(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta.[1]

1. Esiste una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ che ammette derivata prima nulla in $x_0 \in]a, b[$ (cioè $f'(x_0) = 0$) ma tale che f non è continua in x_0.
2. Per ogni $x < 1$ vale la disuguaglianza $\log(1 - x) + x \leq 0$
3. Esiste un polinomio P di grado 3 tale che $P(1) = 2$, $P'(1) = 7$, $P''(1) = 2$, $P'''(0) = 6$
4. L'equazione differenziale $u'(t) = 3u(t) - t$ non ammette alcuna soluzione costante

1. FALSO. Infatti se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 allora f continua in x_0 (è un risultato visto a lezione)

2. Definiamo $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \log(1-x) + x$$

Dobbiamo studiare se è vero che $f(x) \leq 0 \ \forall x < 1$.

Calcolo i limiti

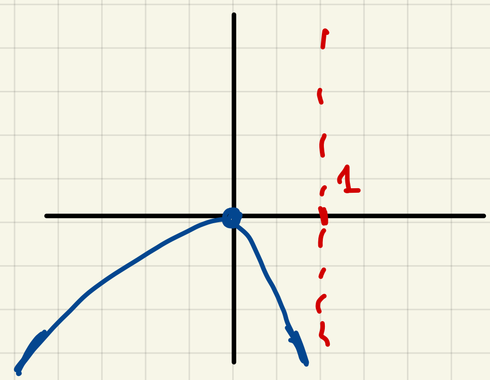
$$\lim_{x \to -\infty} \log(1-x) + x \overset{+\infty - \infty}{=} -\infty$$

infatti $$\log(1-x) + x = x\Big(\underbrace{\frac{\log(1-x)}{x}}_{\to 0} + 1\Big)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \log(1-x) + x = -\infty$$

Calcolo

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1$$



$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{1-x} = 1 \implies x = 0.$$

$$f(0) = \log(1-0) + 0 = \log(1) = 0.$$

$f(0)$ è necessariamente il massimo globale di f

Allora $\quad f(x) \leq f(0) \quad \forall\, x < 1$

ovvero $\quad f(x) \leq 0 \quad \forall\, x < 1$

VERO

3. Se noi abbiamo un polinomio P di grado n allora

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Vogliamo $\quad P(1) = 2 \quad P'(1) = 7 \quad P''(1) = 2 \quad P'''(0) = 6$

e P di grado 3

Un polinomio di grado 3 con $x_0 = 1$ si scrive

$$P(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$P(x) = 2 + 7(x-1) + (x-1)^2 + \frac{C}{6}(x-1)^3$$

È facile vedere qui che $P'''(0) = C$.

VERO

4. L' eq. diff.

$$u'(t) = 3u(t) - t \qquad (*)$$

non ammette alcuna soluzione costante.

Se $u(t) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ soddisfa $(*)$ avremmo

$$0 = 3 \cdot c - t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$t = 3c \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ciò non è possibile

VERO.

1. Studiare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$$

Determinare quindi il numero di soluzioni della equazione

$$(x^2 - 1)e^{-x} = \alpha$$

in funzione di $\alpha \in \mathbb{R}$.

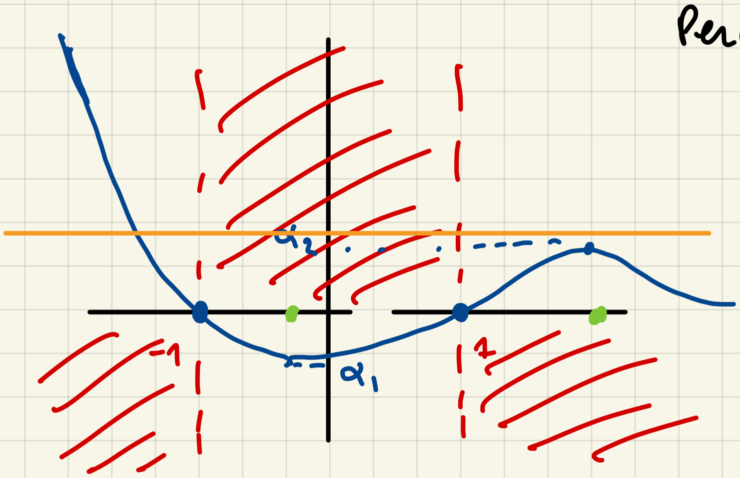
2. Determinare se la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (x^2-1)\, e^{-x}$

$\boxed{f \text{ è continua e derivabile su } \mathbb{R}}$

Noto che il segno di f è lo stesso di x^2-1 perché $e^{-x} > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.



Inoltre $f(x) = 0$

$\Updownarrow$

$x^2 - 1 = 0$

$\Updownarrow$

$x = \pm 1$.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2-1)\, e^{-x} = +\infty \qquad (+\infty \cdot +\infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x^2-1)}_{\downarrow\, +\infty}\, \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, 0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{e^x} \overset{\text{(de l'Hopital)}}{=} = 0$$

$$f(x) = (x^2-1)\, e^{-x}$$

Calcolo $f'(x) = -(x^2-1)\, e^{-x} + 2x\, e^{-x}$
$= -(x^2-2x-1)\, e^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = 0$.
$x^2 - 2x + 1 - 2 = 0$
$(x-1)^2 = 2$
$x = 1 \pm \sqrt{2}$.

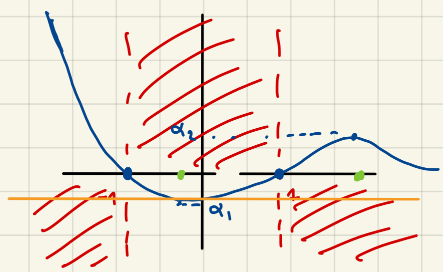
$1+\sqrt{2} \simeq 2{,}4$

$1-\sqrt{2} \simeq -0{,}4$

Sia $x_1 = 1-\sqrt{2}$ è min.
$x_2 = 1+\sqrt{2}$ è max.

Allora siano $\alpha_1 = f(x_1) = \left((1-\sqrt{2})^2 - 1\right) e^{-(1-\sqrt{2})}$
$\alpha_2 = f(x_2) = \left((1+\sqrt{2})^2 - 1\right) e^{-(1+\sqrt{2})}$.

Quindi il numero di soluzioni di $f(x) = \alpha$ è

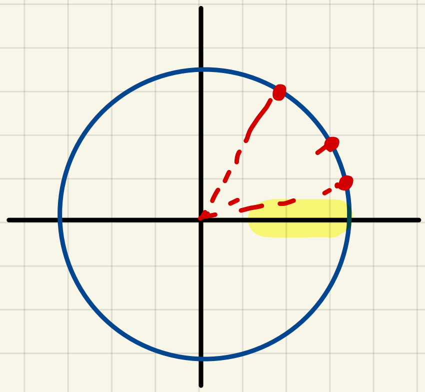


1 se $\alpha > \alpha_2$
2 se $\alpha = \alpha_2$
3 se $0 < \alpha < \alpha_2$
2 se $\alpha_1 < \alpha \leq 0$
1 se $\alpha = \alpha_1$
0 se $\alpha < \alpha_1$.

2. Determinare se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{è convergente.}$$

Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \cos\left(\frac{1}{n}\right) < 1$



quindi $\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ è ben def. e <u>negativo</u>.

$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La condizione necessaria per la convergenza è

$$\lim_{n \to +\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

e questo è verificato perché $\lim_{x \to 0} \log(\cos x) = 0$.

in quanto $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ e $\log(1) = 0$

con log funzione continua.

Cerchiamo di capire con che ordine $\log(\cos x)$ tende a zero per $x \to 0$.

$$\cos x \underset{x \to 0}{\simeq} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1+y) \underset{y \to 0}{\simeq} y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\log(\cos x) \simeq \log\Big(1 \overbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}^{Y}\Big)$$

$$\simeq -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Questo è equivalente a dire che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

Quindi in particolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{-\frac{1}{2n^2}} = 1.$$

Per il criterio del rapporto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{converge}$$

se e solo se converge $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$

Siccome la seconda serie converge allora converge anche la prima.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$$

$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ decrescente !

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty .$$

$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \qquad \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

3. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\log(1-x)}{\sin(x)(4^x-e^x)}$$

4. Dire se esiste e finito

$$\int_1^2 \frac{\log(2+x^3)}{x-1}dx$$

4.

$$\int_1^2 \frac{\log(2+x^3)}{x-1}\,dx$$

è un integrale improprio!

$$f:]1,2] \to \mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{\log(2+x^3)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(2+x^3)}{x-1} = +\infty$$

Abbiamo visto che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \iff \alpha < 1$

In particolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty.$

Lo stesso per $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx \underset{y=x-1}{=} \int_0^1 \frac{1}{y}\,dy = +\infty.$

$$\int_1^2 \frac{\log(2+x^3)}{x-1}\,dx$$

Osservo che $\log(2+x^3)$ è una funzione continua su $[1,2]$ e crescente.

Quindi $\forall x \in [1,2]$ $\log(2+x^3) \geq \log(3)$

Allora
$$\int_1^2 \frac{\log(2+x^3)}{x-1}\,dx \geq \int_1^2 \frac{\log(3)}{x-1}\,dx$$
$$= \log(3) \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = +\infty .$$

Ne segue $\boxed{\int_1^2 \frac{\log(2+x^3)}{x-1} = +\infty}$

$$\int_1^2 \frac{\log(2+x^3)}{x-1}\,dx \leq \log(10) \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + \log(1-x)}{\sin(x)\,(4^x - e^x)}$$

Uso gli sviluppi di Taylor

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

il numeratore ha ordine x^2.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$4^x = e^{\log 4^x} = e^{x\cdot \log 4}$$

$$4^x = 1 + x\cdot\log 4 + \frac{x^2\cdot(\log 4)^2}{2} + o(x^2).$$

Mi basta scrivere i termini all'ordine 2 al numeratore e fino all'ordine 1 al denom. (perché c'è il prodotto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \left(-\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\left(x + o(x)\right)\left(\cancel{1} + x\log 4 + o(x^2)\right) - \cancel{1} - x - o(x^2)\Big)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2(\log 4 - 1) + o(x^2)} = -\frac{1}{2(\log 4 - 1)}$$