UNISINOS

Complexidade de Algoritmos

Analisando a complexidade...

Algoritmo de ordenação: InsertionSort

- Avalie a complexidade de melhor e pior casos...

```
void insertionSort(int[] array) {
    for (int i = 1; i < array.length; i++) {
        int j = i;
        int temp = array[j];
        while (j > 0 && temp < array[j - 1]) {
            array[j] = array[j - 1];
            j--;
        }
        array[j] = temp;
    }
}
```

Algoritmo de ordenação: InsertionSort

- Como saber exatamente a quantidade de vezes que o laço mais interno executará?

Somatórios

Definição

- São expressões comumente encontradas em diferentes situações relacionadas a problemas de programação.

- Recursivos ou não, os problemas podem ser transformados em somatórios ou estudados através de somatórios.

Notação

- Basicamente, tem a seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

- Representa uma soma de *n+1* termos chamados de a_i, onde $0 \leqslant i \leqslant n$.
- A variável *i* serve como “contadora” dentro do somatório.
- Os termos a_i podem ser quaisquer termos. Da mesma forma, os limites superiores e inferiores do somatório podem ser alterados de acordo com a situação.

Notação

- Exemplos de somatórios válidos:

$$S_n = \sum_{i=n}^{2n} 3^i i = 3^n n + 3^{n+1}(n+1) + \ldots + 3^{2n} 2n$$

$$T_n = \sum_{j=k}^{n} (j-k) n = 0n + 1n + 2n + \ldots + (n-k) n$$

Exemplificando...

- Calcule o valor dos somatórios a seguir:

1) $$\sum_{j=1}^{2} (j^2+1) =$$

2) $$\sum_{k=0}^{2} (2k+2) =$$

3) $$\sum_{k=1}^{2} (3-k) =$$

4) $$\sum_{j=1}^{3} (3j) =$$

Propriedades

- Associatividade

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

- Distributividade

$$\sum_{i=1}^{n} c * a_i = c * a_1 + c * a_2 + \ldots + c * a_n = c * \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Propriedades

- Comutatividade

$$\sum_{i \in K} a_i = \sum_{p(i) \in K} a_{p(i)}$$

  - Explicação: se estivermos somando elementos a_i com índices i em um conjunto K, então é possível somá-los em qualquer ordem. Desta forma, $p(i)$ é uma permutação dos elementos do conjunto de K.

Propriedades

- Combinação

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{j=m}^{n} a_j = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) = a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Separação

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Propriedades

- Reindexação

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1+j}^{n+j} a_{i-j}$$

  - Explicação: a reindexação permite que alteremos os limites para a soma, avançando esses limites em *j* unidades. Para isso, é preciso retirar do índice a mesma quantidade que foi somada aos limites na avaliação de cada elemento a_i. Neste caso, a_{i-j}. Desta forma, o valor final da soma permanece inalterado e a igualdade é válida.

Formas Fechadas

- Geralmente, para avaliar um somatório, é necessário realizar longas somas. Essa avaliação pode ser trabalhosa e propensa a erros.

- Neste caso, uma expressão fechada nos permite avaliar diretamente uma quantidade que equivale ao somatório.

Formas Fechadas

- “Forma fechada” (ou ainda, “fórmula fechada”) não possui uma definição formal. Significa apenas uma fórmula com operações cujas avaliações podem ser “fáceis” e “rápidas”. Exemplos: soma, subtração, divisão, exponenciação, logarítmos e fatoriais.

Formas Fechadas

- Como sair de um somatório e chegar à sua forma fechada?
  - Não há receita de bolo. Criatividade e um pouco de conhecimento em álgebra são essenciais.
  - No entanto… para somatórios pouco complicados, usa-se uma técnica conhecida como: **método da perturbação**.

Formas Fechadas

- Exemplo
  - Obter a forma fechada para o seguinte somatório:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

- Começa-se verificando qual será o valor de S_{n+1} e desenvolvendo como segue…

Formas Fechadas

- Exemplo (continuando...)

$$S_{n+1} = S_n + x^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} x^i \qquad (1)$$

$$= x^0 + \sum_{i=1}^{n+1} x^i \qquad (2)$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n} x^{i+1} \qquad (3)$$

$$= 1 + x \sum_{i=0}^{n} x^i \qquad (4)$$

$$S_n + x^{n+1} = 1 + x S_n \qquad (5)$$

$$\Downarrow$$

$$(1 - x) S_n = 1 - x^{n+1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

Formas Fechadas

- Exemplo (continuando...)
  - Linha (1): soma original perturbada com a colocação de um termo a mais, originando o termo S_{n+1}.
  - Linha (2): retira-se o primeiro termo da nova soma. Isso para alterar o índice inferior do somatório, avançando em uma unidade.
  - Linha (3): reindexa-se a soma em uma unidade, recuando os índices. Com isso, os índices deverão ser iguais aos índices de S_n.
  - Linha (4): manipula-se o valor interno da soma até ficar igual a S_n.
  - Linha (5): obtém-se uma equação envolvendo S_n. Resolve-se a equação, e chega-se à forma fechada do somatório.

Formas Fechadas

- O método da perturbação resolve uma série de somas, mas nem sempre é possível chegar na equação para S_n. Mesmo assim, a aplicação do método ajuda a entender melhor o somatório e pensar em uma estratégia diferente para resolvê-lo.

Exercitando...

Exercícios

- Encontre a fórmula fechada para os seguintes somatórios:

1) $\sum_{i=1}^{n} i^2$

2) $\sum_{k=1}^{n} a^k$

3) $\sum_{i=0}^{n} 2i+1$

Exercícios

- Agora que você já sabe encontrar a fórmula fechada de um somatório, resolva o somatório encontrado na análise do pior caso do algoritmo *InsertionSort*.