Esercizio

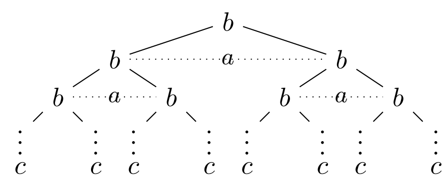
Risolvere la ricorrenza

$$T(n) = a\,T(n-1) + b$$

Dovendo distinguere vari casi a seconda del valore di a è opportuno dare una soluzione esatta, specificando un caso base

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n = 0 \\ a\,T(n-1) + b & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Per ipotizzare una soluzione, da provare poi per sostituzione, vediamo l'albero delle ricorrenze



n	b
$n-1$	ab
$n-2$	a^2b
0	a^nc

Questo ci conduce dunque all'ipotesi

$$T(n) = b + ab + a^2b + \cdots + a^{n-1}b + a^nc = b\sum_{j=0}^{n-1} a^j + a^nc$$

che può essere verificata per induzione

- ($n = 0$) In questo caso

$$T(0) = (\textstyle\sum_{j=0}^{-1})b + a^0c = c$$

- ($n > 0$) In questo caso

$$\begin{aligned} T(n) &= aT(n-1) + b = \\ &= a((\sum_{j=0}^{n-2} a^j)b + a^{n-1}c) + b \qquad \text{[ipotesi induttiva]} \\ &= (\sum_{j=0}^{n-2} a^{j+1})b + a^nc + b \\ &= (\sum_{i=1}^{n-1} a^i)b + a^nc + b \\ &= (\sum_{i=1}^{n-1} a^i)b + b + a^nc \\ &= (\sum_{i=0}^{n-1} a^i)b + a^nc \end{aligned}$$

come desiderato.

Per valutare l'andamento asintotico distinguiamo vari casi a seconda del valore di a:

- ($a = 1$) Vale

$$T(n) = (\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} 1^j)b + 1^nc = (\sum_{j=0}^{n-1} 1)b + c = bn + c$$

pertanto $T(n) = \Theta(n)$.

- ($a < 1$) Vale
$$T(n) = (\sum_{j=0}^{n-1} a^j)b + a^n c \leq (\sum_{j=0}^{\infty} a^i)b + c = \frac{1}{1-a}b + c$$
pertanto $T(n) = \Theta(1)$.

- ($a > 1$) Vale
$$T(n) = (\sum_{j=0}^{n-1} a^j)b + a^n c = \frac{a^n - 1}{a-1}b + a^n c$$
pertanto $T(n) = \Theta(a^n)$.

Per l'ultimo caso, supponiamo di voler mostrare direttamente il limite asintotico, ovvero

1. $T(n) = \Omega(a^n)$
2. $T(n) = O(a^n)$

Mentre il punto (1) è banale, per il punto (2) la prova per induzione ovvia fallisce. Infatti si vuole che per una costante $d > 0$, asintoticamente valga

$$T(n) \leq da^n$$

La prova induttiva procede come segue:

$$T(n) = aT(n-1) + b \leq ada^{n-1} + b = da^n + b \not\leq da^n$$

Dobbiamo modificare l'ipotesi induttiva e lo facciamo portando in sottrazione qualcosa che poi nel passo induttivo sarà moltiplicato per la costante

$$T(n) \leq d(a^n - 1)$$

Ora la prova induttiva funziona:

$$\begin{aligned}
T(n) &= aT(n-1) + b = \\
&\leq ad(a^{n-1} - 1) + b \qquad \text{[ipotesi induttiva]} \\
&= d(a^n - a) + b \\
&= d(a^n - 1) - d(a-1) + b \qquad \text{[uso } a^n - a = a^n - 1 - (a-1)\text{]} \\
&\leq d(a^n - 1)
\end{aligned}$$

per $d \geq \frac{b}{a-1}$. Pertanto $T(n) = O(a^n - 1) = O(a^n)$.