# Álgebra Linear - Lista de Exercícios 6

escreva seu nome aqui

1. Seja $A$ uma matriz $m \times n$ com posto $r$. Suponha que existem $\mathbf{b}$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tenha solução.

   (a) Escreva todas as desigualdade ($<$ e $\leq$) que os números $m, n$ e $r$ precisam satisfazer.

   **Resolução:**
   Para $Ax = b$ não possuir solução, devem haver mais colunas que variáveis, então $n < m$. Além disso, o posto é máximo quando há um pivô em cada coluna, mas não é necessário isso ocorrer para $Ax = b$ não possuir solução, então $r \leq n$.

   (b) Como podemos concluir que $A^T\mathbf{x} = 0$ tem solução fora $\mathbf{x} = 0$?

   **Resolução:**
   Do item anterior, sabemos que $m > n$. Quando a matriz é transposta, a quantidade de linhas e colunas são trocadas entre si, de modo que haverá mais colunas que linhas. Isso faz com que haja pelo menos uma variável livre, fazendo com que a dimensão de $N(A^T)$ seja maior ou igual a 1, gerando assim infinitos vetores que são solução para $Ax = 0$.

2. Sem calcular $A$ ache uma bases para os quatro espaços fundamentais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   **Resolução:**
   As três primeiras colunas das duas matrizes são linearmente independentes, o que faz com que seu produto também seja, pois são combinações independentes de colunas independentes. Sendo assim, o espaço coluna de A será dado pelas três primeiras colunas de A:
   $C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 26 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \\ 44 \end{bmatrix} \right\}$
   Como o posto de $A$ é igual a 3 e $A^T$ possui três colunas, as 3 colunas de $A^T$ formam uma base para $C(A^T)$:
   $C(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 20 \\ 27 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 26 \\ 44 \\ 62 \end{bmatrix} \right\}$
   Como a primeira matriz é invertível, encontrar uma base para o núcleo da segunda matriz será equivalente para o núcleo de $A$. Adotando $x_4 = 1$ na segunda matriz:
   $x_3 + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2$
   $x_2 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$
   $x_1 + 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
   Então: $N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
   Como $A$ possui posto 3 e $A^T$ possui 3 colunas, é possível afirmar que $A^T$ não possui variáveis livres, de modo que $N(A^T) = 0$.

3. Explique porque $v = (1, 0, -1)$ não pode ser uma linha de $A$ e estar também no seu núcleo.

   **Resolução:**
   A entrada de $b$ que é dada pela multiplicação de $v$ por $x = v$ teria que ser 0 para $v$ estar no núcleo,

porém é $1 * 1 + 0 * 0 + (-1)(-1) = 2$.

4. A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem solução quando $\mathbf{w}$ está em qual dos quatro subespaços? Quando a solução é única (condição sobre algum dos quatro subespaços)?

   **Resolução:**
   $A^T x = w$ quando $w$ está no espaço coluna de $A^T$, ou seja, está no espaço linha de $A$. A solução é única quando não há variáveis livres em $A^T$, ou seja, a dimensão de $N(A^T)$ é igual a 0.

5. Seja $M$ o espaço de todas as matrizes $3 \times 3$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   e note que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Quais matrizes $X \in M$ satisfazem $AX = 0$?

   **Resolução:**
   Em primeiro lugar, deve-se perceber que o posto da matriz é 2, pois a terceira linha é combinação linear das duas primeiras. Sendo assim, a dimensão de $N(A)$ é 1, ou seja, a matriz coluna preenchida por 1 (dada no enunciado), que chamaremos de $B$, é uma base para $N(A)$.
   Para a matriz $X$, que é $3x3$, estar no núcleo de $A$, todas as suas colunas devem ser múltiplas de $B$, pois $A$ multiplicada por cada uma dessas colunas resultará 0. Genericamente:
   $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$

   (b) Quais matrizes $Y \in M$ podem ser escritas como $Y = AX$, para algum $X \in M$?

   **Resolução:**
   A matriz $Y$ deve estar em $C(A)$ ou $N(A)$ para $AX = Y$ ter solução. A forma das matrizes de $N(A)$ que são $3x3$ já foi descrita no item anterior. O espaço coluna de $A$ tem como base as duas primeiras colunas de $A$, pois a terceira é combinação linear das duas. Sendo assim, as matrizes $3x3$ de $C(A)$ possuem combinações lineares das duas primeiras matrizes de $A$.

6. Sejam $A$ e $B$ matrizes $m \times n$ com os mesmos quatro subespaços fundamentais. Se ambas estão na sua forma escalonada reduzida, prove que $F$ e $G$ são iguais, onde:

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   **Resolução:**
   O espaço coluna da transposta de $A$ é igual ao espaço coluna da transposta de $B$, então:
   $\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} I & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vI & vG \end{bmatrix} \Rightarrow v = I \Rightarrow F = IG \Rightarrow F = G$.