LISTA 6

GABRIEL ALMEIDA MENDES DRE: 117204959

(2) PRIMORIAL - $p^{\#} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p$

FATORES PRIMOS DE $p^{\#}+1 > p$

$$\begin{cases} m^{\#} = 1, \text{ SE } m < 2 \\ m^{\#} = \text{O PRODUTO DE TODOS OS PRIMOS DE 2 ATÉ } m, \text{ SE } m \geq 2 \end{cases}$$

a) PROVE QUE $\forall m, p \in \mathbb{N}$, SENDO p PRIMO E $p \leq m$, ENTÃO p NÃO DIVIDE $m^{\#}+1$

RESPOSTA: SABENDO QUE $m^{\#}+1$ NEM SEMPRE SERÁ PRIMO E QUE ELE NÃO POSSUI NENHUM FATOR PRIMO MENOR QUE m.
USAREI REDUÇÃO AO ABSURDO PARA PROVAR:

- DIZENDO QUE PRIMO p DIVIDE $m^{\#}+1$, SENDO $p<m$, ENTÃO EXISTE UM $r \in \mathbb{Z}^*$ TAL QUE $m^{\#}+1 = p \cdot r$.
- ESCREVENDO EM OUTRA FORMA: $\underline{p \cdot r - m^{\#}} = 1$
- COMO $p<m$, ENTÃO p É UM FATOR DE $m^{\#}$, LOGO p DIVIDE AMBAS AS PARCELAS DA DIFERENÇA ANTERIOR.
- PORTANTO p DIVIDE 1, O RESULTADO DISSO É $P=1$. MAS ISSO FAZ SENTIDO NENHUM PORQUE p É PRIMO E 1 NÃO É PRIMO.
- O RESULTADO É UM ABSURDO, ENTÃO p NÃO DIVIDE 1 E NADA, LOGO p NÃO DIVIDE $m^{\#}+1$. PROVADO.

b) PROVE A INFINITUDE DOS PRIMOS PARA TODO $m \in \mathbb{N}$, QUE EXISTE PRIMO $P>m$

RESPOSTA: USANDO REDUÇÃO AO ABSURDO DE NOVO:

- DIGAMOS QUE EXISTEM QUANTIDADE FINITA DE Nº PRIMOS
- ENTÃO EXISTE UM PRIMO p MAIOR DE TODOS. PORÉM, JÁ VIMOS NA QUESTÃO 2a QUE OS FATORES PRIMOS DE $p^{\#}+1$ TEM QUE SEREM MAIORES QUE p. MAS ESTAMOS SUPONDO QUE TODOS OS PRIMOS SÃO MENORES OU IGUAIS A p.
- DISTO CONCLUIMOS QUE $p^{\#}+1$ NÃO TEM FATORES PRIMOS, MAS ISSO CONTRADIZ COMPLETAMENTO O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMETICA QUE É ABSOLUTO.
- LOGO SÓ PODE EXISTIR INFINITOS NUMEROS PRIMOS.

(3) EM CADA UMA DAS FUNÇÕES, AS ENTRADAS E SAIDAS SÃO SEMPRE NATURAIS.

b) ENCONTRE ALGUM $g_i = f_j$. FAREI ISSO USANDO COMO PROVA DE FORMA INTUITIVA USANDO OS VALORES DA 3a. (INDUÇÃO ?)

$g_1(n,m) = f_7(n,m)$ = O EXPOENTE DE 7 NA FATORAÇÃO POR PRIMO DE MDC(n,m)

PROVA:

$f_7(28,70)$

$f_7(28/7, 70/7)+1$

$f_7(4,10)+1$

$0+1 = 1$

MDC$(28,70) = 14$

$14 = 2^1 \cdot 7^1$

CUMPRE A CONDIÇÃO

$g_2(n,m) = f_3(n,m) = n$

PROVA:

$f_3(5,24)$

$f_3(5-1,24)+1$

$f_3(4-1,24)+2$

$f_3(3-1,24)+3$

$f_3(2-1,24)+4$

$f_3(1-1,24)+5$

$f_3(0,24)+5$

$0+5 = 5$

$f_3(5,24) = 5$

CUMPRE A CONDIÇÃO

$g_3(n,m) = f_2(n,m) = n * m$

PROVA: $f_2(5,4)$

$f_2(5,4-1)+5$

$f_2(5,3-1)+10$

$f_2(5,2-1)+15$

$f_2(5,1-1)+20$

$f_2(5,0)+20$

$0+20 = 20$

$f_2(5,4) = 5 \cdot 4 = 20$

CUMPRE A CONDIÇÃO

$g_4(n,m) = f_5(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{SE } m \text{ É O MENOR NÚMERO MAIOR DO QUE 1 QUE DIVIDE } n \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

PROVA:

CUMPRE UMA DAS CONDIÇÕES

$f_5(35,5) = 1$

$5 > 1 \,\&\, 5 | 35 \,\&\, \forall k \in \mathbb{N} (k < 5 \rightarrow f_5(35,k) = 0)$

$g_5(n,m) = f_6(n,m) =$ O QUOCIENTE DA DIVISÃO INTEIRA DE m POR n

PROVA

m / n

$f_6(4,30)$

$f_6(4,30-4)+1$

$f_6(4,26-4)+2$

$f_6(4,22-4)+3$

$f_6(4,18-4)+4$

$f_6(4,14-4)+5$

$f_6(4,10-4)+6$

$f_6(4,6-4)+7$

$f_6(4,2)+7$

$0+7$

7

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 28 & 7 \\ 2 & \end{array}$$

CUMPRE UMA DAS CONDIÇÕES

$g_6(n,m) = f_1(n,m) = n+m$

PROVA:

$f_5(5,4) = 5+4 = 9$

$f_1(5,4)$

$f_1(5,4-1)+1$

$f_1(5,3-1)+2$

$f_1(5,2-1)+3$

$f_1(5,1-1)+4$

$f_1(5,0)+4$

$5+4 = 9$

CUMPRE A CONDIÇÃO

$g_7(n,m) = f_4(n,m) = f_7(n,m) = n^m$

PROVA:

$f_4(4,4)$

$f_4(4,4-1)\cdot 4$

$f_4(4,3-1)\cdot 16$

$f_4(4,2-1)\cdot 64$

$f_4(4,1-1)\cdot 256$

$f_4(4,0)\cdot 256$

$1 \cdot 256$

256

$256 = 4^4$

$f_7(2,4)$

$2^{f_7(2,4-1)}$

$4^{f_7(2,3-1)}$

$16^{f_7(2,2-1)}$

$256^{f_7(2,1-1)}$

$256^{f(2,0)}$

$256^1 = 256 = 4^4$

CUMPREM A CONDIÇÃO