Clase N° 4

Probabilidad Condicional

Def.: Sea $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ un espacio de probabilidades; A, B dos eventos $(A, B \subseteq \Omega\ ;\ A, B \in \mathcal{Q})$ t.q $P(B) \neq 0$; se define la probabilidad condicional de A dado B (denotada $P(A/B)$) como la probabilidad de A cuando el espacio muestral se restringe (acota) a B. Lo anterior significa calcular la probabilidad de A sabiendo que B ocurre (evento seguro).

Ej: Se lanza una moneda perfecta dos veces

$\Omega = \{(C,C)\ (C,S)\ (S,C)\ (S,S)\}$ $\quad P(\omega_i) = \frac{1}{4}$ $i = 1..4$

Sea $A = \{$obtener dos sellos$\}$

$B = \{$obtener al menos un sello$\}$

$P(A) = \frac{1}{4}$

$P(A/B)$? $\Omega \to B = \{(C,S)(S,C)(S,S)\}$

$\Rightarrow P(A/B) = \frac{1}{3}$

Def: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (calculadas sobre Ω)

En el ej. anterior $A \cap B = \{S,S\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

y $P(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A/B) = \dfrac{1/4}{3/4} = 1/3$

Obs: a) $P(A/B)$ está bien definida (B fijo) en el sentido que satisface los axiomas:

propiedades de una probabilidad; por ej.

Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$$

b) Si $B = \Omega \Rightarrow P(A/B) = P(A/\Omega) = P(A)$ llamada a veces probabilidad incondicional

c) $P(A/B)$ puede ser $>, <$ o $=$ a $P(A)$

por ej. - si $B \subset A$ $\quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1 > P(A)$

- si $A \subset B$ $\quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} > P(A)$

- Si $A \cap B = \emptyset$ $\quad P(A/B) = 0 < P(A)$.

- Si $A = \emptyset$ $\quad P(A/B) = 0 = P(A)$

d) Se recomienda usar la segunda definición de probabilidad condicional a menos que se esté seguro de tener espacios equiprobables.

La definición de probabilidad condicional permite postular tres teoremas (o formulas) que son:

1) Teorema de Multiplicación

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

multiplicación de probabilidades

que se puede extender para tres eventos

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B/A) P(C/A \cap B) \quad \text{(verificar)}$$

Ej 1) Se sacan tres cartas (sin reemplazo); calcular la probabilidad de no obtener corazones.

Sea $A_i = \{\text{carta } i \text{ no es corazon}\}$ $i = 1,2,3$ =>

se pide $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)$

$$= \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50}$$

(Para calcular $P(A_2/A_1)$ se restringe a A_1).

Notar que la probabilidad anterior también se puede escribir (calcular) como $\dfrac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}$

En general si $A_1 A_2 \ldots A_n$ son eventos =>

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Ej 2) Dos personas X e Y sacan consecutivamente y con reemplazo una carta de un mazo corriente. Gana el que obtiene el primer As. Si parte X calculamos P(gane X).

escribimos Ω como

$$\Omega = \{A, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\bar{A}A, \ldots\ldots\}$$

Notar que Ω es un espacio infinito numerable

por ej $\bar{A}\bar{A}A$ significa que X obtuvo $\bar{A}$ en su primera carta Y obtuvo $\bar{A}$ en su ~~segunda~~ primera carta y X obtuvo A en su segunda carta, además,

$$P(\bar{A}\bar{A}A) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}/\bar{A}) \cdot P(A/\bar{A}\bar{A}) = \frac{48}{52} \cdot \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{52} =$$

$$= \left(\frac{48}{52}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{52}\right)$$

en general $P(\underbrace{\bar{A}\bar{A} \cdot \bar{A}}_{n-1} A) = \left(\frac{48}{52}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{52}\right)$

Como X gana ~~en~~ los elementos impares de Ω

$$\Rightarrow P(\text{gane } X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{48}{52}\right)^{2k+1} \left(\frac{4}{52}\right)$$

Notar que Ω es un espacio infinito obviamente no equiprobable pero la definición de probabilidad condicional permite estudiarlo.

2) Teorema de Probabilidades Totales (TPT)

Sea $B_1, B_2, \ldots B_m$ una partición de Ω, es decir

- $B_i \neq \phi \quad \forall i$
- $B_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

sea A un evento cualquiera $(A \subseteq \Omega) \Rightarrow$

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_i B_i)) = P(\bigcup_i (A \cap B_i))$$

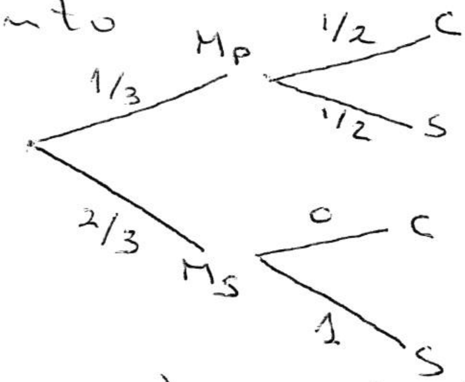
$$\Rightarrow P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(B_i) P(A/B_i)$$

formula conocida como Teorema de Probabilidades Totales(

La formula anterior es útil para calcular la probabilidad de un evento A cuya ocurrencia depende de la ocurrencia de los eventos B_i.

Ej1) Se tienen tres monedas, una perfecta (M_p) y las otras con dos sellos (M_s). Se escoge una moneda y se lanza, calcular la probabilidad de obtener cara.

El siguiente diagrama de arbol representa el experimento



Sean los eventos $A = \{\text{obtener cara}\}$

$B_1 = \{\text{escoger } M_P\}$ $\quad B_2 \{\text{escoger } M_S\}$

$\Rightarrow P(B_1) = 1/3$, $P(B_2) = 2/3$, $P(A/B_1) = 1/2$, $P(A/B_2) = 0$

escribiendo el TPT para $n = 2$

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2)$$

$$P(A) = 1/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 0 = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$ $\quad \bar{A} = \{\text{obtener sello}\}$

3) Teorema (formula) de Bayes (T.B.)

Usando la misma notación que en TPT, supongamos que estamos interesados en calcular $P(B_j/A)$; es decir, dado que se produjo el resultado final A cual es la probabilidad que haya sido causado por B_j

$$P(B_j/A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A/B_i)}$$

formula conocida como Teorema de Bayes.

En general $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$

Ej 1) En el ejemplo anterior, supongamos que se realizó el experimento y se obtuvo un sello, calcular la probabilidad que se haya lanzado la moneda perfecta.

Se pide $P(M_p/S) = P(B_1/\bar{A})$ por T.B.

$$= \frac{P(\bar{A}/B_1)P(B_1)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{5/6} = \frac{1}{5}$$

Ej 2) Se lanza n veces una moneda perfecta y se obtiene $B = \{$al menos una cara$\}$.
Calcular la probabilidad de obtener $\{$al menos un sello$\} = A$.

Se pide $P(A/B)$; si se aplica T.B $P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$ se obtiene un problema equivalente.

Escribimos $P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B)$ con

$\bar{A} = \{$obtener 0 sellos$\} = \{$obtener n caras$\}$.

$$\Rightarrow P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B) = 1 - \frac{P(B/\bar{A})P(\bar{A})}{P(B)}$$

$P(B/\bar{A}) = 1$; $P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ y $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow P(A/B) = 1 - \frac{1\cdot(1/2)^n}{1-(1/2)^n}$$

Ej 3) Se sacan dos cartas (sin reemplazo) de un mazo de naipes. Es evidente que

$$P(\underbrace{1^{a}\text{carta sea } A}_{B_1}) = \frac{4}{52} \quad ; \quad P(\underbrace{1^{a}\text{carta sea } \bar{A}}_{B_2}) = \frac{48}{52}$$

pero no es evidente $P(\underbrace{2^{a}\text{carta sea } A}_{A})$.

$\Rightarrow$ por T.P.T

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2)$$

$$P(A) = \frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51} + \frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51}$$

$P(A) = \frac{4}{52}$ resultado interesante puesto que $P(1^{a}\text{carta sea } A) = P(2^{a}\text{carta sea } A)$ y justifica el no importar como se reparten las cartas (o a quien le reparten primero)

Independencia de eventos

Def. Dos eventos A, B se dicen independientes ssi la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Por ej es natural pensar que el peso de una persona (cualquiera sea) es "independiente" del dígito verificador de su cédula de identidad.

Por ej, si un dado se lanza dos veces, cualquier resultado del primer lanzamiento es independiente de cualquier resultado del segundo lanzamiento

Formalmente, A B se dicen eventos independientes ssi $P(A/B) = P(A)$ o bién
$$P(B/A) = P(B)$$
Supongamos $P(A/B) = P(A)$, sabemos que por definición $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
$\Rightarrow$ A, B son independientes ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Generalización: Sean $A_1 \ldots A_n$ eventos; los A_i se dicen independientes ssi
$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$
$$k = 2, 3, \ldots n$$
por ej. si $n = 3$; A_1, A_2, A_3 son independientes ssi
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

Ej 1) Se lanza un dado perfecto dos veces. Sean los eventos. Sean los eventos

$A = \{$primer lanzamiento sale par$\}$

$B = \{$segundo lanzamiento sale impar$\}$

$C = \{$ambos salen par o ambos salen impar$\}$

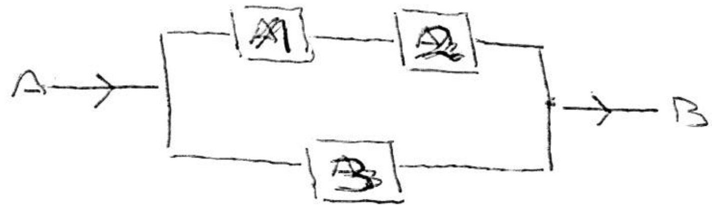
Es facil ver que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ y que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4 \Rightarrow$ los eventos A, B, C son independientes de a pares; sin embargo $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$ por lo tanto A, B, C no son independientes.

Ej 2) Sean A, B eventos independientes. Mostrar que $\overline{A}, \overline{B}$ son eventos independientes

p.d. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})\, P(\overline{B})$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$
$$= P(\overline{A})\, P(\overline{B}) \quad //$$

Ej 3) Consideremos el circuito



Las componentes (1, 2, 3) funcionan con probabilidad p (y fallan con probabilidad $1-p$) y en forma independiente, cual es la probabilidad que exista flujo de A a B.

Sea $A_i = \{\text{componente } i \text{ funciona}\}$ $i = 1, 2, 3$

$C = \{\text{existe flujo de A a B}\}$

$$\Rightarrow P(C) = P((A_1 \cap A_2) \cup A_3)$$
$$= P((A_1 \cap A_2)) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= p^2 + p - p^3 \quad \text{(por independencia).}$$

Calcular $P(A_1 / C)$

Ej 4) En un determinante de segundo orden los elementos pueden ser 1 ó 0 con probabilidad ½ y en forma independiente. Calcular la probabilidad que el valor del determinante sea positivo.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} P(a_i=1)=1/2 \\ P(a_i=0)=1/2 \end{array}$$

$\Delta > 0$ ssi - a_1 y a_4 valen $1 = A$ y

- al menos uno de a_2, a_3 es $0 = B$

$P(A) = P(a_1=1)\,P(a_4=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(a_2=1)\,P(a_3=1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow P(\Delta > 0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

por simetría $P(\Delta < 0) = 3/16 \Rightarrow P(\Delta = 0) = \frac{10}{16}$

Propuestos

1) a) Muestre que: si $P(A/D) \geq P(B/D)$ y
$P(A/\overline{D}) \geq P(B/\overline{D})$

$\Rightarrow P(A) \geq P(B)$

b) Muestre que: si $P(A/B) > P(A) \Rightarrow P(B/A) > P(B)$ y
$P(A/\overline{B}) < P(A)$

2) Se tienen 3 monedas, una con dos sellos, una perfecta y una t.q. sello es dos veces más probable que cara. Se escoge una moneda y se lanza, si sale sello se vuelve a lanzar la misma moneda pero si sale cara se escoge otra moneda entre las dos que quedan y se lanza (siempre hay dos lanzamientos).

Si en los dos lanzamientos hay un sello, calcule la probabilidad que sólo se haya lanzado la moneda de dos sellos.

3) Considere el espacio muestral Ω asociado al experimento E: Sacar una carta de un mazo de naipes.

Indique eventos A, B ($A, B \subseteq \Omega$) para que:

i) Sean excluyentes e independientes

ii) Sean excluyentes y no independientes

iii) Sean no excluyentes e independientes

iv) Sean no excluyentes y no independientes