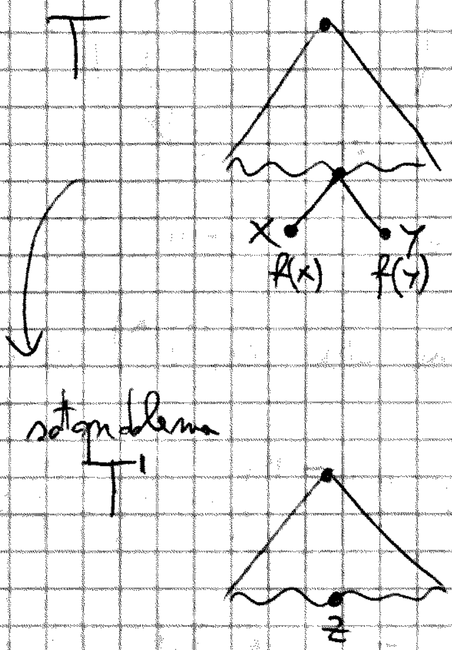
Proprietà di sottostruttura ottima: sia T un codice prefisso ottimo che contiene la scelta greedy (sui caratteri x e y). Sia z un nuovo carattere (cioè $\notin C$) con $f(z) = f(x) + f(y)$. Allora il codice prefisso $T' = T \setminus \{x, y\}$ è ottimo per $C \setminus \{x, y\} \cup \{z\}$.

Dimostrazione:



$$f(z) = f(x) + f(y)$$

Relazione tra $B(T)$ e $B(T')$?

$$\forall c \in C \setminus \{x, y\},\ c \neq z:\ d_{T'}(c) = d_T(c)$$

$$d_{T'}(z) = d_T(x) - 1$$

$$B(T) = \sum_{c \in C} f(c)\, d_T(c) = \sum_{c \in C \setminus \{x,y\}} f(c)\, d_T(c) +$$

$$+ \big(f(x) + f(y)\big)\, d_T(x) =$$

$$= \sum_{c \in C \setminus \{x,y\}} f(c)\, d_T(c) + \underbrace{\big(f(x) + f(y)\big)}_{f(z)} \underbrace{\big(d_T(x) - 1\big)}_{d_{T'}(z)} +$$

$$+ \left(f(x)+f(y)\right) = \sum_{c \in C \setminus \{x,y\} \cup \{z\}} f(c)\, d_{T'}(c) + \left(f(x)+f(y)\right) =$$

$$= B(T') + f(x)+f(y)$$

Ora ragiono per assurdo: suppongo T' non ottimo; esiste T'' con $B(T'') < B(T')$; costo del nuovo codice per il problema originale è $B(T'') + f(x) + f(y) < B(T') + f(x) + f(y)$: assurdo.

— Fine programma —

Esercizi: applicazione algoritmo di Huffman (2 esercizi d'esame)

Esercizio:
Sia $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un insieme di punti ordinato non decrescente sulla retta reale. Si fornisca un algoritmo greedy che determini un insieme I di cardinalità minima di intervalli chiusi di ampiezza unitaria ($[a,b] \in I \Rightarrow b-a=1$) tale che $\forall x_i \in X \; \exists i \in I$, $i = [a, a+1]$, tale che $x_i \in i$.

esempio: