Esercitazione per gli esami

Esame scritto: → 75% del voto finale

1) Domande sul programma svolto
2) Esercizi, cioè risoluzione di problemi

Indicativamente: 2 domande (~ 5 punti ciascuna)

2 esercizi (~ 10 punti ciascuno)

Esempi di domande:

1) Dato il seguente grafo, rappresentato con matrice di adiacenza

	a	b	c	d	e	f	g
a	–	–	1	–	1	1	–
b		–	–	–	–	–	1
c			–	1	–	–	–
d				–	1	–	1
e					–	1	–
f						–	1
g							–

'–' = null

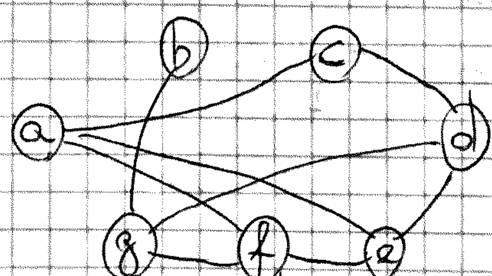
'1' = $(\alpha, \beta) \in E$

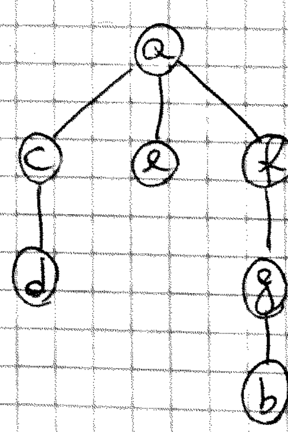
a) disegnare il grafo

b) eseguire l'algoritmo DFS dal vertice a, e disegnare il DFS tree ottenuto

c) " BFS " BFS "

Soluzione:

a) 

c) 

b) 

2) Dato il seguente grafo pesato, rappresentato con matrice di adiacenza,
a) elencare i lati del MST nell'ordine in cui sono determinati dall'algoritmo di Kruskal
b) lo stesso, ma usando l'algoritmo di Prim a partire dal nodo a

3) Descrivere un algoritmo che, dato un grafo semplice e 2 vertici s e t, determini, se esiste, un cammino di lunghezza minima da s a t.

4) Sapendo che un albero con n nodi ha $m = n-1$ lati, dimostrare che un grafo connesso con n nodi ha $m \geq n-1$ lati

5) Dato il seguente grafo, determinare l'insieme di nodi restituito dall'algoritmo APPROX_VERTEX_COVER (G), descrivendo brevemente l'algoritmo

6) a) Dare le definizioni di matching e matching massimale
b) Esibire un grafo per cui l'algoritmo APPROX_VERTEX_COVER ritorna una soluzione di costo esattamente doppio rispetto all'ottimo vertex cover

7) Dimostrare che se un grafo ha un minimum cut di cardinalità t, allora ha almeno $t\frac{n}{2}$ lati.

Esempio di esercizio

Dato un grafo $G=(V,E)$, si ricorda che un matching $M \subseteq E$ è un insieme di lati che non condividono estremi. Si consideri il problema di determinare un matching di cardinalità massima. Si consideri il seguente algoritmo greedy:

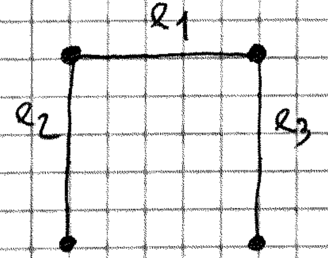
```
GREEDY_MATCHING (G)
   m ← |E|
   M ← ∅
   sia E = {e1, e2, ..., em}
   for i = 1 to m do
         if ∀e∈M  e∩ei = ∅ then M ← M ∪ {ei}
   return M
```

a) Esibire un'istanza G per cui l'algoritmo ritorna una soluzione con metà lati rispetto a una soluzione ottima.

b) Si dimostri che l'algoritmo è un algoritmo di 2-approssimazione

Soluzione:

a)

$G =$ 

$M = \{e_1\}$

matching di card. massima $= \{e_2, e_3\}$

b) (Suggerimento: si ragioni per assurdo partendo dall'ipotesi che il matching restituito dall'algoritmo abbia meno della metà dei lati del matching di cardinalità massima)

Si osservi che GREEDY_MATCHING ritorna un matching massimale: infatti, $\forall e \in M$, $M \cup \{e\}$ is not a matching (o altrimenti e sarebbe stato aggiunto a M).
Sia M^* un matching di cardinalità massima. Ovviamente, $|M| \leq |M^*|$
Ora dimostriamo che $|M| \geq |M^*|/2$.
Supponiamo, per assurdo, $|M| < |M^*|/2$. Allora, i lati di M coprono al più $2|M| < |M^*|$ nodi. Quindi c'è almeno un lato di M^* senza intersezione con lati di M $\Rightarrow$ aggiungendo questo lato a M ottengo ancora un matching: assurdo, perché M è matching massimale.