Matemáticas Discretas

Clase 2: Lógica Proposicional

Andrés Abeliuk

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia y Federico Olmedo.

Recapitulación

Sintaxis

Definición (sintaxis de la lógica proposicional)

Dado un conjunto $P = \{p, q, r, \ldots\}$ de proposiciones, el conjunto de fórmulas bien formadas sobre P, notado $\mathcal{L}(P)$, se define recursivamente (o inductivamente) de la siguiente manera:

Caso base: Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$.
Caso inductivo: Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta) \in \mathcal{L}(P)$.

Observacion: El lenguaje se puede definir como una gramática libre de contexto:

$$S \to p \mid q \mid r \mid \ldots \mid \neg S \mid (S \wedge S) \mid (S \vee S) \mid (S \to S)$$

Semántica

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma\colon P \to \{0,1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P. La función

$$\hat{\sigma}\colon \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$$

le asigna un valor de verdad a cada fórmula en $\mathcal{L}(P)$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl} \hat{\sigma}(p) & = & \sigma(p) \quad \text{para } p \in P \\ \hat{\sigma}(\neg\alpha) & = & 1 - \hat{\sigma}(\alpha) \\ \hat{\sigma}(\alpha \wedge \beta) & = & \text{mín}\,\{\hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\} \\ \hat{\sigma}(\alpha \vee \beta) & = & \text{máx}\,\{\hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\} \\ \hat{\sigma}(\alpha \to \beta) & = & \text{máx}\,\{1 - \hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\} \end{array}$$

Argumentos válidos

$$\textit{Premisas} \implies \textit{Conclusion}$$

- Un argumento es una secuencia de proposiciones.
- Todo menos la proposición final del argumento se llama premisas y la proposición final se llama conclusión.
- Un argumento se llama válido si, y solo si, siempre que todos los las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera

Contenido clase de hoy

Lógica Proposicional

1. Clasificación de fórmulas
2. Equivalencia de fórmulas
3. Consecuencia lógica

Clasificación de fórmulas

Satisfactibilidad

Ahora ya podemos clasificar algunas de las fórmulas de la lógica proposicional de acuerdo a las siguientes definiciones:

Definición (satisfactibilidad)

Un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \subseteq \mathcal{L}(P)$ se dice satisfactible sii existe *alguna* valuación que hace a todas sus fórmulas simultáneamente verdaderas, es decir, sii[1] existe $\sigma\colon P \to \{0,1\}$ tal que $\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) = \hat{\sigma}(\gamma) = \ldots = 1$.

En caso contrario se dice que Γ es insatisfactible.

[1] De aquí en adelante vamos a usar "sii" como una abreviación de "si y sólo si".

Satisfactibilidad

Ahora ya podemos clasificar algunas de las fórmulas de la lógica proposicional de acuerdo a las siguientes definiciones:

Definición (satisfactibilidad)

Un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \subseteq \mathcal{L}(P)$ se dice satisfactible sii existe *alguna* valuación que hace a todas sus fórmulas simultáneamente verdaderas, es decir, sii[1] existe $\sigma\colon P \to \{0, 1\}$ tal que $\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) = \hat{\sigma}(\gamma) = \ldots = 1$.

En caso contrario se dice que Γ es insatisfactible.

Ejemplo

[1] De aquí en adelante vamos a usar "sii" como una abreviación de "si y sólo si".

Satisfactibilidad

Ahora ya podemos clasificar algunas de las fórmulas de la lógica proposicional de acuerdo a las siguientes definiciones:

Definición (satisfactibilidad)

Un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \subseteq \mathcal{L}(P)$ se dice satisfactible sii existe *alguna* valuación que hace a todas sus fórmulas simultáneamente verdaderas, es decir, sii[1] existe $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$ tal que $\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) = \hat{\sigma}(\gamma) = \ldots = 1$.

En caso contrario se dice que Γ es insatisfactible.

- $\{p \vee q\}$ satisfactible

[1] De aquí en adelante vamos a usar "sii" como una abreviación de "si y sólo si".

Satisfactibilidad

Ahora ya podemos clasificar algunas de las fórmulas de la lógica proposicional de acuerdo a las siguientes definiciones:

Definición (satisfactibilidad)

Un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \subseteq \mathcal{L}(P)$ se dice satisfactible sii existe *alguna* valuación que hace a todas sus fórmulas simultáneamente verdaderas, es decir, sii[1] existe $\sigma \colon P \to \{0,1\}$ tal que $\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) = \hat{\sigma}(\gamma) = \ldots = 1$.

En caso contrario se dice que Γ es insatisfactible.

- $\{p \vee q\}$ satisfactible
- $\{p \wedge q,\ p \wedge \neg q\}$ insatisfactible

[1] De aquí en adelante vamos a usar "sii" como una abreviación de "si y sólo si".

Tautologías y contradicciones

Definición (tautología y contradicción)

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una tautología sii es *verdadera* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Tautologías y contradicciones

Definición (tautología y contradicción)

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una tautología sii es *verdadera* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para toda valuación $\sigma\colon P \to \{0,1\}$.

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una contradicción sii es *falsa* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 0$ para toda valuación $\sigma\colon P \to \{0,1\}$.

Definición (tautología y contradicción)

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una tautología sii es *verdadera* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0,1\}$.

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una contradicción sii es *falsa* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 0$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0,1\}$.

Ejemplo

- $p \vee \neg p$ es tautología

Tautologías y contradicciones

Definición (tautología y contradicción)

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una tautología sii es *verdadera* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una contradicción sii es *falsa* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 0$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Ejemplo

- $p \vee \neg p$ es tautología
- $p \to p \vee q$ es tautología

Tautologías y contradicciones

Definición (tautología y contradicción)

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una tautología sii es *verdadera* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para toda valuación $\sigma\colon P \to \{0, 1\}$.

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una contradicción sii es *falsa* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 0$ para toda valuación $\sigma\colon P \to \{0, 1\}$.

Ejemplo

- $p \vee \neg p$ es tautología
- $p \to p \vee q$ es tautología
- $p \wedge \neg p$ es contradicción

Tautologías y contradicciones

Definición (tautología y contradicción)

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una tautología sii es *verdadera* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ es una contradicción sii es *falsa* bajo cualquier valuación, es decir, sii $\hat{\sigma}(\alpha) = 0$ para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Ejemplo

- $p \vee \neg p$ es tautología
- $p \to p \vee q$ es tautología
- $p \wedge \neg p$ es contradicción

Ejercicio. ¿Qué relación hay entre las nociones de contradicción e (in)satisfactibilidad?

Equivalencia de fórmulas

Equivalencia

Informalmente, dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ se dicen equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Formalmente:

Definición (equivalencia)

Dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ son (semánticamente) equivalentes, notado $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si

$$\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta)$$

para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Equivalencia

Informalmente, dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ se dicen equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Formalmente:

Definición (equivalencia)

Dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ son (semánticamente) equivalentes, notado $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si

$$\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta)$$

para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Ejemplo Probar que $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

Equivalencia

Informalmente, dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ se dicen equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Formalmente:

Definición (equivalencia)

Dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ son (semánticamente) equivalentes, notado $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si

$$\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta)$$

para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Ejemplo Probar que $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Equivalencia

Informalmente, dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ se dicen equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Formalmente:

Definición (equivalencia)

Dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ son (semánticamente) equivalentes, notado $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si

$$\hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta)$$

para toda valuación $\sigma \colon P \to \{0, 1\}$.

Ejemplo Probar que $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

Algunas equivalencias útiles

Leyes de De Morgan

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

Caracterización alternativa de $\rightarrow$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Algunas equivalencias útiles

Leyes de De Morgan

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

Caracterización alternativa de $\rightarrow$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Ejercicio: ¿Es $\rightarrow$ es asociativo?

Ejercicio: ¿Es $\rightarrow$ es asociativo?

¿ $(p \rightarrow q) \rightarrow r \quad \equiv \quad p \rightarrow (q \rightarrow r)$?

Consecuencia lógica

Intuición

Llegamos a nuestra noción más importante, la que captura cuándo una *conclusión* sigue lógicamente o se deriva de un *conjunto de premisas*.

Sea Γ un conjunto de fórmulas (premisas) y α una fórmula (conclusión). Informalmente decimos que α es consecuencia lógica de Γ sii cada vez que las fórmulas en Γ son verdaderas, α también es verdadera.

En ese caso escribimos $\Gamma \models \alpha$.

Intuición

Llegamos a nuestra noción más importante, la que captura cuándo una *conclusión* sigue lógicamente o se deriva de un *conjunto de premisas*.

Sea Γ un conjunto de fórmulas (premisas) y α una fórmula (conclusión). Informalmente decimos que α es consecuencia lógica de Γ sii cada vez que las fórmulas en Γ son verdaderas, α también es verdadera.

En ese caso escribimos $\Gamma \models \alpha$.

Ejemplos

Modus ponens:	$\{p, p \to q\} \models q$
Modus tollens:	$\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$
Transitividad del $\to$:	$\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$

Ejemplos

Modus ponens: $\{p, p \to q\} \models q$

Ejemplos

Modus ponens: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	$p \to q$	q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Ejemplos

Modus ponens: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	$p \to q$	q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

La única valuación donde p y $p \to q$ son verdaderas (primer fila de la tabla), q también es verdadera.

Ejemplos

Modus ponens: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	$p \to q$	q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

La única valuación donde p y $p \to q$ son verdaderas (primer fila de la tabla), q también es verdadera.

Modus tollens: $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$

Ejemplos

Modus ponens: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	$p \to q$	q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

La única valuación donde p y $p \to q$ son verdaderas (primer fila de la tabla), q también es verdadera.

Modus tollens: $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Ejemplos

Modus ponens: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	$p \to q$	q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

La única valuación donde p y $p \to q$ son verdaderas (primer fila de la tabla), q también es verdadera.

Modus tollens: $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

La única valuación donde $\neg q$ y $p \to q$ son verdaderas (última fila de la tabla), $\neg p$ también es verdadera.

Definición formal

Consecuencia lógica

Sea Γ un conjunto de fórmulas (premisas) en $\mathcal{L}(P)$ y α una fórmula (conclusión) en $\mathcal{L}(P)$. Decimos que α es consecuencia lógica de Γ, notado $\Gamma \models \alpha$, sii para cada valuación $\sigma\colon P \to \{0,1\}$,

$$\text{si } \hat{\sigma}(\Gamma) = 1, \text{entonces } \hat{\sigma}(\alpha) = 1$$

$\hat{\sigma}(\gamma) = 1$ para cada $\gamma \in \Gamma$

Definición formal

Consecuencia lógica

Sea Γ un conjunto de fórmulas (premisas) en $\mathcal{L}(P)$ y α una fórmula (conclusión) en $\mathcal{L}(P)$. Decimos que α es consecuencia lógica de Γ, notado $\Gamma \models \alpha$, sii para cada valuación $\sigma\colon P \to \{0,1\}$,

$$\text{si } \underbrace{\hat{\sigma}(\Gamma) = 1}_{\hat{\sigma}(\gamma) = 1 \text{ para cada } \gamma \in \Gamma}, \text{entonces } \hat{\sigma}(\alpha) = 1$$

Nota: No nos importan aquellas valuaciones σ donde $\hat{\sigma}(\Gamma) \neq 1$. El valor de α en esas valuaciones es irrelevante.

Algunas propiedades importantes

Para todo conjunto de fórmulas Γ en $\mathcal{L}(P)$ y todo par de fórmulas α, β en $\mathcal{L}(P)$, se cumple que:

Algunas propiedades importantes

Para todo conjunto de fórmulas Γ en $\mathcal{L}(P)$ y todo par de fórmulas α, β en $\mathcal{L}(P)$, se cumple que:

- $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\{\alpha\} \models \beta$ y $\{\beta\} \models \alpha$.

Algunas propiedades importantes

Para todo conjunto de fórmulas Γ en $\mathcal{L}(P)$ y todo par de fórmulas α, β en $\mathcal{L}(P)$, se cumple que:

- $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\{\alpha\} \models \beta$ y $\{\beta\} \models \alpha$.
- $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Algunas propiedades importantes

Para todo conjunto de fórmulas Γ en $\mathcal{L}(P)$ y todo par de fórmulas α, β en $\mathcal{L}(P)$, se cumple que:

- $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\{\alpha\} \models \beta$ y $\{\beta\} \models \alpha$.
- $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.
- $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ (regla de deducción).

Algunas propiedades importantes

Para todo conjunto de fórmulas Γ en $\mathcal{L}(P)$ y todo par de fórmulas α, β en $\mathcal{L}(P)$, se cumple que:

- $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\{\alpha\} \models \beta$ y $\{\beta\} \models \alpha$.
- $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.
- $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ (regla de deducción).
- Si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \cup \{\beta\} \models \alpha$ (monotonía).

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

$(\Rightarrow)$

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

($\Rightarrow$) Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Pero como $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$,

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

($\Rightarrow$) Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Pero como $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$, tenemos que si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Pero como $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$, tenemos que si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

($\Rightarrow$) Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Pero como $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$, tenemos que si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$ y por lo tanto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

($\Leftarrow$)

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

($\Rightarrow$) Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Pero como $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$, tenemos que si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$ y por lo tanto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

($\Leftarrow$) Como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible, no existe ninguna valuación σ tal que simultáneamente $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ y $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 1$.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

($\Rightarrow$) Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Pero como $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$, tenemos que si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$ y por lo tanto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

($\Leftarrow$) Como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible, no existe ninguna valuación σ tal que simultáneamente $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ y $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 1$. Por lo tanto, para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, deber ser $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$,

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Como $\Gamma \models \alpha$, tenemos que para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, entonces $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Pero como $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$, tenemos que si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$ y por lo tanto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible.

$(\Leftarrow)$ Como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible, no existe ninguna valuación σ tal que simultáneamente $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ y $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 1$. Por lo tanto, para cada valuación σ, si $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, deber ser $\hat{\sigma}(\neg\alpha) = 0$, o equivalentemente, $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$. Por lo tanto, $\Gamma \models \alpha$.

$\square$

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

$(\Rightarrow)$

.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\beta) = 1$.

.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\beta) = 1$. De $\hat{\sigma}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$ tenemos que

$$\hat{\sigma}(\Gamma) = 1 \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}(\alpha) = 1 \; .$$

.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

($\Rightarrow$) Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\beta) = 1$. De $\hat{\sigma}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$ tenemos que

$$\hat{\sigma}(\Gamma) = 1 \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}(\alpha) = 1 \ .$$

Ahora como $\Gamma \models \alpha \to \beta$ (hipótesis) y $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, tenemos que $\hat{\sigma}(\alpha \to \beta) = 1$.

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

($\Rightarrow$) Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\beta) = 1$. De $\hat{\sigma}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$ tenemos que

$$\hat{\sigma}(\Gamma) = 1 \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}(\alpha) = 1\ .$$

Ahora como $\Gamma \models \alpha \to \beta$ (hipótesis) y $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$, tenemos que $\hat{\sigma}(\alpha \to \beta) = 1$. Esto último, junto con el hecho que $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ implica que $\hat{\sigma}(\beta) = 1$, como queríamos demostrar.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

$(\Leftarrow)$

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

$(\Leftarrow)$ Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$,

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

($\Leftarrow$) Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\alpha \to \beta) = 1$, o equivalentemente, que si $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\beta) = 1$.

Algunas propiedades importantes

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

$(\Leftarrow)$ Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\alpha \to \beta) = 1$, o equivalentemente, que si $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\beta) = 1$. Pero eso sigue inmediatamente de nuestra hipótesis $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$

Ejercicio: Demuestre que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Demostración

$(\Leftarrow)$ Sea σ una valuación tal que $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$. Debemos probar que $\hat{\sigma}(\alpha \to \beta) = 1$, o equivalentemente, que si $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ entonces $\hat{\sigma}(\beta) = 1$. Pero eso sigue inmediatamente de nuestra hipótesis $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ (ya que $\hat{\sigma}(\Gamma) = 1$ y $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ implica $\hat{\sigma}(\beta) = 1$.

$\square$

Observaciones finales

Pregunta: ¿Es $\emptyset \models \alpha$ cierto para alguna fórmula α?

Observaciones finales

Pregunta: ¿Es $\emptyset \models \alpha$ cierto para alguna fórmula α?

Sí, para cualquier tautología α.

Observaciones finales

Pregunta: ¿Es $\emptyset \models \alpha$ cierto para alguna fórmula α?

Sí, para cualquier tautología α.

Pregunta: Sabemos que $\{p,\ p \to q\} \models q$. Por la monotonía de la consecuencia lógica, tenemos que $\{p,\ p \to q,\ \neg q\} \models q$. ¿Cómo es esto posible?

Observaciones finales

Pregunta: ¿Es $\emptyset \models \alpha$ cierto para alguna fórmula α?

Sí, para cualquier tautología α.

Pregunta: Sabemos que $\{p,\ p \to q\} \models q$. Por la monotonía de la consecuencia lógica, tenemos que $\{p,\ p \to q,\ \neg q\} \models q$. ¿Cómo es esto posible?

Esto es posible porque a partir de un conjunto de premisas insatisfactible se puede derivar cualquier fórmula (ejercicio).