



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
ENGENHARIA FLORESTAL
DENDROMETRIA (40219916)



Relação Hipsométrica

Prof. Gabriel Agostini Orso
gabrielorso16@gmail.com

2. Relação hipsométrica (relação altura-diâmetro)

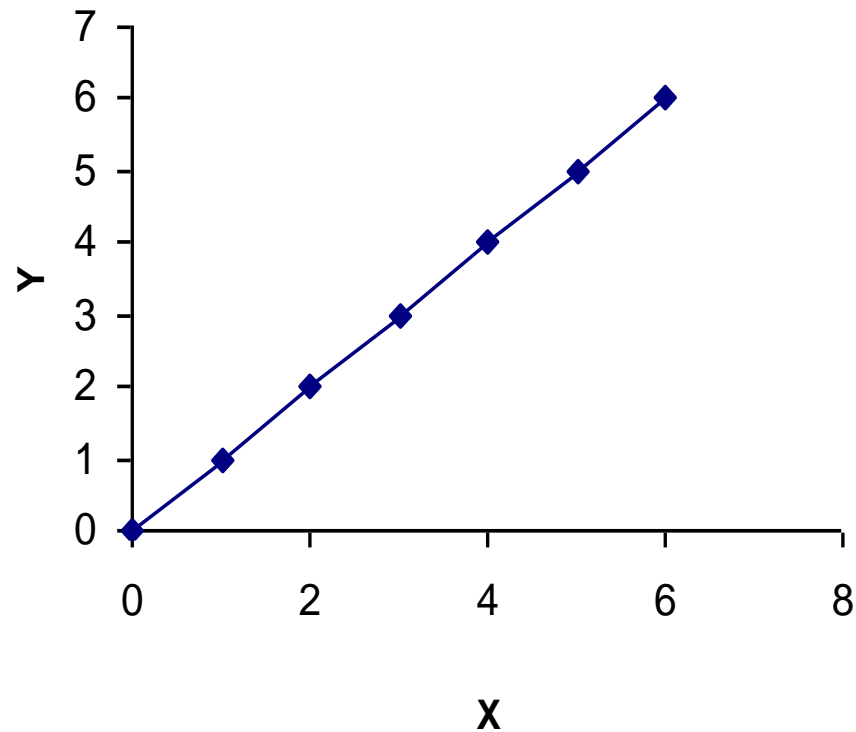
A relação entre a altura e o diâmetro de uma árvore é denominada relação hipsométrica.

Em populações com árvores de grande porte e/ou adensadas, a variável altura é difícil de ser mensurada, elevando muito o tempo e o custo da coleta dos dados do inventário.

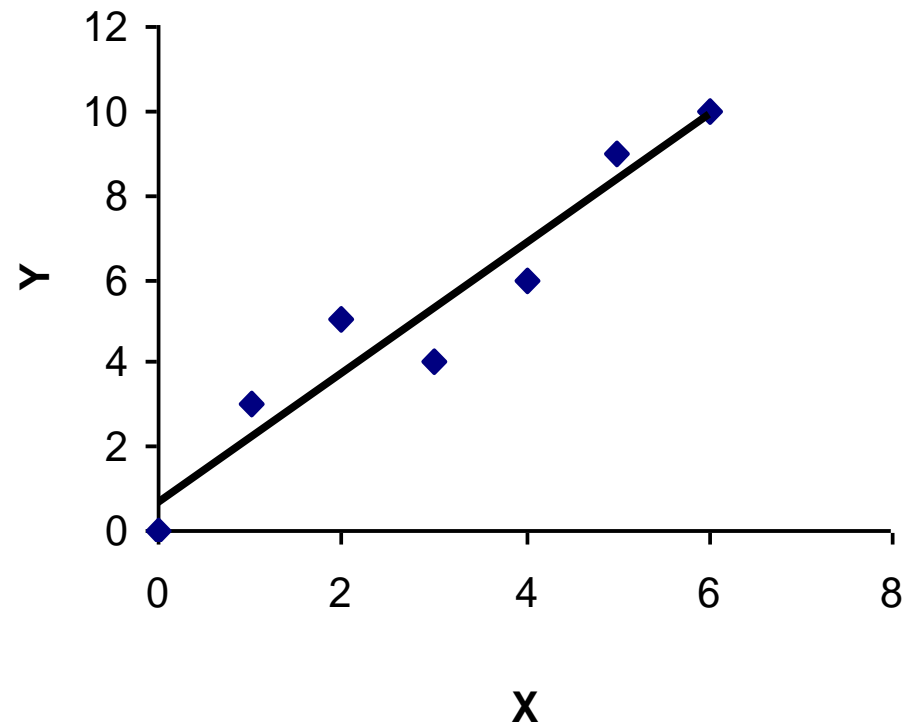
Sendo assim, uma relação hipsométrica pode permitir estimar boa parte das alturas de uma amostra, significando um grande ganho prático na realização de inventários florestais.

2.1 – Análise de regressão

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$



$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$



2.1 Modelos empregados em relações hipsométricas

$$h = \beta_0 + \beta_1 \text{Log}(d) + \varepsilon \quad (\text{HERICKSEN, 1950})$$

$$h = \beta_0 + \beta_1 / D^2 + \varepsilon \quad (\text{ASSMANN, 1952})$$

$$\text{Ln}(h) = \beta_0 + \beta_1 \text{Log}(d) + \varepsilon \quad (\text{STOFELLS, 1953})$$

$$\text{Ln}(h) = \beta_0 + \beta_1 / D + \varepsilon \quad (\text{CURTIS, 1967})$$

⇒ O método de mínimos quadrados ordinários

Este é um método de **estimação** muito **empregado** para estimar **parâmetros** de modelos de **regressão**. Seu objetivo principal consiste em **minimizar** a **soma de quadrados dos erros**, tal como será demonstrado a seguir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-1) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-X_i) = 0 \quad (5)$$

Dividindo-se (4) e (5) por -2, tem-se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) X_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

(8)

Substituindo (8) em (7) e desenvolvendo a expressão, tem-se:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n}} \quad (9)$$

EQUAÇÃO DE REGRESSÃO AJUSTADA

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X + ei$$

ANÁLISE DE VARIÂNCIA DA REGRESSÃO (ANOVA)

| <i>FV</i> | <i>GL</i> | <i>SQ</i> | <i>QM</i> | FCalc. |
|------------------|-----------|--|---------------------|-----------|
| Regressão | $p-1$ | $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ | $SQReg/GLReg (V_1)$ | V_1/V_2 |
| Resíduo | $n - p$ | $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2$ | $SQRes/GLRes (V_2)$ | |
| Total | $n - 1$ | $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ | | |

em que:

n = número total de dados;

p = número de variáveis independentes do modelo;

Y_i = valores observados para Y ;

\hat{Y} = valores estimados de Y pela regressão;

\bar{Y} = valor médio de Y .

Cálculo da soma de quadrados:

- Soma de Quadrados do Total ($SQTot$)

$$SQTot = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2}{n}$$

- Soma de Quadrados da Regressão ($SQReg$)

$$SQReg = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}{n} \right) \quad \text{ou}$$

$$SQ_{Reg} = \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)}{n} \right)$$

- Soma de Quadrados do Residuo (**SQRes**)

$$SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Reg}$$

As hipóteses estatísticas testadas pelo teste F

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

Se o valor de F calculado for menor do que o valor tabelado obtido em uma tabela de F a um determinado nível de probabilidade α com $(1; n - 2)$ graus de liberdade, não se rejeita H_0 .

Em termos práticos, se F calculado $> F$ tabelado, então a regressão existe, ou seja, variações ocorridas em Y podem ser explicadas pelas variações ocorridas em X de acordo com a equação ajustada em um nível α de significância.

⇒ Medidas de precisão da equação ajustada:

- **Coeficiente de Determinação (R^2):** Informa a percentagem da variação dos dados observados em torno da média que está sendo explicada pela equação ajustada.

$$R^2 (\%) = \frac{SQ_{Reg}}{SQ_{Tot}} 100 \quad \rightarrow \quad 0 < R^2 \leq 100$$

- **Erro Padrão da Estimativa ($S_{y.x}$):** Indica o erro médio absoluto cometido, na unidade original da variável, associado ao uso da equação.

$$S_{Y.X} = \pm \sqrt{QM_{Res}} = \sqrt{\frac{SQ_{Res}}{n - p}}$$

- **Erro Padrão Relativo ($S_{y.x}(\%)$):** Diferente do erro padrão da estimativa, o erro padrão relativo indica o erro médio relativo da variável associado ao uso da equação.

$$S_{Y.X} (\%) = \pm \frac{S_{Y.X}}{\bar{Y}} 100$$

3.2 – Exemplo

| Árv. | d | h |
|------|------|------|
| 1 | 20,7 | 21,3 |
| 2 | 19,4 | 17,3 |
| 3 | 20,5 | 18 |
| 4 | 24,5 | 20,5 |
| 5 | 22,8 | 20,1 |
| 6 | 20,5 | . |
| 7 | 20,5 | 18,2 |
| 8 | 28,2 | 22 |
| 9 | 18,3 | . |
| 10 | 19,4 | 18,7 |
| 11 | 25,3 | 20,1 |
| 12 | 25,8 | 21,1 |
| 13 | 22,3 | 18,8 |
| 14 | 22,9 | . |

| Árv. | d | h |
|------|------|------|
| 15 | 21,8 | 20,9 |
| 16 | 18,8 | . |
| 17 | 19,1 | 19,7 |
| 18 | 24,4 | 21,3 |
| 19 | 22,0 | . |
| 20 | 18,3 | 19,3 |
| 21 | 18,3 | . |
| 22 | 17,4 | . |
| 23 | 18,3 | . |
| 24 | 28,7 | 23 |
| 25 | 22,0 | . |
| 26 | 21,3 | . |
| 27 | 21,7 | . |
| 28 | 21,2 | . |

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

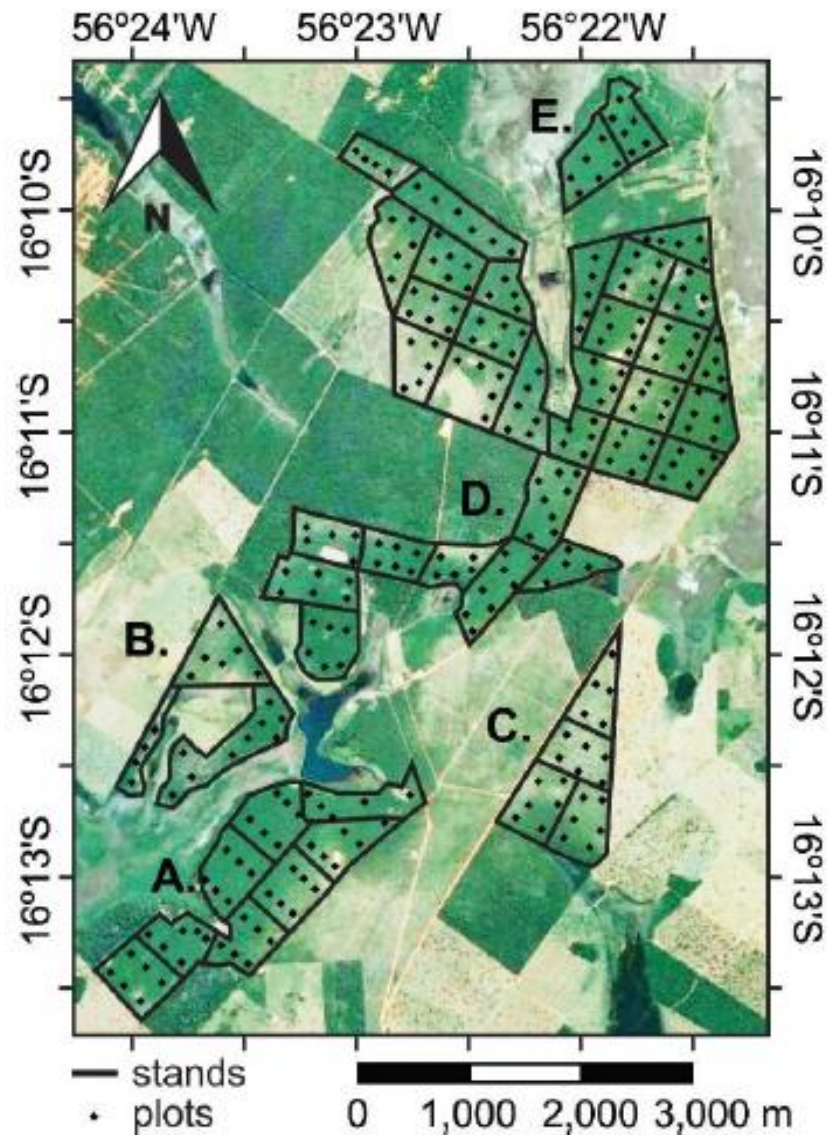
$$SQ_{Tot} = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n}$$

$$SQ_{Reg} = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} \right)$$

$$SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Reg}$$

Povoamento de Teca

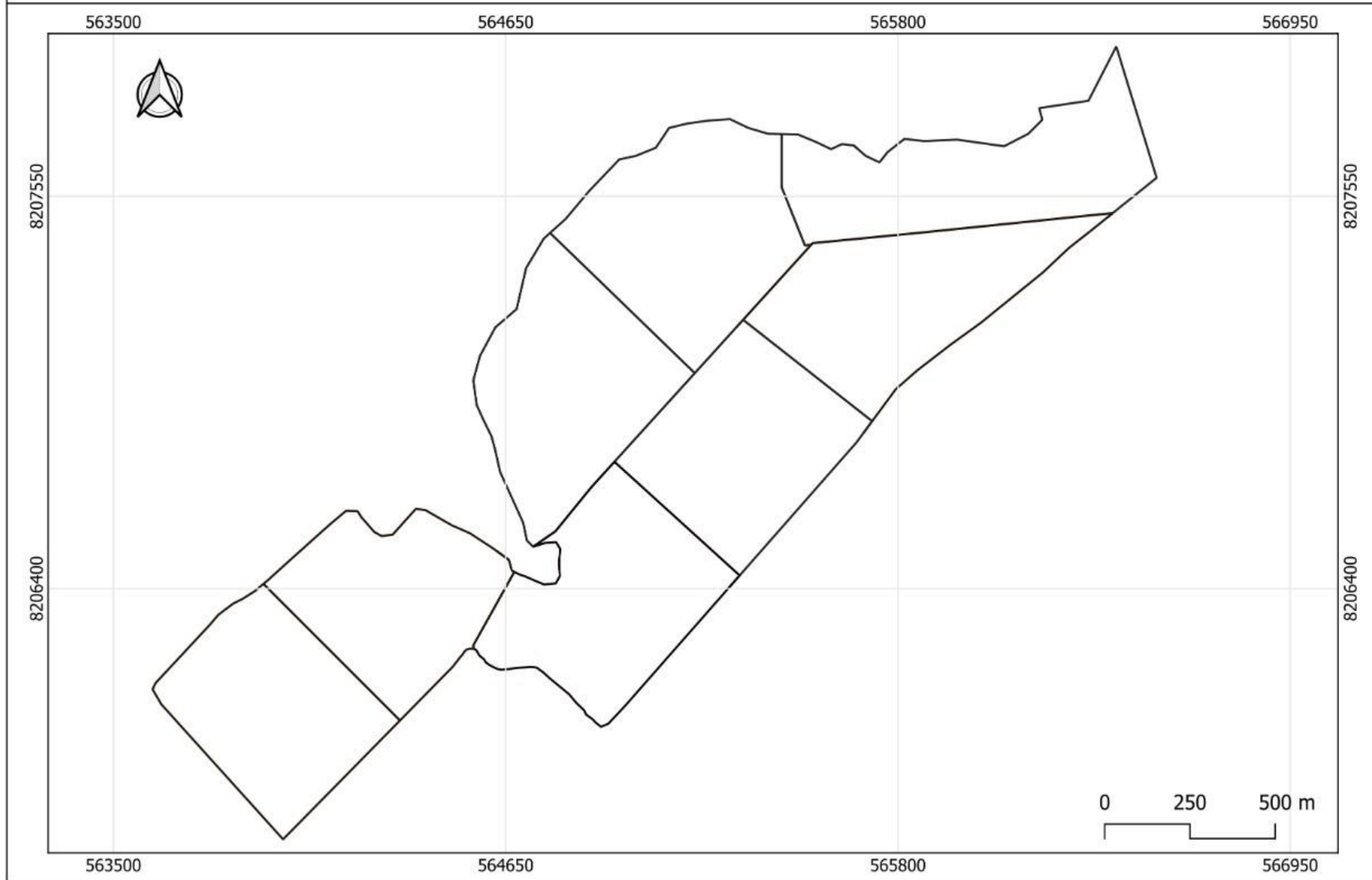
Área total = 1.260 ha



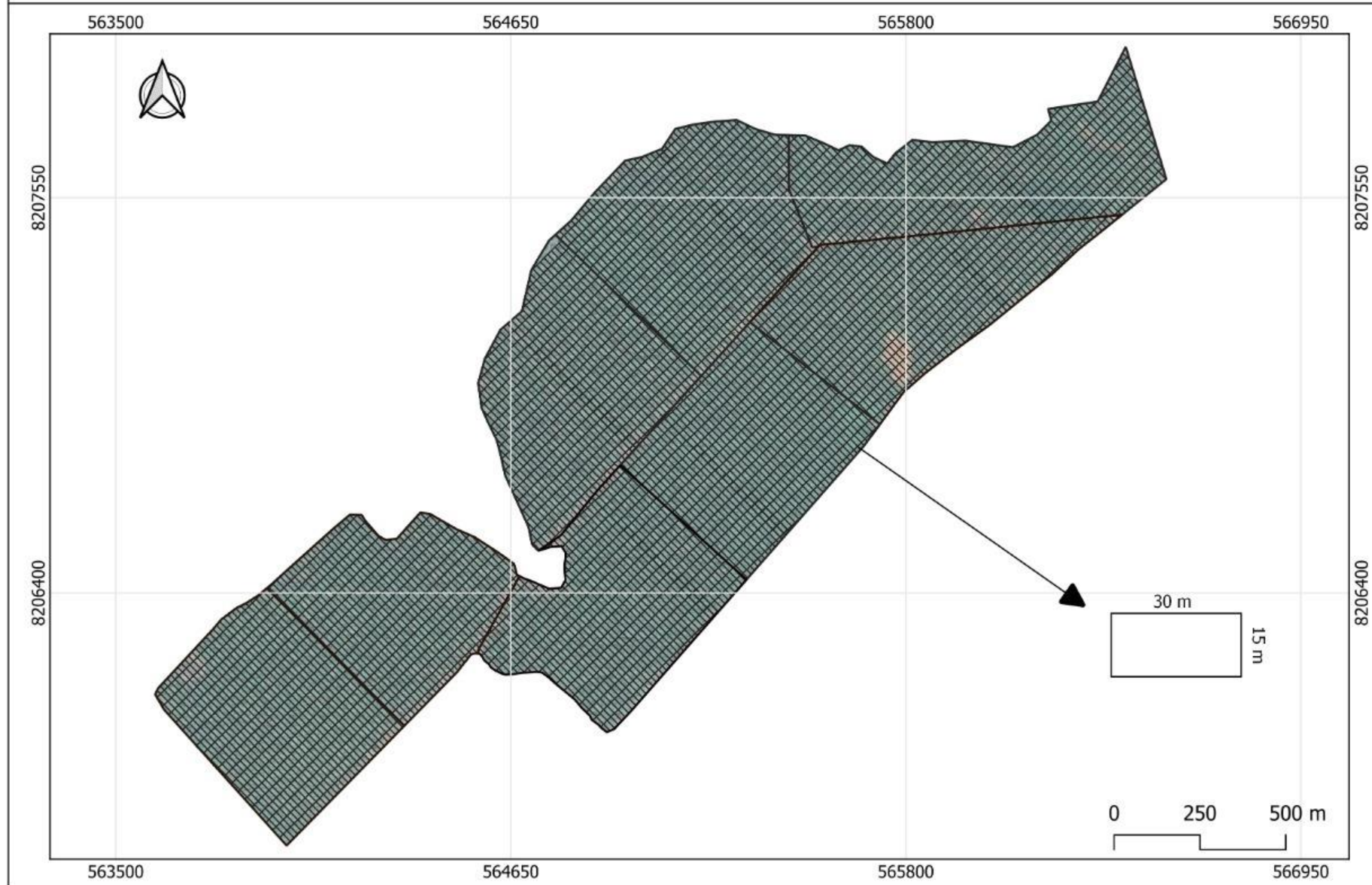
Povoamento de Teca

Área total = 223,1571 ha

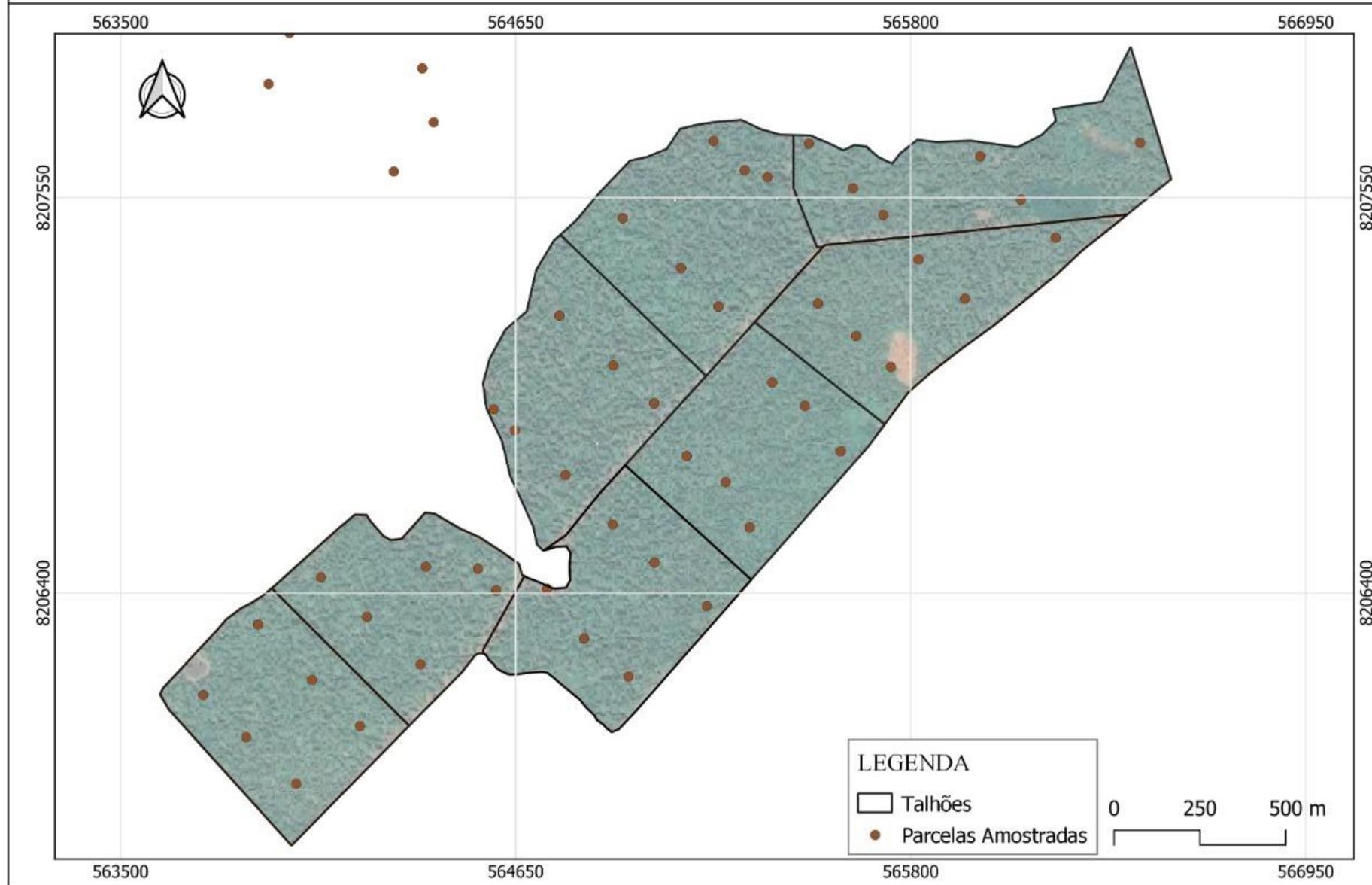
Croqui do Talhão A



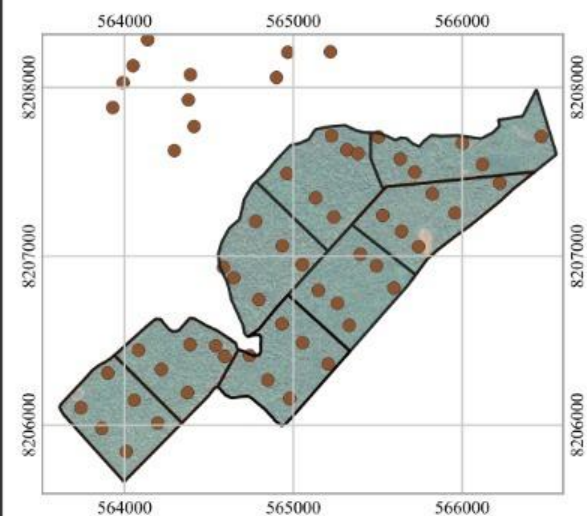
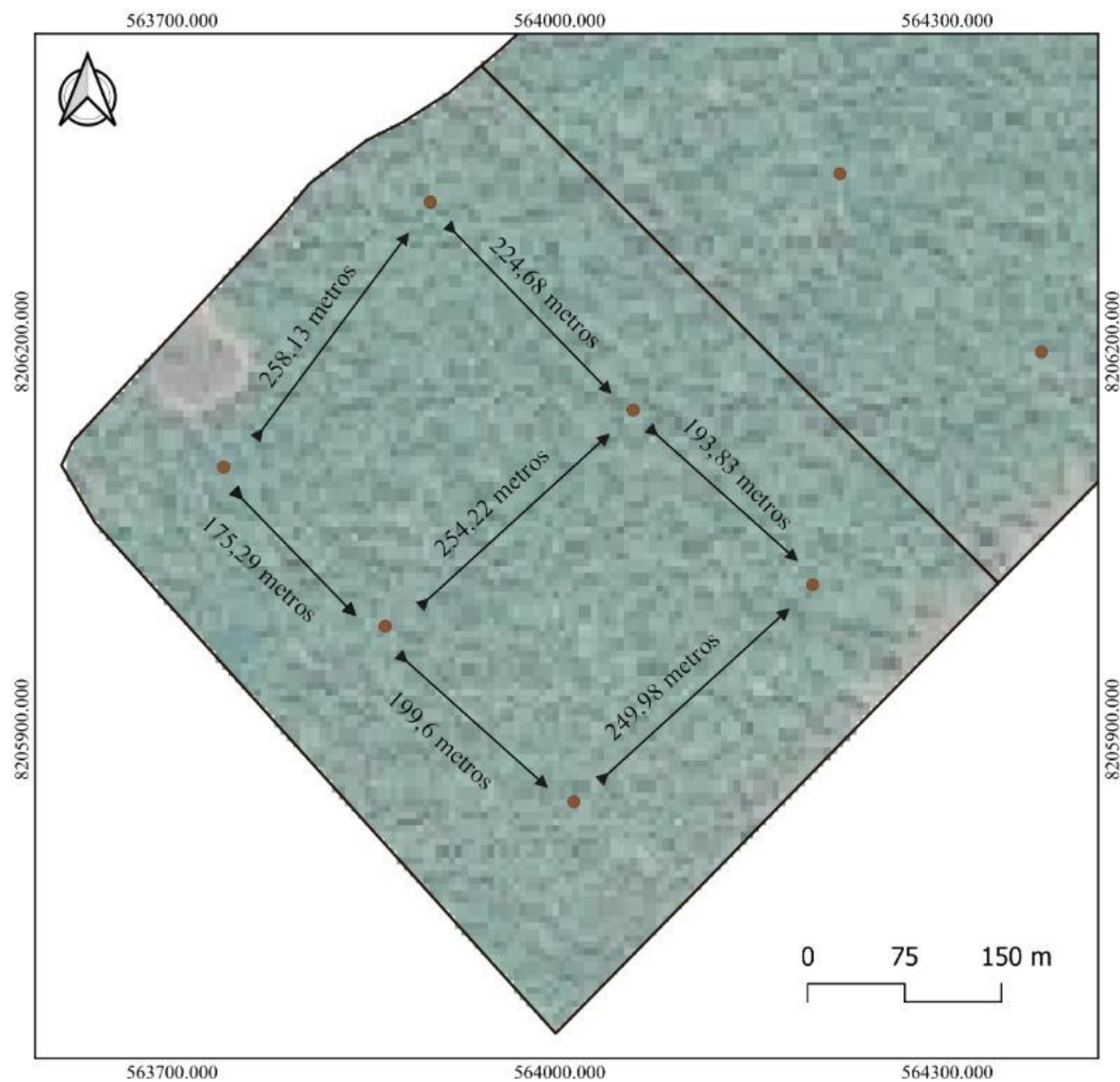
Talhão A da Fazenda - Mapa de divisão dos talhões em parcelas (15x30m)



Talhão A da Fazenda -Mapa das Parcelas Amostras (15x30m)



Talhão A da Fazenda -Mapa das Distância entre as Parcelas Amostras (15x30m)



LEGENDA

- Perímetro dos talhão
- Parcelas Amostras

3.2 – Exemplo

| Árv. | d | h |
|------|------|------|
| 1 | 20,7 | 21,3 |
| 2 | 19,4 | 17,3 |
| 3 | 20,5 | 18 |
| 4 | 24,5 | 20,5 |
| 5 | 22,8 | 20,1 |
| 6 | 20,5 | . |
| 7 | 20,5 | 18,2 |
| 8 | 28,2 | 22 |
| 9 | 18,3 | . |
| 10 | 19,4 | 18,7 |
| 11 | 25,3 | 20,1 |
| 12 | 25,8 | 21,1 |
| 13 | 22,3 | 18,8 |
| 14 | 22,9 | . |

| Árv. | d | h |
|------|------|------|
| 15 | 21,8 | 20,9 |
| 16 | 18,8 | . |
| 17 | 19,1 | 19,7 |
| 18 | 24,4 | 21,3 |
| 19 | 22,0 | . |
| 20 | 18,3 | 19,3 |
| 21 | 18,3 | . |
| 22 | 17,4 | . |
| 23 | 18,3 | . |
| 24 | 28,7 | 23 |
| 25 | 22,0 | . |
| 26 | 21,3 | . |
| 27 | 21,7 | . |
| 28 | 21,2 | . |

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$SQ_{Tot} = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n}$$

$$SQ_{Reg} = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} \right)$$

$$SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Reg}$$

| Árv. | d | h | $X_i Y_i$ | X_i^2 | Y_i^2 |
|----------------|-------|-------|-----------|---------|---------|
| 1 | 20,7 | 21,3 | 440,91 | 428,49 | 453,69 |
| 2 | 19,4 | 17,3 | 335,62 | 376,36 | 299,29 |
| 3 | 20,5 | 18 | 369 | 420,25 | 324 |
| 4 | 24,5 | 20,5 | 502,25 | 600,25 | 420,25 |
| 5 | 22,8 | 20,1 | 458,28 | 519,84 | 404,01 |
| 7 | 20,5 | 18,2 | 373,1 | 420,25 | 331,24 |
| 8 | 28,2 | 22 | 620,4 | 795,24 | 484 |
| 10 | 19,4 | 18,7 | 362,78 | 376,36 | 349,69 |
| 11 | 25,3 | 20,1 | 508,53 | 640,09 | 404,01 |
| 12 | 25,8 | 21,1 | 544,38 | 665,64 | 445,21 |
| 13 | 22,3 | 18,8 | 419,24 | 497,29 | 353,44 |
| 15 | 21,8 | 20,9 | 455,62 | 475,24 | 436,81 |
| 17 | 19,1 | 19,7 | 376,27 | 364,81 | 388,09 |
| 18 | 24,4 | 21,3 | 519,72 | 595,36 | 453,69 |
| 20 | 18,3 | 19,3 | 353,19 | 334,89 | 372,49 |
| 24 | 28,7 | 23 | 660,1 | 823,69 | 529 |
| $\sum_{i=1}^n$ | 361,7 | 320,3 | 7299,39 | 8334,05 | 6448,91 |
| \bar{X} | 22,6 | 20,02 | | | |

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$SQ_{Tot} = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n}$$

$$SQ_{Reg} = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} \right)$$

$$SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Reg}$$

| Árv. | d | h | $X_i Y_i$ | X_i^2 | Y_i^2 |
|----------------|-------|-------|-----------|---------|---------|
| 1 | 20,7 | 21,3 | 440,91 | 428,49 | 453,69 |
| 2 | 19,4 | 17,3 | 335,62 | 376,36 | 299,29 |
| 3 | 20,5 | 18 | 369 | 420,25 | 324 |
| 4 | 24,5 | 20,5 | 502,25 | 600,25 | 420,25 |
| 5 | 22,8 | 20,1 | 458,28 | 519,84 | 404,01 |
| 7 | 20,5 | 18,2 | 373,1 | 420,25 | 331,24 |
| 8 | 28,2 | 22 | 620,4 | 795,24 | 484 |
| 10 | 19,4 | 18,7 | 362,78 | 376,36 | 349,69 |
| 11 | 25,3 | 20,1 | 508,53 | 640,09 | 404,01 |
| 12 | 25,8 | 21,1 | 544,38 | 665,64 | 445,21 |
| 13 | 22,3 | 18,8 | 419,24 | 497,29 | 353,44 |
| 15 | 21,8 | 20,9 | 455,62 | 475,24 | 436,81 |
| 17 | 19,1 | 19,7 | 376,27 | 364,81 | 388,09 |
| 18 | 24,4 | 21,3 | 519,72 | 595,36 | 453,69 |
| 20 | 18,3 | 19,3 | 353,19 | 334,89 | 372,49 |
| 24 | 28,7 | 23 | 660,1 | 823,69 | 529 |
| $\sum_{i=1}^n$ | 361,7 | 320,3 | 7299,39 | 8334,05 | 6448,91 |
| \bar{X} | 22,6 | 20,02 | | | |

$$\hat{\beta}_1 = \frac{7299,39 - \frac{361,7 * 320,3}{16}}{8334,05 - \frac{361,7^2}{16}} = 0,372424$$

$$\hat{\beta}_0 = 20,02 - 0,372424 * 22,7 = 11,6037$$

$$SQ_{Tot} = 6448,91 - \frac{(320,3)^2}{16} = 36,9043$$

$$SQ_{Reg} = 0,372424^2 \left(\sum_{i=1}^n 8334,05 - \frac{361,7^2}{16} \right) = 21,8271$$

$$SQ_{Res} = 36,9043-21,8271=15,0772$$

| Árv. | d | h |
|------|------|------|
| 1 | 20,7 | 21,3 |
| 2 | 19,4 | 17,3 |
| 3 | 20,5 | 18 |
| 4 | 24,5 | 20,5 |
| 5 | 22,8 | 20,1 |
| 7 | 20,5 | 18,2 |
| 8 | 28,2 | 22 |
| 10 | 19,4 | 18,7 |
| 11 | 25,3 | 20,1 |
| 12 | 25,8 | 21,1 |
| 13 | 22,3 | 18,8 |
| 15 | 21,8 | 20,9 |
| 17 | 19,1 | 19,7 |
| 18 | 24,4 | 21,3 |
| 20 | 18,3 | 19,3 |
| 24 | 28,7 | 23 |

| <i>FV</i> | <i>GL</i> | <i>SQ</i> | <i>QM</i> | F _{Calc.} |
|------------------|-----------|-----------------|----------------|--|
| Regressão | <i>1</i> | 21,8271 | 21,8271 | 20,2684* |
| Resíduo | <i>14</i> | 15,07725 | 1,0769 | Ftab_(1;14;0,05)=4,60 |
| Total | <i>15</i> | 36,9043 | | |

$$R^2(\%) = \frac{SQ\;Re\;g}{SQ\;Tot} 100 = \frac{21,8271}{36,9043} * 100 = 54,16\%$$

$$S_{Y.X} = \pm \sqrt{QM\;Re\;s} = \pm 1,03774m$$

$$S_{Y.X}(\%) = \pm \frac{S_{Y.X}}{\bar{Y}} 100 = \pm 5,1835\%$$

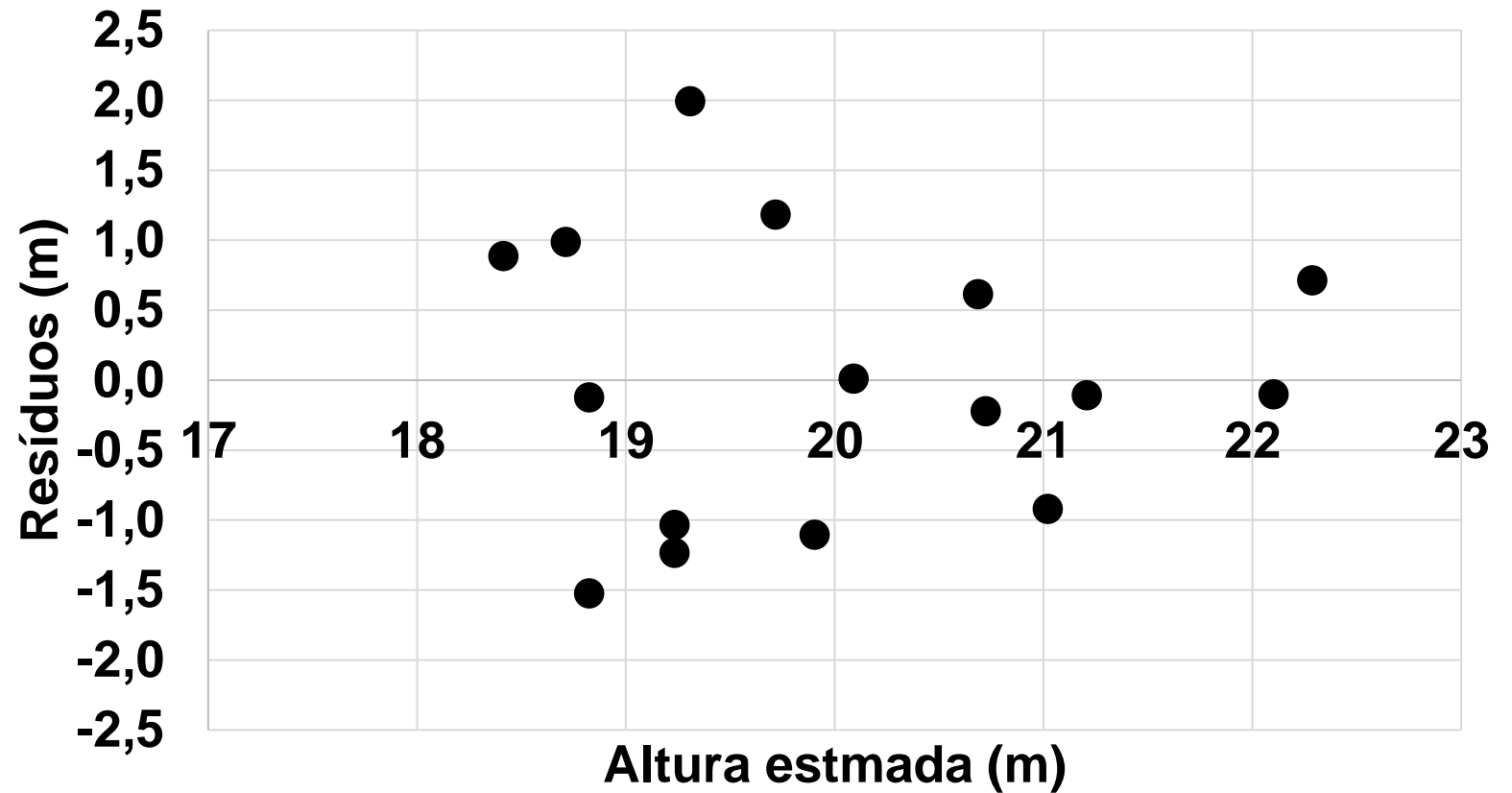
3.2 – Exemplo

| Árv. | d (cm) | h (m) | \hat{h} (m) | e (m) |
|------|-----------|----------|------------------|----------|
| 1 | 20,7 | 21,3 | 19,3 | 2,0 |
| 2 | 19,4 | 17,3 | 18,8 | -1,5 |
| 3 | 20,5 | 18,0 | 19,2 | -1,2 |
| 4 | 24,5 | 20,5 | 20,7 | -0,2 |
| 5 | 22,8 | 20,1 | 20,1 | 0,0 |
| 7 | 20,5 | 18,2 | 19,2 | -1,0 |
| 8 | 28,2 | 22,0 | 22,1 | -0,1 |
| 10 | 19,4 | 18,7 | 18,8 | -0,1 |
| 11 | 25,3 | 20,1 | 21,0 | -0,9 |
| 12 | 25,8 | 21,1 | 21,2 | -0,1 |
| 13 | 22,3 | 18,8 | 19,9 | -1,1 |
| 15 | 21,8 | 20,9 | 19,7 | 1,2 |
| 17 | 19,1 | 19,7 | 18,7 | 1,0 |
| 18 | 24,4 | 21,3 | 20,7 | 0,6 |
| 20 | 18,3 | 19,3 | 18,4 | 0,9 |
| 24 | 28,7 | 23,0 | 22,3 | 0,7 |

$$h = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * d$$

$$\hat{h} = 11,59964 + 0,372424 * d$$

Distribuições dos resíduos



3.2 – Exemplo

| Árv. | d | h |
|------|------|------|
| 1 | 20,7 | 21,3 |
| 2 | 19,4 | 17,3 |
| 3 | 20,5 | 18 |
| 4 | 24,5 | 20,5 |
| 5 | 22,8 | 20,1 |
| 6 | 20,5 | 19,2 |
| 7 | 20,5 | 18,2 |
| 8 | 28,2 | 22 |
| 9 | 18,3 | 18,4 |
| 10 | 19,4 | 18,7 |
| 11 | 25,3 | 20,1 |
| 12 | 25,8 | 21,1 |
| 13 | 22,3 | 18,8 |
| 14 | 22,9 | 20,1 |

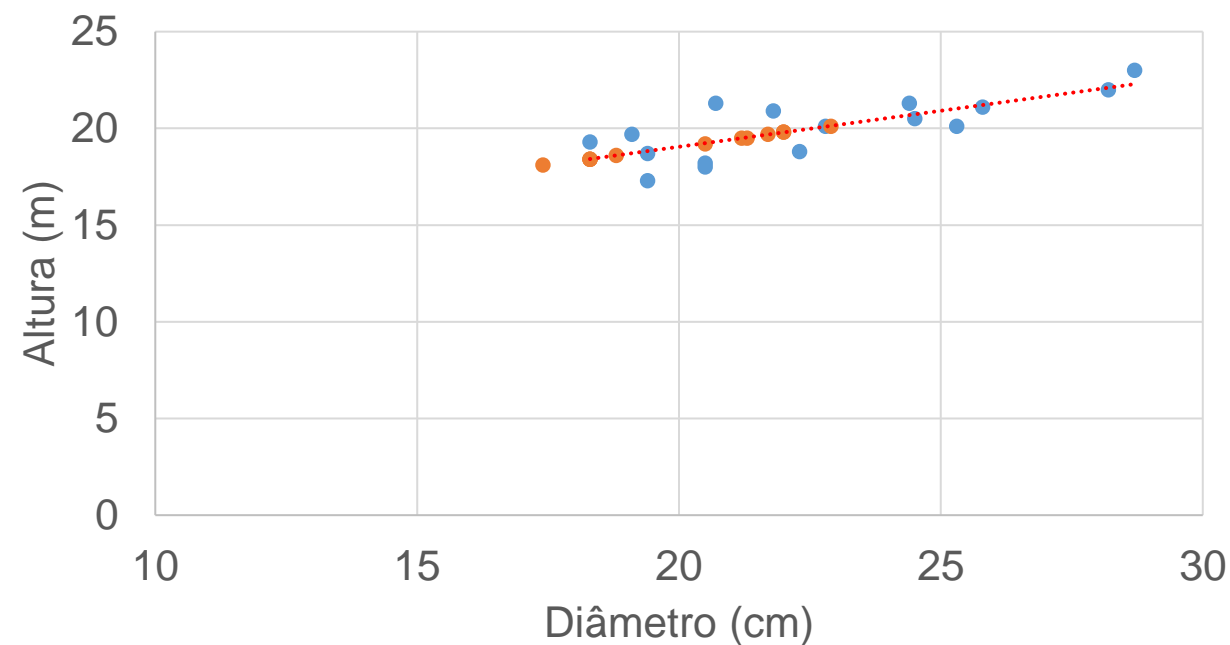
| Árv. | d | h |
|------|------|------|
| 15 | 21,8 | 20,9 |
| 16 | 18,8 | 18,6 |
| 17 | 19,1 | 19,7 |
| 18 | 24,4 | 21,3 |
| 19 | 22,0 | 19,8 |
| 20 | 18,3 | 19,3 |
| 21 | 18,3 | 18,4 |
| 22 | 17,4 | 18,1 |
| 23 | 18,3 | 18,4 |
| 24 | 28,7 | 23 |
| 25 | 22,0 | 19,8 |
| 26 | 21,3 | 19,5 |
| 27 | 21,7 | 19,7 |
| 28 | 21,2 | 19,5 |

$$h = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * d$$

$$\hat{h} = 11,59964 + 0,372424 * d$$

$$\hat{h}_6 = 11,59964 + 0,372424 * 20,5 = 19,2m$$

Relação altura-diâmetro



3.3 – Fatores que afetam a relação hipsométrica

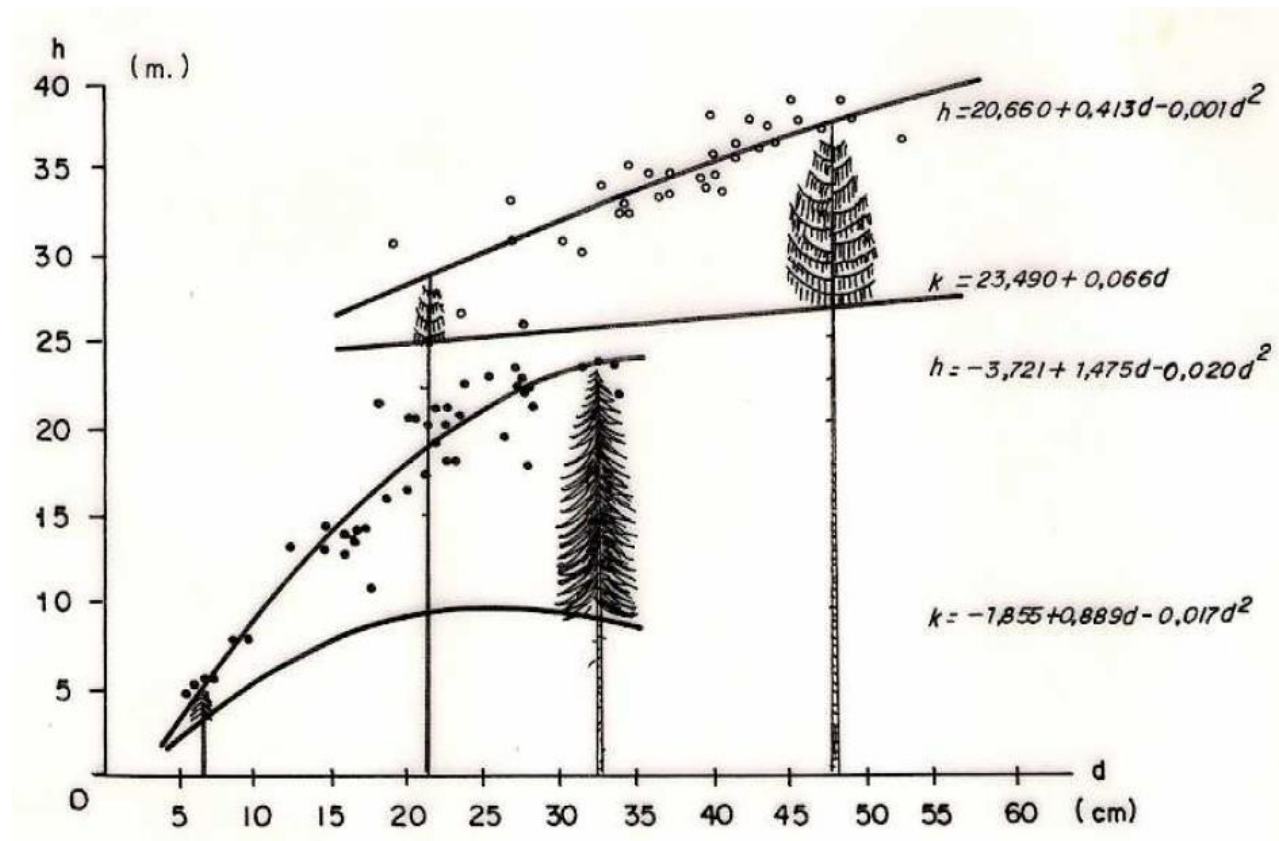
- ✓ Espécie;
- ✓ Idade;
- ✓ Sítio;
- ✓ Densidade;
- ✓ Posição sociológica.

Quanto mais homogêneo o povoamento, mais bem definida é a relação hipsométrica, e só tem sentido seu estudo dentro uma única espécie.

Relações hipsométricas em geral não funcionam bem em florestas nativas.

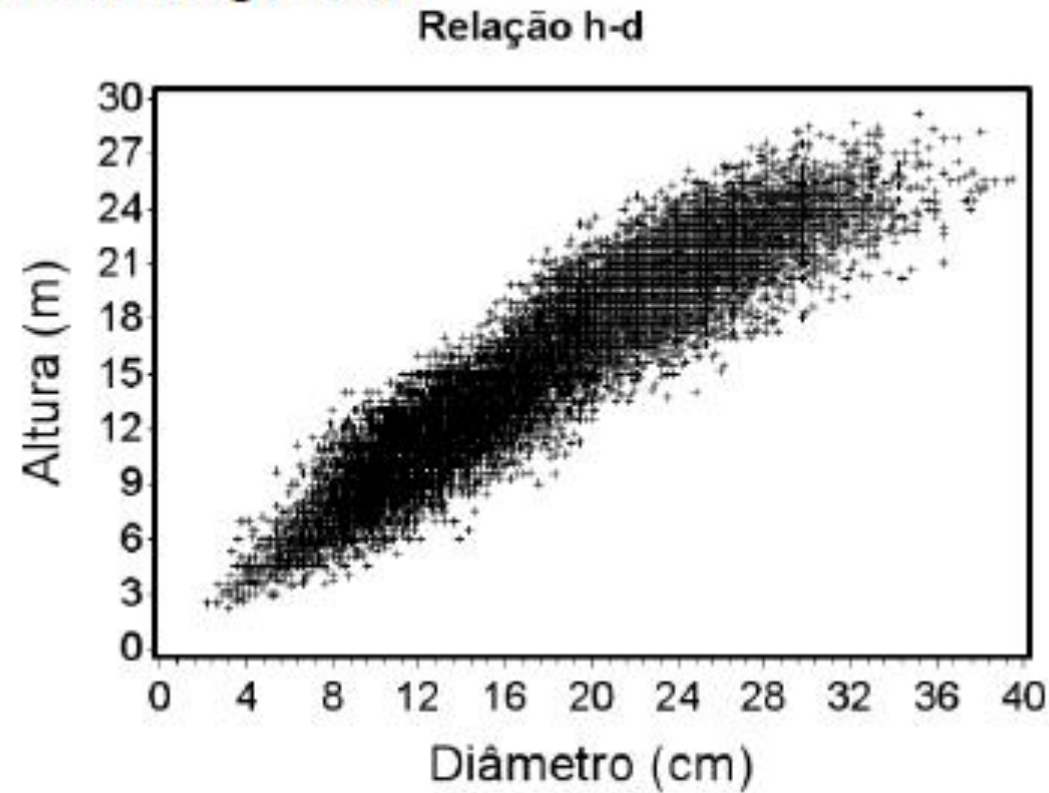
3.4 – Fatores que afetam a relação hipsométrica

✓ Espécies



3.4 Espécie

Figura 6 - Dispersão das alturas de árvores em função dos diâmetros a altura do peito para *Tectona grandis*

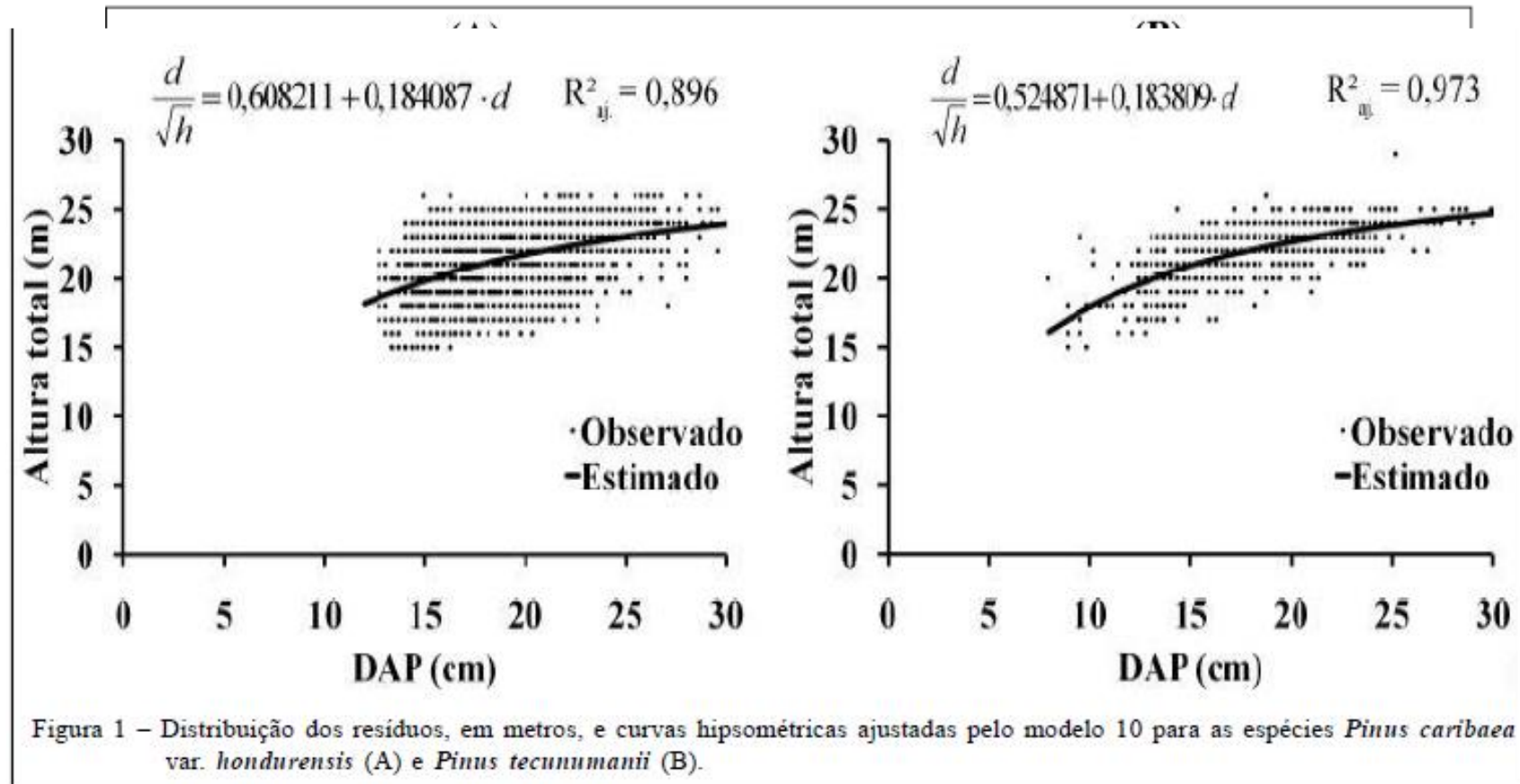


Favalessa (2018)



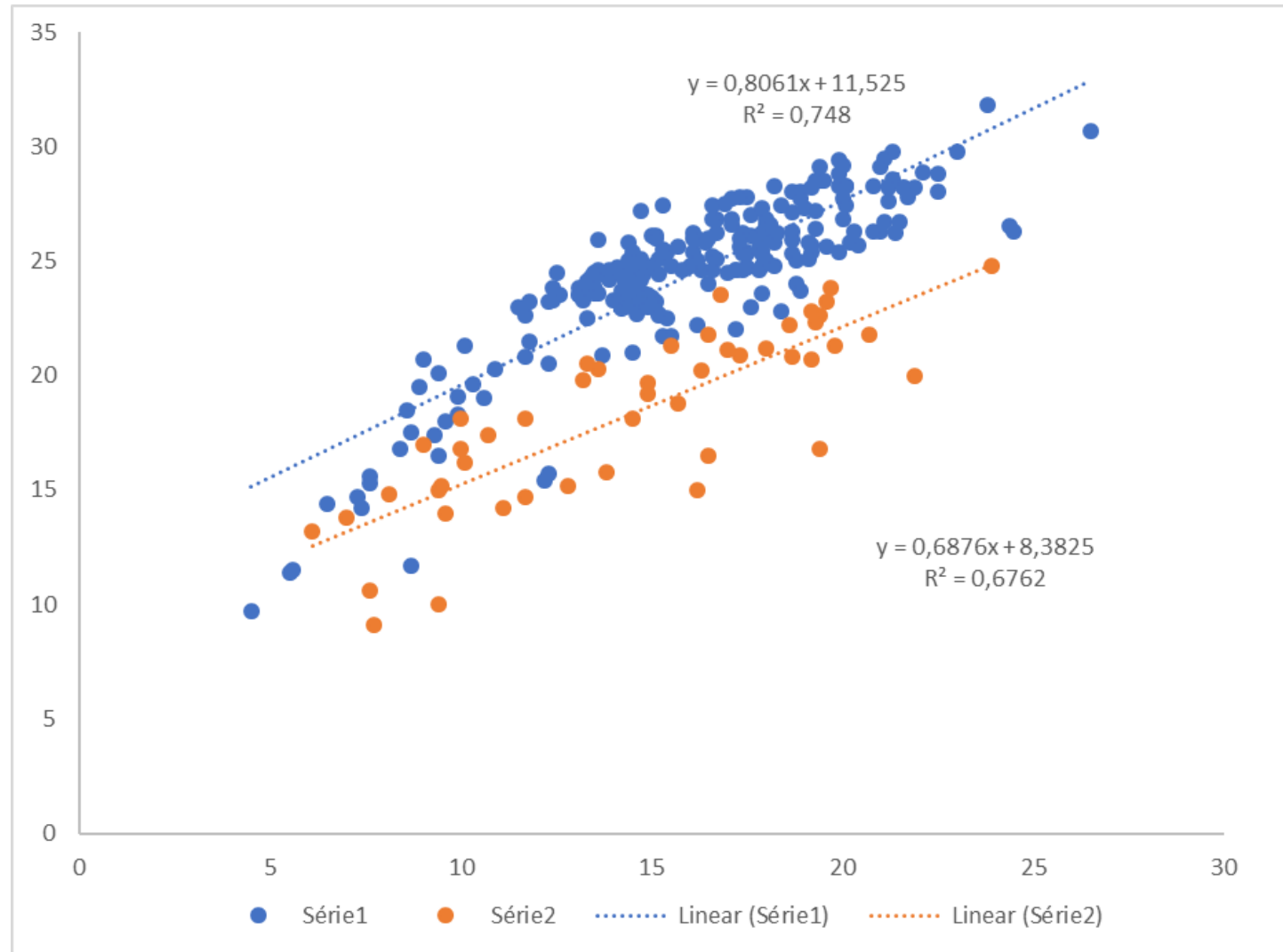
Fonte: <http://www.tecadobrasil.com.br/pt/>

3.4 Relação hipsométrica (relação altura-diâmetro) de *Pinus carbea* Var Hondurensis (A) e *Pinus tecunumanii* (B) em Rondônia



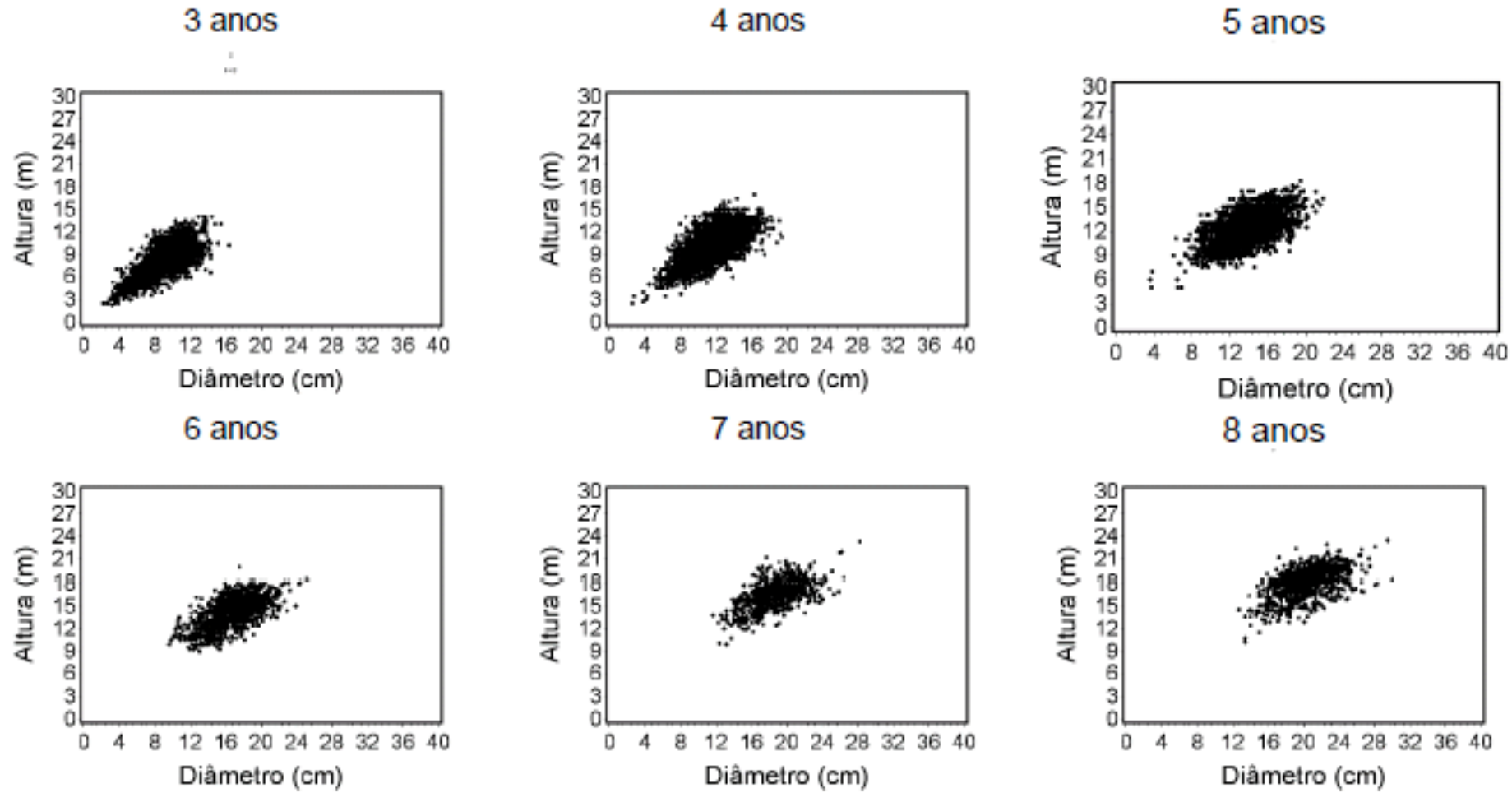
Donadoni et al. (2010)

3.4 Relação hipsométrica (relação altura-diâmetro) de “*Urograndis*” (Azul) e *Corimbya citriodora* (Laranja)

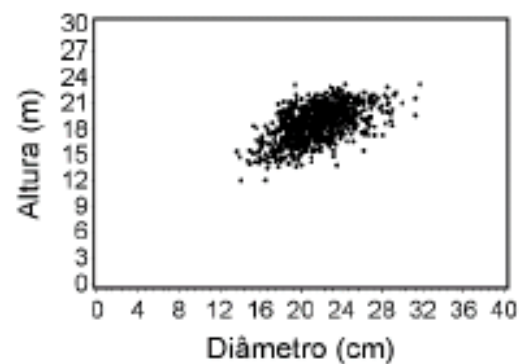


3.5 – Idade

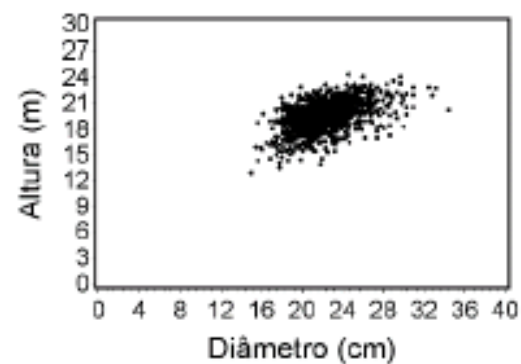
Figura 8 – Dispersão das alturas em função dos diâmetros a altura do peito por idade



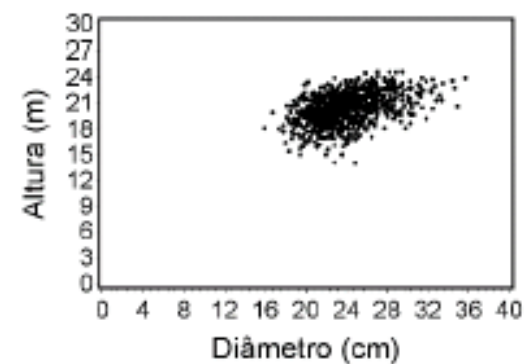
9 anos



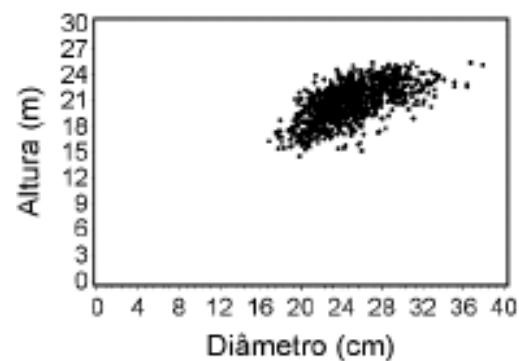
10 anos



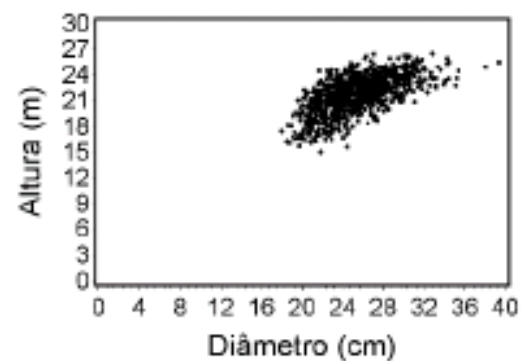
11 anos



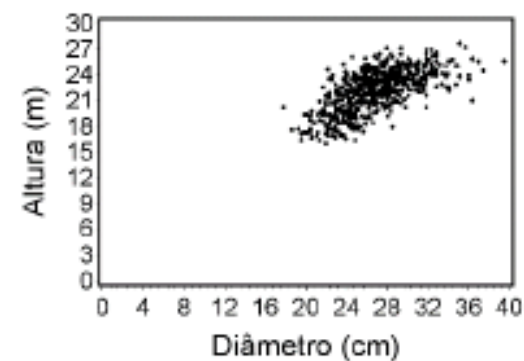
12 anos



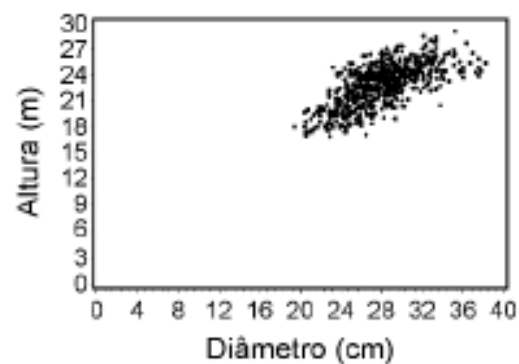
13 anos



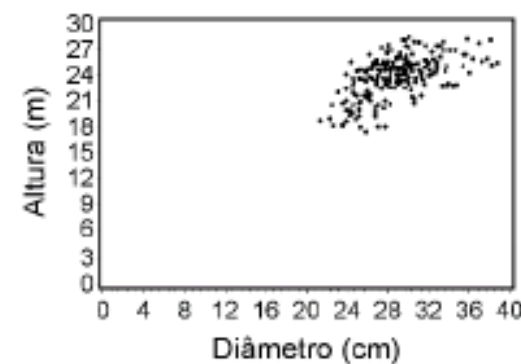
14 anos



15 anos



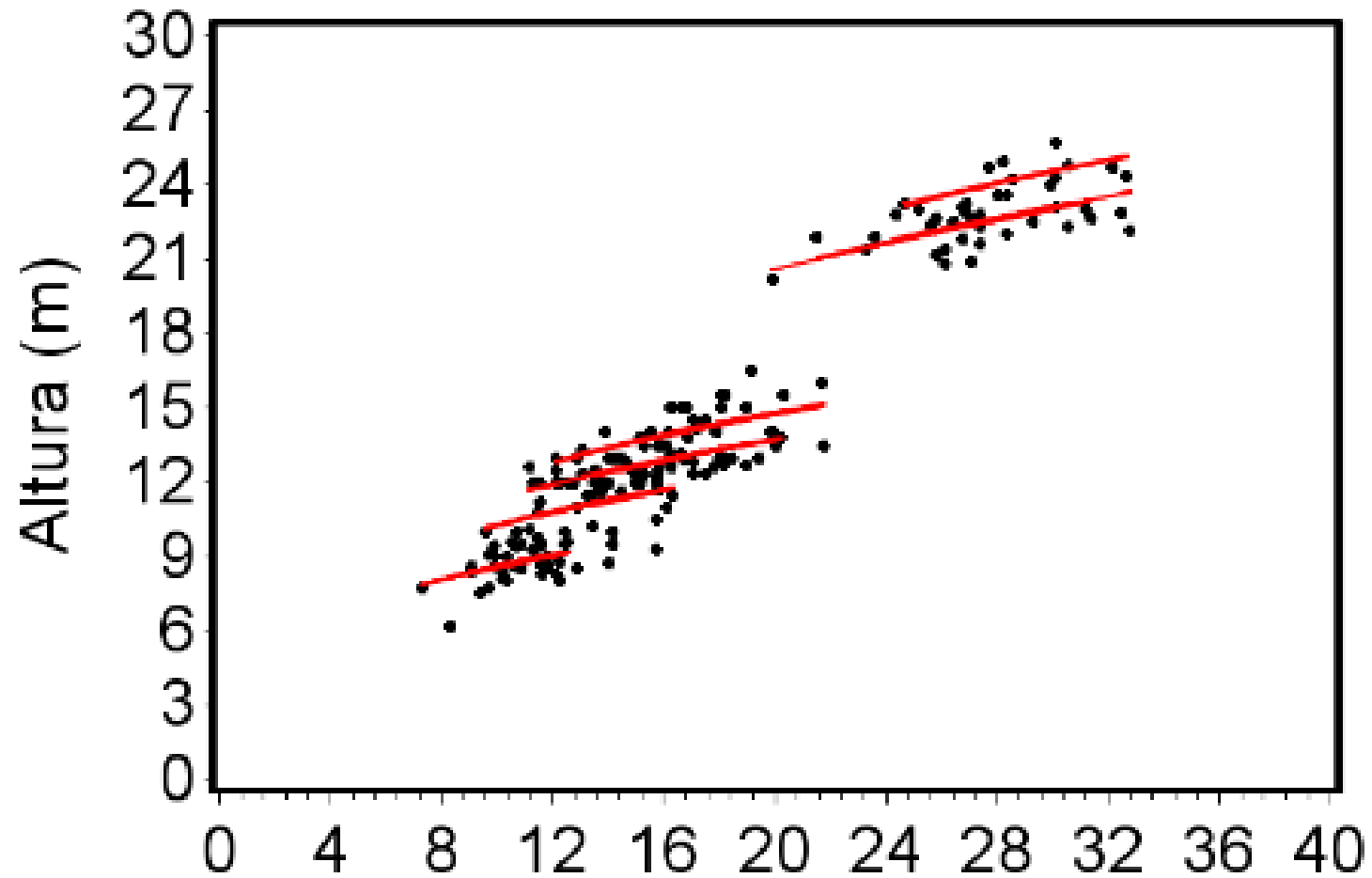
16 anos



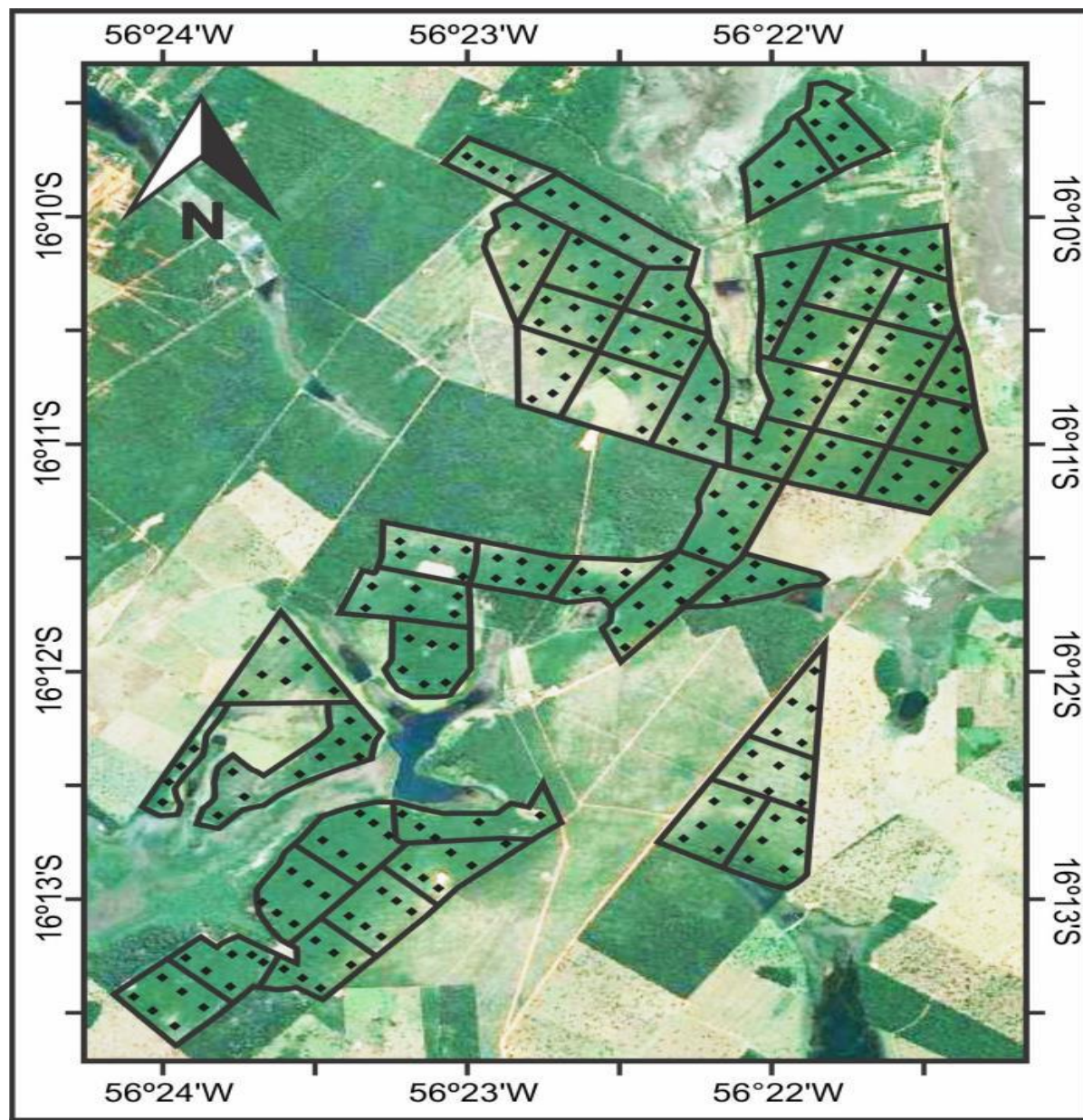
Fonte: O autor

Favalessa (2018)

3.5 – Idade



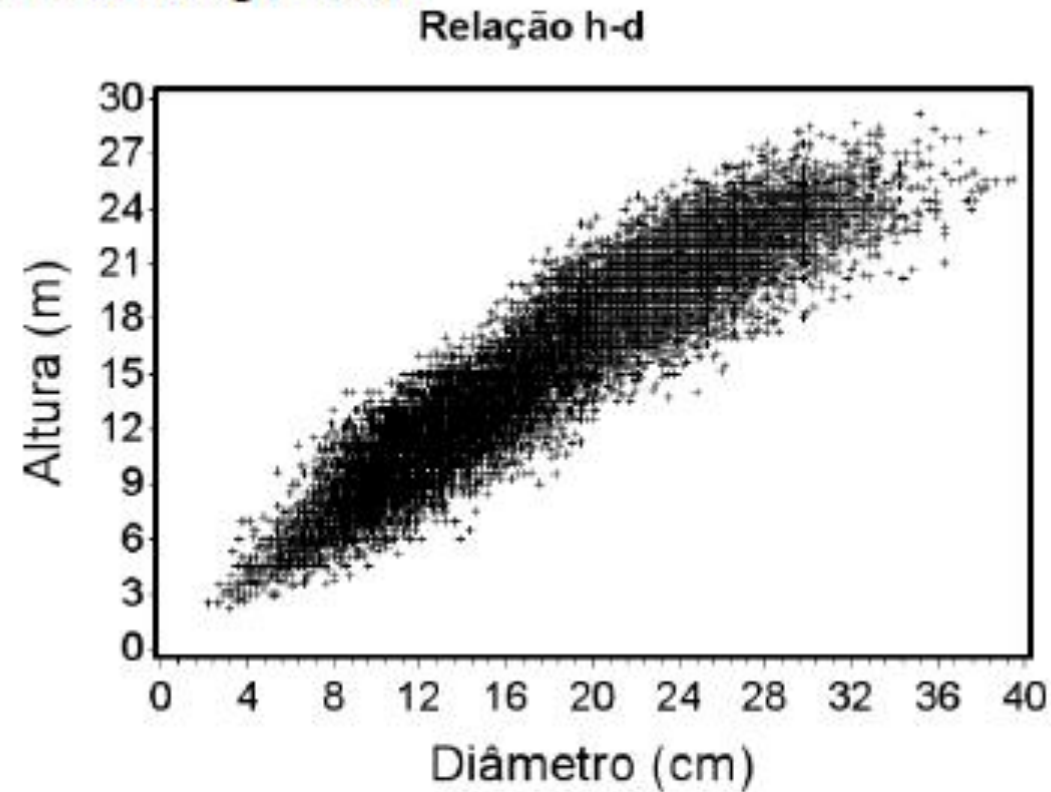
3.6 – Sítio



Pellisari (2015)

3.6 – Sítio

Figura 6 - Dispersão das alturas de árvores em função dos diâmetros a altura do peito para *Tectona grandis*



Favalessa (2018)

3.6 – Sítio

