Matemática Discreta

Clase 5: Lógica de predicados

Andrés Abeliuk*

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia y Federico Olmedo.

Contenido clase de hoy

Lógica de predicados

1. Inferencia en lógica de predicados
2. Robustez y completitud

Recapitulación

Sintaxis de la lógica de predicados

Ejemplos de predicados incluyen "es un hombre", "es menor que", ...

Las fórmulas de la lógica de predicados se forman a partir de un vocabulario

- Un conjunto de símbolos de relación,, cada uno con una respectiva aridad (número de argumentos):

$$P, Q, R, \ldots$$

- El cuantificador universal y el cuantificador existencial:

$$\forall, \quad \exists$$

- Un conjunto de variables:

$$x, y, z, \ldots$$

- Los conectivos de la lógica proposicional:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$$

Semántica de la lógica de predicados

La semántica de las fórmulas en toda lógica se define con respecto a un modelo.

- En la lógica proposicional, los modelos eran asignaciones de verdad.
- Para la lógica de primer orden, los modelos serán objetos que ayuden a identificar la interpretación de los símbolos de relación.

Estos modelos se denominan estructuras

- Una estructura $\mathcal{A} = \big(A,\ P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \ldots\big)$, define el *dominio de discurso* A sobre el que van a tomar valores las variables y las *interpretaciones* $P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \ldots$ de los símbolos de relaciones, $P, Q, R, \ldots$, en el vocabulario.
- Una valuación σ que asigna valores de A a las variables libres de la fórmula ϕ.

Semántica de la lógica de predicados

Ahora tenemos todos los elementos para definir la semántica de una fórmula ϕ.

$$(\mathcal{A}, \sigma) \models \phi$$

denota que $\mathcal{A}$ satisface la fórmula ϕ bajo la asignación σ.

La definición formal procede por inducción sobre la estructura de ϕ (y la definición completa puede consultarse en el apunte); algunas de las reglas de dicha definición son:

$$\begin{array}{lll} (\mathcal{A}, \sigma) \models P(x_1, \ldots, x_n) & \text{sii} & (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) \in P^{\mathcal{A}} \\ (\mathcal{A}, \sigma) \models \phi \vee \psi & \text{sii} & (\mathcal{A}, \sigma) \models \phi \quad \text{o} \quad (\mathcal{A}, \sigma) \models \psi \\ (\mathcal{A}, \sigma) \models \forall x. P(x) & \text{sii} & (\mathcal{A}, \sigma[x/a]) \models P(a) \text{ para todo } a \in A \end{array}$$

donde $\sigma[x/a]$ denota la valuación que asigna a x el valor a, y coincide con σ en el resto de las variables.

Si ϕ es una fórmula cerrada (i.e. sin variables libres), la valuación σ no es necesaria para definir la relación de satisfacción (sólo la estructura $\mathcal{A}$).

Inferencia en lógica de predicados

El proceso de inferencia es un proceso de manipulación de fórmulas bien formadas (fbf), donde a partir de fbfs llamadas premisas se produce una nueva fbf llamada conclusión.

Estas manipulaciones se pueden formalizar mediante reglas de inferencia.

La lógica proposicional es un sublenguaje de la lógica de predicados, por lo tanto heredamos las reglas de deducción natural.

Eliminación de cuantificador universal

Intuición: Si $\phi(x)$ se cumple para todo x, podemos concluir que $\phi(x)$ se cumple para cualquier t dado.

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}[\forall x\ e]$$

Eliminación de cuantificador universal

Intuición: Si $\phi(x)$ se cumple para todo x, podemos concluir que $\phi(x)$ se cumple para cualquier t dado.

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)} [\forall x \ e]$$

Ejemplo: $F(g(t)), \forall x(F(x) \rightarrow \neg M(x)) \vdash \neg M(g(t))$

1	$F(g(t))$	premise
2	$\forall x(F(x) \rightarrow \neg M(x))$	premise
3	$F(g(t)) \rightarrow \neg M(g(t))$	$\forall x \ e$ 2
4	$\neg M(g(t))$	$\rightarrow e$ 3,1

Introducción de cuantificador universal

Intuición: Podemos concluir que ϕ se cumple para todo x si elegimos una variable x_0 arbitraria y nueva y demostramos $\phi(x)$.

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \phi(x_0) \end{array}}}{\forall x \phi}\ [\forall x\ i]$$

Ejemplo

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x) \text{ via } \dfrac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \phi(x_0) \end{array}}}{\forall x \phi}$$

Ejemplo

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x) \text{ via } \frac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \phi(x_0) \end{array}}}{\forall x \phi}$$

1		$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\forall x P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
4		$P(x_0)$	$\forall x$ e 2
5		$Q(x_0)$	$\to$ e 3,4
6		$\forall x Q(x)$	$\forall x$ i 3–5

Reglas para la cuantificación existencial

Podemos probar que existe una x con propiedad ϕ simplemente produciendo una t con la propiedad ϕ.

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi}\,[\exists x\ i]$$

Reglas para la cuantificación existencial

Podemos probar que existe una x con propiedad ϕ simplemente produciendo una t con la propiedad ϕ.

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi}\ [\exists x\ i]$$

Si sabemos $\exists x \phi(x)$ podemos razonar temporalmente sobre un elemento arbitrario t que satisface $\phi(t)$ para probar una conclusión que no depende de t.

$$\frac{\exists x \phi(x) \qquad \boxed{\begin{array}{cc} t & \phi(t) \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}\ [\exists e]$$

Ejemplo

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \ \vdash \ \exists x Q(x)$$

1		$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premise
2		$\exists x P(x)$	premise
3	x_0	$P(x_0)$	assumption
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x\ e$ 1
5		$Q(x_0)$	$\to e$ 4,3
6		$\exists x Q(x)$	$\exists x\ i$ 5
7		$\exists x Q(x)$	$\exists x\ e$ 2,3–6

Reglas para la igualdad

Recordar que la relación de igualdad, $x = y$, se incluye en todos los lenguajes de primer orden.

$$\frac{}{t = t}[\mathit{Reflexividad}*] \qquad \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}[\mathit{Simetria}]$$

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_2}{t_1 = t_3}[\mathit{Transitividad}] \qquad \frac{s = t \qquad \phi(s)}{\phi(t)}[\mathit{Subs}*]$$

Reglas para la igualdad

Recordar que la relación de igualdad, $x = y$, se incluye en todos los lenguajes de primer orden.

$$\frac{}{t = t}\,[\mathit{Reflexividad}*] \qquad \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\,[\mathit{Simetria}]$$

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_2}{t_1 = t_3}\,[\mathit{Transitividad}] \qquad \frac{s = t \qquad \phi(s)}{\phi(t)}\,[\mathit{Subs}*]$$

Ejercicio: Sólo las reglas con * son necesarias para derivar el resto.

Robustez y completitud

Consecuencia lógica

Diremos que ϕ es una consecuencia lógica de Γ si todo modelo de Γ es un modelo de ϕ.

Formalmente,

Consecuencia lógica

$\Gamma \models \phi$ quiere decir que para todo modelo $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \Gamma$ entonces $\mathcal{M} \models \phi$

Resultado central de la deducción natural

Teorema de robustez y completitud

Una fórmula ϕ es una consecuencia lógica de un conjunto de oraciones Γ, sii ϕ se puede demostrar a partir de Γ.
Es decir, $\Gamma \models \phi$ sii $\Gamma \vdash \phi$

probado por Kurt Godel, en 1929 en su tesis doctoral.

Resultado central de la deducción natural

Más tarde, Leon Henkin proporcionó otra prueba más simple.

Teorema

Cada conjunto consistente de oraciones tiene un modelo.

Un conjunto de oraciones Γ es consistente si no se puede probar una contradicción de esas hipótesis, i.e., no pude ocurrir que $\Gamma \models \phi$ y $\Gamma \models \neg\phi$

A partir de este teorema, es fácil deducir el teorema de completitud. Suponga que no hay prueba de ϕ a partir de Γ. Entonces el conjunto $\Gamma \cup \neg\phi$ es consistente. Según el teorema de existencia del modelo, eso significa que hay un modelo $\mathcal{M}$ de $\Gamma \cup \neg\phi$. Pero este es un modelo de Γ que no es un modelo de ϕ, lo que significa que ϕ no es una consecuencia lógica de Γ.

Resultado central de la deducción natural

Por demostrar: $\Gamma \models \phi$ si $\Gamma \vdash \phi$ o equivalentemente,

$$\Gamma \nvdash \phi \quad \textit{si} \quad \Gamma \not\models \phi$$

Resultado central de la deducción natural

Por demostrar: $\Gamma \models \phi$ si $\Gamma \vdash \phi$ o equivalentemente,

$$\Gamma \nvdash \phi \quad \textit{si} \quad \Gamma \not\models \phi$$

Lema

$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \phi$

Demostración: Asuma que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente. Luego, existe una formula ψ tal que $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi$ y $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\psi$.

Es decir $\Gamma, \neg\phi \vdash \bot$ $\Gamma \vdash \neg\phi \rightarrow \bot$ (regla de la intro. de implicancia)
$\Gamma \vdash \phi$ (contrapositiva de implicancia)

Resultado central de la deducción natural

Por demostrar: $\Gamma \models \phi$ si $\Gamma \vdash \phi$ o equivalentemente,

$$\Gamma \nvdash \phi \quad \textit{si} \quad \Gamma \not\models \phi$$

Demostración:

1	$\Gamma \nvdash \phi$	(supuesto)
2	$\Gamma \cup \neg\phi$ es consistente	(contraposición de Lema)
3	$\mathcal{M} \models \Gamma \cup \neg\phi$	(Teorema)
4	$\mathcal{M} \models \Gamma$ y $\mathcal{M} \models \neg\phi$	
5	$\Gamma \not\models \phi$	(def. consecuencia lógica)