In questo testo $\log x$ *indica il logaritmo in base* e

(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. La funzione $f(x) = \log(x^2)$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intervallo $[-1, 1]$.
2. Esiste un valore $M > 1$ tale che $\int_0^M \frac{x}{x+1} dx > 2021$
3. L'equazione differenziale $u'(t) = u(t)^2 + 4$ non ammette soluzioni costanti

Soluzioni

1. FALSO. La funzione è definita per $x^2 > 0$ ovvero per $x \neq 0$, quindi non soddisfa le ipotesi del teorema in quanto non è definita sull'intervallo $[-1, 1]$.
2. VERO. $\int_0^M \frac{x}{x+1} dx = \int_0^M 1 - \frac{1}{x+1} dx = [x - \log(x + 1)]_0^M = M - \log(M + 1)$ e si ha che
$$\lim_{M\to\infty} (M - \log(M + 1)) = +\infty$$
dunque esiste $M > 0$ tale che $\int_0^M \frac{x}{x+1} dx > 2021$ per la definizione di limite.
3. VERO. Se ci fosse una soluzione costante $u(t) = c$ si avrebbe $0 = c^2 + 4$ con $c \in \mathbb{R}$, che impossibile.

(B) Esercizi.

1. Studiare la funzione seguente sul dominio naturale D, tracciandone il grafico
$$f(x) = xe^{-|1-x^2|}$$
Si dovrà rispondere in particolare alle due seguenti domande.
a. La funzione f è continua in ogni punto di D? derivabile in ogni punto di D?
b. La funzione f è iniettiva?

Soluzione: La funzione è definita sul dominio $D = \mathbb{R}$. E' continua su D in quanto composizione di funzioni continue. La funzione $y \mapsto |y|$ non è derivabile in $x = 0$ allora la funzione f potrebbe non essere derivabile laddove l'argomento del valore assoluto vale 0, ovvero per $x = \pm 1$. In quanto composizione di funzioni derivabili, f è sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. La funzione f è dispari in quanto
$$f(-x) = (-x)e^{-|1-(-x)^2|} = -xe^{-|1-x^2|} = -f(x)$$
Allora possiamo limitarci allo studio della funzione per $x \geq 0$ e dedurre il comportamento su $\mathbb{R}$. Dato che $1 - x^2 > 0$ se e solo se $-1 < x < 1$, si può scrivere più esplicitamente
$$f(x) = \begin{cases} xe^{x^2-1} & x \in [0, 1], \\ xe^{1-x^2}, & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

[1] giustificare tramite un argomento o dimostrazione, o negare tramite un controesempio

Quindi si trova facilmente che

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

il secondo limite risolvendolo ad esempio scrivendo $xe^{1-x^2} = \frac{x}{e^{x^2-1}}$ e usando De L'Hôpital. Calcoliamo la derivata (notare che la calcoliamo all'interno degli intervalli quindi per $x \neq 1$)

$$f'(x) = \begin{cases} (1+2x^2)e^{x^2-1} & x \in]0,1[, \\ (1-2x^2)e^{1-x^2}, & x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 1-} f'(x) = 3$$

Siccome f è derivabile in $D \setminus \{1\}$ e i limiti delle derivate destro e sinistro in $x = 1$ sono diversi, allora f non è derivabile in $x = 1$. D'altra parte $f'(x) > 0$ per $x \in]0,1]$ mentre $f'(x) < 0$ per $x \in]1,+\infty[$, quindi $x = 1$ è un punto di massimo dove vale $f(1) = 1$. Similmente per disparitdi f si ha $f(-1) = -1$ il minimo. Questo è quindi il grafico qualitativo della funzione.

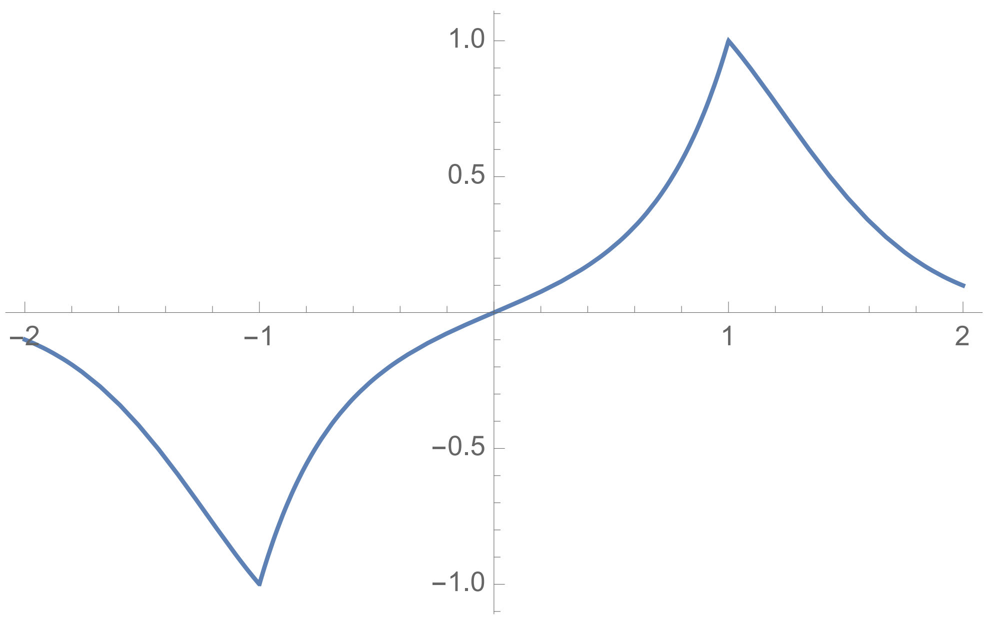

Figure 1: grafico di $f(x)$

2. Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$$

Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$

Suggerimento: usare uno sviluppo di Taylor di $\sin x$ *ad un ordine opportuno.*

Soluzione: Per calcolare il limite usiamo uno sviluppo di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

dove $o(x^3)$ è un resto di ordine inferiore a 3 ovvero $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$.
Riscriviamo allora

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$$

e sostituiamo lo sviluppo di Taylor

$$\frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 - \frac{x^5}{6} + x^2 o(x^3)}$$

Se ne ricava

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 - \frac{x^5}{6} + x^2 o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = -\frac{1}{6}$$

dove nell'ultimo uguale abbiamo diviso num e den per x^3.

3. Dati due numeri reali positivi $a, b > 0$ che soddisfano la relazione $a + b = 5$.
3.a. Calcolare la somma $S_{a,b}$ della serie

$$S_{a,b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{5^n}$$

3.b. Esistono valori di a, b per cui la somma $S_{a,b}$ è minima (risp. massima) al variare dei parametri a, b? In caso affermativo, determinarli.

Soluzione: Si ha che S è una somma di due serie geometriche

$$S_{a,b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{5}\right)^n$$

Usiamo che per $0 < q < 1$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

Dunque

$$S_{a,b} = \frac{1}{1 - \frac{a}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{b}{5}} = \frac{5}{5-a} + \frac{5}{5-b} = \frac{25 - 5a + 25 - 5b}{(5-a)(5-b)} = \frac{25}{(5-a)(5-b)}$$

dove nella ultima uguaglianza abbiamo usato $a + b = 5$. Essendo $a + b = 5$ possiamo anche scrivere $a = 5 - b$ e dire che la somma dipende solo da a

$$S_{a,b} = \frac{25}{a(5-a)}$$

con a che varia nell'intervallo $]0,5[$. E' facile vedere che per $a \to 0+$ si ha $S_a \to +\infty$ quindi non esiste un valore massimo, mentre il valore minimo è raggiunto per $a = b = 5/2$, quando $S_{a,b} = 4$. Per mostrare che il minimo si trova per $a = 5/2$ si potrebbe studiare la funzione

$$g(a) = \frac{25}{a(5-a)}, \qquad a \in [0,5]$$