Auxiliar 1

Lógica

Profesor: Andrés Abeliuk
Auxiliares: Benjamin Jauregui - Javier Oliva - Lucas Torrealba
Ayudantes: Alonso Almendras - Daniel Báez - Ismael Correa
Nicolás García - Félix Melo - Julia Paredes

P1.-

a) Formalice el siguiente argumento en la lógica proposicional:

"*Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal.*"

Demuestre que "*Superman no existe*" es consecuencia lógica de esta formalización.
Solución: Preparamos las variables siguientes:

$$\begin{aligned}
p_1 &:= \textit{Superman es capaz de prevenir el mal}\\
p_2 &:= \textit{Superman desea prevenir el mal}\\
p_3 &:= \textit{Superman previene el mal}\\
p_4 &:= \textit{Superman es impotente}\\
p_5 &:= \textit{Superman es malévolo}\\
p_6 &:= \textit{Superman existe}
\end{aligned}$$

Ahora determinamos las proposiciones correspondientes (que son verdad):

$$\begin{aligned}
&p_1 \wedge p_2 \implies p_3\\
&\neg p_1 \implies p_4\\
&\neg p_2 \implies p_5\\
&p_6 \implies \neg p_4 \wedge \neg p_5\\
&p_3 \equiv \mathbf{F}
\end{aligned}$$

Con esta información debemos llegar a $p_6 \equiv \mathbf{F}$
Tenemos $p_1 \wedge p_2 \implies \mathbf{F} \equiv \neg(p_1 \wedge p_2) \vee \mathbf{F} \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2$. Para que $\neg p_1 \vee \neg p_2$ sea verdadero, al menos uno de p_1, p_2 debe ser falso. Nos ponemos en casos

1. **Caso** $p_1 \equiv \mathbf{F}$
   Desarrollamos la segunda proposición. $\neg\mathbf{F} \implies p_4 \equiv \mathbf{V} \implies p_4 \equiv p_4$ de lo que sacamos $p_4 \equiv \mathbf{V}$
   Desarrollamos la cuarta. $p_6 \implies \mathbf{F} \wedge \neg p_5 \equiv p_6 \implies \mathbf{F} \equiv \neg p_6$ de lo que obtenemos $p_6 \equiv \mathbf{F}$.

2. **Caso** $p_1 \equiv \mathbf{V}$
   Tenemos $p_2 \equiv \mathbf{F}$. Hacemos lo mismo que antes, $\neg\mathbf{F} \implies p_5 \equiv \mathbf{V} \implies p_5 \equiv p_5$ y entonces $p_5 \equiv \mathbf{V}$.
   Finalmente $p_6 \implies \neg p_4 \wedge \mathbf{F} \equiv p_6 \implies \mathbf{F} \equiv \neg p_6$ que implica $p_6 \equiv \mathbf{F}$.

b) Si un día llueve, entonces no habrá asado ese mismo día. Si no hay asado hoy, entonces habrá asado mañana. Hoy no hay asado.

¿Qué es verdad? Marque verdadero o falso y justifique usando lógica proposicional.

- Mañana habrá asado.
- Hoy llueve.
- Mañana no llueve.

Solución: Tomando

$$\begin{aligned} l_i &:= \text{ llueve el día } i \\ a_i &:= \text{ hay asado el día } i \end{aligned}$$

donde 0 es el día actual.

Por enunciado

$$\begin{aligned} l_i &\implies \neg a_i \\ \neg a_0 &\implies a_1 \\ a_0 &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

Por lo segundo se tiene que mañana habrá asado.

No se puede saber si hoy llueve, no hay información suficiente.

Como mañana hay asado se tiene $a_1 = \mathbf{V}$, usando la contraposición de $l_i \implies \neg a_i$ se tiene $a_i \implies \neg l_i$ obteniendo $a_1 \implies \neg l_1$. De esa forma $l_1 = \mathbf{F}$, mañana no llueve.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ Los siguientes ejercicios involucran a los operadores lógicos **NAND** y **NOR**. La proposición p **NAND** q es verdadera cuando p, q, o ambos, son falsos; y es falso cuando tanto p como q son ciertos. La proposición p **NOR** q es verdadera cuando tanto p como q son falsos, y es falsa de lo contrario. Las proposiciones p **NAND** q y p **NOR** q se denotan por $p|q$ y $p \downarrow q$, respectivamente:

1. Demuestre que $p|q$ y $q|p$ son equivalentes.
   Solución: Para observar la equivalencia, miraremos sus tablas de verdad.

p	q	$p\|q$	$q\|p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

2. Demuestre que $p|(q|r)$ y $(p|q)|r$ no son equivalentes, por lo que el operador lógico $|$ no es asociativo.

   Solución: Para observar que no son equivalentes, miraremos sus tablas de verdad.

p	q	r	$(p\|q)\|r$	$p\|(q\|r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0

3. Encuentre una proposición lógicamente equivalente a $p \implies q$ usando solo el operador lógico $\downarrow$.

   Solución: Para formar el operador $\implies$ primero describiremos $\neg\vee$, debido a que sabemos que podemos formar $\implies$ con estos conectores.

$$\neg p \equiv p \downarrow p$$

$$p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

   Luego, reemplazando p por $\neg p$:

$$p \implies q \equiv \neg p \vee q \equiv ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ Sea $P = p, q, ...$ un conjunto de proposiciones y sea f una fila de la tabla de verdad para las proposiciones en P. Defina Σ_f como el conjunto de todas las oraciones de la lógica proposicional que utilizan proposiciones en P y cuyo valor de verdad es 1 en la fila f. Demuestre que para cualquier conjunto Σ de oraciones que utilizan proposiciones en P, si $\Sigma_f \subseteq \Sigma$ y Σ es satisfacible, entonces $\Sigma_f = \Sigma$.

Solución: Asuma, en búsqueda de una contradicción, que $\Sigma_f \neq \Sigma$. Por tanto, existe oración $\phi \in \Sigma \backslash \Sigma_f$. esto implica que el valor de verdad de ϕ en f es 0. Por tanto, el valor de verdad de $\neg\phi$ en f es 1. Concluimos que $\neg\phi \in \Sigma_f$, y por tanto, que $\neg\phi \in \Sigma$. Pero entonces Σ no es satisfacible porque contiene tanto a ϕ como a $\neg\phi$.

P4.-

a) Dado conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de oraciones α y β, demuestre que si α es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \models \beta$
Solución: Para toda valuación ϕ se cumple $\phi(\Sigma) = \phi(\Sigma \cup \{\alpha\})$.

$$\begin{aligned}\phi(\Sigma \cup \{\alpha\}) &= \min\{\phi(\Sigma), \phi(\alpha)\} \\ &= \min\{\phi(\Sigma), 1\} \\ &= \phi(\Sigma)\end{aligned}$$

$\rightarrow$: Sea ϕ valuación.
$\phi(\Sigma) = 1 \implies \phi(\Sigma \cup \{\alpha\}) = 1 \implies \phi(\beta) = 1.$

$\leftarrow$: Sea ϕ valuación.
$\phi(\Sigma \cup \{\alpha\}) = 1 \implies \phi(\Sigma) = 1 \implies \phi(\beta) = 1.$

b) Dado un conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de oraciones α y β tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \vDash \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$?
Solución: $\Sigma := \{p\}$, $\alpha := q \wedge \neg q$ y $\beta := \neg p$

c) Dado un conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de las oraciones φ, ψ y θ, demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vDash \theta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \theta$.
Solución: Asumiendo $\varphi \rightarrow \psi$ tenemos $\sigma(\varphi \implies \psi) = 1$ para cualquier valuación σ, que lleva a decir que $\sigma(\varphi) = 1 \implies \sigma(\psi) = 1$.

$\leftarrow$:

$$\sigma(\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}) = 1 \implies \sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1 \implies \sigma(\theta) = 1$$

$\rightarrow$:

$$\begin{aligned}\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1 &\implies \sigma(\Sigma) = 1 \wedge \sigma(\varphi) = 1 \implies \sigma(\Sigma) = 1 \wedge \sigma(\varphi) = 1 \wedge \sigma(\psi) = 1 \\ &\implies \sigma(\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}) = 1 \implies \sigma(\theta) = 1\end{aligned}$$

<u>**Propuesto:**</u>

d) Dado un conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de oraciones α y β tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común y α no es una contradicción. ¿Es cierto que $\Sigma \vDash \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$?
Solución: Una forma de obtener intuición (Y que serviría para hacer una demostración por contradicción) es pensar en que la única forma de que no se tenga lo pedido es $\sigma(\Sigma) = 1, \sigma(\alpha) = 0, \sigma(\beta) = 0$. pues en este caso se cumple la consecuencia lógica de la derecha pero no de la izquierda. Lo interesante es que este caso no puede ocurrir dado que podemos separar las valuaciones sobre $\Sigma \cup \{\beta\}$ y α, y como α no es contradicción, podemos usar la misma valuación sobre $\Sigma \cup \{\beta\}$ pero una donde α sea tal que $\sigma(\alpha) = 1$. Entonces, si el caso existiera, tampoco se tendría la consecuencia lógica de la derecha.

Se tiene que la implicación hacia la derecha es directa por monotonía de la consecuencia lógica.

Implicancia hacia la izquierda:
Sea σ una valuación arbitraria tal que $\sigma(\Sigma) = 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma(\Sigma \cup \{\alpha\}) &= \sigma(\bigwedge_{\varphi \in \Sigma} \varphi \wedge \alpha) \\
&= mín(\sigma(\bigwedge_{\varphi \in \Sigma} \varphi), \sigma(\alpha)) \\
&= mín(\sigma(\Sigma), \sigma(\alpha)) \\
&= mín(1, \sigma(\alpha)) && \text{Pues } \sigma(\Sigma) = 1 \\
&= \sigma(\alpha) && \text{Dado que } \sigma(\alpha) \leq 1
\end{aligned}$$

Por lo que $\sigma(\Sigma \cup \{\alpha\}) = \sigma(\alpha)$.
Llamemos σ_2 una valuación sobre las variables de α tal que $\sigma_2(\alpha) = 1$. Vemos que existe una valuación ψ tal que $\psi(\Sigma) = \sigma(\Sigma) = 1$, $\psi(\beta) = \sigma(\beta)$ y $\psi(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$. Esta valuación existe pues α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no comparten variables proposicionales, por lo que una valuación para las variables de $\Sigma \cup \{\alpha, \beta\}$ se puede construir como la ünión"de 2 valuaciones, una para α y otra para $\Sigma \cup \{\beta\}$.

Después, $\psi(\Sigma) = \sigma(\Sigma) = 1$ que implica que $\psi(\Sigma \cup \{\alpha\}) = \psi(\alpha) = 1$. Y como $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$, $\psi(\beta) = 1$. Vimos que $\sigma(\beta) = \psi(\beta) = 1$, por lo que $\sigma(\beta) = 1$. Para concluir, si $\sigma(\Sigma) = 1$, entonces $\sigma(\beta) = 1$. Como σ era una valuación arbitraria con $\sigma(\Sigma) = 1$, podemos decir finalmente que $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta \rightarrow \Sigma \models \beta$ pues no nos importan las valuaciones con $\sigma(\Sigma) = 0$.

Por lo que si $\Sigma \cup \{\beta\}$ y α no tienen variables proposicionales en común y α no es una contradicción se tiene que $\Sigma \models \beta \leftrightarrow \Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$.