UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS
Escola Politécnica

Cálculo Diferencial

São Leopoldo

2022

CONJUNTOS NUMÉRICOS:

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado por: $\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\}$

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, do qual extraímos o zero: $\mathbb{N}^* = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

Obs: A letra $\mathbb{Z}$ é a inicial da palavra *Zahl*, que significa número em alemão.

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$, obtemos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Assim, por exemplo, são números racionais:

$$-2, \quad -\frac{3}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1, \quad \frac{5}{3}, \quad 2$$

Observamos que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Assim, podemos escrever, $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$.

Observe que a restrição $b \neq 0$ é necessária, pois $\frac{a}{b}$ só tem significado se $b \neq 0$. A designação racional surgiu porque $\frac{a}{b}$ pode ser vista como uma razão entre os inteiros a e b. A letra $\mathbb{Q}$, que representa o conjunto dos números racionais é a primeira letra da palavra *quociente*.

Se $b = 1$, temos $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}$, o que implica que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Assim, podemos perceber que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{Q}'$)

Este é o conjunto dos números que não possuem representação na forma $\frac{a}{b}$, são os decimais infinitos e não-periódicos. Alguns exemplos são os números:

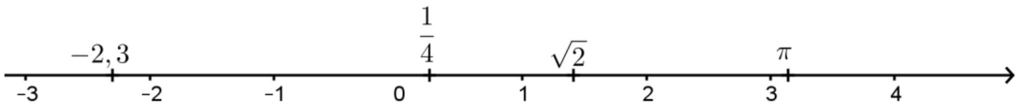
$$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots \qquad e = 2,71828183 \dots \qquad \pi = 3,1415926535 \dots$$

Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais obtemos o conjunto dos números reais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \{x \mid x \text{ é } racional \ ou \ x \text{ é } irracional\}$$

Este conjunto pode ser representado graficamente por meio de um segmento de reta orientado. A seguir, alguns números reais para exemplificar.



Intervalos

Denominamos intervalo a qualquer subconjunto dos números reais. Assim, dados dois números reais a e b, com $a < b$, temos:

a)*intervalo aberto*

Representação algébrica:
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou (a, b) ou $]a, b[$

A bolinha "aberta"(○) indica que os extremos a e b não pertencem ao intervalo. Esse intervalo contém todos os números reais compreendidos entre a e b, excluindo os extremos.

b)*intervalo fechado*

Representação algébrica:
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ou $[a, b]$

A bolinha "fechada"(●) indica que os extremos a e b pertencem ao intervalo. Esse intervalo contém todos os números reais compreendidos entre a e b, incluindo os extremos.

c)*intervalo semi-aberto à direita*

Representação algébrica:
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ou $[a, b)$ ou $[a, b[$

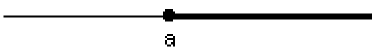
d)*intervalo semi-aberto à esquerda*

Representação algébrica:
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ou $(a, b]$ ou $]a, b]$

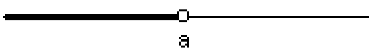
Podemos ter ainda intervalos com as seguintes características:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $(a, +\infty)$

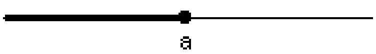
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ou $[a, +\infty)$



$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $(-\infty, a)$



$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ou $(-\infty, a]$



FUNÇÕES:

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. É muito comum expressar fenômenos físicos, biológicos, químicos, sociais, entre outros, por meio de funções, daí a importância de seu estudo. A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis, uma delas chamada dependente e a outra chamada independente.

Observe esses exemplos:

1) Imagine o abastecimento de um automóvel em um posto de gasolina. O valor a ser pago pelo abastecimento depende da quantidade de litros de combustível abastecidos. Dessa forma, podemos afirmar que o valor a ser pago é a variável dependente e a quantidade de litros de combustível é a variável independente. A tabela a seguir mostra a relação entre essas duas variáveis no caso hipotético de um litro de combustível custar R$ 4,50.

combustível (*litros*)	valor a pagar(*R$*)
1	4,50
2	9,00
10	45,00
20	90,00
25	112,50
⋮	
L	4,50 x L

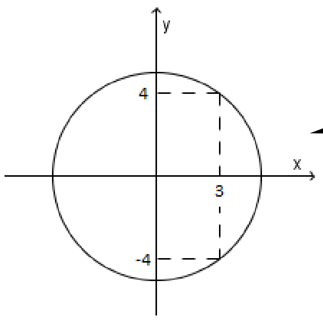
2) Complete a tabela abaixo que relaciona o tempo t de duração de uma viagem de 360 km em função da velocidade média (v) desenvolvida ao longo do trajeto. Em seguida, dê a lei matemática que relaciona o tempo em função da velocidade. Perceba que o tempo depende da velocidade, portanto, nessa situação, a velocidade é a variável independente e o tempo a variável dependente.

velocidade média (v)	tempo (t)
10	
40	
60	
90	
120	
⋮	
v	

Definição: Considere dois conjuntos, o conjunto$A$ com elementos x e o conjunto B com elementos y. Diz-se que temos uma função de A em B ($f: A \to B$) quando existe uma relação entre os elementos desses dois conjuntos tais que para cada elemento de A há um, e apenas um, correspondente em B.

Seja$f: A \to B$, $f(x) = y$, uma função. Nesse esquema, A é o **domínio** da função, ou seja, o conjunto que contém todos os elementos***x*** para os quais a função é definida; B é o **contradomínio** da função, ou seja, o conjunto que contém os elementos ***y*** que podem estar relacionados aos elementos ***x***; e$f(x) = y$ é a lei da função, ou seja, a regra que associa os elementos ***x*** e ***y***.

Nem toda relação entre 2 variáveis é chamada de função. Numa função, para todo valor atribuído à variável independente (x) há em correspondência **APENAS UM** valor da variável dependente (y). É fácil perceber que na relação$x^2 + y^2 = 25$, por exemplo, para$x = 3$ podemos ter$y = 4$ ou $y = -4$. Tal relação, portanto, **NÃO** é uma função.Observe no gráfico a seguir.



Dica! Para verificar, graficamente, se uma curva no plano representa o gráfico de uma função, utiliza-se o **“Teste da Reta Vertical”**. Este teste consiste em traçar uma reta vertical sobre a curva e se esta interceptá-la em mais de um ponto, então a curva não representa o gráfico de uma função.

Domínio e imagem de uma função

Domínio (D) de uma função é o (maior) conjunto de valores que a variável independente pode assumir, enquanto que imagem (Im) é o conjunto de valores que a variável dependente assume, considerando a regra que associa as duas variáveis. Geralmente não é possível listar todos esses valores de modo explícito, o que torna necessário o uso da representação por conjunto ou intervalos numéricos. Normalmente, o domínio de uma função é determinado diretamente pela lei da função.

<u>Exemplo</u>:Qual o domínio das funções representadas pelas leis abaixo?

a)$f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-8}$

d) $f(x) = \frac{2x+8}{4x^2-16}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Valor numérico da função

Valor numérico de uma função é o valor que a variável dependente ("y") assume quando é atribuído algum valor à variável independente ("x").Este valor pode ser determinado a partir da lei da função, ou de seu gráfico, como nos exemplos a seguir.

<u>Exemplos</u>:

1) Se$f(x) = x^2 - 4x$, determine o que se pede abaixo:

a) $f(2) =$

b) $f(4) =$

c) $f(10) =$

d) $D(f) =$

2) Dada a função$f(x)$ representada pelo gráfico abaixo, determineo que se pede:

a) $f(4) =$

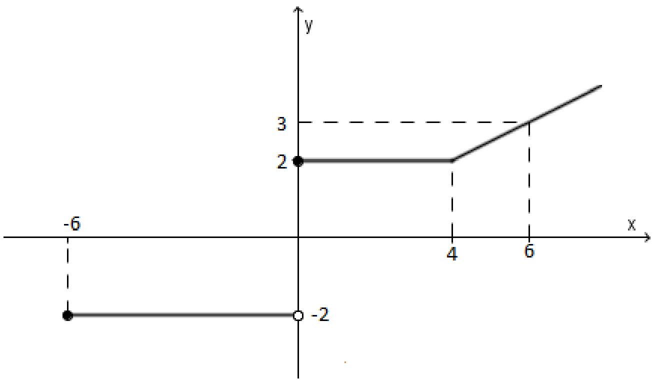
b) $f(0) =$

c) $f(-3) =$

d) $f(1) =$

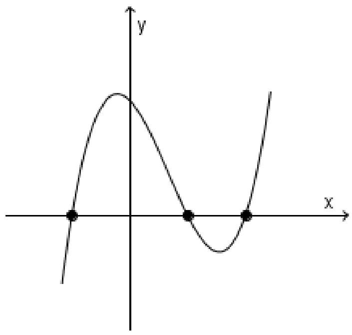
e) $D(f) =$

f) $Im(f) =$



Raízes (ou zeros) de uma função

Chama-se raiz de uma função$f(x)$ o valor de x que anula a função, ou seja, o(s) valor(es) de x para o(s) qual(is) $y = 0$. Graficamente, as raízes indicam o ponto de intersecção com o eixo x. O gráfico ao lado mostra as raízes em destaque.

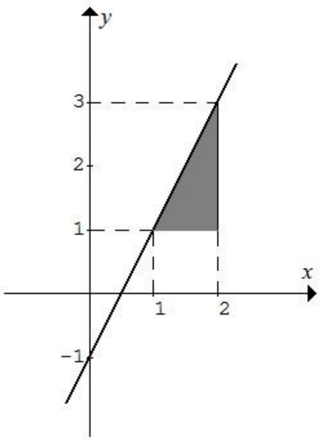


FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU (FUNÇÃO AFIM)
Característica: o gráfico é uma reta.
Lei geral: $y = ax + b$, com $a \neq 0$

O coeficiente a indica a taxa de variação da função ou inclinação da reta e é numericamente igual à tangente do ângulo que a reta faz com o eixo x, isto é, $a = tg(\alpha)$.

O coeficiente b indica onde a função intercepta o eixo y.

Em toda função do 1º grau as variações dos valores de y são diretamente proporcionais às correspondentes variações dos valores de x. O gráfico abaixo representa a função $y = 2x - 1$.



Note que para cada variação de 2 unidades no eixo y há uma variação de 1 unidade no eixo x. A taxa de variação é dada, portanto, por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e corresponde ao coeficiente a da função. Ou seja:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$$

Como consequência, se essa taxa é positiva, a função é crescente, se for negativa, é decrescente.

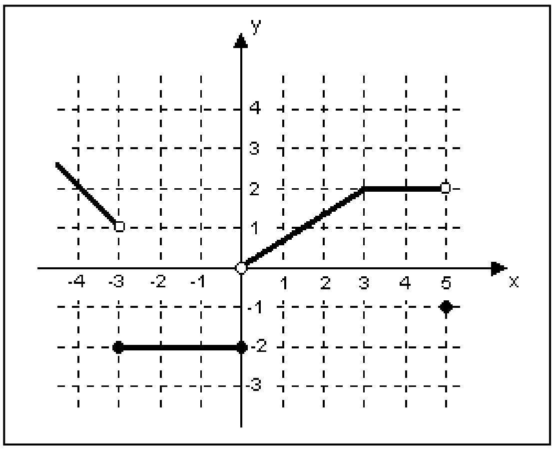
Por outro lado, perceba que a função intercepta o eixo y na ordenada -1. Nesse ponto, $x = 0$. Temos portanto, $y = a.0 + b$, o que implica que $y = b$ quando $x = 0$. No exemplo, $b = -1$.

<u>Exemplos</u>:
1) Represente graficamente as funções abaixo:
a) $y = 3x - 6$
b) $f(x) = -2x + 6$

2) Determine a lei da função afim cujo gráfico contém os pontos $A(1, -2)$ e $B(3, -1)$.

Exercícios

1) Dada a função representada pelo gráfico ao lado, determine:



a) $f(-2) =$

b) $f(5) =$

c) $f(-3) =$

d) $D(f) =$

e) $Im(f) =$

f) os valores de x em que $f(x) > 0$

g) os valores de x em que $f(x) < 0$

2) Determine $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(3)$, $f(\sqrt{2})$ e $f(5)$ nas funções abaixo:
a) $f(x) = 3x^2 - 2$
b) $f(x) = 2 - \frac{9}{x^2}$

3) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \sqrt{3-x}$

d) $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$

e) $h(x) = 3 + \sqrt{x}$

f) $g(x) = x^3 + 2$

4) Dada a função real definida por $f(x) = \frac{3}{x} + 5$, determine:

a) $D(f) =$

b) $f(1) =$

c) o valor de x tal que $f(x) = 4$

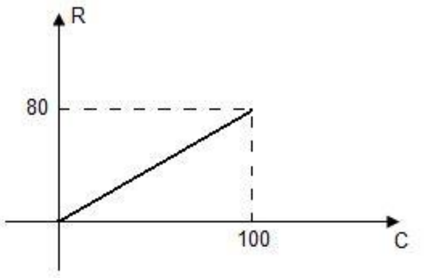
5) Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = -x + 2$

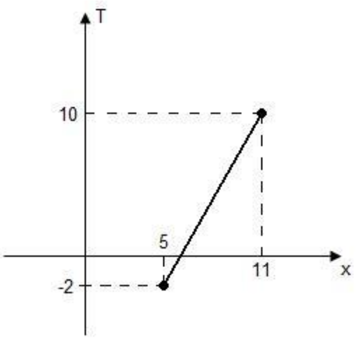
6) Determine a lei da função polinomial de 1º grau cujo gráfico passa pelos pontos $A(-2, 3)$ e $B(2, 0)$.

7) Atualmente as escalas de temperatura em uso são Celsius, Fahrenheit e Kelvin. Em 1731, o físico e inventor francês, René-Antoine Ferchault de Réaumur desenvolveu a escala Réaumur (ºR). É possível estabelecer uma relação entre as escalas Celsius e Réaumur, mostrada no gráfico ao lado.



a) Qual a lei matemática que relaciona *R* em função de *C*?

b) Se as escalas Celsius e Fahrenheit se relacionam segundo a lei $F = 1{,}8C + 32$, qual função relaciona as escalas *F* e *R*?



8) Em um dia de inverno, a temperatura *T* de uma região do Rio Grande do Sul, em graus Celsius, em função do horário *x*, no período das 5h às 11h, pôde ser descrita pelo gráfico ao lado. Qual a lei matemática que expressa a função descrita pelo gráfico nesse intervalo de tempo?

RESOSTAS:

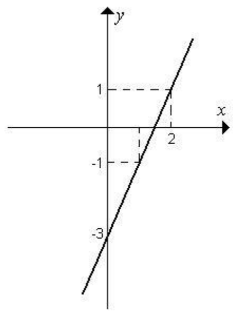
1) a) $f(-2) = -2$
b) $f(5) = -1$
c) $f(-3) = -2$
d) $D(f) = (-\infty, 5]$
e) $Im(f) = \{-2, -1\} \cup (0, +\infty)$
f) $(-\infty, -3) \cup (0, 5)$
g) $[-3, 0] \cup \{5\}$

2)
a) $f(0) = -2$ b) $f(0)$ não é possível calcular, pois 0 não pertence ao domínio da função
$f(2) = 10$ $f(2) = \frac{7}{4}$
$f(-2) = 10$ $f(-2) = \frac{7}{4}$
$f(3) = 25$ $f(3) = 1$
$f(\sqrt{2}) = 4$ $f(\sqrt{2}) = -\frac{5}{2}$
$f(5) = 73$ $f(5) = \frac{41}{25}$

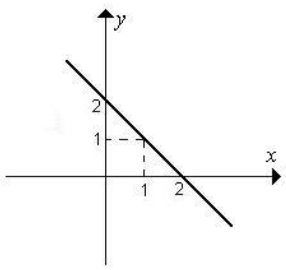
3) a) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ d) $D(g) = \mathbb{R} - \{-5, 5\}$
b) $D(f) = \mathbb{R}$ e) $D(h) = [0, +\infty)$
c) $D(f) = (-\infty, 3]$ f) $D(g) = \mathbb{R}$

4) a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
b) $f(1) = 8$
c) $x = -3$

5) a)



b)



6) $y = \frac{-3x+6}{4}$

7) a) $R = \frac{4C}{5}$
b) $F = \frac{9R}{4} + 32$

8) $T = 2x - 12$

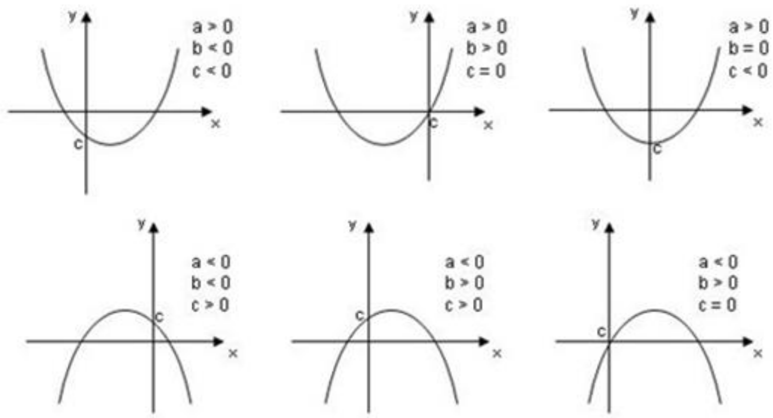
FUNÇÃO POLINOMIAL DE 2º GRAU (FUNÇÃO QUADRÁTICA)
Característica: o gráfico é uma parábola.
Lei geral: $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

a→ indica se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo.
a > 0: concavidade voltada para cima
a < 0: concavidade voltada para baixo

b→ indica se a parábola está "subindo" ou "descendo", quando intercepta o eixo *y*.
b > 0: a parte crescente da parábola intercepta o eixo *y*
b < 0: a parte decrescente da parábola intercepta o eixo *y*

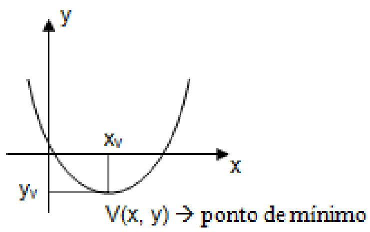
c→ termo independente: como todos os termos independentes de funções polinomiais, o "*c*" indica o ponto de intersecção do gráfico com o eixo *y*.
c > 0: corta o eixo *y* acima da origem
c = 0: corta o eixo *y* na origem
c < 0: corta o eixo *y* abaixo da origem

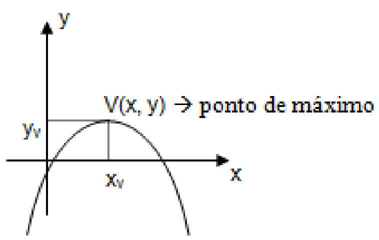
Os gráficos das funções quadráticas são parábolas cujas posições dependem dos coeficientes *a*, *b* e *c*.



Vértice

Vértice de uma parábola é o ponto de máximo quando a concavidade é voltada para baixo e ponto de mínimo quando a concavidade é voltada para cima.Sendo o vértice um ponto, é localizado no plano por um par de números, que chamamos de *par ordenado*. Denotando o vértice de ponto V, temosV(x_v, y_v), onde$x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$ (x_1 e x_2 são as raízes da função) ou $x_v = -\frac{b}{2a}$. A ordenada do vértice y_v pode ser determinada substituindo x_v na função, ou seja, $y_v = f(x_v)$.





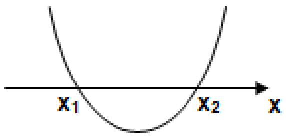
Raízes da função quadrática

Sabemos já que as raízes, ou zeros, de uma função são os valores de x que anulam a função. Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinamos as raízes x_1 e x_2 fazendo $ax^2 + bx + c = 0$. Para calcular, podemos usar a chamada ‘fórmula de Bháskara’:

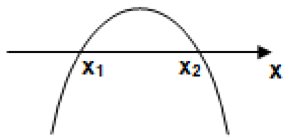
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

O sinal de Δ determina as características das raízes:

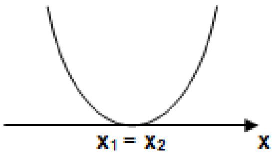
$\boxed{\boldsymbol{\Delta > 0 \rightarrow} \textbf{ 2 raízes reais e diferentes}}$



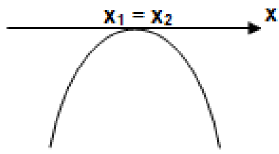
ou



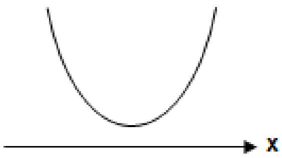
$\boxed{\boldsymbol{\Delta = 0 \rightarrow} \textbf{ 2 raízes reais e iguais}}$



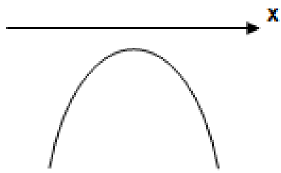
ou



$\boxed{\boldsymbol{\Delta < 0 \rightarrow} \textbf{ não existem raízes reais}}$



ou



Forma fatorada da função quadrática:

Conhecendo-se as raízes x_1 e x_2 da função, a expressão $y = ax^2 + bx + c$ é equivalente a $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, ou seja, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

<u>Exemplos</u>:

1) Dada a função $y = 2x^2 - 8x + 6$, determine as coordenadas do vértice, as raízes, domínio, imagem e faça o esboço do gráfico.

2) A porcentagem ***p*** de bactérias em uma certa cultura sempre decresce em função do número ***t*** de segundos em que ela fica exposta à radiação, segundo a relação $p(t) = \frac{t^2}{2} - 15t + 100$.

a) Após 5s de exposição, qual é o percentual de bactérias existentes na cultura?

b) Após quantos segundos de exposição ocorre a eliminação de toda a cultura?

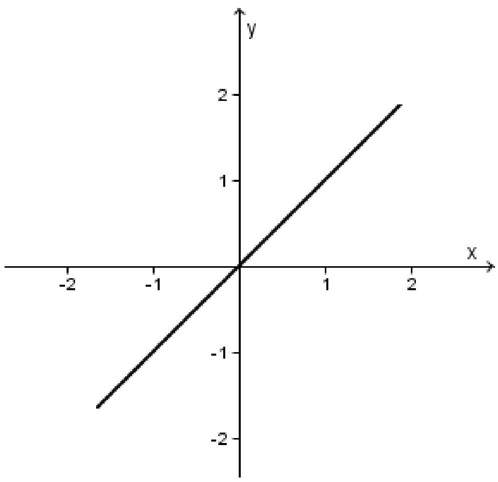
3) Os termos Custo, Receita e Lucro são próprios da área econômica. Nesse contexto, relacionamos Custo às despesas, fixas e variáveis, de um indivíduo ou empresa; a Receita está ligada ao faturamento bruto da entidade e Lucro é a diferença entre Receita e Custo, ou seja:***Lucro = Receita – Custo***.Considere que uma forma líquida de penicilina fabricada por uma indústria farmacêutica é vendida a um preço de R$ 200,00 por unidade (ampola). Se o custo total de produção (em reais) para x unidades for$C(x) = 500000 + 80x + 0{,}003x^2$. Quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas para o lucro ser máximo?

FUNÇÃO DO TIPO$\boldsymbol{y = x^n}$

Abaixo serão mostradas algumas funções do tipo $y = x^n$ que terão importância no nosso estudo posterior. Fica a cargo do leitor um aprofundamento desse conteúdo.

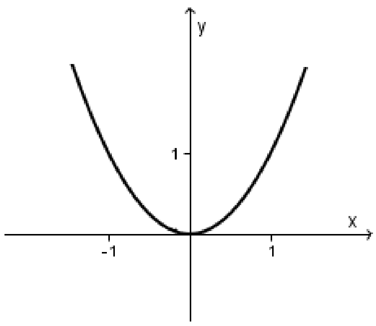
Função Identidade ($\boldsymbol{y = x}$)

A função afim do tipo$y = ax$, com$a \neq 0$, é chamada de linear. Particularmente, a função$y = x$ é chamada de função identidade. Abaixo o gráfico dessa função.



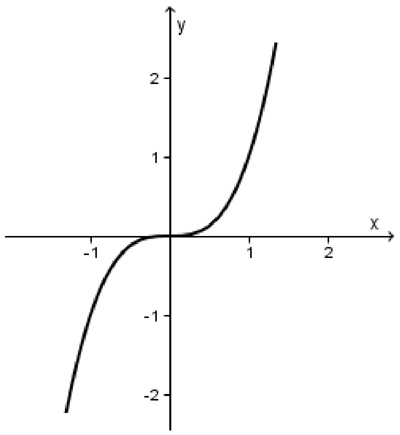
Função$\boldsymbol{y = x^2}$

A função$y = x^2$é um caso particular da função quadrática. Abaixo seu gráfico.



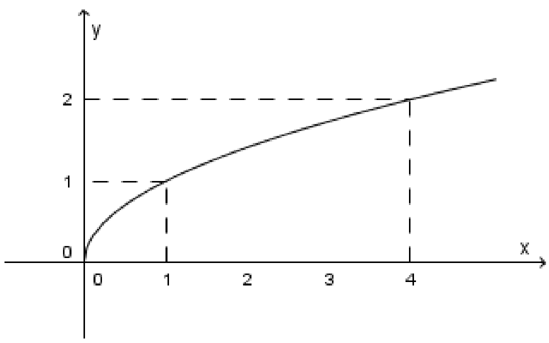
Função $y = x^3$

Funções do tipo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ são chamadas de cúbicas. Assim, $y = x^3$ é um caso particular da função cúbica. Abaixo é mostrado seu gráfico.



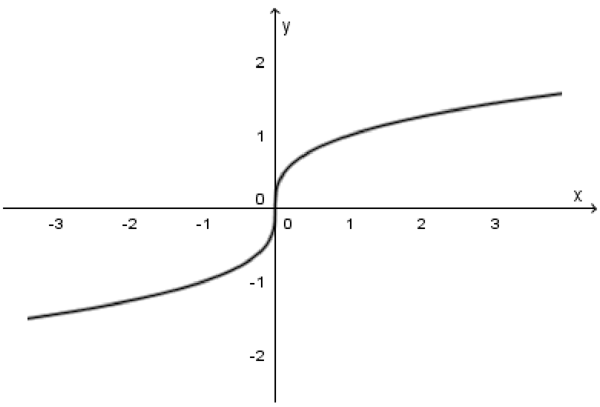
Função Raiz Quadrada ($y = \sqrt{x}$)

A função raiz quadrada tem por domínio o intervalo $[0, +\infty)$, pois no conjunto dos números reais não estão definidas as raízes quadradas de números negativos. Abaixo é mostrado o gráfico dessa função.



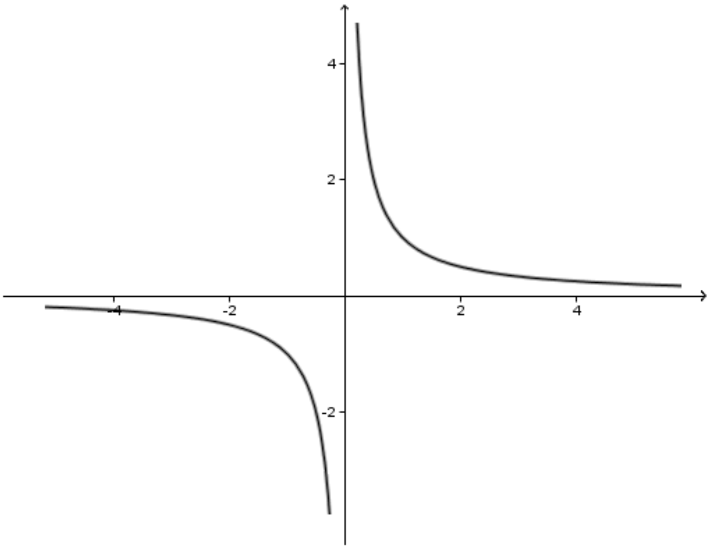
Função Raiz Cúbica ($y = \sqrt[3]{x}$)

A função raiz cúbica tem por domínio o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$). Abaixo é mostrado o gráfico dessa função.



Função $y = \frac{1}{x}$

O domínio dessa função exclui o zero, pois a divisão por zero não está definida. Abaixo é mostrado o gráfico.



FUNÇÃO DEFINIDA POR PARTES

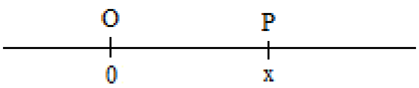
Existem funções cuja lei de formação é dada por uma sentença composta por duas ou mais partes. Observe os exemplos a seguir.

1) Os clientes das companhias telefônicas Tchau® têm à disposição o Plano 50, que consiste num limite preestabelecido de 50minutos em ligações ao custo mensal de R$ 30,00. Se esse limite é ultrapassado, cada minuto excedente tem um custo de R$ 1,20.
a) Qual será o valor da conta de um cliente que usou 20minutos em ligações?
b) Qual será o valor da conta de um cliente que usou 60minutos em ligações?
c) Expresse essa função em forma de uma lei matemática.

2) Considere a função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x+1, & se\ x < 0 \end{cases}$.
a) Calcule $f(4)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(-10)$.
b) Esboce o gráfico dessa função.

Função Modular

Considere a reta real de origem O e um ponto P de abcissa *x*.

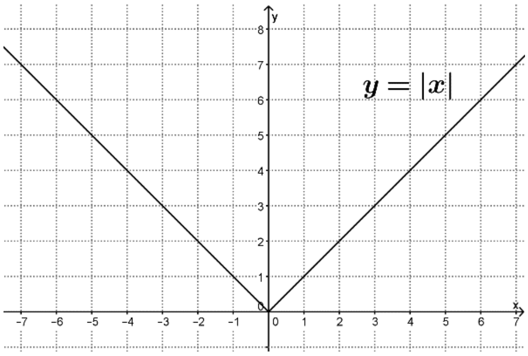


Chamamos módulo, ou valor absoluto, de *x*, e indicamos por $|x|$, a distância entre os pontos P e O na reta real. Note que como módulo é uma distância, ele será sempre positivo ou nulo. Assim, define-se módulo do número *x* como:

$$|x| = \begin{cases} x, & se x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

<u>Exemplos</u>:
a) $|5| =$
b)$|-7| =$
c)$|0| =$
d) $|5 - 8| =$
e) $|5| - |8| =$

A função modular pode ser apresentada como $f(x) = |x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$. Graficamente:



Exercícios

1) Durante um passeio noturno de barco, diversão preferida de um grupo de jovens, surgiu uma situação de perigo, em que houve necessidade de disparar um sinalizador para avisar o restante do grupo que ficara no acampamento. A função que descreve o movimento do sinal luminoso é dada pela expressão$h(t) = 30t - 3t^2$, onde h é a altura do sinal em metros e *t*, o tempo decorrido em segundos, desde o disparo até o momento em que o sinalizador cai na água.
a) Qual a altura máxima atingida pelo sinalizador?
b) Após quantos segundos o sinalizador cai na água?

2) Um projétil é lançado do solo, verticalmente para cima. A função que relaciona a altura h, em metros, e o tempo *t*, em segundos, é representada por$h(t) = 80t - 4t^2$. Nessas condições, após quanto tempo o projétil atinge a altura máxima?

3) Uma pequena empresa de reciclagem tem seu lucro mensal dado por$L(x) = -0{,}2x^2 + 2x - 0{,}5$, onde *x* representa a massa de produto reciclado, em dezenas de quilogramas, e *L* representa o lucro, em milhares de reais. Qual o lucro máximo mensal possível nessa empresa, segundo essa função?

4) Faça o gráfico das seguintes funções, determinando as coordenadas do vértice e as raízes, caso existam.
a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
b) $f(x) = 4x - x^2$
c) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

5) O programa de computador de uma empresa de transporte indica o preço P, em reais, dos fretes de acordo com a lei matemática $P(d) = \begin{cases} 2{,}5d + 50, se\ d \leq 100 \\ 2(d - 100) + 300, se\ d > 100 \end{cases}$, onde d é a distância, em quilômetros. Responda:

a) Qual é o preço do frete para uma distância de 120km?
b) Se o custo foi de R$ 500,00, qual foi a distância do frete?

6) Uma empresa pública de fornecimento de água cobra R$ 60,00 a título de taxa fixa, que dá direito ao usuário consumir mensalmente até 15m^3 de água. Além desse volume, é cobrado um acréscimo de R$ 5,00 por m^3 de excesso.
a) Se um usuário teve que pagar R$ 80,00, qual foi seu consumo mensal de água?
b) Escreva uma lei matemática que forneça o preço mensal P a pagar pela conta de água em função do número x de m^3 de água consumidos.

7) A quantidade q de unidades vendidas diariamente de um certo produto varia conforme o preço unitário p (em reais) segundo a função $q = 80 - 2p$ (com $p > 0$ e $q > 0$). A receita total diária é obtida multiplicando-se a quantidade de unidades vendidas pelo preço unitário cobrado ($R = q.p$). De acordo com essa lei, qual o preço do produto que provoca a receita máxima?

8) O valor V, em reais, da conta mensal de energia elétrica é calculado a partir do consumo C, em kWh. Para consumos inferiores ou iguais a 200 kWh, o valor do kWh é de R$ 0,30. No entanto, para consumos superiores, o valor do kWh é acrescido de 50% para a parcela que exceder a 200 kWh. Escreva a lei matemática que relaciona o valor V a pagar em função do consumo C.

9) Para as funções a seguir, construa seus gráficos e determine seus domínios e imagens:

a) $f(x) = \begin{cases} -5; & x < -1 \\ 3x - 2; & -1 \leq x < 2 \\ 4; & x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x - 1; & x \leq -2 \\ 1; & -2 < x \leq 0 \\ x + 1; & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x; & x \leq -2 \\ x^2 - 4; & -2 < x < 3 \\ 2; & x \geq 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -3; & x < -2 \\ -x - 2; & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2; & x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3; & x < 0 \\ x; & 0 \leq x < 2 \\ 6x - x^2; & 2 \leq x \leq 5 \\ 2; & x > 5 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x + 3; & x < -1 \\ 2; & -1 \leq x \leq 1 \\ -x; & x > 1 \end{cases}$

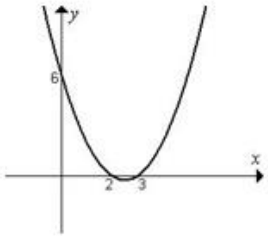
RESPOSTAS

1) a) 75 m
   b) 10 s

2) 10 s

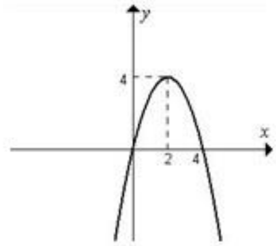
3) R$ 4.500,00

4) a)



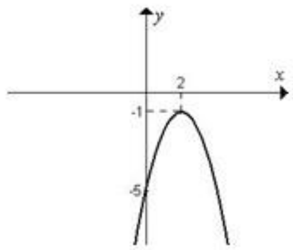
Vértice: (2,5; -0,25)
Raízes: 2 e 3

b)



Vértice: (2, 4)
Raízes: 0 e 4

c)



Vértice: (2, -1)
Raízes: Não há

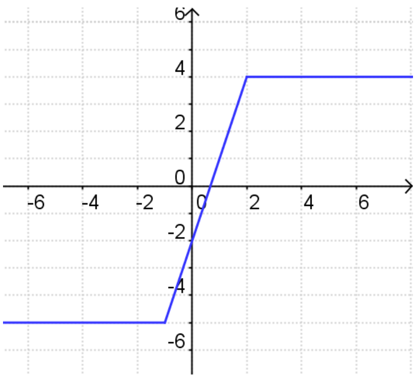
5) a) R$ 340,00
   b) 200 km

6) a) 19 m^3
   b) $P(x) = \begin{cases} 60 \text{ , se } x \leq 15 \\ 60 + 5(x - 15) \text{ , se } x > 15 \end{cases}$

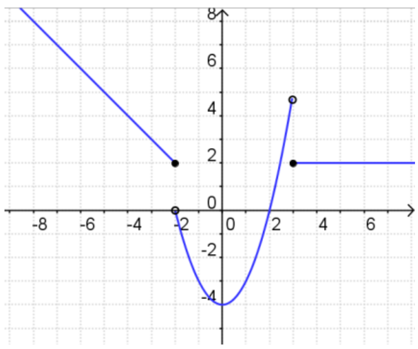
7) R$ 20,00

8) $V = \begin{cases} 0{,}30C, se \text{ C} \leq 200 \\ 60 + 0{,}45(\text{C} - 200), se \text{ C} > 200 \end{cases}$

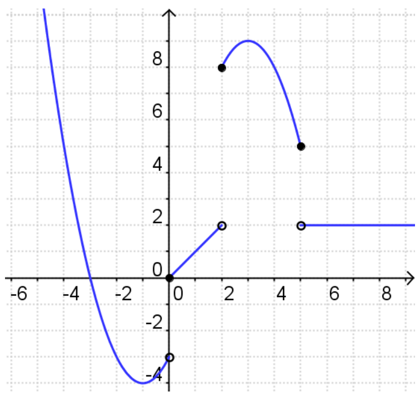
9)



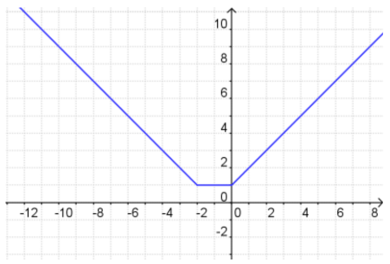
a. $D = \mathbb{R} Im = [-5, 4]$



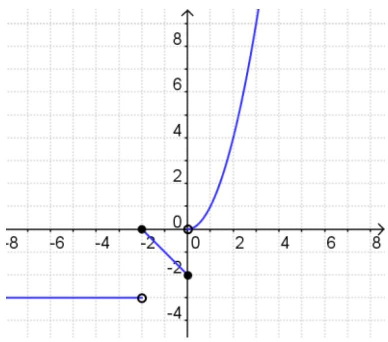
b. $D = \mathbb{R}$ $Im = [-4, +\infty)$



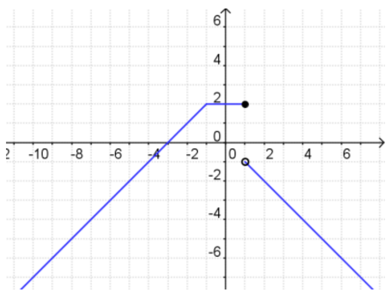
c. $D = \mathbb{R}$ $Im = [-4, +\infty)$



d. $D = \mathbb{R}$ $Im = [1, +\infty)$



e. $D = \mathbb{R}$
$Im = \{-3\} \cup [-2, +\infty)$



f. $D = \mathbb{R}$ $I = (-\infty, 2]$

LIMITES

O conceito de limite é fundamental no estudo que desenvolveremos a partir desse capítulo: taxas de variação. Em várias situações do cotidiano usamos o conceito de limite sem nos darmos conta. Por exemplo, um fio de náilon preso numa das pontas ao teto de uma casa; há um limite máximo de massa que esse fio consegue suportar. A partir de um determinado "peso", o fio não resiste e se parte.O mesmo ocorre num balão. A borracha se expande até um determinado limite. Ultrapassando esse ponto, o balão estoura.

Considere o seguinte exemplo:

O reservatório de água de uma cidade foi contaminado num acidente químico com um composto cancerígeno. A empresa contratada para a descontaminação apresentou como custo do processo uma lei matemática que leva em consideração o percentual do agente tóxico que deverá ser removido. Tal custo é expresso pela lei$C(x) = \frac{0,5x}{100-x}$, onde *x* representa o percentual do composto a ser removido e$C(x)$ representa o custo, em centenas de milhares de reais.

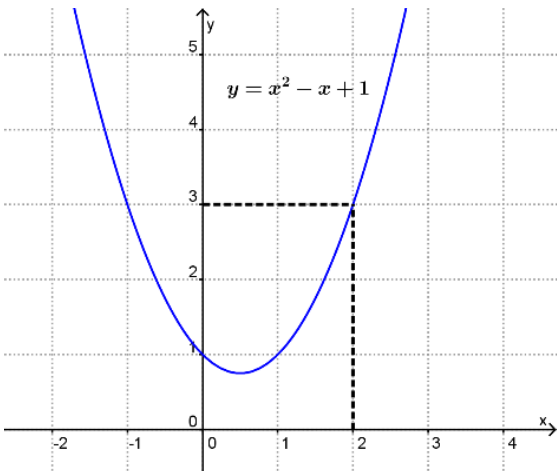
a) Determine o custo da remoção para 50%, 80% e 90% do agente tóxico.

b) Se a prefeitura dispuser de R$ 1.000.000,00 para o processo, qual percentual do agente tóxico consegue ser eliminado?

c) O que ocorre à medida que o percentual a eliminar do agente cancerígeno se aproxima de 100%?

O uso mais básico de limites consiste em determinar como uma função se comporta à medida que aproximamos a variável independente dessa função de um determinado valor.Vamos começar por exemplos simples:

Considere a função$f(x) = x^2 - x + 1$, representada no gráfico ao lado.



Observe que, à medida que *x* se aproxima de 2, por valores menores do que 2, a função se aproxima de 3.Dizemos que esse número é o limite da função quando *x* tende a 2 pela <u>esquerda</u> e denotamos$\lim_{x \to 2^-}(x^2 - x + 1) = 3$.

De forma análoga, podemos observar no gráfico que à medida que *x* se aproxima de 2, por valores maiores do que 2, a função se aproxima de 3.Dizemos que esse número é o limite da função quando *x* tende a 2 pela <u>direita</u> e denotamos$\lim_{x \to 2^+}(x^2 - x + 1) = 3$.

Como tanto pela direita como pela esquerda do 2, nos aproximamos do mesmo valor da função, dizemos que o limite bilateral, ou simplesmente limite, da função quando *x* se aproxima do 2 é 3. Em linguagem matemática, escrevemos $\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 1) = 3$.

Definição (Informal): Se $f(x)$ está definida no intervalo I, mas não necessariamente em $k \in I$,então:

$$\lim_{x \to k} f(x) = L$$

pode ser lido como "o limite (bilateral) de $f(x)$quando x<u>tende</u> a $\boldsymbol{k}$ é $\boldsymbol{L}$" e significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ficarem infinitesimalmente próximos a L conforme x toma valores infinitesimalmente próximos a k.

<u>Exemplos</u>:

1) Considere a função $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$.Vejamos o que ocorre quando fazemos x se aproximar de 4.

x	3	3,5	3,9	3,99	3,999
f(x)	7	7,5	7,9	7,99	7,999

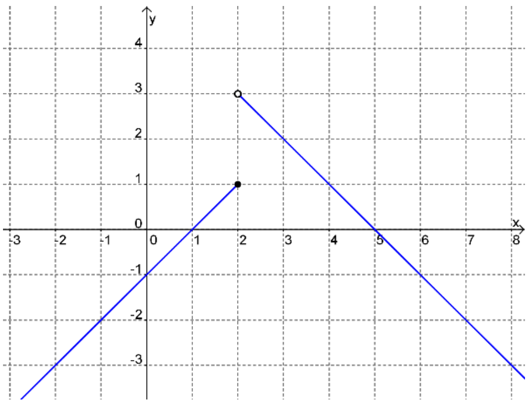
x	5	4,5	4,1	4,01	4,001
f(x)	9	8,5	8,1	8,01	8,001

Note que a função não está definida para$x = 4$, mas à medida que x se aproxima de 4 a função$f(x)$ se aproxima de 8. Tanto pela esquerda como pela direita, o limite de $f(x)$ quando x tende a 4 é 8, então dizemos que os limites laterais quando x tende a 4 são iguais. Como os limites laterais são iguais, podemos dizer que o limite (bilateral) de $f(x)$ quando x tende a 4 existe e é igual a 8. Em linguagem matemática:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2-16}{x-4} = 8 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2-16}{x-4} = 8 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$$

2) Analise o gráfico da função$f(x) = \begin{cases} x-1, & se\ x \le 2 \\ 5-x, & se\ x > 2 \end{cases}$.
A função está definida para$x = 2$? O que ocorre à medida que x se aproxima de 2?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 2} f(x) = ?$$



Nesse caso, dizemos que $\lim_{x \to 2} f(x)$NÃO EXISTE, pois os limites laterais são diferentes.

$$\boxed{\lim_{x \to k} f(x) \text{ existe e é igual a } L \text{ se, e somente se, } \lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x) = L}$$

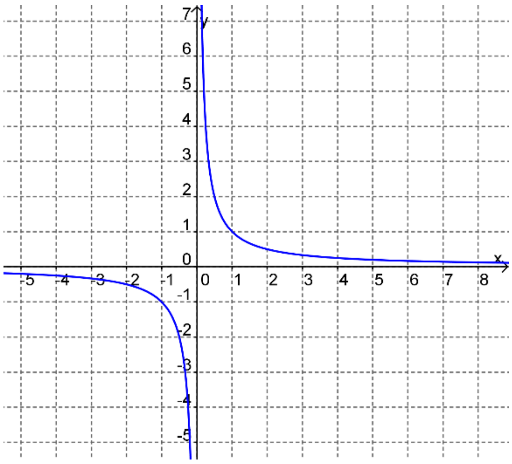
Agora, considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

x	1	10	100	1000	10000
$f(x)$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001

x	-1	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001

Perceba que nesse caso, à medida que aumentamos indefinidamente o valor de x, tanto positivo como negativo, o valor resultante na função se aproxima cada vez mais de zero.Então podemos dizer que, quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$,$f(x)$tende a 0. Ou seja, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Podemos observar esse limite pela análise do gráfico de $f(x)$ ao lado.



Limites infinitos

Às vezes os limites laterais ou bilaterais não existem porque os valores da função crescem ou decrescem indefinidamente.

Considere novamente a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	1	10	100	1000	10000

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000	-10000

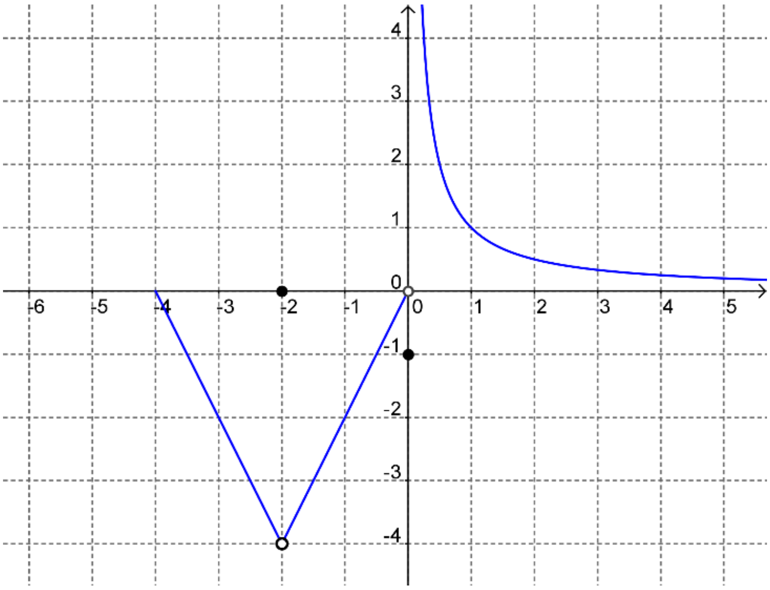
Nessa situação, escreveremos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to0} \frac{1}{x} = \textit{não existe}$$

É importante uma distinção. Nos três casos acima o limite NÃO EXISTE, mas no primeiro e no segundo damos como resposta $+\infty$ e $-\infty$ para diferenciar do terceiro, que escrevemos textualmente "não existe" devido ao fato de os limites laterais serem diferentes.

Definição (Informal): Se $f(x)$ está definida no intervalo I, mas não necessariamente em$k \in I$,entãolim$_{x\to k} f(x) = \infty$significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tanto quanto quisermos) por meio de uma escolha adequada de x nas proximidades de k.

Exemplo:Dado o gráfico da função $f(x)$ abaixo, determine o que se pede:



a) $f(0) =$

b) $f(-2) =$

c)$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

d) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

e) $\lim_{x\to 0} f(x) =$

f) $\lim_{x\to -2} f(x) =$

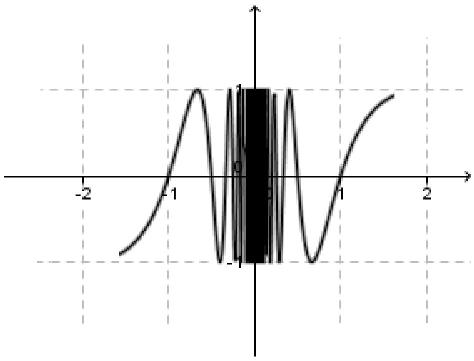
g) $\lim_{x\to -4^+} f(x) =$

h) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

Limites – técnicas para calcular

Até aqui calculamos limites a partir da análise do gráfico ou por aproximação. No entanto essa técnica é insuficiente para o cálculo de limites em algumas funções, seja pela complexidade de construção do gráfico,seja pela falsa impressão que uma tabela de valores pode passar.

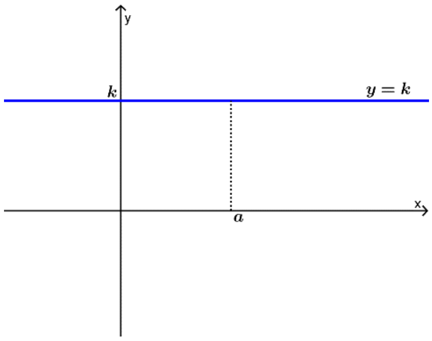
Considere$f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$, cujo gráfico está representado abaixo. Ao lado é mostrada uma tabela com valores que faz o leitor chegar à conclusão errada de que à medida que x se aproxima de zero a função também se aproxima de zero. Entretanto, nota-se pelo gráfico, que a função oscila cada vez mais rapidamente entre-1e1à medida que x tende a zero, portanto não se aproxima de nenhum limite.



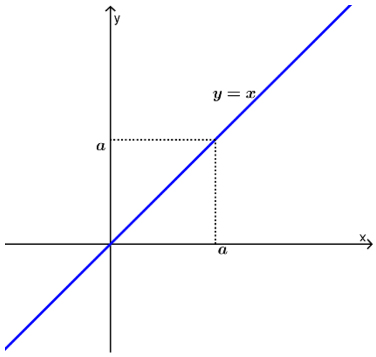
$f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$	
x	y
1	0
0,1	0
0,01	0
0,001	0
0,0001	0

Por isso aprenderemos técnicas algébricas para o cálculo de limites de funções. Começaremos explorando os resultados em algumas funções, cujos gráficos são mostrados.

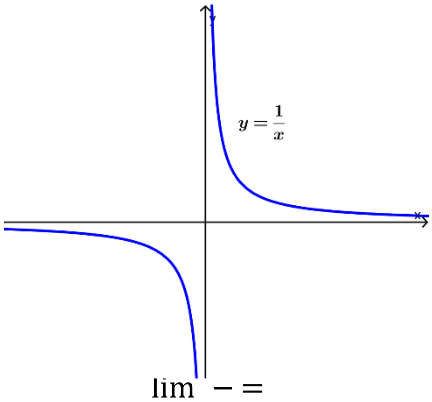
1) $\lim_{x\to a} k =$



2) $\lim_{x\to a} x =$



3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} =$



$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ }{x} =$

Teorema: Seja a um número real e suponha que$\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$,então:

(a)$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

(b)$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$

(c)$\lim_{x\to a}[f(x).\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\, .\lim_{x\to a} g(x) = L_1 . L_2$

(d)$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$

(e)$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, se *n* for par, $L_1 > 0$

Agora vamos considerar a função$f(x) = x$ e a função$g(x) = 3$. Se fazemos$h(x) = f(x) + g(x)$, temos que$h(x) = x + 3$. Calculando o limite de cada uma dessas funções quando *x* tende a 2, por exemplo, temos:

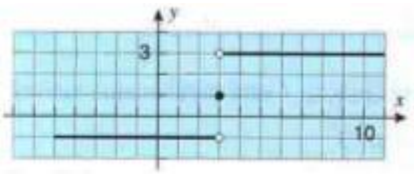
i) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x = 2$
ii) $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3$(limite de uma constante é a própria constante)
iii) $\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 2}[x + 3] = \lim_{x\to 2}(x) + \lim_{x\to 2}(3) = 2 + 3 = 5$

Observações:
1) Essas afirmações também valem para os limites laterais, quando $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.
2) Ainda que os resultados (a) a (c) tenham sido formulados para duas funções f e g, esses resultados são válidos para um número qualquer finito de funções.
3) No caso especial da parte (c) em que $f(x) = k$ é uma função constante, temos $\lim_{x\to a}[k.g(x)] = \lim_{x\to a} k.\lim_{x\to a} g(x) = k.\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Ou seja, um fator constante pode ser removido do limite.
Exemplo: Calcule os limites:
a) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x + 5) =$

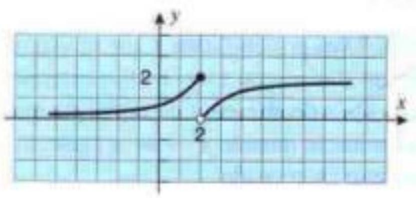
b) $\lim_{x\to 2} \sqrt{3x + 13} =$

Exercícios

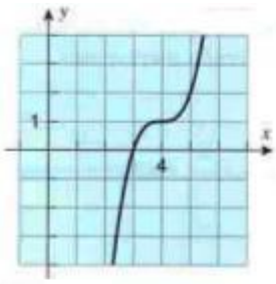
(As questões 1 a 8 têm como fonte**:** ANTON, Howard. *Cálculo, um novo horizonte*. Porto Alegre: Bookman, 2000. v.1. p.124.)
1) Para a função f (gráfico abaixo), determine:
a) $\lim_{x\to 3^-} f(x) =$
b) $\lim_{x\to 3^+} f(x) =$
c) $\lim_{x\to 3} f(x) =$
d) $f(3) =$
e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$



2) Para a função f (gráfico ao lado), determine:
a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$
b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$
c) $\lim_{x\to 2} f(x) =$
d) $f(2) =$
e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

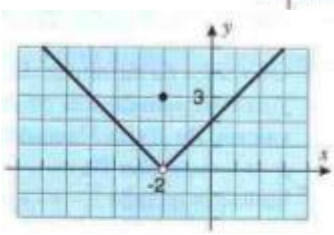


3) Para a função f (gráfico ao lado), determine:
a) $\lim_{x\to 4^-} f(x) =$
b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) =$
c) $\lim_{x\to 4} f(x) =$
d) $f(4) =$
e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$



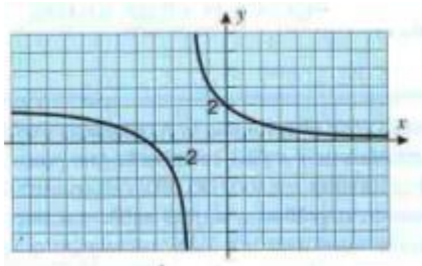
4) Para a função f (gráfico abaixo), determine:

a) $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$
b) $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$
c) $\lim_{x\to -2} f(x) =$
d) $f(-2) =$

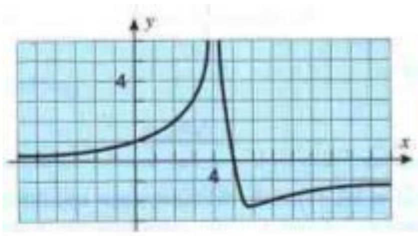


e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

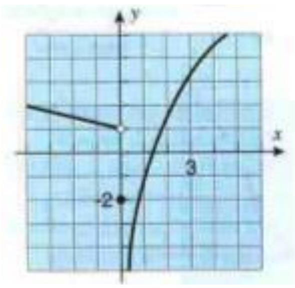
5) Para a função f (gráfico abaixo), determine:
a) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$
b) $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$
c) $\lim_{x \to -2} f(x) =$
d) $f(2) =$
e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



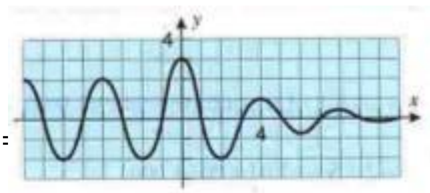
6) Para a função f (gráfico abaixo), determine:
a) $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$
b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) =$
c) $\lim_{x \to 4} f(x) =$
d) $f(4) =$
e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



7) Para a função f (gráfico abaixo), determine:
a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$
b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$
c) $\lim_{x \to 0} f(x) =$
d) $f(0) =$
e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



8) Para a função f (gráfico abaixo), determine:
a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$
b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$
c) $\lim_{x \to 0} f(x) =$
d) $f(0) =$
e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



9) Resolva os limites abaixo:

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} =$

b) $\lim_{x\to 3}(2x^2 - x - 10) =$

10) Um estudo dos níveis de formaldeído em 900 casas indicou que a emissão de vários produtos químicos pode diminuir com o passar do tempo. Os níveis médios de formaldeído (em partes por milhão) em uma casa são dados por$f(t) = \frac{0{,}055t+0{,}26}{t+2}$onde t representa a idade da casa em anos.

a) Quando a casa é nova, qual é o nível médio emitido de formaldeído?

b) A longo prazo, qual o nível de formol numa casa?

11) O número de bactérias em umacultura expostaacertascondições variade acordocom a lei$N(t) = 100 + \frac{2000t}{t+1}$em que t indica o tempo, em minutos.

a) Qual é o número inicial de bactérias nessa cultura?

b) Qual é a população limite segundo essa lei matemática?

RESPOSTAS

1)

a) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$

b) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

c) $\lim_{x\to 3} f(x) = não\ existe$

d) $f(3) = 1$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$3

2)

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = não\ existe$

d) $f(2) = 2$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

3)

a) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 1$

c) $\lim_{x\to 4} f(x) = 1$

d) $f(4) = 1$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

4)

a) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

d) $f(-2) = 3$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

5)

a) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to -2} f(x) = não\ existe$

d) $f(2) = 1$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

6)

a) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to 4} f(x) = +\infty$

d) $f(4) = não\ existe$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

7)
a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$
b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
c) $\lim_{x\to 0} f(x) = não\ existe$
d) $f(0) = -2$
e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

8)
a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$
b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$
c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$
d) $f(0) = 3$
e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = não\ existe$
f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

9)
a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} = 0$
b) $\lim_{x\to 3}(2x^2 - x - 10) = 5$

10)
a) 0,13 ppm
b) 0,055 ppm

11)
a) 100 bactérias
b) 2100 bactérias

Cálculo de limites.

Limites de polinômios e funções racionais quando $x \to a$

Um polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$ é uma função da forma:

$p(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$, onde$c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e $c_n \neq 0$.

Para qualquer polinômio $p(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$e qualquer número real a, temos que:

$$\lim_{x\to a}(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n) = C_0 + C_1a + C_2a^2 + C_3a^3 + \cdots + C_na^n = p(a)$$

Ou seja, para calcular o limite de um polinômio quando $x \to a$, podemos apenas substituir *x* por a.

Em relação às funções racionais$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, em que$P(x)$e$Q(x)$são polinômios, para calcular$\lim_{x\to a} f(x)$temos três casos dependendo dos valores de *P(a)* e *Q(a)*.

O limite do denominador não é zero

Nesse caso, o limite pode ser obtido apenas substituindo a variável independente, pois numerador e denominador são polinômios.

Exemplos:

1) $\lim_{x\to 1} \frac{4x^2-3x+1}{3x^2-1} =$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2+1} =$

O limite do numerador e denominador são nulos

Em matemática, a fração$\frac{a}{b}$, quando a e b tendem a zero, é chamada de indeterminação do tipo$\frac{0}{0}$. Como aeb se aproximam de zero, o resultado é indeterminado. No cálculo desse tipo de limite, usamos algumas técnicas algébricas.

Exemplos:

3)$\lim_{x\to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12} =$

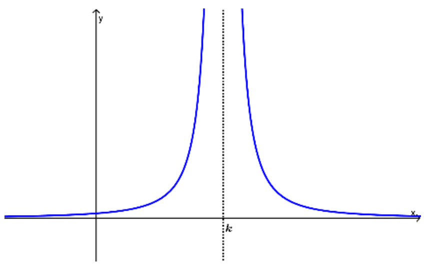
4)$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2-3x-1}{2x^2-2} =$

5)$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$

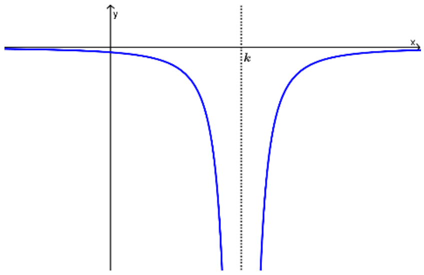
Somente o limite do denominador é nulo

Nesse caso, o denominador se aproxima de zero enquanto o numerador não. Com isso, o limite não existe e ocorre uma das três situações a seguir:

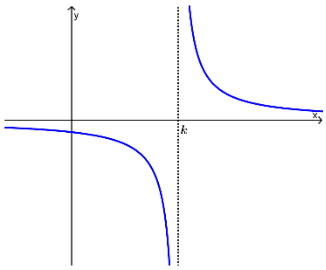
a) o resultado cresce indefinidamente (o limite tende a$+\infty$)



b) o resultado decresce indefinidamente (o limite tende a $-\infty$)



c) o resultado cresce e decresce indefinidamente dependendo do lado da aproximação feita. Nesse caso, dizemos textualmente que o limite não existe.



No cálculo desse tipo de limite, o que precisa ser feito é uma aproximação pela direita e pela esquerda do número que queremos investigar.

Exemplos:

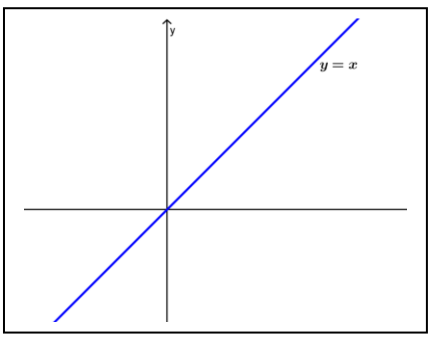
6)$\lim_{x \to 4^+} \frac{2-x}{x^2-2x-8} =$

7) $\lim_{x \to 4^-} \frac{2-x}{x^2-2x-8} =$

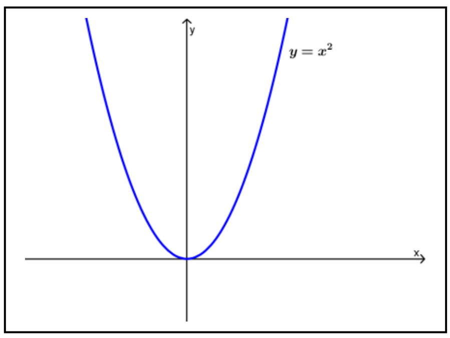
8)$\lim_{x \to 4} \frac{2-x}{x^2-2x-8} =$

Limites de x^n (n natural) quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

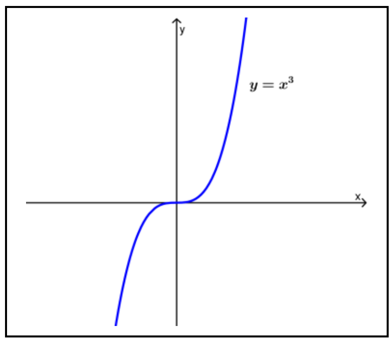
Os gráficos abaixo mostram claramente o comportamento no infinito dos polinômios do tipo$p(x) = x^n$.



$\lim_{x \to +\infty} x =$
$\lim_{x \to -\infty} x =$



$\lim_{x \to +\infty} x^2 =$
$\lim_{x \to -\infty} x^2 =$



$\lim_{x \to +\infty} x^3 =$
$\lim_{x \to -\infty} x^3 =$

A multiplicação de um número por x^n não afeta o limite se esse número for positivo, mas inverte o sinal se o número for negativo.

<u>Exemplos</u>:

9)$\lim_{x\to+\infty} 7x^6 =$ 11) $\lim_{x\to-\infty} 7x^6 =$ 13) $\lim_{x\to-\infty} 2x^5 =$

10)$\lim_{x\to+\infty} -7x^6 =$ 12) $\lim_{x\to-\infty} -7\,x^6 =$ 14) $\lim_{x\to-\infty} -2x^5 =$

Limites de polinômios e funções racionais quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Devemos estar atentos ao termo de maior grau, pois o comportamento da função está diretamente relacionado ao seu comportamento quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

<u>Exemplo</u>:

15)$\lim_{x\to+\infty}(2x^5 - 9x^4 - 8x^3) =$

É fácil perceber que o termo x^5 define o comportamento da função no infinito. Assim, para o cálculo de limites no infinito de um polinômio precisamos considerar <u>apenas o termo de maior grau</u>.

Por exemplo[1], $\lim_{x\to+\infty}(-2x^4 + 3x^2 - x + 7) = \lim_{x\to+\infty}(-2x^4) = -\infty$.

No caso de funções racionais, como se trata de uma razão entre polinômios, procedemos do mesmo modo, apenas considerando o termo de maior grau tanto no numerador quanto no denominador.

<u>Exemplos</u>:

16) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-3}{2x+5} =$

17) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+5}{4x^3-1} =$

18) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5} =$

19) O custo médio, em reais, de um produto é dado pela função $C(x) = 1{,}8 + \frac{3000}{x}$, em que x representa a quantidade de produtos fabricados. Calcule $\lim_{x\to+\infty} C(x)$ e interprete o resultado obtido.

Limites de funções definidas por partes

O cálculo de limites em funções definidas por mais de uma sentença depende exclusivamente do local onde se quer investigar o limite. O ponto mais importante é aquele em que a função muda de sentença.

<u>Exemplos</u>:

20) Determine $\lim_{x\to1} h(x)$ para $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & se\ x \le 1 \\ 2 + x^2, & se\ x > 1 \end{cases}$.

21) Determine $\lim_{x\to0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} 10 - x, & se\ x > 0 \\ -10, & se\ x \le 0 \end{cases}$.

[1] Essa equivalência é justificada matematicamente pela propriedade (c) dos limites. Tente desenvolver esse raciocínio.

Exercícios

1) Determine o valor dos limites pedidos. Se não existir, diga que não existe, justificando. Se o limite tender a $+\infty$ ou $-\infty$, indique essa resposta.

a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x} =$

b) $\lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} =$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1} =$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1} =$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} =$

f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{x^2-1} =$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-1}{8-x} =$

h) $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} =$

i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4+2x^3}{x^2-8} =$

j) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4} =$

k) $\lim_{x\to 4} \frac{4x^2-x^3}{4-x} =$

l) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x^3}{x^3-x} =$

m) $\lim_{y\to 6} \frac{y+6}{y^2-36} =$

n) $\lim_{x\to -\infty} (2-x) =$

o) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3} =$

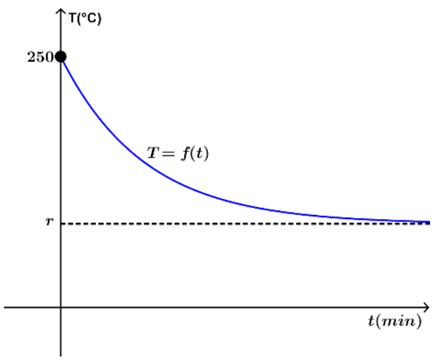
p) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5-x}{x^5+3x} =$

q) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} =$

2) Um padeiro assa um pão num forno a uma temperatura de 250 ºC. Seja$T = f(t)$ a temperatura do pão assado t minutos depois de retirado do forno. A figura ao lado mostra a temperatura T do pão em função do tempo t desde que foi retirado do forno, onde r denota a temperatura ambiente.

a) Qual é o significado de $\lim_{t\to 0^+} f(t)$?

b) Qual é o significado de $\lim_{t\to +\infty} f(t)$?



3) Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } x \geq 1 \\ 2x, \text{se } x < 1 \end{cases}$, determine $\lim_{x\to 1} f(x)$ou diga que não existe, justificando sua resposta.

4) Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^2+2, \text{se } x \geq 1 \\ 3x+1, \text{se } x < 1 \end{cases}$, determine $\lim_{x\to 1} f(x)$.

RESPOSTAS

1)

a) $\lim_{x \to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x} = 0$

b) $\lim_{x \to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} = 8$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1} = -2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1} = 2$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2-1} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{8-x} = -3$

h) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^4+2x^3}{x^2-8} = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4} = -\frac{4}{5}$

k) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{4x^2-x^3}{4-x} = 16$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x^3}{x^3-x} = -2$

m) $\lim\limits_{y \to 6} \frac{y+6}{y^2-36} = não\ existe$

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2-x) = +\infty$

o) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty$

p) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5-x}{x^5+3x} = 0$

q) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = 4$

2)
a) Significa que no momento que sai do forno o pão está a 250ºC.
b) Significa que com o passar do tempo a temperatura do pão tenderá à temperatura ambiente.

3) Não existe, pois os limites laterais são diferentes.

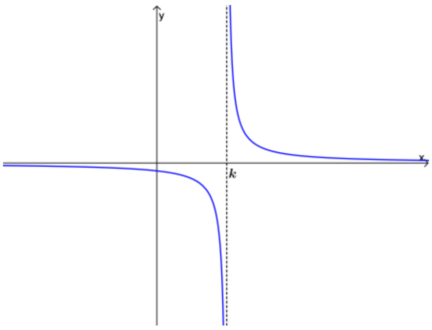
4) Não existe, pois os limites laterais são diferentes.

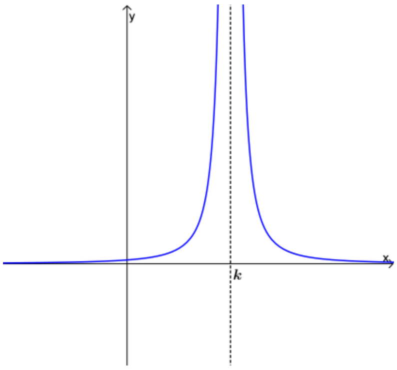
Assíntotas

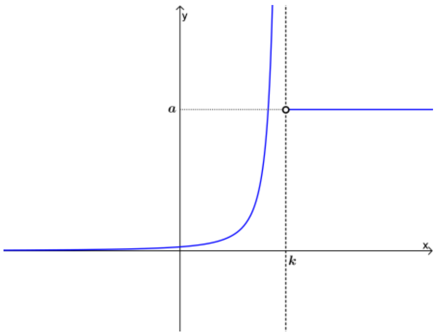
Do grego *asymptotos*, que significa “que não pode atingir”. Nesse tópico estudaremos apenas as assíntotas verticais e horizontais, deixando a cargo do leitor o aprofundamento em outros tipos de assíntotas.

Assíntotas verticais

Diz-se que a reta $x=k$ é uma assíntota (vertical) quando $\lim_{x\to k^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{x\to k^-} f(x)=\pm\infty$. Assim, à medida que *x* se aproxima de *k* o valor da função cresce ou decresce indefinidamente, nunca atingindo a reta $x=k$. Os gráficos abaixo mostram exemplos de assíntotas verticais.



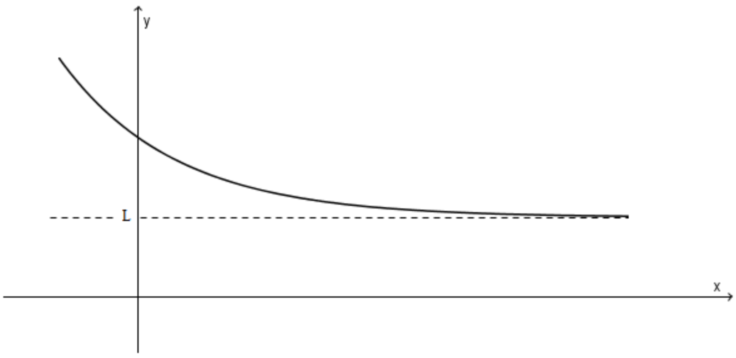




É importante ressaltar no terceiro gráfico acima que, mesmo se $f(k)=a$, a reta $x=k$ continuaria a ser uma assíntota vertical do gráfico, isto é, a assíntota vertical pode atingir o gráfico em um dos semi-planos definidos por ela.

Assíntotas horizontais

Uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico de uma função *f* se *f(x)* tende a *L* quando *x* tende a +∞ ou -∞. O gráfico abaixo mostra que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ e portanto $y = L$ é uma assíntota horizontal.



Exemplos:

1) Determine as assíntotas da função $f(x)=\dfrac{6x-2}{2x-4}$, caso existam.

2) Determine as assíntotas da função $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$, caso existam.

3) Determine as assíntotas da função $f(x)=\frac{2x^2-8}{x-4}$, caso existam.

EXERCÍCIOS

Determine, se houver, as assíntotas das funções:

a) $f(x)=\frac{6x-3}{x-2}$

b) $f(x)=\frac{2x^2-8}{x-1}$

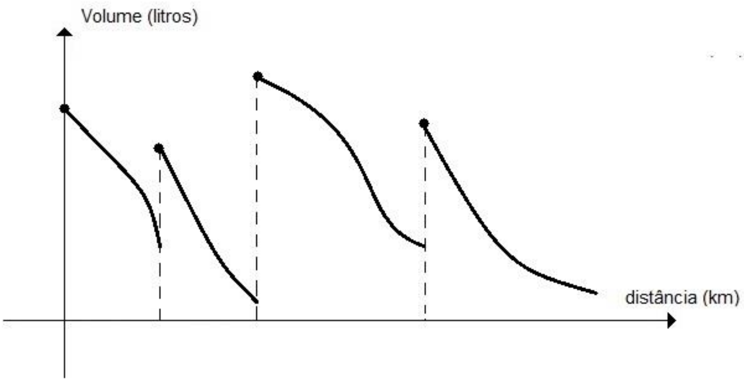
c) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

RESPOSTAS

(a) São assíntotas: x = 2 e y = 6
(b) É assíntota: x = 1
(c) São assíntotas: x = -2 e y = 0

CONTINUIDADE

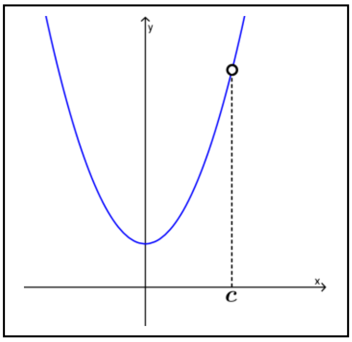
Nas funções, as descontinuidades sinalizam, muitas vezes, fenômenos físicos. Num gráfico, por exemplo, do volume de combustível no tanque em função da distância percorrida, uma possível representação aparece abaixo:



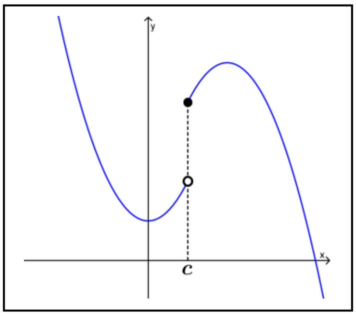
Note que as retas tracejadas indicam as paradas que o condutor fez para o reabastecimento do veículo. Nesse momento ocorre uma interrupção no traçado da função. Essa interrupção é chamada de descontinuidade.

Intuitivamente, o gráfico de uma função pode ser descrito como uma curva contínua se não apresentar quebras ou buracos. Para tornar essa ideia mais precisa, precisamos entender quais propriedades de uma função podem causar quebras ou buracos.

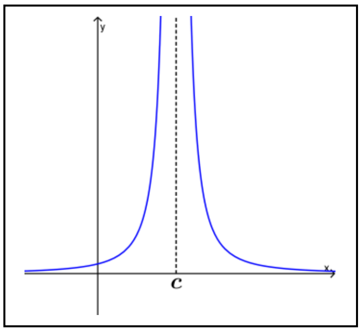
I



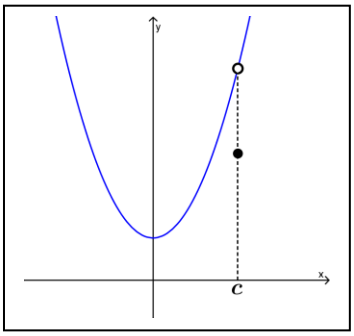
II



III



IV



Em I, ocorre uma descontinuidade do tipo "bola". Note que a função não está definida em c.
Em II, ocorre uma descontinuidade do tipo "salto". Perceba que $\lim_{x \to c} f(x)$ não existe.
Em III, ocorre uma descontinuidade do tipo "fenda". Nesse caso $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$.
Em IV, o limite em c é definido assim como $f(c)$, mas $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

Dizemos que uma função é contínua em$x = c$ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

i) $f(c)$ está definida

ii) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, ou seja, $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$

iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Se uma ou mais das condições dessa definição falhar, então dizemos que a função tem uma descontinuidade em $x = c$.

Exemplos:

1) Determine se as seguintes funções são contínuas. Se ocorrer descontinuidade, indique onde.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, se\ x \geq 1 \\ x+1, se\ x < 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \text{ , se } x \geq 2 \\ x - 1 \text{ , se } x < 2 \end{cases}$

2) Determine os valores de *x* nos quais a função $f(x) = \frac{x^3-2x^2+5}{x^2-9}$ é contínua.

3) Encontre um valor constante k, se possível, que faça a função $f(x) = \begin{cases} 4x - 2, x \leq 2 \\ kx^2, x > 2 \end{cases}$ ficar contínua em toda parte.

DERIVADA

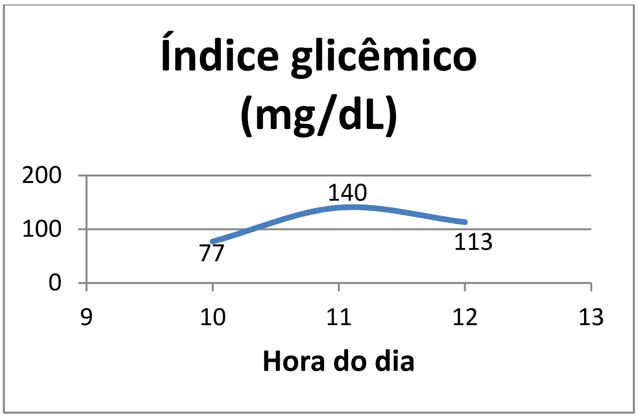
A derivada é um dos conceitos mais importantes do cálculo e está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função. Pode ser utilizada para a determinação da velocidade ou aceleração de um móvel, para determinar a taxa de eliminação de um fármaco do organismo, para calcular pontos de máximo e de mínimo numa aplicação, para estimar o ritmo de propagação de uma epidemia ou crescimento de uma população.

Iniciaremos esse capítulo explorando melhor a ideia de taxa de variação média e instantânea para desenvolver o conceito de derivada.

Taxas de variação

Considere a situação de um aluno que vem de uma cidade distante para cursar a disciplina de Cálculo Diferencial aqui na Unisinos. Após a aula, ele embarca no ônibus e pergunta ao motorista qual a quilometragem que o hodômetro está registrando – 63440km. Ao chegar no seu ponto de descida, questiona novamente o motorista – 63560km. Se ele anotou que o ônibus começou seu deslocamento às 22h 40min e chegou ao seu destino às 0h 40min, a velocidade média nesse trajeto é fácil de ser obtida. Sabemos que a velocidade média é obtida fazendo a razão entre o deslocamento (ΔS) e o tempo gasto para realizá-lo (Δt), ou seja:$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Então a velocidade média do ônibus foi de $V_m = \frac{120}{2} = 60\ km/h$.

Agora, prestemos atenção em outra situação: o gráfico abaixo mostra um exame corriqueiro para muitos indivíduos – a curva glicêmica. Às 10h da manhã, ao coletar sangue em jejum, o resultado apontou 77mg/dL de glicose. O paciente toma solução com 75g de açúcar e após 1h e 2h, são coletadas novas amostras para o acompanhamento da evolução glicêmica. Os índices são mostrados no gráfico.



Podemos obter a taxa de variação média do índice glicêmico, fazendo:

$$tx_{med} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{113-77}{12-10} = \frac{36}{2} = 18 \text{ mg/dL por hora.}$$

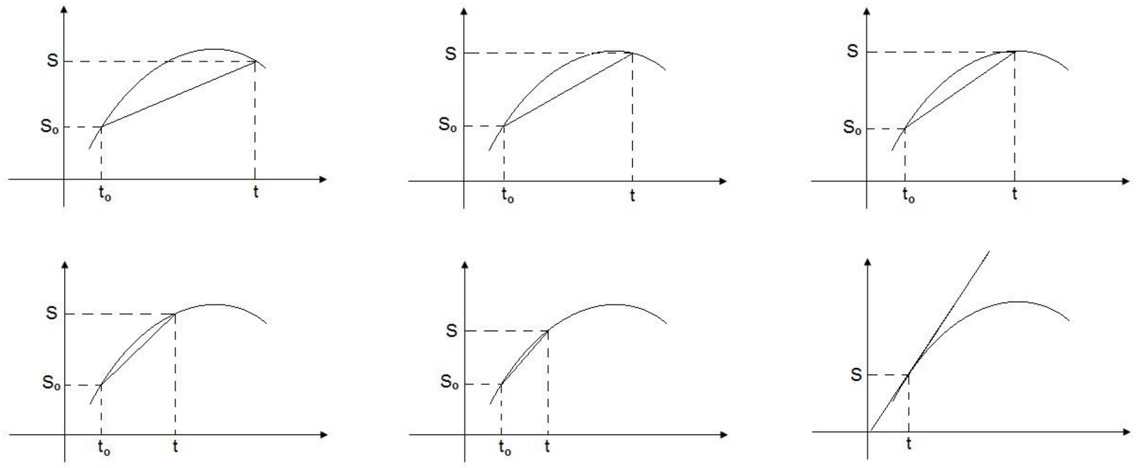
Essa informação, a taxa média de variação média, é muito limitada. No 1º caso, o ônibus em muitos momentos teve uma velocidade muito diferente da média de 60km/h. No 2º, o crescimento de 18mg/dL a cada hora também é uma informação que não leva a conclusões importantes. Em ambas as situações, mais significativo seria a taxa de variação instantânea, a qual pode trazer informações muito mais relevantes.

No caso da velocidade instantânea num veículo, isso pode ser conseguido após uma espiada no velocímetro do carro ou no momento do registro da velocidade na lombada eletrônica. Matematicamente, conseguimos a velocidade instantânea quando reduzimos a um instante a variação de tempo. Ou seja:

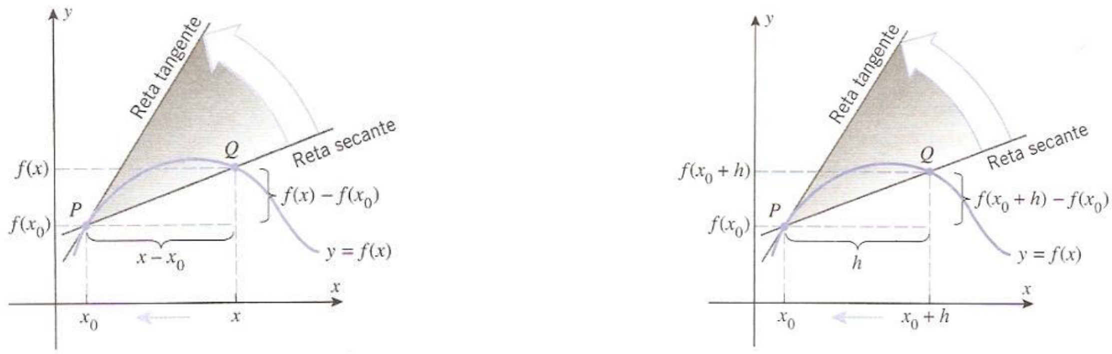
$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Observe os gráficos a seguir que mostram a redução do intervalo de tempo até um único instante. Note que a reta que une o ponto inicial e final do trajeto considerado tem sua taxa de variação calculada fazendo, genericamente, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, conforme visto anteriormente. Nos cinco primeiros gráficos, a reta é secante ao gráfico *d*x *t*. Conforme o intervalo de tempo considerado diminui, a inclinação da reta se modifica até que, quanto a variação de tempo tende a zero, a reta fica tangente ao ponto onde se quer determinar a velocidade. Portanto, a velocidade instantânea, ou mais genericamente, a taxa de variação instantânea, é dada pela declividade[2] da reta tangente ao instante considerado.

[2] A declividade de uma reta determina o ânguloα dessa reta em relação ao eixo *x*, medido no sentido anti-horário do eixo para a reta. Na equação $y = ax + b$, declividade é o coeficiente *a* da reta, chamado coeficiente angular, onde $a = tan\ \alpha$.



A figura abaixo[3] nos ajuda a compreender melhor o conceito de taxas de variação. A taxa de variação média é dada pela declividade da reta secante, enquanto a taxa de variação instantânea é dada pela declividade da reta tangente ao ponto onde se quer determinar a taxa.



$$tx_{inst} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h}$$

Com isso, estamos dizendo também que a declividade (a) de uma reta tangente num ponto x_0 qualquer a uma curva pode ser calculada fazendo:

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h}$$

Em situações-problema, as taxas de variação média e instantânea estão contextualizadas. Assim, as respostas devem vir acompanhadas das respectivas unidades. Por exemplo:

a) se *y* estiver em ºC e *x* em horas, então a unidade da taxa de variação deve ser ºC/h.

b) se *y* estiver em m/s e *x* em segundos, então a unidade da taxa de variação deve ser m/s^2.

O estudo das taxas de variação está presente em muitas áreas: um engenheiro pode necessitar saber com que taxa um fio se dilata em função da temperatura; um médico pode estar interessado na taxa com que o raio de uma artéria muda em função da quantidade de álcool na corrente sanguínea; um farmacêutico pode necessitar saber com que rapidez um antibiótico é eliminado do organismo.

[3] Fonte: ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. Porto Alegre: Bookman, 2007.

A derivada

O limite que usamos para determinar a taxa de variação instantânea ou a inclinação da reta tangente também é usado para definir uma das operações fundamentais do Cálculo: a diferenciação.

A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é denominada derivada de *f* em relação a *x*. O domínio de f' consiste em todos os valores de x do domínio de *f* para os quais existe este limite. O termo "derivada" é usado porque a função f' deriva da função *f* por meio de um limite.

Quando a variável independente for *x*, a operação de derivação pode ser denotada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{ou} \quad f'(x) = D_x[f(x)]$$

Quando tivermos $f(x) = y$, a derivada costuma ser denotada por:

$$f'(x) = y'(x) \text{ ou} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Se quisermos determinar o valor da derivada num ponto x_0, podemos indicar:

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx}[f(x)]\bigg|_{x=x_0} \text{ou} f'(x_0) = D_x[f(x)]|_{x=x_0} \text{ou} f'(x_0) = y'(x_0) \text{ ou } f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$$

Duas interpretações da derivada:

1- A derivada f'de uma função *f* é a função cujo valor em *x* é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = y$ em *x*.

2- A derivada f'de uma função *f* é a função cujo valor em *x* é a taxa de variação instantânea de $f(x) = y$ em relação a *x*.

Exemplo:

4) Um projétil é lançado verticalmente a partir do solo. Desprezando-se a resistência do ar e o cano da arma, e admitindo-se conhecida a aceleração da gravidade, calculou-se a função que relaciona o espaço (altura), em metros, e o tempo, em segundos, representada pela igualdade $f(t) = 80t - 4t^2$.Nessas condições, determine:

a) A velocidade média do projétil nos primeiros 3 segundos após o lançamento.

b) A velocidade do projétil num instante *t* qualquer.

c) A velocidade do projétil após 5s do seu lançamento.

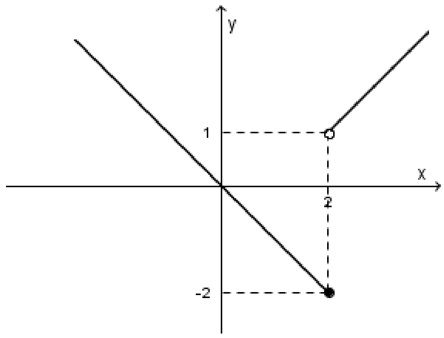
d) A velocidade no exato instante que o projétil toca o solo.

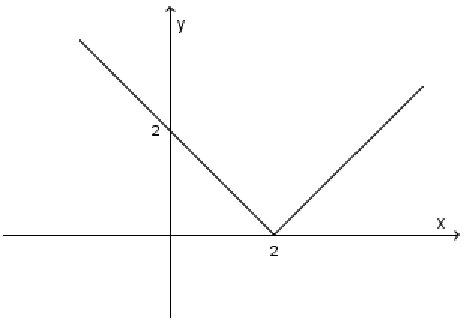
Diferenciabilidade

Como a derivada é definida porum limite, esse limite pode existir ou não em determinados pontos da função. Isso significa que uma função pode não ser diferenciável em toda a parte. Basicamente são três os casos em que uma função não é diferenciável num ponto.

1º caso: se uma função não for contínua num ponto

O gráfico à direita mostra uma função que é descontínua em $x = 2$. Logo, a função não é diferenciável nesse ponto visto que não há uma mesma reta tangente à esquerda e à direita de $x = 2$.



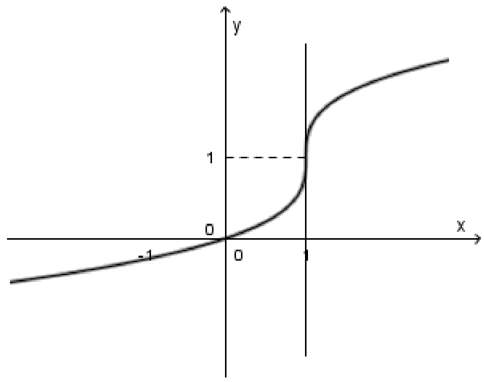


2º caso: a função possui um "bico" num ponto

O gráfico à esquerda mostra a função $f(x) = |x - 2|$. Note que em $x = 2$ a inclinação pela esquerda e pela direita do ponto não coincide, o que implica que a função não é diferenciável em $x = 2$.

3º caso: a função tem um ponto de tangência vertical

A derivada é a declividade (a) da reta tangente no ponto. Vimos anteriormente que $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ o que implica que a não é definido, visto que $\Delta x = 0$.



Exercícios

1) Nas funções abaixo, determine os pontos de descontinuidade, se houver:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, x \geq 1 \\ \frac{x+2}{x}, x < 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

b) $f(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x-2}, se x \leq 0 \\ \frac{x-3}{x^2-1}, se x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, para\ x \leq 0 \\ 2x - 1, para\ x > 0\ e\ x \leq 3 \\ \frac{2x+4}{x^2-4}, para\ x > 3 \end{cases}$

2) Determine o valor de k, se possível, que torne a função contínua.

a) $f(x) = \begin{cases} 8 - 2x, x \leq 2 \\ kx^2, x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} kx + 2\ , x \leq 3 \\ 2x + k, x > 3 \end{cases}$

3) Dada a função$y = x^2 - 1$:
a) encontre a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [1; 3].
b) encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x num ponto genérico x_0.

4) Usandoa definiçãodederivada$\left(f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$, mostre que aderivada da função $f(x) = x^2 + x$ é $f'(x) = 2x + 1$.

RESPOSTAS

1)
a) É descontínua em $x = 0$
b) É descontínua em $x = 2$ e $x = -2$
c) Não há.
d) É descontínua em $x = 3$ e $x = -3$
e) É descontínua em $x = 0$ e $x = 1$
f) É descontínua em $x = 0$ e $x = 3$

2) a) $k = 1$
b) $k = 2$

3)
a) 4
b) $y' = 2x$

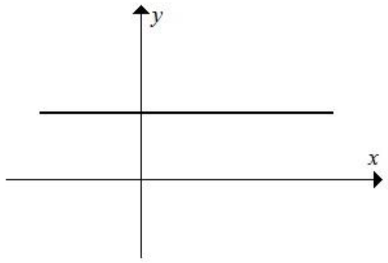
TÉCNICAS DE DIFERENCIAÇÃO

Todas as técnicas de diferenciação serão aqui apresentadas sem prova, mas decorrem da definição de derivada já estudada. Para visualizar tais demonstrações, consulte a bibliografia recomendada.

Derivada de uma constante

Uma função constante tem o gráfico representado por uma reta horizontal. Em qualquer ponto do gráfico, a declividade da reta tangente é zero, o que nos leva à conclusão que

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$



Exemplos:

1) Se $y = 3$, então$y' =$

2) Se$f(x) = -2$, então$f'(x) =$

Derivada de uma função potência

Se n é qualquer número real, então $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$.

Exemplos:

3) $f(x) = x^8$

4) $f(x) = x$

5) $g(x) = \sqrt{x}$

6) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

7) $h(x) = \frac{1}{x^2}$

8) $y = \frac{3}{x^9}$

Derivada de uma constante vezes uma função

Se f é uma função diferenciável e c é uma constante, então $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{d}{dx} f(x)$, ou de maneira simplificada$\frac{d[c \cdot f(x)]}{dx} = c \cdot f'(x)$.

Exemplos:

9) $f(x) = 3x^4$

10) $g(x) = 9\sqrt[5]{x^3}$

11) $h(x) = \frac{2}{x}$

Derivada da soma ou diferença de 2 funções

A derivada de uma soma (ou diferença) de duas funções diferenciáveis é a soma (ou diferença) de suas derivadas, ou seja, $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$.

Exemplos:

12) $f(x) = x^3 - 4x + 5$

13) $g(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$

14) $y = \frac{4x^{10}}{5} - \frac{10x^3}{3} + \frac{x^2}{7} + \frac{x}{8}$

Derivada do produto de 2 funções

O produto de duas funções diferenciáveis f e g é diferenciável. Além disso, a derivada do produto pode ser calculada pela expressão $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Exemplo:

15) $y = (3 - 2x^2)(5 + 4x^3)$

16) $y = (x^2 - 3x)(4x + 7)$

Derivada do quociente de 2 funções

O quociente $\frac{f}{g}$ de duas funções diferenciáveis f e g é diferenciável em todos os pontos x para os quais $g(x) \neq 0$. Além disso, a derivada de $\frac{f(x)}{g(x)}$ é dada por $\frac{d[f(x)/g(x)]}{dx} = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Exemplos:

17) Calcule $\frac{dy}{dx}$ para $y = \frac{5x-2}{x^2+1}$.

18) Se $f(x) = \frac{3x^2-2}{x}$, determine $f'(2)$.

Derivadas de ordem superior

A derivada de uma função é novamente uma função, que pode ter sua própria derivada. Se f' for diferenciável, então sua derivada é denotada por f'' e é chamada derivada segunda de *f*. Enquanto tivermos diferenciabilidade, podemos continuar o processo de derivação para obter as derivadas terceira, quarta, quinta, etc.

Notação:

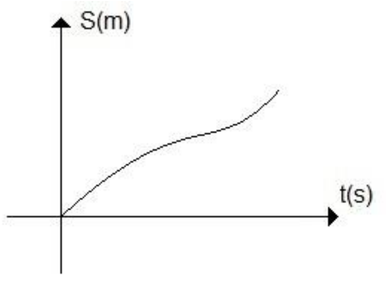
Derivada segunda: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

Derivada terceira: y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$

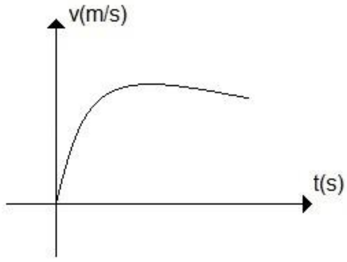
Derivada quarta: $y^{(4)}, f^{(4)}(x), \frac{d^4y}{dx^4}$

Derivada n-ésima: $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}$

E qual o significado de uma derivada segunda, por exemplo? Para entender isso mais claramente, observe os gráficos:



O gráfico ao lado representa a função posição de um móvel. Sabemos que a velocidade em um ponto é determinada pelo valor da derivada naquele ponto, ou $v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$, cuja unidade, nesse caso, é m/s. Ou seja, se determinarmos a velocidade em diferentes pontos, podemos esboçar a curva *v*x *t*, que é o gráfico da derivada da função posição, mostrado a seguir.



Fazendo idêntico raciocínio, derivando a função $v(t)$em diferentes pontos, obtemos a segunda derivada da função $S(t)$. Como unidade, temosm/s^2, que fisicamente traduz a aceleração de um corpo. Ou seja, a aceleração é obtida pela derivada segunda da função posição!

E podemos ir além. Qual é a aceleração da gravidade no planeta? Lembre que é de 9,8m/s^2, o que significa que um corpo em queda livre, no vácuo, aumenta a velocidade de 9,8m/s a cada segundo. Pois bem, chamando a aceleração de a, temos $a = 9{,}8$. Mas$a = v'(t) = 9{,}8$; logo$v(t) = 9{,}8$. Sabemos também que$v(t) = S'(t)$, então$S(t) = 4{,}9t^2$. Essa é a equação da queda livre dos corpos, a qual podemos utilizar para determinar a distância percorrida por um corpo em queda. Apesar de ela valer apenas no vácuo, sem interferência da resistência do ar, portanto, para pequenas distâncias o comportamento em corpos densos é muito semelhante.

Exemplos:

19) Escreva a equação da reta tangente à curva $f(x) = x^2 - 100$ no ponto $(8, -36)$.

20) Determine a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto em que $x = 2$.

21) Se $y = -\frac{3}{x}$, determine $\frac{d^3y}{dx^3}$.

22) Um estudo realizado pela câmara de comércio de uma cidade projetou que a população da cidade nos próximos três anos crescerá de acordo com a lei $P(t) = 50000 + 30\sqrt{t^3} + 20t$ onde *P(t)* denota a população daqui a *t* meses.
a) Em 2 anos, qual será a população da cidade?
b) Em 16 meses, com que rapidez a população dessa cidade estará crescendo?
c) Entre o 1º e o 2º ano, qual foi a taxa média de crescimento populacional nessa cidade?

23) Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$, calcule $f'(4)$.

24) O número de bactérias em uma cultura no instante *t*, em minutos, após a aplicação de um bactericida experimental segue a regra$N(t) = \frac{10000}{1+t^2} + 2000$.
a) Qual é o número inicial de bactérias?
b) Com que rapidez a população da colônia está decrescendo após 3min?

Exercícios

1) Para das funções abaixo, determine $\frac{dy}{dx}$.

a) $y = 3x^3 - \frac{2}{x^2} + 4x - 2$

b) $y = \frac{7}{2}x^6$

c) $y = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x}$

d) $y = (2x+3)(x^2 - x)$

e) $y = \frac{1}{5x-3}$

f) $y = -\frac{1}{3}(x^7 + 2x - 9)$

g) $y = \pi^3$

h) $y = (3x^2 + 1)^2$

i) $y = \frac{3x}{2x+1}$

j) $y = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}$

2) A partir das funções abaixo, determine $f'(2)$.

a) $f(x) = (x^3 + 7x^2 - 8)\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{2x+x^2}{1-x}$

d) $f(x) = \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(\frac{1}{x^5} + 1\right)$

3) A partir das funções abaixo, determine $\frac{d^2y}{dx^2}$.

a) $y = (4x^2 - 3x)(6x^3 + 1)$

b) $y = \frac{x+1}{x}$

4) A população de uma espécie de tartaruga estava ameaçada de extinção porque traficantes estavam recolhendo ovos de tartarugas para serem revendidos como afrodisíacos. Após a implementação de medidas severas de conservação, espera-se que a população de tartarugas comporte-se de acordo com a lei$N(t) = 2t^3 + 3t^2 - 4t + 100$, para $0 \leq t \leq 10$, onde $N(t)$denota a população no ano t. No 3º ano, com que velocidade a população de tartarugas estava crescendo?

5) Um estudo dos níveis de formaldeído em 900 casas indicou que a emissão de vários produtos químicos pode diminuir com o passar do tempo. Os níveis médios de formaldeído (em partes por milhão) em uma casa são dados por$f(t) = \frac{0,055t+0,26}{t+2}$, com $0 \leq t \leq 12$, onde *t* representa a idade da casa em anos. Quando a casa está no início de seu 4º ano, com que rapidez o nível médio de formaldeído estará decrescendo?

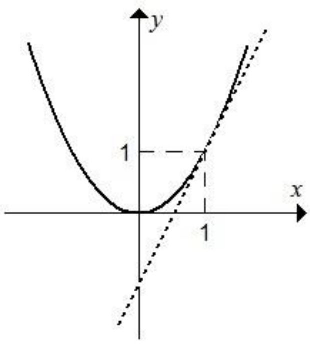
6) O percentual de famílias constituídas por casais com filhos entre 1970 e 2000 é aproximadamente$P(t) = \frac{49,6}{t^{0,27}}$, $(1 \leq t \leq 4)$, onde *t* é medido em décadas, com$t = 1$ correspondendo à década de 1970, $t = 2$ à década de 1980, e assim por diante.

a) Qual é o percentual de famílias que eram constituídas por casais com crianças na década de 1990?

b) Com que rapidez o percentual de famílias que eram constituídas por casais com crianças estava variando em 1980?

7) Projeta-se que a porcentagem da população dos Estados Unidos com telefones celulares é dada pela equação $P = 24,4t^{0,34}$, $(1 \leq t \leq 10)$, onde *t* é medido em anos, com $t = 1$ correspondendo ao ano de 1998. Com que rapidez se espera que a porcentagem da população dos Estados Unidos com telefones celulares esteja variando em 2006?

8) Encontre uma equação para a reta tangente à parábola$y = x^2$no ponto$(1, 1)$.



9) Nos itens a seguir, a posição de um objeto no tempo t (em segundos) é dada por $s(t)$ (em metros), encontre a velocidade instantânea no valor indicado de t:

a) $s(t) = 3t - 5; \quad t = 4$

b) $s(t) = \frac{2}{t+1}; \quad t = 2$

c) $s(t) = t^2 + 5; \quad t = 2$

10) Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2s$.

11) Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.

a) Encontre a velocidade da pedra após 1 segundo.

b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

c) Quando a pedra atinge a superfície?

d) Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

12) O deslocamento(em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = \frac{1}{t^2}$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a,\ t = 1,\ t = 2$ e $t = 3$.

13) Determine as derivadas das funções a seguir:

a) $y = 5$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = 5 - x$

d) $y = \frac{2}{3}x$

e) $y = 10 + \frac{x}{2}$

f) $g(t) = 3t^2 - 5t + 2$

g) $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

h) $h(x) = (x^2 - 4x)^2$

i) $q(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t^2}$

j) $r(s) = \frac{3s+2}{s^2}$

k) $g(y) = (7 - 3y^3)^2$

l) $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

m) $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$

14) Calcule as derivadas das funções a seguir nos valores indicados:

a) $f(x) = 3 - x^2 + 2x^3; \quad x = -1$

b) $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}; \quad x = 4$

c) $v(t) = 4{,}5t^2 - 3t + 2, \quad t = 2$

d) $R(q) = \frac{3}{q} + 2q^4; \quad q = -1$

e) $w(y) = 4y^3 \cdot (5y^4 - 6); \quad y = -2$

15) Determine as derivadas das funções a seguir:

a) $f(x) = (x^3 + 2x)(3x + 4x^2)$

b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$

c) $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$

d) $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

e) $F(y) = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

f) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

g) $y = \frac{t^2+2}{t^4-3t^2+1}$

h) $y = \frac{v^3-2v\sqrt{v}}{v}$

i) $f(t) = \frac{2t}{2+\sqrt{t}}$

16) Encontre uma equação para a reta tangente à curva da função $y = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}$ no ponto (1,0).

17) Suponha que $f(5) = 1,\ f'(5) = 6,\ g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Determine $h'(5)$ para:
a) $h(x) = f(x)g(x)$

b) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

c) $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

18) Suponha que $f(2) = -3,\ g(2) = 4,\ f'(2) = -2$ e $g'(2) = 7$. Encontre $h'(2)$:
a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$

b) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

c) $h(x) = f(x)g(x)$

d) $h(x) = \frac{g(x)}{(1+f(x))}$

RESPOSTAS

1)

a) $y' = 9x^2 + \frac{4}{x^3} + 4$

b) $y' = 21x^5$

c) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y' = 6x^2 + 2x - 3$

e) $y' = \frac{-5}{(5x-3)^2}$

f)$y' = -\frac{1}{3}(7x^6 + 2)$

g) $y' = 0$

h) $y' = 36x^3 + 12x$

i) $y' = \frac{3}{(2x+1)^2}$

j) $y' = 2x^3 + x^2$

2) a) $f'(x) = -\frac{15}{x^2} - \frac{14}{x^3} + \frac{48}{x^4} + \frac{32}{x^5}$ $\quad f'(2) = -\frac{3}{2}$

b) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^5}$ $\quad f'(2) = -\frac{5}{8}$

c) $f'(x) = \frac{2+2x-x^2}{(1-x)^2}$ $\quad f'(2) = 2$

d) $f'(x) = -\frac{12}{x^7} - \frac{15}{x^6} - \frac{2}{x^2}$ $\quad f'(2) = -\frac{53}{64}$

3) a) $y'' = 480x^3 - 216x^2 + 8$ $\quad$ b) $y'' = \frac{2}{x^3}$

4) 68 tartarugas/ano $\quad$ 5) $-0{,}00417$ ppm/ano

6) a) $36{,}87\%$ $\quad$ b) $-5{,}55\%$ por década

7) $1{,}946\%$ por ano $\quad$ 8) $y = 2x - 1$

9) a) $v = 3\ m/s$ $\quad$ b) $v = -\frac{2}{9}\ m/s$ $\quad$ c) $v = 4\ m/s$

10)$v = -9{,}6\ m/s$

11) a) $v = 6{,}28\ m/s$ $\quad$ b) $v = 10 - 3{,}72a\ m/s$ $\quad$ c) $5{,}38\ s$ $\quad$ d) $v = -10{,}01\ m/s$

12) $v = -\frac{2}{a^3}$ $\quad v(1) = -2m/s$ $\quad v(2) = -\frac{1}{4}m/s$ $\quad v(3) = -\frac{2}{27}m/s$

13) a) $y' = 0$

b) $y' = 2$

c) $y' = -1$

d) $y' = \frac{2}{3}$

e) $y' = \frac{1}{2}$

f) $g'(t) = 6t - 5$

g) $v'(r) = 4\pi r^2$

h) $h'(x) = 2(x^2 - 4x)(2x - 4)$

i) $q'(t) - \frac{1}{2\sqrt{t^3}} + \frac{4}{t^3}$

j) $r'(s) = -\frac{3}{s^2} - \frac{4}{s^3}$

k) $g'(y) = -18y^2(7 - 3y^3)$

l) $f'(x) = 70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6$

m) $F'(t) = t^3 - t$

14) a) $f'(-1) = 8$

b) $g'(4) = -\frac{9}{8}$

c) $v'(2) = 15$

d) $R'(-1) = -11$

e) $w'(-2) = -2368$

15) a) $f'(x) = 20x^4 + 12x^3 + 24x^2 + 12x$

b) $y'(x) = \frac{5}{(2x+1)^2}$

c) $H'(u) = 2u - 1$

d) $J'(v) = 1 + \frac{1}{v^2} + \frac{6}{v^4}$

e) $F'(y) = 5 + \frac{14}{y^2} + \frac{9}{y^4}$

f) $y'(x) = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$

g) $y'(t) = \frac{14t - 8t^3 - 2t^5}{(t^4 - 3t^2 + 1)^2}$

h) $y'(v) = 2v - \frac{1}{\sqrt{v}}$

i) $f'(t) = \frac{4+\sqrt{t}}{\left(2+\sqrt{t}\right)^2}$

16) $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

17) a) $h'(5) = -16$ b) $h'(5) = -\frac{20}{9}$ c) $h'(5) = 20$

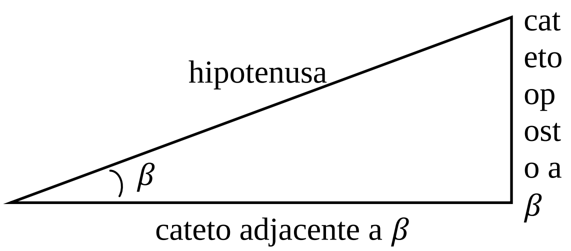
18) a) $h'(2) = -38$ b) $h'(2) = \frac{13}{16}$ c) $h'(2) = -29$ d) $h'(2) = -\frac{3}{2}$

Funções trigonométricas

As funções trigonométricas modelam fenômenos cíclicos, como, por exemplo, a subida das marés, o movimento de um pêndulo, os batimentos cardíacos, entre outros. Para compreender com mais clareza as características desse tipo de função, faremos uma breve revisão da trigonometria no triângulo retângulo e no círculo.

Trigonometria no triângulo retângulo

Originalmente, as relações trigonométricas foram estudadas a partir da proporcionalidade de triângulos retângulos semelhantes. A partir de problemas reais foram descobertas razões de proporcionalidade entre os lados de triângulos retângulos e seus ângulos internos. Em um triângulo retângulo temos:



$$seno\ de\ \beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

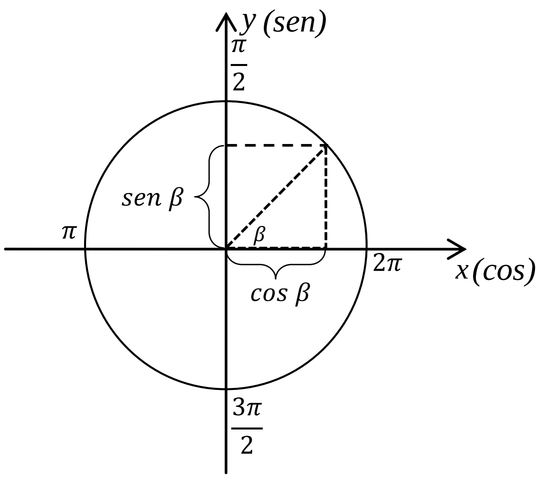
$$cosseno\ de\ \beta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

$$tangente\ de\ \beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta}$$

Trigonometria no círculo

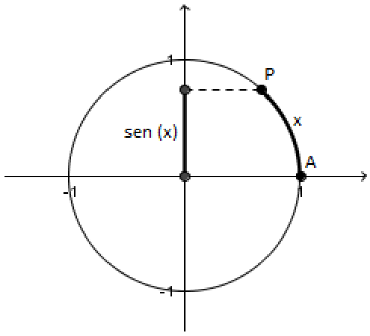
Expandindo os conceitos de seno, cosseno e tangente para o círculo trigonométrico, temos as funções trigonométricas.

Consideremos um círculo de raio unitário ($R = 1$) centrado na origem do sistema cartesiano. O ponto $A(1, 0)$é a origem de todos os arcos (ângulos) e a circunferência λ é orientada com sentido positivo anti-horário.



Função seno

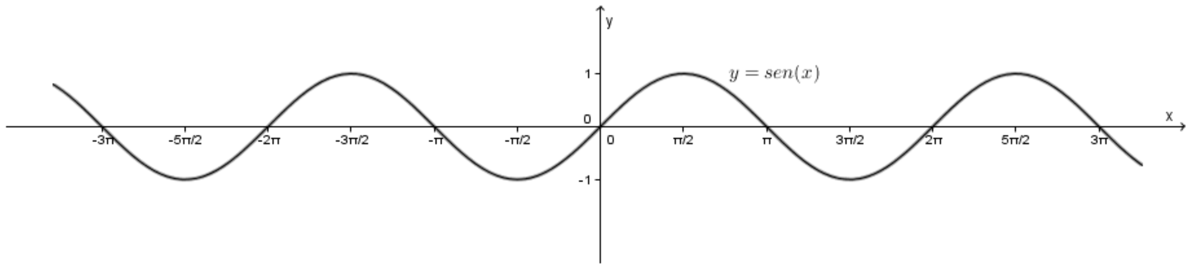
No círculo trigonométrico, se P é a extremidade de um arco de comprimento$x$, definimos *seno de* x, e escrevemos $sen(x)$como a ordenada do ponto P.



Portanto:

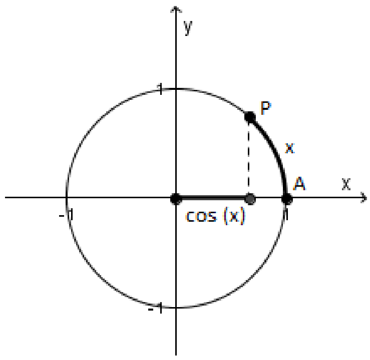
A função **seno** é a função$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x a um $sen(x)$. Denotamos a função seno como $f(x) = sen(x)$.

A figura abaixo mostra o gráfico da função seno.



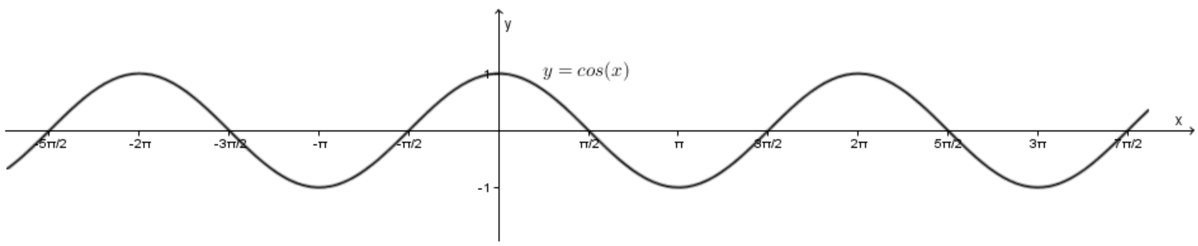
Função cosseno

No círculo trigonométrico, se P é a extremidade de um arco de comprimento$x$, definimos *cosseno de* x, e escrevemos $cos(x)$, como a abcissa do ponto P.



Portanto a função **cosseno** é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x a um $cos(x)$. Denotamos a função cosseno como $f(x) = cos(\,x)$.

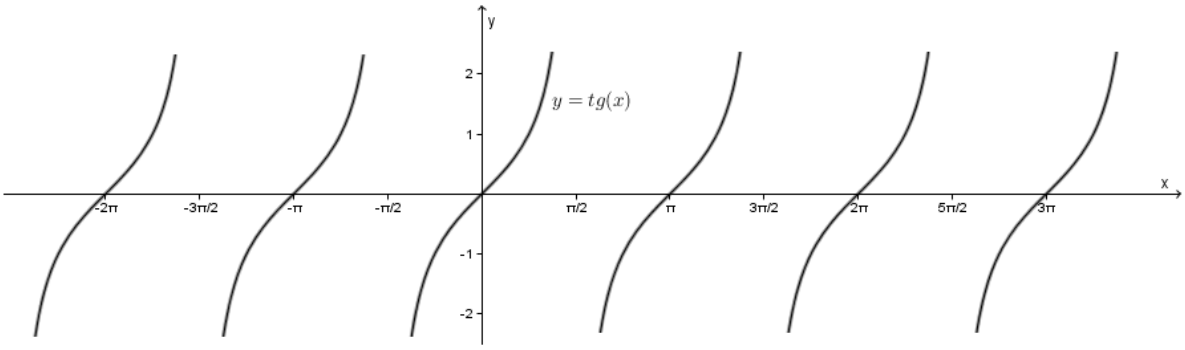
A figura abaixo mostra o gráfico da função cosseno.



As demais funções trigonométricas podem ser definidas em termos das funções $sen(x)$ e $cos(x)$. São elas:

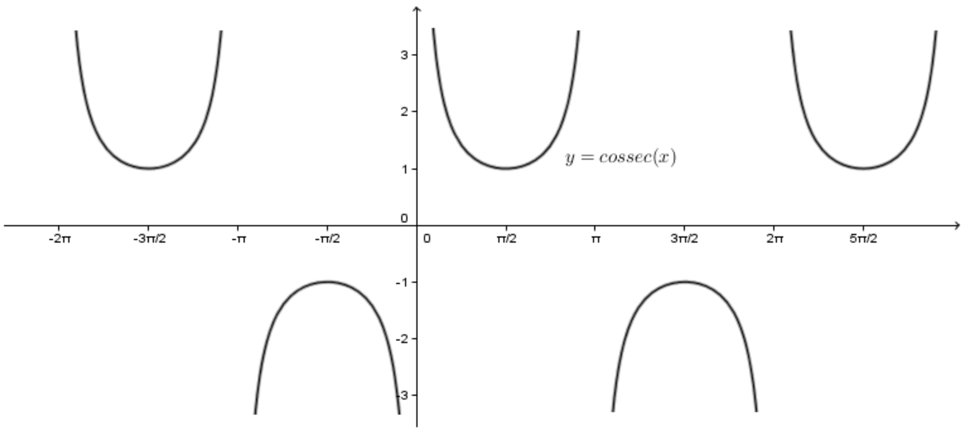
Função tangente

$$f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$



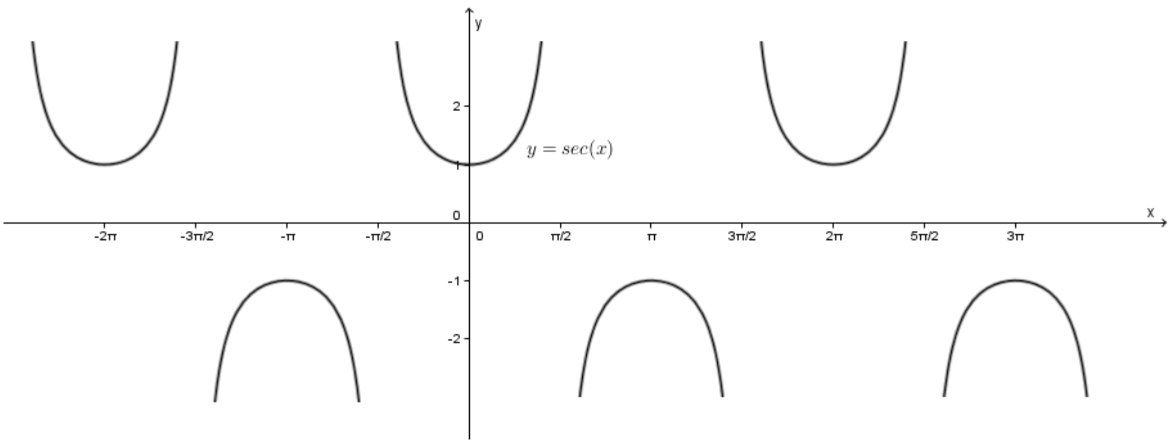
Função cossecante

$f(x) = cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}$.



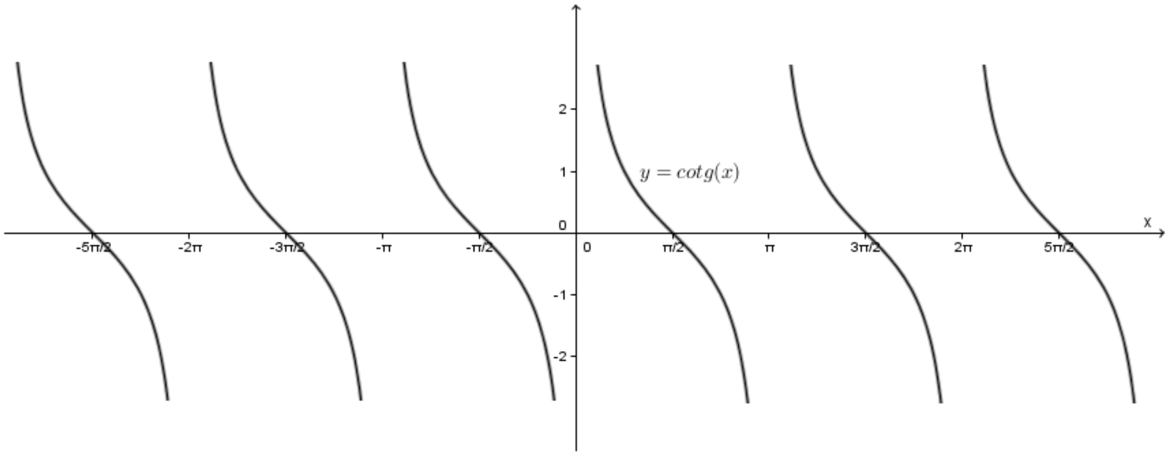
Função secante

$f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$.



Função cotangente

$f(x) = cot\ g\ (x) = \frac{1}{tan(x)} = \frac{cos(x)}{sen(x)}$.



Derivadas de funções trigonométricas

Consideremos a variável independente x das funções trigonométricas, quando se refere a ângulo, medida em radianos. As fórmulas de derivação são apresentadas abaixo.

1) $\frac{d}{dx}[sen(x)] = cos(x)$

2) $\frac{d}{dx}[cos(x)] = -sen(x)$

3) $\frac{d}{dx}[tg(x)] = sec^2(x)$

4) $\frac{d}{dx}[sec(x)] = sec(x) \cdot tg(x)$

5) $\frac{d}{dx}[cossec(x)] = -\,cossec(x) \cdot cotg(x)$

6) $\frac{d}{dx}[cotg(x)] = -\,cossec^2(x)$

<u>Exemplos</u>:

1) Se$f(x) = x^2 + 2cos(x)$, determine$f'(1)$.

2) Se $y = x.sen(x) + x$, determine $\frac{dy}{dx}$.

3) Escreva a derivada de$y = x^2\ cos(\ x) + 4\ sen(x)$.

4) Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ para a função $y = cossec(x)$.

5) Para a função $f(x) = sec(x)$, calcule $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6) Determine $f'(\pi)$ para a função $f(x) = \frac{2.sen(x)+1}{3+cos(x)}$.

Exercícios

1) A partir das funções abaixo, determine $f'(x)$.

a) $f(x) = 4cos(x) + 2sen(x)$

b) $f(x) = -4x^2 cos(x)$

c) $f(x) = \frac{5-cos(x)}{5+sen(x)}$

d) $f(x) = sec(x) - \sqrt{2}tg(x)$

e) $f(x) = sen(x).tg(x)$

f) $f(x) = 3x.cossec(x)$

2) Para a função $f(x) = sen(x).tg(x)$ calcule $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

3) Dada a função $y = 5\sqrt{x}.sec(x)$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

4) Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ para as funções:

a) $y = sec(x)$

b) $y = x^2.sen(x)$

c) $y = 4x.cos(x)$

RESPOSTAS

1) a) $f'(x) = -4sen(x) + 2\,cos(x)$

b) $f'(x) = 4x^2 sen(x) - 8x.cos(x)$

c) $f'(x) = \frac{5sen(x) - 5\,cos(x) + sen^2(x) + cos^2(x)}{(5+sen\,x)^2} = \frac{1+5\,sen\,(x) - 5\cos(x)}{(5+senx)^2}$

d) $f'(x) = sec(x).tg(x) - \sqrt{2}sec^2(x)$

e) $f'(x) = sen(x).sec^2(x) + cos(x).tg(x)$

f) $f'(x) = -3x.cossec(x).cotg(x) + 3cossec(x)$

2) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cong 4{,}33$

3) $\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{x}.sec(x).tg(x) + \frac{5sec(x)}{2\sqrt{x}}$

4) a) $y' = sec^3(x) + sec(x).tg^2(x)$

b) $y' = x^2.cos(x) + 2x.sen(x)$

c) $y' = -4x.sen(x) + 4.\cos(x)$

Regra da cadeia

Já vimos regras de derivação para alguns tipos de funções. No entanto, a derivada da função $f(x) = (x^2 + x)^{10}$ pode ser bem trabalhosa de ser obtida pelos métodos vistos. Um modo de resolver esse problema seria fazer a expansão de $(x^2 + x)^{10}$, o que é inviável pela extensão dos cálculos a fazer. Nessa seção, nossa estratégia será escrever $f(x)$como uma composta de funções mais simples que já sabemos derivar.

Na função $y = (x^2 + x)^{10}$, podemos fazer $u = x^2 + x$, o que permite escrever$y = u^{10}$. O que queremos é o resultado $\frac{dy}{dx}$, que podemos obter fazendo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. As derivadas envolvidas que nos fazem resolver o problema inicial são simples. Se$y = u^{10}$, então $\frac{dy}{du} = 10u^9$ e $se\ u = x^2 + x$, então $\frac{du}{dx} = 2x + 1$. Resolvemos o problema inicial fazendo $\frac{dy}{dx} = 10u^9.(2x + 1) = 10(x^2 + x)^9.(2x + 1)$.

Teorema:

Se$y = f(u)$ é uma função diferenciável de u e$u = g(x)$é uma função diferenciável de *x*, então $y = f(g(x))$ é uma função diferenciável de *x* e $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dizemos "regra da cadeia" porque a derivada que queremos calcular é obtida pelo encadeamento de duas ou mais funções como visto acima. Informalmente, a regra acima pode ser expressa em palavras como sendo "a derivada da função externa multiplicada pela derivada da função interna".

A regra da cadeia pode ser aplicada mais de uma vez na mesma função, se necessário.

Exemplo:Determine a derivada das funções abaixo:

1) $f(x) = (x^3 + 2x)^5$

2) $g(x) = cos(x^3)$

3) $h(x) = tg^2(4x)$

4) $f(x) = \left(2x^2 + \frac{5}{x}\right)^{10}$

5) $f(x) = \frac{1}{cos(x)}$

6) $y = \frac{sen(2x)}{(x^2+1)^2}$

Fórmulas generalizadas de derivação

Se usamos *u* e *v* como uma função de *x*, então as regras de derivação anteriormente vistas podem ser expressas como mostradas abaixo:

1) $\frac{d}{dx}[u^m] = mu^{m-1} \cdot u'$

2) $\frac{d}{dx}[u \cdot v] = vu' + uv'$

3) $\frac{d[u/v]}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

4) $\frac{d}{dx}[sen(u)] = cos\quad(u) \cdot u'$

5) $\frac{d}{dx}[\cos(u)] = -sen\ (u) \cdot u'$

6) $\frac{d}{dx}[tg\ (u)] = sec^2\quad(u) \cdot u'$

7) $\frac{d}{dx}[sec(u)] = sec(u) \cdot \mathrm{tg}\ (u) \cdot u'$

8) $\frac{d}{dx}[cossec(u)\ ] = -cossec\quad(u) \cdot \mathrm{cotg}\ (u) \cdot u'$

9) $\frac{d}{dx}[cotg(u)\ ] = -cossec^2\quad(u) \cdot u'$

<u>Exemplos</u>:

7) Determine a derivada das funções:

a) $y = sen(x^2)$

d) $y = \frac{1}{sen(2x)}$

b) $y = sen^2(x)$

e) $y = \sqrt{2x^2 - 3x}$

c) $y = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

f) $y = \sqrt{cos(4x)}$

Exercícios

1) Encontre as derivadas das funções abaixo:

a) $y = (x^3 - 2x^2)^3$

b) $y = \sqrt[3]{3x - 1}$

c) $f(x) = cos(2x)$

d) $y = x^3.sen(3x)$

e) $y = \frac{(2x+3)^4}{2x-2}$

f) $f(x) = x\sqrt{2x}$

g) $y = \frac{sen^2(3x)}{cos(2x)}$

h) $f(x) = \left(x^3 - \frac{7}{x}\right)^{-2}$

i) $f(x) = \frac{4}{(3x^2-2x+1)^3}$

j) $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{3x}}$

k) $y = cos^3\big(sen(2x)\big)$

l) $y = \sqrt[3]{sen\ (3x^2)}$

2) Calcule $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ para a função $f(x) = tg\ (3x)$.

3) Dada a função$y = sen^2(\sqrt{x})$, calcule $f'(2)$.

RESPOSTAS

1)

a) $y' = 3(x^3 - 2x^2)^2(3x^2 - 4x)$

b) $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$

c) $f'(x) = -2.sen(2x)$

d) $y' = 3x^3.cos(3x) + 3x^2sen(3x)$

e) $y' = \frac{8(2x-2)(2x+3)^3 - 2(2x+3)^4}{(2x-2)^2}$

f) $y' = \sqrt{2x} + \frac{x}{\sqrt{2x}}$

g) $y' = \frac{6sen(3x)\,cos(2x)\,cos(3x) + 2sen(2x)sen^2(3x)}{cos^2(2x)}$

h) $f'(x) = -2\left(x^3 - \frac{7}{x}\right)^{-3}.\left(3x^2 + \frac{7}{x^2}\right)$

i) $f'(x) = \frac{-12(6x-2)}{(3x^2-2x+1)^4}$

j) $y' = \frac{3}{4}(4+\sqrt{3x})^{-\frac{1}{2}}(3x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{12x+3x\sqrt{3x}}}$

k) $f'(x) = -6\,cos^2\big(sen(2x)\big)\,.\,sen\big(sen(2x)\big).\,cos(2x)$

l) $y' = \frac{2x.cos(3x^2)}{\sqrt[3]{\big(sen(3x^2)\big)^2}}$

2) $f''(x) = 18.\,sec^2(3x).\,tg\;(3x) \quad \rightarrow \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -36$

3) $f'(x) = \frac{sen(\sqrt{x}).cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad \rightarrow \qquad f''(2) \cong 0{,}10891$

TAXAS RELACIONADAS

O estudo da derivada é importante na resolução de uma quantidade muito grande de problemas de diversas áreas de conhecimento. Particularmente, a seção de taxas relacionadas utiliza a regra da cadeia recentemente vista na resolução de problemas. Considere os exemplos abaixo:

1) Um navio petroleiro sofre um acidente e o óleo derramado através de uma ruptura no casco se espalha em uma forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de 2 m/s. Com que velocidade a área do derramamento estará crescendo quando seu raio for de 60m?

2) Um balão esférico é inflado de modo que seu volume cresce a uma taxa de $3cm^3/s$. Com que rapidez o raio do balão estará crescendo quando o raio for de 1cm?

3) Uma escada de 3m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 10cm/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo quando a base da escada está a 1m da parede?

4) A areia que vaza de um depósito forma uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio da base. Se a altura da pilha aumenta à razão de 15cm/min, determine a taxa com a qual a areia está se escoando quando a altura da pilha é de 25cm.

5) Um míssil é lançado verticalmente para cima de um ponto que está a 8km de uma estação de rastreamento, e à mesma altura desta. Durante os primeiros 20 segundos de voo, seu ângulo de elevação θ varia à razão constante de 2 graus por segundo. Determine a velocidade do míssil quando o ângulo de elevação for de 30 graus.

Exercícios

1) Uma bola de plástico cai num roseiral e um espinho a perfura de forma que o volume da bola decresce a uma taxa de $100cm^3$ por segundo. No exato instante que o raio da bola atinge 20cm, com que rapidez o raio estará decrescendo?

2) Um petroleiro sofre um acidente em alto mar e começa a perder óleo por uma abertura no casco. Se o combustível se espalha de forma circular de modo que o raio da mancha cresce a uma taxa constante de 4m/s, com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando o raio da mancha for de 100m?

3) Um balão esférico é esvaziado de tal forma que seu raio decresce a uma taxa constante de 10cm/min. Com que taxa o ar está sendo removido quando o raio for de 12cm?

4) Uma escada de 1,3m está apoiada em uma parede. Se seu topo desliza sobre a parede para baixo a uma taxa de 0,2m/s, com que rapidez a base da escada estará se afastando da parede quando o topo estiver a 0,5m acima do solo?

5) Uma pedra jogada em um lago emite ondas circulares, cujo raio cresce a uma taxa constante de 3m/s. Com que rapidez estará variando a área englobada pela onda crescente ao final de 10 segundos?

6) Pela ruptura de um tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo, cuja área cresce a uma taxa constante de $6km^2/h$. Com que rapidez estará variando o raio da mancha crescente quando a área for de $9\pi\ km^2$?

7) Um balão esférico é inflado de tal forma que o volume cresce a taxa de $3m^3/min$. Com que rapidez o raio do balão estará crescendo quando o diâmetro for de 2m?

8) Um foguete subindo verticalmente é acompanhado por uma estação de radar no solo a 3km da rampa de lançamento. Com que rapidez o foguete estará subindo quando a sua altura for 4km e a sua distância à estação do radar estiver crescendo a uma taxa de 2000km/h?

9) Grãos caem de uma calha de escoamento a uma taxa de $8m^3/min$, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre o dobro do seu raio. Com que rapidez a altura da pilha está crescendo no momento em que a altura é de 6m?

10) Às 8h o navio A está a 25km ao sul do navio B. Se o navio A está navegando para o oeste à 16km/h e o navio B está navegando para o sul a 20km/h, então determine a razão em que a distância entre os navios está variando às 8h30min.

RESPOSTAS

1) $0{,}02\ cm/s$

2) $800\pi\ m^2/s$

3) $5760\pi\ cm^3/min$

4) $8{,}3\ cm/s$

5) $180\pi\ m^2/s$

6) $0{,}32\ km/h$

7) $23{,}9\ cm/min$

8) $2500\ km/h$

9) $28{,}3\ cm/min$

10) $10{,}12\ km/h$

FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

Os termos crescente, decrescente e constante são usados para descrever o comportamento de uma função em um intervalo à medida que percorremos seu gráfico da esquerda para a direita.

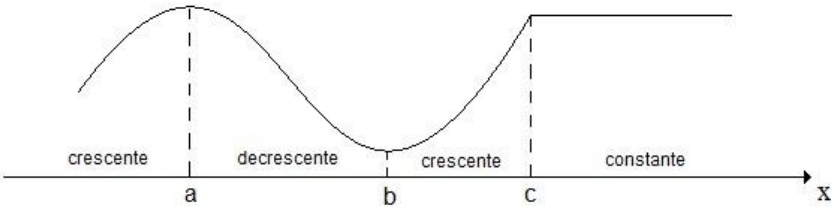
Definição: Seja *f* definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos do intervalo.

a) *f* é crescente no intervalo I se $f(x_1)$ é menor do que $f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.

b) *f* é decrescente no intervalo I se $f(x_1)$ é maior do que $f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.

c) *f* é constante no intervalo I se $f(x_1)$ é igual a $f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2.

O gráfico abaixo mostra intervalos onde a função é crescente, decrescente e constante.



Perceba que qualquer reta tangente traçada no intervalo $(-\infty, a)$ ou (b, c) tem declividade positiva; se pegarmos qualquer ponto no intervalo (a, b), a reta tangente a esse ponto tem declividade negativa e no intervalo $(c, +\infty)$ qualquer reta tangente tem declividade nula. Isso nos leva ao seguinte resultado:

Teorema: Seja *f* uma função contínua e diferenciável num intervalo I.

a) Se $\boldsymbol{f'(x)} > 0$ para todo valor de *x* em I, então *f* é **crescente** nesse intervalo.

b) Se $\boldsymbol{f'(x)} < 0$ para todo valor de *x* em I, então *f* é **decrescente** nesse intervalo.

c) Se $f'(x) = 0$ para todo valor de *x* em I, então *f* é constante nesse intervalo.

<u>Exemplos</u>:

1) Determine os intervalos nos quais a função $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ é crescente ou decrescente.

2) Determine os intervalos onde o gráfico da função $f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2}$ é crescente ou decrescente.

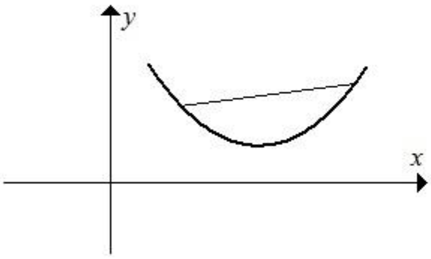
3) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$.

4) Para a função $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$, determine o(s) intervalo(s) em que $g(x)$ é crescente(s) e o(s) intervalo(s) em que $g(x)$ é decrescente(s).

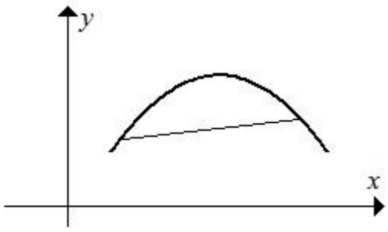
CONCAVIDADE

Vamos primeiramente tornar mais claro o conceito de concavidade. Podemos definir uma função em côncava ou convexa dependendo do tipo de curvatura que seu gráfico mostra.

O gráfico a seguir mostra uma função côncava. Perceba que se pegarmos dois pontos quaisquer do gráfico de *f*, esse segmento de reta (corda) está sempre acima do gráfico nesse intervalo.

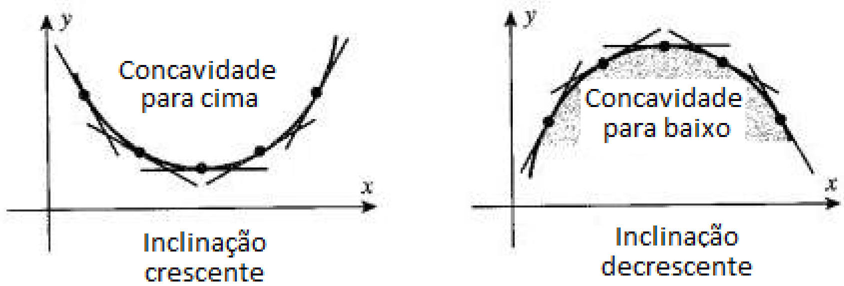


O gráfico abaixo mostra uma função convexa. Perceba que a corda agora fica sempre abaixo do gráfico no intervalo escolhido.



No entanto é comum nos referirmos à concavidade da função usando côncava para cima ou côncava para baixo. Assim, na Figura 1, dizemos que a função é côncava ou côncava para cima e, na Figura 2, dizemos que a função é convexa ou côncava para baixo.

A figura abaixo[4] indica o que ocorre com as inclinações das retas tangentes em cada tipo de concavidade. Perceba que as derivadas, vistas da esquerda para a direita, são crescentes quando a função é côncava para cima e decrescentes quando a função é côncava para baixo.



Portanto:

Se f é diferenciável em um intervalo I, então dizemos que f é côncava para cima em I se f' é crescente em I, e côncava para baixo em I se f' é decrescente em I. Usando este fato e o teorema que caracteriza crescimento e decrescimento (aplicado a f' no lugar de f), temos o seguinte resultado:

Teorema: Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto I.

a) Se $\boldsymbol{f''(x)} > 0$ para cada valor de x em I, então f é **côncava para cima** em I.

b) Se $\boldsymbol{f''(x)} < 0$ para cada valor de x em I, então f é **côncava para baixo** em I.

Exemplos:

5) Determine os intervalos abertos nos quais as funções abaixo são crescentes, decrescentes, côncavas para cima e côncavas para baixo.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $y = x^3 - 4x$

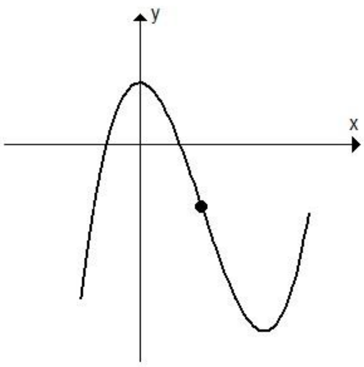
Ponto de inflexão

Um ponto do gráfico em que a concavidade muda recebe denominação própria.

Definição: Se f é contínua em um intervalo aberto contendo o ponto x e muda de concavidade no ponto $(x, f(x))$, então dizemos que o ponto x do domínio, ou o ponto $(x, f(x))$ do gráfico, é um ponto de inflexão de f.

O gráfico a seguir mostra o ponto de inflexão da função em destaque.

[4] Fonte: ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.



Um ponto de inflexão sempre ocorre onde $f''(x) = 0$ ou quando $f''(x)$ não está determinada, mas nem sempre quando $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ é indeterminada temos um ponto de inflexão. Tome como exemplo a função $y = x^4$, analisando a existência ou não do ponto de inflexão.

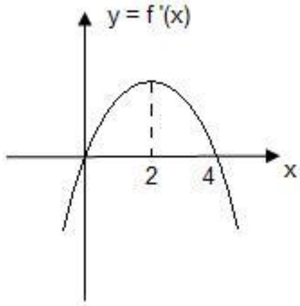
Exemplos:

6) Determine os intervalos abertos nos quais a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Em seguida, verifique a existência de pontos de inflexão, indicado as coordenadas (x, y) em caso afirmativo.

7) O gráfico à direita representa a derivada de uma função *f*.

a) Para qual intervalo de *x* a função *f* é crescente?

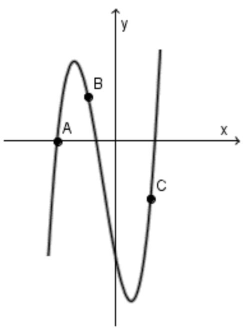
b) Para qual intervalo de *x* a função é côncava para cima?



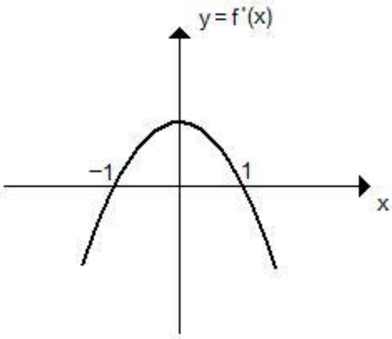
Exercícios

1) Indique o sinal de y' e y'' em cada um dos pontos destacados na função abaixo:

	y'	y''
A		
B		
C		

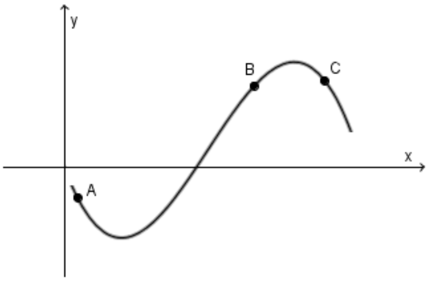


2) Considere o gráfico abaixo em que $y = f'(x)$. Em relação à função *f*, indique os intervalos para os quais ela é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo.

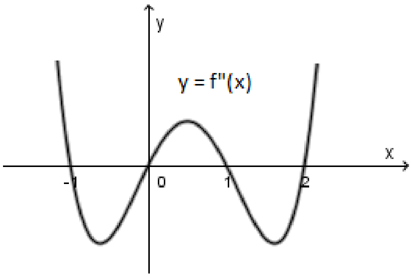


(As questões 3 a 8 têm como fonte**:** ANTON, Howard. *Cálculo*. v.1. Porto Alegre: Bookmann, 2007. p.276.)

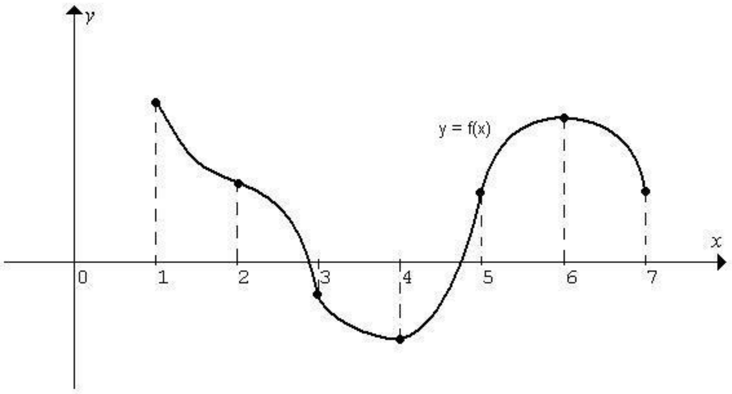
3) Use o gráfico da equação $y = f(x)$ na figura abaixo para encontrar os sinais de $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ nos pontos A, B e C.



4) Use o gráfico de $y = f''(x)$ na figura abaixo para determinar as coordenadas *x* de todos os pontos de inflexão de *f*.



5) Em cada parte, use o gráfico $y = f(x)$ abaixo para encontrar a informação requisitada.



a) Encontre os intervalos nos quais *f* é crescente.
b) Encontre os intervalos nos quais *f* é decrescente.
c) Encontre os intervalos abertos nos quais *f* é côncava para cima.
d) Encontre os intervalos abertos nos quais *f* é côncava para baixo.
e) Encontre todos os valores de *x* nos quais *f* tem um ponto de inflexão.

Para os exercícios 6 a 8, determine:
a) os intervalos nos quais *f* é crescente
b) os intervalos nos quais *f* é decrescente
c) os intervalos abertos nos quais *f* é côncava para cima
d) os intervalos abertos nos quais *f* é côncava para baixo
e) as coordenadas de todos os pontos de inflexão.

6) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

7) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{3}$

8) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

RESPOSTAS

1)

	y'	y''
A	+	–
B	–	–
C	+	+

2) Crescente: $(-1, 1)$
Decrescente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Côncava para cima: $(-\infty, 0)$
Côncava para baixo: $(0, +\infty)$

3)

	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
A	–	+
B	+	–
C	–	–

4) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

5)
a) $(4, 6)$
b) $(1, 4) \cup (6, 7)$
c) $(1, 2) \cup (3, 5)$
d) $(2, 3) \cup (5, 7)$
e) $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$

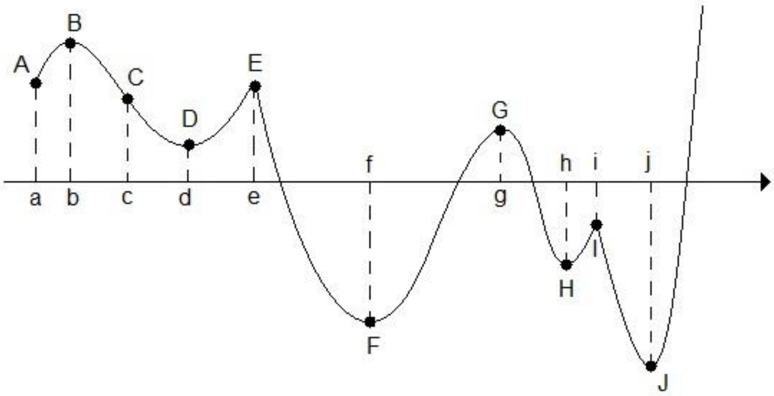
6)
a) $(3, +\infty)$
b) $(-\infty, 3)$
c) $(-\infty, +\infty)$
d) Não há.
e) Não há.

7)
a) $(-\infty, +\infty)$
b) Não há.
c) $(-1, +\infty)$
d) $(-\infty, -1)$
e) $(-1, 0)$

8)
a) $(1, +\infty)$
b) $(-\infty, 1)$
c) $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
d) $\left(0, \frac{2}{3}\right)$
e) $(0, 0)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$

EXTREMOS RELATIVOS

Observe o gráfico da função *f* contínua no intervalo$[a,+\infty)$.



Para definir melhor o que são extremos relativos, antes vamos a algumas definições importantes:

Definição: Sendo *x* a variável independente da função *f*, denominamos ***ponto crítico*** o ponto do domínio de *f* em que$f'(x) = 0$ou *f* não é diferenciável.Em particular, se o ponto crítico *x* é tal que $f'(x) = 0$, dizemos que *x* é um ***ponto estacionário*** de *f*.

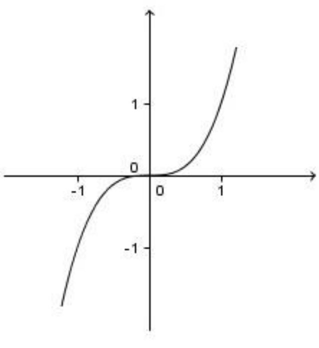
Note que no gráfico acima os pontos de abcissas **b**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i** e **j** são críticos. Desses, apenas os pontos de abcissas **e** e**i** não são estacionários.

Nosso primeiro objetivo é encontrar máximos e mínimos relativos. Estes são pontos mais altos e mais baixos relativos à sua vizinhança. Por exemplo, em **b**, **e**, **g** e **i** ocorrem máximos relativos e em **d**, **f**, **h** e **j** ocorrem mínimos relativos. Estas idéias estão relacionadas na seguinte definição:

Definição: Dizemos que uma função *f* tem um máximo relativo em x_0 se houver um intervalo aberto I contendo x_0 no qual$f(x_0)$é o maior valor, isto é,$f(x_0) \geq f(x)$para todo x em I. Analogamente, dizemos que f tem um mínimo relativo em x_0 se houver um intervalo aberto I contendo x_0 no qual$f(x_0)$é o menor valor, isto é,$f(x_0) \leq f(x)$ para todo *x* em I. Quando *f* tiver um máximo ou mínimo relativo em x_0, se diz que *f* possui um extremo relativo em x_0.

Importante: Observe que os extremos relativos (máximos e mínimos relativos) ocorrem em pontos críticos. Se quisermos encontrar extremos relativos de *f*, precisamos primeiramente conhecer os pontos críticos desta função, uma vez que estes são os candidatos a ocorrer extremos relativos.

Note que falamos em candidatos, pois extremos relativos ocorrem em pontos críticos, mas em um ponto crítico pode não ocorrer um extremo relativo. Isto pode ser visualizado na função$y = x^3$(gráfico abaixo), onde $x = 0$ é um ponto crítico, mas não é um extremo relativo.



Exemplos:

1) Determine os extremos relativos da função $f(x) = x^3 - x$ definida no intervalo $[-2, 2]$.

2) Encontre todos os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Depois de todos os pontos críticos encontrados, precisamos analisar se nestes pontos ocorrem extremos relativos. Para isto, fazemos uso de dois testes que utilizam as derivadas da função *f*.

Teste da derivada primeira

Suponha *f* contínua em um ponto crítico $x = c$.

a) Se o sinal de $f'(x)$ muda no ponto $x = c$, passando de negativo a positivo, $f(c)$ é um mínimo relativo de *f*.

b) Se o sinal de $f'(x)$ muda no ponto $x = c$, passando de positivo a negativo, $f(c)$ é um máximo relativo de *f*.

c) Se $f'(x)$ não muda de sinal no ponto $x = c$, então $f(c)$ não é máximo relativo nem mínimo relativo.

Teste da derivada segunda

Suponha que *f* seja duas vezes diferenciável em um ponto $x = c$.

a) Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$, então *f* tem um mínimo relativo em $x = c$.

b) Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) < 0$, então *f* tem um máximo relativo em $x = c$.

c) Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) = 0$, então o teste é inconclusivo.

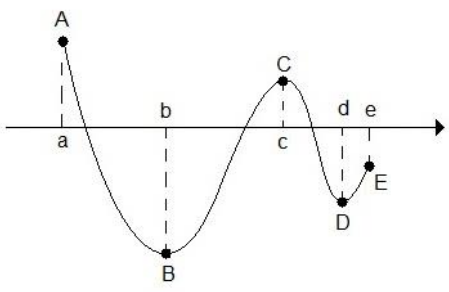
Exemplo:

3) Esboce o gráfico da função $y = x^4 - 4x^3$, destacando suas raízes, extremos relativos e pontos de inflexão.

EXTREMOS ABSOLUTOS

Definição: Seja I um intervalo no domínio de uma função *f*. Dizemos que *f* tem um máximo absoluto em I em um ponto x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo *x* em I. Analogamente, dizemos que *f* tem um mínimo absoluto em x_0 se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo *x* em I. Se *f* tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que *f* tem em x_0 um extremo absoluto.

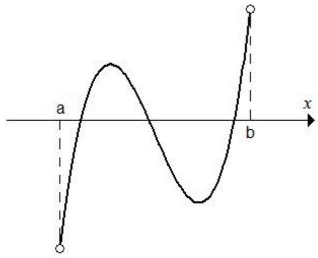
Para tornar mais clara a definição, vamos analisar o gráfico de *f*, definido no intervalo $[a, e]$, mostrado a seguir:



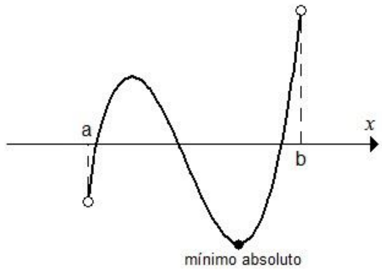
Perceba que $f(x) \leq f(a)$ para qualquer *x* pertencente ao domínio da função. Conclui-se, portanto que a função tem um máximo absoluto em $x = a$. Do mesmo modo, $f(x) \geq f(b)$ para qualquer *x* pertencente ao domínio de *f*, o que leva à conclusão que a função tem um mínimo absoluto em $x = b$.

Teorema: Se uma função *f* for contínua num intervalo fechado $[a, b]$, então *f* tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.

Em se tratando de funções definidas em um intervalo aberto (a, b) ou num intervalo infinito, não há qualquer garantia de que haja extremos absolutos.



As conclusões sobre a existência de extremos absolutos de uma função contínua neste tipo de intervalo podem ser observadas pelo comportamento de $f(x)$, analisando os limites nos extremos do intervalo. Caso exista o máximo absoluto, este será o maior dos máximos relativos, e caso exista o mínimo absoluto, este será o menor dos mínimos relativos.



Teorema: Se *f* tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b), então ele deve ocorrer em um ponto crítico de *f*.

<u>Exemplos</u>:
4) Determine os extremos absolutos da função$y = x^3$definida no intervalo$[-2, 2]$.

5) Dada a função$f(x) = 3x^4 - 4x^3$definida no intervalo$[-1, 2]$, determine:
a) Os intervalos do domínio onde *f* é crescente ou decrescente.
b) Os intervalos do domínio onde *f* é côncava para baixo e côncava para cima.
c) As coordenadas(x, y)do(s) ponto(s) de inflexão, caso existam.
d) Os valores de *x* onde ocorrem os extremos relativos, se houver.
e) Os extremos absolutos da função.
f) Um esboço de gráfico de *f*.

6) Considere a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ no intervalo$[-2, 4)$. Determine para quais valores de x a função é crescente ou decrescente, côncava para cima e côncava para baixo; quais as coordenadas (x, y) do(s) ponto(s) de inflexão, para qual(is) valor(es) de *x* ocorrem extremos relativos (máximo e mínimo, se houver) e quais os extremos absolutos (máximo e mínimo, se houver). Caso não haja, diga. Para concluir, faça o esboço do gráfico de *f*.

Exercícios

1) Para as funções abaixo, determine o(s) intervalo(s) em que são crescentes, o(s) intervalo(s) em que são decrescentes, o(s) ponto(s) de máximo e mínimo relativos, se houver, o(s) intervalo(s) em que a função é côncava para cima, o(s) intervalo(s) em que a função é côncava para baixo e o(s) ponto(s) de inflexão, se houver.

a) $f(x) = 4x - x^2$

b) $f(x) = -x^3 - \frac{21x^2}{2} + 24x + 96$

c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

d) $y = -x^3 - 3x^2 + 45x + 81$

e) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 38$

f) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

2) Considere a função$y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 4x$ em que$x \in [-2, 3)$. Determine os intervalos de *x* onde a função é crescente e decrescente, côncava para cima e para baixo, as coordenadas(x, y)do ponto de inflexão, o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função, caso existam, e os valores de *x* onde ocorrem os extremos relativos (máximo e mínimo). Por fim, esboce o gráfico.

3) Considere a função $y = x^3 - \frac{5x^2}{2} - 12x + 4$ no intervalo$[-2, 6)$. Determine os intervalos de *x* onde a função é crescente e decrescente, côncava para cima e para baixo, as coordenadas (x, y) do ponto de inflexão e os valores de *x* onde ocorrem os extremos relativos e absolutos (máximos e mínimos).

4) Dada a função $y = x^3 - x^2 - 3x - 2$ com domínio no intervalo$(-2, 2]$, determine o intervalo de *x* onde a função é crescente e decrescente, o intervalo de *x* onde a concavidade é voltada para cima e para baixo, o valor de *x* onde ocorrem os extremos relativos (se houver), dizendo qual é de máximo e qual é de mínimo, o valor do máximo e do mínimo absoluto, quando houver, especificando cada um deles, e as coordenadas (x, y) do(s) ponto(s) de inflexão, caso haja(m). Quando não houver algum dos itens pedidos, diga que não há. Por fim, esboce o gráfico.

RESPOSTAS:

1) a) crescente em $(-\infty, 2)$; decrescente em $(2, +\infty)$; ponto máximo (absoluto): $(2, 4)$; côncava para baixo em $(-\infty, +\infty)$; não possui ponto de inflexão.

b) crescente em $(-8, 1)$; decrescente em $(-\infty, -8) \cup (1, +\infty)$; ponto máximo relativo: $\left(1, \frac{217}{2}\right)$; ponto mínimo relativo: $(-8, -256)$; côncava para cima em $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$; côncava para baixo em$\left(-\frac{7}{2}, +\infty\right)$; ponto de inflexão: $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{295}{4}\right)$

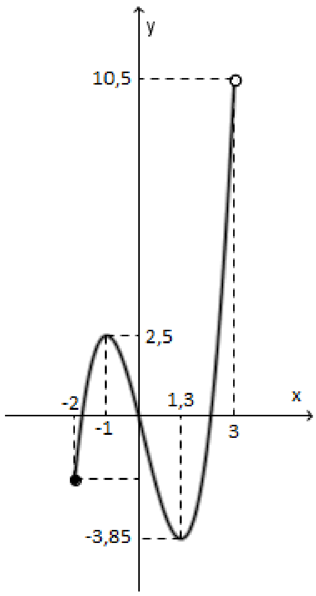
c) crescente em $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; decrescente em $(1, 2)$; ponto máximo relativo: $(1, 2)$; ponto mínimo relativo: $(2, 1)$; côncava para cima em $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; côncava para baixo em$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$; ponto de inflexão: $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) crescente em $(-5, 3)$; decrescente em $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$; ponto máximo relativo: $(3, 162)$; ponto mínimo relativo: $(-5, -94)$; côncava para cima em $(-\infty, -1)$; côncava para baixo em $(-1, +\infty)$; ponto de inflexão: $(-1, 34)$

e) crescente em $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$; decrescente em $(-1, 2)$; ponto máximo relativo: $(-1, 45)$; ponto mínimo relativo: $(2, 18)$; côncava para cima em $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; côncava para baixo em$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; ponto de inflexão: $\left(\frac{1}{2}, \frac{63}{2}\right)$

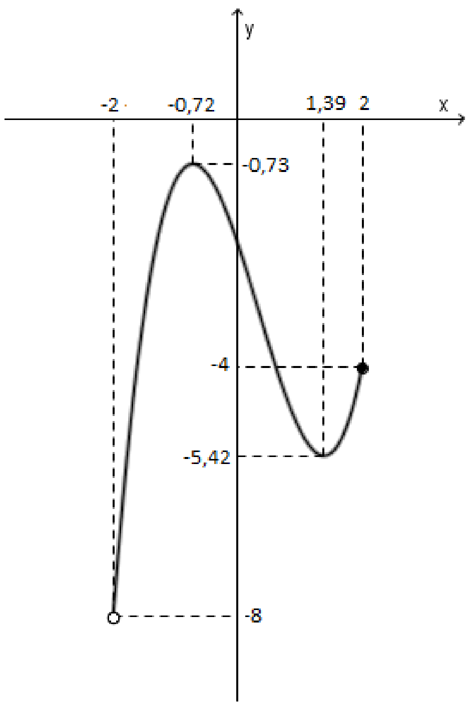
f) crescente em $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$; decrescente em $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; ponto máximo relativo: $(0, 2)$; pontos mínimos (absolutos): $(-1, 1)$ e $(1, 1)$; côncava para cima em $(-\infty; -0{,}577) \cup (0{,}577; +\infty)$; côncava para baixo em $(-0{,}577;\ 0{,}577)$; pontos de inflexão: $(-0{,}577;\ 1{,}444)$ e $(0{,}577;\ 1{,}444)$

2) crescente: $(-2, -1) \cup \left(\frac{4}{3}, 3\right)$
decrescente:$\left(-1, \frac{4}{3}\right)$
côncava para cima:$\left(\frac{1}{6}, 3\right)$
côncava para baixo:$\left[-2, \frac{1}{6}\right)$
ponto de inflexão:$\left(\frac{1}{6}, -0{,}676\right)$
máximo relativo: $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$
mínimo relativo: $(-2, -2)$
máximo absoluto: não há
mínimo absoluto: $\left(\frac{4}{3}, -\frac{77}{20}\right)$



3) crescente: $\left[-2, -\frac{4}{3}\right) \cup (3, 6)$
decrescente:$\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$
côncava para cima:$\left(\frac{5}{6}, 6\right)$
ıcava para baixo:$\left[-2, \frac{5}{6}\right)$
ponto de inflexão:$\left(\frac{5}{6}, -7{,}16\right)$
máximo relativo: $\left(-\frac{4}{3};\ 13{,}185\right)$
mínimo relativo: $(-2; 10)$
máximo absoluto: não há
mínimo absoluto: $(3; -27{,}5)$

4) crescente: $[-2; -0{,}72) \cup (1{,}39; 2]$
decrescente:$(-0{,}72; 1{,}39)$
côncava para cima:$\left(\frac{1}{3}, 2\right)$
côncava para baixo:$\left(-2, \frac{1}{3}\right)$
ponto de inflexão:$\left(\frac{1}{3};\ -3{,}07\right)$
máximo relativo: $(2, -4)$
mínimo relativo: $(1{,}39; -5{,}42)$
máximo absoluto:$(-0{,}72; -0{,}73)$
mínimo absoluto: não há



PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Durante o semestre tivemos oportunidade de conhecer muitos problemas cuja resolução passou pelo uso da derivada. Nessa últimaaula, trabalharemos em contextos cujo objetivo é analisar numa função o valor de máximo ou o valor de mínimo.

Exemplos:

1) Precisamos cercar um jardim retangular com 100 m de cerca que sobraram de uma reforma. Qual é a maior área que podemos cercar com tal quantidade de cerca?

2) Um canil retangular será construído a partir de 6m de cerca que sobraram de uma reforma. Se será aproveitado o muro da residência na construção como um dos lados, quais as dimensões do canil para que a área seja máxima?

3) Um departamento de estradas de rodagem está planejando fazer uma área de descanso para motoristas, à beira de uma rodovia movimentada. O terreno deve ser retangular, com uma área de 5.000 m^2 e deve ser cercado nos três lados que não dão para a rodovia. Qual o menor comprimento da cerca necessária para a obra?

4) A partir de uma folha de papelão medindo 12cm por 12cm será construída uma caixa aberta recortando-se pequenos quadrados iguais dos 4 cantos da folha. Escreva:
a) o intervalo de variação da medida do lado do quadrado a ser recortado.
b) o volume *V* da caixa em função do lado *x* do quadrado a ser recortado.
c) o volume máximo que a caixa pode comportar.

5) Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900 m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3000 m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

6) Uma lata cilíndrica de óleo tem capacidade para 1 litro (1000cm^3). Encontre as dimensões (raio da base e altura) que minimizam o custo com metal para fabricar a lata.

Exercícios

1) Um terreno retangular deve ser cercado de duas formas. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa R$ 3,00 o metro, enquanto os dois lados restantes recebem uma cerca padrão de R$ 2,00 o metro. Quais são as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com R$ 6000,00?

2) Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de metal de 3dm por 8dm, cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Ache o volume máximo que uma caixa dessas pode ter.

3) Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2250 cm^3. O material para a base e a tampa do recipiente custa R$ 2,00 por cm^2 e o dos lados R$ 3,00 por cm^2. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.

4) Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2000 cm^3. O material da base e da tampa é o dobro do custo dos lados. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.

5) Uma lata cilíndrica aberta no topo deve conter 500 cm^3 de líquido. Ache a altura e o raio que minimizam a quantidade de material necessário para confeccionar a lata.

6) Uma indústria química vende ácido sulfúrico a granel a R$ 100,00 o galão. Se o custo de produção total diário em reais para x unidades for $C(x) = 100000 + 50x + 0{,}0025x^2$, quantos galões de ácido sulfúrico devem ser fabricados para maximizar o lucro?

7) Um fazendeiro tem 2400 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

8) As margens de cima e de baixo de um pôster têm 6cm, e as margens laterais medem 4cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

9) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500m de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2.000 a oeste da central. O custo da obra através do rio é de R$ 640,00 por metro, enquanto em terra custa R$312,00 por metro. Qual o custo mínimo para se instalar a rede de água potável?

RESPOSTAS

1) $500\ m$ por $750\ m$
2) $V = 7{,}4\ dm^3$
3) $10\ cm$ por $15\ cm$
4) $10\ cm$ por $20\ cm$
5) $r = 5{,}42\ cm$ e $h = 5{,}42\ cm$
6) 7000 galões
7) $600\ m$ por $1200\ m$
8) $24\ cm$ por $36\ cm$
9) R$ 903.399,35