Matemática Discreta

Clase 4: Técnicas de demostración

Andrés Abeliuk*

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile

* Estas diapositivas fueron diseñadas a partir de diapositivas del profesor Alejandro Hevia y Federico Olmedo.

Contenido clase de hoy

Métodos de demostración

1. Técnicas de demostración
2. Principio de inducción

Demostración

Una demostración es un argumento válido que establece la verdad de un enunciado matemático.

Demostración

Una demostración es un argumento válido que establece la verdad de un enunciado matemático.

- Usando las hipótesis del teorema, axiomas, teoremas previamente probados y reglas de inferencia, el paso final de la prueba establece la verdad del enunciado.

Demostración

Una demostración es un argumento válido que establece la verdad de un enunciado matemático.

- Usando las hipótesis del teorema, axiomas, teoremas previamente probados y reglas de inferencia, el paso final de la prueba establece la verdad del enunciado.
- Anteriormente vimos demostraciones formales donde se proporcionaron todos los pasos y reglas para cada paso en el argumento.

Demostración

Una demostración es un argumento válido que establece la verdad de un enunciado matemático.

- Usando las hipótesis del teorema, axiomas, teoremas previamente probados y reglas de inferencia, el paso final de la prueba establece la verdad del enunciado.
- Anteriormente vimos demostraciones formales donde se proporcionaron todos los pasos y reglas para cada paso en el argumento.
- Sin embargo, las demostraciones formales de teoremas útiles pueden ser extremadamente largas y difíciles de seguir para humanos.

Demostración

Una demostración es un argumento válido que establece la verdad de un enunciado matemático.

- Usando las hipótesis del teorema, axiomas, teoremas previamente probados y reglas de inferencia, el paso final de la prueba establece la verdad del enunciado.
- Anteriormente vimos demostraciones formales donde se proporcionaron todos los pasos y reglas para cada paso en el argumento.
- Sin embargo, las demostraciones formales de teoremas útiles pueden ser extremadamente largas y difíciles de seguir para humanos.
- En los siguente, nos movemos desde demostraciones formales hacia demostraciones más informales.

Ejemplo

Teorema: $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, no se puede expresar como una fracción a/b, donde a y b son números enteros.

Ejemplo

Teorema: $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, no se puede expresar como una fracción a/b, donde a y b son números enteros.

Demostracion: Suponga $\sqrt{2} = a/b$ para algún par de enteros a y b. Al eliminar cualquier factor común, podemos asumir que que a y b no tienen ningún factor en común. Entonces tenemos $b\sqrt{2} = a$ y elevando ambos lados al cuadrado, tenemos $2b^2 = a^2$.

Ejemplo

Teorema: $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, no se puede expresar como una fracción a/b, donde a y b son números enteros.

Demostracion: Suponga $\sqrt{2} = a/b$ para algún par de enteros a y b. Al eliminar cualquier factor común, podemos asumir que que a y b no tienen ningún factor en común. Entonces tenemos $b\sqrt{2} = a$ y elevando ambos lados al cuadrado, tenemos $2b^2 = a^2$.

La última ecuación implica que a^2 es par, y dado que el cuadrado de un número impar es impar, a también debe ser par. Por lo tanto, tenemos $a = 2c$ para algún número entero c. Sustituyendo esto en la ecuación $2b^2 = a^2$, tenemos $4c^2 = 2b^2$, y por lo tanto $2c^2 = b^2$. Esto significa que b^2 es par y, por lo tanto, b también lo es.

Ejemplo

Teorema: $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, no se puede expresar como una fracción a/b, donde a y b son números enteros.

Demostracion: Suponga $\sqrt{2} = a/b$ para algún par de enteros a y b. Al eliminar cualquier factor común, podemos asumir que que a y b no tienen ningún factor en común. Entonces tenemos $b\sqrt{2} = a$ y elevando ambos lados al cuadrado, tenemos $2b^2 = a^2$.

La última ecuación implica que a^2 es par, y dado que el cuadrado de un número impar es impar, a también debe ser par. Por lo tanto, tenemos $a = 2c$ para algún número entero c. Sustituyendo esto en la ecuación $2b^2 = a^2$, tenemos $4c^2 = 2b^2$, y por lo tanto $2c^2 = b^2$. Esto significa que b^2 es par y, por lo tanto, b también lo es.

El hecho de que a y b sean ambos pares contradice el hecho de que a y b no tienen un factor común. Entonces, la suposición original es falsa.

Ejemplo

Teorema: $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, no se puede expresar como una fracción a/b, donde a y b son números enteros.

En formato de deducción natural, un fragmento de la demostración anterior se puede representar de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg even(b)} \qquad \dfrac{\forall x\ (\neg even(x) \rightarrow \neg even(x^2))}{\neg even(b) \rightarrow \neg even(b^2))}}{\neg even(b^2)} \qquad even(b^2)}{\bot}}{even(b)}$$

Nomenclatura

¿Qué diferencia hay entre teorema, lema, proposición y corolario?

Nomenclatura

¿Qué diferencia hay entre teorema, lema, proposición y corolario?

- Un teorema es un resultado matemático importante, cuya demostración es generalmente compleja y por lo tanto se organiza alrededor de algunos resultados intermedios.

Nomenclatura

¿Qué diferencia hay entre teorema, lema, proposición y corolario?

- Un teorema es un resultado matemático importante, cuya demostración es generalmente compleja y por lo tanto se organiza alrededor de algunos resultados intermedios.
- Un lema o proposición es un resultado intermedio, que sirve para probar un teorema de mayor relevancia.

Nomenclatura

¿Qué diferencia hay entre teorema, lema, proposición y corolario?

- Un teorema es un resultado matemático importante, cuya demostración es generalmente compleja y por lo tanto se organiza alrededor de algunos resultados intermedios.
- Un lema o proposición es un resultado intermedio, que sirve para probar un teorema de mayor relevancia.
- Un corolario es un resultado que sigue inmediatamente de un teorema.

Nomenclatura

¿Qué diferencia hay entre teorema, lema, proposición y corolario?

- Un teorema es un resultado matemático importante, cuya demostración es generalmente compleja y por lo tanto se organiza alrededor de algunos resultados intermedios.
- Un lema o proposición es un resultado intermedio, que sirve para probar un teorema de mayor relevancia.
- Un corolario es un resultado que sigue inmediatamente de un teorema.

¿Qué es una conjetura?

Nomenclatura

¿Qué diferencia hay entre teorema, lema, proposición y corolario?

- Un teorema es un resultado matemático importante, cuya demostración es generalmente compleja y por lo tanto se organiza alrededor de algunos resultados intermedios.
- Un lema o proposición es un resultado intermedio, que sirve para probar un teorema de mayor relevancia.
- Un corolario es un resultado que sigue inmediatamente de un teorema.

¿Qué es una conjetura?

- Una conjetura es una proposición que se cree firmemente verdadera, pero que no se ha podido demostrar.

Enunciado de teoremas

- Un teorema generalmente establece que todos los elementos de un dominio dado tienen cierta propiedad

Enunciado de teoremas

- Un teorema generalmente establece que todos los elementos de un dominio dado tienen cierta propiedad
- Sin embargo, el cuantificador universal muchas veces no queda explícito en el enunciado

Enunciado de teoremas

- Un teorema generalmente establece que todos los elementos de un dominio dado tienen cierta propiedad
- Sin embargo, el cuantificador universal muchas veces no queda explícito en el enunciado

Ejemplo: Un número compuesto admite una única descomposición en factores primos.

Técnicas de demostración

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \to Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \to Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

- Se parte considerando un x arbitrario

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \to Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

- Se parte considerando un x arbitrario
- Y la demostración se vuelve una implicación de la forma $p \to q$.

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \rightarrow Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

- Se parte considerando un x arbitrario
- Y la demostración se vuelve una implicación de la forma $p \rightarrow q$.
- Para probar dicha implicación podemos seguir diversas estrategias:

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \rightarrow Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

- Se parte considerando un x arbitrario
- Y la demostración se vuelve una implicación de la forma $p \rightarrow q$.
- Para probar dicha implicación podemos seguir diversas estrategias:
  - prueba directa

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \to Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

- Se parte considerando un x arbitrario
- Y la demostración se vuelve una implicación de la forma $p \to q$.
- Para probar dicha implicación podemos seguir diversas estrategias:
  - prueba directa
  - prueba por contraposición (o contrarecíproco)

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \to Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

- Se parte considerando un x arbitrario
- Y la demostración se vuelve una implicación de la forma $p \to q$.
- Para probar dicha implicación podemos seguir diversas estrategias:
    - prueba directa
    - prueba por contraposición (o contrarecíproco)
    - prueba por análisis de casos

Metodos de demostración

Gran parte de los teoremas tienen la forma

$$\forall x.\ P(x) \to Q(x)$$

donde P representa la(s) hipótesis y Q el resultado a probar.

- Se parte considerando un x arbitrario
- Y la demostración se vuelve una implicación de la forma $p \to q$.
- Para probar dicha implicación podemos seguir diversas estrategias:
  - prueba directa
  - prueba por contraposición (o contrarecíproco)
  - prueba por análisis de casos
  - prueba por contradicción (o reducción al absurdo)

Demostraciones directas

Una demostración directa de $p \to q$ se construye derivando q a partir de p. Sólo nos tenemos que enfocar en el caso en el que p es verdadero.

Demostraciones directas

Una demostración directa de $p \to q$ se construye derivando q a partir de p. Sólo nos tenemos que enfocar en el caso en el que p es verdadero.

Ejemplo: Demuestre directamente que si n es un entero impar entonces n^2 también es un entero impar.

Demostraciones directas

Una demostración directa de $p \rightarrow q$ se construye derivando q a partir de p. Sólo nos tenemos que enfocar en el caso en el que p es verdadero.

Ejemplo: Demuestre directamente que si n es un entero impar entonces n^2 también es un entero impar.

- Sean n un numero impar arbitrario;

Demostraciones directas

Una demostración directa de $p \to q$ se construye derivando q a partir de p. Sólo nos tenemos que enfocar en el caso en el que p es verdadero.

Ejemplo: Demuestre directamente que si n es un entero impar entonces n^2 también es un entero impar.

- Sean n un numero impar arbitrario;
- $n = 2k + 1$ para algún entero k

Demostraciones directas

Una demostración directa de $p \to q$ se construye derivando q a partir de p. Sólo nos tenemos que enfocar en el caso en el que p es verdadero.

Ejemplo: Demuestre directamente que si n es un entero impar entonces n^2 también es un entero impar.

- Sean n un numero impar arbitrario;
- $n = 2k + 1$ para algún entero k
- Luego $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$,

Demostraciones directas

Una demostración directa de $p \to q$ se construye derivando q a partir de p. Sólo nos tenemos que enfocar en el caso en el que p es verdadero.

Ejemplo: Demuestre directamente que si n es un entero impar entonces n^2 también es un entero impar.

- Sean n un numero impar arbitrario;
- $n = 2k + 1$ para algún entero k
- Luego $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$,
- o equivalentemente, $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$;

Demostraciones directas

Una demostración directa de $p \to q$ se construye derivando q a partir de p. Sólo nos tenemos que enfocar en el caso en el que p es verdadero.

Ejemplo: Demuestre directamente que si n es un entero impar entonces n^2 también es un entero impar.

- Sean n un numero impar arbitrario;
- $n = 2k + 1$ para algún entero k
- Luego $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$,
- o equivalentemente, $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$;
- Por lo tanto n^2 es impar.

Demostraciones por contraposición

Muchas veces es difícil encontrar una demostración directa de un resultado.

Demostraciones por contraposición

Muchas veces es difícil encontrar una demostración directa de un resultado.

Ejercicio: Trate de demostrar directamente que si n es un entero y $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Demostraciones por contraposición

Muchas veces es difícil encontrar una demostración directa de un resultado.

Ejercicio: Trate de demostrar directamente que si n es un entero y $3n+2$ es impar, entonces n es impar.

Las demostración por contraposición se basan en la equivalencia

$$p \to q \;\equiv\; \neg q \to \neg p \;.$$

En vez de probar $p \to q$ probamos (de manera directa) $\neg q \to \neg p$.

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n+2$ es impar, entonces n es impar.

Tengo que probar (de manera directa) que si n es par entones $3n+2$ es par.

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Tengo que probar (de manera directa) que si n es par entones $3n + 2$ es par.

- Sean n un numero par arbitrario;

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Tengo que probar (de manera directa) que si n es par entones $3n + 2$ es par.

- Sean n un numero par arbitrario;
- $n = 2k$ para algún entero k

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n+2$ es impar, entonces n es impar.

Tengo que probar (de manera directa) que si n es par entones $3n+2$ es par.

- Sean n un numero par arbitrario;
- $n = 2k$ para algún entero k
- Luego $3n + 2 = 3(2k) + 2$,

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n+2$ es impar, entonces n es impar.

Tengo que probar (de manera directa) que si n es par entones $3n+2$ es par.

- Sean n un numero par arbitrario;
- $n = 2k$ para algún entero k
- Luego $3n+2 = 3(2k)+2$,
- o equivalentemente, $3n+2 = 2(3k+1)$;

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Tengo que probar (de manera directa) que si n es par entones $3n + 2$ es par.

- Sean n un numero par arbitrario;
- $n = 2k$ para algún entero k
- Luego $3n + 2 = 3(2k) + 2$,
- o equivalentemente, $3n + 2 = 2(3k + 1)$;
- Por lo tanto $3n + 2$ es par.

Demostraciones por contraposición

Ejemplo: Demuestre por contraposición que si n es un entero y $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Tengo que probar (de manera directa) que si n es par entones $3n + 2$ es par.

- Sean n un numero par arbitrario;
- $n = 2k$ para algún entero k
- Luego $3n + 2 = 3(2k) + 2$,
- o equivalentemente, $3n + 2 = 2(3k + 1)$;
- Por lo tanto $3n + 2$ es par.

Ejercicio*: Demuestre por contraposición que si $n = ab$, donde ambos a y b son reales positivos, entonces $a \leq \sqrt{n}$ o $b \leq \sqrt{n}$.

Demostraciones por análisis casos

La demostración por casos se basa en la equivalencia

$$p_1 \vee \ldots \vee p_n \to q \quad \equiv \quad (p_1 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q) \ .$$

Para probar que $p \to q$, hallamos $p_1, \ldots, p_n$ tal que $p \equiv p_1 \vee \ldots \vee p_n$ y probamos $p_1 \to q, \ldots, p_n \to q$.

Demostraciones por análisis casos

La demostración por casos se basa en la equivalencia

$$p_1 \vee \ldots \vee p_n \to q \quad \equiv \quad (p_1 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)\ .$$

Para probar que $p \to q$, hallamos $p_1, \ldots, p_n$ tal que $p \equiv p_1 \vee \ldots \vee p_n$ y probamos $p_1 \to q, \ldots, p_n \to q$.

Ejemplo: Probar que para todo entero n, si $3 \nmid n$ entonces $3 \mid n^2 - 1$.

Demostraciones por análisis casos

La demostración por casos se basa en la equivalencia

$$p_1 \vee \ldots \vee p_n \to q \quad \equiv \quad (p_1 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)\ .$$

Para probar que $p \to q$, hallamos $p_1, \ldots, p_n$ tal que $p \equiv p_1 \vee \ldots \vee p_n$ y probamos $p_1 \to q, \ldots, p_n \to q$.

Ejemplo: Probar que para todo entero n, si $3 \nmid n$ entonces $3 \mid n^2 - 1$.

Si $3 \nmid n$ hay dos posibilidades: $n = 3k+1$ o $n = 3k+2$ para algún entero k.

Demostraciones por análisis casos

La demostración por casos se basa en la equivalencia

$$p_1 \vee \ldots \vee p_n \to q \quad \equiv \quad (p_1 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)\ .$$

Para probar que $p \to q$, hallamos $p_1, \ldots, p_n$ tal que $p \equiv p_1 \vee \ldots \vee p_n$ y probamos $p_1 \to q, \ldots, p_n \to q$.

Ejemplo: Probar que para todo entero n, si $3 \nmid n$ entonces $3 \mid n^2 - 1$.

Si $3 \nmid n$ hay dos posibilidades: $n = 3k + 1$ o $n = 3k + 2$ para algún entero k.

- Si $n = 3k + 1$ para algún entero k, tenemos que $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ por lo que $3 \mid n^2 - 1$.

Demostraciones por análisis casos

La demostración por casos se basa en la equivalencia

$$p_1 \vee \ldots \vee p_n \to q \quad \equiv \quad (p_1 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)\ .$$

Para probar que $p \to q$**, hallamos** $p_1, \ldots, p_n$ **tal que** $p \equiv p_1 \vee \ldots \vee p_n$ **y probamos** $p_1 \to q, \ldots, p_n \to q$**.**

Ejemplo: Probar que para todo entero n, si $3 \nmid n$ entonces $3 \mid n^2 - 1$.

Si $3 \nmid n$ hay dos posibilidades: $n = 3k + 1$ o $n = 3k + 2$ para algún entero k.

- Si $n = 3k + 1$ para algún entero k, tenemos que $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ por lo que $3 \mid n^2 - 1$.
- Si $n = 3k + 2$ para algún entero k, tenemos que $n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ por lo que $3 \mid n^2 - 1$.

Demostraciones por análisis casos

La demostración por casos se basa en la equivalencia

$$p_1 \vee \ldots \vee p_n \to q \quad \equiv \quad (p_1 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q) \; .$$

Para probar que $p \to q$, hallamos $p_1, \ldots, p_n$ tal que $p \equiv p_1 \vee \ldots \vee p_n$ y probamos $p_1 \to q, \ldots, p_n \to q$.

Ejemplo: Probar que para todo entero n, si $3 \nmid n$ entonces $3 \mid n^2 - 1$.

Si $3 \nmid n$ hay dos posibilidades: $n = 3k + 1$ o $n = 3k + 2$ para algún entero k.

- Si $n = 3k + 1$ para algún entero k, tenemos que $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ por lo que $3 \mid n^2 - 1$.
- Si $n = 3k + 2$ para algún entero k, tenemos que $n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ por lo que $3 \mid n^2 - 1$.

Ejercicio: Demuestre por casos que $|xy| = |x||y|$.

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \rightarrow \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \rightarrow \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Ejercicio: Demuestre que no existe ningún número racional que sea el menor de todos los racionales (estrictamente) positivos.

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \rightarrow \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Ejercicio: Demuestre que no existe ningún número racional que sea el menor de todos los racionales (estrictamente) positivos.

La prueba procede por reducción al absurdo.

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \to \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Ejercicio: Demuestre que no existe ningún número racional que sea el menor de todos los racionales (estrictamente) positivos.

La prueba procede por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número racional r que es el menor de todos los racionales positivos.

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \rightarrow \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Ejercicio: Demuestre que no existe ningún número racional que sea el menor de todos los racionales (estrictamente) positivos.

La prueba procede por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número racional r que es el menor de todos los racionales positivos. Luego $r/2$ es racional positivo,

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \to \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Ejercicio: Demuestre que no existe ningún número racional que sea el menor de todos los racionales (estrictamente) positivos.

La prueba procede por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número racional r que es el menor de todos los racionales positivos. Luego $r/2$ es racional positivo, y es menor que r.

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \rightarrow \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Ejercicio: Demuestre que no existe ningún número racional que sea el menor de todos los racionales (estrictamente) positivos.

La prueba procede por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número racional r que es el menor de todos los racionales positivos. Luego $r/2$ es racional positivo, y es menor que r. ¡Absurdo!

Demostraciones por contradicción

Las demostraciones por contradicción o reducción al absurdo se basan en la siguiente equivalencia

$$q \quad \equiv \quad \neg q \rightarrow \mathit{false} \ .$$

Para probar q, derivan una contradicción a partir de $\neg q$.

Ejercicio: Demuestre que no existe ningún número racional que sea el menor de todos los racionales (estrictamente) positivos.

La prueba procede por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número racional r que es el menor de todos los racionales positivos. Luego $r/2$ es racional positivo, y es menor que r. ¡Absurdo! Por lo tanto, no existe un racional r que sea el menor de todos los racionales positivos.

Demostraciones por contradicción

Ejercicio*: Probar que si a y b son reales positivos, entonces $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Demostraciones por contradicción

Ejercicio*: Probar que si a y b son reales positivos, entonces $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Una proposición de la forma $p \rightarrow q$ también puede ser probada por contradicción. Basta derivar una contradicción a partir de $p \wedge \neg q$.

Demostraciones por contradicción

Ejercicio*: Probar que si a y b son reales positivos, entonces $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Una proposición de la forma $p \rightarrow q$ también puede ser probada por contradicción. Basta derivar una contradicción a partir de $p \wedge \neg q$.

Ejercicio: Probar que para todo entero n, si n^2 es par, entonces n es par.

Principio de inducción

Principio de inducción

El principio de inducción sobre los naturales es una *técnica* para probar propiedades sobre los naturales.

Principio de inducción

El principio de inducción sobre los naturales es una *técnica* para probar propiedades sobre los naturales.

Principio de inducción

Una propiedad vale para todos los números naturales si:

Caso base: la propiedad vale para 0

Caso inductivo: cualquiera sea el natural n, la propiedad vale para $n + 1$ si vale para n

Principio de inducción

El principio de inducción sobre los naturales es una *técnica* para probar propiedades sobre los naturales.

Principio de inducción

Una propiedad vale para todos los números naturales si:

Caso base: la propiedad vale para 0

Caso inductivo: cualquiera sea el natural n, la propiedad vale para $n+1$ si vale para n

Simbolicamente,

$$P(0) \land \forall n.\ P(n) \to P(n+1) \quad \to \quad \forall n.\ P(n)$$

Principio de inducción

El principio de inducción sobre los naturales es una *técnica* para probar propiedades sobre los naturales.

Principio de inducción

Una propiedad vale para todos los números naturales si:

Caso base: la propiedad vale para 0

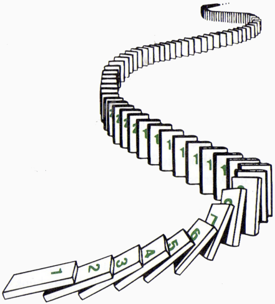
Caso inductivo: cualquiera sea el natural n, la propiedad vale para $n+1$ si vale para n

Simbolicamente,

$$P(0) \wedge \forall n.\ P(n) \rightarrow P(n+1) \quad \rightarrow \quad \forall n.\ P(n)$$

Nomenclatura: En el caso inductivo $\forall n.\ P(n) \rightarrow P(n+1)$, al antecedente $P(n)$ se lo llama hipótesis inductiva.

Intuición detrás del principio de inducción



Si el primer dominó cae, y si cae un dominó entonces cae el siguiente, entonces caen todos los dominos.

Aplicación: Provando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \quad = \quad \frac{1}{2} n(n+1)$$

Aplicación: Provando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \quad = \quad \frac{1}{2}n(n+1)$$

Caso base: Vale trivialmente ya que $0 \; = \; \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$.

Aplicación: Provando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \quad = \quad \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Caso base: Vale trivialmente ya que $0 \; = \; \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$.

Caso inductivo: asumiendo la hipótesis inductiva

$$0 + 1 + \ldots + n \; = \; \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

tengo que probar que

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \; = \; \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Aplicación: Provando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \quad = \quad \frac{1}{2}n(n+1)$$

Caso base: Vale trivialmente ya que $0 \; = \; \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$.

Caso inductivo: asumiendo la hipótesis inductiva

$$0 + 1 + \ldots + n \; = \; \frac{1}{2}n(n+1)$$

tengo que probar que

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \; = \; \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Probémoslo,

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1)$$

Aplicación: Provando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \quad = \quad \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Caso base: Vale trivialmente ya que $0 \; = \; \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$.

Caso inductivo: asumiendo la hipótesis inductiva

$$0 + 1 + \ldots + n \; = \; \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

tengo que probar que

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \; = \; \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Probémoslo,

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \quad = \quad \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \qquad \text{(por H.I.)}$$

Aplicación: Provando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \;\;=\;\; \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Caso base: Vale trivialmente ya que $0 \;=\; \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$.

Caso inductivo: asumiendo la hipótesis inductiva

$$0 + 1 + \ldots + n \;=\; \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

tengo que probar que

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \;=\; \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Probémoslo,

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \ldots + n + (n+1) &= \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) && \text{(por H.I.)} \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)\cdot n + \tfrac{1}{2}(n+1)\cdot 2 \end{aligned}$$

Aplicación: Provando identidades numéricas

Pruebe por inducción sobre n que

$$0 + 1 + \ldots + n \quad = \quad \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Caso base: Vale trivialmente ya que $0 \ = \ \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1$.

Caso inductivo: asumiendo la hipótesis inductiva

$$0 + 1 + \ldots + n \ = \ \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

tengo que probar que

$$0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \ = \ \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Probémoslo,

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \quad &= \quad \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) && \text{(por H.I.)} \\ &= \quad \tfrac{1}{2}(n+1) \cdot n + \tfrac{1}{2}(n+1) \cdot 2 \\ &= \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Deficiencias del principio de inducción

Observación: La inducción es una técnica muy útil para probar versiones cerradas de fórmulas que involucran e.g. sumatorias, productorias o recurrencias, pero no nos dice nada sobre cómo inferir dichas formas cerradas.

Deficiencias del principio de inducción

Observación: La inducción es una técnica muy útil para probar versiones cerradas de fórmulas que involucran e.g. sumatorias, productorias o recurrencias, pero no nos dice nada sobre cómo inferir dichas formas cerradas.

Ejercicio*: Conjeture una forma cerrada para la suma

$$1 + 3 + \cdots + (2n + 1)$$

de los primeros $n + 1$ números impares y demuéstrela correcta por inducción.

Generalizando el caso base

El principio de inducción se puede generalizar para probar que una propiedad vale a partir de un n_0 dado (distinto de 0).

$$P(n_0) \wedge \forall n \geq n_0.\ P(n) \rightarrow P(n+1) \quad \rightarrow \quad \forall n \geq n_0.\ P(n)$$

Aplicación: Tirando tortas

Un número impar de gente, cada uno llevando una torta, se para en un parque de manera que la distancia entre ellos es mutuamente distinta.

Aplicación: Tirando tortas

Un número impar de gente, cada uno llevando una torta, se para en un parque de manera que la distancia entre ellos es mutuamente distinta. Cada persona lanza su torta a la cara de la persona que tiene más cerca.

Aplicación: Tirando tortas

Un número impar de gente, cada uno llevando una torta, se para en un parque de manera que la distancia entre ellos es mutuamente distinta. Cada persona lanza su torta a la cara de la persona que tiene más cerca.

Demuestre usando inducción que siempre existe una persona a la que no le tiran ninguna torta.

Aplicación: Tirando tortas

Usando inducción, demostraremos la siguiente proposición P sobre los naturales mayores o iguales a 1:

$$P(n) \quad = \quad \begin{array}{l}\text{cuando en el parque se paran } 2n+1 \text{ personas,} \\ \text{existe una a la que no le tiran ninguna torta}\end{array}$$

Aplicación: Tirando tortas

Usando inducción, demostraremos la siguiente proposición P sobre los naturales mayores o iguales a 1:

$$P(n) \quad = \quad \begin{array}{l}\text{cuando en el parque se paran } 2n+1 \text{ personas,}\\ \text{existe una a la que no le tiran ninguna torta}\end{array}$$

Case base $P(1)$: Entre las tres personas, sean A y B las que están separadas por la menor distancia y C la persona restante, es decir

$$d(A,B) < d(A,C) \qquad \text{y} \qquad d(A,B) < d(B,C)$$

Aplicación: Tirando tortas

Usando inducción, demostraremos la siguiente proposición P sobre los naturales mayores o iguales a 1:

$$P(n) \quad = \quad \begin{array}{l}\text{cuando en el parque se paran } 2n+1 \text{ personas,}\\ \text{existe una a la que no le tiran ninguna torta}\end{array}$$

Case base $P(1)$: Entre las tres personas, sean A y B las que están separadas por la menor distancia y C la persona restante, es decir

$$d(A,B) < d(A,C) \qquad \text{y} \qquad d(A,B) < d(B,C)$$

A y B se tiran la torta mutuamente, y por lo tanto C no recibe ninguna torta.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n+3$ personas.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n+3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n+3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia. A y B se lanzan la torta mutuamente.

Ahora procedemos por análisis de casos, analizando si alguien más le lanza su torta a A o B, o no.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n+3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia. A y B se lanzan la torta mutuamente.

Ahora procedemos por análisis de casos, analizando si alguien más le lanza su torta a A o B, o no.

- Si alguien más le lanza su torta a A o a B, entonces el máximo de tortas recibidas entre los restantes $2n+1$ participantes es $2n$,

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n+3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia. A y B se lanzan la torta mutuamente.

Ahora procedemos por análisis de casos, analizando si alguien más le lanza su torta a A o B, o no.

- Si alguien más le lanza su torta a A o a B, entonces el máximo de tortas recibidas entre los restantes $2n+1$ participantes es $2n$, y por tanto, al menos uno de ellos no recibe torta.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n+1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n+3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia. A y B se lanzan la torta mutuamente.

Ahora procedemos por análisis de casos, analizando si alguien más le lanza su torta a A o B, o no.

- Si alguien más le lanza su torta a A o a B, entonces el máximo de tortas recibidas entre los restantes $2n+1$ participantes es $2n$, y por tanto, al menos uno de ellos no recibe torta.
- Suponga entonces, que la única torta que recibe A es la de B, y viceversa.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n + 1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n + 3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia. A y B se lanzan la torta mutuamente.

Ahora procedemos por análisis de casos, analizando si alguien más le lanza su torta a A o B, o no.

- Si alguien más le lanza su torta a A o a B, entonces el máximo de tortas recibidas entre los restantes $2n + 1$ participantes es $2n$, y por tanto, al menos uno de ellos no recibe torta.
- Suponga entonces, que la única torta que recibe A es la de B, y viceversa. El resto del grupo es de $2n + 1$ personas, y están a distancias mutuas diferentes.

Aplicación: Tirando tortas

Case inductivo: Suponga por hipótesis inductiva que alguien se salva cuando participan $2n + 1$ personas. Tenemos que probar que alguien también se salva cuando participan $2n + 3$ personas. Sean A y B las personas que están separadas por la menor distancia. A y B se lanzan la torta mutuamente.

Ahora procedemos por análisis de casos, analizando si alguien más le lanza su torta a A o B, o no.

- Si alguien más le lanza su torta a A o a B, entonces el máximo de tortas recibidas entre los restantes $2n + 1$ participantes es $2n$, y por tanto, al menos uno de ellos no recibe torta.
- Suponga entonces, que la única torta que recibe A es la de B, y viceversa. El resto del grupo es de $2n + 1$ personas, y están a distancias mutuas diferentes. Por hipótesis inductiva alguien no recibe torta en este grupo.

Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que si $h > -1$, entonces para todo entero no negativo n se tiene que $1 + nh \ \leq \ (1+h)^n$.

Ejercicio: Demuestre que para todo entero positivo n se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \ > \ 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

Ejercicio: Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Probar que $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \ \geq \ (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$.

Simplificando el caso inductivo

En el caso inductivo, para probar $P(n+1)$ sólo podemos emplear

$$P(n)$$

Simplificando el caso inductivo

En el caso inductivo, para probar $P(n+1)$ sólo podemos emplear

$$P(n)$$

Sin embargo, muchas pruebas se simplifican significativamente si pudiésemos emplear

$$P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)$$

Simplificando el caso inductivo

En el caso inductivo, para probar $P(n+1)$ sólo podemos emplear

$$P(n)$$

Sin embargo, muchas pruebas se simplifican significativamente si pudiésemos emplear

$$P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)$$

Este último argumento de prueba es válido y se conoce como principio de inducción fuerte.

Principio de inducción fuerte

Principio de inducción fuerte

Principio de inducción fuerte

Una propiedad vale para todos los números naturales si:

Caso base: la propiedad vale para 0

Caso inductivo: cualquiera sea el natural n, la propiedad vale para $n+1$ si vale para todos los naturales menores o iguales a n

Simbolicamente,

$$P(0) \wedge \forall n.\ P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n) \to P(n+1) \quad \to \quad \forall n.\ P(n)$$

Intuición detrás del principio de inducción fuerte

Ahora para tumbar un dominó necesitamos el peso de todos los dominos anteriores.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Caso inductivo: considere el natural $n + 1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Caso inductivo: considere el natural $n + 1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos. Ahora analicemos si $n + 1$ es primo o compuesto.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Caso inductivo: considere el natural $n + 1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos. Ahora analicemos si $n + 1$ es primo o compuesto.

- Si $n + 1$ es primo la propiedad es trivial.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Caso inductivo: considere el natural $n+1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos. Ahora analicemos si $n+1$ es primo o compuesto.

- Si $n+1$ es primo la propiedad es trivial.
- Si $n+1$ es compuesto entonces existen naturales j, k en el intervalo $[2, n]$ tales que $n+1 = j \cdot k$.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Caso inductivo: considere el natural $n+1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos. Ahora analicemos si $n+1$ es primo o compuesto.

- Si $n+1$ es primo la propiedad es trivial.
- Si $n+1$ es compuesto entonces existen naturales j, k en el intervalo $[2, n]$ tales que $n+1 = j \cdot k$. Por hipótesis inductiva j y k pueden escribirse como producto de factores primos,

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

Caso inductivo: considere el natural $n+1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos. Ahora analicemos si $n+1$ es primo o compuesto.

- Si $n+1$ es primo la propiedad es trivial.
- Si $n+1$ es compuesto entonces existen naturales j, k en el intervalo $[2, n]$ tales que $n+1 = j \cdot k$. Por hipótesis inductiva j y k pueden escribirse como producto de factores primos, y por lo tanto $n+1 = j \cdot k$ también.

Aplicación: Descomposición en factores primos

Pruebe por inducción fuerte que todo natural mayor que 1 puede escribirse como producto (posiblemente unitario) de factores primos.

Caso base: Trivial ya que 2 puede escribirse como el producto unitario 2.

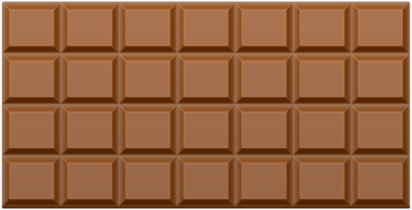
Caso inductivo: considere el natural $n+1$ y asuma por hipótesis inductiva que todo natural en el intervalo $[2, n]$ puede escribirse como producto de factores primos. Ahora analicemos si $n+1$ es primo o compuesto.

- Si $n+1$ es primo la propiedad es trivial.
- Si $n+1$ es compuesto entonces existen naturales j, k en el intervalo $[2, n]$ tales que $n+1 = j \cdot k$. Por hipótesis inductiva j y k pueden escribirse como producto de factores primos, y por lo tanto $n+1 = j \cdot k$ también.

Observación: Para esta prueba usamos la variante del principio de inducción fuerte que establece la propiedad respectiva a partir de 2 (no a partir de 0).

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Ejercicio*: Una barra de chocolate consiste en $m \times n$ cuadrados dispuestos en m filas y n columnas.



Uno puede partir la barra en cuadrados cortándola a lo largo de sus "lineas". Asumiendo que las lineas no se pueden cortar parcialmente, demuestre que $mn - 1$ cortes alcanzan para obtener los mn cuadrados.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Case base: Una barra de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Case base: Una barra de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Case inductivo: Consideremos una barra de $k + 1$ cuadrados.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Case base: Una barra de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Case inductivo: Consideremos una barra de $k + 1$ cuadrados. Hagamos sobre la barra un corte arbitrario. Éste divide a la barra en dos subbarras de k_1 y k_2 cuadrados respectivamente, donde $k_1 + k_2 = k + 1$.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Case base: Una barra de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Case inductivo: Consideremos una barra de $k + 1$ cuadrados. Hagamos sobre la barra un corte arbitrario. Éste divide a la barra en dos subbarras de k_1 y k_2 cuadrados respectivamente, donde $k_1 + k_2 = k + 1$.

Por hipótesis de inducción estas dos barras pueden ser cortadas con

$$k_1 - 1 \qquad \text{y} \qquad k_2 - 1$$

cortes.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Case base: Una barra de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Case inductivo: Consideremos una barra de $k + 1$ cuadrados. Hagamos sobre la barra un corte arbitrario. Éste divide a la barra en dos subbarras de k_1 y k_2 cuadrados respectivamente, donde $k_1 + k_2 = k + 1$.

Por hipótesis de inducción estas dos barras pueden ser cortadas con

$$k_1 - 1 \qquad \text{y} \qquad k_2 - 1$$

cortes. Por tanto, la barra original (de $k + 1$ cuadrados) puede cortarse con

$$1 \; + \; k_1 - 1 \; + \; k_2 - 1$$

cortes.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Case base: Una barra de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Case inductivo: Consideremos una barra de $k + 1$ cuadrados. Hagamos sobre la barra un corte arbitrario. Éste divide a la barra en dos subbarras de k_1 y k_2 cuadrados respectivamente, donde $k_1 + k_2 = k + 1$.

Por hipótesis de inducción estas dos barras pueden ser cortadas con

$$k_1 - 1 \qquad \text{y} \qquad k_2 - 1$$

cortes. Por tanto, la barra original (de $k + 1$ cuadrados) puede cortarse con

$$1 \ + \ k_1 - 1 \ + \ k_2 - 1 \ = \ k_1 + k_2 - 1$$

cortes.

Aplicación: Cortando barras de chocolate

Haremos la demostración por inducción fuerte sobre el número $k = mn$ de cuadrados de la barra de chocolate.

Case base: Una barra de $k = 1$ cuadrado trivialmente puede ser cortada en cuadrados con $1 - 1$ cortes.

Case inductivo: Consideremos una barra de $k + 1$ cuadrados. Hagamos sobre la barra un corte arbitrario. Éste divide a la barra en dos subbarras de k_1 y k_2 cuadrados respectivamente, donde $k_1 + k_2 = k + 1$.

Por hipótesis de inducción estas dos barras pueden ser cortadas con

$$k_1 - 1 \qquad \text{y} \qquad k_2 - 1$$

cortes. Por tanto, la barra original (de $k + 1$ cuadrados) puede cortarse con

$$\begin{aligned} 1 + k_1 - 1 + k_2 - 1 &= k_1 + k_2 - 1 \\ &= k \end{aligned}$$

cortes.

Comparando los dos principios de inducción

- Los dos principios de inducción estudiados (el estándar—también llamado *débil*—y el fuerte) son igualmente expresivos. Esto significa que una propiedad puede ser establecida usando uno si y sólo si puede ser establecida usando el otro.

Comparando los dos principios de inducción

- Los dos principios de inducción estudiados (el estándar—también llamado *débil*—y el fuerte) son igualmente expresivos. Esto significa que una propiedad puede ser establecida usando uno si y sólo si puede ser establecida usando el otro.

- La validez de ambos principios sigue del llamado principio del buen orden, que establece que todo conjunto no vacío de naturales tiene un elemento mínimo.

Ejercicio: Derive el principio de inducción estándar a partir del principio del buen orden. *Ayuda:* Proceda por reducción al absurdo.

Comparando los dos principios de inducción

- Los dos principios de inducción estudiados (el estándar—también llamado *débil*—y el fuerte) son igualmente expresivos. Esto significa que una propiedad puede ser establecida usando uno si y sólo si puede ser establecida usando el otro.

- La validez de ambos principios sigue del llamado principio del buen orden, que establece que todo conjunto no vacío de naturales tiene un elemento mínimo.

Ejercicio: Derive el principio de inducción estándar a partir del principio del buen orden. *Ayuda:* Proceda por reducción al absurdo.

Comparando los dos principios de inducción

- Los dos principios de inducción estudiados (el estándar—también llamado *débil*—y el fuerte) son igualmente expresivos. Esto significa que una propiedad puede ser establecida usando uno si y sólo si puede ser establecida usando el otro.

- La validez de ambos principios sigue del llamado principio del buen orden, que establece que todo conjunto no vacío de naturales tiene un elemento mínimo.

Ejercicio: Derive el principio de inducción estándar a partir del principio del buen orden. *Ayuda:* Proceda por reducción al absurdo.

- Es más, puede probarse que el principio de inducción débil, el principio de inducción fuerte y el principio del buen orden resultan equivalentes