CC3101 Matemáticas Discretas para la Computación.
Profesor: Andrés Abeliuk.
Auxiliares: Javier Oliva, Lucas Torrealba y Benjamín Jauregui
Fecha: 28 de marzo de 2021.

Auxiliar 2

Definición 1 (Consecuencia lógica)**.** Sea $\mathcal{T}$ un conjunto de fórmulas (premisas) en $\mathcal{L}(P)$ y α una fórmula (conclusión) en $\mathcal{L}(P)$. Decimos que α es una **consecuencia lógica de $\mathcal{T}$, notado por $\mathcal{T} \vdash \alpha$ sii para cada valuación $\sigma\colon P \to \{0,1\}$,**

$$\hat{\sigma}(\mathcal{T}) = 1 \implies \hat{\sigma}(\alpha) = 1$$

1. Reglas de deducción natural

- **Introducción de la conjunción:** $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} \wedge i$
- **Eliminación de la conjunción:** $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \wedge e_1$, $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \wedge e_2$
- **Doble negación:** $\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \neg\neg e$
- **Modus Ponens:** $\dfrac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta} \to e$
- **Modus Tollens:** $\dfrac{\alpha \to \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha} MT$

P1.- Pruebe las siguientes consecuencias lógicas

a) $\neg P \to Q, S \vee \neg Q, P \to (Q_1 \vee Q_2), S \wedge \neg Q_2 \vdash Q_1$

b) $(P \to Q) \wedge (P \to S) \vdash P \to (Q \wedge S)$

c) $P \to (Q \wedge S) \vdash (P \to Q) \wedge (P \to S)$

P2.- Demuestre las siguientes consecuencias lógicas con cuantificadores

a) $\exists x P(x) \vdash \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

b) $\forall z (P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall y P(z) \wedge \forall x Q(x)$

P3.- Se definen las siguientes reglas de deducción

- **Classical Reductio (CR):**Dada α una proposición y una sub-demostración que comienza con una suposición de $\neg\alpha$ y termina con $\perp$, se puede deducir α.
- **Ley de Pierce (LP):**Dadas α, β proposiciones, se puede invocar una instancia de $(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha)$ en cual momento de la demostración.

Demuestre que

a) Reemplazar la regla de doble negación (DN), por la regla LP genera un sistema equivalente al que usamos. (Es decir, toda proposición que se demuestra con nuestro sistema actual, puede ser demostrado reemplazando DN por LP).

b) **(Propuesto)**Demuestre que reemplazar DD por CR también genera un sistema equivalente.