LISTA 5

NOME: GABRIEL ALMEIDA MENDES DRE: 117204959

(1) EXISTEM $X, Y \in Z \in \mathbb{Z}^*$ QUE SATISFAÇAM A EQUAÇÃO $2^x \cdot 3^4 \cdot 26^y = 39^z$?

RESPOSTA: FATORANDO 26 E 39 EM FATORES PRIMOS, A EQUAÇÃO FICA:

$2^x \cdot 3^4 \cdot 2^y \cdot 13^y = 3^z \cdot 13^z$

$2^x \cdot 2^y \cdot 3^4 \cdot 13^y = 3^z \cdot 13^z$

COMO A FATORAÇÃO EM PRIMOS É ÚNICA, PODEMOS COMPARAR OS EXPOENTES:

$x + y = 0, \; z = 4, \; z = y$

COMO x, y, z SÃO POSITIVOS, CONCLUÍMOS NA PRIMEIRA EQUAÇÃO $X = -Y$.
PORTANTO O SISTEMA É IMPOSSÍVEL, ISTO É, NÃO EXISTEM INTEIROS POSITIVOS QUE SATISFAÇAM A EQUAÇÃO.

(2) a) SEJA $K > 1 \in \mathbb{Z}$. MOSTRE QUE $K!+2, K!+3, \ldots K!+K$ SÃO COMPOSTOS.

RESPOSTA: OBSERVE QUE $K \geq i > 1$, ENTÃO $K! + i$ É DIVISÍVEL POR i.
PODEMOS COLOCAR QUE $K! + i \geq i > 1$ ENTÃO TEMOS QUE $K! + i$, ONDE i TAMBÉM É DIVISOR DE K, OS NÚMEROS SÃO COMPOSTOS.

b) REFUTE QUE EXISTE UM $m \in \mathbb{Z}^*$ TAL QUE, DENTRE QUAISQUER $m \in \mathbb{Z}^*$ CONSECUTIVOS, SEMPRE HÁ UM PRIMO.

RESPOSTA: USANDO A SEQUÊNCIA ANTERIOR DADAS AS DEVIDAS ALTERAÇÕES.

$(m+1)! + 2, (m+1)! + 3, \ldots (m+1)! + (m+1)$

COMO m SÃO INTEIROS CONSECUTIVOS, VIMOS NO EXERCÍCIO ANTERIOR QUE TODOS OS NÚMEROS NA SEQUÊNCIA SÃO COMPOSTOS. OU SEJA, NEM SEMPRE NUMA SEQUÊNCIA HAVERÁ PRIMOS.

(3) a) PROVE OU REFUTE: A SOMA DE UM NÚMERO IRRACIONAL COM UM NÚMERO RACIONAL É SEMPRE IRRACIONAL.

RESPOSTA: SIM. PORQUE A SOMA DE DOIS RACIONAIS É SEMPRE RACIONAL.
(DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO)

b) PROVE OU REFUTE: A SOMA DE DOIS IRRACIONAIS É SEMPRE IRRACIONAL.

RESPOSTA: POR CONTRAEXEMPLO, PEGAMOS $\sqrt{2}$ E $1 - \sqrt{2}$ AMBOS IRRACIONAIS.
TEMOS QUE A SOMA DOS DOIS É 1, QUE É RACIONAL.

(4) a) SEJAM b_1 E $b_2 \in \mathbb{Z}^+$ SÃO PRIMOS ENTRE SI
MOSTRE QUE d É UM DIVISOR DE $b_1 b_2$ SSE $d = d_1 d_2$
ONDE $d_1 = mdc(d, b_1)$ E $d_2 = mdc(d, b_2)$

RESPOSTA: COMO $d_1 | d$, PODEMOS ESCREVER $d = d_1 \cdot c$, PARA ALGUM $c \in \mathbb{Z}^*$.
COMO $mdc(d_1, d_2) = 1$ E $d_2 | d \to d_2 | d_1 \cdot c$. ENTÃO PELA PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS PRIMOS, TEMOS QUE $d_2 | c$.
POR OUTRO LADO, $mdc(c, b_1) = 1$, E $c | d \to c | b_1 b_2$ COMO O PROBLEMA SUGERE.
NOVAMENTE PELA PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS PRIMOS, TEMOS QUE $c | b_2$, ASSIM c É DIVISOR COMUM DE b_2 E d.
CONCLUIMOS QUE $d_2 = c$. ENTÃO O ENUNCIADO ESTÁ CERTO.

b) DADO UM NATURAL $m > 0$, SEJA $S(m)$ A SOMA DE TODOS OS DIVISORES NATURAIS m.
Ex: $S(2) = 1+2 = 3$, $S(3) = 1+3 = 4$ E $S(6) = 1+2+3+6 = 12$.
USE O ITEM ANTERIOR PARA MOSTRAR QUE b_1 E $b_2 \in \mathbb{Z}^*$ PRIMOS ENTRE SI ENTÃO $S(b_1 b_2) = S(b_1) S(b_2)$.

RESPOSTA: LISTANDO OS DIVISORES DE b_1 E DE b_2:
DIVISORES DE $b_1 \to a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots, a_m$
DIVISORES DE $b_2 \to e_0 = 1, e_1, a_2, \ldots, e_m$
MAS $S(b_1) S(b) = (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(1 + e_1 + e_2 + \ldots + e_m)$
FEITO O PRODUTO, CONCLUIMOS QUE $S(b_1) \cdot S(b_2)$ É A SOMAS DOS NUMEROS DA FORMA $a_i \, (0 \leq i \leq m)$ MULTIPLICADO À $e_j \, (0 \leq j \leq m)$ QUE, COMO VIMOS ACIMA, SÃO EXATAMENTE OS DIVISORES DE $b_1 b_2$.
PORTANTO $S(b_1) S(b_2) = S(b_1 b_2)$.

(5) b) OLHEM EU NÃO ENTENDI COM CLAREZA O QUE É PARA FAZER NA (a), MAS EU SEI PROVAR QUE $mdc(a, m) = mdc(b, m) = mdc(ab, m) = 1$

RESPOSTA: PRIMEIRO VEJA QUE $MDC(b, m) / MDC(ab, m)$ PELA PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS PRIMOS $MDC(b, m) / ab$ E $MDC(b, m) / m$. RECIPROCAMENTE, PARA MOSTRAR QUE $MDC(ab, m) / MDC(b, m)$, PODEMOS USAR BEZOUT ASSIM
$a\alpha + m\beta = 1$ COM $X, Y \in \mathbb{Z}$.
ASSIM, $MDC(ab, m) / ab\alpha + mb\beta = b$ E TAMBEM $MDC(ab, m) / b$. LOGO $MDC(ab, m) = 1$.

8

$m = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\} \in \mathbb{Z}^*, \ m \% 4 = 1$

a) MOSTRE QUE A SOMA DE DOIS M-NUMEROS NUNCA É M-NUMERO

RESPOSTA: m UM M-NUMERO OU SEJA: $m = 4q + 1$

$m + m + 4 = 4q + 1 + (4q + 1 + 4) = 4q + 1 + (4q + 5) =$
$8q + 6 = 2(4q + \underline{3}) = 2K$, ONDE $K = 4q + 3$ E ESSE NUMERO NÃO É UM M-NUMERO.

b) MOSTRE QUE O PRODUTO DE DOIS M-NUMERO SEMPRE É UM M-NUMERO

$(m)(m+4) = (4q+1)(4q+1+4) = (4q+1)(4q+5) \rightarrow$
$16q^2 + 20q + 4q + 5) = 16q^2 + 24q + 5 = 8(2q + 3) + 5$

c) ACHE OS SEIS PRIMEIRO M-PRIMOS DE M-MUNDO

RESPOSTA: 5, 13, 17, 29, 31, 41

d) PROVE OU REFUTE A PFP DOS M-PRIMOS.

SEJAM a, b, p M-NUMEROS, COM p M-PRIMO.

SE p É M-DIVISOR DE ab, ENTÃO p É M-DIVISOR DE a OU p É M-DIVISOR DE b.

R= $p | ab$ ENTÃO $p | a$ OU $p | b$

DEMONSTRANDO POR CONTRADIÇÃO, DIZEMOS QUE p NÃO DIVIDE a E USAMOS O FATO DE p SER PRIMO PARA CONCLUIR QUE p NÃO DIVIDE a ENTÃO p E a SÃO PRIMOS ENTRE SI.

ENTÃO SE p E a SÃO PRIMO, $mdc(a, p) = 1$, E NESSA SITUAÇÃO PODEMOS APLICAR O LEMA DA PFP.

ENTÃO A AFIRMAÇÃO ESTÁ CORRETA

e) ACHE UM M-NUMERO m QUE TEM DUAS FATORAÇÕES DIFERENTES EM M-PRIMO