Esempio di problema dove applicheremo lo Strengthening (rafforzamento) cioè risolveremo sottoproblemi più vincolati:

Dato un alfabeto Σ totalmente ordinato (cioè $\forall\, a,b \in \Sigma$ deve valere o $a<b$ o $a=b$ o $a>b$) e data $X = \langle x_1, \dots x_n \rangle \in \Sigma^*$ si dice che $Z = \langle z_1 \dots z_k \rangle \in \Sigma^*$ è una sottosequenza crescente (Increasing Subsequence $Z = IS(X)$) se Z è una sottosequenza di X e $z_1 < z_2 < \dots < z_k$.

Problema di ottimizzazione: determinare la Longest Increasing Subsequence di X, $Z = LIS(X)$

Esempio:

$X = \langle 5, 2, 4, 3, 7, 8 \rangle$

$Z = \langle 2, 4, 7, 8 \rangle = LIS(X)$
$Z' = \langle 2, 3, 7, 8 \rangle$ è un'altra $LIS(X)$

Algoritmo esaustivo $\longrightarrow$ esponenziale

Provo a fare come per LCS:

Data X, cerco la $LIS(X_i)$ $\forall i$, sperando che $\exists$ una proprietà di sottostruttura ottima che mette in relazione $LIS(X_i)$ con altre LIS

Dato $Z^i = LIS(X_i) = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$, voglio calcolare

$Z^{i+1} = LIS(X_{i+1})$

$X_{i+1} = X_i + x_{i+1}$

- Caso fortunato: $z_k < x_{i+1}$

  $\rightarrow LIS(X_{i+1}) = \langle Z^i, x_{i+1} \rangle$

- Caso sfortunato: $z_k > x_{i+1}$

  posso dire $LIS(X_{i+1}) = Z^i$? NO

  perché Z^i è <u>una</u> $LIS(X_i)$: potrebbe essercene un'altra per cui mi troverei nel caso fortunato, e quindi $|LIS(X_{i+1})| = 1 + |LIS(X_i)|$

  esempio: $X_i = \langle 4, 5, 6, 1, 2, 3 \rangle$

  $x_{i+1} = 5$

Possibile soluzione:

Sottoproblemi con proprietà aggiuntive:

Calcolare la più lunga IS di X_i che termini proprio con x_i

Definizione: $Z = \overline{LIS}(X_i)$ è la più lunga tra le $IS(X_i)$

con $Z = \langle z_1, \dots, z_k \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$ con $i_k = i$

esempio:

$X = \langle 8, 2, 5, 1, 3 \rangle$

$LIS(X_4) = \langle 2, 5 \rangle$

$\overline{LIS}(X_4) = \langle 1 \rangle$ $\rightarrow$ no relazione immediata tra $LIS(X_4)$ e $\overline{LIS}(X_4)$

<u>deve</u> finire con 1

$\overline{LIS}$ è un problema più vincolato $\Rightarrow$

$$|\overline{LIS}(X_i)| \leq |LIS(X_i)|$$

considera $LIS(X_i)$: da qualche parte deve pur finire! Rispetto a quella posizione, è anche $\overline{LIS}$. Ma non so dove finisce $\rightarrow$ calcolo tutte le $\overline{LIS}$ (una $\forall i$) e ne considero il valore massimo (di $|\overline{LIS}|$), cioè

$$|LIS(X)| = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |\overline{LIS}(X_i)| \}$$

Dimostrazione: si dimostra prima il $\leq$ e poi il $\geq$

sia $Z = LIS(X) = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \rangle$

$Z = \overline{LIS}(X_{i_k}) \Rightarrow |Z| \leq \max \{ |\overline{LIS}(X_i)| \}$

se così non fosse, ne $\exists$ un'altra più lunga: ma questa è una $IS(X)$ più lunga di $Z = LIS(X)$: assurdo

Proprietà di sottostruttura ottima   Tra le $\overline{LIS}$ dei prefissi piuttosto che tra le LIS

1) Caso base: $\overline{LIS}(X_1) = \langle x_1 \rangle$ ($\hookrightarrow i=1$)

2) $i > 1$

caso a) $\forall j : 1 \leq j < i \quad x_j \geq x_i$

$\rightarrow \overline{LIS}(X_i) = \langle x_i \rangle$

caso b) $\exists \bar{j} : 1 \leq \bar{j} < i$ e $x_{\bar{j}} < x_i$ (è la negazione di a))

$\rightarrow |\overline{LIS}(X_i)| \geq 2$ e posso dire di più:

$\overline{LIS}(X_i) = \langle Z_{k-1}, x_i \rangle$ e Z_{k-1} è la più lunga stringa in $\{ \overline{LIS}(X_j) : 1 \leq j < i$ e $x_j < x_i \}$