Auxiliar 2: Probabilidad condicional (e independencia)

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Bruno Moreno & Iván Pérez
1 de abril del 2021

Resumen

Definición: Sean A, B eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilidad de A condicionado por B se define por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propiedades: A continuación, las más relevantes:

1. **Fórmula de Bayes:** Dados A, B eventos, se tiene que:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

2. **Probabilidades Totales:** Sea Ω un espacio muestral y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ partición de Ω, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

3. **Multiplicación de Probabilidades:** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos, entonces:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}(A_i|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n)\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i|A_{i+1} \cap \cdots \cap A_n)$$

Definición: Diremos que dos eventos A y B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Problemas

P1. Heterochromia iridum

La heterocromía es una anomalía de los ojos en la que los iris son de diferente color, que se puede transmitir de forma genética de la siguiente manera:

- Si sólo el padre la presenta, el hijo tendría probabilidad a de presentarla.
- Si sólo la madre la presenta, el hijo tendría probabilidad b de presentarla.
- Si ambos padres la presentan, el hijo la presentará con probabilidad 1.

Además, asuma que solo se puede adquiere genéticamente y cada uno de los padres tiene probabilidad p de presentarla, en forma independiente entre ellos.

a) Si un tipo es heterocromado, ¿Cuál es la probabilidad de que la heterocromía se le haya sido transmitida sólo por la madre?

b) Si hay dos hermanos, y uno de ellos es heterocromado, ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hermano también lo sea?

P2. Cambiazo

Se tienen n urnas denotadas por $U_1, U_2, \ldots, U_n$ cada una de las cuales contiene α esferas blancas y β esferas negras. Se pasa una esfera de U_1 a U_2, luego de U_2 a U_3 y así sucesivamente. Finalmente se escoge una esfera de la urna U_n. Si la primera esfera que se pasó era blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la última esfera elegida sea blanca? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

P3. Sergio el fugitivo

Luego estar envuelto en negocios turbios, Sergio un empresario deportivo, viaja a Miami para huir de la justicia y dispone de n escondites (no conectados entre sí) para lograr salirse con la suya. La probabilidad de que se encuentra en el $i-$ésimo escondite es p_i, y, si esta allí, se le encuentra con probabilidad α_i.

a) Si se hace una búsqueda en todos los escondites:

 I) Determine la probabilidad de encontrarlo.

 II) Si no se le encuentra, calcule la probabilidad de que esté en el escondite 1. ¿Qué pasa si $\alpha_i = \alpha$, $\forall i$?.

b) Se le buscó en el escondite j y no se encontró. Calcule la probabilidad de que esté en escondite i, $\forall i, j$.

P4. Permiso de vacaciones

José Pedro va con su boina a un carrete con su prima en Cachagua, pero sabe que camino allá se enfrenta a un inusualmente estricto cordón sanitario donde solo puede pasar si el *test* de reacción en cadena de polimerasa (PCR) es negativo para COVID-19. Va a un laboratorio donde el examen tiene un 99 % de certeza en que de positivo si se está enfermo, y un 80 % que de negativo si se está sano. Considerando que esta persona viajó a Brasil en vacaciones, la probabilidad de que esté enfermo es de un 60 %:

a) ¿Cuál es la probabilidad que pase el cordón estando enfermo?

b) Calcule la probabilidad de que el *test* PCR se equivoque.

c) Si el test da positivo ¿Cuál es la probabilidad de que efectivamente esté enfermo?

P5. Propuesto: Más urnas y bolitas

a) Se tiene una urna con n bolas blancas y 1 bola negra, junto a un dado perfecto. Se tira el dado, si sale par, se sacan 2 bolas de la urna sin reposición, y si sale impar solo se extrae una. Calcule la probabilidad de que en el dado haya salido un 6 sabiendo que la bola negra fue extraída.

b) El objetivo de este problema es probar la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}^2 \frac{k}{N} = \frac{1}{2}\binom{2N}{N}.$$

Para ello, consideremos el siguiente experimento: Se dispone de $2N$ bolas, N blancas y N negras. Se dispone también de dos urnas vacías. Se colocan al azar N bolas en cada urna.

I) Calcule la probabilidad de que hayan $k \in \{0, .., N\}$ bolas blancas en la primera urna.

II) Si se saca una bola de la primera urna, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

III) Concluya el resultado.