ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA – UFRJ – 2020.1

ESTUDO DIRIGIDO 4

Questões sobre os temas da Semana 7

Questão 1. *Use o algoritmo de Gram-Schimdt para achar bases ortonormais para os subespaços dados abaixo:*

(a) $\{(-2,-8,0,2),(-2,-9,9,0),(4,15,9,-6)\}$ *em* $\mathbb{R}^4$*;*
(b) $\{(3,-1,-4,2),(3,-2,-1,0),(-6,1,11,-7)\}$ *em* $\mathbb{R}^4$.

Questão 2. *O objetivo deste exercício é completar o conjunto*

$$C = \left\{ \frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,-1) \right\}$$

para uma base ortonormal do $\mathbb{R}^4$*. Para isso:*

(a) Complete C *para uma base* β *do* $\mathbb{R}^4$.
(b) Aplique o algoritmo de Gram-Schimdt a β.
(c) Este método funcionaria para qualquer conjunto C *de dois vetores do* $\mathbb{R}^4$*? Por quê?*

Questão 3. *Determine todos os valores para* a, b *e* c *para os quais a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & 1/\sqrt{2} & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

é ortogonal.

Questão 4. *Sejam* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *dois vetores cujas normas são iguais. Use as propriedades do produto interno para provar que* $u+v$ *tem que ser ortogonal a* $u-v$.

Date: 1 de fevereiro de 2021.

Questões sobre os temas da Semana 8

Questão 5. *Determine dois subespaços complementares diferentes para*

$$W = \langle (1,2,0,4), (-1,3,2,1), (2,-1,0,5) \rangle.$$

Questão 6. *Sejam W_1 e W_2 os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:*

$$W_1 = \{(x,y,z,w) \mid x - y + z = x + y - z - w = 5x + y - z - 3w = 0\};$$
$$W_2 = \langle (1,-1,0,3), (4,-1,0,2), (-6,4,-1,-9), (10,-5,1,11) \rangle$$

Determine:

(a) *uma base e a dimensão de W_1;*
(b) *um sistema homogêneo cujo conjunto solução é W_2;*
(c) *uma base e a dimensão de $W_2^\perp$;*
(d) *uma base e a dimensão de $W_1 + W_2$;*
(e) *uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$.*

Questão 7. *Considere os subespaços*

$$U = \{(x,y,u,v,z) \mid x + y + u - z = x - y - 2u + z = 5x + y - u - z = 0\}$$
$$W = \langle (2,1,1,0,0), (-4,-2,1,1,1), (0,1,3,1,0), (-6,-3,0,1,1) \rangle$$

Determine:

(a) *uma base e a dimensão $U \cap W^\perp$;*
(b) *uma base e a dimensão $U^\perp + W$.*

Questão 8. *Prove que se U e W são subespaços do $\mathbb{R}^n$ tais que*

a união de uma base de U com uma base de W é uma base do $\mathbb{R}^n$

então $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.

Questão 9. *Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Você deve dar um contra-exemplo para as afirmações falsas e provar as verdadeiras.*

(a) *se $U \subset W$ são subespaços do $\mathbb{R}^n$ e β é uma base de W, então alguns dos vetores de β geram U;*
(b) *se U e W são subespaços do $\mathbb{R}^n$ tais que $\dim(U) < \dim(W)$, então $U \subset W$;*
(c) *se U é subespaço do $\mathbb{R}^n$ e $v \notin U$, então v pertence a um complementar de U.*