$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2x}-1}{x^{\sqrt{\alpha}}} & x > 0 \\ \beta + \gamma x + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

con $\underline{\underline{\alpha \geq 0}}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

Per quali α, β, γ la funzione è continua in $x = 0$?

Dobbiamo verificare che

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$$

$$f(0) = \beta + \gamma \cdot 0 + 0^2 = \beta \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

distinguiamo tra $\lim_{x \to 0^+}$ e $\lim_{x \to 0^-}$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x}-1}{x^{\sqrt{\alpha}}} = \star$$

osserviamo che $\sqrt{\alpha} \geq 0 \quad \forall \alpha \geq 0$,

quindi $\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{\alpha}} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$

$$\star = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{e^{\overbrace{-2x}^{\to 0}}-1}{-2x}}_{\to 1} \cdot \frac{-2x}{x^{\sqrt{\alpha}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2x}-1}{-2x}(-2)\,x^{1-\sqrt{\alpha}} =$$

$$= \begin{cases} 1\cdot(-2)\cdot 0 & \text{se } 1-\sqrt{\alpha} > 0 \\ 1\cdot(-2)\,1 & \text{se } 1-\sqrt{\alpha} = 0 \\ -\infty & \text{se } 1-\sqrt{\alpha} < 0 \end{cases}$$

(poiché $x^{1-\sqrt{\alpha}} \to +\infty$)

Allora

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} \boxed{0} & 0 \le \alpha < 1 \\ -2 & \alpha = 1 \\ -\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

per ipotesi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \beta \quad \text{(immediato)}$$

Allora f è continua nei casi

$0 \le \alpha < 1 \;\wedge\; \beta = \boxed{0} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$

oppure $\alpha = 1 \;\wedge\; \beta = -2 \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\alpha}{\arcsin x}} + 2 & -1 \le x < 0 \\ \boxed{2} & x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x + x^{\beta})}{x} & x > 0 \end{cases}$$

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ la funzione è continua?

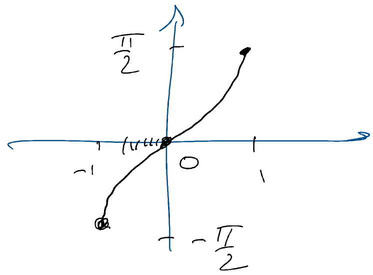
$$\lim_{x\to 0} f(x) \stackrel{?}{=} f(0) = \boxed{2}$$

$x \to 0$

$= \boxed{2}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{\alpha}{\arcsen x}} + 2$$

osserviamo che



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha}{\arcsen x} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \quad \left(\lim_{x \to 0^-} 0 = 0\right) \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Allora

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{\alpha}{\arcsen x}} + 2 = \begin{cases} \boxed{2 \quad \alpha > 0} \\ e^0 + 2 = 3 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sen(x + x^\beta)}{x} = \star$$

osserviamo che $x^\beta \to 0$ poiché $\beta > 0$ per ipotesi, quindi

$$\star = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sen(x + x^\beta)}{x + x^\beta} \frac{x + x^\beta}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\sen(x + x^\beta)}{x + x^\beta}}_{\to 1 \text{ limite notevole}} \cdot \left(1 + x^{\beta - 1}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 \cdot (1 + 0) = 1 & \text{per } \beta > 1 \\ 1 \cdot (1 + 1) = \boxed{2} & \text{per } \boxed{\beta = 1} \\ +\infty & \text{per } 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

Allora f è continua in $x=0 \iff$
$\alpha>0 \wedge \beta=1$.

$$f(x)=\begin{cases} \log(x+\beta^2) & x>0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{1-\cos(\alpha x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} & x<0 \end{cases}$$

$\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$. Per quali α,β la funzione è continua in $x=0$?

[R: $\beta=\pm\sqrt{e} \wedge \alpha \pm\sqrt{2}$]

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\alpha^{\frac{1}{x}}\right)+\cos\left(\alpha^{\frac{1}{x}}\right) & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \cos(x^\beta)+\operatorname{sen}(x^\beta) & x>0 \end{cases}$$

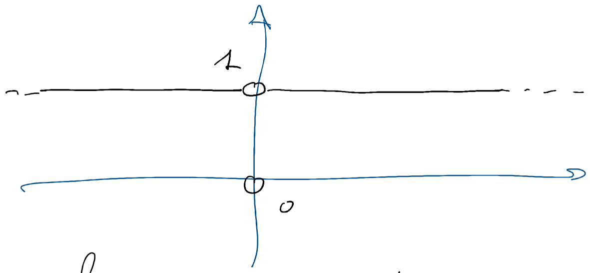
Con $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. Per quali α,β f è continua in $x=0$?

[R: $\alpha>1 \wedge \beta>0$]

Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

- $f(x)=\dfrac{x}{x}$ Dominio: $x\neq 0$

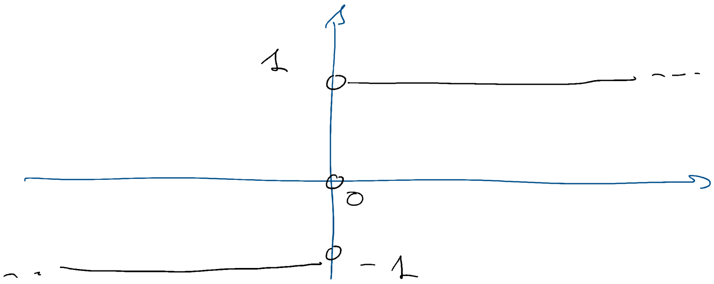
Per $x\neq 0$ $f(x)=1$



Questa f si può estendere per continuità in $x=0$ ponendo $f(0)=1$.

- $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\left(= \frac{x}{|x|} \right)$ Dominio $x \neq 0$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



Questa f non può essere estesa in $x=0$ con continuità poiché il $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ NON esiste.

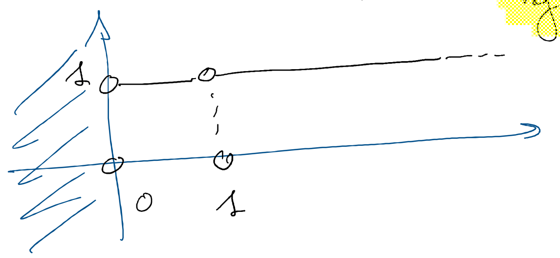
- $f(x) = \log_x (x)$

Dominio: $\begin{cases} x>0 \\ x>0 \ \wedge \ x \neq 1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \ x>0 \ \wedge \ x \neq 1$

In questo insieme $\log_x x = \frac{\log x}{\log x} = 1$

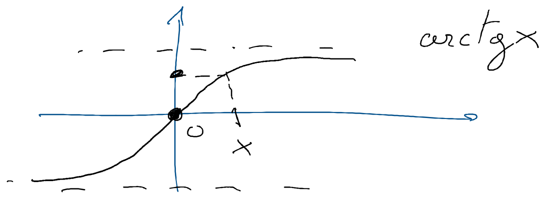
In questo insieme $\log_x x = \frac{\log x}{\log x} = 1$



entrambe le discontinuità sono eliminabili.

- $f(x) = \log_{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x) \; \ldots$
- $f(x) = \log_{(\log x)}(\log x) \; \ldots$

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(n x) \qquad x \in \mathbb{R}$$



Per $x = 0$ si ha $f(0) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(n \cdot 0)$

$= \lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(0) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

Per $x > 0$ si osserva che $n x > 0$

e $\lim_{n \to +\infty} n x = +\infty \quad \forall x > 0$.

Quindi $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(n x) = \frac{\pi}{2}$

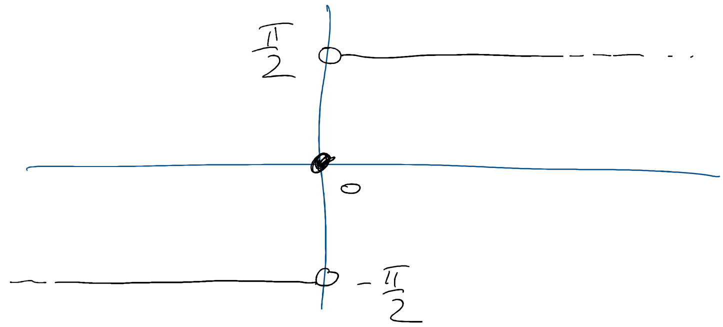
Similmente per $x < 0$ si ha $n x < 0$

e $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg}(\underbrace{n x}_{\to -\infty}) = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$

e $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(\underbrace{nx}_{\to -\infty}) = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x<0$

Quindi la funzione

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$$

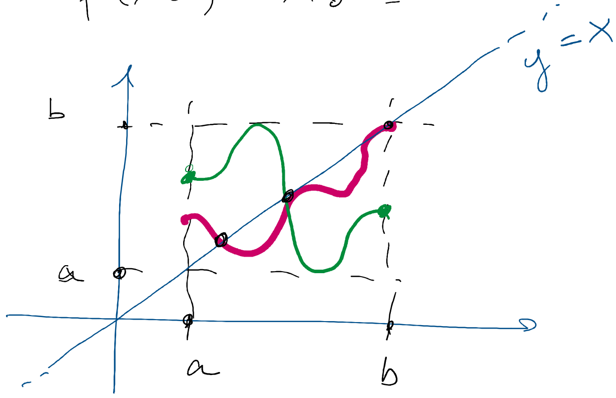


Oss: $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(coincide anche con $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ con $x\neq 0$, vedere con derivate ...)

- $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\cos x)^{2n} \qquad x\in\mathbb{R}$
- $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^n} \qquad x\geq 0$
- $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\lim\limits_{k\to+\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k}\right] = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

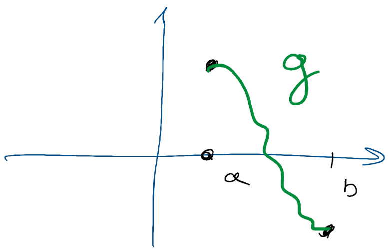
Sia $f: [a,b] \to [a,b]$ funzione continua. Verificare che esiste almeno un punto UNITO, cioè $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = x_0$.



Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$ essa è continua (poiché composizione di funz. continue) in $[a,b]$, inoltre

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ e

$g(b) = f(b) - b \leq 0$



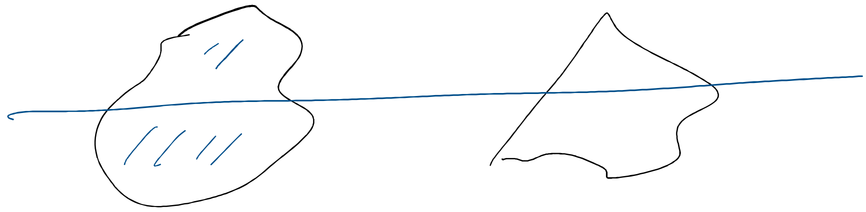
Se $g(a) = 0 \lor g(b) = 0$ il punto unito è a oppure b

$(g(a) = 0 \iff f(a) - a = 0 \iff f(a) = a$ e analog. per b)

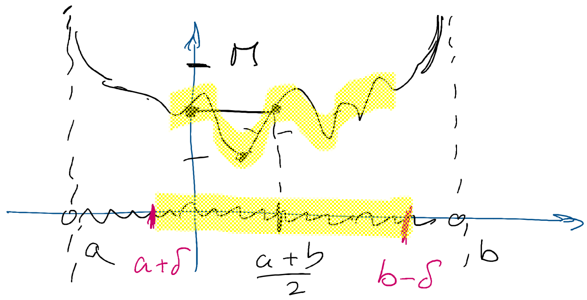
Altrimenti se $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$ per il teorema degli zeri esiste almeno un $x_0 \in]a,b[$ tale che

$g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) - x_0 = 0$

da cui $f(x_0) = x_0$.



- Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ non necessariamente chiuso né limitato. Sia f funzione continua in I. Se f tende a $+\infty$ per x tendente agli estremi dell'intervallo I allora esiste il minimo di f su I.



Sia $I =]a, b[$ $a, b \in \mathbb{R}$ e

sia $M \in \mathbb{R}$: $M > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Essendo $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty = \lim_{x \to b^-} f(x)$

esiste $\delta > 0$:

$x \in]a, a+\delta[\cup]b-\delta, b[\Rightarrow f(x) > M$

Per il Teorema di Weierstrass esiste

$x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$ tale che $f(x_0) \le f(x)$

per ogni $x \in [a+\delta, b-\delta]$.

In particolare è $f(x_0) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

quindi si ha anche

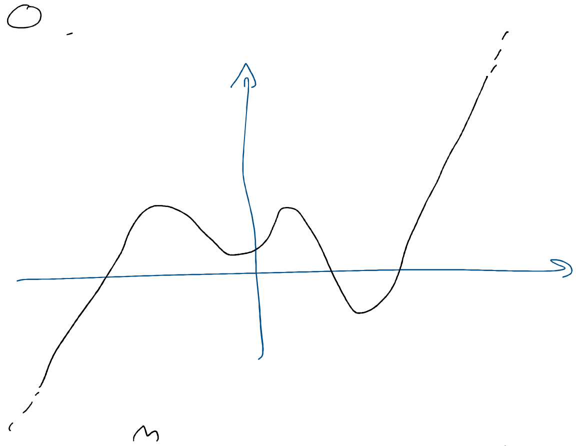
$$f(x_0) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right) < M < f(x)$$

per ogni $x \in]a, a+\delta[\cup]b-\delta, b[$

Allora $f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in I$.

- Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomio a coefficienti reali, avente grado n dispari ($a_n \neq 0$).

Verificare che esso ammette almeno una radice reale, cioè che $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$: $P(x_0) = 0$.



- Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomio a coeff. reali di grado n pari.

Se a_0 (termine noto) è minore di zero e $a_n > 0$ allora $P(x)$ ammette almeno una radice positiva e una negativa.