Matemática Discreta

Clase 4: Lógica de predicados

Andrés Abeliuk*

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia y ederico Olmedo.

Lógica de Predicados
(Lógica de primer orden)

Limitaciones de la lógica proposicional

La lógica proposicional no puede capturar adecuadamente ciertos razonamientos:

> *Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto Sócrates es mortal.*

Limitaciones de la lógica proposicional

La lógica proposicional no puede capturar adecuadamente ciertos razonamientos:

> *Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto Sócrates es mortal.*

Para expresar este tipo de razonamiento necesito

- Describir propiedades de o relaciones entre los elementos del dominio en cuestión:

$$\mathit{hombre}(x), \quad \mathit{mortal}(x)$$

Limitaciones de la lógica proposicional

La lógica proposicional no puede capturar adecuadamente ciertos razonamientos:

> *Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto Sócrates es mortal.*

Para expresar este tipo de razonamiento necesito

- Describir propiedades de o relaciones entre los elementos del dominio en cuestión:

$$\mathit{hombre}(x), \quad \mathit{mortal}(x)$$

- Cuantificar sobre los elementos del dominio en cuestión

$$\forall x \dots$$

Limitaciones de la lógica proposicional

Con un lenguaje de dichas características, el razonamiento anterior se puede capturar de la siguiente manera:

$$\dfrac{\begin{array}{l}\forall x.\ \mathit{hombre}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x) \\ \mathit{hombre}(\text{Sócrates})\end{array}}{\mathit{mortal}(\text{Sócrates})}$$

Sintaxis de la lógica de predicados

Ejemplos de predicados incluyen "es un hombre", "es menor que", ...

Las fórmulas de la lógica de predicados se forman a partir de un vocabulario

- Un conjunto de símbolos de relación,, cada uno con una respectiva aridad (número de argumentos):

$$P, Q, R, \ldots$$

Sintaxis de la lógica de predicados

Ejemplos de predicados incluyen “es un hombre”, “es menor que”, ...

Las fórmulas de la lógica de predicados se forman a partir de un vocabulario

- Un conjunto de símbolos de relación,, cada uno con una respectiva aridad (número de argumentos):

$$P, Q, R, \dots$$

- El cuantificador universal y el cuantificador existencial:

$$\forall, \quad \exists$$

Sintaxis de la lógica de predicados

Ejemplos de predicados incluyen “es un hombre”, “es menor que”, ...

Las fórmulas de la lógica de predicados se forman a partir de un vocabulario

- Un conjunto de símbolos de relación,, cada uno con una respectiva aridad (número de argumentos):

$$P, Q, R, \ldots$$

- El cuantificador universal y el cuantificador existencial:

$$\forall, \quad \exists$$

- Un conjunto de variables:

$$x, y, z, \ldots$$

Sintaxis de la lógica de predicados

Ejemplos de predicados incluyen “es un hombre”, “es menor que”, ...

Las fórmulas de la lógica de predicados se forman a partir de un vocabulario

- Un conjunto de símbolos de relación,, cada uno con una respectiva aridad (número de argumentos):

$$P, Q, R, \dots$$

- El cuantificador universal y el cuantificador existencial:

$$\forall, \quad \exists$$

- Un conjunto de variables:

$$x, y, z, \dots$$

- Los conectivos de la lógica proposicional:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$$

Ejemplos

- Reflexividad: $\forall x R(x, x)$ (mayor o igual que)

Ejemplos

- Reflexividad: $\forall x R(x, x)$ (mayor o igual que)
- Simetría: $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ (como la igualdad)

Ejemplos

- Reflexividad: $\forall x R(x, x)$ (mayor o igual que)
- Simetría: $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ (como la igualdad)
- Antisimetría: $\forall x \forall y ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y)$ (mayor estricto que)

Ejemplos

- Reflexividad: $\forall x R(x,x)$ (mayor o igual que)
- Simetría: $\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$ (como la igualdad)
- Antisimetría: $\forall x \forall y ((R(x,y) \wedge R(y,x)) \to x = y)$ (mayor estricto que)
- Transitividad: $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$

Alcance de los cuantificadores

Los cuantificadores introducen una "zona de influencia" de las variables que introducen, llamada rango o alcance del cuantificador.

Alcance de los cuantificadores

Los cuantificadores introducen una “zona de influencia” de las variables que introducen, llamada rango o alcance del cuantificador.

$$R(z) \land \exists y \, \forall x (S(x) \implies T(x, y))$$

- Las ocurrencias verdes de la variable x están dentro del alcance del cuantificador universal, y son “capturadas” por éste.

Alcance de los cuantificadores

Los cuantificadores introducen una “zona de influencia” de las variables que introducen, llamada rango o alcance del cuantificador.

$$R(z) \land \exists y\, \forall x (S(x) \implies T(x, y))$$

- Las ocurrencias verdes de la variable x están dentro del alcance del cuantificador universal, y son “capturadas” por éste.
- La ocurrencia roja de la variable y está también dentro del alcance del cuantificador universal, pero no es capturada por éste.

Alcance de los cuantificadores

Los cuantificadores introducen una “zona de influencia” de las variables que introducen, llamada rango o alcance del cuantificador.

$$R(z) \land \exists y \, \forall x (S(x) \implies T(x, y))$$

- Las ocurrencias verdes de la variable x están dentro del alcance del cuantificador universal, y son “capturadas” por éste.
- La ocurrencia roja de la variable y está también dentro del alcance del cuantificador universal, pero no es capturada por éste.
- La ocurrencia roja de la variable y también está dentro del alcance del cuantificador existencial y sí es capturada por éste.

Alcance de los cuantificadores

Los cuantificadores introducen una "zona de influencia" de las variables que introducen, llamada rango o alcance del cuantificador.

$$R(z) \wedge \exists y \, \forall x (S(x) \implies T(x, y))$$

- Las ocurrencias verdes de la variable x están dentro del alcance del cuantificador universal, y son "capturadas" por éste.
- La ocurrencia roja de la variable y está también dentro del alcance del cuantificador universal, pero no es capturada por éste.
- La ocurrencia roja de la variable y también está dentro del alcance del cuantificador existencial y sí es capturada por éste.
- La variable z se dice libre ya que no está en el alcance de ningún cuantificador.

Semántica de la lógica de predicados

La semántica de las fórmulas en toda lógica se define con respecto a un modelo.

Semántica de la lógica de predicados

La semántica de las fórmulas en toda lógica se define con respecto a un modelo.

- En la lógica proposicional, los modelos eran asignaciones de verdad.
- Para la lógica de primer orden, los modelos serán objetos que ayuden a identificar la interpretación de los símbolos de relación.

Semántica de la lógica de predicados

La semántica de las fórmulas en toda lógica se define con respecto a un modelo.

- En la lógica proposicional, los modelos eran asignaciones de verdad.
- Para la lógica de primer orden, los modelos serán objetos que ayuden a identificar la interpretación de los símbolos de relación.

Estos modelos se denominan estructuras

- Una estructura $\mathcal{A} = \big(A,\ P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \ldots\big)$, define el *dominio de discurso* A sobre el que van a tomar valores las variables y las *interpretaciones* $P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \ldots$ de los símbolos de relaciones, $P, Q, R, \ldots$, en el vocabulario.

Semántica de la lógica de predicados

La semántica de las fórmulas en toda lógica se define con respecto a un modelo.

- En la lógica proposicional, los modelos eran asignaciones de verdad.
- Para la lógica de primer orden, los modelos serán objetos que ayuden a identificar la interpretación de los símbolos de relación.

Estos modelos se denominan estructuras

- Una estructura $\mathcal{A} = \big(A,\ P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \ldots\big)$, define el *dominio de discurso* A sobre el que van a tomar valores las variables y las *interpretaciones* $P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \ldots$ de los símbolos de relaciones, $P, Q, R, \ldots$, en el vocabulario.
- Una valuación σ que asigna valores de A a las variables libres de la fórmula ϕ.

Ejemplos de estructuras

Ejemplo 1: Grafos

Un grafo $H = (V, E)$ modelado como una estructura finita es $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$, donde el universo G es el conjunto de vértices V, y para un par de vértices $u, v \in G (= V), E^{\mathcal{G}} uv$ sii (u, v) pertenece la relación binaria E.

Ejemplo 1: Números Naturales

Los números naturales son representados por la estructura:

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}},)$$

Semántica de la lógica de predicados

Ahora tenemos todos los elementos para definir la semántica de una fórmula ϕ.

$$(\mathcal{A}, \sigma) \models \phi$$

denota que $\mathcal{A}$ satisface la fórmula ϕ bajo la asignación σ.

La definición formal procede por inducción sobre la estructura de ϕ (y la definición completa puede consultarse en el apunte);

Semántica de la lógica de predicados

Ahora tenemos todos los elementos para definir la semántica de una fórmula ϕ.

$$(\mathcal{A}, \sigma) \models \phi$$

denota que $\mathcal{A}$ satisface la fórmula ϕ bajo la asignación σ.

La definición formal procede por inducción sobre la estructura de ϕ (y la definición completa puede consultarse en el apunte); algunas de las reglas de dicha definición son:

$$\begin{array}{lll}
(\mathcal{A}, \sigma) \models P(x_1, \ldots, x_n) & \text{sii} & (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) \in P^{\mathcal{A}} \\
(\mathcal{A}, \sigma) \models \phi \vee \psi & \text{sii} & (\mathcal{A}, \sigma) \models \phi \quad \text{o} \quad (\mathcal{A}, \sigma) \models \psi \\
(\mathcal{A}, \sigma) \models \forall x. P(x) & \text{sii} & (\mathcal{A}, \sigma[x/a]) \models P(a) \text{ para todo } a \in A
\end{array}$$

donde $\sigma[x/a]$ denota la valuación que asigna a x el valor a, y coincide con σ en el resto de las variables.

Semántica de la lógica de predicados

Ahora tenemos todos los elementos para definir la semántica de una fórmula ϕ.

$$(\mathcal{A}, \sigma) \models \phi$$

denota que $\mathcal{A}$ satisface la fórmula ϕ bajo la asignación σ.

La definición formal procede por inducción sobre la estructura de ϕ (y la definición completa puede consultarse en el apunte); algunas de las reglas de dicha definición son:

$$\begin{array}{lll}
(\mathcal{A}, \sigma) \models P(x_1, \ldots, x_n) & \text{sii} & (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) \in P^{\mathcal{A}} \\
(\mathcal{A}, \sigma) \models \phi \vee \psi & \text{sii} & (\mathcal{A}, \sigma) \models \phi \quad \text{o} \quad (\mathcal{A}, \sigma) \models \psi \\
(\mathcal{A}, \sigma) \models \forall x.P(x) & \text{sii} & (\mathcal{A}, \sigma[x/a]) \models P(a) \text{ para todo } a \in A
\end{array}$$

donde $\sigma[x/a]$ denota la valuación que asigna a x el valor a, y coincide con σ en el resto de las variables.

Si ϕ es una fórmula cerrada (i.e. sin variables libres), la valuación σ no es necesaria para definir la relación de satisfacción (sólo la estructura $\mathcal{A}$).

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** La fórmula

$$\forall x.\ \forall y.\ (R(x,y) \rightarrow \exists z.\ R(x,z) \wedge R(z,y))$$

es satisfecha por la estructura que tiene como dominio de discurso al conjuntos de los reales y que interpreta a R como la relación "es menor que".

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** La fórmula

$$\forall x.\ \forall y.\ (R(x,y) \to \exists z.\ R(x,z) \wedge R(z,y))$$

es satisfecha por la estructura que tiene como dominio de discurso al conjuntos de los reales y que interpreta a R como la relación "es menor que".

Pregunta: ¿La fórmula se sigue satisfaciendo si cambiamos el dominio de discurso a los enteros?

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** La fórmula

$$\forall x.\ \forall y.\ (R(x,y) \to \exists z.\ R(x,z) \land R(z,y))$$

  es satisfecha por la estructura que tiene como dominio de discurso al conjuntos de los reales y que interpreta a R como la relación "es menor que".

  Pregunta: ¿La fórmula se sigue satisfaciendo si cambiamos el dominio de discurso a los enteros?

- **Ejemplo 2:** La fórmula

$$R(x,y)$$

  es satisfecha por la misma estructura de antes, bajo la valuación $\sigma = \{x \mapsto 1,\ y \mapsto 2\}$.

Equivalencia

Definición. Dos fórmulas cerradas ϕ y ψ se dicen equivalentes, notado $\phi \equiv \psi$, sii para cada estructura $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\mathcal{A} \models \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Equivalencia

Definición. Dos fórmulas cerradas ϕ y ψ se dicen equivalentes, notado $\phi \equiv \psi$, sii para cada estructura $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\mathcal{A} \models \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Ejemplos

Equivalencia

Definición. Dos fórmulas cerradas ϕ y ψ se dicen equivalentes, notado $\phi \equiv \psi$, sii para cada estructura $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\mathcal{A} \models \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Ejemplos

- $\neg\exists x.\ P(x) \quad \equiv \quad \forall x.\ \neg P(x)$

Equivalencia

Definición. Dos fórmulas cerradas ϕ y ψ se dicen equivalentes, notado $\phi \equiv \psi$, sii para cada estructura $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\mathcal{A} \models \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Ejemplos

- $\neg\exists x.\ P(x) \quad \equiv \quad \forall x.\ \neg P(x)$
- $\neg\forall x.\ P(x) \quad \equiv \quad \exists x.\ \neg P(x)$

Equivalencia

Definición. Dos fórmulas cerradas ϕ y ψ se dicen equivalentes, notado $\phi \equiv \psi$, sii para cada estructura $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\mathcal{A} \models \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Ejemplos

- $\neg \exists x.\ P(x) \quad \equiv \quad \forall x.\ \neg P(x)$
- $\neg \forall x.\ P(x) \quad \equiv \quad \exists x.\ \neg P(x)$
- $\forall x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad (\forall x.\ P(x)) \wedge (\forall x.\ Q(x))$

Equivalencia

Definición. Dos fórmulas cerradas ϕ y ψ se dicen equivalentes, notado $\phi \equiv \psi$, sii para cada estructura $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\mathcal{A} \models \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Ejemplos

- $\neg \exists x.\ P(x) \quad \equiv \quad \forall x.\ \neg P(x)$
- $\neg \forall x.\ P(x) \quad \equiv \quad \exists x.\ \neg P(x)$
- $\forall x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad (\forall x.\ P(x)) \wedge (\forall x.\ Q(x))$
- $\exists x.\ (P(x) \vee Q(x)) \quad \equiv \quad (\exists x.\ P(x)) \vee (\exists x.\ Q(x))$

Equivalencia

Definición. Dos fórmulas cerradas ϕ y ψ se dicen equivalentes, notado $\phi \equiv \psi$, sii para cada estructura $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\mathcal{A} \models \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

Ejemplos

- $\neg\exists x.\ P(x) \quad \equiv \quad \forall x.\ \neg P(x)$
- $\neg\forall x.\ P(x) \quad \equiv \quad \exists x.\ \neg P(x)$
- $\forall x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad (\forall x.\ P(x)) \wedge (\forall x.\ Q(x))$
- $\exists x.\ (P(x) \vee Q(x)) \quad \equiv \quad (\exists x.\ P(x)) \vee (\exists x.\ Q(x))$

Ejercicio: ¿Es cierta la siguiente equivalencia?

$$\exists x.\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad (\exists x.\ P(x)) \wedge (\exists x.\ Q(x))$$

Satisfacibilidad

Una fórmula ϕ es satisfacible si existe una estructura $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi$.

Recordar que para la lógica proposicional el problema de decidir si ϕ es satisfacible es decidible (aunque NP-completo).

Teorema de Church-Turing (1936)

El problema de satisfacibilidad para la lógica de primer orden es indecidible.