

# ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA – UFRJ – PLE

## ESTUDO DIRIGIDO 1: SEMANAS 1 E 2

Leia as instruções abaixo antes de começar o estudo dirigido:

1. não serão aceitas respostas sem justificativa;
2. o estudo dirigido pode ser feito usando um software (latex, word, jamboard...), mas você também pode escrever em **papel branco** com caneta **preta** e fotografar ou escanear o papel;
3. o arquivo deve então ser convertido em **PDF**;
4. o arquivo enviado tem que ser obrigatoriamente um **PDF**;
5. caso escreva em papel ou usando o Jamboard ou algo equivalente seja organizado e use letra legível;
6. o nome do arquivo PDF deve estar no formato  
seu primeiro nome\_seu DRE\_EDn.pdf  
em que **n** é o número do estudo dirigido;
7. seu nome completo e DRE devem encabeçar a primeira página do PDF.

Além disso, o código de conduta apresentado junto com o programa do curso deve ser integralmente respeitado.

### Questões sobre os temas da Semana 1

**Questão 1.** *Sejam  $u$  e  $v$  vetores do plano.*

- (a) *Use as propriedades do produto interno para calcular  $\|u + v\|^2$ . Você deve indicar qual foi a propriedade utilizada em cada etapa do seu cálculo.*
- (b) *Sob que condições podemos afirmar que  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ ?*
- (c) *O que (b) nos diz sobre a validade do teorema de Pitágoras?*

**Questão 2.** *Considere as retas  $2x + 3y = 0$  e  $3x - 2y = 0$ .*

- (a) *Ache um vetor normal a cada reta dada e calcule o ângulo entre eles.*

(b) Ache um vetor diretor de cada reta dada e calcule o ângulo entre eles.

**Questão 3.** Sejam  $u$  e  $v$  vetores de normas 2 e 3, que formam com  $e_1$  ângulos iguais a  $\pi/3$  e  $\pi/2$ , respectivamente. Calcule:

- (a) o produto interno  $\langle u | v \rangle$ ;
- (b) as coordenadas de  $u$  e  $v$  relativamente à base  $\varepsilon$ ;
- (c) as coordenadas de  $u + v$  relativamente à base  $\varepsilon$ .

Use o Maxima para calcular o cosseno do ângulo entre  $u + v$  com  $e_1$ .

**Questão 4.** Se  $v = (-2, 6)$  são as coordenadas de um vetor  $v$  em relação à base canônica, quais são as suas coordenadas relativamente à base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right\},$$

cujos vetores também estão escritos em coordenadas na base canônica.

**Questão 5.**

Sejam  $u_1$  e  $u_2$  vetores do plano e  $U$  a matriz cuja primeira linha é  $u_1$  e cuja segunda linha é  $u_2$ . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $u_1$  e  $u_2$  não são colineares;
- (b)  $\det(U) \neq 0$ .

**Questões sobre os temas da Semana 2**

**Questão 6.** *Determine a matriz de um operador linear  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que leve o quadrado de vértices*

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1).$$

*no paralelogramo de vértices*

$$(0, 0), (2, 0), (2, 1), (4, 1).$$

**Questão 7.** *Seja  $P$  o operador do  $\mathbb{R}^2$  que descreve a projeção ortogonal sobre uma reta  $\ell$ . Determine a matriz de  $P$  na base canônica sabendo-se que  $P(1, 1) = (10, 15)$ .*

**Questão 8.** *Seja  $R$  uma reflexão do plano. Sabendo-se que*

$$R(1, 3) = -\frac{1}{169}(241, 477),$$

*determine:*

- (a) *a reta em torno da qual se dá esta reflexão, isto é o espelho de  $R$ ;*
- (b) *um vetor unitário perpendicular a esta reta;*
- (c) *a matriz de  $R$ .*

*Dica para (a): faça um desenho.*

**Questão 9.** *Sejam  $R_1$  e  $R_2$  as reflexões cujos espelhos são, respectivamente, as retas  $y = 2x$  e  $y = 7x$ .*

- (a) *Determine a matriz do operador  $T = R_1 \circ R_2$  na base canônica.*
- (b) *Mostre que  $T$  é uma rotação e calcule o ângulo de rotação correspondente.*

**Questão 10.** *Prove que não existe uma rotação capaz de levar o sistema de eixos definido pela base canônica  $\varepsilon = \{e_1, e_2\}$  do plano no sistema de eixos definido pela base  $\beta = \{-e_1, e_2\}$ .*