LISTA 7

GABRIEL ALMEIDA MENDES DRE. 117204959

1) a) $g(m) = 1^2 + 2^2 + \ldots + m^2$

$$\begin{cases} g(0) = m \\ g(m) = g(m-1) + m^2, \ m > 0 \end{cases}$$

d) $g(m) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{m(m+1)}$

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(m) = g(m-1) + \frac{1}{m(m+1)}, \ m > 0 \end{cases}$$

e) $g(m) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m$

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(m) = g(m-1) \cdot 2m, \ m > 0 \end{cases}$$

f) $g(m) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot p_m$, ONDE p_m É O M-ÉSIMO PRIMO

$$\begin{cases} g(2) = 4 \\ g(m) = 2^{2^{m+1}}, \ m > 2 \end{cases}$$

h) $g(m) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(m)$, ONDE $f: N \to N$ É UMA FUNÇÃO DADA.

$$\begin{cases} g(f(0)) = 0 \\ g(m) = g(f(m-1)) + f(m) \end{cases}$$

2) PROVE POR INDUÇÃO

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, PARA TODO N E $m \geq 1$

PASSO BASE: PARA $m = 1$, $\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$, $P(1) = 1$

PASSO INDUTIVO: SE A FORMULA FOR VERDADEIRA PARA $m = k$, $k \geq 1$. ENTÃO É PARA $m = k+1$

- HIPOTESE INDUTIVA: $P(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$P(k+1) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2,,$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

- DEVE MOSTRAR QUE: $P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

d) $n^2 < 2^n$, PARA TODO $n \in n \geq 5$

PASSO BASE: $n = 5$, $5^2 < 2^5 = 25 < 32$, A RELAÇÃO É VERDADEIRA

PASSO INDUTIVO: SE A RELAÇÃO É VERDADEIRA PARA $n = k$, $k \geq 5$ ENTÃO DEVE SER PARA $n = k+1$

- HIPÓTESE INDUTIVA: $P(k) = k^2 < 2^k$

$$2^{(k+1)} \leq 2^{k+1},$$

$$2k^2 \leq 2^{k+1} \text{ (PELA H.I)}$$

$$k^2 + 2k + 1 \leq 2^{k+1} \quad (k^2 > 2k+1, \text{ PARA } k \geq 5)$$

- DEVE MOSTRAR QUE: $p(k+1) = (k+1)^2 < 2^{k+1}$

f) $3 / n^3 - n$, PARA TODOS $N \in n \geq 1$

PASSO BASE: $n = 1$, $3/1^3 - 1 = 3/1-1 = 3/0$, $P(0) = 0$

PASSO INDUTIVO:

- HIPÓTESE INDUTIVA: $P(k) = 3/k^3 - k$ (REFLEXIDADE)

$$P(k+1) = 3/k^3 - k \in 3/3 \text{ (LEMA)}$$

$$= 3/k^3 - k \in 3/3(k^2+k) \text{ (LEMA)}$$

$$= 3/k^3 - k + 3k^2 + 3k$$

$$= 3/k^3 + 3k^2 + 3k - k$$

$$= 3/k^3 + 3k^2 + 3k \cancel{+1} - k \cancel{-1}$$

- DEVE MOSTRAR QUE: $P(k+1) = 3/(k^2+1)^3 - (k+1)$

g) $mdc(F(n), F(n+1)) = 1$, PARA TODO NATURAL $n \geq 1$, ONDE $F(n)$ É O n-ÉSIMO NÚMERO DE FIBONACCI.

PASSO BASE: $n = 1$, $mdc(F(1), F(2)) = mdc(0, 1) = 1$. VERDADEIRO

PASSO INDUTIVO

- HIPÓTESE INDUTIVA: $p(k) = MDC(F(k), F(k+1)) = 1$

$$= MDC(F(k+1), F(k)) = 1,$$

$$= MDC(F(k+1), \cancel{F(k+1)} + F(k) - \cancel{F(k+1)}) = 1$$

$$= MDC(F(k+1), F(k+1) + F(k)) = 1 \rightarrow (a, b - na)$$

- DEVEMOS MOSTRAR QUE: $p(k+1) = MDC(F(k+1), F(k+2)) = 1$

PELO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO INFINITA

$$MDC(F(n), F(n+1)) = 1$$

$$③ \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{m(m+1)}=\frac{m}{m+1},\ m\geq 1$$

FORMULA FECHADA: SOMEMOS OS TERMOS PARA ENCONTRAR UM PADRÃO

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{3+1}{6}=\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{8+1}{12}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{15+1}{20}=\frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{20}}=\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{10}}=\frac{4}{5}$$

UM PADRÃO NO COMPORTAMENTO DO NUMERADOR E DENOMINADOR DE CADA CASO NOS LEVA A CONSECTURA QUE $\forall m \in \mathbb{Z}^* = \frac{m}{m+1}$ //

PROVA POR INDUÇÃO: USAMOS A FORMULA FECHADA ADQUIRIDA

PASSO BASE: PARA $m=1$, $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, O PASSO BASE É VERDADEIRO.

PASSO INDUTIVO: SE A FÓRMULA É VERDADEIRA PARA $m=K$, $K\geq 1$ ENTÃO DEVE SER VERDADEIRA PARA $m=K+1$.
USAMOS A FORMULA FECHADA PARA ISSO

- HIPOTESE INDUTIVA: $P(K)=\frac{K}{(K+1)}$

$$P(K+1)=\frac{K}{K+1}+\frac{1}{(K+1)(K+2)} \ //$$
$$=\frac{K\cancel{(K+2)}}{\cancel{(K+2)}(K+1)}+\frac{1}{(K+1)(K+2)}$$
$$=\frac{K(K+2)+1}{(K+2)(K+1)}$$
$$=\frac{K^2+2K+1}{(K+2)(K+1)}$$
$$=\frac{(K+1)^2}{(K+2)(K+1)}$$

- DEVE MOSTRAR QUE: $P(K+1)=\frac{K+1\cdot(K+1)}{K+2\cdot(K+1)}$

(5) SEJA $g \begin{cases} g(1)=1 \\ g(2)=3 \\ g(k)=g(k-2)+2g(k-1) \text{ SE } k \geq 3 \end{cases}$ PROVE POR INDUÇÃO FORTE QUE $g(n)$ É IMPAR PARA $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

PROVA BASE: PARA $n=1$ E $n=2$, SENDO RESPECTIVAMENTE $g(1)=1$ E $g(2)=3$; QUE SÃO IMPARES. A PROPRIEDADE É VERDADEIRA.

PROVA INDUTIVA: SE $K>2$ E PROPRIEDADE SÃO VERDADEIRA PARA $\forall i$ ONDE, $1 \leq i < K$, ENTÃO DEVE SER VERDADEIRA PARA $n=K$.

- HIPOTESE INDUTIVA: SEJA $K>2$ UM INTEIRO E SUPONHA QUE $g(i)$ É IMPAR PARA $\forall i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i < K$.
- DEVE PROVAR QUE: $g(k)$ É IMPAR

• NA DEFINIÇÃO $g(k)=g(k-2)+2g(k-1)$

• SABE-SE QUE $g(k-2)$ É IMPAR PELA HIPOTESE INDUTIVA QUE PARA $g(i)$, ENTÃO $1 \leq i < K$, ADAPTANDO FICA: $g(k-2)$, ENTAO $1 \leq k-2 < K$, QUANDO $K>2$.

CONDIÇÃO DE USO DA HIPOTESE

• SABE-SE QUE $2g(k-1)$ É PAR PORQUE PELA DEFINIÇÃO DE PAR, SENDO $\frac{\cancel{2}g(k-1)}{\cancel{2}}$, O RESTO DA 0.

• ASSIM TEMOS,

$$\underbrace{g(k-2)}_{\text{IMPAR}} + \underbrace{2g(k-1)}_{\text{PAR}}$$

PELA PROPRIEDADE, A SOMA ENTRE UM PAR E UM IMPAR, SEMPRE TEM QUE DAR IMPAR. OU SEJA $g(k)$ É IMPAR.

(6) $3^m, m \geq 1$

PASSO BASE: $m=1$, $3^1 = 3$, $P(1) = 3$

TESTE: SEPARE AS MOEDAS IGUALMENTE EM 3 GRUPOS DE MOEDAS EM CADA PRATO DA BALANÇA E CONFIRA QUAL LADO É A MAIS LEVE. SE DESEQUILIBRAR A MOEDA ADULTERADA, SENÃO A MOEDA ESTÁ DE FORA E CONTINUE TESTANDO

NESSE CASO, 1 PESAGEM É SUFICIENTE, QUE É O VALOR DE K.

PASSO INDUTIVO:

- HIPOTESE INDUTIVA: $p(k) = 3^k$
- DEVEMOS PROVAR QUE: EM $P(k+1) = 3^{k+1}$, VAMOS TENTAR PROVAR QUE K+1 PESAGENS JÁ BASTAM.

REALIZE O PRIMEIRO TESTE PARA 3 GRUPOS DE 3^k, SE OS PRATOS SE EQUILIBRAREM A MOEDA TA DO LADO DE FORA, FIZEMOS UMA PESAGEM E DESCOBRIMOS EM QUAL DOS 3 GRUPOS DE 3^k MOEDAS ESTÁ A ADULTERADA.

MAS SABEMOS, PELA HIPOTESE DE INDUÇÃO, QUE ENTRE 3K MOEDAS RESTANTES A MAIS LEVE PODE SER ACHADA COM K PESAGENS.

PORTANTO K PASAGENS SOMADA A QUE JÁ ACHAMOS PRIMEIRO, BASTAM PARA ENCONTRA A MOEDA ADULTERADA, DANDO UM TOTAL DE K+1 PASSAGENS, PARA 3^{k+1} MOEDAS.

9) PROVE POR INDUÇÃO QUE QUALQUER NÚMERO NATURAL $m \geq 8$ PODE SER ESCRITO COMO UMA SOMA DE 3'S E 5'S.

PASSO BASE: $m = 8$, TEMOS $3 + 5 = 8$, LOGO $P(8)$ É VERDADEIRO.

PASSO INDUTIVO: SE A FÓRMULA É VERDADEIRA PARA $m = K$ ENTÃO É VERDADEIRA PARA $m = K+1$, $P(K) \rightarrow P(K+1)$.

- HIPÓTESE INDUTIVA: SUPONHA QUE $P(i)$ É A SENTENÇA DE QUE i RESULTA DA SOMA DE 3S E 5S PARA $\forall i \in \mathbb{N}$, $8 \leq i \leq K$. OU SEJA, $P(i)$ É VERDADEIRO
- DEVEMOS PROVAR QUE: $P(K+1)$ PODE SER REPRESENTADO PELA SOMA DE 3S E 5S.

• PARA USAR A HIPÓTESE INDUTIVA DEVO USAR UM INTEIRO i MENOR QUE K. ASSIM PARA QUE A HIPÓTESE INDUTIVA SEJA VERDADEIRA, É NECESSÁRIO $i = (K+1) - 3$, PARA $8 \leq (K+1) - 3 \leq K$. CALCULANDO A PRIMEIRA PARTE DA EQUAÇÃO. $8 = (K+1) - 3 \rightarrow 8 = K - 2 \rightarrow K = 10 \rightarrow K + 1 = 11$. PARA A HIPÓTESE INDUTIVA SEJA VERDADEIRA $K+1$ DEVE SER 11.

• O PROBLEMA É QUE PELA HIPÓTESE NÃO DÁ PARA VERIFICAR $P(9)$ E $P(10)$ A NÃO SER DIRETAMENTE:
$P(9) = 3 + 3 + 3$ E $P(10) = 5 + 5$.

• SABENDO QUE $P(i)$ DEU VERDADEIRO PARA $P(8)$, $P(9)$ E $P(10)$, ONDE $8 \leq i \leq K$, PODEMOS PRESSUMIR QUE $K+1 \geq 11$

$$(K+1) - 3 \geq (11) - 3 \rightarrow K - 2 \geq 8 \rightarrow K \geq K - 2 \geq 8$$

PELA HIPÓTESE INDUTIVA $P(i)$ É VERDADEIRA PARA $8 \leq i \leq K$, LOGO $P(K-2)$ É VERDADEIRO, O QUE FAZ COM QUE $P(K+1)$ SEJA VERDADEIRO TAMBÉM. OU SEJA, PODE SER ESCRITO COMO SOMA DE 3S E 5S

OBS: NÃO SEI SE ESTÁ BEM EXPLICADO, POIS FIZ ORIGINALMENTE NUMA FOLHA À PARTE TENTANDO REPRODUZIR O QUE FIZ NA QUESTÃO 5. MAS USA OS PRINCÍPIOS DE INDUÇÃO FORTE.