Clase Número 3: Combinatoria

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
30 de marzo de 2020

Recuerdo

Clase 1

- Experimento-Modelo
- Experimento Aleatorio
- Espacio Muestral
- Eventos

Clase 2

- Axiomática de Probabilidades
- Propiedades
- Definición frecuentista
- Espacio Muestral Finito

Bajo el supuesto de $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ equiprobable:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Ejemplo 1:
Sea E : lanzar moneda perfecta dos veces:

$$\Omega = \{(C,C)(C,S)(S,C)(S,S)\} \quad Card(\Omega) = 4$$

Sea $A = \{\text{Obtener al menos un sello}\} \Rightarrow A = \{(C,S)(S,C)(S,S)\} \quad Card(A) = 3 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$
Si se postula como espacio muestral $\Omega = \{\{C,C\}\{C,S\}\{S,S\}\}$ se obtiene $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ que es incorrecto ya que el segundo espacio Ω **NO** es equiprobable

Ejemplo 2:
Se tiene una caja con 20 fichas blancas (B) y 80 fichas rojas (R)
Si E : Sacar una ficha y observar su color $\Rightarrow \Omega = \{B, R\}$ que es obviamente no equiprobable (el color no lo es). La solución es etiquetar las fichas $B_1, \ldots B_{20}, R_1, \ldots, R_{80}$, con lo cual $\Omega = \{B_1, \ldots B_{20}, R_1, \ldots, R_{80}\}$ resulta ser equiprobable (pues las fichas lo son). Si A corresponde al evento de sacar una ficha blanca, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

que corresponde al resultado esperado.

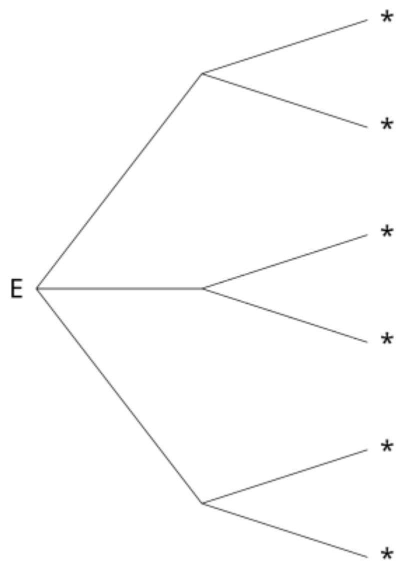
Combinatoria (Métodos de Conteo)

1. Principio de Multiplicación

Supongamos un experimento E que se puede expresar como una secuencia (orden) de subexperimentos $E_1, E_2, \ldots, E_k$; es decir:

$$E = (E_1, E_2, \ldots, E_k)$$

Si E_i tiene n_i resultados posibles ($i = 1, \ldots, k$), entonces E tiene $\prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$ resultados posibles.



Luego E tiene $n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 2 = 6$ resultados.

Ejemplo 1:
¿Cuantas patentes para auto se tienen?
Una patente es una secuencia de 4 letras y 2 números, es decir $P = LLLLNN$:

$$\underbrace{\boxed{22}\boxed{22}\boxed{22}\boxed{22}\boxed{10}\boxed{10}}_{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6}$$

Luego el número de patentes es $22^4 \cdot 10^2$.

Ejemplo 2:
Consideremos el conjunto de letras $\{a, b, c\}$.
¿Cuantas palabras de largo 2 se pueden formar?
Una palabra es una secuencia de 2 letras:

$$\boxed{3}\boxed{3} = 3 \cdot 3 = 9$$

si las letras se pueden repetir, estas eom: *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*, *aa*, *bb*,*cc*.

$$\boxed{3}\boxed{2} = 3 \cdot 2 = 6$$

si las letras no se pueden repetir, estas son: *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*.

Ejemplo 3:
Para un grupo de n personas se desea calcular la probabilidad de $A = \{\text{Todas cumplen año en dias distintos}\}$.
Denotaremos los dias de 1 a 365 y postulamos: $\Omega = \{(X_1, \dots, X_n) | X_i \in \{1, \dots, 365\}\}$
donde X_i : día que cumple año la $i-$ésima persona.
Por principio de multiplicación:

$$Card(\Omega) = 365 \cdot 365 \dots 365 = 365^n$$
$$Card(A) = 365 \cdot 364 \dots (365 - (n-1))$$

Luego

$$\mathbb{P}(A) = \frac{365 \cdot 364 \dots (365 - (n-1))}{365^n} \quad \text{si } n \leq 365$$
$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{si } n > 365$$

Ejemplo 4:
Consideremos las letras de la palabra $MARIA$. ¿De cuantas maneras se pueden mover las letras y que no queden las A juntas?
Por principio de multiplicación

i) Instalamos primero las 3 letras que no son A:

$$\underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1}$$

esto se puede hacer de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas

ii) Instalamos las 2 A (no juntas):

$$\cdot\_ \quad \cdot\_ \quad \cdot\_ \quad \cdot$$

se debe elegir dos $\cdot$ para poner la A y esto se puede hacer de 6 maneras.

iii) El número total es entonces $6 \cdot 6 = 36$.

Todas las fórmulas a continuación se derivan del principio de multiplicación.

2. Muestras ordenadas con reemplazo

Sea $\{a_1 \dots a_n\}$ un conjunto de elementos distintos (o distinguibles). El número de secuencias (orden) $(a_{i_1} \dots a_{i_k})$ con $a_{i_J} \in \{a_1 \dots a_n\}$ es $n \cdot n \dots n = n^k$
Con reemplazo significa que un elemento puede seleccionarse mas de una vez.

Ejemplo:
Si se lanzan tres dados, el número de resultados posibles es 6^3.

3. Muestras ordenadas sin reemplazo (Permutaciones)

Sea $\{a_1 \dots a_n\}$, el número de secuencias $(a_{i_1} \dots a_{i_k})$ con $a_{i_J} \in \{a_1 \dots a_n\}$ donde ningún elemento puede repetirse es:

$$n \cdot (n-1) \dots (n - (k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

denotaremos este número por P_k^n : permutaciones de tamaño k con n elementos.

Ejemplo:
En el problema del cumpleaño, se puede escribir $Card(A) = P_n^{365} = \frac{365!}{(365-n)!}$

Observación: Si $k = n$ (se usan todos los elementos):

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

corresponde a todas las formas de *permutar* n objetos.

4. Muestras desordenadas sin reemplazo (Combinaciones)

Sea $\{a_1 \dots a_n\}$, el número de **conjuntos** $\{a_{i_1} \dots a_{i_k}\}$ con $a_{i_J} \in \{a_1 \dots a_n\}$ donde ningún elemento puede repetirse es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lo denotamos por C_k^n : combinaciones (grupos) de tamaño k con n objetos.
Para mostrar lo anterior consideramos:

a) Seleccionamos k objetos de entre los n (sin importar el orden); esto se puede hacer de C_k^n formas (C_k^n es desconocido aún).

b) Cada conjunto de a) se puede permutar de $P_k^k = k!$formas

c) Realizar a) y b) corresponde a las permutaciones de tamaño k con n objetos:

$$C_k^n \cdot k! = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

de donde $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ejemplo 1:
Consideremos $\{a, b, c\}$
¿Cuantos conjuntos existen de dos letras?
Corresponde a $C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$, estas son: $\{a, b\}\{a, c\}\{b, c\}$

Ejemplo 2:
Consideremos 20 fichas B y 80 fichas R.

a) Se sacan 5 fichas (sin reemplazo) y se desea calcular la probabilidad de $A = \{$obtener exactamente k fichas $B\}$.
Usamos $\Omega = \{\{x_1, \dots, x_5\} | x_i \in \{B_1, \dots, B_{20}, R_1, \dots, R_{80}\} x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j\}$

$$Card(\Omega) = C_5^{100} = \binom{100}{5} \quad \text{Conjuntos de tamaño 5 con 100 objetos}$$

Para A necesitamos conjuntos de tamaño k de entre 20 y conjuntos de tamaño $(5-k)$ de entre 80. Luego:

$$Card(A) = C_k^{20} \cdot C_{5-k}^{80} = \binom{20}{k}\binom{80}{5-k}$$

de donde:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{20}{k}\binom{80}{5-k}}{\binom{100}{5}} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

b) ¿$\mathbb{P}$(obtener al menos 3 fichas B)

$$\mathbb{P}(\text{obtener al menos 3 fichas B}) = \sum_{k=3}^{5} \mathbb{P}(k \text{ fichas } B) = \sum_{k=3}^{5} \frac{\binom{20}{k}\binom{80}{5-k}}{\binom{100}{5}}$$

Ejemplo 3:
Sea Ω un conjunto con n elementos:

$$\Omega = \{\omega_1 \dots \omega_n\}$$

¿Cuantos subconjuntos de Ω existen?

$$\begin{aligned} \#Subconjuntos(\Omega) &= \sum_{k=0}^{n} \#Subconjuntos(\text{tamaño } k) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

Ejemplo 4:
De un mazo de naipes (52 cartas) le entregan 9. Se llama Poker a obtener 4 de mismo número.

a) $\mathbb{P}(\text{Poker de \#J}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{5}}{\binom{52}{9}}$

b) ¿$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{obtener al menos un poker})$
Sea $A_J = \{\text{Poker de \#J}\} \Rightarrow A = \bigcup_{J=1}^{13} A_J$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{J=1}^{13} \mathbb{P}(A_J) - \sum_{i<J=2}^{13} \mathbb{P}(A_i \cap A_J) + \sum_{i<J<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_J \cap A_k) - \dots$$

las intersecciones de tres o mas elementos tienen probabilidad 0 puesto que solo se tienen 9 cartas. Ahora:

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_J) = \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{44}{1}}{\binom{52}{9}} \quad \forall i, J$$

falta ver cuantas intersecciones $A_i \cap A_J$ existen: eso corresponde a $C_2^{13} = \binom{13}{2}$. Luego

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{13} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<J=2}^{13} \mathbb{P}(A_i \cap A_J) \\ &= 13 \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{5}}{\binom{52}{9}} - \binom{13}{2} \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{44}{1}}{\binom{52}{9}}\end{aligned}$$

5. Permutaciones con objetos no todos diferentes

Supongamos n objetos tal que se pueden agrupar en k clases, de tal forma que los n_i objetos de la clase i son indistinguibles ($\sum_{i=1}^{n} n_i = n$). El número de permutaciones de los n objetos es:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Observación: Si $n_1 = n_2 = \cdots = 1$ todos los objetos son distinguibles y se recupera $n!$

Ejemplo 1:
Consideremos $BBRRR$, es decir $n = 5$ elementos; existen $n_1 = 2(B)$ y $n_2 = 3(R)$ elementos indistinguibles.
El número de permutaciones de $BBRRR$ es $\frac{5!}{3!2!} = 10$

Ejemplo 2:
Consideremos las letras

$$AAABBEERO$$

¿De cuantas maneras se pueden permutar y que las A no queden juntas?

a) Existen 6 letras no A $(2B, 2E, 1R, 1O)$ que se pueden permutar de $\frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$ formas.

b)

$$\cdot \ \underline{\mathrm{A}^c} \cdot \ \underline{\mathrm{A}^c} \cdot \ \underline{\mathrm{A}^c} \cdot \ \underline{\mathrm{A}^c} \cdot \ \underline{\mathrm{A}^c} \cdot \ \underline{\mathrm{A}^c}$$

las tres A deben estar en los $\cdot$. Se deben escoger tres $\cdot$ de los siete disponibles y se se puede hacer de $C_3^7 = \binom{7}{3} = 35$.

Luego el número de permutaciones buscado es $180 \cdot 35 = 6300$.

6. Muestras desordenadas con repetición (Combinaciones con repetición)

Sea $\{a_1 \ldots a_n\}$, el número de **conjuntos** (no orden) $\{a_{i_1} \ldots a_{i_k}\}$ con $a_{i_J} \in \{a_1 \ldots a_n\}$ donde los elementos pueden repetirse es:

$$C_k^{n-1+k} = \binom{n-1+k}{k}$$

Ejemplo 1:
Sea $\{a, b, c\}$.¿Cuantos conjuntos de dos letras existen si se permite la repeticióm?

$$n = 3, k = 2 \Rightarrow C_2^{3-1+2} = \binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

estos son: $\{a, b\}$,$\{a, c\}$,$\{b, c\}$,$\{a, a\}$,$\{b, b\}$,$\{c, c\}$

Ejemplo 2:
¿Cuantas fichas existen en un juego de dominó?
Una ficha de dominó es un conjunto con dos números y estos se escogen entre el 0 y el 6 con repetición, entonces $n = 7$; $k = 2$ y el número de fichas es:

$$C_2^{7-1+2} = \binom{7-1+2}{2} = \binom{8}{2} = 28$$

Observación: Resumen $\{a, b, c\}$

secuencias	ab,ba	conjuntos	$\{ab\}$
orden	ac,ca	no orden	$\{ac\}$
con repeticion	bc,cb	con repeticion	$\{bc\}$
$3^2 = 9$	aa	$C_2^{3-1+2} = 6$	$\{aa\}$
	bb		$\{bb\}$
	cc		$\{cc\}$
secuencias	ab,ba	conjuntos	$\{ab\}$
orden	ac,ca	no orden	$\{ac\}$
sin repeticion	bc,cb	sin repeticion	$\{bc\}$
$P_2^3 = 6$		C_2^3	

Observación: Los conjuntos con repetición no son equiprobables por lo tanto no se pueden usar para calcular $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$
Por ejemplo, de la tabla anterior:

$$\mathbb{P}(\{ab\}) = \mathbb{P}((ab)) + \mathbb{P}((ba)) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}(\{aa\}) = \mathbb{P}((aa)) = \frac{1}{9}$$

Finalizamos con 2 ejemplos

Ejemplo 1:

a) Una moneda perfecta se lanza n veces.
Si $A = \{\text{obtener al menos un sello}\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) &= 1 - \mathbb{P}(\text{ningún sello}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(n \text{ caras}) \\ &= 1 - \mathbb{P}((C \ldots C)) \\ &= 1 - \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

Se usa $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \{C, S\}\}$, $Card(\Omega) = 2^n$

b) Si se desea con probabilidad p, obtener al menos un sello, ¿cuantos lanzamientos se deben realizar?
Se tiene $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2^n} = p \Rightarrow n = \frac{ln(1-p)}{ln(2)}$.
Por ejemplo, si $p = 0{,}99$, entonces $n = 6{,}64$ y se deben realizar 7 lanzamientos.

Ejemplo 2:
Volvamos al *Ejemplo 2* de **Combinaciones**, pero ahora las 5 fichas se sacan con reemplazo.
Postulamos $\Omega = \{(x_1 \dots x_5) | x_i \in \{B_1 \dots B_{20}, R_1 \dots R_{80}\}\}$
Calculamos primero, si $C = (BBRRR)$:

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((\underbrace{BB}_{2=k}\underbrace{RRR}_{5-k=3})) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{20^k \cdot 80^{5-k}}{100^5} = \frac{20^2 \cdot 80^3}{100^5}$$

Si $A = \{$obtener 2 fichas B$\}$, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((BBRRR)) + \mathbb{P}((BRBRR)) + \dots$$

Todas las tuplas con 2B y 3R tienen igual probabilidad, con lo que:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) \cdot \text{Numero de tuplas}$$

como Numero de tuplas $= \frac{5!}{3!2!} = 52$

$$\mathbb{P}(A) = \binom{5}{2}\left(\frac{20}{1000}\right)^2\left(\frac{80}{100}\right)^3$$

Propuestos

P1. Muestre con argumentos de combinatoria

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Hint: Considere una población $A = \{a_1 \dots a_n\}$ y fije un elemento.

b) $\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$
Hint: Considere un grupo de n hombres y m mujeres.

P2. Considere un mazo de naipes; se reparten 5 cartas (sin reemplazo). Calcule la probabilidad de poder formar (obtener)

a) Escala: 5 cartas con valores consecutivos (desde A2345 hasta 10JQKA).

b) Color: 5 cartas de la misma pinta.