# ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA – UFRJ – 2020.1

ESTUDO DIRIGIDO 2: SEMANAS 3 E 4

**Leia as instruções abaixo antes de começar o estudo dirigido:**

1. **não serão aceitas respostas sem justificativa**;
2. o estudo dirigido pode ser feito usando um software (latex, word, jamboard...), mas você também pode escrever em **papel branco** com caneta **preta** e fotografar ou escanear o papel;
3. o arquivo deve então ser convertido em **PDF**;
4. **o arquivo enviado tem que ser obrigatoriamente um PDF**;
5. caso escreva em papel ou usando o Jamboard ou algo equivalente seja organizado e use letra legível;
6. o nome do arquivo PDF deve estar no formato

   `seu primeiro nome_seu DRE_EDn.pdf`

   em que `n` é o número do estudo dirigido;
7. seu nome completo e DRE devem encabeçar a primeira página do PDF.

Além disso, o código de conduta apresentado junto com o programa do curso deve ser integralmente respeitado.

## Questões sobre os temas da Semana 3

Você pode usar o Maxima para fazer os cálculos nos exercício de 1 a 5, mas o pdf que você enviar deve conter necessariamente uma explicação passo-a-passo do que está sendo feito. Além disso o cálculo dos autovalores e autovetores deve, necessariamente, seguir os passos explicados nas notas de aula e nos vídeos:

1. calcule o polinômio característico da matriz do operador;
2. calcule as raízes do polinômio característico;
3. para pelo menos um dos autovalores encontrados calcule um autovetor resolvendo o sistema linear correspondente.

**Questão 1.** *Calcule os autovalores e autovetores dos operadores autoadjuntos cujas matrizes na base canônica são dadas abaixo. Suas justificativas devem explicitar os cálculos realizados para obter o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de cada operador.*

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{914}{169} & \frac{240}{169} \\ \frac{240}{169} & -\frac{438}{169} \end{bmatrix}$$

**Questão 2.** *Determine a matriz na base canônica do operador autoadjunto $T$ do plano que tem $3$ e $-5$ como autovalores, sabendo-se que $(1, -2)$ é um autovetor de $T$ associado ao autovalor $-5$.*

**Questão 3.** *Determine um quadrado, que seja levado em um losango de área $8$ pelo operador $T$ cuja matriz na base canônica é*

$$\begin{bmatrix} \frac{34}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{41}{25} \end{bmatrix}$$

**Dica:** *centre o losango na origem, com cada autovetor correspondendo à metade da sua diagonal.*

**Questão 4.** *O objetivo desta questão é encontrar todas as matrizes ortogonais $2 \times 2$ que representam operadores autoadjuntos. Para isso você deve seguir os seguintes passos:*

- **passo 1:** *Escreva uma matriz $R$ de tamanho $2 \times 2$, com coeficientes literais, que corresponda a um operador autoadjunto.*
- **passo 2:** *Determine as equações que as entradas de $R$ têm que satisfazer para que esta matriz também seja ortogonal.*
- **passo 3:** *Resolva o sistema de equações encontrado no passo 2 usando o Maxima.*
- **passo 4:** *Descreva as matrizes obtidas a partir de cada solução encontrada no passo 3.*

**Dica:** *para resolver o sistema no passo 3 você deve usar a função* `solve(leq,lv)` *do Maxima, na qual* `leq` *é a lista de equações obtidas no passo 3 e* `lv` *é a lista das variáveis que aparecem nestas equações.*

**Questão 5.** *Neste exercício provamos que* todo operador autoadjunto cuja matriz na base canônica é ortogonal é uma reflexão ou um múltiplo do operador identidade. *Para isso:*

(a) *Mostre que um operador autoadjunto cujos autovalores são* $1$ *e* $-1$ *tem que ser uma reflexão.*

(b) *Mostre que todas as matrizes ortogonais e simétricas encontradas no exercício anterior, ou são múltiplas da identidade, ou têm autovalor* $1$ *e* $-1$.

## Questões sobre os temas da Semana 4

**Questão 6.** *Resolva cada um dos sistemas abaixo usando eliminação gaussian. Você deve indicar claramente a matriz aumentada do sistema, as etapas do cálculo de sua forma escada e a solução do sistema triangular por substituição.*

$$(a)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = -4 \\ -10x_1 - 15x_2 - 15x_3 & = 20 \\ 39x_1 + 58x_2 + 58x_3 & = -74 \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 10x_4 & = -6 \\ ,6x_1 + 12x_2 + 21x_3 + 30x_4 & = 18 \\ -20x_1 - 40x_2 - 69x_3 - 97x_4 & = -54 \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 & = -1 \\ 92x_1 + 133x_2 + 427x_3 + 364x_4 - 92x_5 & = -39 \\ -26x_1 - 37x_2 - 125x_3 - 101x_4 + 40x_5 & = 13 \\ 80x_1 + 115x_2 + 375x_3 + 315x_4 - 90x_5 & = -35 \\ -223x_1 - 320x_2 - 1041x_3 - 882x_4 + 223x_5 & = 99 \end{cases}$$

**Questão 7.** *Determine os valores de* $k$ *para os quais os sistemas abaixo são determinados, indeterminados ou impossíveis.*

$$(a)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 3 \\ x_1 + x_3 + (k+2)\,x_2 & = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3\,(k-1) & = -5 \end{cases}$$

*(b)*
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 1 \\ x_1 + (2-k)x_2 - x_3 & = 1+k \\ 3x_1 + (6-3k)x_2 + (k^2-k-3)x_3 & = 5+k \end{cases}$$