Valutare la difficoltà dei problemi

$\ldots$

2^n

$\ldots$

n^3

n^2

$n \log n$

n

$\log n$

1

esiste un algoritmo che risolve il problema con questa complessità

limite superiore: $O(n^2)$

Valutare la difficoltà dei problemi

$\dots$

2^n

$\dots$

n^3

n^2

$n \log n$

n

$\log n$

1

ogni algoritmo che risolve il problema ha complessità maggiore o uguale di questa

limite inferiore: $\Omega(n)$

Un limite superiore per il problema dell'ordinamento

Abbiamo visto che Insert-Sort per ordinare n oggetti richiede $O(n^2)$ operazioni

Quindi $O(n^2)$ è un limite superiore

Vedremo in seguito che $\Theta(n \log n)$ è un limite stretto per il problema dell'ordinamento.

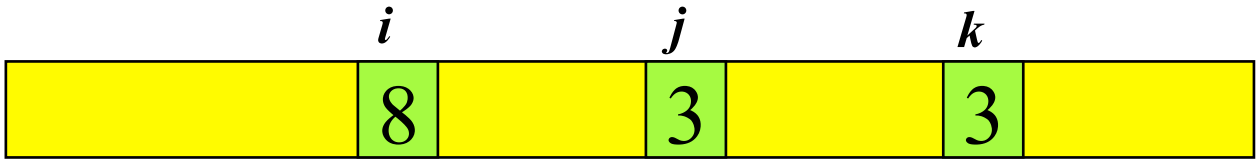
Per ora ci limitiamo a dimostrare che:

La complessità nel caso pessimo di ogni algoritmo di ordinamento sul posto che confronta e scambia tra loro soltanto elementi consecutivi dell'array è $\Omega(n^2)$.

Quindi il problema di ordinare sul posto un array scambiando tra loro soltanto elementi consecutivi ha complessità $\Theta(n^2)$.

Sia $A[1..n]$ un array

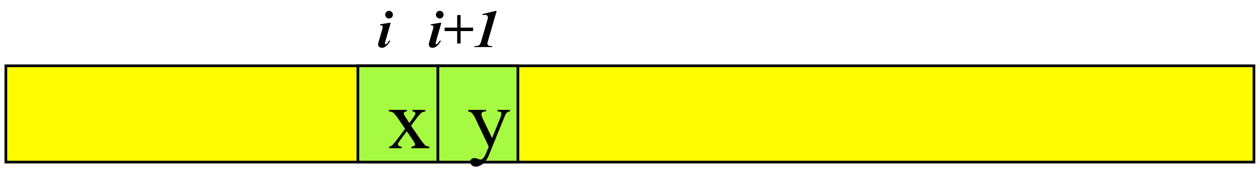
Se $i < j$ e $A[i] > A[j]$ diciamo che la coppia di indici (i, j) è una *inversione*



Se l'array è ordinato non ci sono inversioni.

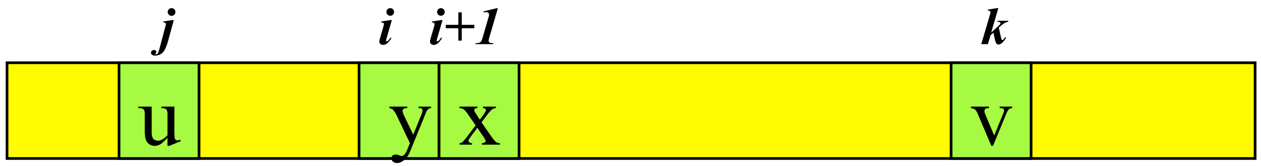
Se l'array è ordinato in senso opposto e gli elementi sono tutti distinti allora ogni coppia (i, j) di indici con $i < j$ è una inversione e quindi ci sono esattamente $n(n-1)/2$ inversioni.

Come cambia il numero di inversioni quando facciamo uno scambio tra due elementi consecutivi $A[i]$ ed $A[i+1]$ dell'array?

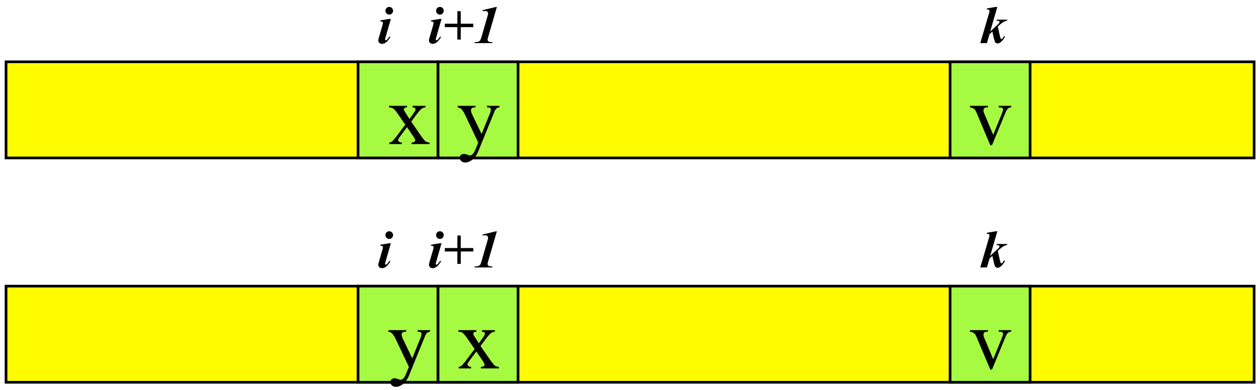


Consideriamo tutte le coppie di indici (j, k) con $j < k$ e vediamo quante e quali di esse possono cambiare di stato da inversioni a non inversioni o viceversa quando scambiamo A[i] con A[i+1].

Se j e k sono entrambi diversi da i e i+1 la coppia (j, k) non cambia di stato e quindi il numero di inversioni di questo tipo non cambia.



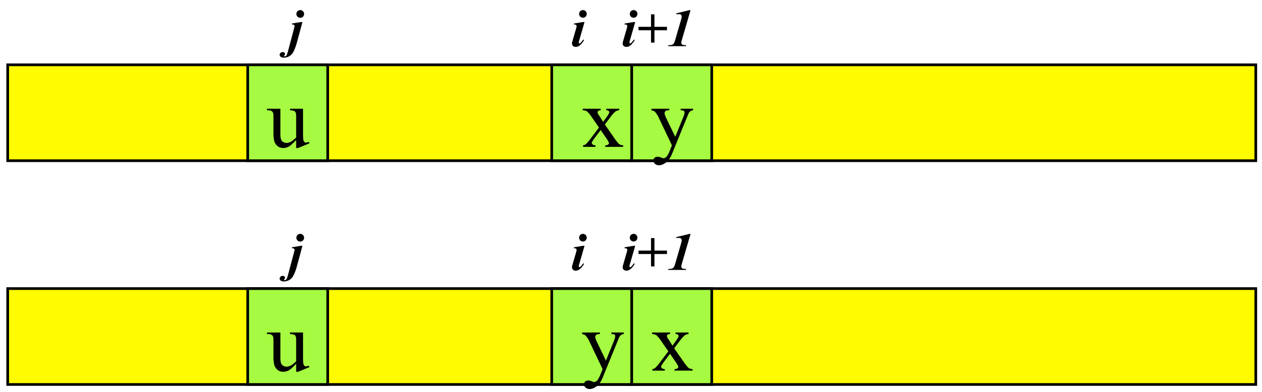
Consideriamo le due coppie (i, k) e $(i+1, k)$ con $k > i+1$ ossia



(i, k) è inversione dopo lo scambio se e solo se $(i+1, k)$ lo era prima e $(i+1, k)$ è inversione se e solo se (i, k) lo era prima.

Quindi le due coppie si scambiano gli stati ma il numero totale di inversioni non cambia.

Consideriamo le coppie (j, i) e (j,i+1) con $j < i$ ossia



La situazione è simmetrica di quella precedente e quindi anche in questo caso il numero totale di inversioni non cambia.

Rimane soltanto da considerare la coppia (i, i+1) che con lo scambio cambia di stato se i due elementi sono diversi.

In conclusione con lo scambio di due elementi consecutivi dell'array il numero totale di inversioni aumenta o diminuisce di 1 (o rimane invariato se i due elementi scambiati erano uguali).

Nel caso pessimo in cui l'array è ordinato in senso inverso e gli elementi sono tutti distinti le inversioni iniziali sono $n(n\text{-}1)/2$.

Occorrono quindi almeno $n(n\text{-}1)/2$ scambi tra elementi consecutivi per ridurre tale numero a 0.

Siccome $n(n\text{-}1)/2 = \Omega(n^2)$ rimane dimostrato il limite inferiore.

Esercizio: Abbiamo dimostrato che scambiando due elementi diversi consecutivi il numero totale di inversioni aumenta o diminuisce di 1.

Quindi se prima dello scambio il numero di inversioni totale era pari, dopo lo scambio esso risulta dispari e viceversa.

Mostrare che questo cambiamento della parità del numero totale di inversioni avviene anche se si scambiano due elementi diversi non consecutivi.

Soluzione delle ricorrenze

Metodo di sostituzione:

Si assume che la soluzione sia di un certo tipo, ad esempio

$$T(n) = k_1 n \log_2 n + k_2 n + k_3$$

dove k_1, k_2 e k_3 sono delle costanti

Si sostituisce la soluzione nella ricorrenza e si cercano dei valori delle costanti per i quali la ricorrenza è soddisfatta.

Se le cose non funzionano si riprova con un altro tipo di soluzione.

Esempio: $$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n \le 1 \\ bn + a + 2T(n/2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

assumiamo $T(n) = k_1 n \log_2 n + k_2 n + k_3$

sostituendo si ottiene:

$$k_1 n \log_2 n + k_2 n + k_3 =$$

$$= \begin{cases} c & \text{se } n \le 1 \\ bn + a + 2\left(k_1 \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + k_2 \frac{n}{2} + k_3\right) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Le costanti k_1, k_2 e k_3 devono essere le stesse a sinistra e a destra.

per $n = 1$ si ottiene: $k_2 + k_3 = c$

mentre per $n > 1$

$$k_1 n \log_2 n + k_2 n + k_3 =$$

$$= k_1 n \log_2 n + (b - k_1 + k_2)n + a + 2k_3$$

da cui $k_1 = b$, $k_3 = -a$ e $k_2 = c + a$

e dunque $T(n) = bn \log_2 n + (c + a)n - a$

è la soluzione.

Soluzione delle ricorrenze

Metodo dell'esperto:

Fornisce direttamente le soluzioni asintotiche di molte ricorrenze del tipo:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

dove n/b significa anche $\lfloor n/b \rfloor$ o $\lceil n/b \rceil$

Teorema dell'esperto:

Se $T(n) = aT(n/b)+f(n)$ è una ricorrenza con $a \geq 1$ e $b > 1$ costanti e dove n/b può essere anche $\lfloor n/b \rfloor$ o $\lceil n/b \rceil$ allora :

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$

   per qualche costante $\varepsilon > 0$

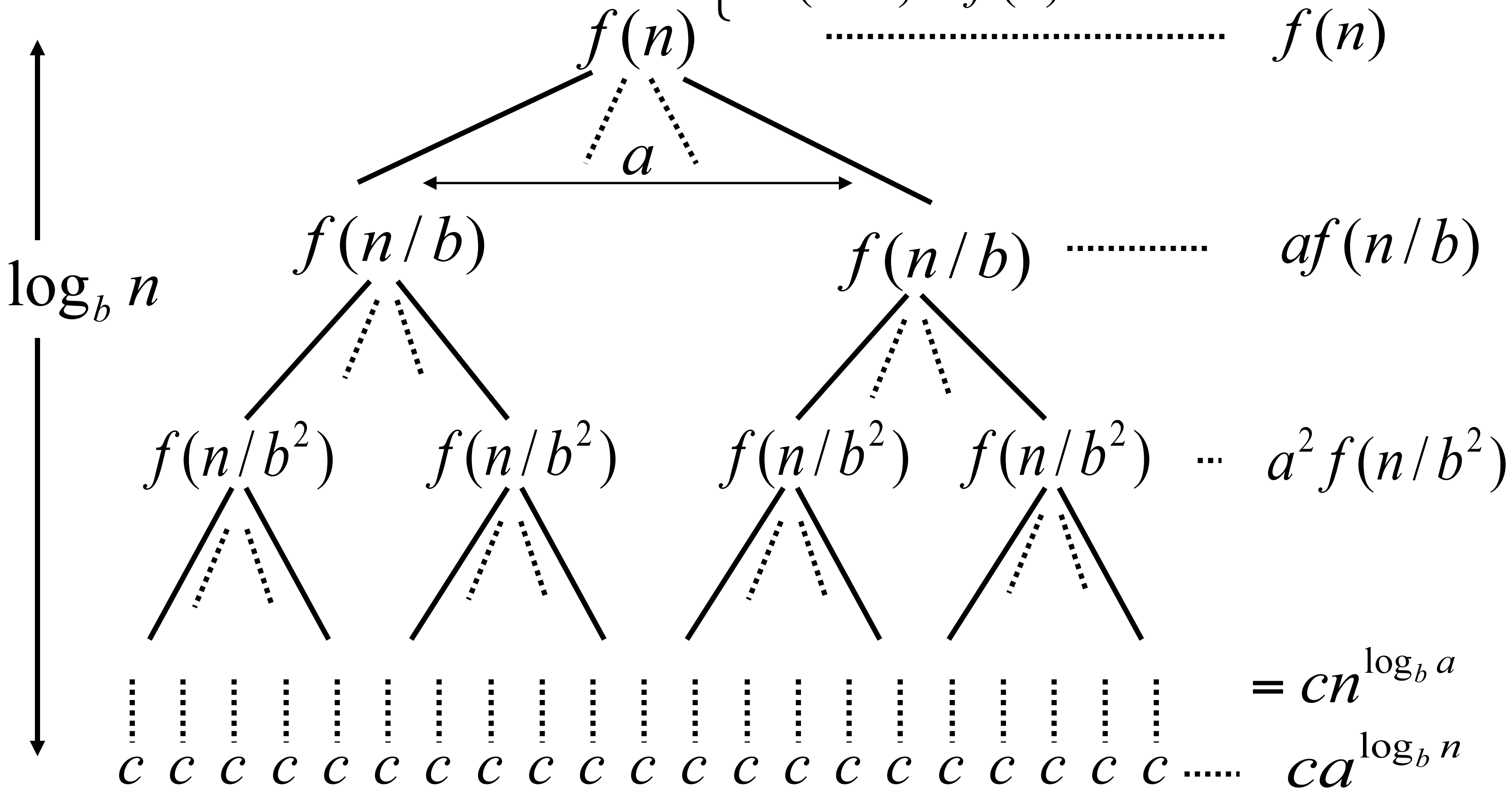
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

   per qualche costante $\varepsilon > 0$ ed esistono $k < 1$ ed N tali che $a\,f(n/b) \leq k\,f(n)$ per ogni $n \geq N$

Intuizione:

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n \le 1 \\ aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$



$$T(n) \cong f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \ldots + a^{\log_b n - 1} f\left(\frac{n}{b^{\log_b n - 1}}\right) + cn^{\log_b a}$$

Come usare il Teorema dell'esperto

$$T(n) = aT(n/b)+f(n)$$

1. Togliere eventuali arrotondamenti per eccesso o per difetto
2. Calcolare $\log_b a$
3. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}}$
4. Se il limite è finito e diverso da 0 siamo nel Caso 2 e

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(f(n) \log n)$$

5. Se il limite è 0 *potremmo* essere nel Caso 1. Per esserne sicuri occorre trovare un valore positivo ε per il quale risulti finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a-\varepsilon}}$$

nel qual caso possiamo concludere

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Se per ogni ε positivo tale limite risulta infinito il teorema dell’esperto non si può usare.

6. Se il limite è ∞ *potremmo* essere nel Caso 3. Per esserne sicuri occorre trovare un ε positivo per il quale risulti diverso da 0 il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a+\varepsilon}}$$

Se è 0 per ogni ε positivo non si può usare il teorema dell'esperto.

Altrimenti prima di concludere bisogna studiare la disequazione

$$a\,f(n/b) \leq k\,f(n)$$

Se tale disequazione è soddisfatta per qualche costante k strettamente minore di 1 e per tutti i valori di n da un certo valore N in poi possiamo concludere che

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Altrimenti il teorema dell'esperto non si può usare.

Esempi: $T^{QS}_{\min}(n) = 2T^{QS}_{\min}(\lfloor n/2 \rfloor) + c_1 n + c_0$

$$T^{MS}(n) = T^{MS}(\lfloor n/2 \rfloor) + T^{MS}(\lceil n/2 \rceil) + c_1 n + c_0$$

Trascurando gli arrotondamenti entrambe sono della forma: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

Con a=b=2 ed $f(n)$=$\Theta(n)$

siccome $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$ e quindi

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

possiamo applicare il Caso 2 e concludere

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n \log n)}$$

Esempio: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log_2 n$

In questo caso $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$

e quindi $f(n) = O(n^{\log_b a})$ Caso 1? Se $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$

Per $\varepsilon = 0.5$ $n^{\log_b a-\varepsilon} = n^{\log_2 2-0.5} = \sqrt{n}$

e $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a-\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} = 0$

Quindi $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ e si applica il Caso 1

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)}$$

Esempio: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$

In questo caso $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \infty$

e quindi $f(n) = \Omega(n^{\log_b a})$ Caso 3?

Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ e $af(n/b) \leq kf(n)$

Per $\varepsilon = 0.5$ $n^{\log_b a+\varepsilon} = n^{\log_2 2+0.5} = n\sqrt{n}$

e $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a+\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{n}} = \infty$

Quindi $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

Inoltre $af(n/b) = n^2/2 \leq 0.5 f(n)$

Si applica il Caso 3: $\boxed{T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)}$

Esempio: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log_2 n$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$ $\quad f(n) = n\log_2 n = \Omega(n^{\log_b a})$

ma $\quad n^{\log_b a+\varepsilon} = n^{1+\varepsilon} = nn^{\varepsilon}$

e quindi $f(n) = n\log_2 n = O(n^{\log_b a+\varepsilon})$

per qualunque $\varepsilon > 0$

Dunque non si può usare il metodo dell'esperto.

Neanche la seconda condizione è soddisfatta

$$af(\frac{n}{b}) = 2\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2} = n\log n - n = f(n) - n$$

ma $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-n}{f(n)} = 1$

e quindi non esiste nessun $k < 1$ tale che

$f(n) - n \leq kf(n)$ per ogni $n > N$