Complessità e Notazione Asintotica

Quando si confrontano algoritmi, determinare il tempo di esecuzione

- È complicato
- Contiene dettagli inutili che vorremmo ignorare
- Dipende da costanti non note

vogliamo darne una visione più astratta (tasso di crescita)

Paragonare tra loro algoritmi

Abbiamo una scala di complessità:

$\dots$

2^n

$\dots$

n^3

n^2

$n \log n$

n

$\log n$

1

vogliamo inserire ogni algoritmo in questa scala

Un algoritmo può richiedere tempi diversi per input della stessa taglia. Ad esempio il tempo per ordinare n oggetti può dipendere dal loro ordine iniziale....

2^n

complessità massima

$\ldots$

n^3

n^2

complessità media

$n \log n$

complessità minima

n

$\log n$

1

Nell’analizzare la complessità tempo di un algoritmo siamo interessati a come aumenta il tempo al crescere della taglia n dell’input.

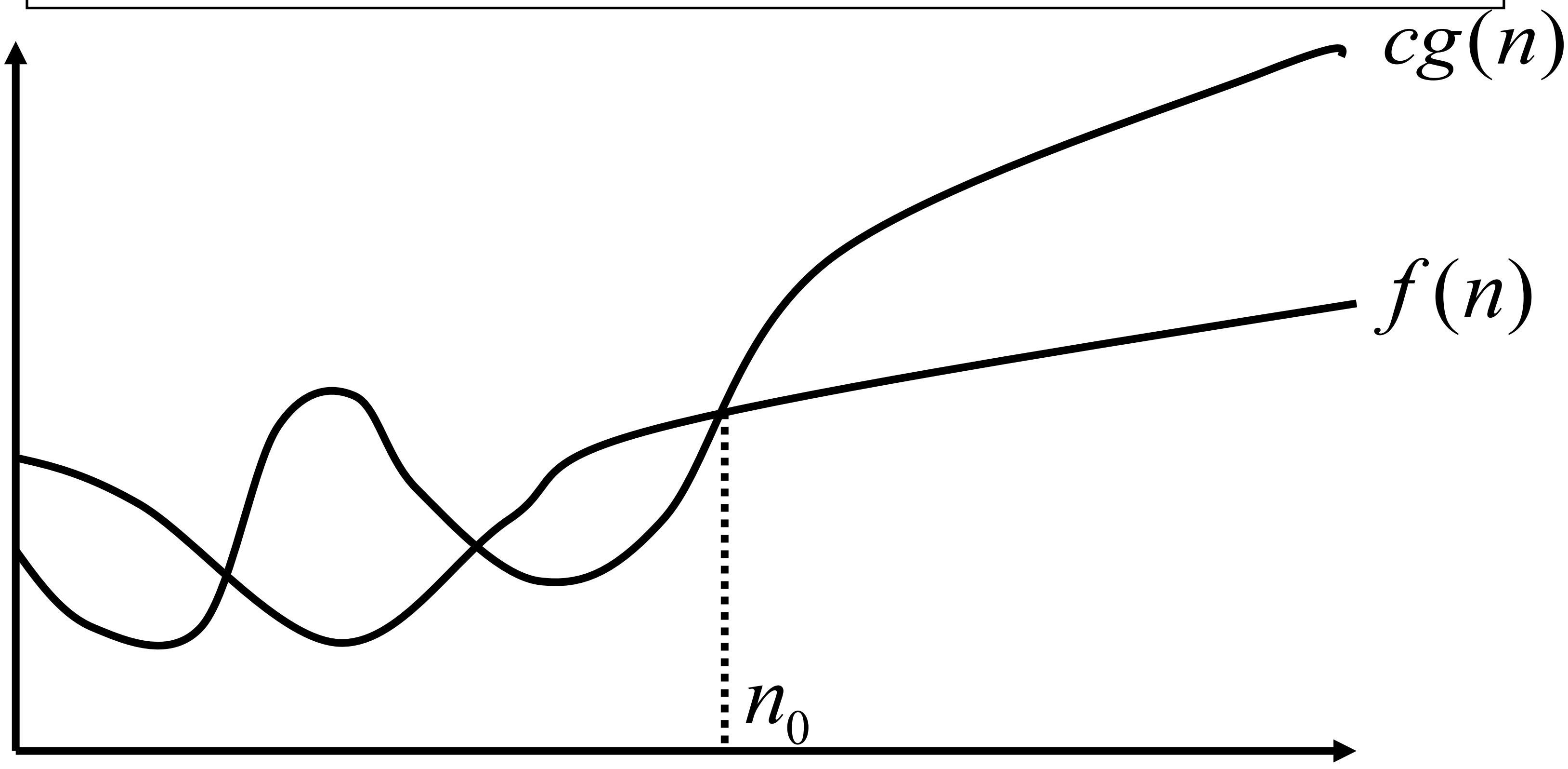
Siccome per valori “*piccoli*” di n il tempo richiesto è comunque poco, ci interessa soprattutto il comportamento per valori “*grandi*” di n (il comportamento asintotico)

Inoltre, siccome la velocità del processore influisce sul tempo calcolo per una costante moltiplicativa noi valuteremo la complessità a meno di una tale costante.

Questo giustifica le seguenti definizioni:

Notazione asintotica O
(limite superiore asintotico)

$$O(g(n)) = \{ f(n) : \text{esistono } c > 0 \text{ ed } n_0 \text{ tali che } 0 \le f(n) \le cg(n) \text{ per ogni } n \ge n_0 \}$$



Scriveremo $f(n) = O(g(n))$ per dire che $f(n)$ è una delle funzioni dell'insieme $O(g(n))$

$$f(n) = O(g(n))$$

si legge:

$f(n)$ è "o grande" di $g(n)$

Se $f(n) = O(g(n))$ rappresenta il tempo calcolo richiesto da un algoritmo diciamo che $O(g(n))$ è un limite superiore asintotico per la complessità tempo di tale algoritmo.

esempi

$$\boxed{f(n) = 2n^2 + 5n + 5 = O(n^2)}$$

infatti $0 \le 2n^2 + 5n + 5 \le cn^2$

per $c = 4$ ed $n_0 = 5$

Vedremo che in generale per $a_2 > 0$

$$\boxed{f(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0 = O(n^2)}$$

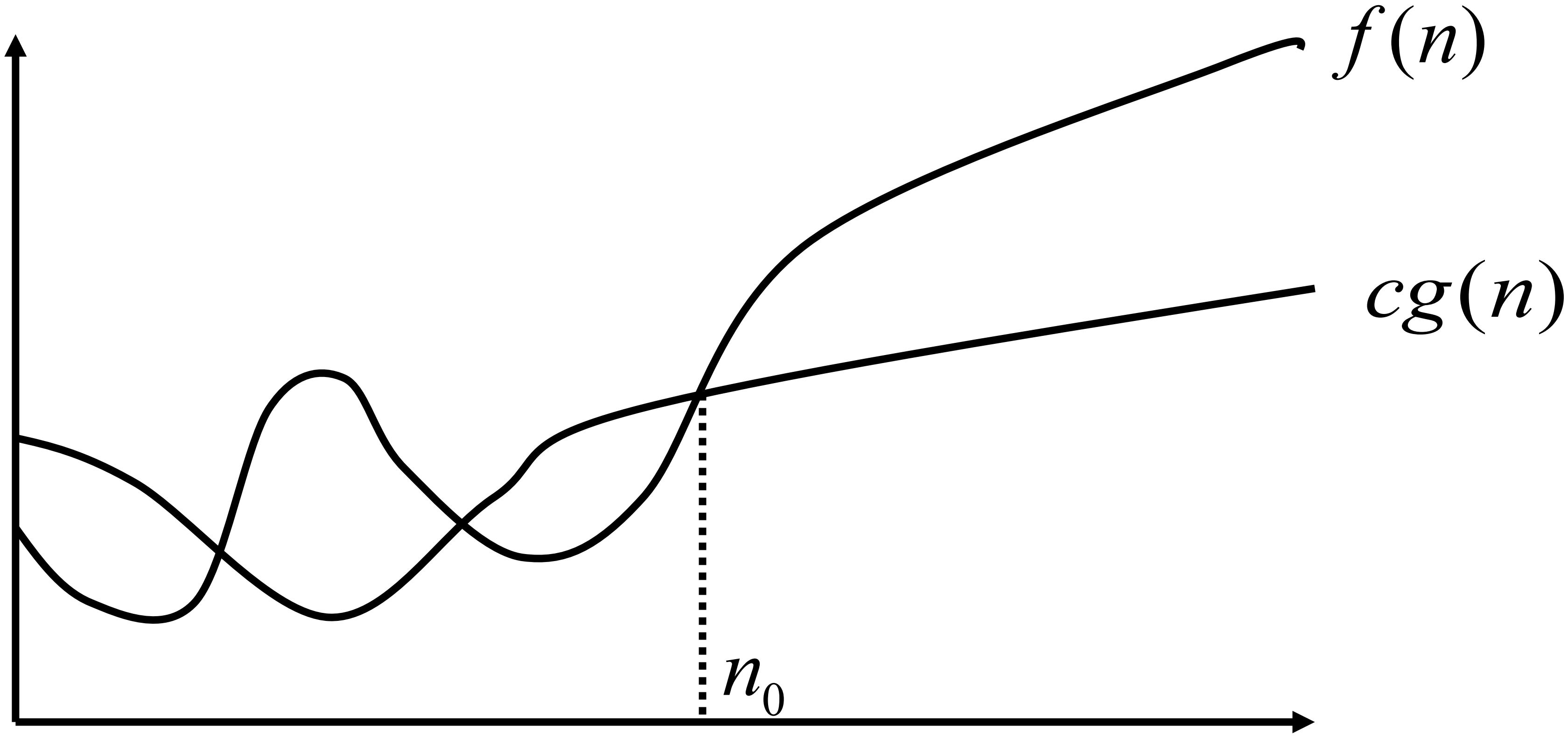
$$\boxed{f(n) = 2 + \sin n = O(1)}$$

infatti $0 \le 2 + \sin n \le c \cdot 1$

per $c = 3$ ed $n_0 = 1$

Notazione asintotica Ω.
(limite inferiore asintotico)

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{esistono } c > 0 \text{ ed } n_0 \text{ tali che } f(n) \geq cg(n) \geq 0 \text{ per ogni } n \geq n_0\}$$



Scriveremo $f(n) = \Omega(g(n))$ per dire che $f(n)$ è una delle funzioni dell'insieme $\Omega(g(n))$.

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

si legge:

$f(n)$ è "omega" di $g(n)$

Se $f(n) = \Omega(g(n))$ rappresenta il tempo calcolo richiesto da un algoritmo diciamo che $\Omega(g(n))$ è un limite inferiore asintotico per la complessità tempo di tale algoritmo.

esempi

$$\boxed{f(n) = 2n^2 - 5n - 5 = \Omega(n^2)}$$

infatti $0 \le cn^2 \le 2n^2 - 5n - 5$

per $c = 1$ ed $n_0 = 10$

Vedremo che in generale se $a_2 > 0$

$$\boxed{f(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0 = \Omega(n^2)}$$

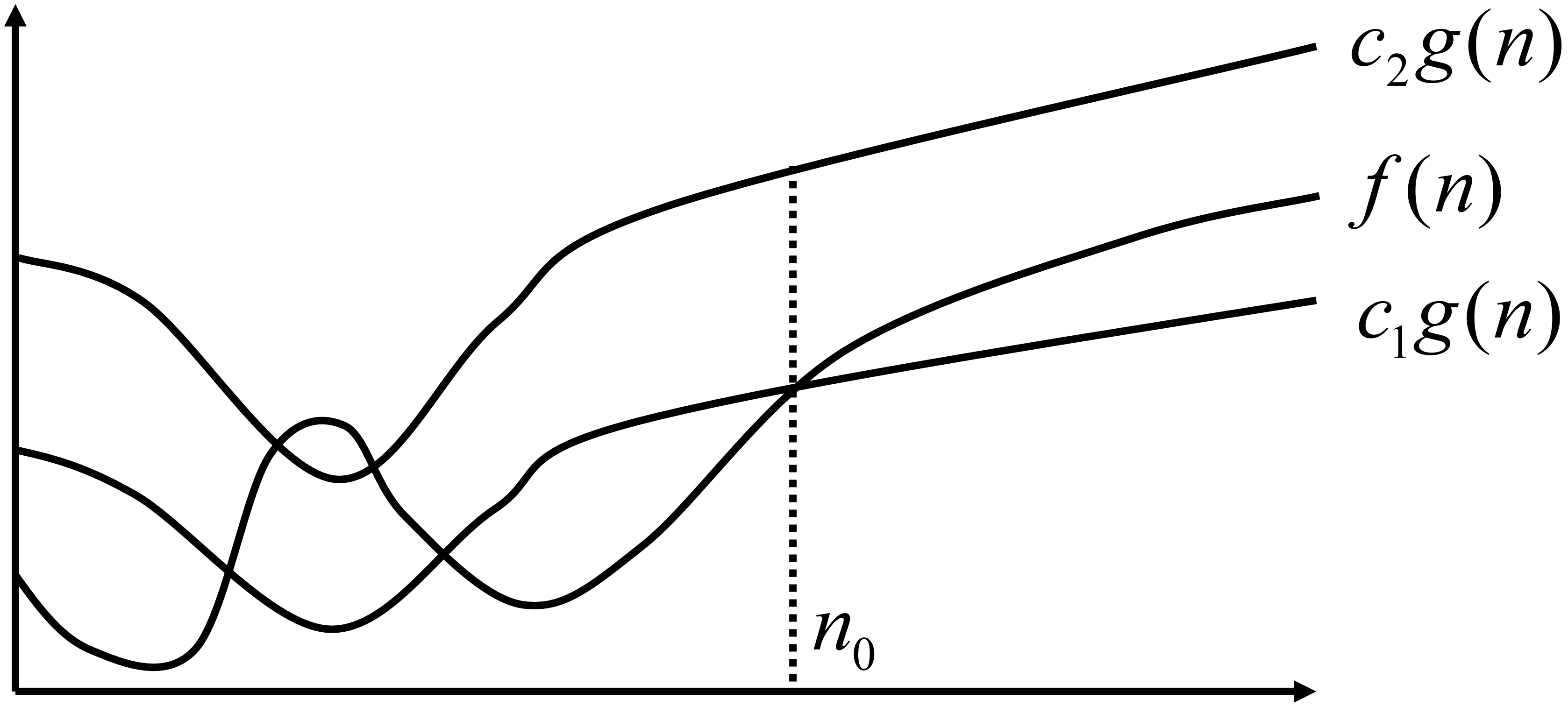
$$\boxed{f(n) = 2 + \sin n = \Omega(1)}$$

infatti $0 \le c \cdot 1 \le 2 + \sin n$

per $c = 1$ ed $n_0 = 1$

Notazione asintotica Θ.
(limite asintotico stretto)

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{esistono}$$
$$c_1, c_2 > 0 \text{ ed } n_0 \text{ tali che per ogni } n \geq n_0$$
$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$



Scriveremo $f(n) = \Theta(g(n))$ per dire che $f(n)$ è una delle funzioni dell'insieme $\Theta(g(n))$.

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

si legge:

$f(n)$ è "theta" di $g(n)$

Se $f(n) = \Theta(g(n))$ rappresenta il tempo calcolo richiesto da un algoritmo diciamo che $\Theta(g(n))$ è un limite asintotico stretto per la complessità tempo di tale algoritmo.

esempi

$$2n^2 - 5n + 5 = O(n^2) \qquad 2n^2 - 5n + 5 = \Omega(n^2)$$

Dunque $\boxed{2n^2 - 5n + 5 = \Theta(n^2)}$

$$0 \le c_1 n^2 \le 2n^2 - 5n + 5 \le c_2 n^2$$

per $c_1 = 1$, $c_2 = 4$ ed $n_0 = 10$

$$2 + \sin n = O(1) \qquad 2 + \sin n = \Omega(1)$$

Dunque $\boxed{2 + \sin n = \Theta(1)}$

$$\boxed{f(n) = 2n^2 + 5n + 5 \neq \Theta(n^3)}$$ altrimenti

$$0 \leq c_1 n^3 \leq 2n^2 + 5n + 5$$ per ogni $n \geq n_0$ allora

$$c_1 \leq \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{5}{n^3}$$ per ogni $n \geq n_0$. Assurdo!

$$\boxed{f(n) = 2n^2 + 5n + 5 \neq \Theta(n)}$$ altrimenti

$$0 \leq 2n^2 + 5n + 5 \leq c_2 n$$ per ogni $n \geq n_0$ allora

$$2 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2} \leq \frac{c_2}{n}$$ per ogni $n \geq n_0$. Assurdo!

Metodo del limite

Spesso è possibile determinare dei limiti asintotici calcolando il limite di un rapporto.

Ad esempio se $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = k > 0}$

allora per ogni $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ esiste n_0 tale che per $n \geq n_0$

$$k - \varepsilon \leq f(n)/g(n) \leq k + \varepsilon$$

Preso $0 < \boldsymbol{\varepsilon} < k$ e posto $c_1 = k - \boldsymbol{\varepsilon}$ e $c_2 = k + \boldsymbol{\varepsilon}$

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

e quindi $\boxed{f(n) = \Theta(g(n))}$

Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \infty$ diciamo che $\boxed{f(n) = \omega(g(n))}$

ed in questo caso

$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \text{ma} \quad f(n) \neq \Theta(g(n))$$

Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$ diciamo che $\boxed{f(n) = o(g(n))}$

ed in questo caso

$$f(n) = O(g(n)) \quad \text{ma} \quad f(n) \neq \Theta(g(n))$$

Attenzione: quando il limite del rapporto non esiste questo metodo non si può usare.

In generale $\boxed{f(n) = a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0 = \Theta(n^k)}$

per ogni funzione polinomiale di grado k con coefficiente $a_k > 0$.

Inoltre

$$\boxed{\Theta(n^k) \neq \Theta(n^h) \text{ per } k \neq h}$$

$$\boxed{\Theta(a^n) \neq \Theta(b^n) \text{ per } a \neq b}$$

$$\boxed{\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n) \text{ per ogni } a \text{ e } b}$$

perché $\log_a n = \log_a b \log_b n$

$$\boxed{\Theta(n^k \log n) \neq \Theta(n^k)}$$

Per $0 < h < k$ e $1 < a < b$:

$$\boxed{\begin{aligned}&O(\log n) \subseteq O(n^h) \subseteq O(n^k) \subseteq \\ &\subseteq O(n^k \log n) \subseteq O(a^n) \subseteq O(b^n)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Theta(\log n) \neq \Theta(n^h) \neq \Theta(n^k) \neq \\ &\neq \Theta(n^k \log n) \neq \Theta(a^n) \neq \Theta(b^n)\end{aligned}}$$

Useremo le notazioni asintotiche anche all'interno delle formule.

In questo caso le notazioni $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ e $\Theta(f(n))$ stanno ad indicare una qualche funzione appartenente a tali insiemi e di cui non ci interessa conoscere la forma esatta ma solo il comportamento asintotico.

Ad esempio $T(n)=n^2+O(n)$ significa che $T(n)$ è la somma di n^2 e di una funzione che cresce al più linearmente.