Clase Número 5: Variables Aleatorias

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
21 de abril de 2020

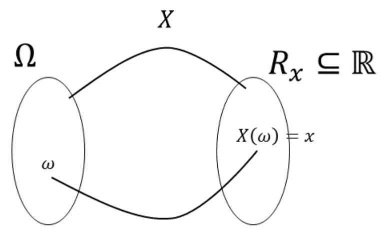
Variables Aleatorias Unidimensionales

El concepto de **variable aleatoria** tiene que ver con la necesidad de trabajar sobre conjuntos numéricos, siendo que Ω no necesesariamente lo es. Esto es fundamental para permitir la construcción de modelos probabilisticos.

Definición:
Sea $(\Omega, \mathcal{Q}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se define una **variable aleatoria** (v.a) X como una función a variable real sobre Ω. Es decir, si X es v.a.:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = x \end{aligned}$$

Graficamente:



denotamos R_X al recorrido de la función (v.a.) X.

Ejemplo 1:
Se lanza una moneda perfecta dos veces:

$$\Omega = \{(C,C)(C,S)(S,C)(S,S)\}$$

Sea X: Número de caras obtenidas

$$\Rightarrow X((C,C)) = 2; \quad X((C,S)) = X((S,C)) = 1; \quad X((S,S)) = 0;$$

con $R_x = \{0, 1, 2\}$

Ejemplo 2:
De una población se escoge una persona y se anota el sexo y la altura.

$$\Omega = \{(a,b) | a \in \{\text{Hombre,Mujer}\}; \quad \underbrace{m}_{\text{Estatura mínima}} \leq b \leq \underbrace{M}_{Estatura máxima} \quad \}$$

Sea X : sexo de la persona. Entonces, asignando un 0 si la persona es hombre y un 1 si la persona es mujer:

$$\begin{aligned} X((H,b)) &= 0 \quad \forall b \\ X((M,b)) &= 1 \quad \forall b \end{aligned}$$

con $R_x = \{0, 1\}$ Si ahora X : estatura de la persona. Entonces:

$$X((a, b)) = b \quad a \in \{H, M\}$$

con $R_x = [m.M]$

Observación:

1) Una variable aleatoria es una función real, sin embargo, NO toda función real es una v.a. (casos raros que no se estudiaran en el curso). Un requisito es exigir que $\forall x \in \mathbb{R}$ y para todo intervalo I, los eventos $\{\omega | X(\omega) = x\}$, $\{\omega | X(\omega) \in I\}$ tengan probabilidades bien definidas.

2) Informalmente, una v.a. es la medición *numérica* de una característica en un experimento. Por ejemplo, X : Velocidad de un móvil.

3) Si R_x es el recorrido de X, entonces:

   (a) Si R_x es numerable, se dice que X es una v.a. **discreta**.

   (b) Si R_x es no numerable, se dice que X es una v.a **continua**

Definición (Eventos Equivalentes):
Sea X v.a. definida sobre Ω y R_x su recorrido. Sean $A \subset \Omega$ y $B \subset R_x$ (eventos en Ω y R_x respectivamente). Se dice que A y B son **eventos equivalentes** (en espacios distintos) ssi:

$$A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$$

es decir, A es la preimagen de B.
De otra forma A y B son eventos equivalentes ssi:

$$A \quad \text{ocurre} \Longleftrightarrow B \quad \text{ocurre}$$

Ejemplo 1: En el ejemplo 1 anterior, $A = \{(C, S)(S, C)\}$ es equivalente a $B = \{1\} = \{X = 1\}$

Definición:
Si $A \subset \Omega$, $B \subset R_x$ son eventos equivalentes:

$$(A \equiv B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$$

Ejemplo:
En el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(C, S), (S, C)\}) = \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(\{(S, S)\}) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(\{(C, C)\}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Notar que las probabilidades en R_x están inducidas por las probabilidades en Ω.

Variables Aleatorias Discretas

Sea X v.a. discreta, es decir tal que R_x es un conjunto numerable de puntos, que escribimos como $R_x = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sea $P_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)\ \forall i$.

Por axiomas de probabilidades:

- $P_X(x_i) \geq 0\ \forall i$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P_X(x_i) = 1$

P_X se denomina, la **función de probabilidad** de la v.a. X.
El conjunto de pares $(x_i, P_X(x_i))$ se denomina la **distribución de probabilidad** de X.

Si $B \subset R_x$, entonces $P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P_X(x_i)$

Ejemplo:
Del ejemplo anterior, tenemos $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ y $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$.
Luego $\{(0, 1/4)(1, 1/2)(2, 1/4)\}$ es la distribución de probabilidades de X.
Si quisieramos calcular $\mathbb{P}(X \geq 1)$:

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \geq 1)}_{\text{obtener al menos una car}} = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

A continuación veremos algunos ejemplos importantes de v.a. discretas (modelos probabilisticos).

Experimento de Bernoulli

Definición (Experimento de Bernoulli):
Sea E un experimento con dos resultados posibles, es decir, Ω se puede escribir como:

$$\Omega = \{\text{Éxito, Fracaso}\} = \{\text{Verdadero, Falso}\} = \{1, 0\} = \{A, A^c\}$$

Si $\mathbb{P}(\text{Exito}) = \mathbb{P}(Verdadero) = \mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(A) = p$, se dice que E es un **Experimento de Bernoulli** de parámetro p.

Ejemplo:
El lanzamiento de una moneda perfecta es un experimento de Bernoulli de parámetro $p = \frac{1}{2}$.

Ejemplo:
El lanzamiento de un dado perfecto es un experimento de Bernoulli de parámetro $p = 1/6$, si se está interesado en si sale o no un 1.

Distribución Binomial

Consideremos un experimento de Bernoulli de parámetro p; es decir $\mathbb{P}(\text{Éxito}) = p$, $\mathbb{P}(\text{Fracaso}) = 1 - p$. El experimento se repite n veces en forma independiente. El espacio muestral asociado a las n repeticiones es:

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \{E, F\}\}$$

(por principio de multiplicación hay 2^n tuplas no equiprobables a menos que $p = \frac{1}{2}$).

Sea X la variable aleatoria definida por

$$X : \text{Número de éxitos (E) obtenidos en las } n \text{ repeticiones}$$

Es fácil notar que $R_x = \{0, 1, \dots, n\}$, y por ejemplo:

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}((EE \dots E)) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(E) \dots \mathbb{P}(E) = p^n \rightarrow \text{[Por independencia]}$$

Calculemos ahora $\mathbb{P}(X = k)$, $\forall k \in R_x$
Una tupla particular que cumple $X = k$ es $(\underbrace{E \dots E}_{k}\underbrace{F \dots F}_{n-k})$ y su probabilidad es $p^k(1-p)^{n-k}$. Ahora,

¿Cuantas tuplas existen con $X = k$?:
Estas son $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ (formas de permutar n objetos con k E's y $(n-k)$ F's no distinguibles). Luego:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Se dice que X tiene distribución **Binomial** de parámetros n, p y se denota $X \sim Bin(n, p)$.

Ejemplo:
Se lanza un dado perfecto 10 veces. Calcular la probabilidad de obtener por lo menos 3 veces el número 1.
Basta reconocer:

$$X : \text{Numero de 1's obtenidos en las 10 repeticiones} \Rightarrow X \sim Bin(10, 1/6)$$

Se pide $\mathbb{P}(X \geq 3) = \sum_{j=3}^{10} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=3}^{10} \binom{10}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-j}$

Distribución Binomial Negativa (Pascal)

Consideremos un experimento de Bernoulli de parámetro p i.e $\mathbb{P}(E) = p, \mathbb{P}(F) = 1-p$. El experimento se repite (en forma independiente) *hasta que* se obtiene el r-ésimo éxito (E).
El espacio Ω esta formado por tuplas del tipo $(\underbrace{E \dots E}_{(r-1)}\underbrace{F \dots F}_{(k-r)}E)$ tuplas de tamaño k, $k \geq r$.

Sea X la v.a. definida por:

$$X : \text{Numero de repeticiones necesarias(para obtener el } r\text{-ésimo éxito)}$$

Es fácil notar que $R_x = \{r, r+1, \dots\}$, y por ejemplo:

$$\mathbb{P}(X = r) = \mathbb{P}(\underbrace{E \dots E}_{r}) = p^r$$

Para calcular $\mathbb{P}(X = k)$ notamos que:

- La tupla particular $(\underbrace{E \dots E}_{(r-1)}\underbrace{F \dots F}_{(k-r)}E)$ cumple con $X = k$ y tiene probabilidad $p^r(1-p)^{k-r}$
- ¿Cuantas tuplas existen? Notar que el último elemento esta fijo (debe ser E), por lo tanto, solo se pueden permutar los $(k-1)$ primeros elementos, y esto se puede hacer de $\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} = \binom{k-1}{r-1}$. Luego:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, \dots$$

Se dice que X tiene distribución **Binomial Negativa o de Pascal** de parámetros r, p y se denota $X \sim BN(r, p)$.

Caso Particular:
Si $r = 1$, es decir:

$$X : \text{Número de repeticiones para obtener el primer éxito}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad k = 1, \dots$$

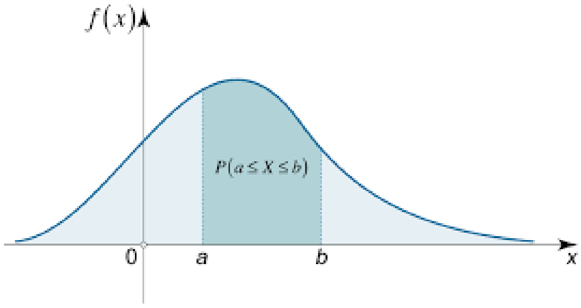
y se dice que X tiene distribución **Geométrica** de parámetro p y se denota $X \sim Geom(p)$.

Variables Aleatorias Continuas

Sea X v.a. continua, es decir, tal que su recorrido R_x es un subconjunto no numerable de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, X : Duración de una ampolleta, con $R_x = \mathbb{R}^+$.
En este caso, NO es posible asignar a cada punto x una probabilidad $\mathbb{P}(X = x)$ y menos exigir $\sum P_X(x) = 1$, puesto que los puntos son no numerables.

Definición:
Sea X v.a. continua, se dice que X es **absolutamente continua** ssi existe una función real $f(x)$ (llamada **función densidad** de probabilidad de X) tal que:

- $f(x) \geq 0$, $\forall x$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Si $-\infty < a \leq b < \infty$: $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$



Ejemplo:
Supongamos que se elige un punto al azar (sin preferencias) en el intervalo $(0, 1)$.
Sea X : Coordenada del punto elegido
Es fácil observar que $f(x) = k$, $0 < x < 1$ y como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, entonces $k = 1$, y se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculemos $\mathbb{P}(X \leq 1/2 | X \geq 2/3)$ por definición:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 1/2 | X \geq 1/3) &= \frac{\mathbb{P}((X \leq 1/2) \cap (X \geq 1/3))}{\mathbb{P}(X \geq 1/3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(1/3 \leq X \leq 1/2)}{\mathbb{P}(X \geq 1/3)} \\ &= \frac{\int_{1/3}^{1/2} f(x)dx}{\int_{1/3}^{\infty} f(x)dx} \\ &= \frac{\int_{1/3}^{1/2} dx}{\int_{1/3}^{1} dx} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Observaciones:

1) Las variables continuas son teóricas, puesto que los instrumentos de medición siempre discretizan.

2) Sea $x^* \in R_x$, $\mathbb{P}(X = x^*) = \displaystyle\int_{x^*}^{x^*} f(x)dx = 0$, $\forall x^* \in R_x$
Todo punto en un v.a. absolutamente continua (con función densidad $f(x)$) tiene probabilidad 0 de ocurrir, pero es posible que ocurra.
Esto nos hace que notar que $\mathbb{P}(A) = 0$ no implica que $A = \emptyset$, o de otro modo, que un evento sean improbable, no quiere decir que sea imposible.
En el ejemplo anterior, todo punto del intervalo $(0,1)$ tiene probabilidad 0 de ser elegido, sin embargo algún punto debe ser escogido.

3) De la observación anterior:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

4) Si existe una función $g(x) \geq 0$ con $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = k \geq 0$. Entonces, basta definir $f(x) = \frac{g(x)}{dx}$, $\forall x$, para obtener una función densidad.

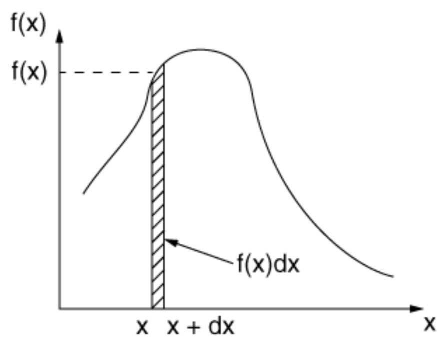
5) $f(x)$ NO es una probabilidad. Para darle una interpretación calculemos $\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x)$:

$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx = \underbrace{\Delta x f(\eta)}_{\text{Por T.V.M integral}} \quad , \quad x \leq \eta \leq x + \Delta x$$

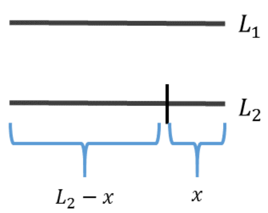
Si Δx es pequeño, $f(\eta) = f(x)$, por lo que $\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx \Delta x f(x)$, lo que permite escribir:

$$f(x) \approx \frac{\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Luego $f(x)$ es la probabilidad de que a variable caiga en un intervalo pequeño dividido por el ancho del intervalo, esto justifica el nombre de densidad de probabilidad.



Ejemplo:
Se tiene dos barras, una de largo L_1 y la otra de largo L_2. La barra de largo L_2 se corta en algún punto al azar quedando tres barras.



Se desea calcular la probabilidad de poder formar un triángulo.
Si X : Punto de corte, entonces como todo punto tiene igual densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{L_2} & 0 < x < L_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $A = \{\text{formar triángulo}\}$, entonces se debe cumplir que todo lado sea menor a la suma de los otros 2:

$$\begin{array}{rcl} L_1 & < & x + (L_2 - x) \\ x & < & L_1 + (L_2 - x) \\ (L_2 - x) & < & L_1 + x \end{array}$$

de donde:

$$\begin{array}{rcl} L_1 & < & L_2 \\ x & < & \frac{L_1 + L_2}{2} \\ x & > & \frac{L_2 - L_1}{2} \end{array}$$

Luego:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\frac{L_2 - L_1}{2} < x < \frac{L_1 + L_2}{2}\right) = \int_{\frac{L_2 - L_1}{2}}^{\frac{L_1 + L_2}{2}} f(x)dx = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_1 < L_2)$$

Si $L_1 = 1,\ L_2 = 1{,}5$, entonces:

$$\mathbb{P}(\text{formar triangulo}) = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$$

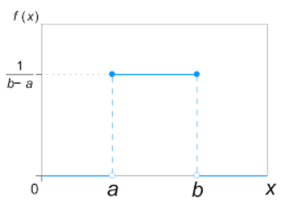
además en este caso (Verificar):

$$\mathbb{P}(\text{formar triangulo equilatero}) = \mathbb{P}(\text{formar triangulo isosceles}) = 0$$

Definición:
Sea X v.a. con función densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se dice que X tiene distribución **Uniforme** en el intervalo $[a, b]$ y se denota $X \sim U(a, b)$.
En el ejemplo anterior $X \sim U(0, L_2)$



Propuestos

P1. *a*) Muestre que si $\mathbb{P}(A|D) \geq \mathbb{P}(B|D)$ y $\mathbb{P}(A|D^c) \geq \mathbb{P}(B|D^c)$, entonces $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$

b) Muestre que si $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$, entonces $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c) < \mathbb{P}(A)$

P2. En un lote de N artículos se sabe que existen r defectuosos. Los artículos se inspeccionan uno a uno hasta detectar todos los defectuosos.
Si X : Número de artículos inspeccionados.
Calcule $\mathbb{P}(X = k)$, $\forall k \in R_x$.

P3. Un caja contiene N fichas numeradas de 1 a N, Se sacan (con reemplazo) n fichas.
Si X : Máximo número obtenido.
Muestre que $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - left(\frac{k-1}{N}^n$, $\forall k \in R_x$
Si Y : Mínimo número obtenido, calcule $\mathbb{P}(Y = k)$, $\forall k \in R_Y$

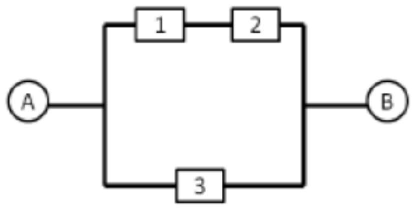
P4. Se dice que X tiene distribución **exponencial** de parámetro α ($X \sim exp(\alpha)$) ssi $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$.

a) Muestre que si $X \sim exp(\alpha)$:

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

propiedad conocida como *pérdida de memoria.*

b) Suponga que la duración X (en horas) de ciertas componentes eléctricas es exponecial del parámetro $\alpha = \frac{1}{2}$. Tres componentes $C_1.C_2$ y C_3 se instalan en el circuito



Si existe flujo de A a B por más de 1 hora. Calcule:

(i) La probabilidad que C_3 haya funcionado más de una hora.

(ii) La probabilidad que el flujo solo se haya producido a través de C_3