ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA – UFRJ – 2020.1

ESTUDO DIRIGIDO 6

Atenção: Você pode usar o Maxima para fazer os cálculos do polinômio característico, de suas raízes e para resolver sistemas lineares e aplicar o algoritmo de Gram-Schmidt, mas todas as etapas nos cálculos de autovalores, autovetores, eixos, ângulos, etc devem ser claramente indicados em suas soluções.

Questões sobre os temas da Semana 11

Questão 1. *Calcule uma base para os autoespaços de cada um dos operadores cujas matrizes são dadas abaixo e determine se são diagonalizáveis. Quando possível, ache uma base ortonormal de autovetores que diagonaliza o operador.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 37 & -288 & 0 & 27 \\ 4 & -31 & 0 & 3 \\ -9 & 72 & 2 & -9 \\ -6 & 48 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 17 & -16 & 8 & -4 \\ -16 & -7 & 16 & -8 \\ 8 & 16 & 17 & 4 \\ -4 & -8 & 4 & 23 \end{bmatrix}$$

Questão 2. *Determine a matriz na base canônica de um operador linear autoadjunto do $\mathbb{R}^3$ que tenha autovalores 1 e 2, sabendo-se que o autoespaço associado a este último autovalor é gerado pelo vetor $(1,0,-1)$.*

Questão 3. *Sejam A D e M matrizes quadradas de mesmo tamanho tais que M é inversível e $A = MDM^{-1}$.*

(a) *Mostre que $A^k = MD^kM^{-1}$.*
(b) *Mostre que se λ é autovalor de A, então λ^k é autovalor de A^k.*
(c) *Sabendo que v é autovetor de A associado ao autovalor λ, determine um autovetor de A associado a λ^k.*

Dica para (c): $(A - tI) = M(D - tI)M^{-1}$.

Date: 12 de fevereiro de 2021.

Questão 4. *Considere o operador do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é*

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Encontre os vértices de um paralelepípedo que tenha a origem como um de seus vértices e que seja levado por T em um cubo de aresta igual a 18 unidades.

Questão 5. *Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Você deve dar um contra-exemplo para as afirmações falsas e provar as verdadeiras.*

(a) todo operador diagonalizável admite uma base ortonormal de autovetores;
(b) a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^n$ em um plano tem um autoespaço de dimensão $n-2$;
(c) o operador linear do $\mathbb{R}^3$ que tem autovalores -1, 1 e 2 associados aos autovetores $(1,1,0)$, $(0,1,0)$ e $(1,2,0)$ é diagonalizável.

Questões sobre os temas da Semana 12

Questão 6. *Considere a matriz*

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ a & 2/3 & 1/3 \\ b & 1/3 & c \end{bmatrix}.$$

Determine valores para a, b e c de forma que Q descreva uma rotação de $\mathbb{R}^3$. Ache o eixo e o cosseno do ângulo de rotação de Q.

Questão 7. *Seja ρ a rotação de eixo $\ell = (1,1,1)$ que leva o vetor $u_1 = (1,0,0)$ em $u_2 = (0,1,0)$.*

(a) Determine uma base ortonormal do plano ortogonal ao eixo.
(b) Calcule o ângulo de rotação.
(c) Determine a matriz de ρ na base canônica.
(d) Calcule ρ^{18} e explique este resultado geometricamente.

Questão 8. *Sejam ρ uma rotação do $\mathbb{R}^3$ e $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$.*

(a) Mostre que $\langle \rho(u_1) \,|\, \rho(u_2) \rangle = \langle u_1 \,|\, u_2 \rangle$.

(b) Mostre que se $\rho(u_1) = u_2$, *então* $u_1 - u_2$ *é ortogonal ao eixo de* ρ.

Dica para (a): use a definição matricial do produto interno e as propriedades da matriz de uma rotação.