Punteggi indicativi: (A) 3+3+3 (B) 8+7+6. Totale 30 punti. Voto massimo 27.

(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. L'insieme $A = \{\frac{3n^2+1}{2n^2}, n \in \mathbb{N}\}$ ammette estremo inferiore in $\mathbb{R}$ e vale $\inf A = \frac{3}{2}$.
2. Vale che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + 2^n} = 1$
3. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile e strettamente crescente allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1. VERO. Infatti $a_n = \frac{3n^2+1}{2n^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n^2}$ dunque A è definito da una successione che è decrescente (si noti $a_n \geq \frac{3}{2}$). Allora $\inf A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2} = \frac{3}{2}$.
2. FALSO. Infatti $n + 3^n \geq 3^n$ quindi $\sqrt[n]{n + 3^n} \geq 3$ e se esiste il limite $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + 3^n}$ per la il teorema della permanenza del segno deve essere $L \geq 3$.
3. FALSO. Infatti può succedere che una funzione sia strettamente crescente ma che la derivata si annulli in qualche punto, come ad esempio per $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente ma $f'(x) = 3x^2$ dunque $f'(0) = 0$.

(B) Esercizi.

1. Studiando la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{1-x^2}$, determinare, se esistono, tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione seguente ha esattamente una soluzione

$$xe^{1-x^2} = \alpha.$$

sol. Si calcolano facilmente i limiti all'infinito

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x^2} = 0$$

ad esempio scrivendo $xe^{1-x^2} = \frac{x}{e^{x^2-1}}$ e applicando de l'Hopital una volta. La derivata

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2} = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$$

si annulla in $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed è positiva nell'intervallo interno alle due radici, mentre negativa all'esterno. Il minimo e il massimo della funzione sono dunque rispettivamente

$$\alpha_1 = f(x_1) = -\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha_2 = f(x_2) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}}$$

Dopo aver fatto un disegno si deduce facilmente che $xe^{1-x^2} = \alpha$ ha una sola soluzione per i soli tre valori $\alpha = 0, \alpha_1, \alpha_2$ di cui sopra. (Si osserva che studiando la derivata seconda si identificherebbero anche più precisamente i punti di flesso)

[1] giustificare tramite un argomento, o dimostrazione, o negare tramite un controesempio

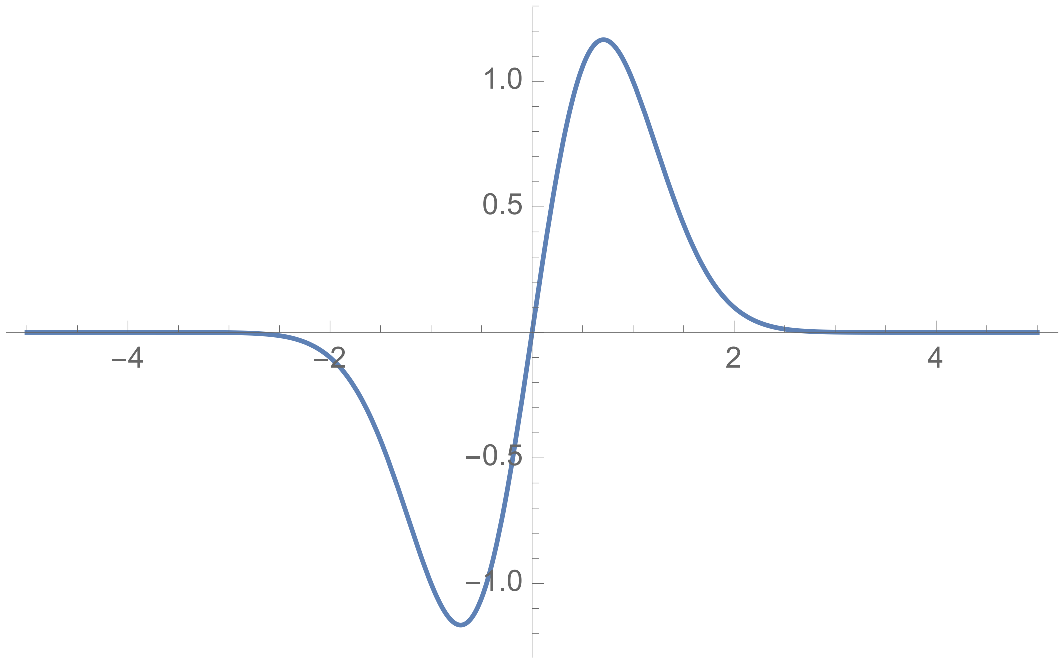

Figure 1: grafico di $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$

2. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

e poi studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 + \sin^2 n}$$

sol. il primo limite si calcola facilmente applicando de l'Hopital una volta.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} =^{(H)} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

La serie si può studiare in questo modo: osserviamo in primo luogo che per ogni n

$$\frac{\log n}{n^2 + n} \leq \frac{\log n}{n^2}$$

La seconda serie è convergente per il criterio del confronto asintotico in quanto possiamo scrivere

$$\frac{\log n}{n^2} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \frac{1}{n^{3/2}}$$

e il primo fattore tende a zero per quanto dimostrato sopra mentre la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

converge in quanto serie armonica generalizzata con esponente $\alpha > 1$.

3. Calcolare esplicitamente il seguente integrale improprio

$$I = \int_0^4 \frac{x+8}{(x+4)\sqrt{x}}\,dx$$

[suggerimento: usare una opportuna sostituzione]

sol. Ponendo $y = \sqrt{x}$ si ha $x = y^2$ e $dx = 2ydy$. Inoltre (importante!) se x varia tra 0 e 4 allora y varia tra 0 e 2. Dunque

$$\int_0^4 \frac{x+8}{(x+4)\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 \frac{y^2+8}{(y^2+4)y}\,2ydy = 2\int_0^2 \frac{y^2+8}{y^2+4}\,dy$$

$$= 2\int_0^2 1 + \frac{4}{y^2+4}\,dy = 4 + 4\int_0^2 \frac{1/2}{(y/2)^2+1}\,dy$$

$$= 4 + 4[\arctan(y/2)]_{y=0}^{y=2} = 4 + 4\arctan(1) = 4 + \pi$$