UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
ENGENHARIA FLORESTAL
DENDROMETRIA (40219916)

Relação Hipsométrica

Prof. Gabriel Agostini Orso
gabrielorso16@gmail.com

2. Relação hipsométrica (relação altura-diâmetro)

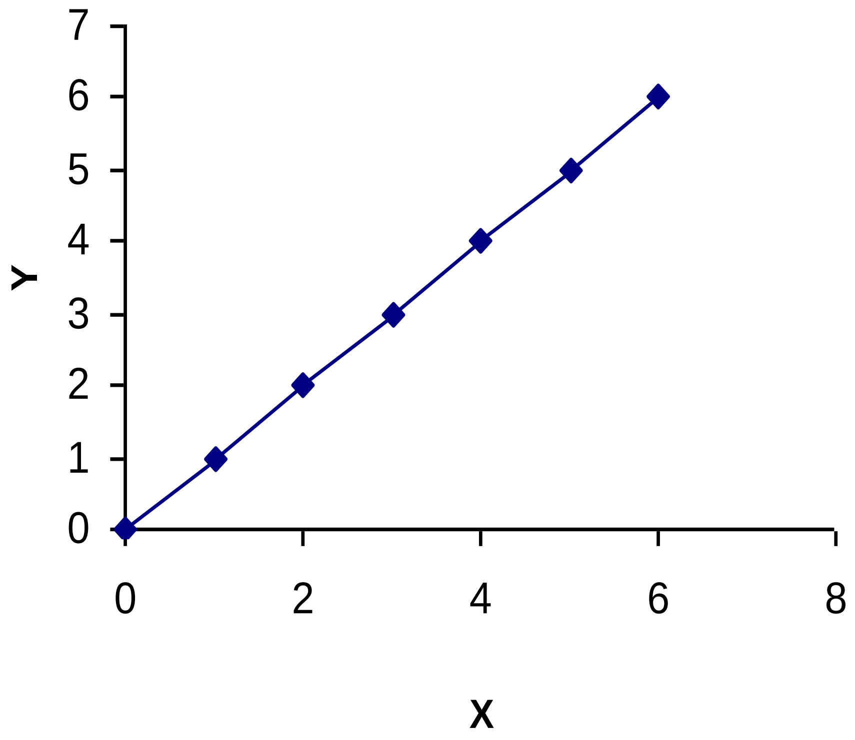
A relação entre a altura e o diâmetro de uma árvore é denominada relação hipsométrica.

Em populações com árvores de grande porte e/ou adensadas, a variável altura é difícil de ser mensurada, elevando muito o tempo e o custo da coleta dos dados do inventário.

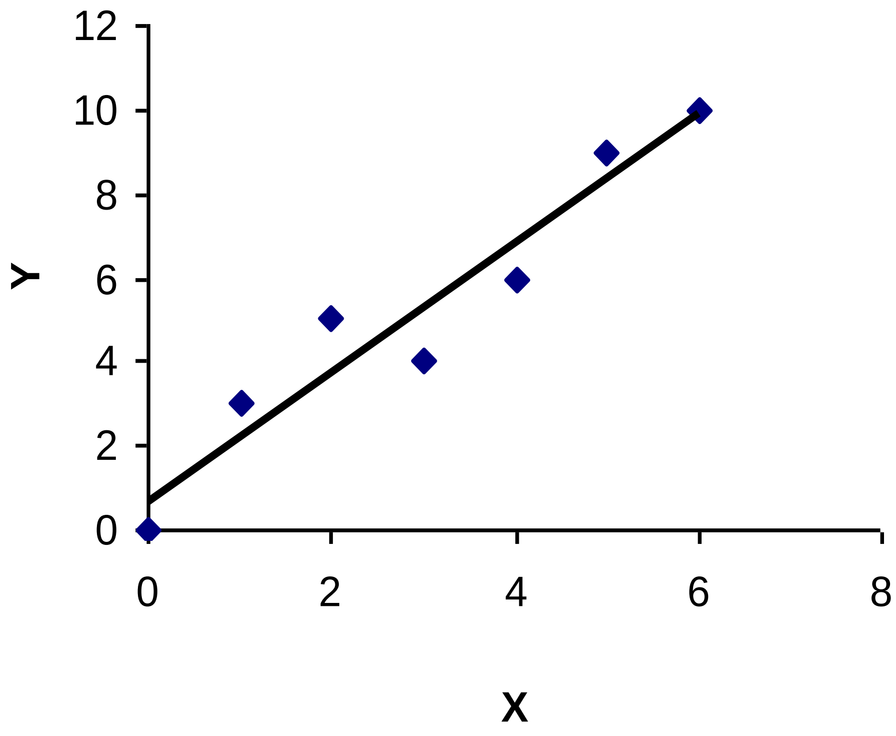
Sendo assim, uma relação hipsométrica pode permitir estimar boa parte das alturas de uma amostra, significando um grande ganho prático na realização de inventários florestais.

2.1 – Análise de regressão

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$



$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$



2.1 Modelos empregados em relações hipsométricas

$$h = \beta_0 + \beta_1 Log(d) + \varepsilon$$ (HERICKSEN, 1950)

$$h = \beta_0 + \beta_1 / D^2 + \varepsilon$$ (ASSMANN, 1952)

$$Ln(h) = \beta_0 + \beta_1 Log(d) + \varepsilon$$ (STOFELLS, 1953)

$$Ln(h) = \beta_0 + \beta_1 / D + \varepsilon$$ (CURTIS, 1967)

$\Rightarrow$ O método de mínimos quadrados ordinários

Este é um método de estimação muito empregado para estimar parâmetros de modelos de regressão. Seu objetivo principal consiste em minimizar a soma de quadrados dos erros, tal como será demonstrado a seguir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad (1)$$

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{\partial \beta_0} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i\right)\left(-1\right) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{\partial \beta_1} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i\right)\left(-X_i\right) = 0 \qquad (5)$$

Dividindo-se (4) e (5) por -2, tem-se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) X_i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 & (6) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 & (7) \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}} \qquad \textbf{(8)}$$

Substituindo (8) em (7) e desenvolvendo a expressão, tem-se:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}} \qquad \textbf{(9)}$$

EQUAÇÃO DE REGRESSÃO AJUSTADA

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X + ei$$

ANÁLISE DE VARIÂNCIA DA REGRESSÃO (ANOVA)

FV	*GL*	*SQ*	*QM*	FCalc.
Regressão	$p-1$	$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$	$SQReg/GLReg\ (V_1)$	V_1/V_2
Resíduo	$n-p$	$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2$	$SQRes/GLRes\ (V_2)$	
Total	$n-1$	$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$		

em que:

n = número total de dados;

p = número de variáveis independentes do modelo;

Y_i = valores observados para Y;

$\hat{Y}$ = valores estimados de Y pela regressão;

$\bar{Y}$ = valor médio de Y.

Cálculo da soma de quadrados:

- Soma de Quadrados do Total (*SQTot*)

$$SQTot = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n}$$

- Soma de Quadrados da Regressão (*SQReg*)

$$SQ\,\mathrm{Re}\,g = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \right)$$

ou

$$SQ\,\mathrm{Re}\,g = \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n} \right)$$

- Soma de Quadrados do Residuo (*SQRes*)

$$SQRes = SQTot - SQReg$$

As hipóteses estatísticas testadas pelo teste *F*

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

Se o valor de *F* calculado for menor do que o valor tabelado obtido em uma tabela de *F* a um determinado nível de probabilidade α com (*1*; *n* – *2*) graus de liberdade, não se rejeita H_0.

Em termos práticos, se *F* calculado > *F* tabelado, então a regressão existe, ou seja, variações ocorridas em *Y* podem ser explicadas pelas variações ocorridas em *X* de acordo com a equação ajustada em um nível α de significância.

⇒ Medidas de precisão da equação ajustada:

- **Coeficiente de Determinação (*R^2*):** Informa a percentagem da variação dos dados observados em torno da média que está sendo explicada pela equação ajustada.

$$R^2(\%) = \frac{SQ\,\mathrm{Re}\,g}{SQTot}100 \quad \Rightarrow \quad 0 < R^2 \leq 100$$

- **Erro Padrão da Estimativa (*$S_{y.x}$*):** Indica o erro médio absoluto cometido, na unidade original da variável, associado ao uso da equação.

$$S_{Y.X} = \pm\sqrt{QM\,\mathrm{Re}\,s} = \sqrt{\frac{SQRes}{n-1}}$$

- **Erro Padrão Relativo (*$S_{y.x\,(\%)}$*):** Diferente do erro padrão da estimativa, o erro padrão relativo indica o erro médio relativo da variável associado ao uso da equação.

$$S_{Y.X}(\%) = \pm\frac{S_{Y.X}}{\bar{Y}}100$$

3.2 – Exemplo

Árv.	d	h	Árv.	d	h
1	20,7	21,3	15	21,8	20,9
2	19,4	17,3	16	18,8	.
3	20,5	18	17	19,1	19,7
4	24,5	20,5	18	24,4	21,3
5	22,8	20,1	19	22,0	.
6	20,5	.	20	18,3	19,3
7	20,5	18,2	21	18,3	.
8	28,2	22	22	17,4	.
9	18,3	.	23	18,3	.
10	19,4	18,7	24	28,7	23
11	25,3	20,1	25	22,0	.
12	25,8	21,1	26	21,3	.
13	22,3	18,8	27	21,7	.
14	22,9	.	28	21,2	.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}$$

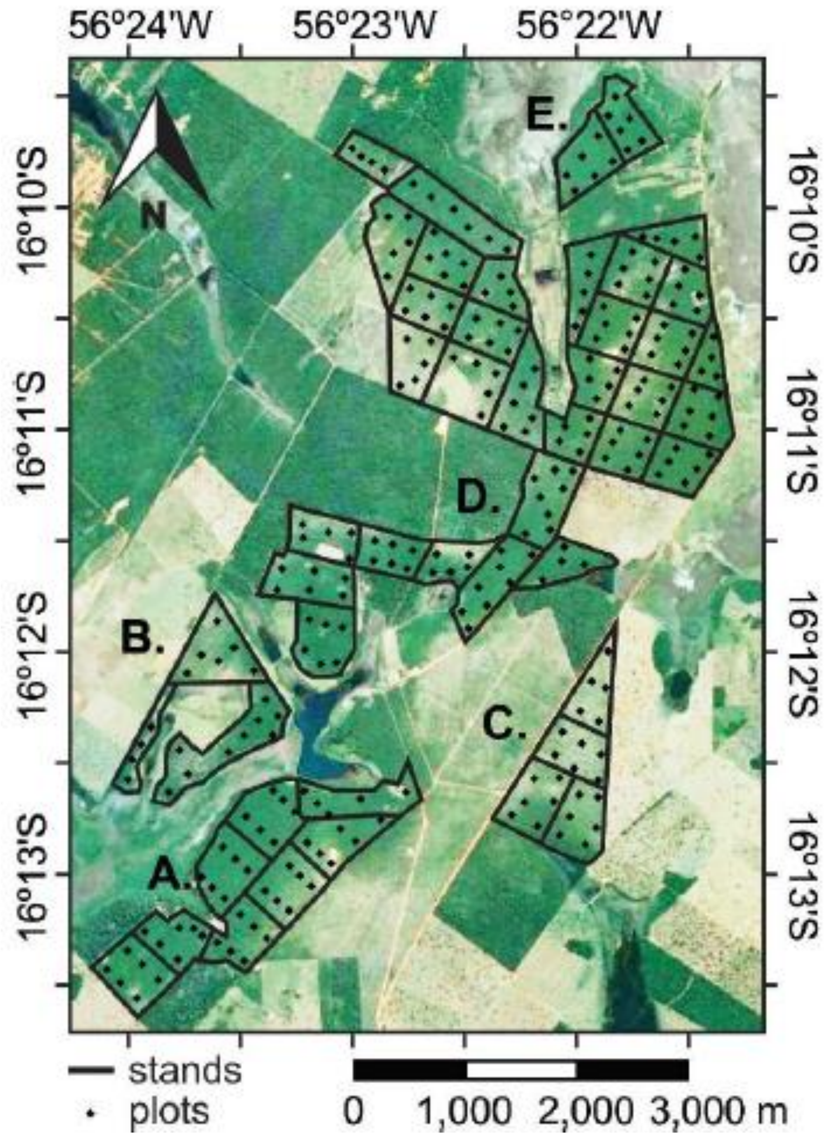
$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$SQTot = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n}$$

$$SQ\,\mathrm{Re}\,g = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n} \right)$$

$$SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Reg}$$

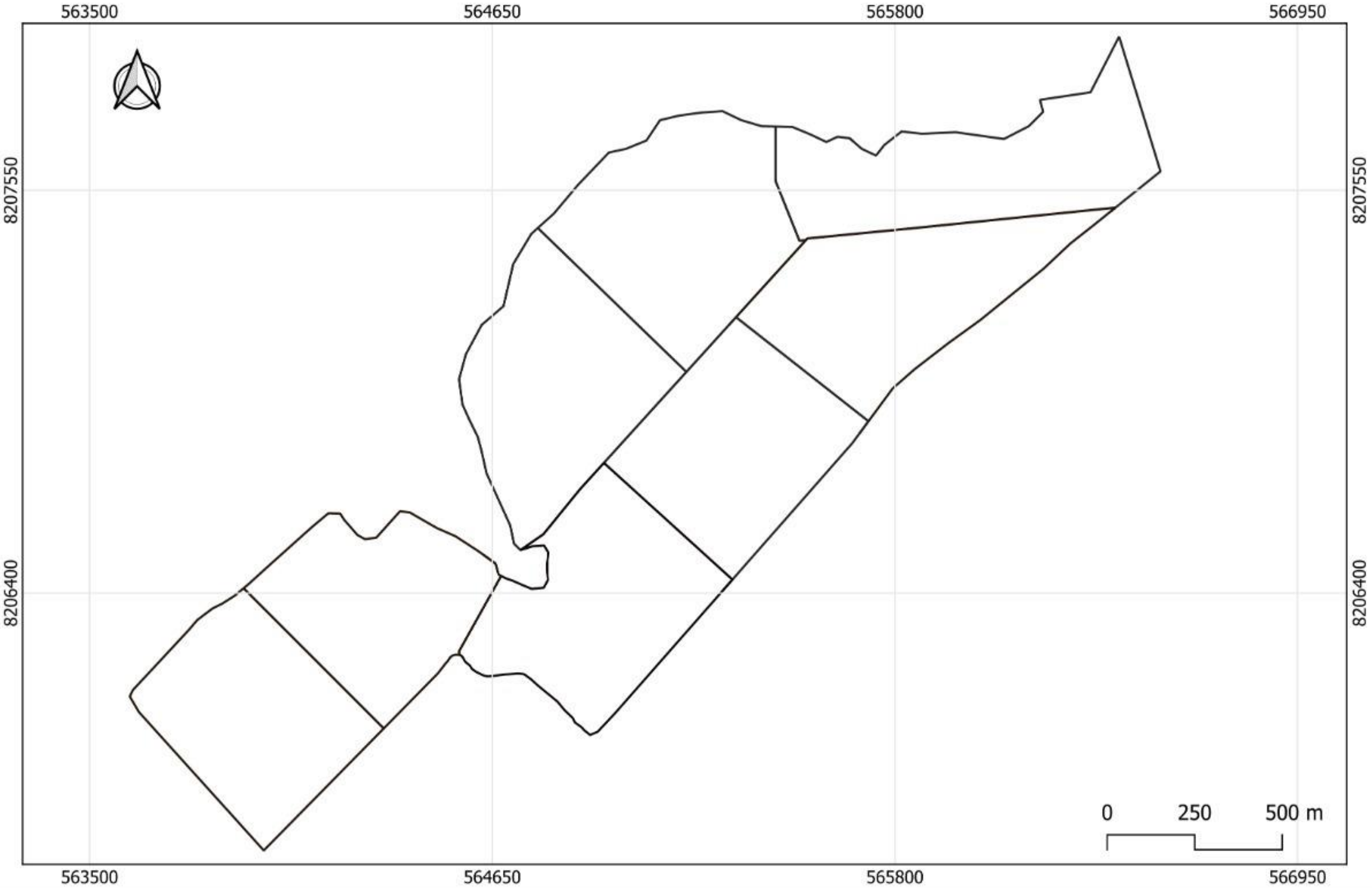
Povoamento de Teca
Área total =1.260 ha



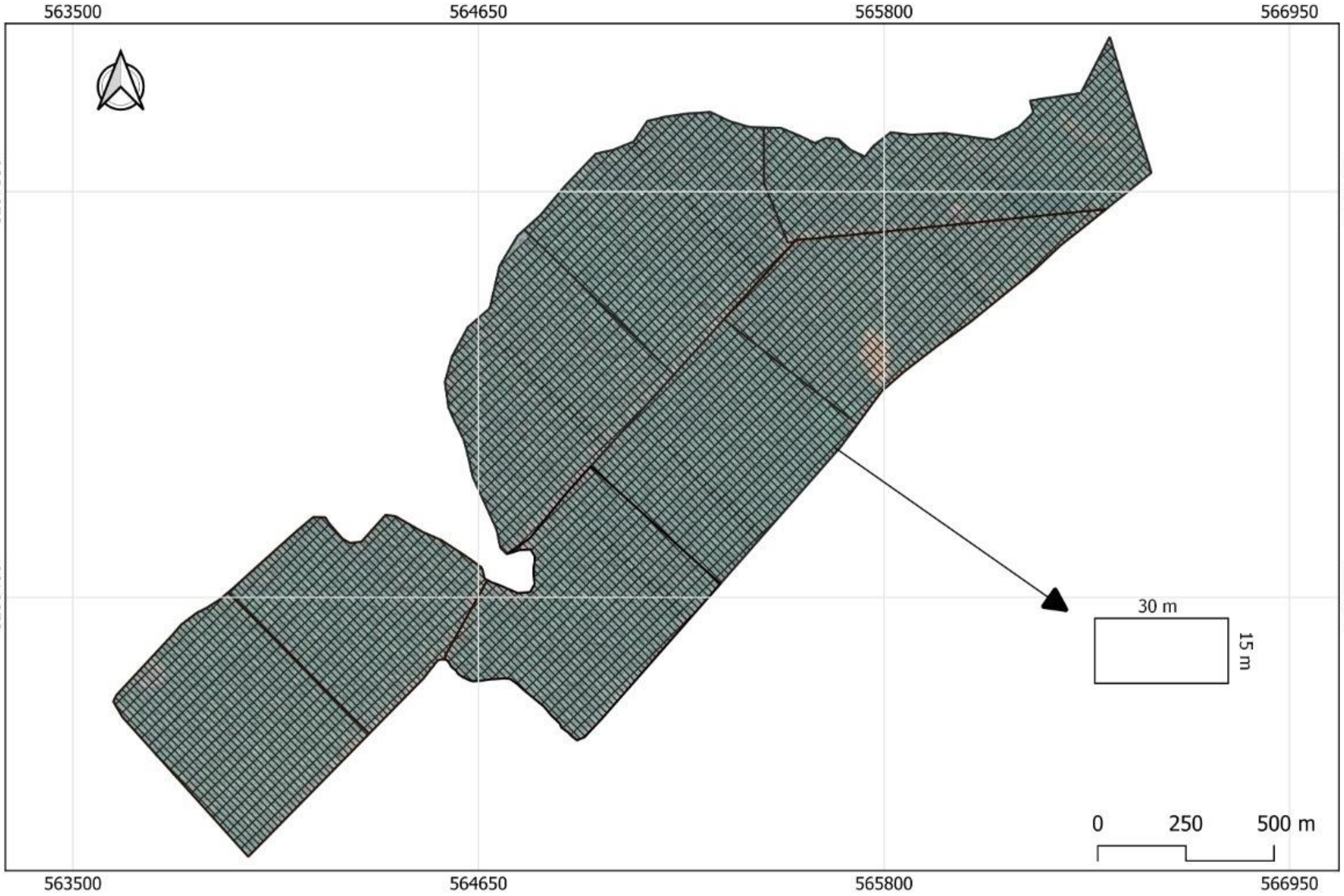
Povoamento de Teca
Área total = 223,1571 ha

Fonte: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-77602017000100115

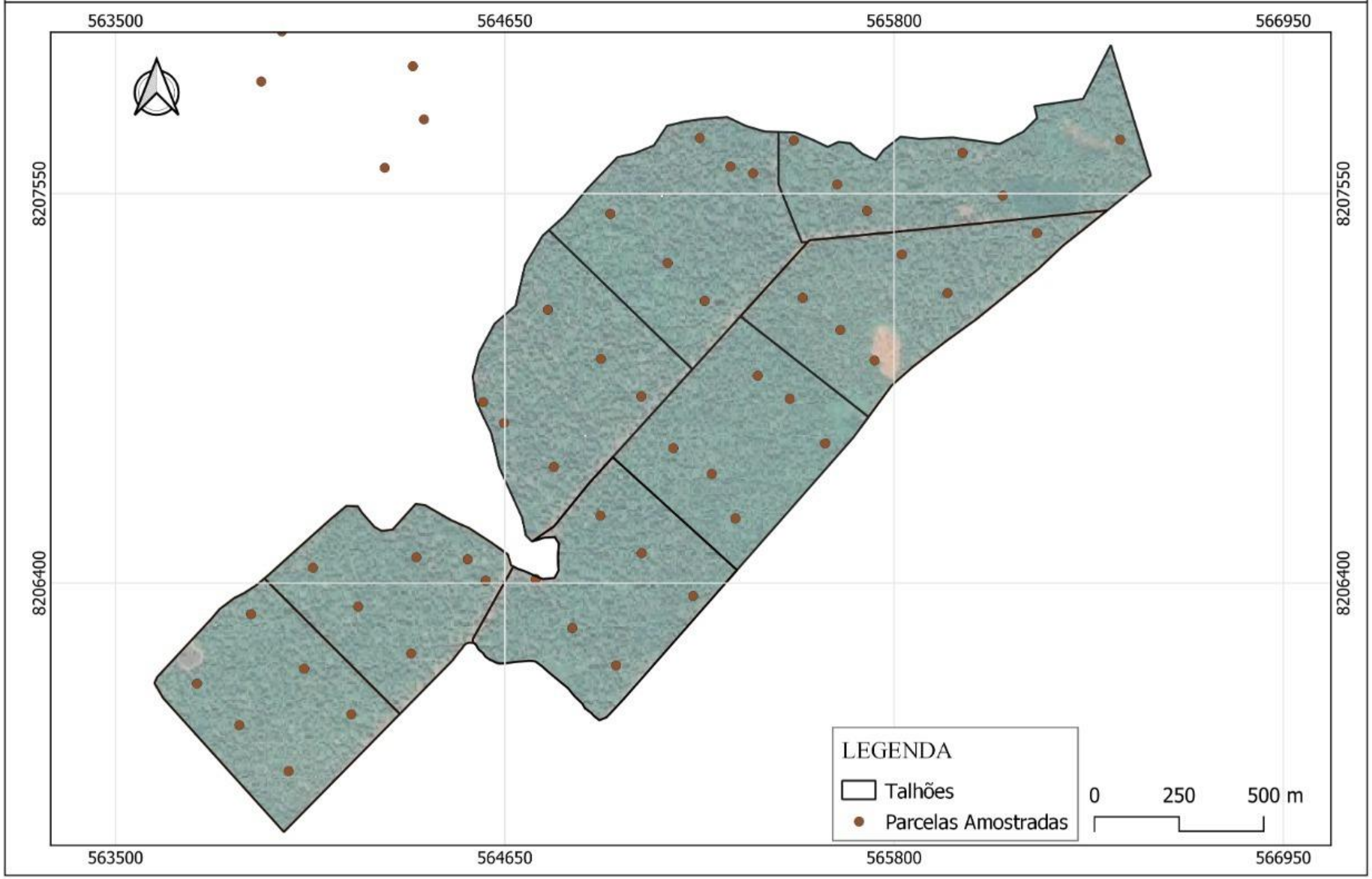
Croqui do Talhão A



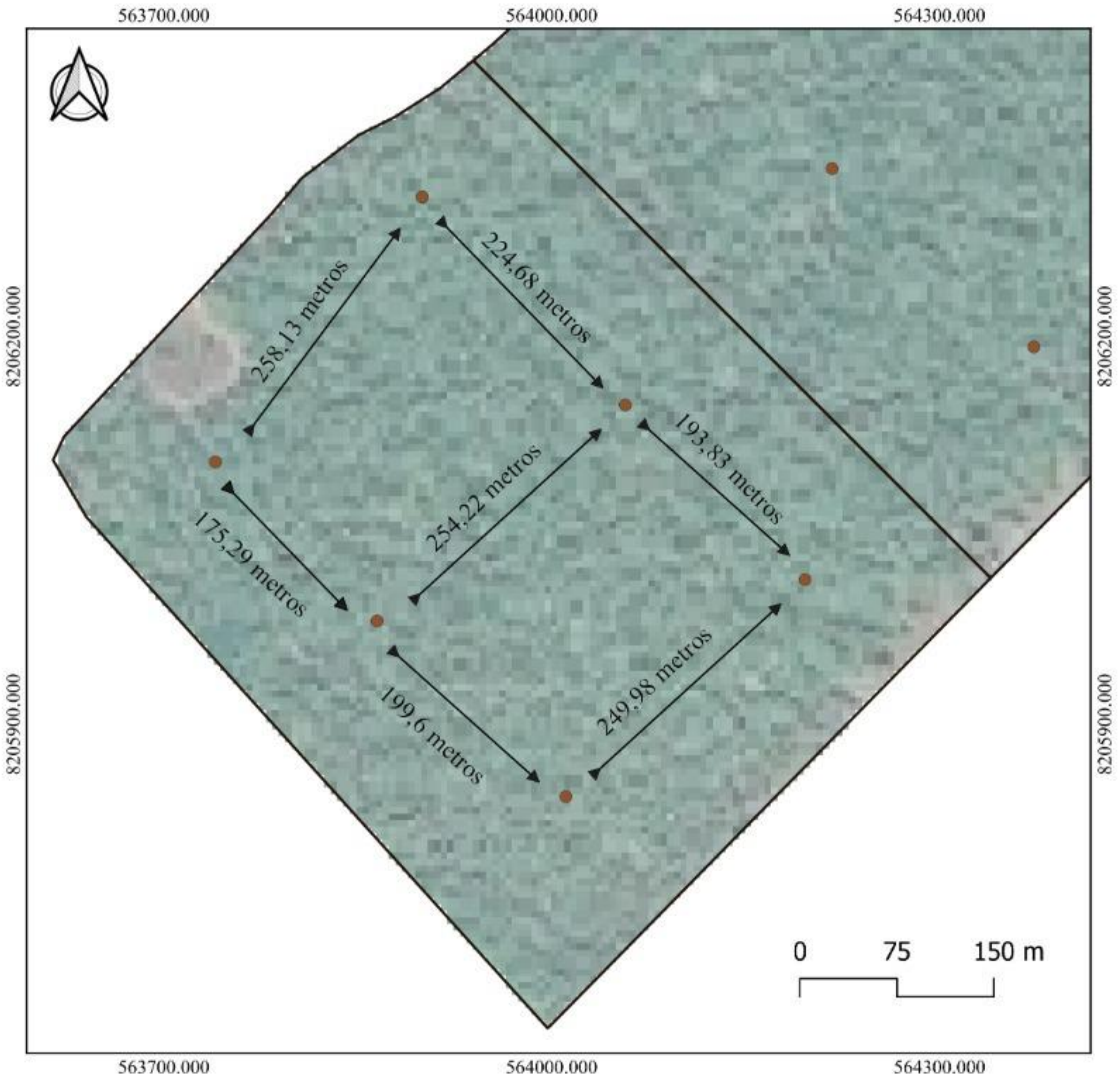
Talhão A da Fazenda - Mapa de divisão dos talhões em parcelas (15x30m)

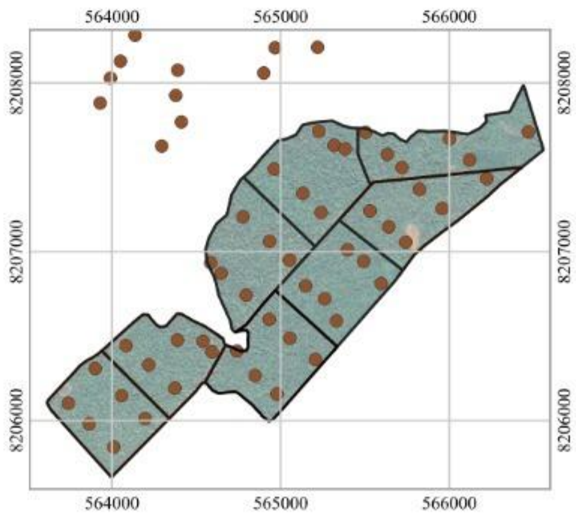


Talhão A da Fazenda -Mapa das Parcelas Amostras (15x30m)



Talhão A da Fazenda -Mapa das Distância entre as Parcelas Amostras (15x30m)





LEGENDA
Perímetro dos talhão
Parcelas Amostradas

3.2 – Exemplo

Árv.	d	h
1	20,7	21,3
2	19,4	17,3
3	20,5	18
4	24,5	20,5
5	22,8	20,1
6	20,5	.
7	20,5	18,2
8	28,2	22
9	18,3	.
10	19,4	18,7
11	25,3	20,1
12	25,8	21,1
13	22,3	18,8
14	22,9	.

Árv.	d	h
15	21,8	20,9
16	18,8	.
17	19,1	19,7
18	24,4	21,3
19	22,0	.
20	18,3	19,3
21	18,3	.
22	17,4	.
23	18,3	.
24	28,7	23
25	22,0	.
26	21,3	.
27	21,7	.
28	21,2	.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$SQTot = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n}$$

$$SQ\,\mathrm{Re}\,g = \hat{\beta}_1^2 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \right)$$

$$SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Reg}$$

Árv.	d	h	X_iY_i	X_i^2	Y_i^2
1	20,7	21,3	440,91	428,49	453,69
2	19,4	17,3	335,62	376,36	299,29
3	20,5	18	369	420,25	324
4	24,5	20,5	502,25	600,25	420,25
5	22,8	20,1	458,28	519,84	404,01
7	20,5	18,2	373,1	420,25	331,24
8	28,2	22	620,4	795,24	484
10	19,4	18,7	362,78	376,36	349,69
11	25,3	20,1	508,53	640,09	404,01
12	25,8	21,1	544,38	665,64	445,21
13	22,3	18,8	419,24	497,29	353,44
15	21,8	20,9	455,62	475,24	436,81
17	19,1	19,7	376,27	364,81	388,09
18	24,4	21,3	519,72	595,36	453,69
20	18,3	19,3	353,19	334,89	372,49
24	28,7	23	660,1	823,69	529
$\sum_{i=1}^{n}$	361,7	320,3	7299,39	8334,05	6448,91
$\bar{X}$	22,6	20,02			

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$

$$SQTot = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n}$$

$$SQ\,\mathrm{Re}\,g = \hat{\beta}_1^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}\right)$$

$$SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Reg}$$

Árv.	d	h	X_iY_i	X_i^2	Y_i^2
1	20,7	21,3	440,91	428,49	453,69
2	19,4	17,3	335,62	376,36	299,29
3	20,5	18	369	420,25	324
4	24,5	20,5	502,25	600,25	420,25
5	22,8	20,1	458,28	519,84	404,01
7	20,5	18,2	373,1	420,25	331,24
8	28,2	22	620,4	795,24	484
10	19,4	18,7	362,78	376,36	349,69
11	25,3	20,1	508,53	640,09	404,01
12	25,8	21,1	544,38	665,64	445,21
13	22,3	18,8	419,24	497,29	353,44
15	21,8	20,9	455,62	475,24	436,81
17	19,1	19,7	376,27	364,81	388,09
18	24,4	21,3	519,72	595,36	453,69
20	18,3	19,3	353,19	334,89	372,49
24	28,7	23	660,1	823,69	529
$\sum_{i=1}^{n}$	361,7	320,3	7299,39	8334,05	6448,91
$\bar{X}$	22,6	20,02			

$$\hat{\beta}_1 = \frac{7299{,}39 - \frac{361{,}7 * 320{,}3}{16}}{8334{,}05 - \frac{361{,}7^2}{16}} = 0{,}372424$$

$$\hat{\beta}_0 = 20{,}02 - 0{,}372424 * 22{,}7 = 11{,}6037$$

$$SQ_{Tot} = 6448{,}91 - \frac{(320{,}3)^2}{16} = 36{,}9043$$

$$SQ_{Reg} = 0{,}372424^2\left(\sum_{i=1}^{n} 8334{,}05 - \frac{361{,}7^2}{16}\right) = 21{,}8271$$

$$SQ_{Res} = 36{,}9043-21{,}8271=15{,}0772$$

Árv.	d	h
1	20,7	21,3
2	19,4	17,3
3	20,5	18
4	24,5	20,5
5	22,8	20,1
7	20,5	18,2
8	28,2	22
10	19,4	18,7
11	25,3	20,1
12	25,8	21,1
13	22,3	18,8
15	21,8	20,9
17	19,1	19,7
18	24,4	21,3
20	18,3	19,3
24	28,7	23

FV	*GL*	*SQ*	*QM*	$F_{Calc.}$
Regressão	*1*	**21,8271**	**21,8271**	**20,2684***
Resíduo	*14*	**15,07725**	**1,0769**	**Ftab$_{(1;14;0,05)}$=4,60**
Total	*15*	**36,9043**		

$$R^2(\%) = \frac{SQ\,\mathrm{Re}\,g}{SQTot}100 = \frac{21,8271}{36,9043} * 100 = 54,16\%$$

$$S_{Y.X} = \pm\sqrt{QM\,\mathrm{Re}\,s} = \pm 1,03774m$$

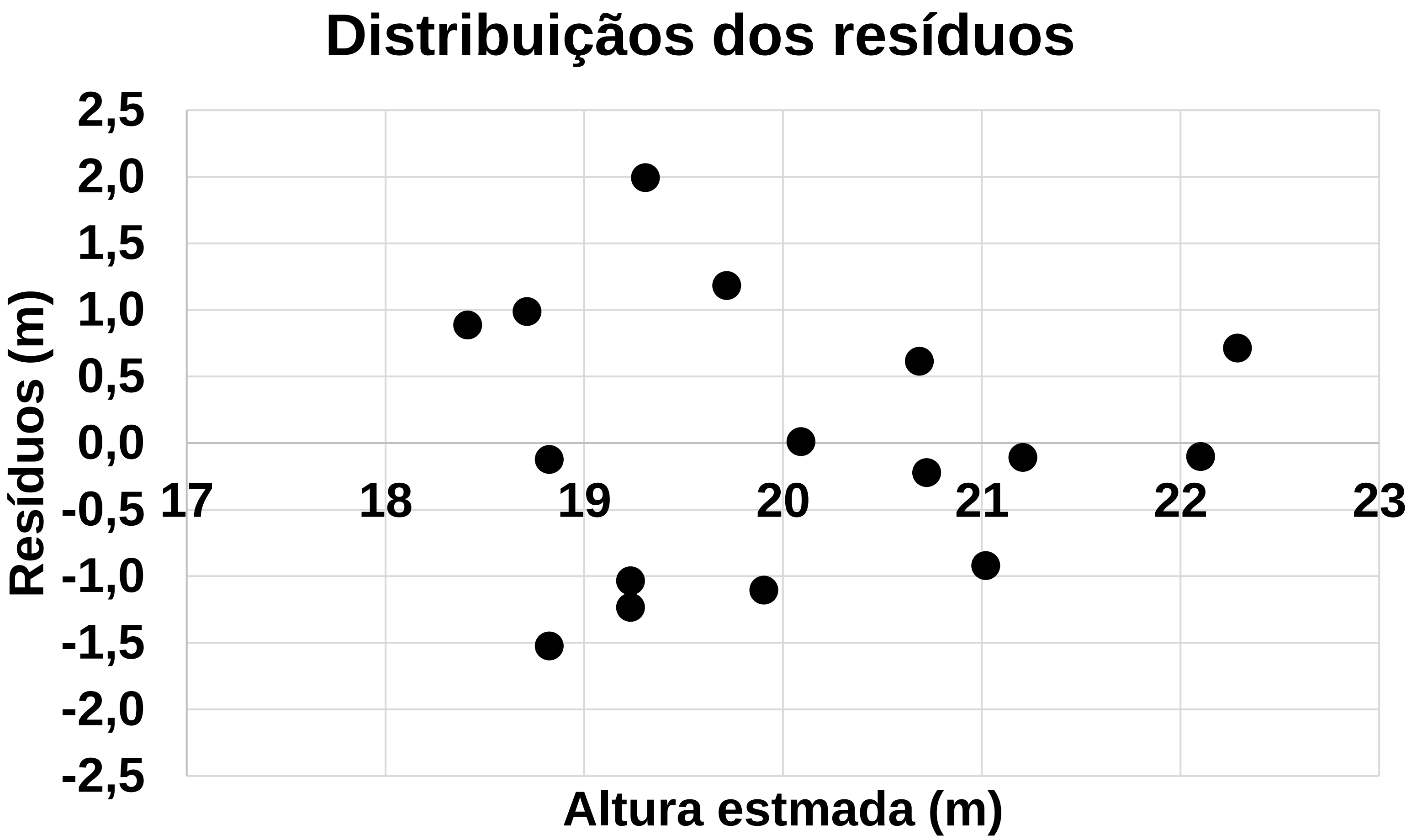
$$S_{Y.X}(\%) = \pm\frac{S_{Y.X}}{\bar{Y}}100 = \pm 5,1835\%$$

3.2 – Exemplo

Árv.	d (cm)	h (m)	$\hat{h}$ (m)	e (m)
1	20,7	21,3	19,3	2,0
2	19,4	17,3	18,8	-1,5
3	20,5	18,0	19,2	-1,2
4	24,5	20,5	20,7	-0,2
5	22,8	20,1	20,1	0,0
7	20,5	18,2	19,2	-1,0
8	28,2	22,0	22,1	-0,1
10	19,4	18,7	18,8	-0,1
11	25,3	20,1	21,0	-0,9
12	25,8	21,1	21,2	-0,1
13	22,3	18,8	19,9	-1,1
15	21,8	20,9	19,7	1,2
17	19,1	19,7	18,7	1,0
18	24,4	21,3	20,7	0,6
20	18,3	19,3	18,4	0,9
24	28,7	23,0	22,3	0,7

$$h = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * d$$

$$\hat{h} = 11,59964 + 0,372424 * d$$



3.2 – Exemplo

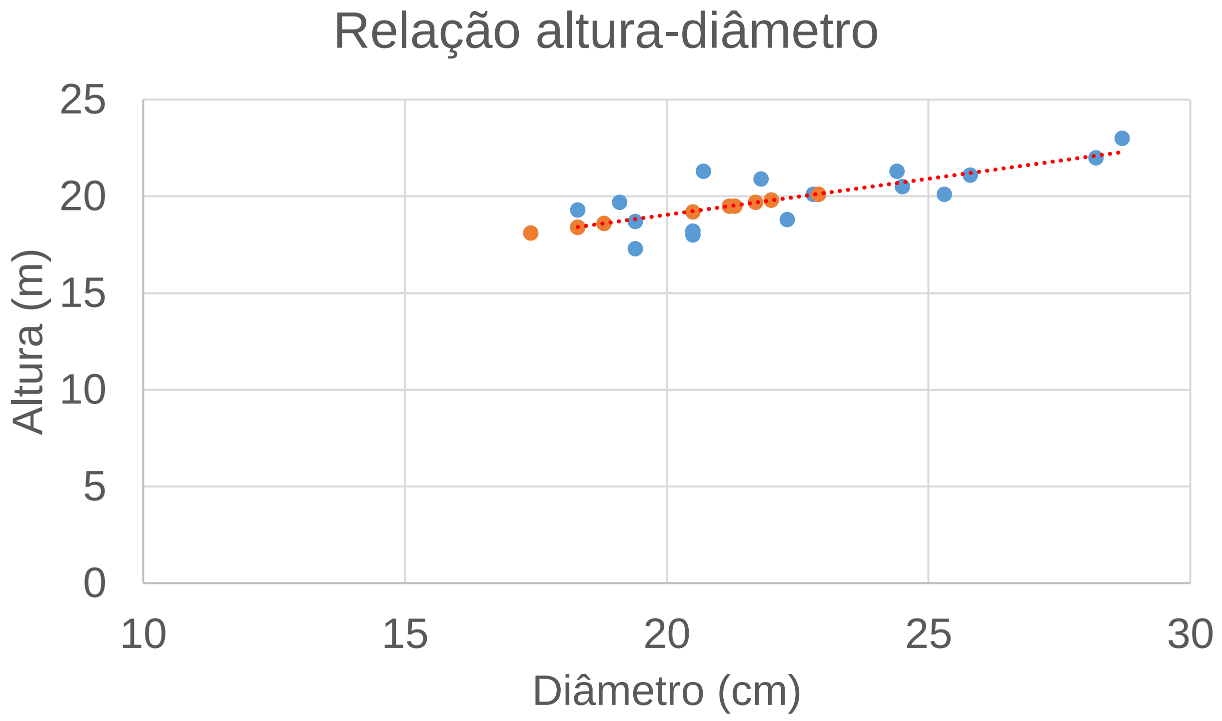
Árv.	d	h
1	20,7	21,3
2	19,4	17,3
3	20,5	18
4	24,5	20,5
5	22,8	20,1
6	20,5	19,2
7	20,5	18,2
8	28,2	22
9	18,3	18,4
10	19,4	18,7
11	25,3	20,1
12	25,8	21,1
13	22,3	18,8
14	22,9	20,1

Árv.	d	h
15	21,8	20,9
16	18,8	18,6
17	19,1	19,7
18	24,4	21,3
19	22,0	19,8
20	18,3	19,3
21	18,3	18,4
22	17,4	18,1
23	18,3	18,4
24	28,7	23
25	22,0	19,8
26	21,3	19,5
27	21,7	19,7
28	21,2	19,5

$$h = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * d$$

$$\hat{h} = 11{,}59964 + 0{,}372424 * d$$

$$\hat{h}_6 = 11{,}59964 + 0{,}372424 * 20{,}5 = 19{,}2m$$



3.3 – Fatores que afetam a relação hipsométrica

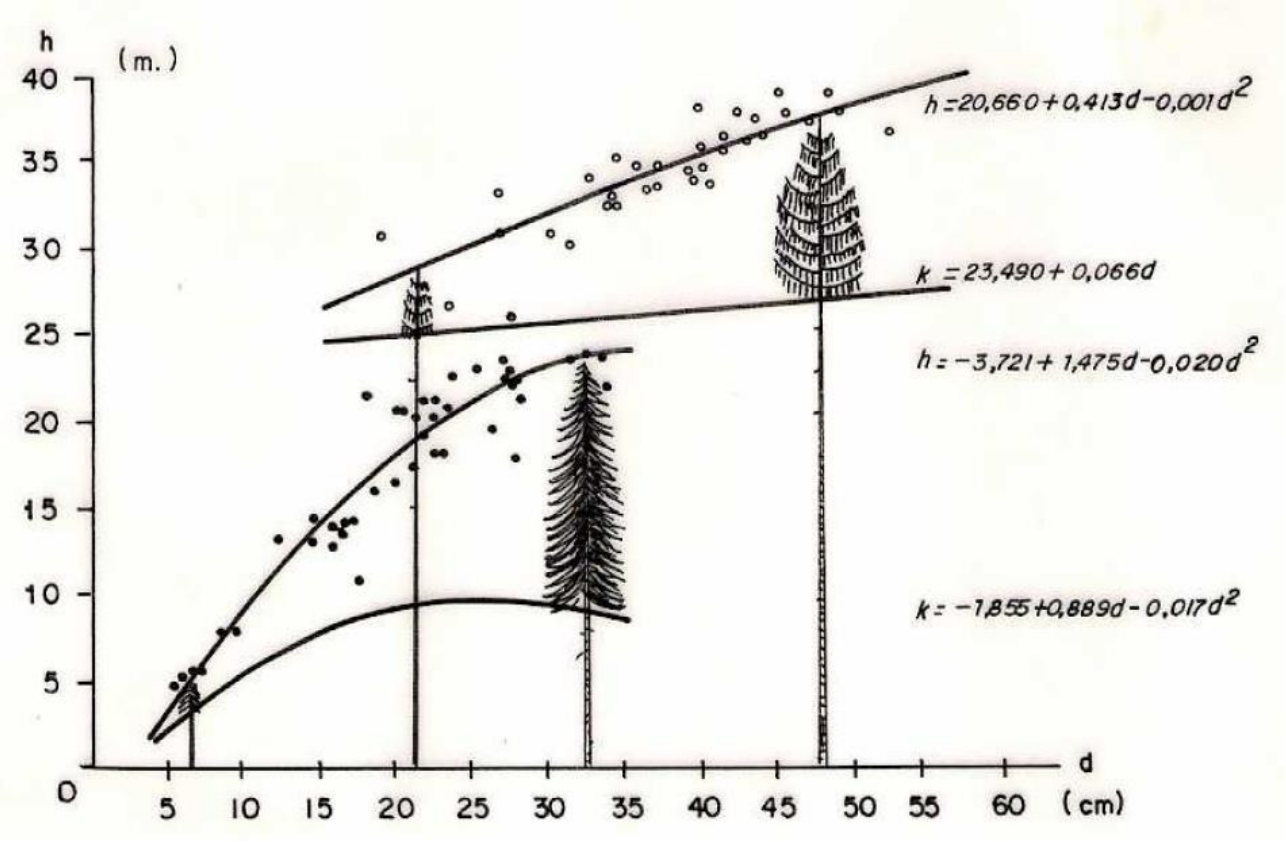
- ✓ Espécie;
- ✓ Idade;
- ✓ Sítio;
- ✓ Densidade;
- ✓ Posição sociológica.

Quanto mais homogêneo o povoamento, mais bem definida é a relação hipsométrica, e só tem sentido seu estudo dentro uma única espécie.

Relações hipsométricas em geral não funcionam bem em florestas nativas.

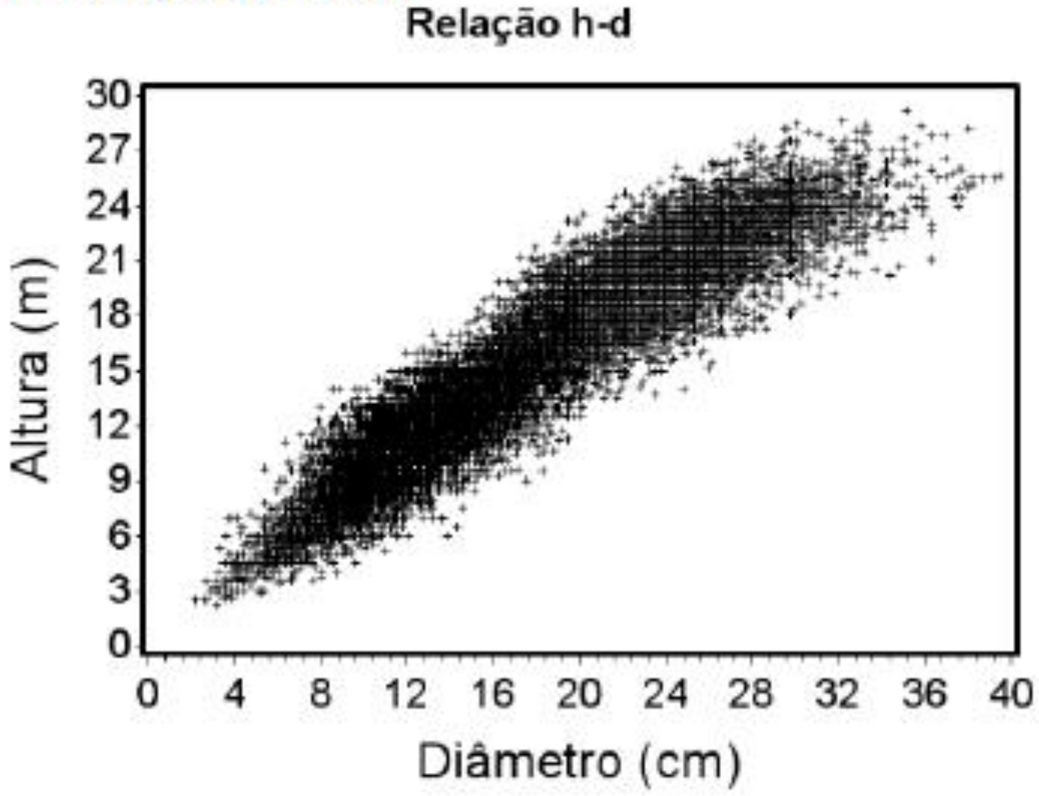
3.4 – Fatores que afetam a relação hipsométrica

✓ Espécies



3.4 Espécie

Figura 6 - Dispersão das alturas de árvores em função dos diâmetros a altura do peito para Tectona grandis



Favalessa (2018)

Fonte: http://www.tecadobrasil.com.br/pt/

3.4 Relação hipsométrica (relação altura-diâmetro) de *Pinus carbea* Var Hondurensis (A) e *Pinus tecunnumanii (B)* em Rondônia

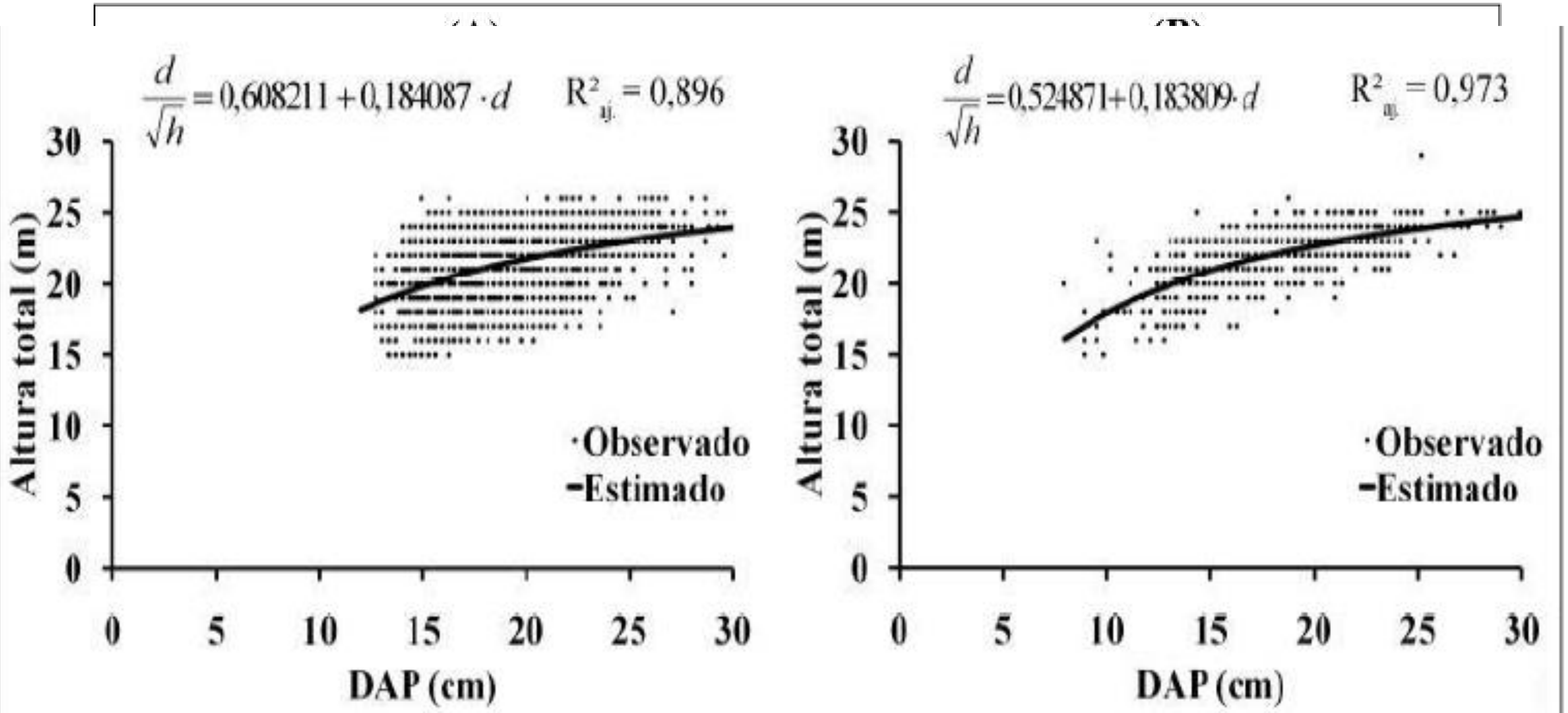
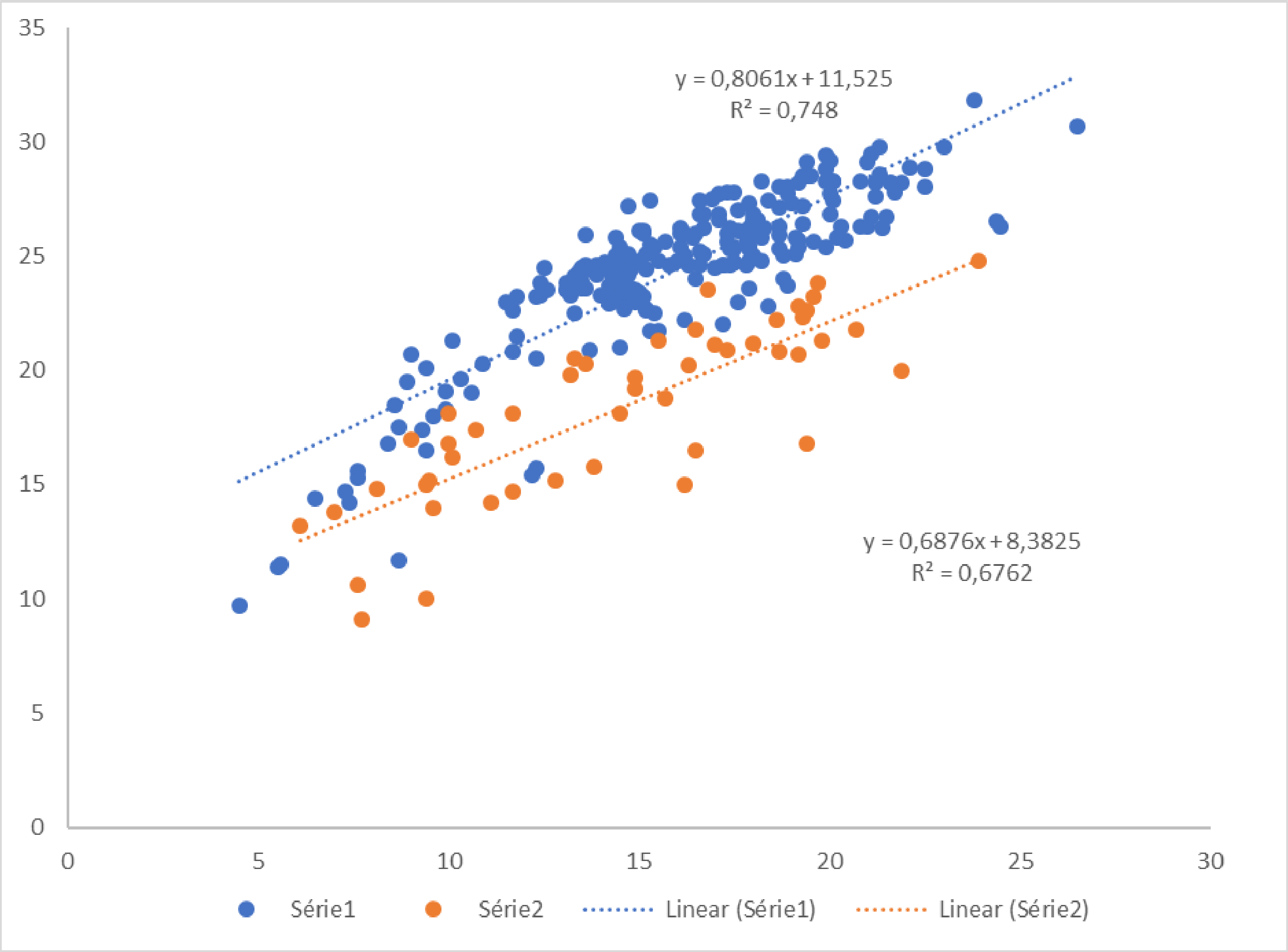


Figura 1 – Distribuição dos resíduos, em metros, e curvas hipsométricas ajustadas pelo modelo 10 para as espécies *Pinus caribaea* var. *hondurensis* (A) e *Pinus tecunumanii* (B).

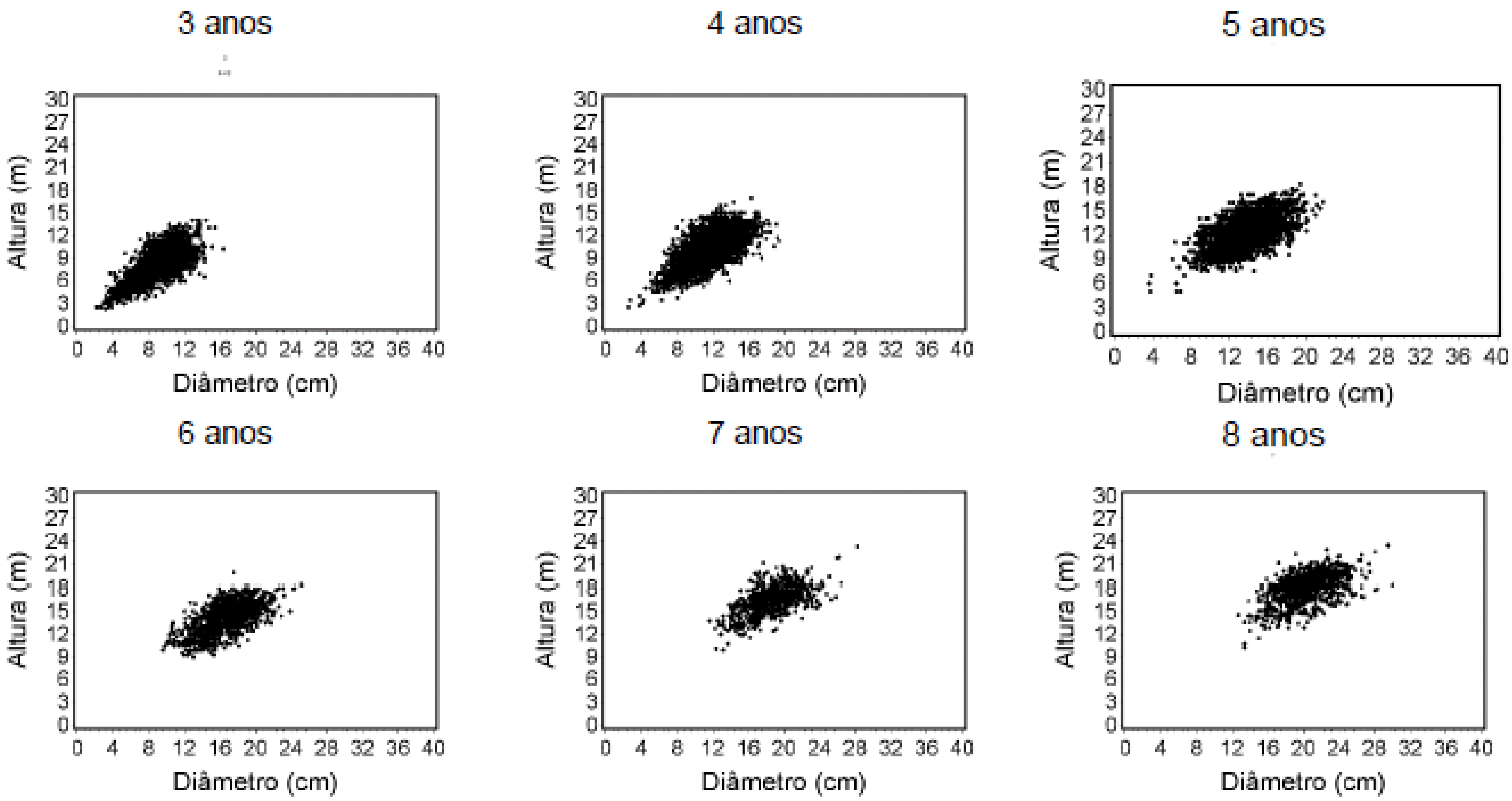
Donadoni et al. (2010)

3.4 Relação hipsométrica (relação altura-diâmetro) de *"Urograndis" (Azul) e Corimbya citriodora (Laranja)*

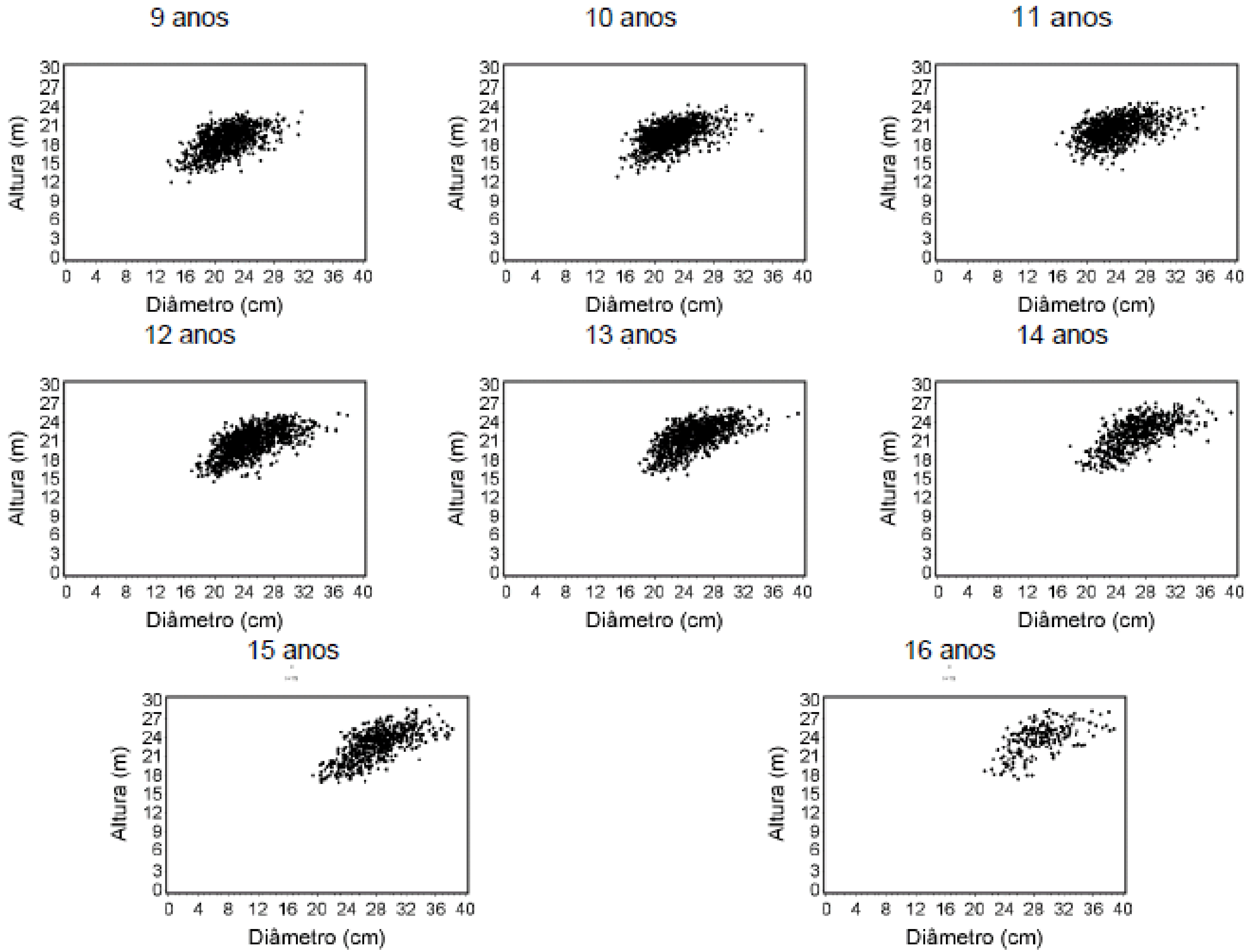


3.5 – Idade

Figura 8 – Dispersão das alturas em função dos diâmetros a altura do peito por idade



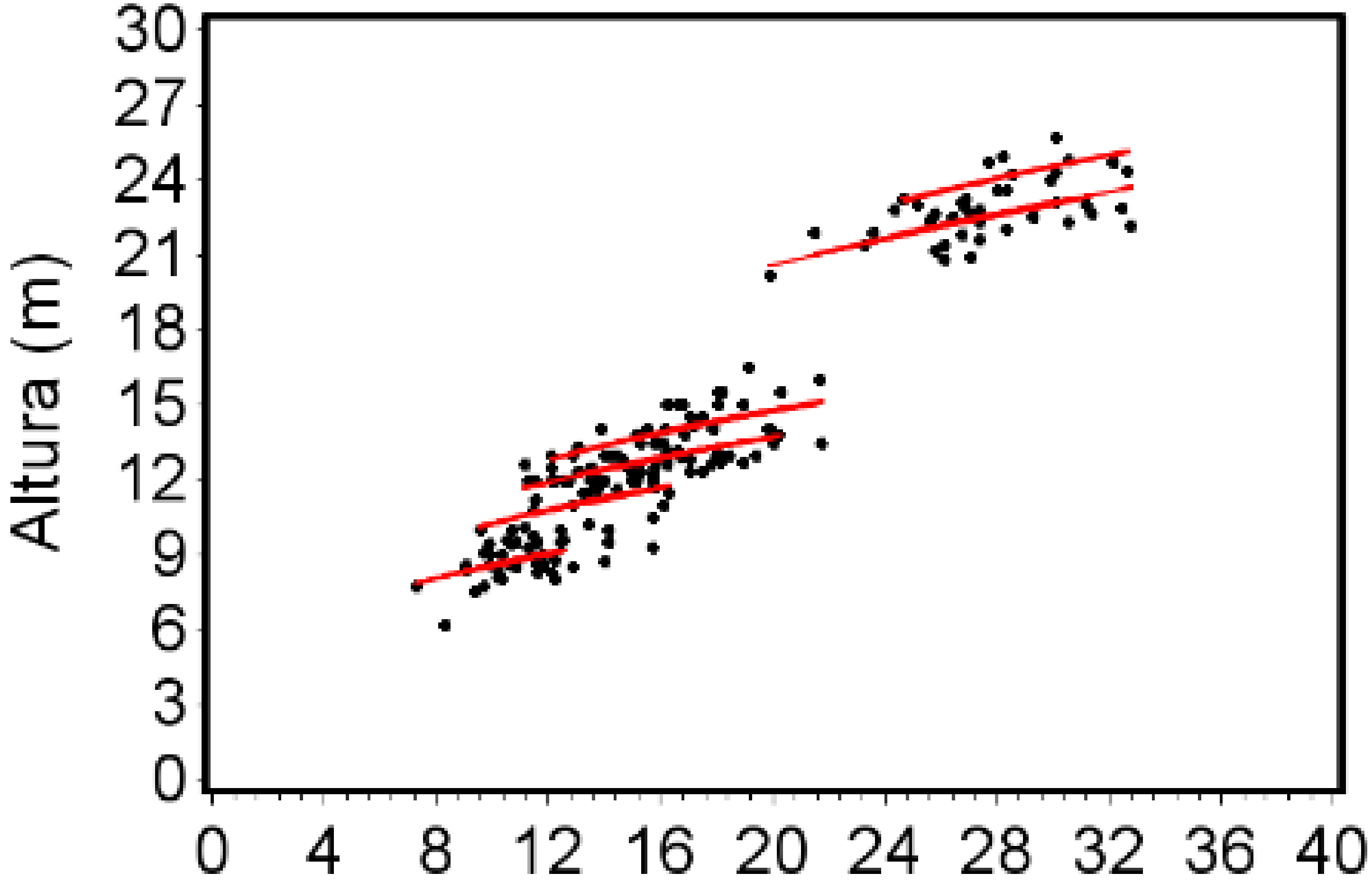
Favalessa (2018)



Fonte: O autor

Favalessa (2018)

3.5 – Idade



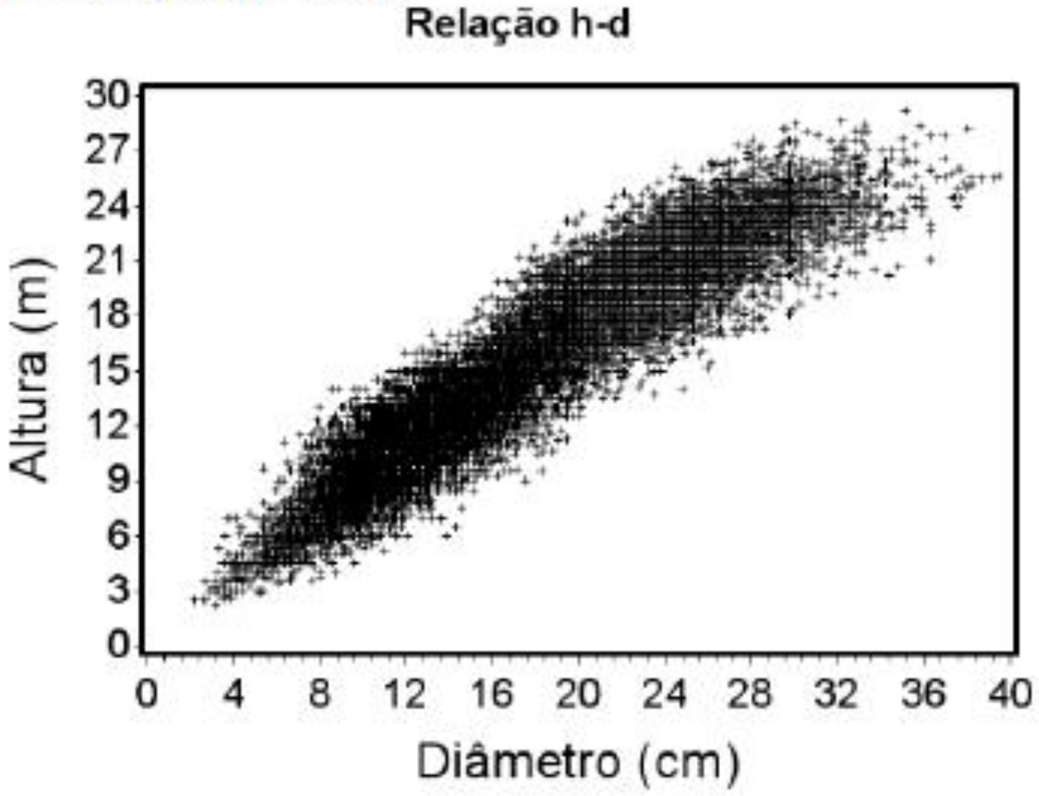
Finger (2017)

3.6 – Sítio

Pellisari (2015)

3.6 – Sítio

Figura 6 - Dispersão das alturas de árvores em função dos diâmetros a altura do peito para Tectona grandis



Favalessa (2018)

3.6 – Sítio