Clase Número 4: Probabilidad Condicional

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
19 de abril de 2020

Probabilidad Condicional

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{Q}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, A, B dos eventos ($A, B \subset \Omega; A, B \in \mathcal{Q}$) tales que $\mathbb{P}(B) \neq 0$; se define la **probabilidad condicional de** A **dado** B (denotada $\mathbb{P}(A|B)$) como la probabilidad de A cuando el espacio muestral se restringe (acota) a B. Lo anterior significa calcular la probabilidad de A sabiendo que B ocurre (evento seguro).

Ejemplo 1:
Se lanza una moneda perfecta dos veces:

$$\Omega = \{(C,C)(C,S)(S,C)(S,S)\} \quad \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{4} \quad i = 1 \dots 4$$

Sea $A = \{\text{Obtener dos sellos}\}$, $B = \{\text{Obtener al menos un sello}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$$

Si se restringe el espacio muestral a B:

$$\Omega \to B = \{(C,C)(S,C)(S,S)\}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{3}$$

Definición

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{(Calculadas sobre } \Omega\text{)}$$

En el ejemplo anterior $A \cap B = \{S, S\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$. De donde, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.
Observación:

a) $\mathbb{P}(A|B)$ está bién definida (B fijo) en el sentido que satisface los axiomas y propiedades de una médida de probabilidad; por ejemplo:
Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$

b) Si $B = \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\Omega) = \mathbb{P}(A)$ llamada a veces **probabilidad incondicional**.

c) $\mathbb{P}(A|B)$ puede ser $>, <$ o $=$ a $\mathbb{P}(A)$; por ejemplo:

- Si $B \subset A$: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 > \mathbb{P}(A)$
- Si $A \subset B$: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = 1 > \mathbb{P}(A)$
- Si $A \cap B = \emptyset$: $\mathbb{P}(A|B) = 0 < \mathbb{P}(A)$
- Si $A = \emptyset$: $\mathbb{P}(A|B) = 0 = \mathbb{P}(A)$

d) Se recomienda usar la segunda definición de probabilidad condicional a menos que se esté seguro de tener espacios equiprobables.

La definición de probabilidad condicional permite postular tres teoremas (o fórmulas) que son:

1. Teorema de Multiplicación

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{B}} \Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B)$$

que se puede extender para tres eventos:

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A\cap B) \quad \text{(Verificar)}$$

Y en general, si $A_1,\dots,A_n$ son eventos, entonces:

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_2\cap A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1\dots A_{n-1})$$

Ejemplo 1:
Se sacan tres cartas (sin reemplazo); calcular la probabilidad de no obtener corazones.
Sea $A_i = \{\text{carta } i \text{ no es corazon}\}$, $i = 1,2,3$
Se pide $\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2) = \frac{39}{52}\frac{38}{51}\frac{37}{50}$.
(Para calcular $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ se restringe a A_1).
Notar que la probabilidad anterior también se puede calcular como $\frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}$

Ejemplo 2:
Dos personas X e Y sacan consecutivamente y con reemplazo una carta de un mazo corriente.
Gana el que obtiene el primer As. Si parte X calculamos $\mathbb{P}(\text{Gane } X)$. Para ello, escribimos Ω como:

$$\Omega = \{A, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}A, \bar{A}\bar{A}\bar{A}A, \dots\}$$

Notar que Ω es un espacio infinito numerable.
Por ejemplo, $\bar{A}\bar{A}A$ significa que X obtubo $\bar{A}$ en su primera carta, Y obtuvo $\bar{A}$ en su primera carta y X obtuvo A en su segunda carta, además:

$$\mathbb{P}(\bar{A}\bar{A}A) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}|\bar{A})\mathbb{P}(A|\bar{A}\bar{A}) = \frac{48}{52}\frac{48}{52}\frac{4}{52} = \left(\frac{48}{52}\right)^2\left(\frac{4}{52}\right)$$

en general, $\mathbb{P}(\underbrace{\bar{A}\dots\bar{A}}_{k-1}A) = \left(\frac{48}{52}\right)^{k-1}\frac{4}{52}$

Como X gana en los elementos impares de Ω:

$$\mathbb{P}(\text{Gane } X) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{48}{52}\right)^{2k+1}\frac{4}{52}$$

2. Teorema de Probabilidades Totales (TPT)

Sea $B_1, B_2, \dots B_n$ una partición de Ω, es decir:

- $B_i \neq \emptyset \quad \forall i$
- $B_i\cap B_j = \emptyset \quad \forall i\neq j$
- $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$

Sea A un evento cualquiera ($A\subset\Omega$), entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap\Omega) = \mathbb{P}(A\cap\left(\bigcup_i B_i\right)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_i(A\cap B_i)\right)$$

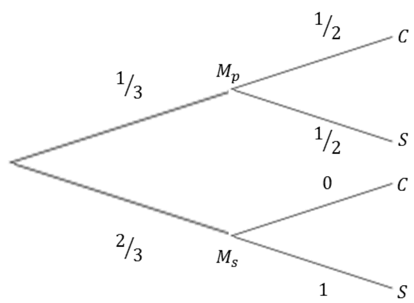
De donde:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i\mathbb{P}(A\cap B_i) = \sum_i\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)$$

formula conocida como **Teorema de Probabilidades Totales**.
La fórmula anterior es util para calcular la probabilidad de un evento A cuya ocurrencia depende de la ocurrencia de los eventos B_i

Ejemplo 1:
Se tienen tres monedas, una perfecta (M_p) y las otras con dos sellos (M_s). Se escoge una moneda y se lanza, calcular la probabilidad de obtener cara.

El siguiente diagrama de árbol representa el experimento:



Sean los eventos $A = \{\text{Obtener cara}\}$, $B_1 = \{\text{escoger } M_p\}$ y $B_2 = \{\text{escoger } M_s\}$
Del árbol, se tiene: $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(A|B_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A|B_2) = 0$.
Escribiendo el TPT para $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 0 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Notar que, entonces $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{5}{6}$, con $\bar{A} = \{\text{obtener sello}\}$

3. Teorema (fórmula) de Bayes (TB)

Usando la misma notación que en TPT, supongamos que estamos interesados en calcular $\mathbb{P}(B_j|A)$; es decir; dado que se produjo el resultado final A, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido causado por B_j?

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}$$

fórmula conocida como Teorema de Bayes.

En general:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Ejemplo 1:
En el ejemplo anterior, supongamos que se realizó el experimento y se obtuvo un sello, calcular la probabilidad de que se haya lanzado la moneda perfecta.
Se pide $\mathbb{P}(M_s|S) = \mathbb{P}(B_1|\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A}|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{5/6} = \frac{1}{5}$

Ejemplo 2:

Se lanza n veces una moneda perfecta y se obtiene $B = \{$al menos una cara$\}$.
Calcular la probabilidad de $A = \{$Obtener al menos un sello$\}$
Se pide $\mathbb{P}(A|B)$; si se aplica la fórmula de Bayes $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(\mathbb{B}|\mathbb{A})\mathbb{P}(\mathbb{A})}{\mathbb{P}(B)}$ y se obtiene un problema equivalente.
Escribimos $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}|B)$ con $\bar{A} = \{$obtener 0 sellos$\} = \{$obtener n caras$\}$, luego:

$$\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\mathbb{B}|\bar{\mathbb{A}})\mathbb{P}(\bar{\mathbb{A}})}{\mathbb{P}(B)}$$

donde $\mathbb{P}(B|\bar{A}) = 1$; $\mathbb{P}(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ y $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ con lo que:

$$\mathbb{P}(A|B) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Ejemplo 3:
Se sacan dos cartas (sin reemplazo) de un mazo de naipes. Es evidente que:

$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{Primera carta sea As}}_{B_1}) = \frac{4}{52} \quad \mathbb{P}(\underbrace{\text{Primera carta NO sea As}}_{B_2}) = \frac{48}{52}$$

pero no es evidente $\mathbb{P}(\underbrace{\text{Segunda carta sea As}}_{A})$.
Por Teorema de Probabilidades Totales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A|B_2) \\
&= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} \\
&= \frac{4}{52}
\end{aligned}$$

resultado interesante puesto que $\mathbb{P}(\text{Primera carta sea As}) = \mathbb{P}(\text{Segunda carta sea As})$ y justifica el no importar como se reparten las cartas(o a quien se reparte primero).

Independencia de Eventos

Definición: Dos eventos A, B se dicen independientes ssi la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Por ejemplo, es natural pensar que el peso de una persona (cualquiera sea) es *independiente* del dígito verificador de su célula de identidad; o si un dado se lanza dos veces, cualquier resultado del primer lanzamiento es independiente de cualquier resultado del segundo lanzamiento.

Formalmente, A, B se dicen eventos independientes ssi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ o bién $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
Supongamos $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, sabemos que por definición $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
De donde A, B son independientes ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Generalización: Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos; los A_i se dicen independientes ssi:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}) \quad k = 2, 3, \ldots, n$$

Por ejemplo, si $n = 3$; A_1, A_2, A_3 son independientes ssi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)\\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)\\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)
\end{aligned}$$

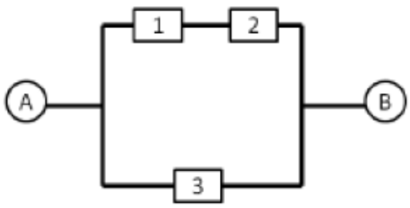
Ejemplo 1:
Se lanza un dado perfecto dos veces. Sean los eventos:
$A = \{$Primer lanzamiento sale par$\}$
$B = \{$Segundo lanzamiento sale impar$\}$
$C = \{$Ambos lanzamientos sale par o ambos sale impar$\}$

Es facil ver que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ y que $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(B\cap C) = \frac{1}{4}$; por lo que los eventos A, B, C son independientes de a pares; sin embargo $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, por lo tanto A, B, C NO son independientes.

Ejemplo 2:
Sean A, B eventos independientes. Mostrar que $\bar{A}, \bar{B}$ son eventos independientes. En efecto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}((A \cup B)^c)\\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B)\\
&= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))\\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)\\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\
&= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))\\
&= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3:
Consideremos el circuito:



Las componentes $(1, 2, 3)$ funcionan con probabilidad p (y fallan con probabilidad $1-p$) y en forma independiente. ¿cual es la probabilidad que exista flujo de A a B?
Sea $A_i = \{$componente i funciona$\}$ $\quad i = 1, 2, 3$, $C = \{$existe flujo de A a $B\}$.
Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cup A_3)\\
&= \mathbb{P}((A_1 \cap A_2)) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\
&= p^2 + p - p^3 \rightarrow \text{[por independencia]}
\end{aligned}$$

Propuesto: Calcular $\mathbb{P}(A_1|C)$

Ejemplo 4:
En un determinante de segundo orden los elementos pueden ser 1 o 0 con probabilidad 1/2 y en forma independiente. Calcular la probabilidad que el valor del determinante sea positivo.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad \mathbb{P}(a_i = 1) = \mathbb{P}(a_i = 0) = \frac{1}{2}$$

$D > 0$ ssi

- $A = \{$ a_1 y a_4 valen 1$\}$
- $B = \{$ al menos uno de a_2,a_3 es 0$\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(a_1 = 1)\mathbb{P}(a_4 = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(a_2 = 1)\mathbb{P}(a_3 = 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Luego, $\mathbb{P}(D > 0) = \frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$
Por simetría $\mathbb{P}(D < 0) = \frac{3}{16}$. De donde, $\mathbb{P}(D = 0) = \frac{10}{16}$

Propuestos

P1. *a*) Muestre que si $\mathbb{P}(A|D) \geq \mathbb{P}(B|D)$ y $\mathbb{P}(A|D^c) \geq \mathbb{P}(B|D^c)$, entonces $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$

b) Muestre que si $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$, entonces $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c) < \mathbb{P}(A)$

P2. Se tienen 3 monedas, una de ellas con dos sellos, una perfecta y una tal que sello es dos veces mas probable que cara. Se escoge una moneda y se lanza, si sale sello se vuelve a lanzar la misma moneda, pero si sale cara se escoge otra moneda entre las dos que quedan y se lanza (siempre hay dos lanzamientos).
Si en los dos lanzamientos hay un sello, calcule la probabilidad que solo se haya lanzado la moneda de dos sellos.

P3. Considere el espacio muestral Ω asociado al experimento E : Sacar una carta de un mazo de naipes. Indique A, B $(A, B \subset \Omega)$ para que:

a) Sean excluyentes e independientes.

b) Sean excluyentes y no independientes.

c) Sean no excluyentes e independientes.

d) Sean no excluyentes y no independientes.