică pentru operațiile de inserare și ștergere a unui nod
- O inversare de culori schimbă un nod negru cu doi fii roșii, într-un nod roșu, cu doi fii negri

Concluzii

- Într-o rotație, un nod este desemnat ca nod din vârf
- O rotație spre dreapta deplasează nodul din vârf în locul fiului său drept, iar fiul stâng al nodului din vârf, în locul părintelui său
- O rotație spre stânga deplasează nodul din vârf în locul fiului său stâng, iar fiul drept al nodului din vârf, în locul părintelui său

Concluzii

- Inversările de culori și, în unele cazuri, rotațiile, se utilizează la parcurgerea descendentă a arborelui, pentru căutarea locului de inserare
- Aceste inversări simplifică restabilirea corectitudinii la colorare a arborelui, după efectuarea inserării

Concluzii

- După inserarea unui nod, se verifică din nou conflictele de culoare
- Dacă se detectează o încălcare, se execută rotațiile corespunzătoare pentru asigurarea corectitudinii arborelui
- În urma acestor operații, arborele devine echilibrat, sau cel puțin aproape echilibrat

Concluzii

- Adăugarea informației necesare echilibrării într-un arbore are un impact negativ minor asupra performanțelor medii, evitând în schimb degradarea acestora, în cazul defavorabil în care datele sunt inițial sortate