Clase N°2

Probabilidades.

Def. Probabilidad es una medida de la certeza con que ocurren hechos no seguros.

Def. Axiomática.

Sea E experimento aleatorio, Ω el espacio muestral asociado y $\mathcal{Q}$ el conjunto de eventos. Se define una función (medida) de probabilidad P como

$$P : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto P(A) \quad \text{probabilidad de } A$$

t.q. a) $P(A) \geq 0$

b) $P(\Omega) = 1$

c) Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

c') Si $A_1 \ldots A_n \ldots$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Def. $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ se denomina un espacio de probabilidades.

Ej: E: lanzar dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A_i = \{i\}$

¿$P(A_i)$?

solo se sabe que

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)=1$$

una ecuación, seis incognitas => infinitas soluciones.

Propiedades.

1) $P(A)+P(\overline{A})=1$

$$A\cup\overline{A}=\Omega \quad ; \quad A\cap\overline{A}=\emptyset$$

2) $P(\emptyset)=0$

3) $P(A)\leq 1$

4) Si A, B eventos $\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ excluyentes

$B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$ excluyentes

$\Rightarrow P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$

$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B) \Rightarrow$

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A\cup B)$$

4') Si $A_1 \dots A_m$ eventos $\Rightarrow$

$$P\left(\bigcup^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{m}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k=3}^{m}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\dots$$

$$\dots+(-1)^{m-1}P(A_1\cap A_2\dots\cap A_m).$$

dem. por inducción.

Si $m=3$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

5) Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$B = A \cup (B \cap \bar{A})$ excluyentes

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{\geq 0} \geq P(A)$$

6) $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$.

Def. Frecuentista.

Sea E experimento aleatorio, Ω espacio muestral y A un evento ($A \subseteq \Omega$). Para calcular la probabilidad de A se utiliza el siguiente procedimiento.

i) Se repite E m veces; sea

m_A: nº de veces que A ocurre.

ii) Sea $f_m(A) = \frac{m_A}{m}$ frecuencia relativa de A

iii) Se puede demostrar que, en cierto sentido

$$\lim_{m \to \infty} f_m(A) = P(A) \text{ (definición axiomática)}$$

Ej: Si E: lanzar moneda

$\Omega = \{c, s\}$.

¿$P(c) = \frac{2}{3}$?

Espacio Muestral finito

Sea Ω espacio finito denotado $\Omega = \{w_1 .. w_m\}$,

si $P_i = P(w_i)$ $i = 1 .. m$ =>

- $P_i \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$

; Sea A un evento ($A \subseteq \Omega$) denotado $A = \{w_{j_1} .. w_{j_k}\}$

donde $j_1 .. j_k$ son k indices de 1 ... m.

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(w_{j_i})$$

si se conocen los P_i se puede calcular la probabilidad de cualquier evento A.

Supongamos que Ω s un espacio equiprobable, s decir $P_i = P_j \ \forall i, j$

$$\Rightarrow P_i = \frac{1}{m} = \frac{1}{Card(\Omega)}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{k}{m} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$$

Ej. E: lanzar moneda perfecta dos veces.
A = {obtener al menos un sello}
¿P(A)?

Ej. E: Sacar ficha de caja con 20 fichas blancas (B) y 80 fichas rojas (R)
A = {sacar ficha blanca} ¿P(A)?

Propuestos.

1) Un mazo de naipes (52 cartas) se reparte a 4 jugadores. Describa Ω.

2) Sean A, B, C eventos de Ω y

$D_1 = \{$al menos dos eventos ocurran$\}$

$D_2 = \{$exactamente dos eventos ocurran$\}$

$D_3 = \{$al menos un evento ocurra$\}$

$D_4 = \{$exactamente un evento ocurra$\}$

$D_5 = \{$a lo más dos eventos ocurran$\}$.

Exprese D_i en función de A, B, C.

3) Si $\{A_i\}_i$ es una colección de eventos, muestre que $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

4) Si $A_1 \ldots A_n$ eventos, muestre que

$$P(\bigcup^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<h=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_h) - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

5) Sean A, B eventos t.q. $P(A) = x$, $P(B) = y$, $P(A \cap B) = z$. Exprese en términos de x, y, z

$P(\bar{A} \cup \bar{B})$; $P(\bar{A} \cap B)$; $P(\bar{A} \cup B)$; $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

6) Sean $A_1 \ldots A_n$ eventos t.q. $P(A_i) = 1 \ \forall i$ (A_i no necesariamente Ω). Muestre que

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 1 \quad , \quad P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1$$