Altri esercizi per casa:

(a) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log n$

(b) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

(c) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$

(a) Rispetto allo schema generale

$a = 2, \; b = 2$

$n^{\log_b a} = n \qquad\qquad f(n) = \log n$

$\leadsto \quad f(n) = \log n = O(n)$

e per ogni $0 < \varepsilon < 1$

$\log n = O(n^{1-\varepsilon})$

Quindi siamo nel caso (1)

$T(n) = \Theta(n)$

(b) Rispetto allo schema generale

$a = 2 \qquad\qquad b = 2$

$n^{\log_b a} = n^1 = n \qquad\qquad f(n) = n^2$

si ha che

$f(n) = n^2 = \Omega(n)$

e di più

$= \Omega(n^{1+\varepsilon})$

per $0 < \varepsilon < 1$.

$\leadsto$

Inoltre vale la condizione di regolarità

$$a\, f\left(\frac{n}{b}\right) \leq K\, f(n) \qquad \text{per} \quad K<1$$

$$2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq K\, n^2$$

$$\frac{n^2}{2} \leq K\, n^2 \qquad \text{es. } K=\frac{1}{2}$$

pertanto si conclude

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

(c) Rispetto allo schema generale

$$a=2 \qquad b=2$$

$$n^{\log_b a} = n \qquad f(n) = n \log n$$

Vale che

$$f(n) = n \log n = \Omega(n)$$

ma invece $\neq \Omega(n^{1+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0$

quindi non possiamo usare il Master Theorem

(Non vale neppure la condizione di regolarità:

$$a\, f\left(\frac{n}{b}\right) = 2\, \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = n \log \frac{n}{2}$$

vorremmo (*)

$$a\, f\left(\frac{n}{b}\right) = n \log \frac{n}{2} \leq k\, f(n) = k\, n \log n \qquad K<1$$

ma

$$\frac{\cancel{n} \log \frac{n}{2}}{\cancel{n} \log n} = \frac{\log n - \log 2}{\log n} \longrightarrow 1$$

quindi (*) non può essere vera asintoticamente

Proviamo il metodo di sostituzione. Per formulare un'ipotesi sulla forma della soluzione

$$n \log n \quad \rightsquigarrow \quad n \log n$$

$$\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \qquad \frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \quad \rightsquigarrow \quad n \log\frac{n}{2}$$

$\log n$

$$\frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \qquad \frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \qquad \frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \qquad \frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \quad \rightsquigarrow \quad n \log\frac{n}{4}$$

$$c \quad c \qquad c \quad c \qquad - \; - \; - \quad \rightsquigarrow cn$$

$$n \sum_{j=0}^{\log n - 1} \log\frac{n}{2^j} + cn$$

(assumendo base 2)

$$= n \sum_{j=0}^{\log n - 1} (\log n - \underbrace{\log 2^j}_{j}) + cn$$

$$= n \log n \log n - n \sum_{j=0}^{\log n - 1} j + cn$$

$$= n (\log n)^2 - n \frac{\log n (\log n - 1)}{2} + cn$$

$$\rightsquigarrow \Theta(n (\log n)^2)$$

Dimostriamo

1) $T(n) = O(n (\log n)^2)$

2) $T(n) = \Omega(n (\log n)^2)$

1) Dobbiamo verificare l'esistenza di $c > 0$ t.c.

$T(n) \leq c\, n (\log n)^2$ asintoticamente

procediamo induttivamente (tralasciando il caso base)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

$$\overset{\text{ip. ind.}}{\leq} 2c\frac{n}{2}\left(\log\frac{n}{2}\right)^2 + n \log n$$

$= cn\,(\log n - \log 2)^2 + n \log n$

$= cn\,((\log n)^2 - 2\log 2 \log n + (\log 2)^2) + n \log n$?

$= cn\,(\log n)^2 - n\,(\log n\,(2c\underbrace{\log 2}_{>0} - 1) - c(\log 2)^2) \leq cn(\log n)^2$

Chiaramente vera se $c > \frac{1}{2\log 2}$ e n "abbastanza grande"

2) Dobbiamo mostrare che esiste $d > 0$ tc

$T(n) \geq dn(\log n)^2$ asintoticamente

Induttivamente:

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$

ip ind $\rightarrow \geq 2d\,\frac{n}{2}\left(\log \frac{n}{2}\right)^2 + n \log n$

$\vdots$ come prima

$= dn\,(\log n)^2 - n\,(\log n\,(2c-1) - c)$

$\geq dn\,(\log n)^2$

stavolta se il termine è negativo, quindi $c < \frac{1}{2}$