

Sia  $n > 0$ . Si consideri la seguente ricorrenza  $M(i, j)$  definita su tutte le coppie  $(i, j)$  con  $1 \leq i \leq j \leq n$ :

$$M(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 2 & \text{se } j = i + 1, \\ M(i + 1, j - 1) \cdot M(i + 1, j) \cdot M(i, j - 1) & \text{se } j > i + 1. \end{cases}$$

1. Si scriva una coppia di algoritmi INIT\_M( $n$ ) e REC\_M( $i, j$ ) per il calcolo memoizzato di  $M(1, n)$ .

```

INIT_M(n)
if n=1 then return 1
if n=2 then return 2
for i=1 to n-1 do
    M[i,i] = 1
    M[i,i+1] = 2
M[n,n] = 1
for i=1 to n-2 do
    for j=i+2 to n do
        M[i,j] = 0
return REC_M(1,n)

```

```

REC_M(i,j)
if M[i,j] = 0 then
    M[i,j] = REC_M(i+1,j-1) * REC_M(i+1,j) * REC_M(i,j-1)
return M[i,j]

```

2. Si calcoli il numero esatto  $T(n)$  di moltiplicazioni tra interi eseguite per il calcolo di  $M(1, n)$ .

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+2}^n 2 = 2 \sum_{i=1}^{n-2} n - i - 1 = 2 \sum_{k=1}^{n-2} k = (n-2)(n-1)$$