



Universitatea Politehnica din București  
Facultatea de Automatică și Calculatoare  
Departamentul de Calculatoare



# ARBORI AVL

# Introducere

- Arborii **AVL** (Adelson-Velskii și Landis) sunt arbori **binari de căutare**, în care fiecare **subarbore** este **echilibrat în înălțime**

# Observație

- Pentru a recunoaște rapid o dezechilibrare a arborelui, s-a introdus în fiecare nod un câmp suplimentar, care să arate fie înălțimea nodului, fie diferența dintre înălțimile celor doi subarbori pentru acel nod (**-1**, **0**, **1** pentru noduri “echilibrate” și **-2** sau **+2** la producerea unui dezechilibru)

# Echilibrarea arborelui

- La adăugarea unui nod nou (ca frunză), factorul de echilibru al unui nod interior se poate modifica la **-2** (adăugare la subarborele din stânga) sau la **+2** (adăugare la subarborele din dreapta), ceea ce va face necesară modificarea structurii arborelui

# Echilibrarea arborelui

- Echilibrarea se face prin rotații simple sau duble, însoțite de recalcularea înălțimii fiecărui nod întâlnit, parcurgând arborele de jos în sus, spre rădăcină

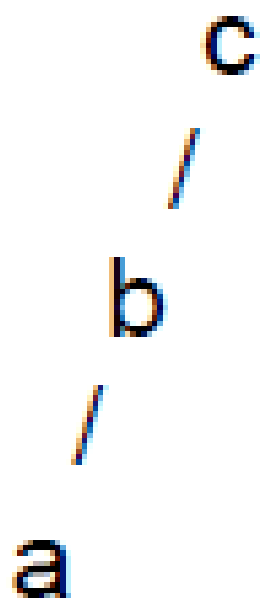
# Exemplu

- Se consideră arborele AVL:

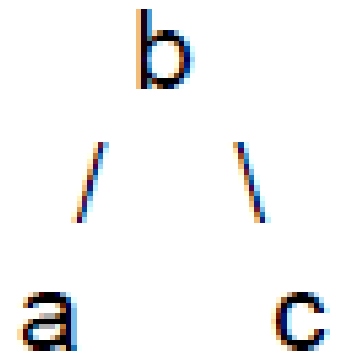


- La adăugarea valorii 'a', arborele devine dezechilibrat spre stânga și se rotește nodul 'c' la dreapta pentru reechilibrare (se efectuează o rotație simplă)

# Exemplu

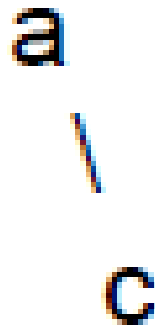


rot. dreapta c



# Exemplu

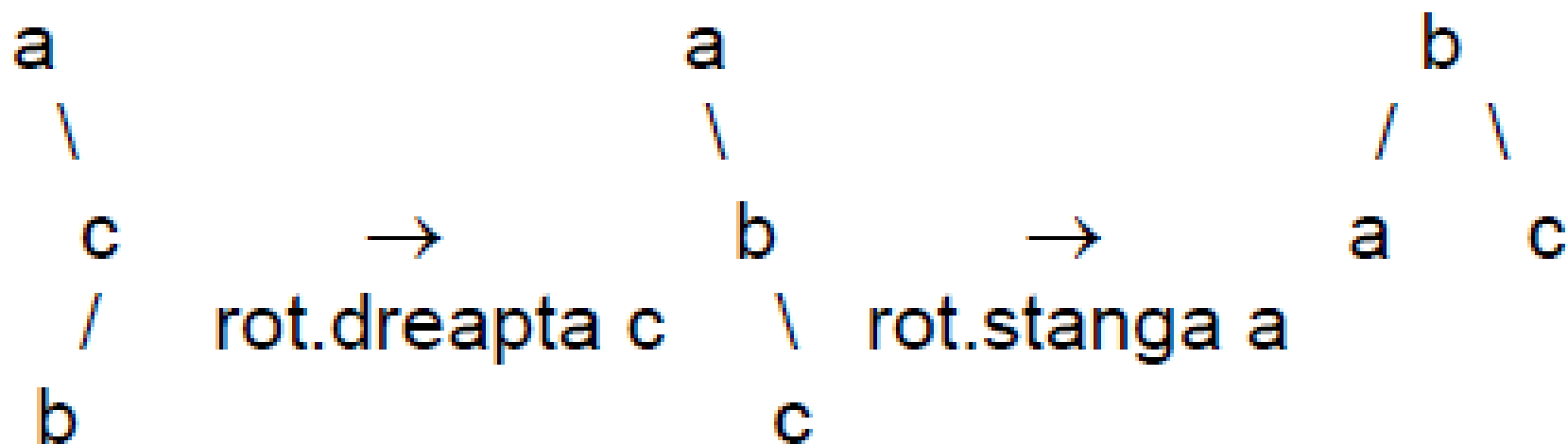
- Rotația dublă este necesară în cazul adăugării valorii 'b' la arborele AVL:





# Exemplu

- Pentru reechilibrare se rotește 'c' la dreapta și apoi 'a' la stânga (se efectuează o rotație dublă la stânga)



# Observație

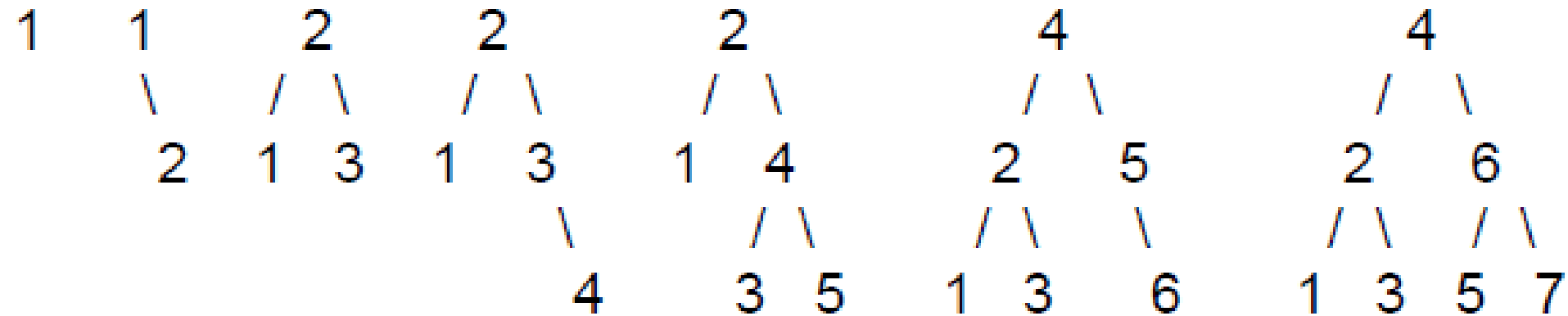
- Dacă cele 3 noduri formează o cale în zig-zag, atunci se face o rotație pentru a aduce cele 3 noduri în linie și apoi o rotație pentru ridicarea nodului din mijloc

# Reguli de rotație

- Inserarea în subarborele din dreapta al unui fiu dreapta necesită o rotație simplă la stânga
- Inserarea în subarborele din stânga al unui fiu stânga necesită o rotație simplă la dreapta
- Inserarea în subarborele din stânga al unui fiu dreapta necesită o rotație dublă la stânga
- Inserarea în subarborele din dreapta al unui fiu stânga necesită o rotație dublă la dreapta

# Exemplu

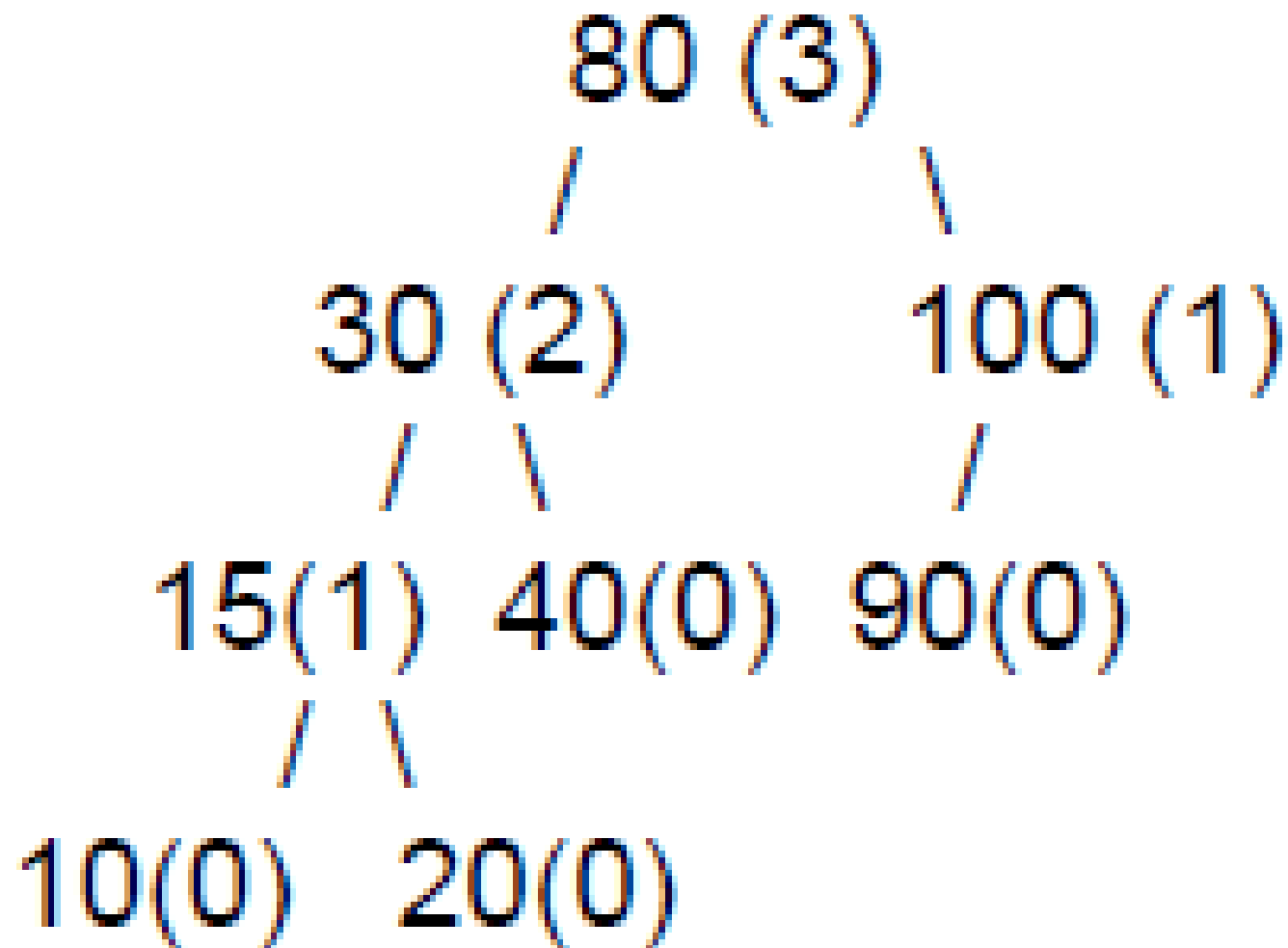
- Se inserează valorile 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7:



# Observații

- Se memorează în fiecare nod din arbore înălțimea sa, adică înălțimea subarborelui cu rădăcina în acel nod
- Un nod inexistent are înălțimea  $-1$ , iar un nod frunză are înălțimea  $0$

# Exemplu

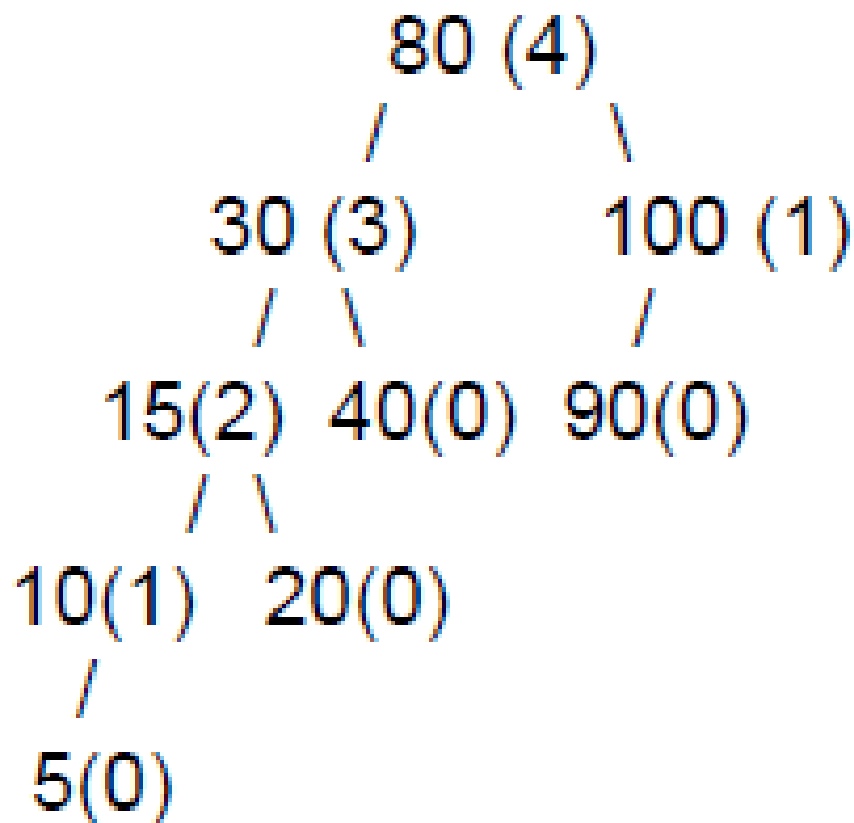


# Observație

- Adăugarea valorilor 120 sau 35 sau 50 nu necesită nicio ajustare în arbore, pentru că factorii de echilibru rămân în limitele  $[-1, +1]$

# Observație

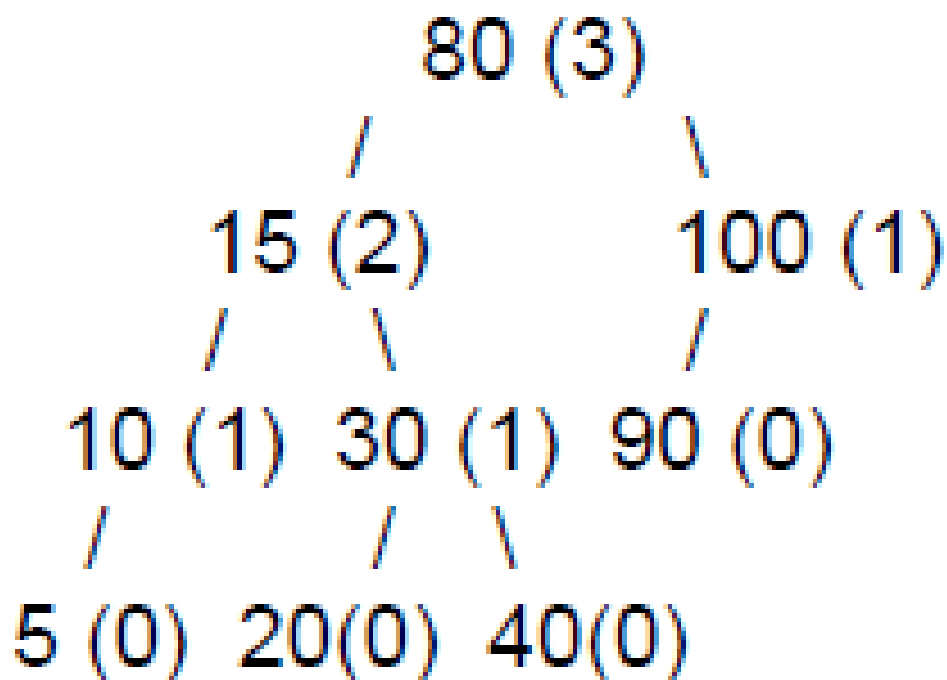
- La adăugarea nodului cu valoarea 5, arborele se va dezechilibra:





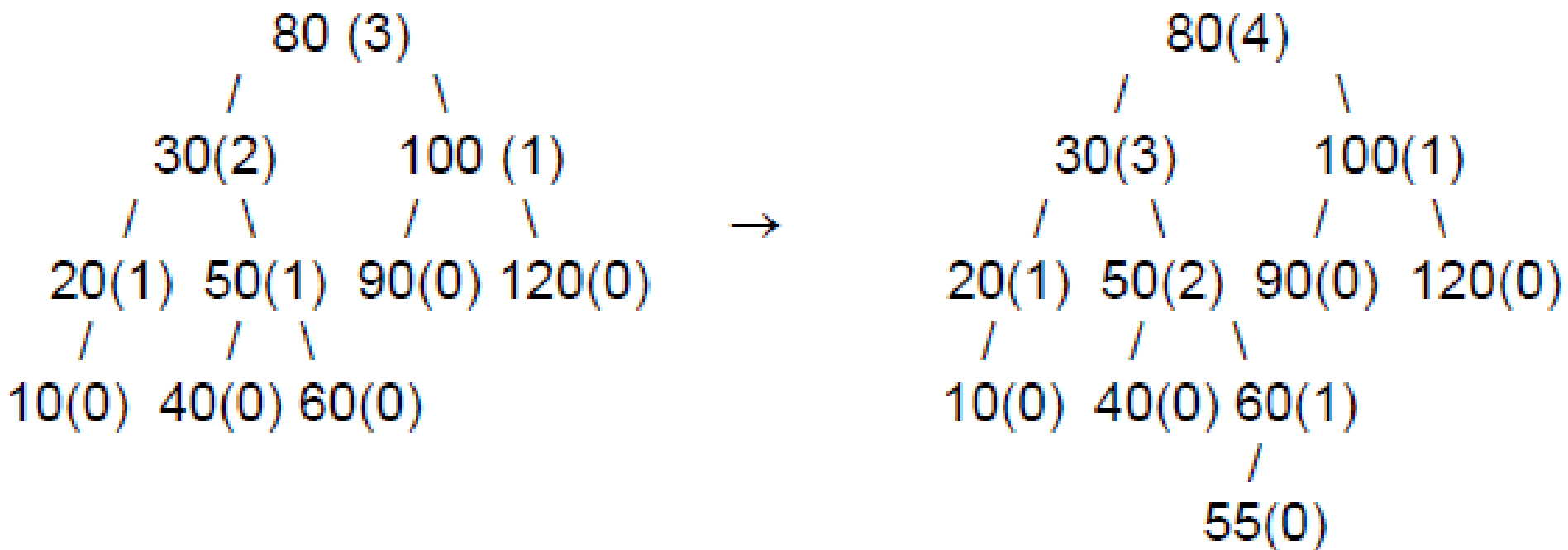
# Observație

- Primul nod, de jos în sus, dezechilibrat (spre stânga) este 30, iar soluția este o rotație la dreapta a acestui nod:



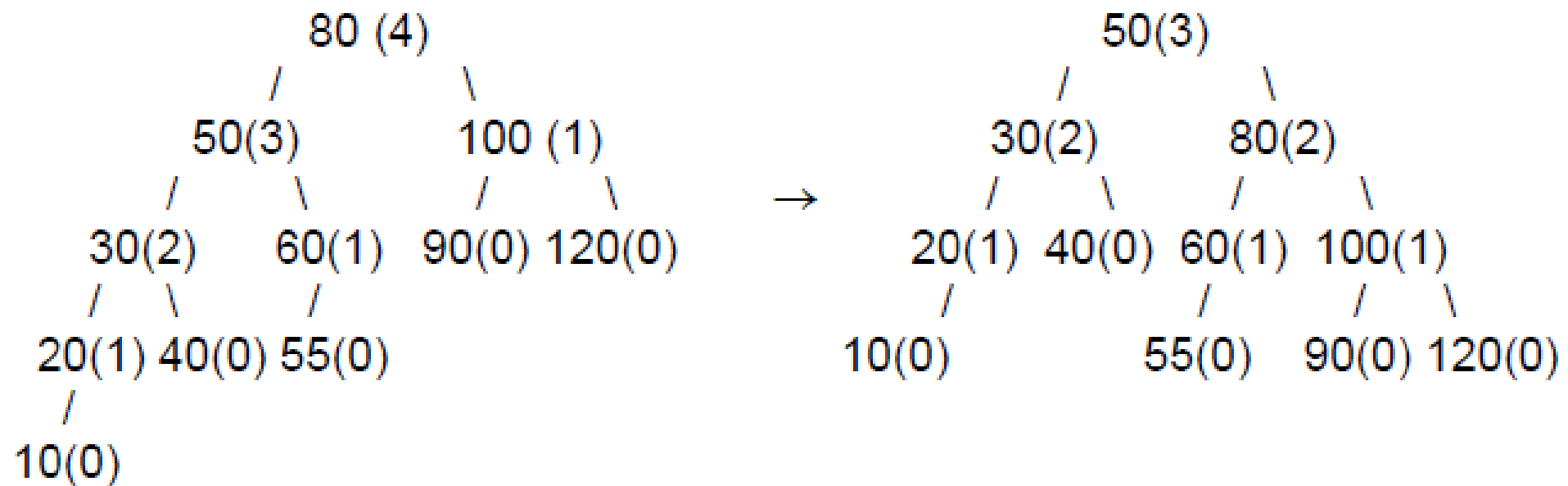
# Observație

- La adăugarea valorii 55, trebuie făcută o rotație dublă (stânga și dreapta), pentru corectarea dezechilibrului creat după adăugarea valorii 55 la arbore:



# Observații

- Primul nod dezechilibrat de deasupra celui adăugat este 80
- Se face întâi o rotație la stânga a fiului său 30 și apoi o rotație la dreapta a nodului 80



# Observații

- Înălțimea maximă a unui arbore AVL este  **$1,44 \cdot \log(n)$**
- În cazul cel mai defavorabil, căutarea într-un arbore AVL necesită cel mult 44% comparații în plus față de cele necesare într-un arbore perfect echilibrat
- În medie, este necesară o rotație (simplă sau dublă) la 46,5% din inserări și este suficientă o singură rotație pentru reechilibrare