Clase N° 5

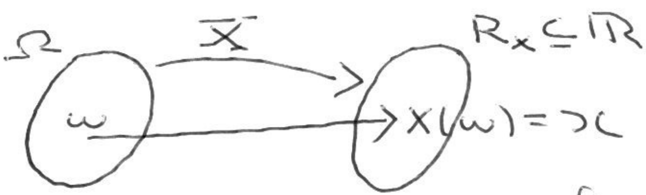
Variable aleatoria (unidimensional)

El concepto de variable aleatoria tiene que ver con trabajar sobre conjuntos numéricos y Ω no necesariamente lo es. Lo anterior permite la construcción de modelos (probabilísticos).

Def. Sea $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ un espacio de probabilidades, se define una variable aleatoria (v.a.) $\bar{X}$ como una función real sobre Ω. Es decir, si $\bar{X}$ es v.a. $\quad \bar{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto \bar{X}(\omega) = x$$

gráficamente



Denotamos R_x el recorrido de la función (v.a.) X.

Ej 1) Se lanza una moneda perfecta dos veces

$$\Omega = \{(c,c)\,(c,s)\,(s,c)\,(s,s)\}$$

Sea X : N° de caras obtenidas

$$\Rightarrow X((c,c)) = 2 \,;\; X((c,s)) = \bar{X}((s,c)) = 1 \,;\; X((s,s)) = 0$$

$$R_x = \{0, 1, 2\}$$

Ej 2) De una población se escoge una persona y se anota el sexo y estatura

$$\Omega = \left\{ (a,b) \Big/ \begin{array}{c} a \in \{Hombre, Mujer\} \\ \underbrace{m}_{\text{estatura mínima}} \leq b \leq \underbrace{M}_{\text{estatura máxima}} \end{array} \right\}$$

Sea X : sexo de la persona

$\Rightarrow X((H,b)) = 0 \quad \forall b$ Simplemente asignamos

$X((M,b)) = 1 \quad \forall b$ un 0 si es H y un 1 si es M.

$R_x = \{0, 1\}$.

Sea X : estatura de la persona

$\Rightarrow X((a,b)) = b \quad a = H \text{ o } M$

$R_x = [m, M]$

Obs. 1) Una v.a. es una función real, sin embargo no toda función es una v.a. (casos raros que no consideramos). Un requisito es exigir que $\forall x \in \mathbb{R}$ el evento $\{w / X(w) = x\}$, y para todo intervalo real I el evento $\{w / X(w) \in I\}$ tengan probabilidades bien definidas.

2) Informalmente, una v.a. es la medición "numérica" de una característica en un experimento.

X : velocidad de un movil

3) Si R_x es el recorrido de X $\Rightarrow$

a) Si R_x es numerable se dice que X es una v.a. discreta

b) Si R_x es no numerable se dice que X es una v.a. continua.

Def. Eventos equivalentes

Sea X v.a. definida sobre Ω y R_x su recorrido. Sean $A \subseteq \Omega$ y $B \subseteq R_x$ (eventos en Ω y R_x); se dice que A y B son eventos equivalentes (en espacios distintos) ssi

$$A = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}$$, es decir A es la preimagen de B.

De otra forma; A y B son equivalentes ssi

A ocurre ssi B ocurre

En el ej 1) $A = \{(c,s),(s,c)\}$ es equivalente a
$$B = \{1\} = \{X = 1\}$$

Def. Si $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq R_x$ son eventos equivalentes
$$(A \equiv B) \Rightarrow P(A) = P(B)$$

Ej 3)

En el ej anterior

$$P(\bar{X} = 1) = P(A) = P\{(c,s),(s,c)\} = \frac{1}{2}$$
$$P(\bar{X} = 0) = P\{(s,s)\} = \frac{1}{4}$$
$$P(\bar{X} = 2) = P\{(c,c)\} = 1/4$$

Notar que las probabilidades en R_x están inducidas por las probabilidades en Ω.

Variables aleatorias discretas

Sea $\bar{X}$ v.a. discreta, es decir t.q. R_x es un conjunto numerable de puntos que escribimos como $R_x = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sea $P(x_i) = P(\bar{X} = x_i)\ \forall i$

$\Rightarrow$ por axiomas de probabilidad

- $P(x_i) \geq 0 \quad \forall i$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$

; P es la función probabilidad de la v.a. $\bar{X}$.

El conjunto de pares $(x_i, P(x_i))$ se denomina la distribución de probabilidades de $\bar{X}$.

Si $B \subseteq R_x \Rightarrow P(B) = P(X \in B) = \sum_{\{x_i \in B\}} P(x_i)$

Ej 4) En el ej. 3) tenemos $P(X=0) = 1/4$, $P(X=1) = 1/2$ y $P(X=2) = 1/4$

$\Rightarrow \{(0, 1/4)(1, 1/2)(2, 1/4)\}$ es la distribución de probabilidades de $\bar{X}$.

¿$P(X \geq 1)$?

$\underbrace{P(X \geq 1)}_{P(\text{al menos una cara})} = P(X=1) + P(X=2) = 1/2 + 1/4 = 3/4$

A continuación veremos algunos ejemplos importantes de v.a. discretas (modelos probabilísticos).

_ Experimento de Bernoulli:

Def. Sea E un experimento con dos resultados posibles, es decir Ω se puede escribir como

$\Omega = \{$Exito, Fracaso$\} = \{$Verdadero, Falso$\} = \{1, 0\}$
$= \{A, \overline{A}\}$; Si $P(E) = P(V) = P(1) = P(A) = p$

se dice que E es un experimento de Bernoulli de parametro p.

Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda perfecta es un exp. de Bernoulli de parámetro $p = 1/2$.

Por ejemplo, el lanzamiento de un dado perfecto es un exp. de Bernoulli de parámetro $p = 1/6$ si se está interesado en si sale o no un "1".

_ Distribución Binomial

Consideremos un experimento de Bernoulli de parámetro p; es decir $P(E) = p$; $P(F) = 1 - p$.
El experimento se repite n veces en forma independiente. El espacio muestral asociado a las n repeticiones es

$$\Omega = \{(a_1, a_2 \ldots a_n) / a_i \in \{E, F\}\}$$

(por principio de multiplicación hay 2^n tuplas no equiprobables a menos que $p = 1/2$).

Sea X la v.a. definida por

$\bar{X}$: Número de éxitos (E) obtenidos en las n repeticiones

Es fácil notar que $R_X = \{0, 1, 2, \ldots n\}$

y por ejemplo

$$P(\bar{X} = n) = P((E E \ldots E)) \overset{\text{independencia}}{=} P(E) \cdot P(E) \cdots P(E) = p^n$$

calculemos ahora $P(\bar{X} = k) \quad \forall k \in R_X$

Una tupla particular que cumple $X = k$ es por ej. $(\underbrace{E \ldots E}_{k} \underbrace{F \ldots F}_{n-k})$ y su probabilidad es $p^k (1-p)^{n-k}$. Ahora, ¿cuantas tuplas existen con $X = k$? estas son $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

(formas de permutar n objetos con k (E) y (n-k (F) no distinguibles).

$$\Rightarrow P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1 \ldots n$$

Se dice que $\bar{X}$ tiene distribución Binomial de parámetros n, p y se denota

$$X \rightsquigarrow B(n, p)$$

Ej: Se lanza un dado perfecto 10 veces, calcular la probabilidad de obtener por lo menos 3 veces el número 1.

Basta reconocer

X : N° de "1" obtenidos en las 10 repeticiones

$$X \rightsquigarrow B(10; 1/6)$$

se pide $P(X \geq 3) = \sum_{j=3}^{10} P(X=j) = \sum_{j=3}^{10} \binom{10}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j} (1-1/6)^{10-j}$

- Distribución Binomial Negativa (Pascal)

Consideremos un experimento de Bernoulli de parámetro p; $P(E)=p$, $P(F)=1-p$. El experimento se repite (en forma independiente) "hasta que" se obtiene el r-ésimo éxito (E).

El espacio Ω está formado por tuplas del tipo $\left(\begin{matrix}(r-1)\ E \\ (k-r)\ F\end{matrix} ; E\right)$ tupla de tamaño k, $k \geq r$

Sea X la v.a. definida por:

X: Nº de repeticiones necesarias (para obtener el r-ésimo éxito).

Es fácil notar que $R_X = \{r, r+1, \ldots\}$

por ej. $P(X=r) = P((\underbrace{E \ldots E}_{r})) = p^{r}$

Para calcular $P(X=k)$ notamos que

- la tupla particular $(\underbrace{E \ldots E}_{r-1} \underbrace{F \ldots F}_{k-r} E)$ cumple con $X=k$ y tiene probabilidad $p^{r}(1-p)^{k-r}$

- ¿cuantas tuplas existen? Notar que el último elemento está fijo (debe ser E) por lo tanto solo se pueden permutar los $(k-1)$ primeros elementos, y esto se puede hacer de $\dfrac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} = \binom{k-1}{r-1}$

$$\Rightarrow P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{k-r} \qquad k=r, \dots \infty$$

Se dice que X tiene distribución Binomial Negativa (Pascal) de parámetros r, p y se denota

$$X \sim BN(r,p)$$

Caso particular: Si $r=1$, es decir si

X: N° de repeticiones para obtener el primer éxito.

$$\Rightarrow P(X=k) = p(1-p)^{k-1} \qquad k=1, \dots \infty$$

y se dice que X tiene distribución Geométrica de parámetro p y se denota

$$X \sim G(p).$$

Variables aleatorias continuas

Sea X v.a. continua, es decir t.q. su recorrido R_X es un subconjunto no numerable de $\mathbb{R}$.

Por ej X: Duración de una ampolleta, con $R_X = \mathbb{R}^+$. En este caso no es posible asignar a cada punto x una probabilidad $P(X=x)$ y menos exigir $\sum P(x) = 1$ puesto que los puntos son no numerables.

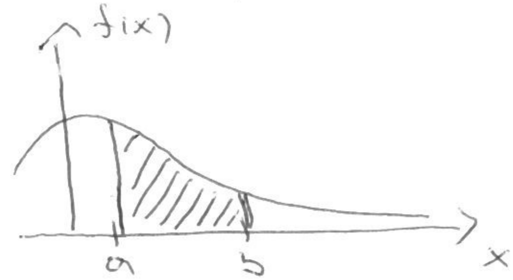
Def. Sea X v.a. continua, se dice que X es absolutamente continua ssi existe una función real $f(x)$ (llamada función densidad de probabilidad de X) t.q.

a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

c) Si $-\infty < a \leq b < \infty$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Ej: Supongamos que se elige un punto al azar (sin preferencias) en el intervalo $(0,1)$

Sea X: coordenada x del punto elegido es fácil observar que $f(x)=k \quad 0<x<1$ y como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow k=1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & \sim \end{cases}$

¿$P(X \leq 1/2 \,/\, X \geq 1/3)$? por definición.

$$P(X \leq 1/2 \,/\, X \geq 1/3) = \frac{P((X\leq 1/2)\cap(X\geq 1/3))}{P(X\geq 1/3)} = \frac{P(1/3 \leq X \leq 1/2)}{P(X \geq 1/3)}$$

$$= \frac{\int_{1/3}^{1/2} f(x)\,dx}{\int_{1/3}^{\infty} f(x)\,dx} = \frac{\int_{1/3}^{1/2} 1\,dx}{\int_{1/3}^{1} 1\,dx} = \frac{1}{4}$$

Obs: 1) Los espacios (variables) continuos son teóricos puesto que los instrumentos de medición siempre discretizan en la práctica.

2) Sea $x^* \in R_X$, $P(X = x^*) = \int_{x^*}^{x^*} f(x)\,dx = 0 \quad \forall x^* \in R_X$

Todo punto en una v.a. absolutamente continua (con función $f(x)$) tiene probabilidad 0 de ocurrir pero es posible que ocurra.

$$P(A) = 0 \not\Rightarrow A = \phi$$

improbable $\not\Rightarrow$ imposible.

En el ejemplo anterior, todo punto del intervalo $(0,1)$ tiene probabilidad 0 de ser elegido, sin embargo algún punto tiene que salir.

3) La observación 2) $\Rightarrow$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

4) Si existe una función $g(x) \geq 0$ con
$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = k \geq 0 \Rightarrow$ basta definir $f(x) = \frac{g(x)}{k}$ $\forall x$.

5) $f(x)$ no es una probabilidad. Para darle una interpretación calculemos $P(x \leq \bar{X} \leq x+\Delta x)$

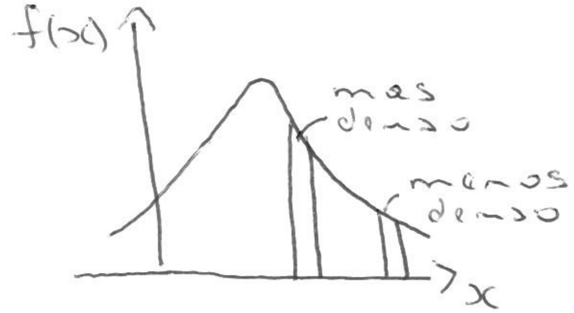
$$P(x \leq \bar{X} \leq x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \Delta x \cdot f(\eta) \qquad x \leq \eta \leq x+\Delta x$$

por teorema valor medio integral

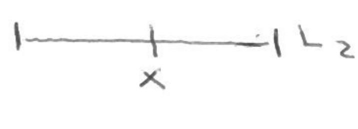
si Δx pequeño $f(\eta) \approx f(x) \Rightarrow$

$$P(x \leq \bar{X} \leq x+\Delta x) \approx \Delta x\, f(x) \Rightarrow f(x) \approx \frac{P(x \leq \bar{X} \leq x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$\Rightarrow f(x)$ es la probabilidad en un intervalo pequeño dividido por el ancho del intervalo $\Rightarrow$ es una densidad de probabilidad.

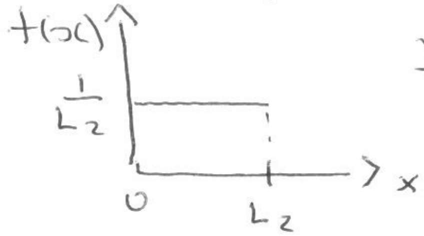


Ej. Se tienen dos barras una de largo L_1 y la otra de largo L_2. La barra de largo L_2 se corta en algún punto al azar quedando entonces tres barras
una de largo L_1
una de largo x
una de largo $(L_2 - x)$



Se desea calcular la probabilidad de poder formar un triangulo.

Si X: pto de corte $\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{L_2} & 0<x<L_2\\ 0 & \sim\end{cases}$



todo punto tiene misma densidad.

Si A = {formar triangulo} $\Rightarrow$

A = {todo lado es menor que la suma de los otros}

$$\Rightarrow \begin{aligned} L_1 &< X+(L_2-X) \\ X &< L_1+(L_2-x) \\ (L_2-x) &< L_1+X \end{aligned} \iff \begin{aligned} & L_1 < L_2 \\ & x < \frac{L_1+L_2}{2} \\ & x > \frac{L_2-L_1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = P\left(\frac{L_2-L_1}{2} < X < \frac{L_1+L_2}{2}\right) = \int_{\frac{L_2-L_1}{2}}^{\frac{L_1+L_2}{2}} f(x)\,dx = \frac{L_1}{L_2}$$

$\Rightarrow P(\text{formar triangulo}) = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_1<L_2)$

por ej si $L_1=1$, $L_2=1{,}5$

$\Rightarrow P(\text{formar triangulo}) = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$; en este caso

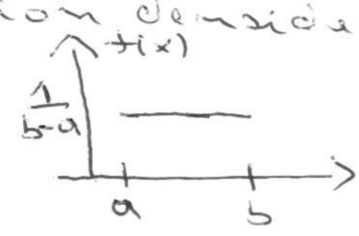
$P\left(\begin{matrix}\text{formar triangulo}\\ \text{equilátero}\end{matrix}\right) = 0$ y además es imposible

$P\left(\begin{matrix}\text{formar triangulo}\\ \text{isosceles}\end{matrix}\right) = 0$ ya que corresponde a $P(X=\frac{L_2}{2}=0{,}75)=0$

$\Rightarrow P\left(\begin{matrix}\text{formar triangulo}\\ \text{escaleno}\end{matrix}\right) = \frac{2}{3}$

Def. Sea X v.a con función densidad

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \sim\end{cases}$$



se dice que X tiene distribución Uniforme en el intervalo $[a,b]$ y se denota $X \sim U(a,b)$.

En el ejemplo del triangulo $X \sim U(0, L_2)$.

Propuestos:

1) En un lote de N artículos se sabe que existen r defectuosos. Los artículos se inspeccionan uno a uno hasta detectar todos los defectuosos. Si X: número de artículos inspeccionados calcule $P(X=k) \quad \forall k \in R_X$

2) Una caja contiene N fichas numeradas de "1" a "N". Se sacan (con reemplazo) n fichas. Sea X: máximo número obtenido. Muestre que $P(X=k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \quad \forall k \in R_X$

Si Y: mínimo número obtenido, calcule

$$P(X=k) \quad \forall k \in R_Y$$

3) Se dice que X tiene distribución exponencial de parámetro α ($X \sim \varepsilon(\alpha)$) ssi

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad x > 0$$

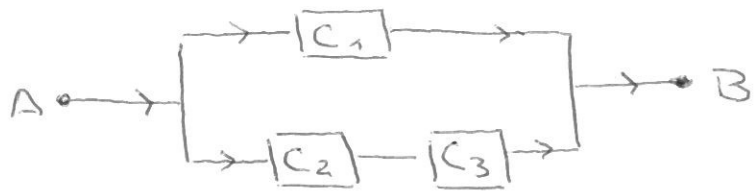
a) Muestre que si $X \sim \varepsilon(\alpha) \Rightarrow$

$$P(X > s+t / X > s) = P(X > t)$$

propiedad conocida como "perdida de memoria".

b) Suponga que la duración X (en horas) de ciertas componentes eléctricas es exponencial de parámetro $\alpha = 1/2$

Tres componentes C_1, C_2, C_3 se instalan en el circuito



Si existe flujo de A a B por más de 1 hora, calcule

i) la probabilidad que C_1 haya funcionado mas de 1 hora.

ii) la probabilidad que el flujo solo se haya producido a través de C_1