Esercizio

Dimostrare le seguenti uguaglianze:

1. $f(n) = O(g(n))$ sse $g(n) = \Omega(f(n))$
2. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
3. $f(n) = \Theta(f(n))$
4. $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ implica $f(n) = O(h(n))$
   (e dualmente $f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$ implica $f(n) = \Omega(h(n))$,
   e quindi $f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$ implica $f(n) = \Theta(h(n))$)
5. $f(n) = \Theta(g(n))$ sse $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$ sse $g(n) = \Theta(f(n))$

Soluzione. È opportuno richiamare la definizione dei limiti asintotici superiore, inferiore e stretto:

(i) $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0.\, \exists n_0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq c\, g(n) \leq f(n)\}$

(ii) $O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists d > 0.\, \exists n_0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq f(n) \leq d\, g(n)\}$

(iii) $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, d > 0.\, \exists n_0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq c\, g(n) \leq f(n) \leq d\, g(n)\}$

Procediamo dunque con la soluzione delle varie domande

1. $f(n) = O(g(n))$ sse $g(n) = \Omega(f(n))$
   Proviamo che se $f(n) = O(g(n))$ allora $g(n) = \Omega(f(n))$. Supponiamo dunque che valga $f(n) = O(g(n))$, ovvero esistono $d > 0$ e n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$ vale

   $$0 \leq f(n) \leq d\, g(n)$$

   Dividendo per d (possibile perché $d > 0$) si ottiene che per ogni $n \geq n_0$ vale

   $$0 \leq \frac{1}{d} f(n) \leq g(n)$$

   e quindi, ricordando la definizione (i), $g(n) = \Omega(f(n))$, utilizzando come costante moltiplicativa $c = \frac{1}{d} > 0$.

   L'implicazione inversa è totalmente analoga.

2. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
   Mostriamo separatamente le due inclusioni.

   - $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$:
     Sia $f(n) = \Theta(g(n))$. Dalla definizione (iii) otteniamo che esistono $c, d > 0$, n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$ vale
     $$0 \leq c\, g(n) \leq f(n) \leq d\, g(n)$$
     È immediato dalle definizioni (ii) e (i) dedurre che $f(n) = \Omega(g(n))$ (con costante moltiplicativa c) e $f(n) = O(g(n))$ (con costante moltiplicativa d). Quindi $f(n) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.

- $O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subseteq \Theta(g(n))$:
  Sia $f(n) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$. Dato che $f(n) = \Omega(g(n))$ esistono $c > 0$, n_0' tali che per ogni $n \geq n_0'$ vale
  $$0 \leq c\, g(n) \leq f(n)$$
  Analogamente, dato che $f(n) = O(g(n))$ esistono $d > 0$, n_0'' tali che per ogni $n \geq n_0''$ vale
  $$0 \leq f(n) \leq d\, g(n)$$
  Quindi, detto $n_0 = \max(n_0', n_0'')$ si ha che per ogni $n \geq n_0$
  $$0 \leq c\, g(n) \leq f(n) \leq d\, g(n)$$
  e pertanto $f(n) = \Theta(g(n))$, come desiderato.

3. $f(n) = \Theta(f(n))$
   Immediato dalla definizione (iii), utilizzando come costanti moltiplicative $c = d = 1$ e n_0 qualsiasi.

4. $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ implica $f(n) = O(h(n))$
   Sia $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$. Quindi, dalla definizione (ii), esistono $d' > 0, n_0'$ tali che per ogni $n \geq n_0'$ vale:
   $$0 \leq f(n) \leq d'\, g(n)$$
   e analogamente esistono $d'' > 0, n_0''$ tali che per ogni $n \geq n_0''$ vale:
   $$0 \leq g(n) \leq d''\, h(n)$$
   Pertanto, posto $n_0 = \max(n_0', n_0'')$ si ha che per ogni $n \geq n_0$ risulta
   $$0 \leq f(n) \leq d'\, g(n) \leq d'\, d''\, h(n)$$
   ovvero $f(n) = O(h(n)$, con costante moltiplicativa $d = d'd''$.

5. $f(n) = \Theta(g(n))$ sse $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$ sse $g(n) = \Theta(f(n))$
   Osserviamo che $f(n) = \Theta(g(n))$ sse $g(n) = \Theta(f(n))$ segue dai punti (1) e (2). Infatti,

$f(n) = \Theta(g(n))$ sse	[usando (2)]
$f(n) = \Omega(g(n))$ e $f(n) = O(g(n))$ sse	[usando (1) due volte]
$g(n) = O(g(n))$ e $g(n) = \Omega(g(n))$ sse	[usando (2)]
$g(n) = \Theta(g(n))$	

   Resta solo da dimostrare $f(n) = \Theta(g(n))$ sse $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$. Proviamo separatamente le due implicazioni.

   Sia $f(n) = \Theta(g(n))$. Dobbiamo provare che $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$. Se $h(n) = \Theta(f(n))$ allora per (4) $h(n) = \Theta(g(n))$, quindi vale $\Theta(f(n)) \subseteq \Theta(g(n))$. L'inclusione opposta segue per simmetria, dato che abbiamo appena dimostrato che $f(n) = \Theta(g(n))$ sse $g(n) = \Theta(f(n))$.

   Sia ora $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$. É sufficiente ricordare che per (3) vale $f(n) = \Theta(f(n))$, da cui si deduce che $f(n) = \Theta(g(n))$.