

# Monte Carlo via Cadeias de Markov - Aplicações Físicas

Gabriel Moreira da Silva Campos



Instituto de Física Armando Dia Tavares  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

`gabrielmscampos@gmail.com`

10 de junho de 2021

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

- Apresentar Cadeias de Markov, método de Monte Carlo, a simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov (*Markov Chain Monte Carlo*, MCMC) bem como suas aplicações em problemas físicos.

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 **Resumo**
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

- Casos em que soluções analíticas são inviáveis para equações matemáticas, integrações numéricas de aproximações de ordem  $N$  podem ser utilizadas para encontrar a solução com grande custo computacional. Como alternativa, a inferência através de simulações estatística constituem um ferramental interessante para solução desses problemas.
- Simulações de Monte Carlo via Cadeias de Markov são métodos que podem ser utilizados para gerar de uma distribuição que aproxima uma distribuição alvo  $f$ .

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov**
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

# Cadeias de Markov: Definição

Uma Cadeia de Markov é um processo estocástico (coleção de quantidades randômicas) onde o estado atual, passado e futuro da cadeia são independentes.

$$P(X_{n+1} \in A | X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, X_0 \in A_0) = P(X_{n+1} \in A | X_n = x) \quad (1)$$

para todos os conjuntos  $A_0, \dots, A_{n-1}, A \subset S$  e  $x \in S$ , onde  $S$  representa o espaço de estados do processo. Equivalentemente, em um caso de espaço de estados discreto:

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = y | X_n = x) \quad (2)$$

para todo  $x_0, \dots, x_{n-1}, x, y \in S$ .



# Cadeias de Markov: Transições

As mudanças de estado de um sistema são ditas transições. Esse processo é caracterizado por um espaço de estados, uma matriz de transição descrevendo as probabilidades particulares de transição e um estado inicial.

Em geral, as probabilidades em 1 dependem de  $x$ ,  $A$  e  $n$ . Quando essas não dependem de  $n$ , a cadeia é dita homogênea. Nesse caso, podemos definir uma função de transição  $P(x,A)$ .

- ① Para todo  $x \in S$ ,  $P(x, \cdot)$  é uma distribuição de probabilidade sobre  $S$ ;
- ② Para todo  $A \subset S$ , a função  $x \mapsto P(x, A)$  pode ser computada.

Quando tratamos do caso discreto, é importante identificar  $P(x, \{y\}) = P(x, y)$ . A função de transição de probabilidade deve satisfazer:

- ①  $P(x, y) \geq 0, \forall x, y \in S$ ;
- ②  $\sum_{y \in S} P(x, y) = 1, \forall x \in S$ ;

# Cadeias de Markov: Passeio Aleatório

Considere uma partícula se movendo independentemente para esquerda e direita em uma linha com deslocamentos sucessivos de sua posição atual governados por uma função de probabilidade  $f$  sobre inteiros e  $X_n$  representando sua posição no instante  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Inicialmente,  $X_0$  é distribuído de acordo com uma distribuição  $\pi_0$ . As posições podem ser relacionadas como:

$$X_n = X_{n-1} + w_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n \quad (3)$$

onde  $w_i$  são variáveis randômicas independentes com função de probabilidade  $f$ . Assim, constituímos uma Cadeia de Markov  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  sobre  $\mathbb{Z}$ .

# Cadeias de Markov: Passeio Aleatório

A posição da cadeia no instante  $t = n$  é descrito probabilisticamente pela distribuição  $w_1 + \dots + w_n$ .

Se  $f(1) = p$ ,  $f(-1) = q$  e  $f(0) = r$  com  $p + q + r = 1$  então as probabilidades de transição são dadas por:

$$P(x, y) = \begin{cases} p, & \text{if } y = x + 1 \\ q, & \text{if } y = x - 1 \\ r, & \text{if } y = x \\ 0, & \text{if } y \neq x - 1, x, x + 1 \end{cases}$$

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo**
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

# O que são os métodos de Monte Carlo?

O objetivo dos métodos de Monte Carlo é resolver um ou os dois dos seguintes problemas:

- Gerar amostras\*  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  de uma distribuição de probabilidade  $P(x)$ .
- Estimar os valores esperados das funções sobre essa distribuição.

$$\Phi = \langle \phi(x) \rangle = \int d^N x P(x) \phi(x) \quad (4)$$

A distribuição de probabilidade  $P(x)$  é o que chamados **densidade alvo** ou **função alvo**, essa pode ser uma distribuição de física estatística ou uma distribuição condicional de uma problema de modelagem.

\* A palavra "amostra" é usada no sentido: uma amostra de uma distribuição  $P(x)$  é uma única realização  $x$  no qual sua distribuição de probabilidade é  $P(x)$ . Essa definição contrasta com a usual utilizada em estatística, onde "amostra" se refere a uma coleção de realizações  $\{x\}$ .

# O que são os métodos de Monte Carlo?

Se solucionarmos o primeiro problema (amostragem), acabamos solucionando o segundo problema, pois, utilizamos as amostras randômicas  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  no estimador

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{R} \sum_r \phi(x^{(r)}) \quad (5)$$

Claramente, se os vetores  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  são gerados de  $P(x)$  então o valor esperado  $\hat{\Phi}$  é  $\Phi$ . É importante notar que a medida que o número de amostras  $R$  aumenta, a variância de  $\hat{\Phi}$  irá diminuir com  $\frac{\sigma^2}{R}$ , onde  $\sigma^2$  é a variância de  $\phi$ ,

$$\sigma^2 = \int d^N x P(x) (\phi(x) - \Phi)^2 \quad (6)$$

- A acurácia da estimativa partir de Monte Carlo (5) é independente da dimensionalidade do espaço amostral.

# Por que gerar amostras de $P(x)$ é difícil?

Primeiro, devemos assumir que a densidade alvo que desejamos gerar amostras,  $P(x)$ , possa ser computado, pelo menos com uma constante multiplicativa. Isto é, podemos computar uma função  $P^*(x)$ , tal que

$$P(x) = \frac{P^*(x)}{Z} \quad (7)$$

Naturalmente, se podemos computar  $P^*(x)$ , poderíamos diretamente computar  $P(x)$ , contudo, tipicamente não conhecemos a constante de normalização

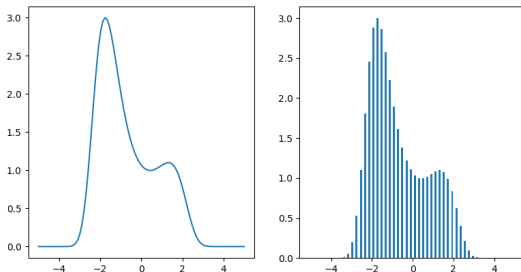
$$Z = \int d^N x P^*(x) \quad (8)$$

Além disso, ainda que conhecessemos  $Z$ , gerar amostras de  $P(x)$  ainda é uma ação custosa, especialmente em espaços N-dimensionais.

# Por que gerar amostras de $P(x)$ é difícil?

Para demonstrar a dificuldade, seja o caso unidimensional tal que queiramos gerar amostras de  $P(x)$  que satisfaça (7), onde

$$P^*(x) = \exp[0.4(x - 0.4)^2 - 0.08x^4], x \in (-\infty, \infty) \quad (9)$$





# Por que gerar amostras de $P(x)$ é difícil?

Mesmo que possamos traçar a função (figura 16, esquerda), isso não significa que conseguimos gerar amostras dela. Contudo, se podemos discretizar a variável  $x$  e pedir amostras discretas da distribuição de probabilidade sobre um conjunto uniformemente separado de pontos  $\{x_i\}$  (figura 16, direita).

Se podemos computar  $p_i^* = P^*(x_i)$  para cada ponto  $x_i$ , então podemos calcular

$$Z = \sum_i p_i^* \quad (10)$$

e

$$p_i = \frac{p_i^*}{Z} \quad (11)$$

de tal sorte que podemos amostrar a distribuição de probabilidade  $\{p_i\}$  através da geração de números randômicos. Contudo, qual é o custo desse procedimento e o quanto ele escala com a dimensionalidade do espaço,  $N$ ?

# Por que gerar amostras de $P(x)$ é difícil?

Para computar  $Z$  (10), deveríamos visitar cada ponto do espaço. Na figura (16, direita) existem 50 pontos uniformemente espaçados em uma dimensão. Se nosso sistema tivesse  $N$  dimensões, digamos  $N = 1000$ , o número de pontos correspondentes seria  $50^{1000}$ . Ainda que cada componente  $x_n$  tivesse apenas dois valores discretos, o número de cálculos para avaliar  $P^*$  seria  $2^{1000}$ .

Um sistema com  $2^{1000}$  estados é uma coleção de 1000 spins, por exemplo, um fragmento 30x30 de um modelo de Ising onde a distribuição de probabilidade é proporcional a

$$P^*(x) = \exp[-\beta E(x)] \quad (12)$$

e  $x_n \in \{\pm 1\}$  e

$$E(x) = -\frac{1}{2} \sum_{m,n} J_{m,n} x_m x_n - \sum_n H_n x_n \quad (13)$$

A função energia  $E(x)$  é facilmente avaliada para qualquer  $x$ . No entanto, se quisermos avaliar a função para todos os estados  $x$ , o tempo computacional requerido seria  $2^{1000}$  avaliações da função.

# Estratégia: Amostragem Uniforme

Como não podemos visitar cada posição  $x$  no estado de espaço, consideramos resolver o segundo problema (estimar os valores esperados da função  $\phi(x)$ ) gerando amostras randômicas  $\{x^{(r)}\}_{r=1}^R$  **uniformemente** do espaço de estado e computado  $P^*(x)$  nesses pontos. Assim, poderíamos introduzir  $Z_R$ , definido por

$$Z_R = \sum_{r=1}^R P^*(x^{(r)}), \quad (14)$$

e estimar  $\Phi = \int d^N x \phi(x) P(x)$  por

$$\hat{\Phi} = \sum_{r=1}^R \phi(x^{(r)}) \frac{P^*(x^{(r)})}{Z_R} \quad (15)$$

# Estratégia: Amostragem Uniforme

A eficácia dessa estratégia depende fortemente das funções  $\phi(x)$  e  $P^*(x)$ . Vamos assumir que  $\phi(x)$  é bem comportada variando suavemente e concentrada na natureza de  $P^*(x)$ . Uma distribuição altamente dimensional é normalmente concentrada em uma pequena região do espaço de estado conhecida como *conjunto típico*  $T$ , onde o volume é dado por  $|T| \simeq 2^{H(X)}$ , onde  $H(x)$  é a entropia de Shannon-Gibbs da distribuição de probabilidade  $P(x)$ ,

$$H(X) = \sum_x P(x) \log_2 \frac{1}{P(x)} \quad (16)$$

Se toda massa probabilística está localizada no conjunto típico e  $\phi(x)$  é uma função bem comportada, o valor de  $\Phi = \int d^N x \phi(x) P(x)$  será determinado principalmente pelos valores de  $\phi(x)$  tomados no conjunto típico. Ou seja, a amostragem uniforme só dará estimativas razoáveis para  $\Phi$  se o número de amostrar  $R$  for suficientemente grande para encontrarmos o conjunto típico.

\* Modelo de Ising para temperaturas intermediárias irá requerir  $R_{min} \simeq 2^{N/2}$ .

# Métodos de Monte de Carlo

- Amostragem por importância
- Amostragem por rejeição
- Algoritmo de Metropolis-Hastings
- Amostragem de Gibbs

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov**
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

# Monte de Carlo via Cadeias de Markov

A abordagem MCMC para amostrar de uma distribuição de probabilidade  $Q(x)$  é a construção de uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica com distribuição estacionária  $Q(x)$ , e rodar a cadeia por um tempo suficientemente longo até que a cadeia convirja para distribuição estacionária.

A **densidade proposta** (ou distribuição de referência)  $Q(x)$  para amostragem  $P(x)$  não precisa ser completamente similar à  $P(x)$ , a densidade proposta apenas precisa depender do estado atual  $x$  da cadeia.

- Algoritmo de Metropolis-Hastings
- Amostragem de Gibbs

# Algoritmo de Metropolis-Hastings

Dado  $X^t = x^t$ , o algoritmo para gerar  $X^{t+1}$  é dado por:

- 1 Gerar um candidato  $X'$  de uma **densidade proposta**  $Q(x)$
- 2 Determinar se aceitamos um novo estado a partir da razão  $a = \frac{P^*(x')}{P^*(x^t)} \frac{Q(x^t; x')}{Q(x'; x^t)}$
- 3 Se  $a \geq 1$  o novo estado é aceitado, do contrário ele é aceitado com probabilidade  $a$ .

Se o passo é aceitado, fazemos  $x^{(t+1)} = x'$ . Se o passo é rejeitado, fazemos  $x^{(t+1)} = x^{(t)}$ . Note que, os casos rejeitados não são descartados imediatamente e não influenciam na amostras  $\{x^{(r)}\}$  coletadas. A rejeição causa o estado atual a ser escrito em uma lista de pontos em outro ponto no tempo.



# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico**
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

# Oscilador Quântico Anarmônico

- Um dos poucos problemas em sistema mecânicos quânticos solúveis
- Modelo apresenta problemas em alguns regimes
- Exemplo: Expansão termal de sólidos
- Termos de ordem superior para aumentar a interação potencial
- $\lambda = 0 \rightarrow$  oscilador harmônico!

$$\hat{H}\psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda x^4 \right) \psi = E\psi \quad (17)$$

onde  $m$  é a massa da partícula,  $\omega = (k/m)^{1/2}$  é a frequência de oscilação,  $k$  é a rigidez do potencial e  $\lambda$  é a constante de acoplamento do termo quártico do potencial.

- Teoria de perturbação (2)  $\rightarrow$  diverge para  $\lambda > 0$
- Integração numérica da equação de Schrödinger
- Avaliar a integral de caminho para esse sistema com o método MCMC
- Métodos de Monte Carlo Variacionais

$$E_0(\lambda) = \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \frac{\lambda\hbar}{m\omega^2} \right)^n \quad (18)$$

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho**
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados

# Integrais de caminho de Feynman

A equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (19)$$

para o operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad (20)$$

tem a solução formal

$$\psi(x, t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \psi(x, 0) \quad (21)$$

onde o fator exponencial é o operador de evolução.

# Integrais de caminho de Feynman

A conexão com as integrais de caminho advém dos elementos de matriz do operador de evolução entre quaisquer dois autoestados da posição inicial e final.

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)/\hbar} | x_i \rangle = \int [Dx(t)] \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(x(t)) dt \right] \quad (22)$$

onde  $L$  é a Lagrangeana clássica correspondente ao operador Hamiltoniano:

$$L(x(t)) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x(t)) \quad (23)$$

- $[Dx(t)]$  significa que a integral inclui todos os caminhos  $(x, t)$ .
- A fase de cada caminho é determinada pela ação clássica (8) sobre o caminho.

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x(t)) dt \quad (24)$$

# Integrais de caminho com tempo imaginário

- Solução alternativa  $\rightarrow$  onde  $t$  é substituído por  $-i\tau$ .

$$\langle x_f, \tau_f | x_i, \tau_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\hat{H}(\tau_f - \tau_i)/\hbar} | x_i \rangle = \int [Dx(\tau)] \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{\tau_i}^{\tau_f} L_E(x(\tau)) \right] d\tau \quad (25)$$

$$L_E(x(\tau)) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x(\tau)) \quad (26)$$

A energia  $E_0$  do estado fundamental pode ser obtida através do valor esperado do Hamiltoniano (1) onde, em conjunto com o Teorema do Virial, temos:

$$E_0 = m\omega^2 \langle x^2 \rangle + 3\lambda \langle x^4 \rangle \quad (27)$$

# Conteúdo

- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC**
- 9 Resultados



- Simulações de Monte Carlo (MC) são feitas em intervalos de tempo com  $N_\tau$  incrementos  $\delta_\tau$  com pontos  $x_n = n\delta_\tau$  para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_\tau$

$$\langle x_f, \tau_f | x_i, \tau_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\hat{H}(\tau_f - \tau_i)/\hbar} | x_i \rangle = \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N_\tau} dx_k \left( \frac{m}{2\pi\hbar\delta_\tau} \right) e^{-S(x_1, x_2, \dots, x_n)/\hbar}, \quad (28)$$

onde

$$S(\{x_k\}) = \delta_\tau \sum_{i=1}^{N_\tau} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\delta_\tau} \right)^2 + V(x_i) \right] \quad (29)$$

# Mudança de variável

Fazendo a mudança de variáveis, de tal sorte que cada variável seja expressa em função do espaçamento  $\delta_\tau$ ,

$$\tilde{m} = m\delta_\tau \quad (30)$$

$$\tilde{\omega} = \omega\delta_\tau \quad (31)$$

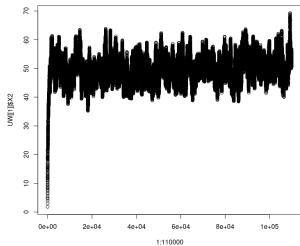
$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\delta_\tau} \quad (32)$$

$$S(\{x_k\}) = \sum_{i=1}^{N_\tau} \left[ \frac{\tilde{m}}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{\tilde{m}\tilde{\omega}^2 \tilde{x}_i^2}{2} + \tilde{\lambda} \tilde{m}^2 \omega^3 \tilde{x}_i^4 \right] \quad (33)$$

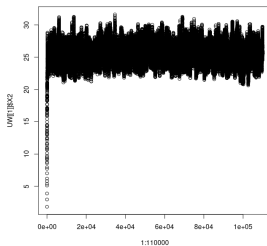
# Aplicação: Monte Carlo via Cadeias de Markov

- Método baseado em determinar a estatística dos caminhos observáveis.
- Começamos em um caminho inicial com um array de números aleatórios (*hot start*) ou zeros (*cold start*). O caminho é atualizado aplicando o algoritmo de Metropolis-Hastings para cada elemento  $x_i$  do caminho em ordem aleatória, chamado de *sweep*.
- O elemento central do método MCMC é a seleção de caminhos para os cálculos. Os caminhos devem representar o equilíbrio da distribuição, então os caminhos devem primeiro chegar ao equilíbrio em uma configuração inicial.
- O número  $N_{therm}$  de *sweeps* requeridos para obter o equilíbrio é determinado quando a quantidade mensurada flutua sobre um estado estável.

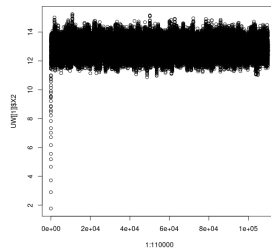
# Equilíbrio MCMC



(a)  $\tilde{\lambda} = 0, \delta_{\tau} = 0,1$



(b)  $\tilde{\lambda} = 1, \delta_{\tau} = 0,1$



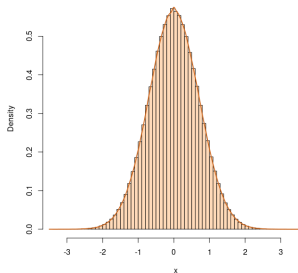
(c)  $\tilde{\lambda} = 10, \delta_{\tau} = 0,1$

# Conteúdo

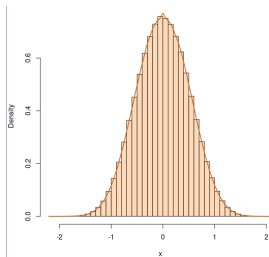
- 1 Objetivo
- 2 Resumo
- 3 Cadeias de Markov
- 4 Monte Carlo
- 5 Monte Carlo via Cadeias de Markov
- 6 Oscilador Quântico Anarmônico
- 7 Integrais de caminho
- 8 Simulação via MCMC
- 9 Resultados**

# Energia no estado fundamental: Densidade de Probabilidade

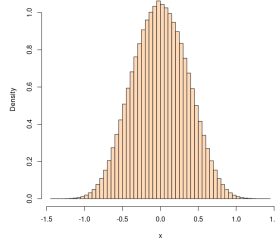
- Número de sweeps: 110000



(d)  $\tilde{\lambda} = 0, \delta_\tau = 0,1$



(e)  $\tilde{\lambda} = 1, \delta_\tau = 0,1$



(f)  $\tilde{\lambda} = 10, \delta_\tau = 0,1$

# Energia no estado fundamental: $\tilde{\lambda} = 0$

- $\delta_\tau = 0.1$

N. Sweeps	Energia Média	Erro Estatístico
500	0.309	0.043
1000	0.37	0.045
1500	0.432	0.057
2000	0.434	0.044
2500	0.464	0.035
3000	0.479	0.033
3500	0.467	0.041
4000	0.471	0.025
8000	0.494	0.019
8500	0.494	0.022
9000	0.483	0.024
9500	0.466	0.012
10000	0.5	0.021
110000	0.497	0.003

# Energia no estado fundamental: $\tilde{\lambda} = 1$

- $\delta_\tau = 0.1$

N. Sweeps	Energia Média	Erro Estatístico
500	0.664	0.076
1000	0.742	0.061
1500	0.771	0.056
2000	0.744	0.028
2500	0.757	0.023
3000	0.788	0.026
3500	0.788	0.023
4000	0.795	0.025
8000	0.775	0.011
8500	0.781	0.011
9000	0.789	0.011
9500	0.793	0.009
10000	0.789	0.011
110000	0.793	0.003



# Energia no estado fundamental: $\tilde{\lambda} = 10$

- $\delta_\tau = 0.1$

N. Sweeps	Energia Média	Erro Estatístico
110000	1.451	0.002

- Número de sweeps: 110000

$\tilde{\lambda}$	Teoria de Per- turbção	MCMC	Exato
0	0.50	$0.497 \pm 0.003$	0.500000
1	1.25	$0.793 \pm 0.003$	0.803771
10	8.00	$1.451 \pm 0.002$	1.504972



D. J. C. Mackay.

Introduction to monte carlo methods.



R. Rosenfelder.

Path integrals in quantum physics, 2017.



Shikhar Mittal, Marise J E Westbroek, Peter R King, and Dimitri D Vvedensky.

Path integral monte carlo method for the quantum anharmonic oscillator.

*European Journal of Physics*, 41(5):055401, Aug 2020.