Bases Numéricas

Em nosso primeiro contato com a matemática nos é apresentado o sistema de contagem em base 10, onde há dez algarismos: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Essa numeração é utilizada em nossas vidas diariamente, seja nos preços de produtos e serviços, numeração dos canais de televisão, informações pessoas como matrícula, CPF, data de nascimento, entre outros.

Expressamos uma série de informações a partir da combinação dos algarismos apresentados acima. Porém, em computadores e *smartphones*, a codificação das informações é realizada com apenas dois algarismos: 0 e 1.

O processo de contagem binária ocorre da mesma forma que a contagem decimal; uma vez que esgotamos os algarismos disponíveis voltamos para o 0 e adicionamos 1 à "casa" da esquerda, por exemplo:

Legenda: 0_2 – Lê-se zero na base binária ou zero na base dois
10_{10} - Lê-se dez na base decimal ou 10 na base dez

Contagem decimal: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (volta para 0 e soma 1 à esquerda), 11,12,13, ...

Contagem binária: 0_2, 1_2, $10_2 = 2_{10}$, $11_2 = 3_{10}$, $100_2 = 4_{10}$(como só há 2 algarismos esse processo ocorrerá mais vezes), $101_2 = 5_{10}$

O processo de contagem equivale a realização de um conjunto de potências, produtos e somas com a seguinte forma:

$121_{10} = 1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 1 * 10^0 = 1*100 + 2 * 10 + 1 * 1 = 121_{10}$

No caso binário, modifica-se a base para 2 e aparecerão apenas 0 e 1 nas multiplicações(no decimal, aparecem números do 0 ao 9 nos produtos).

Ou seja:

$10110_2 = 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 1 * 16 + 0 * 8 + 1 * 4 + 1 * 2 + 0 * 1 = 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22_{10}$

Pelo exemplo acima, pode-se concluir que podemos converter qualquer base para decimal decompondo o número em seu conjunto de produtos, potências e somas correspondentes.

Como faríamos para converter o número 3312_4 para base 10?

Simples! Fazendo a decomposição:

$3312_4 = 3*4^3 + 3 * 4^2 + 1 * 4^1 + 2 * 4^0 = 3 * 64 + 3 * 16 + 1 * 4 + 2 * 1 = 192 + 48 + 4 + 2 = 240 + 6 = 246_{10}$

Em algum momento, é bem provável que você se pergunte: mas como eu faria para converter da base 4 para outra base não decimal?

Normalmente fazemos essa conversão de forma indireta, isto é, levamos da base iniciial para a base decimal e em seguida da decimal para a base final. Vejamos o exemplo: 3312_4 => $??_5$ (conversão de 3312 na base 4 para base 5)

A etapa da conversão para a base decimal já foi feita antes: $3312_4 = 246_{10}$, agora queremos um método para levar da base 10 para qualquer outra. O método que vamos usar consiste das seguintes etapas:

1ª: escolha um decimal para ser convertido(246 no nosso exemplo)

2ª: encontre uma potência da base nova mais próxima por baixo(igual ou menor) do número decimal. Para o nosso exemplo a potência de 5 mais próxima de 246_{10} é $125_{10} = 5^3$.

3ª: verifique qual múltiplo dessa potência por um número menor que a base nova(nesse exemplo: 0,1,2,3 ou 4) é mais próximo do decimal. Nesse exemplo **1** é o mais próximo, pois 2*125=250 que já supera 246. o número 1 ocupará a casa da potência 5^3. Os números que multiplicam as potências da base nova formam o número convertido.

4ª: Faça o número da etapa 1 subtraído do número da etapa 3: 246 – 125 = 121_{10}

5ª: agora repita as 4 etapas usando o resultado da subtração anterior. O procedimento acaba quando o resultado da etapa 2 for menor que a base(no caso do exemplo encerramos quando aparecer um número menor que 5).

Continuando:

1ª: 121_{10} → novo decimal para converter
2ª: 121_{10} → potência de 5 mais próxima → $25=5^2$
3ª: 121_{10} → múltiplo de 25 mais próximo → 100=25***4**
4ª: 121_{10} → $121 - 100 = 21_{10}$

Repete mais uma vez:

1ª: 21_{10} → novo decimal
2ª: 21_{10} →potência de 5 mais próxima → 5
3ª: 21_{10} →múltiplo de 5 mais próxima → 20=5***4**
4ª: 21_{10} → $21 - 20 = 1_{10} = 1*5^0 = \mathbf{1}_5$

Finalmente chegamos a um número menor que 5, ele ocupará a casa da potênica de 0. Agora basta recuperarmos os números que multiplicam as potências de cinco obtidos(eles estão em negrito).

$\mathbf{1441}_5 = 1 * 5^3 + 4 * 5^2 + 4 * 5^1 + 1*5^0 = 125 + 4*25 + 4 * 5 + 1 = 125 + 100 + 20 + 1 = 225 + 21 = 246_{10}$

A base hexadecimal

Para representar um número em hexadecimal precisamos de 16 algarismos. O sistema decimal é insuficiente, assim, para representar os números de 10_{10} a 15_{10}, a base hexadecimal utiliza as letras A, B ,C, D, E e F; representando 10, 11, 12, 13, 14 e 15 respectivamente.

Ou seja:
$A_{16} \leftrightarrow 10_{10}$
$B_{16} \leftrightarrow 11_{10}$
$C_{16} \leftrightarrow 12_{10}$
$D_{16} \leftrightarrow 13_{10}$
$E_{16} \leftrightarrow 14_{10}$
$F_{16} \leftrightarrow 15_{10}$

Alguns exemplos:
$AD_{16} \rightarrow 10 * 16^1 + 13 * 16^0 = 10*16 + 13*1 = 160 + 13 = 173_{10}$
$FACA_{16} \rightarrow 15 * 16^3 + 10 * 16^2 + 12 * 16^1 + 10 * 16^0 =$
$111_{16} \rightarrow$

Casos particulares

Existem algumas situações em que a conversão entre bases pode ser feita de uma forma mais rápida. Vamos analisar conversões entre bases que são potências uma da outra, por exemplo: base 2 → base 4, base 4 → base 2

Por serem potência um do outro um número na base 4 equivale a 2 números na base 2, por exemplo:

11010_2 ← separe em conjuntos de 2 números(da direita para a esquerda)
1_2 10_2 10_2 ← o 1_2 ficou sozinho, complete o par com um 0 à esquerda ficando assim 01_2 10_2 10_2

O maior valor que um conjunto de 2 bits pode assumir é 11_2, que corresponde a 3_{10} ou 3_4, que é o maior valor que 1 dígito na base 4 pode apresentar, assim 01_2 10_2 $10_2 \leftrightarrow 1_4$ 2_4 2_4 e assim: $11010_2 \leftrightarrow 122_4$

Situações parecidas podem acontecer com as bases 8 e base 16(hexadecimal)