6) PARA A MATRIZ DE Q SER DE ROTAÇÃO TEM QUE SATISFAZER

$$Q \cdot Q^T = I$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ a & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ b & \frac{1}{3} & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & a & b \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3a+2}{9} & \frac{3(b-2c)+2}{9} \\ \frac{3a+2}{9} & \frac{9a^2+5}{9} & \frac{9ab+2+3c}{9} \\ \frac{3(b-2c)+2}{9} & \frac{9ab+2+3c}{9} & \frac{9b^2+1+9c^2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3a+2}{9} = 0 \rightarrow 3a+2=0 \rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{9b^2+1+9c^2}{9} = 1 \rightarrow 9b^2+9c^2 = 8 \\ \frac{3(b-2c)+2}{9} = 0 \rightarrow 3b-6c = -2 \end{cases} \rightarrow b = \frac{2}{3} \rightarrow c = \frac{2}{3}$$

PARA CALCULAR O EIXO DA ROTAÇÃO É SÓ RESOLVER O SISTEMA QUE CORRESPONDE A CALCULAR OS AUTOVETORES DO AUTOVALOR 1

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/3\,x & 2/3\,y & -2/3\,z \\ -2/3\,x & 2/3\,y & 1/3\,z \\ 2/3\,x & 1/3\,y & 2/3\,z \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2/3\,x + 2/3\,y - 2/3\,z = 0 \\ -2/3\,x - 1/3\,y + 1/3\,z = 0 \\ 2/3\,x + 1/3\,y - 1/3\,z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{RESOLVENDO}} (x=0,\ y=2,\ z=2)$$

SUBSTITUINDO $z=1$ NAS COORDENADAS DO VETOR

$(x=0,\ y=1,\ z=1)$

E NORMALIZANDO O VETOR:

$\left(x=0,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ACHAMOS O VETOR EIXO

PARA CALCULAR O COSSENO DO ÂNGULO DE ROTAÇÃO DE Q FAZEMOS:

CRIANDO UM VETOR PERPENDICULAR AO EIXO

$v=(0,1,-1)$

O NORMALIZAMOS E PEGAMOS A TRANSPOSTA

$v=\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = v^T$

CALCULAMOS A MULTIPLICAÇÃO DA MATRIZ Q COM VETOR v^T

$V_F = Q \cdot v^T$

$V_F = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$

AGORA CALCULAMOS O PRODUTO INTERNO DE v^T COM V_F.

$\langle (v^T, V_F) \rangle = \frac{1}{3}$

E ESSE $\frac{1}{3}$ É JUSTAMENTE O COSSENO DO ÂNGULO