Aux 1: Otoño 2021

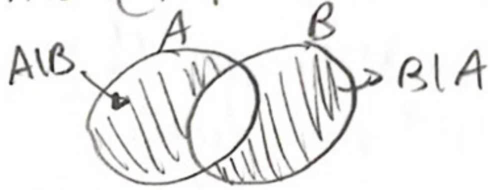
P1 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad.

a) Sea $A, B \in \mathcal{B}$. Pruebe que

$$\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

En efecto, recordemos la propiedad

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \quad \{A_i\}_i \text{ disjuntos (Prop de las medidas)}$$



Además

$A \cap B^c = A \setminus B$ y $B \cap A^c = B \setminus A$

Son disjuntos!, luego

$\mathbb{P}((A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$ calculemos estas.

Notar que del dibujo anterior $B = B \setminus A \,\dot{\cup}\, A \cap B$ unión disjunta

Así

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\therefore \mathbb{P}((A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \quad //$$

b) $A, B \in \mathcal{B}$. Si $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$

Recordemos la prop de monotonía $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

notemos que

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \\ A \cap B \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) \end{array}\right\} \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \quad \text{Por hipótesis}$$

Cambiando el rol de A y B $\Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$

se concluye que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ //

P2 a) Strings binarios de largo 7.

Por regla producto, son 7 casillas y por tanto 2^7 posibilidades $|A \times B| = |A||B|$

1/0

b) Strings de largo 7 que empiecen con 0 o termien en 11

3 casos

(A) Primera casilla un 0 $\Rightarrow 2^6$ posibilidades

(B) Últimas casilla un 11 $\Rightarrow 2^5$ posibilidades

$(A \cap B) \Rightarrow 2^4$ posibilidades

$\therefore$ Por regla suma $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

existen $2^6 + 2^5 - 2^4 = 2^4 \cdot (4+2-1) = 5 \cdot 2^4$ formas //

c) 3 0's consecutivos o 4 1's consecutivos

(A) tres 0's consecutivos: Utilicemos una descomposición en casos disjuntos.

Partiendo de izquierda a derecha, colocaremos los 0's y un 1 antecediéndolo de la siguiente forma

$$\left.\begin{array}{l} 000\square\square\square\square = 2^4 \\ 1000\square\square\square = 2^3 \\ \square1000\square\square = 2^3 \\ \square\square1000\square = 2^3 \\ \square\square\square1000 = 2^3 \end{array}\right\}$$

Todas disjuntas salvo el caso 0001000

total: $2^4 + 4 \cdot 2^3 - 1$

(B) Cuatro 1's consecutivos: Análogo, no se debe descontar en este caso

total: $2^3 + 3 \cdot 2^2$

$(A \cap B)$ Ambas: Solo existen 2 configuraciones en las que esto ocurre en simultaneo

0001111 y 1111000.

R: $|A| + |B| - |A \cap B| = 2^4 + 4 \cdot 2^3 - 1 + 2^3 + 3 \cdot 2^3 - 2 = 65$

5) 8 libros distintos y 3 son de combinatoria

a) 3 libros de combinatoria juntos.

Vamos por partes, ¿cuántas formas tengo para colocar 3 objetos juntos en 8 espacios? 6 formas.

¿Los objetos juntos de cuántas formas puedo ordenarlos? 3! formas

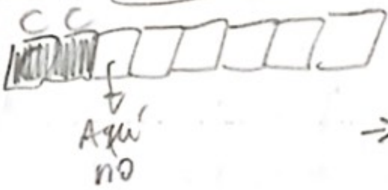
¿y los que no están juntos? 5! formas

Respuesta: $6 \cdot 3! \cdot 5! = 4320$ //

b) 2 de los 3 libros de combinatoria juntos al menos

2 de los 3 Al menos $\Rightarrow$ 2 juntos o $\underbrace{\text{3 juntos}}_{\text{// listo}}$

2 juntos: $\boxed{\text{Caso borde}}$



→ ¿Posiciones para colocar otro libro de combinatoria? 5

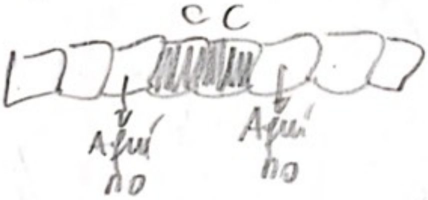
→ ¿Formas de ordenar los de combinatoria? 3!

→ ¿Formas de ordenar el resto? 5!

→ ¿Casos borde en total? 2.

total: $2 \cdot 3! \cdot 5! \cdot 5 = 7200$

$\boxed{\text{Caso no-borde}}$



Casos no borde 5

Posiciones para el tercer libro de combinatoria 4

orden de los de combinatoria 3!

orden " " " no-combinatoria 5!

total: $5 \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4 = 14400$

R: $\underbrace{7200 + 14400}_{\text{2 juntos}} + \underbrace{4320}_{\text{3 juntos}} = 25920$

c) No hayan 2 libros consecutivos de Combinatoria es decir 3 libros de combinatoria Separados.

Calculemos mediante el complemento, es decir

$$|A| = |\Omega| - |A^c|$$

Notar que $|A^c|$ lo calculamos en la (b) y $|\Omega|$ son las formas de ordenar 8 libros distintos $8!$

R: $8! - 25920 = 14400$ formas //

$\boxed{P4}$ a) 20 bolas blancas y 20 bolas negras se extraen sin reposición. Calcule la prob de que al sacar la bola nº 30 sea la última de su color. Supongamos la 30 es blanca

#favorables:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_ \ldots}\ \underset{30}{B}\ \underset{31}{N}\ \underset{32}{N} \ldots \underset{40}{N}$$

$\binom{29}{19}$ formas distintas de colocar 19 blancas en 29 espacios, en el resto las negras quedan fijas.

Si la 30 es negra es un caso distinto.

#totales: $\binom{40}{20}$ formas de colocar 20 negras en 40 espacios.

R: $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#\text{favorables}}{\#\text{totales}} = \dfrac{2\binom{29}{19}}{\binom{40}{20}}$ //

b) 10 hombres y 10 mujeres distintos, dividirlos en 5 grupos en botes indistinguibles.

Buscamos 2 hombres y 2 mujeres por bote

R: $\underbrace{\binom{10}{2}^2}_{1^{er}\text{bote}} \underbrace{\binom{8}{2}^2}_{2^{ndo}} \underbrace{\binom{6}{2}^2}_{3^{ero}} \underbrace{\binom{4}{2}^2}_{4^{to}} \underbrace{\binom{2}{2}^2}_{5^{to}} \Big/ \underbrace{5!}_{\text{botes iguales}}$ //