ESTUDO DIRIGIDO 1

NOME: GABRIEL ALMEIDA MENDES DRE: 117204959

1- d) PODEMOS AFIRMAR ISSO QUANDO TIRAMOS O PROBLEMA DA NORMA E TRAZEMOS PARA A FORMA DE PRODUTO INTERNO, FICAMOS COM:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

ASSIM PODEMOS TRABALHAR SUAS PROPRIEDADES, NESSE CASO DESENVOLVENDO A LINEARIDADE DO PRODUTO INTERNO

$$\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

COMO u E v SÃO PERPENDICULARES, ENTÃO:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = 0$$

LOGO A CONDIÇÃO DO ENUNCIADO SE REDUZ A:

$$\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

QUE É O MESMO QUE DIZER:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

e) UM VETOR É UMA "FLECHA" QUE PARTE DE UM PONTO DE ORIGEM COM COORDENADAS (x,y) NUM PLANO CARTESIANO.

NO CASO DE $\|u+v\|$, ESTE É A NORMA DO VETOR $u+v$ PROVENIENTE DA SOMA DOS VETORES u E v, OU SEJA O COMPRIMENTO DO VETOR. COMO $u+v$ É A SOMA VETORIAL DE u E v EM QUE TODOS PARTE DE UM PONTO DE ORIGEM EM COMUM É POSSIVEL FORMAR UM TRIÂNGULO RETÂNGULO POR ELE E AS PROJEÇÕES ORIGINAIS DE u E v. ANALISANDO QUE A NORMA DE $u+v$ É JUSTAMENTE O VALOR DO TAMANHO DA HIPOTENUSA DO TRIÂNGULO, ENTÃO É VALIDO A UTILIZAÇÃO DE UM TEOREMA DE PITÁGORAS PARA RESOLVER A QUESTÃO.

(2) RETAS $2x+3y=0$ E $3x-2y=0$

a) $\ell = \{(x,y) \mid 2x+3y=0\} = \{(x,y) \mid \langle (x,y) \mid (2,3) \rangle = 0\}$

$w_1 = (2,3)_{//}$

$\ell = \{(x,y) \mid 3x-2y=0\} = \{(x,y) \mid \langle (x,y) \mid (3,-2) \rangle = 0\}$

$w_2 = (3,-2)_{//}$

ÂNGULO ENTRE $w_1 = (2,3)$ E $w_2 = (3,-2)$

$\langle (2,3)(3,-2) \rangle = 2 \cdot 3 + (3) \cdot (-2) = 6-6 = 0$

$\|(2,3)\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$\|(3,-2)\| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

PORTANTO: $\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\theta) = 0$

$13 \cos(\theta) = 0$

$\cos(\theta) = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

b) $w_1 = (2,3) \rightarrow w_1^{\perp} = (3,-2)$

$w_2 = (3,-2) \rightarrow w_2^{\perp} = (-2,-3) = (2,3)$

ÂNGULO ENTRE $w_1^{\perp} = (3,-2)$ E $w_2^{\perp} = (2,3)$

$\langle (3,-2) \mid (2,3) \rangle = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 6-6 = 0$

$\|(-3,-2)\| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\|(2,3)\| = \sqrt{2^3+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

PORTANTO: $\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cos(\theta) = 0$

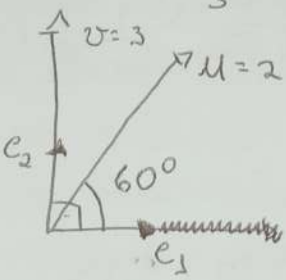
$13 \cos(\theta) = 0$

$\cos(\theta) = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

③ VETORES $u$ E $v$ DE NORMAS 2 E 3 E ÂNGULOS $\frac{\pi}{3}$ E $\frac{\pi}{2}$ COM $e_1$.

$$\frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = \cancel{\frac{180\pi}{3\pi}} = 60$$

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{180}{\pi} = \cancel{\frac{180\pi}{2\pi}} = 90$$

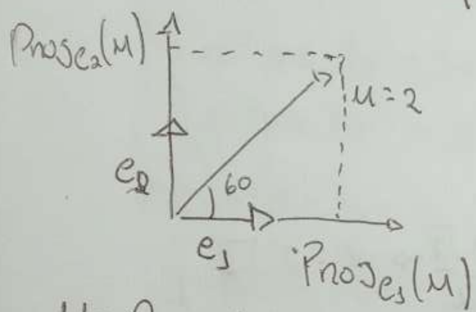


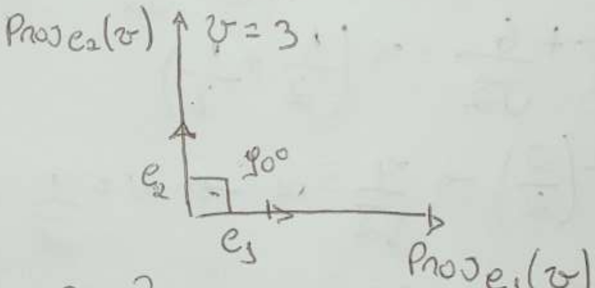

a) $\langle u | v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\theta)$

$= 2 \cdot 3 \cdot \cos(30)$

$= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) COORDENADAS DE $u$ E $v$ RELATIVO À BASE $\varepsilon$




$u = Proj_{e_1}(u) + Proj_{e_2}(u)$

$u = \|u\| \cos(60) + \|u\| \cos(30°)$

$u = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$u = 1 + \sqrt{3}$

$u = (1, \sqrt{3})$

$v = Proj_{e_1}(v) + Proj_{e_2}(v)$

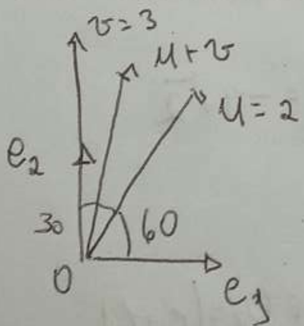
$v = \|v\| \cos(90) + \|v\| \cos(0)$

$v = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1$

$v = 0 + 3$

$v = (0, 3)$

c) COORDENADA DE $u + v$ RELATIVO À BASE $\varepsilon$




$u + v = (1, \sqrt{3}) + (0, 3)$

$u + v = (1, \sqrt{3} + 3)$

$e_1 \hat{o}\, u + v = 75°$

$\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

④ $v=(-2,6)$, $\beta=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$

$\beta=\{v_1, v_2\}$

$v=\alpha v_1+\gamma v_2$

$\langle v, v_1\rangle=\langle \alpha v_1+\gamma v_2 \mid v_1\rangle$

$\langle v, v_1\rangle=\alpha\langle v_1, v_1\rangle+\cancel{\gamma\langle v_2, v_1\rangle}$

$\langle(-2,6),\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle=\alpha\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle$

$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}+6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}=\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{-2}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}=\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$\frac{4}{\sqrt{2}}=\alpha\left(\frac{2}{2}\right) \rightarrow \frac{4}{\sqrt{2}}=\alpha \rightarrow \alpha=\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha=\frac{4\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha=2\sqrt{2}$

$\langle v, v_2\rangle=\cancel{\alpha\langle v_1, v_2\rangle}+\gamma(v_2, v_2)$

$\langle(-2,6),\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\rangle=\gamma\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\rangle$

$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}+6 \cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$\frac{-2}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt{2}}=\gamma\left(\frac{2}{2}\right)$

$\frac{-8}{\sqrt{2}}=\gamma \rightarrow \gamma=\frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \gamma=\frac{-8\sqrt{2}}{2} \rightarrow \gamma=-4\sqrt{2}$

$R=[v]_\beta=(2\sqrt{2},-4\sqrt{2})$

⑤ SEJA $U_1$ E $U_2$ VETORES ENTÃO SUPOMOS QUE $U_1=(a,b)$ E $U_2=(c,d)$, E A MATRIZ U TOMA ESTES COMO PONTOS DENTRO DE SI.
PARA SABER SE ESSES PONTOS NÃO SÃO COLINEARES O RESULTADO DO CALCULO DO DETERMINANTE REFERENTE A ESSES PONTOS ($U_1$ E $U_2$) NA MATRIZ TEM QUE UM VALOR DIFERENTE DE O.
ENTÃO É NESSE PONTOS QUE ESSAS AFIRMAÇÕES SE EQUIVALEM.

(6) AS PROJEÇÕES $S_I(1,0)=(2,0)$ E $S_{II}(0,1)=(2,1)$ GERAM A MATRIZ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E PARA ACHAR A MATRIZ S BASTA CALCULAR A MATRIZ INVERSA DA MATRIZ ACIMA, DESSA FORMA:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PELA IGUALDADE, TIRAMOS O SISTEMA:

$$\begin{cases} 2a+2c=1 \\ 2b+2d=0 \end{cases}$$

E AS INFORMAÇÕES QUE $c=0$ E $d=1$, ENTÃO RESOLVENDO AS EQUAÇÕES DO SISTEMA SUBSTITUINDO ESSES VALORES, RESULTA EM:

$$2a+2(0)=1 \qquad 2b+2(1)=0$$
$$2a+0=1 \qquad 2b+2=0$$
$$a=\frac{1}{2} \qquad 2b=-2$$
$$b=\frac{-2}{2}=-1$$

FICAMOS COM $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=0$ E $d=1$, COM A QUAL PODEMOS MONTAR A MATRIZ FINAL DE S:

$$S=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) P é um operador que descreve uma projeção ortogonal no plano sobre uma reta $\ell$. Então $P(1,1)$ descreve a projeção de um vetor $\vec{v}$ igual a $(1,1)$.

Para determinar a matriz dessa projeção devemos achar as coordenadas $a$ e $b$ de um vetor diretor unitário.

$$P(x,y) = (a^2x + aby,\ abx + b^2y)$$

$$P(1,1) = (a^2 + ab,\ ab + b^2)$$

$$(a^2 + ab,\ ab + b^2) = (10, 15)$$

$$\begin{cases} a^2 + ab = 10 \\ ab + b^2 = 15 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima chegamos a $a$ e $b$

$$\begin{cases} a(a+b) = 10 \\ b(a+b) = 15 \end{cases} \rightarrow \frac{a\cancel{(a+b)}}{b\cancel{(a+b)}} = \frac{10}{15} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \rightarrow a = \frac{2}{3}b$$

$$\frac{2}{3}b \times b + b^2 = 15 \rightarrow \frac{2}{3}b^2 + b^2 = 15 \rightarrow \frac{5}{3}b^2 = 15 \rightarrow b^2 = 9$$

$$b = \pm 3$$

$$a^2 + a(3) = 10 \rightarrow a = -2,\ \cancel{a = 5}$$

$$a^2 + a(-3) = 10 \rightarrow \cancel{a = 5},\ a = 2 \quad \rightarrow a = \pm 2$$

Foi encontrado o valor de $u = (a,b)$ que é $u = (2,3)$ sendo a matriz correspondente ao operador projeção

$$P(u) = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$$

$$P(1,1) = \begin{bmatrix} 2^2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$P(1,1) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

8) a) O VETOR $v$ E SEU REFLEXO $R(v)$ SÃO SIMÉTRICOS ATRAVÉS DO ESPELHO, ENTÃO A SOMA DOS DOIS É UM VETOR NO ESPELHO.
NESSE CASO:

$$v + R(v) = (1,3) + \left(\frac{-241}{169}, \frac{-477}{169}\right)$$

$$v + R(v) = \left(\frac{-72}{169}, \frac{30}{169}\right) = \frac{6}{169}(-12,5)$$

PORTANTO A RETA ONDE OCORRE A REFLEXÃO TEM COMO VETOR DIRETOR $(-12,5)$

b) O VETOR PERPENDICULAR A RETA É DADO POR $v\perp = (a_2, -a_1)$,
ENTÃO: $v = (-12,5) \rightarrow v\perp = (5,12)$.
PARA CALCULA O VETOR UNITÁRIO PRECISAMOS VERIFICAR:

$$u = \frac{v}{\|v\|} \rightarrow u = \frac{(5,12)}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{(5,12)}{\sqrt{169}} = \frac{(5,12)}{13}$$

PORTANTO O VETOR UNITÁRIO PERPENDICULAR AO ESPELHO É:

$$\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

c) A MATRIZ DA REFLEXÃO É DADA ASSIM

$$R(1,3) = (1-2b^2+(2ab)3,\ 2ab+(1-2a^2)3)$$

$$R(1,3) = (1-2b^2+6ab,\ 2ab+(3-6a^2))$$

$$(1-2b^2+6ab,\ 3-6a^2+2ab) = \left(\frac{-241}{169}, \frac{-477}{169}\right)$$

$$6ab-2b^2 = 1 - \frac{241}{169}$$

$$2ab-6a^2 = 3 - \frac{477}{169}$$

$$\begin{cases} 6ab-2b^2 = -\dfrac{72}{169} \\ 2ab-6a^2 = \dfrac{30}{169} \end{cases}$$

CONTINUA

RESOLVENDO O SISTEMA ACIMA, TEMOS OS RESULTADOS DE:

$$a = \pm \frac{5}{13} \quad b = \pm \frac{12}{13}$$

EXCLUINDOS OS VALORES NEGATIVOS FICAMOS COM:

$$u = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

USAMOS ESSAS COORDENADAS PARA DETERMINAR A MATRIZ CORRESPONDENTE A REFLEXÃO:

$$(R)_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1-2b^2 & 2ab \\ 2ab & 1-2a^2 \end{bmatrix} \rightarrow R_M = \begin{bmatrix} 1-2\left(\frac{12}{13}\right)^2 & 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) \\ 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) & 1-2\left(\frac{5}{13}\right)^2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$R_M = \begin{bmatrix} 1-\frac{288}{169} & 2\left(\frac{60}{169}\right) \\ 2\left(\frac{60}{169}\right) & 1-\frac{50}{169} \end{bmatrix} \rightarrow R_M = \begin{bmatrix} \frac{-119}{169} & \frac{120}{169} \\ \frac{120}{169} & \frac{119}{169} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$R_M = \frac{1}{169}\begin{bmatrix} -119 & 120 \\ 120 & 119 \end{bmatrix}.$$