Matemáticas Discretas para la Computación

Clase 1: Lógica Proposicional

Andrés Abeliuk

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia.

¿Qué estudia la lógica?

El objetivo de la lógica es responder cuándo un argumento es válido; se la conoce como la ciencia del razonamiento.

¿Qué estudia la lógica?

El objetivo de la lógica es responder cuándo un argumento es válido; se la conoce como la ciencia del razonamiento.

- A la lógica le interesa la validez formal de estos razonamientos, es decir, la relación que se establece entre las premisas y la conclusión.

¿Qué estudia la lógica?

El objetivo de la lógica es responder cuándo un argumento es válido; se la conoce como la ciencia del razonamiento.

- A la lógica le interesa la validez formal de estos razonamientos, es decir, la relación que se establece entre las premisas y la conclusión.
- La lógica se ocupa de la forma de los argumentos, y no del contenido.

¿Qué estudia la lógica?

El objetivo de la lógica es responder cuándo un argumento es válido; se la conoce como la ciencia del razonamiento.

- A la lógica le interesa la validez formal de estos razonamientos, es decir, la relación que se establece entre las premisas y la conclusión.
- La lógica se ocupa de la forma de los argumentos, y no del contenido.
- Un razonamiento es válido cuando es imposible que, siendo verdaderas sus premisas, sea falsa su conclusión.

¿Qué estudia la lógica?

El objetivo de la lógica es responder cuándo un argumento es válido; se la conoce como la ciencia del razonamiento.

- A la lógica le interesa la validez formal de estos razonamientos, es decir, la relación que se establece entre las premisas y la conclusión.
- La lógica se ocupa de la forma de los argumentos, y no del contenido.
- Un razonamiento es válido cuando es imposible que, siendo verdaderas sus premisas, sea falsa su conclusión.
- Existen diferentes tipos de lógicas de acuerdo a su nivel de expresividad: lógica proposicional, lógica de primer orden (o de predicados), etc.

Argumentos

Aristóteles propuso analizar patrones de razonamiento, y desarrolló la teoría del silogismo.

Ejemplo de silogismo

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todos los hombres son mortales.}\\ \text{Sócrates es hombre.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.}}$$

Argumentos

Aristóteles propuso analizar patrones de razonamiento, y desarrolló la teoría del silogismo.

Ejemplo de silogismo

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todos los hombres son mortales.}\\ \text{Sócrates es hombre.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.}}$$

- La exactitud de esta inferencia no tiene nada que ver con la verdad o falsedad de los enunciados individuales, sino, más bien, con el patrón general

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todo A es B.}\\ \text{C es A.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, C es B.}}$$

Ejercicio 1 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

Si Pedro estudia en el DCC o en el DIM, entonces tomará CC3101
Pedro estudia en el DCC

Por tanto, Pedro tomará CC3101

Argumentos

Ejercicio 1 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

Si Pedro estudia en el DCC o en el DIM, entonces tomará CC3101
Pedro estudia en el DCC

Por tanto, Pedro tomará CC3101

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

Argumentos

Ejercicio 1 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

Si Pedro estudia en el DCC o en el DIM, entonces tomará CC3101
Pedro estudia en el DCC

Por tanto, Pedro tomará CC3101

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

¿Es un argumento válido?

Argumentos

Ejercicio 2 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

Si llueve, se moja el suelo
No llovió

Por lo tanto, no se mojo el suelo

Ejercicio 2 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

Si llueve, se moja el suelo
No llovió

Por lo tanto, no se mojo el suelo

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

Argumentos

Ejercicio 2 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Si llueve, se moja el suelo}\\ \text{No llovió}\end{array}}{\text{Por lo tanto, no se mojo el suelo}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}p \to q\\ \neg p\end{array}}{\neg q}$$

¿Es un argumento válido?

Ejercicio 3 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Argumentos

Ejercicio 3 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todos los hombres son mortales.}\\ \text{Sócrates es hombre.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x.\ \ \mathit{hombre}(x) \to \mathit{mortal}(x)\\ \mathit{hombre}(\text{Socrates})\end{array}}{\mathit{mortal}(\text{Socrates})}$$

Ejercicio 3 ¿Cuál es la forma del siguiente argumento?

$$\begin{array}{l} \text{Todos los hombres son mortales.} \\ \text{Sócrates es hombre.} \\ \hline \text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \forall x.\ \ \mathit{hombre}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x) \\ \mathit{hombre}(\text{Socrates}) \\ \hline \mathit{mortal}(\text{Socrates}) \end{array}$$

¿Es un argumento válido?

Expresividad y tipos de lógicas

Distintos tipos de argumentos requieren distintos tipos de lógicas:

- El argumento del Ejercicio 1 y 2 requiere solo proposiciones (atómicas) y conectivos lógicos.
- El argumento del Ejercicio 3 requiere una lógica más expresiva, que incluya predicados y cuantificaciones sobre variables.

Expresividad y tipos de lógicas

Distintos tipos de argumentos requieren distintos tipos de lógicas:

- El argumento del Ejercicio 1 y 2 requiere solo proposiciones (atómicas) y conectivos lógicos.
- El argumento del Ejercicio 3 requiere una lógica más expresiva, que incluya predicados y cuantificaciones sobre variables.

Hoy empezaremos estudiando la lógica más simple (o menos expresiva): la lógica proposicional.

Contenido clase de hoy

Lógica Proposicional

Introducción

Lógica proposicional

Empezaremos estudiando el componente elemental de la lógica: las proposiciones.

Lógica proposicional

Empezaremos estudiando el componente elemental de la lógica: las proposiciones.

- Una proposición es cualquier enunciado que es verdadero o falso (pero no ambas)
  - **Las siguientes son proposiciones:** Pedro estudia en el DCC, Santiago es la capital de Chile, $2 > 4$
  - **Las siguientes no:** ¿Qué hora es?, $x == 2$

Lógica proposicional

Empezaremos estudiando el componente elemental de la lógica: las proposiciones.

- Una proposición es cualquier enunciado que es verdadero o falso (pero no ambas)
  - **Las siguientes son proposiciones:** Pedro estudia en el DCC, Santiago es la capital de Chile, $2 > 4$
  - **Las siguientes no:** ¿Qué hora es?, x $==2$
- La validez de un argumento en la lógica proposicional puede determinarse a través de tablas de verdad.

Lógica proposicional

Empezaremos estudiando el componente elemental de la lógica: las proposiciones.

- Una proposición es cualquier enunciado que es verdadero o falso (pero no ambas)
  - **Las siguientes son proposiciones:** Pedro estudia en el DCC, Santiago es la capital de Chile, $2 > 4$
  - **Las siguientes no:** ¿Qué hora es?, $x == 2$
- La validez de un argumento en la lógica proposicional puede determinarse a través de tablas de verdad.
- También puede determinarse a través de un sistema de inferencia.

Sintaxis

Objetivo de la sintaxis

La sintaxis determina cuándo una secuencia de símbolos es una fórmula bien formada

Objetivo de la sintaxis

La sintaxis determina cuándo una secuencia de símbolos es una fórmula bien formada

Fórmulas bien formadas: $p \wedge q, \ \neg p \rightarrow p, \ q$

Fórmulas no bien formadas: $p \wedge, \ q \ p \neg \ p, \ \vee$

Conjunto de fórmulas bien formadas

Una fórmula bien formada es o bien una fórmula atómica, formada por una proposición, o bien una fórmula compuesta, formada combinando proposiciones a través de conectivos lógicos.

Conjunto de fórmulas bien formadas

Una fórmula bien formada es o bien una fórmula atómica, formada por una proposición, o bien una fórmula compuesta, formada combinando proposiciones a través de conectivos lógicos.

Definición (sintaxis de la lógica proposicional)

Dado un conjunto $P = \{p, q, r, \ldots\}$ de proposiciones, el conjunto de fórmulas bien formadas sobre P, notado $\mathcal{L}(P)$, se define inductivamente de la siguiente manera:

Caso base: Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$.
Caso inductivo: Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{L}(P)$.

Supresión de paréntesis

Para evitar el aglutinamiento de paréntesis en las fórmulas nos permitimos omitir el par de paréntesis más externos e introducimos un orden de precedencia sobre los conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$.

Ejemplo

Fórmula	Forma Abreviada
$((\neg p) \to q)$	$\neg p \to q$
$((p \wedge q) \vee r)$	$p \wedge q \vee r$

Semántica

Objetivo de la semántica

Las reglas que establecen la veracidad de las fórmulas bien formadas forman lo que se denomina la Semántica del lenguaje.

Funcione de verdad: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

El valor de verdad de una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ depende únicamente del valor de verdad de las proposiciones en $\mathcal{L}(P)$ y del significado de los conectivos lógicos, comúnmente dados por su tabla de verdad.

Tabla de verdad de la negación ($\neg$)

α	$\neg\alpha$
1	0
0	1

El valor de verdad de $\neg\alpha$ es opuesto al de α.

Tabla de verdad de la conjunción ($\wedge$)

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\alpha \wedge \beta$ **es verdadero si y sólo si** α **y** β **son verdaderos.**

Tabla de verdad de la disyunción ($\vee$)

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\alpha \vee \beta$ **es verdadero si y sólo si** α **o** β **son verdaderos.**

Tabla de verdad de la implicancia ($\rightarrow$)

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$\alpha \rightarrow \beta$ **es siempre verdadero, excepto cuando** α **(el antecedente) es verdadero y** β **(el consecuente) es falso.**

Valor de verdad de fórmulas compuestas

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula.

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la fórmula $(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$ para cada valuación de las proposiciones p, q.

Valor de verdad de fórmulas compuestas

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la fórmula $(p \vee q) \to p \wedge q$ para cada valuación de las proposiciones p, q.

p	q			$(p \vee q) \to p \wedge q$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Valor de verdad de fórmulas compuestas

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la fórmula $(p \vee q) \to p \wedge q$ para cada valuación de las proposiciones p, q.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to p \wedge q$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Valor de verdad de fórmulas compuestas

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la fórmula $(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$ para cada valuación de las proposiciones p, q.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$
1	1	1		
1	0	1		
0	1	1		
0	0	0		

Valor de verdad de fórmulas compuestas

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la fórmula $(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$ para cada valuación de las proposiciones p, q.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$
1	1	1	1	
1	0	1	0	
0	1	1	0	
0	0	0	0	

Valor de verdad de fórmulas compuestas

Dado el valor de verdad de las proposiciones que aparecen en una fórmula, ahora ya podemos determinar el valor de verdad de la formula.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la fórmula $(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$ para cada valuación de las proposiciones p, q.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

Semántica de la lógica proposicional

Alternativamente, podemos formalizar lo anterior de la siguiente manera:

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma \colon P \to \{0, 1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P.

Semántica de la lógica proposicional

Alternativamente, podemos formalizar lo anterior de la siguiente manera:

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma\colon P \to \{0,1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P.

La función

$$\hat{\sigma}\colon \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$$

le asigna un valor de verdad a cada fórmula en $\mathcal{L}(P)$ de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}(p) \quad = \quad \sigma(p) \quad \text{para } p \in P$$

Semántica de la lógica proposicional

Alternativamente, podemos formalizar lo anterior de la siguiente manera:

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma\colon P \to \{0,1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P.

La función

$$\hat{\sigma}\colon \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$$

le asigna un valor de verdad a cada fórmula en $\mathcal{L}(P)$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl} \hat{\sigma}(p) & = & \sigma(p) \quad \text{para } p \in P \\ \hat{\sigma}(\neg\alpha) & = & 1 - \hat{\sigma}(\alpha) \end{array}$$

Semántica de la lógica proposicional

Alternativamente, podemos formalizar lo anterior de la siguiente manera:

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma\colon P \to \{0,1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P.

La función

$$\hat{\sigma}\colon \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$$

le asigna un valor de verdad a cada fórmula en $\mathcal{L}(P)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}(p) &= \sigma(p) \quad \text{para } p \in P \\
\hat{\sigma}(\neg\alpha) &= 1 - \hat{\sigma}(\alpha) \\
\hat{\sigma}(\alpha \wedge \beta) &= \text{mín}\,\{\hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta)\}
\end{aligned}$$

Semántica de la lógica proposicional

Alternativamente, podemos formalizar lo anterior de la siguiente manera:

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma\colon P \to \{0,1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P.

La función

$$\hat{\sigma}\colon \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$$

le asigna un valor de verdad a cada fórmula en $\mathcal{L}(P)$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl}
\hat{\sigma}(p) & = & \sigma(p) \quad \text{para } p \in P \\
\hat{\sigma}(\neg\alpha) & = & 1 - \hat{\sigma}(\alpha) \\
\hat{\sigma}(\alpha \wedge \beta) & = & \text{mín}\,\{\hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\} \\
\hat{\sigma}(\alpha \vee \beta) & = & \text{máx}\,\{\hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\}
\end{array}$$

Semántica de la lógica proposicional

Alternativamente, podemos formalizar lo anterior de la siguiente manera:

Definición (semántica de la lógica proposicional)

Sea

$$\sigma\colon P \to \{0,1\}$$

una valuación de las proposiciones en $P = \{p, q, r, \ldots\}$, es decir una función que le asigna un valor de verdad a las proposiciones en P.

La función

$$\hat{\sigma}\colon \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$$

le asigna un valor de verdad a cada fórmula en $\mathcal{L}(P)$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl}
\hat{\sigma}(p) & = & \sigma(p) \quad \text{para } p \in P \\
\hat{\sigma}(\neg\alpha) & = & 1 - \hat{\sigma}(\alpha) \\
\hat{\sigma}(\alpha \wedge \beta) & = & \text{mín}\,\{\hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\} \\
\hat{\sigma}(\alpha \vee \beta) & = & \text{máx}\,\{\hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\} \\
\hat{\sigma}(\alpha \to \beta) & = & \text{máx}\,\{1 - \hat{\sigma}(\alpha),\, \hat{\sigma}(\beta)\}
\end{array}$$