ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA – UFRJ – 2020.1

ESTUDO DIRIGIDO 5

Instruções:

1. não serão aceitas respostas sem justificativa;
2. você não precisa incluir o passo a passo da eliminação gaussiana, nem da aplicação do algoritmo de Gram-Schmidt nas suas respostas.
3. o código de conduta apresentado junto com o programa do curso deve ser integralmente respeitado.

Questões sobre os temas da Semana 9

Questão 1. *Escreva a matriz correspondente a cada uma das transformações lineares dadas abaixo:*

(a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2 + x_3 - 7x_5, x_1 - 9x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5);$$

(b) a projeção do $\mathbb{R}^5$ *no hiperplano definido por* $x - 2y - z - 5w = 0$*;*

(c) a reflexão do $\mathbb{R}^4$ *cujo espelho é o hiperplano de equação* $x - 3y - z + 2w = 0$.

Questão 2. *Determine uma base e a dimensão da imagem e do núcleo de cada uma das transformações lineares dadas abaixo:*

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $T(x, y, z, w)$ *é igual a*

$$(x + y - z, 3x - 4z - 5w, -2x + y + 3z + 5w, 9x + 3y - 11z - 10w)$$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *definida por*

$$T(x, y, z) = (x - y - z, 2x - 3y + z, -x + 2y - 2z, 3z - y)$$

Questão 3. *Determine a transformação* $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *que executa a projeção do* $\mathbb{R}^4$ *sobre o plano de equação* $x - y - z = x + y - w = 0$.

Date: 2 de fevereiro de 2021.

Questão 4. *Sejam $m \leq n$ inteiros e*

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad e \quad S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

transformações lineares..

(a) Mostre que se $S \circ T = \mathrm{id}_n$ então o núcleo de T é igual a $\{0\}$.
(b) Mostre que se também é verdade que $T \circ S = \mathrm{id}_m$ então T é bijetiva.

A transformação linear $\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leva um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ nele mesmo e a transformação id_m é definida de maneira análoga.
Sugestão para (b): *use $T \circ S = \mathrm{id}$ para mostrar que se $v \in \mathbb{R}^m$ então existe um vetor do $\mathbb{R}^n$ que é levado em v.*

Questões sobre os temas da Semana 10

Questão 5. *Descreva a matriz na base canônica de um operador linear sobrejetivo T do $\mathbb{R}^4$ que leva o hiperplano $w - z - x = 0$ no hiperplano $w - 2z - 3y = 0$.*

Questão 6. *Descreva a matriz na base canônica de um operador linear T do $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja o hiperplano $x - y + z - 3w = 0$ e cuja imagem seja gerada por $(1, 0, 1, 2)$.*

Questão 7. *Seja ρ a rotação de eixo $\ell = (1, 1, 1)$ que leva o vetor*

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad \text{em } v_2 = \frac{1}{15}(9, -2, -7).$$

(a) Determine uma base ortonormal do plano U normal ao eixo de ρ.
(b) Determine as projeções de v_1 e v_2 sobre U.
(c) Calcule o ângulo entre v_1 e v_2.
(d) Calcule o ângulo de rotação de ρ.
(e) Determine a matriz de ρ relativamente à base canônica.

Questão 8. *Vimos no ED03 que se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$ então*

$$\beta' = \{v_1 - v_2, v_1 - v_3, \ldots, v_1 - v_n, v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}$$

também é uma base do $\mathbb{R}^n$. Calcule as matrizes de mudança de base de β para β' e de β' para β.