Clase N°3

Recuerdo

Clase N°1) Experimento - Modelo
Experimento Aleatorio
Espacio Muestral
Eventos

Clase N°2) Axiomática de Probabilidades
Propiedades
Definición frecuentista
Espacio muestral finito

Bajo el supuesto de $\Omega = \{w_1 .. w_m\}$ equiprobable

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Ej.1) Sea E: Lanzar moneda perfecta dos veces

$$\Omega = \{(C,C)(C,S)(S,C)(S,S)\}$$

$$Card(\Omega) = 4$$

Sea $A = \{$obtener al menos un sello$\}$ =>

$$A = \{(C,S)(S,C)(S,S)\} \quad Card(A) = 3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

Si se postula $\Omega = \{\{C,C\}\{C,S\}\{S,S\}\}$ se obtiene $P(A) = \frac{2}{3}$ que es incorrecto ya que el segundo espacio Ω no es equiprobable.

Ej.2) Se tiene una caja con 20 fichas blancas (B) y 80 fichas rojas (R).

Si E: Sacar una ficha y observar su color
$\Rightarrow \Omega = \{B, R\}$ que es obviamente no equiprobable (el color no lo es). La solución es etiquetar las fichas $B_1 .. B_{20}$ $R_1 .. R_{80}$, con lo cual $\Omega = \{B_1 .. B_{20}, R_1 .. R_{80}\}$ que es obviamente equiprobable (las fichas lo son). Si A es sacar ficha blanca

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{20}{100} = 0,2$$ que es el resultado esperado.

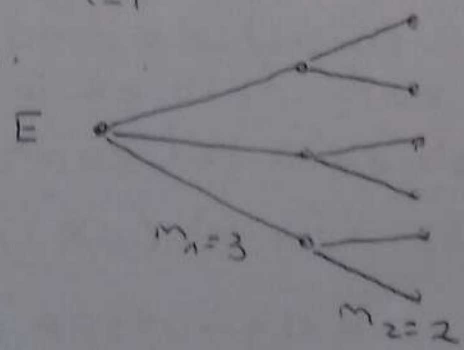
Combinatoria (Métodos de Conteo).

1) Principio de Multiplicación

Supongamos un experimento E que se puede expresar como una secuencia (orden) de subexperimentos $E_1, E_2 .. E_k$, es decir

$$E = (E_1, E_2, .. E_k)$$

si E_i tiene m_i resultados posibles $(i = 1..k)$
$\Rightarrow$ E tiene $\prod_{i=1}^{k} m_i = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$ resultados posibles.



E tiene $m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot 2 = 6$ resultados

Ej 1) ¿Cuantas patentes para auto se tienen?
Una patente es una secuencia de 4 letras y 2 números

es decir, P = L L L L N N

22	22	22	22	10	10
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6

$\Rightarrow$ el número de patentes es $22^4 \cdot 10^2$

Ej 2) Consideremos el conjunto de letras $\{a, b, c\}$.
¿Cuantas palabras de largo 2 se pueden formar?

Una palabra es una secuencia de 2 letras

$\Rightarrow$ | 3 | 3 | $3 \cdot 3 = 9$ si las letras se pueden repetir.

estas son
ab, ba
ac, ca
bc, cb
aa
bb
cc

| 3 | 2 | $3 \cdot 2 = 6$ si las letras no se pueden repetir

estas son
ab, ba
ac, ca
bc, cb

Ej 3) Para un grupo de m personas se desea calcular la probabilidad de $A = \{$todas cumplen año en dias distintos$\}$.

Denotamos los dias de 1 a 365 y postulamos

$\Omega = \{(x_1 \ldots x_m) / x_i \in \{1 \ldots 365\}\}$

x_i: dia que cumple año la i-ésima persona

por principio de multiplicación

$Card(\Omega) = 365 \cdot 365 \cdots 365 = 365^m$ y

$Card(A) = 365 \cdot 364 \cdots (365-(m-1))$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-(n-1))}{365^n} \quad \text{si } n \leq 365$$

$$P(A) = 0 \quad \text{si } n > 365$$

Ej. 4) Consideremos las letras de la palabra MARIA. ¿De cuantas maneras se pueden mover las letras y que no queden las A juntas?

Principio de multiplicación.

i) instalamos primero las 3 letras no A

$\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ N° de formas $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

ii) instalamos las 2 A (no juntas)

$\cdot$ ___ $\cdot$ ___ $\cdot$ ___ $\cdot$

se debe elegir dos $\cdot$ para poner la A y esto se puede hacer de 6 maneras.

iii) El número total es entonces $6 \cdot 6 = 36$

Las formulas a continuación se derivan del principio de multiplicación.

2) Muestras ordenadas con reemplazo

Sea $\{a_1 .. a_n\}$ un conjunto de elementos distintos (o distinguibles). El número de secuencias (orden) $(a_{i_1} .. a_{i_k})$ $a_{i_j} \in \{a_1 .. a_n\}$ es $n \cdot n \cdots n = n^k$

Con reemplazo significa que un elemento puede seleccionarse mas de una vez.

Ej. Si se lanzan tres dados, el número de resultados posibles es 6^3

3) Muestras ordenadas sin reemplazo
Permutaciones
Sea $\{a_1 .. a_n\}$; el número de secuencias $(a_{i_1} .. a_{i_k})$ $a_{i_j} \in \{a_1 .. a_n\}$ y ningún elemento puede repetirse, es.

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad n \geq k$$

denotamos lo anterior como P_k^n: permutaciones de tamaño k con n elementos.
Ej. En el problema del cumpleaño, se puede escribir $Card(A) = P_n^{365} = \frac{365!}{(365-n)!}$

obs. Si $k=n$ (se usan todos los elementos)
$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$ formas de "permutar" n objetos

4) Muestras desordenadas sin reemplazo
Combinaciones
Sea $\{a_1 .. a_n\}$; el número de conjuntos (no orden) $\{a_{i_1} .. a_{i_k}\}$ $a_{i_j} \in \{a_1 .. a_n\}$ y ningún elemento puede repetirse, es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

lo denotamos por C_k^n: combinaciones (grupos) de tamaño k con n objetos.
Para mostrar lo anterior consideramos:

a) Seleccionamos k objetos de entre los n (sin importar el orden); esto se puede hacer de C_k^n formas (desconocido).

b) Cada conjunto de a) se puede permutar de $P_k^k = k!$ formas.

c) Realizar a) y b) corresponde a las permutaciones de tamaño k con n objetos.

$$\Rightarrow C_k^n * k! = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\Rightarrow C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ej 1) Consideremos $\{a,b,c\}$

¿Cuantos conjuntos existen de dos letras?

corresponde a $C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$

estos son $\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{b,c\}$

Ej 2) Consideremos 20 fichas B y 80 fichas R.

a) Se sacan 5 fichas (sin reemplazo) y se desea calcular la probabilidad de {obtener exactamente k fichas B} = A

Usamos $\Omega = \{ \{x_1 .. x_5\} / x_i \in \{B_1 .. B_{20}, R_1 .. R_{80}\} \; x_i \neq x_j \; \forall i \neq j \}$

$Card(\Omega) = C_5^{100} = \binom{100}{5}$ conjuntos de tamaño 5 con 100 objetos

Para A necesitamos conjuntos de tamaño k de entre 20 y conjuntos de tamaño (5-k) de entre 80 $\Rightarrow$

$$Card(A) = C_k^{20} \cdot C_{5-k}^{80} = \binom{20}{k}\binom{80}{5-k}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{20}{k}\binom{80}{5-k}}{\binom{100}{5}} \quad k=0,1,..5$$

b) ¿P(obtener al menos 3 fichas B)?

$$P(\text{al menos 3 fichas B}) = \sum_{k=3}^{5} P(k \text{ fichas B})$$

$$= \sum_{k=3}^{5} \frac{\binom{20}{k}\binom{80}{5-k}}{\binom{100}{5}}$$

Ej 3) Sea Ω un conjunto con m elementos

$$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots w_m\}$$

¿Cuantos subconjuntos de Ω existen?

$$\#\text{Subc.}(\Omega) = \sum_{k=0}^{m} \#\text{Subc(tamaño } k) = \sum_{k=0}^{m} C_k^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 1^k \cdot 1^{m-k} = (1+1)^m = 2^m$$

Ej 4) De un mazo de naipes (52 cartas) le entregan 9. Se llama Poker obtener las 4 cartas de mismo número.

a) $P(\text{Poker de } \#J) = \dfrac{\underset{\#J \to}{\binom{4}{4}} \binom{48}{5} \leftarrow \#\bar{J}}{\binom{52}{9}}$

b) ¿P(obtener al menos un Poker) = P(A)?

Sea $A_J = \{\text{Poker de } \#J\} \Rightarrow A = \bigcup_{J=1}^{13} A_J$

$$P(A) = \sum_{J=1}^{13} P(A_J) - \sum_{i<J=2}^{13} P(A_i \cap A_J) + \sum_{i<J<k} P(A_i \cap A_J \cap A_k) - \cdots$$

las intersecciones de tres o mas elementos tienen probabilidad 0 puesto que solo se tienen 9 cartas. Ahora

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{\overset{i\to}{\binom{4}{4}}\overset{i\ne j}{\binom{4}{4}}\binom{44}{1}}{\binom{52}{9}} \qquad \forall (i,j)$$

falta ver cuantas intersecciones $(A_i \cap A_j)$ existen, eso corresponde a $C_2^{13} = \binom{13}{2}$

$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{13} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{13} P(A_i \cap A_j)$ reemplazando

$$P(A) = 13 \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{5}}{\binom{52}{9}} - \binom{13}{2} \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{44}{1}}{\binom{52}{9}}$$

5) Permutaciones con objetos no todos diferentes.

Supongamos m objetos t.q. se pueden agrupar en k clases. de tal forma que los m_i objetos de la clase i son indistinguibles $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m\right)$. El número de permutaciones de los m objetos es $\dfrac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_k!}$

Ej 1) Consideremos BBRRR es decir $m=5$ elementos; existen $m_1 = 2$ (B) y $m_2 = 3$ (R) elementos indistinguibles.

El número de permutaciones de BBRRR es $\dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$

Obs. Si $m_1 = m_2 = \ldots = 1$ todos los objetos son distinguibles y se recupera $m!$

Ej 2) Consideremos las letras:

AAABBEERO

¿De cuantas maneras se pueden permutar y que las "A" no queden juntas?

a) existen 6 letras no A (2B, 2E, 1R, 1O) que se pueden permutar de $\frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$ formas

b) $\cdot\ \bar{A}\ \cdot\ \bar{A}\ \cdot\ \bar{A}\ \cdot\ \bar{A}\ \cdot\ \bar{A}\ \cdot\ \bar{A}\ \cdot$

las tres A deben estar en los $\cdot$. Se deben escoger tres $\cdot$ de los siete disponibles y eso se puede hacer de $C_3^7 = \binom{7}{3} = 35$

$\Rightarrow$ el número de permutaciones es $180 \cdot 35 = 6300$

6) Muestras desordenadas con repetición. Combinaciones con repetición.

Sea $\{a_1, a_m\}$; el número de conjuntos (no orden) $\{a_{i_1} .. a_{i_k}\}$ $a_{i_j} \in \{a_1 .. a_m\}$ y los elementos pueden repetirse, es:

$$C_k^{m-1+k} = \binom{m-1+k}{k}$$

Ej 1) Sea $\{a, b, c\}$. ¿Cuantos conjuntos de dos letras existen si se permite la repetición?

$m = 3$; $k = 2$ $\Rightarrow C_2^{3-1+2} = \binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$

estos son $\{a, b\} \{a, c\} \{b c\} \{a a\} \{b b\} \{c c\}$

Ej 2) ¿Cuantas fichas existen en un juego de dominó?

Uma ficha de dominó es un conjunto con dos números y estos se escogen entre el 0 y el 6 con repetición, entonces

$m=7$; $k=2$ y numero de fichas es

$$C_2^{7-1+2} = \binom{7-1+2}{2} = \binom{8}{2} = 28$$

Obs: Resumem $\{a,b,c\}$

secuencias ordem com repetición $3^2=9$	ab, ba ac, ca bc, cb aa bb cc	$\{ab\}$ $\{ac\}$ $\{bc\}$ $\{aa\}$ $\{bb\}$ $\{cc\}$	conjuntos no ordem com repetición $C_2^{3-1+2}=6$
secuencias ordem sim repetición $P_2^3=6$	ab, ba ac, ca bc, cb	$\{ab\}$ $\{ac\}$ $\{bc\}$	conjuntos no ordem sim repetición $C_2^3=3$

Obs: Los conjuntos com repetición no son equiprobables por lo tanto no se pueden usar para calcular $P(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Por ejemplo, de la tabla anterior

$$P(\{a\,b\}) = P((a\,b)) + P((b\,a)) = \frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P(\{a\,a\}) = P((a,a)) = \frac{1}{9}$$

Finalizamos con dos ejemplos

Ej 1) a) Una moneda perfecta se lanza n veces.

Si $A = \{$obtener al menos un sello$\}$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\text{ningún sello})$$
$$= 1 - P(n \text{ caras}) = 1 - P((cc \ldots c))$$
$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

se usa $\Omega = \{(x_1 \ldots x_n) / x_i \in \{c, s\}\}$; $Card(\Omega) = 2^n$

b) Si se desea, con probabilidad p, obtener al menos un sello, ¿cuantos lanzamientos se deben realizar?

Se tiene $P(A) = 1 - \frac{1}{2^n} = p \Rightarrow n = \frac{\ln(1-p)}{\ln(1/2)}$

por ej si $p = 0{,}99 \Rightarrow n = 6{,}64 \Rightarrow n = 7$ lanzamientos

Ej 2) Volvemos al Ej 2) de Combinaciones, pero ahora las 5 fichas se sacan con reemplazo.

Postulamos $\Omega = \{(x_1 \ldots x_5) / x_i \in \{B_1 \ldots B_{20}, R_1 \ldots R_{80}\}\}$

Calculemos primero ; si $C = (B \cdot B R R R)$

$$P(C) = P((\underbrace{B.B}_{2=k}\underbrace{RRR}_{5-k=3})) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{20^k \cdot 80^{5-k}}{100^5} = \frac{20^2 \cdot 80^3}{100^5}$$

Si $A = \{$obtener 2 fichas $B\} \Rightarrow$

$$P(A) = P((BBRRR)) + P((BRBRR)) + \ldots$$

Todas las tuplas con 2B y 3R tienen igual probabilidad $\Rightarrow$

$P(A) = P(C) \cdot N^o$ Tuplas pero N^o Tuplas $= \frac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{2}$

$$\Rightarrow P(A) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{20}{100}\right)^2 \left(\frac{80}{100}\right)^3$$

Propuestos

1) Muestre con argumentos de combinatoria

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Hint. Considere una población $A = \{a_1 \ldots a_n\}$ y fije un elemento, por ej a_1

b) $\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$

Hint. Considere un grupo de n hombres y m mujeres

2) Considere un mazo de naipes; se reparten 5 cartas (sin reemplazo). Calcule la probabilidad de poder formar (obtener).

a) Escala: 5 cartas con valores consecutivos (desde A2345 hasta 10JQKA)

b) Color: 5 cartas de la misma pinta.