(Q1) a) $\{(-2,-8,0,2), (-2,9,9,0), (4,15,9,-6)\}$ EM $\mathbb{R}^4$

TEMOS A BASE $\{v_1, v_2, v_3\}$ E QUEREMOS CALCULAR $\{w_1, w_2, w_3\}$

$$w_1 = v_1 \to w_1 = (-2,-8,0,2)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$$= (-2,-9,9,0) - \frac{\langle(-2,-9,9,0),(-2,-8,0,2)\rangle}{\langle(-2,-8,0,2),(-2,-8,0,2)\rangle}(-2,-8,0,2)$$

$$= (-2,9,9,0) - \frac{19}{18}(-2,-8,0,2)$$

$$= \left(\frac{1}{9}, \frac{-5}{9}, 9, \frac{-19}{9}\right) \text{ ou } \frac{1}{9}(1,-5,81,-19)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

$$= (4,15,9,-6) - \frac{\langle(4,15,9,-6),(-2,-8,0,2)\rangle}{\langle(-2,-8,0,2),(-2,-8,0,2)\rangle}(-2,-8,0,2)$$

$$- \frac{\langle(4,15,9,-6),(1/9,-5/9,9,-19/9)\rangle}{\langle(1/9,-5/9,9,-19/9),(1/9,-5/9,9,19/9)\rangle}(1/9,-5/9,9,-19/9)$$

$$= (4,15,9,-6) - \frac{35}{18}(-2,-8,0,2) - 1\left(\frac{1}{9}, \frac{-5}{9}, 9, \frac{-19}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{70}{9}, \frac{280}{9}, 0, \frac{-70}{9}\right) \text{ ou } \frac{1}{9}(70,280,0,-70)$$

PORTANTO A BASE É:

$$\left\{(-2,-8,0,2), \frac{1}{9}(1,-5,81,-19), \frac{1}{9}(70,280,0,-70)\right\}$$

b) $\{(3,-1,-4,2),(3,-2,1,0),(-6,1,11,-7)\}$ EM $\mathbb{R}^4$

TEMOS A BASE $\{v_1, v_2, v_3\}$ E QUEREMOS CALCULAR $\{w_1, w_2, w_3\}$

$w_1 = v_1 \to w_1 = (3,-1,-4,2)$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$$= (3,-2,1,0) - \frac{\langle (3,-2,1,0),(3,-1,-4,2)\rangle}{\langle (3,-1,-4,2),(3,-1,-4,2)\rangle}(3,-1,-4,2)$$

$$= (3,-2,1,0) - \frac{7}{30}(3,-1,-4,2)$$

$$= \left(\frac{23}{10}, \frac{-53}{30}, \frac{29}{15}, \frac{-7}{15}\right) \text{ OU } \frac{1}{30}(69,-53,58,-14)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

$$= (-6,1,11,-7) - \frac{\langle(-6,1,11,-7),(3,1,-4,2)\rangle}{\langle(3,1,-4,2),(3,1,-4,2)\rangle}(3,1,-4,2)$$

$$- \frac{\langle(-6,1,11,-7),(23/10,-53/30,29/15,-7/15)\rangle}{\langle(23/10,-53/30,29/15,-7/15),(23/10,-53/30,29/15,-7/15)\rangle} \cdot (23/10,-53/30,29/15,-7/15)$$

$$= (-6,1,11,-7) + \frac{77}{30}(3,1,-4,2) - \frac{269}{371}\left(\frac{23}{10}, \frac{-53}{30}, \frac{29}{15}, \frac{-7}{15}\right)$$

$$= \left(\frac{12}{371}, \frac{-2}{7}, \frac{-248}{371}, \frac{-81}{53}\right) \text{ OU } \frac{1}{371}(12,-106,-248,-567)$$

PORTANTO A BASE É:

$$\left\{(3,-1,-4,2), \frac{1}{30}(69,-53,58,-14), \frac{1}{371}(12,-106,-248,-567)\right\}$$

Q2

a) PRECISAMOS ACHAR UM VETOR $v = (x, y, z, w)$, QUE OBEDEÇA O SEGUINTE:

$$\left\langle \frac{1}{2}(1,1,1,1), (x,y,z,w) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,1), (x,y,z,w) \right\rangle = 0$$

AS CONDIÇÕES SÃO SER ORTOGONAIS AOS OUTROS DOIS VETORES E FAZER PARTE DO CONJUNTO S, ENTÃO:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{w}{2} = 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{6}} - \frac{y}{\sqrt{6}} + 0 + \frac{w}{\sqrt{6}} = 0 \end{cases} \quad \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{w}{2} = 0 \quad (1) \\ -\frac{\sqrt{6}y}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}z - \frac{\sqrt{6}}{6}w = 0 \quad (2) \end{cases}$$

DA EQUAÇÃO 2 DO SISTEMA OBTEMOS A VARIÁVEL Y:

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}y = \frac{\sqrt{6}}{3}z + \frac{\sqrt{6}}{6}w \rightarrow y = -\frac{2z}{3} - \frac{1}{3}w$$

DA EQUAÇÃO 1 DO SISTEMA OBTEMOS A VARIÁVEL X:

$$\frac{x}{2} = -\frac{y}{2} - \frac{z}{2} - \frac{w}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \left(-\frac{2z}{3} - \frac{w}{4}\right) \cdot -\frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \frac{w}{2} \rightarrow$$

$$\frac{x}{2} = \frac{2z}{6} + \frac{w}{6} - \frac{z}{2} - \frac{w}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = -\frac{z}{6} - \frac{w}{3} \rightarrow x = -\frac{2z}{6} - \frac{2w}{3} \rightarrow x = -\frac{z}{3} - \frac{2w}{3}$$

ENTÃO: $x = -\frac{z}{3} - \frac{2w}{3} \quad y = -\frac{2z}{3} - \frac{1}{3}w \quad z = z \quad w = w$

$$v = \left(-\frac{z}{3} - \frac{2w}{3}, -\frac{2z}{3} - \frac{w}{3}, z, w\right)$$

$$v = z\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + w\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

A NOVA BASE POSSÍVEL PARA β FICA:

$$\left\{ \frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,1), \frac{1}{3}(-1,-2,3,0), \frac{1}{3}(-2,-1,0,3) \right\}$$

b) TEMOS A BASE $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ E QUEREMOS CALCULAR $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$$w_1 = v_1 \Rightarrow w_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \cdot w_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,1) - \frac{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,1), \frac{1}{2}(1,1,1,1)\right)\right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,1,1)\right)\right\rangle} \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,1) - \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,1) - \frac{\sqrt{6}}{12}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle (v_3, w_1)\rangle}{\langle (w_1, w_1)\rangle} w_1 - \frac{\langle (v_3, w_2)\rangle}{\langle (w_2, w_2)\rangle} w_2$$

$$= \frac{1}{3}(-1,-2,3,0) - \frac{\left\langle \left(\frac{1}{3}(-1,-2,3,0), \frac{1}{2}(1,1,1,1)\right)\right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,1,1)\right)\right\rangle} \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

$$- \frac{\left\langle \left(\frac{1}{3}(-1,-2,3,0), \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)\right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)\right\rangle} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(-1,-2,3,0) - \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1) - 0 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(-1,-2,3,0)$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle (v_4, w_1)\rangle}{\langle (w_1, w_1)\rangle} w_1 - \frac{\langle (v_4, w_2)\rangle}{\langle (w_2, w_2)\rangle} w_2 - \frac{\langle (v_4, w_3)\rangle}{\langle (w_3, w_3)\rangle} w_3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-2,-1,0,3) - \left\langle \left(\frac{1}{3}(-2,-1,0,3), \frac{1}{2}(1,1,1,1)\right)\right\rangle \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

$$- \frac{\left\langle \left(\frac{1}{3}(-2,-1,0,3), \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)\right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)\right\rangle} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$-\frac{\left\langle \frac{1}{3}(-2,-1,0,3), \frac{1}{3}(-1,-2,3,0)\right\rangle}{\left\langle \frac{1}{3}(-1,-2,3,0) - 0\cdot\frac{1}{3}(-1,-2,3,0)\right\rangle}\cdot\frac{1}{3}(-1,2,3,0)$$

$$= \frac{1}{3}(-2,-1,0,3) - \frac{0}{1}\cdot\frac{1}{2}(1,1,1,1)\cdot 0\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt3}{\sqrt2}, \frac{-\sqrt3}{\sqrt2}, \frac{-1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right)\cdot -\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{1}{3}(-1,2,3,0)$$

$$= \frac{1}{3}(-2,-1,0,3) - 0 - 0 - \frac{2}{21}(-1,2,3,0)$$

$$= \left(-\frac{4}{7}, \frac{-1}{7}, \frac{-2}{7}, 1\right) \text{ ou } \frac{1}{7}(-4,-1,-2,7)$$

PORTANTO A BASE É:

$$\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt3}{\sqrt2}, \frac{-\sqrt3}{\sqrt2}, \frac{-1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right), \frac{1}{3}(-1,-2,3,0), \frac{1}{7}(-4,-1,-2,7)\right\}$$

c) NÃO. POIS A CONDIÇÃO PARA QUE ISSO SEJA POSSÍVEL É DE QUE OS VETORES SEJAM LINEARMENTE INDEPENDENTES.

Q3) DIZEMOS QUE UMA MATRIZ É ORTOGONAL SE: $A \cdot A^T = I$. ENTÃO:

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2a^2+1}{2} & \frac{2ab+\sqrt{2}c}{2} & 0 \\ \frac{2ab+\sqrt{2}c}{2} & b^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2a^2+1}{2} = 1 \qquad \frac{2\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)b+\sqrt{2}c}{2} = \frac{\sqrt{2}(b+c)}{2}$$

$$2a^2+1 = 2$$

$$2a^2 = 1 \qquad \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)b+\sqrt{2}c}{2} = \frac{\sqrt{2}(-b+c)}{2}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

MONTA DOIS SISTEMAS E RESOLVA

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}(b+c)}{2} = 0 \\ b^2+c^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(-b+c)}{2} = 0 \\ b^2+c^2 = 0 \end{cases}$$

OS VALORES POSSIVEIS PARA (a, b, c) SÃO:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Q4) QUEREMOS PROVAR QUE: $\|u\| = \|v\| \rightarrow \langle u+v, u-v \rangle = 0$

$\rightarrow$ PELA LINEARIEDADE DE PRODUTO INTERNO, ESCREVEMOS:

$\langle u+v, u-v \rangle = 0$, COMO: $\langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle - \langle v,v \rangle = 0$

$\rightarrow$ PELA PROPRIEDADE DO PRODUTO INTERNO, $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$, ENTÃO UM CANCELA O OUTRO NESSA OPERAÇÃO, FICA APENAS:

$\langle u,u \rangle - \langle v,v \rangle = 0 \rightarrow \langle u,u \rangle = \langle v,v \rangle$

$\rightarrow$ PELA PROPRIEDADE $\langle x,x \rangle = \|x\|^2$, ENTÃO:

$$\|u\|^2 = \|v\|^2$$

$\rightarrow$ REORGANIZANDO A RAIZ QUADRADA DOS DOIS LADOS:

$$\|u\| = \|v\|$$

(Q5) $W = \langle (1,2,0,4), (-1,3,2,1), (2,-1,0,5) \rangle$

ESCALONANDO A MATRIZ $A(W)$, CUJAS LINHAS SÃO OS GERADORES DE UM SUBESPAÇO U

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{MÉTODO DE GAUSS}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 14/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

PORTANTO, $\alpha = \{(1,0,0,14/5), (0,1,0,3/5), (0,0,1,1)\}$ É UMA BASE U E PODEMOS ACRESCENTAR NELA DUAS LINHAS À MATRIZ SEM QUE ELA DEIXE DE SER UMA MATRIZ ESCADA.

NESSE CASO OS VETORES PRECISAM ESTAR ENTRE A SEGUNDA E A TERCEIRA LINHA E ABAIXO DA TERCEIRA LINHA, PARA QUE A FORMA ESCADA SEJA MANTIDA

QUALQUER DOIS VETORES PODEM SER ACRESCENTADOS, DESDE QUE A FORMA ESCADA SEJA PRESERVADA, ASSIM, PODEM COMPLEMENTAR α COM QUALQUER VETORES DA FORMA:

$$v_1 = (0,0,a_1,a_2) \text{ e } v_2 = (0,0,0,b_1)$$

$$\{a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R} \mid a_1, b_1 \neq 0\}$$

HÁ UMA INFINIDADE DE ESCOLHAS POSSIVEIS PARA OS a's E b's HÁ UMA INFINIDADE DE COMPLEMENTARES POSSIVEIS PARA O SUBESPAÇO U. POR EXEMPLO:

$$\overline{U}_m = \langle (0,0,1,m), (0,0,0,1) \rangle$$

(Q6) $W_1 = \{(x,y,z,w) \mid x-y+z = x+y-z-w = 5x+y-z-3w = 0\}$

$W_2 = \langle (1,-1,0,3), (4,-1,0,2), (-6,4,-1,-9), (10,-5,1,11) \rangle$

(a) UMA BASE E DIMENSÃO DE W_1

PRIMEIRO TRANSFORMAMOS O SEGUINTE SISTEMA EM MATRIZ AUMENTA E CALCULAREMOS SUA FORMA ESCALONADA:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z-w=0 \\ 5x+y-z-3w=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{MÉTODO DE GAUSS}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \ (I) \\ 2y - 2z - w = 0 \ (II) \end{cases}$$

DA EQUAÇÃO (II) OBTEMOS A VARIÁVEL y: $y = z + \frac{w}{2}$

DA EQUAÇÃO (I) OBTEMOS A VARIÁVEL x: $x = \frac{w}{2}$

ENTÃO UM VETOR (x, y, z, w) DO CONJUNTO PODE SER ESCRITO ASSIM:

$(x, y, z, w) = \left(\frac{w}{2}, z + \frac{w}{2}, z, w\right)$

TIRANDO PARA FORA w E z: $z(0,1,1,0) + w\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$

ENTÃO: $\{(0,1,1,0), (1/2, 1/2, 0, 1)\}$ É UM DOS GERADORES POSSÍVEIS.

TENDO ESSES GERADORES ACHAREMOS A BASE E A DIMENSÃO.

VERIFICAREMOS SE ELE É L.I. PARA QUE SEJAM BASE DE $\mathbb{R}^4$.

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \xrightarrow{\text{INVERTE}} \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

COMO NENHUMA EQUAÇÃO ZERA, ENTÃO ELAS SÃO LINEARMENTE INDEPENDENTE E FORMAM UMA BASE

COMO TEMOS DUAS VARIÁVEIS LIVRES ESTE É UM SUBESPAÇO DE DIMENSÃO 2.

(b) UM SISTEMA HOMOGÊNIO CUJO CONJUNTO SOLUÇÃO É W_2:

$$W_2 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \\ 10 & 6 & 1 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ELIMINAÇÃO GAUSSIANA}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

QUE CORRESPONDE AO SISTEMA TRIANGULAR:

$$\begin{cases} x - y + 3w \ (I) \\ 3y - 10w \ (II) \\ -z + \frac{7}{3}w \ (III) \end{cases}$$

DA EQUAÇÃO (III), OBTEMOS z: $z = \frac{7}{3}w$

DA EQUAÇÃO (II), OBTEMOS y: $y = \frac{10}{3}w$

DA EQUAÇÃO (I), OBTEMOS x: $x = \frac{w}{3}$

SUBSTITUI ESSES VALORES DE X, Y E Z NA MATRIZ COLUNA FORMADA PELAS VARIÁVEIS, VERIFICANDO QUE QUAISQUER VALORES ESCOLHIDOS PARA W, A MATRIZ FICA:

$$X_0 = \begin{bmatrix} w/3 \\ 10w/3 \\ 7w/3 \\ w \end{bmatrix} \quad \text{OU} \quad X_0 = w\begin{bmatrix} 1/3 \\ 10/3 \\ 7/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

QUE SATISFAZ $AX_0 = 0$, DE MODO QUE X_0 REPRESENTA A SOLUÇÃO DO SISTEMA QUANDO É EXPRESSO EM FORMA MATRICIAL.

(e) UMA BASE E A DIMENSÃO DE $W_2^\perp$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \\ 10 & -5 & 1 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{TRANSPONDO}} W_2^\perp = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 & 10 \\ -1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -9 & 11 \end{vmatrix}$$

ESCALONANDO A MATRIZ $A(W_2^\perp)$, USANDO O MÉTODO DE GAUSS.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 & 10 \\ -1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -9 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 6z + 10w & (I) \\ 3y - 2z + 5w & (II) \\ -z + w & (III) \end{cases}$$

DA EQUAÇÃO III OBTEMOS A VARIÁVEL Z: $z = w$
DA EQUAÇÃO II OBTEMOS A VARIÁVEL Y: $y = -w$
DA EQUAÇÃO I OBTEMOS A VARIÁVEL X: $x = 0$

ENTÃO UM VETOR (x, y, z, w) DO CONJUNTO PODE SER ESCRITO ASSIM: $(x, y, z, w) = (0, -w, w, w)$

TIRANDO PARA FORA W: $w(0, -1, 1, 1)$. ENTÃO: $\{(0, -1, 1, 1)\}$ É UM DOS GERADORES POSSÍVEIS E TENDO ESSES ACHAREMOS A BASE E A DIMENSÃO.

VERIFICAREMOS SE ELE É L.I PARA QUE SEJAM BASE DE $\mathbb{R}^4$!
MAS COMO NENHUMA EQUAÇÃO ZERA, POIS SÓ HÁ UMA, ENTÃO ELA É L.I E FORMA UMA BASE.

COMO TEMOS UMA VARIÁVEL LIVRE ESTE É UM SUBESPAÇO DE DIMENSÃO 1.

(d) UMA BASE E A DIMENSÃO DE $W_1 + W_2$;

PRIMEIRO PRECISAMOS DOS GERADORES PARA ESSES SUBESPAÇOS

$W_1 = \langle (0,1,1,0), (1/2, 1/2, 0, 1) \rangle$

$W_2 = \langle (1,-1,0,3), (4,-1,0,2), (-6,4,-1,-9), (10,-5,1,11) \rangle$

$W_1 + W_2 = \langle (0,1,1,0), (1/2, 1/2, 0, 1), (1,-1,0,3), (4,-1,0,2),$
$(-6,4,-1,-9), (10,-5,1,11) \rangle$

COMO A FORMA ESCADA DESTA MATRIZ É:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \\ 10 & -5 & 1 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{DE GAUSS}]{\text{MÉTODO}} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

VERIFICAMOS QUE OS VETORES

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right), (0,1,1,0), (0,0,2,1), \left(0,0,0,\frac{-17}{2}\right)$$

FORMAM UMA <u>BASE</u> DE $W_1 + W_2$ E COMO TEMOS QUATRO VARIÁVEIS LIVRES EST É UM SUBESPAÇO DE DIMENSÃO 4

(e) UMA BASE E A DIMENSÃO DE $W_1 \cap W_2$;

PRIMEIRO PRECISAMOS DA EQUAÇÕES

$W_1 : \{(x,y,z,w) \mid x - y + z = x + y - z - w = 5x + y - z - 3w = 0\}$

$W_2 = \{(x,y,z,w) \mid x - y + 3w = 3y - 10w = -z + \frac{7}{3}w = 0\}$

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) \mid x - y + z = x + y - z - w = 5x + y - z - 3w =$
$x - y + 3w = 3y - 10w = -z + \frac{7}{3}w = 0\}$

RESOLVENDO O SISTEMA ESCALONANDO ELE ABAIXO:

$$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{7}{3} \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow[\text{GAUSSIANA}]{\text{ELIMINAÇÃO}} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|$$

DESSA EQUAÇÃO OBTEMOS O SISTEMA:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2z - w = 0 \\ -z + 3w = 0 \\ \frac{w}{4} = 0 \end{cases}$$

DA EQUAÇÃO 4 DO SISTEMA TEMOS w: $w = 0$

DA EQUAÇÃO 3 DO SISTEMA TEMOS z: $z = 0$

DA EQUAÇÃO 2 DO SISTEMA TEMOS y: $y = 0$

DA EQUAÇÃO 1 DO SISTEMA TEMOS x: $x = 0$

ENTÃO O VETOR (x, y, z, w) É GERADO PELO VETOR $(0, 0, 0, 0)$

Q7 (a) PRIMEIRO PRECISAMOS DAS EQUAÇÕES:

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow W^{\perp} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

REALIZA A ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

DA ELIMINAÇÃO OBTEMOS ESSE SISTEMA:

$$\begin{cases} 2x - 4y - 6v = 0 \\ 3y + u + v = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$W_1 = \{(x, y, u, v, z) \mid x + y + u - z = x - y - 2u + z = 5x + y - u - z = 0\}$$

$$W_2^{\perp} = \{(x, y, u, v, z) \mid 2x - 4y - 6v = 3y + u + v = u = 0\}$$

$$W_1 \cap W_2^{\perp} = \{(x, y, u, v, z) \mid x + y + u - z = x - y - 2u + z = 5x + y - u - z = 2x - 4y - 6v = 3y + u + v = u = 0\}$$

RESOLVENDO O SISTEMA ESCALONANDO ELE ABAIXO:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11/14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

COM ISSO OBTEMOS O SISTEMA:

$$x + y + u - z = 0 \quad (I)$$
$$-2y - 3u + 2z = 0 \quad (II)$$
$$7u + 6v - 4z = 0 \quad (III)$$
$$4v + z = 0 \quad (IV)$$
$$\frac{11}{14} z = 0 \quad (V)$$

DA EQUAÇÃO 5 TEMOS z: $z = 0$
DA EQUAÇÃO 4 TEMOS v: $v = 0$
DA EQUAÇÃO 3 TEMOS u: $u = 0$
DA EQUAÇÃO 2 TEMOS y: $y = 0$
DA EQUAÇÃO 1 TEMOS x: x 0

COM ISSO CONCLUIMOS QUE O VETOR É GENADO POR $(0,0,0,0,0)$

(b) UMA BASE E DIMENSÃO $U^{\perp} + W$

PRIMEIRO PRECISAMOS DOS GERADORES PARA ESSE SUBESPAÇOS

$U = \langle (1,1,1,0,-1), (0,-2,-3,0,2) \rangle$

$W = \langle (2,1,1,0,0), (-4,-2,1,1,1), (0,1,3,1,0), (-6,-3,0,1,1) \rangle$