(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. Ogni sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$ ammette estremo inferiore appartenente a $\mathbb{R}$
2. Se x e y appartengono a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora $x + y$ non appartiene a $\mathbb{Q}$.
3. Se $A = [a, b]$ è un intervallo chiuso, ogni punto di accumulazione di A appartiene ad A
4. Dati x, y in $\mathbb{R}$ vale sempre la disuguaglianza $x \leq |x - y| + |y|$
5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 + 2|x|$ è invertibile

(B) Esercizi.

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$
2. Sia $a > 1$. Siano
$$f(x) = \sqrt{\log_a x}, \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$$
Determinare il dominio di definizione D di $f \circ g$ e scriverne l'espressione analitica. Quante soluzioni ha l'equazione $f(g(x)) = 1$ per $x \in D$?
3. Sia $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Determinare il più grande dominio D tale che $f|_D$ sia invertibile sulla sua immagine e scrivere l'inversa di questa restrizione.
4. Determinare per quali $\alpha > 0$ le serie seguente sono convergenti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$$
5. Mostrare che l'equazione in $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} = 1$$
ammette almeno due soluzioni reali

[1] giustificare tramite un argomento o dimostrazione o negare tramite un controesempio

(A) Soluzioni:

1. Falso, basta prendere $A =]-\infty, 0[$, si ha $\inf A = -\infty$ non appartenente a $\mathbb{R}$

2. Falso, basta prendere ad esempio $x = \sqrt{2} > 0$ e $y = 2 - \sqrt{2} > 0$ non appartengono a $\mathbb{Q}$ ma la loro somma $x + y = 2$ appartiene a $\mathbb{Q}$.

3. Vero. Basta vedere che se $x_0 \notin A$ allora x_0 non è di accumulazione. Se $x_0 \notin A$ allora $x < a$ oppure $x > b$. Mostriamolo che ogni $x_0 < a$ non è di accumulazione, poi il caso $x_0 > b$ è analogo.
   Se $x_0 < a$ allora $I(x_0, \delta) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ non interseca A per nessun valore di $\delta < |x_0 - a|$. Infatti $x_0 + \delta < x_0 + |x_0 - a| \leq x_0 + (a - x_0) = a$. Dunque x_0 non è di accumulazione.

4. Vero. Infatti $x = (x - y) + y \leq |x - y| + |y|$ dove nella disuguaglianza si usa $z \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{R}$

5. Falso. Infatti si può vedere ad esempio che $f(x) = 0$ ha esattamente due soluzioni, dunque f non è iniettiva. Cerchiamo i valori di x tali che $x^3 + 2|x| = 0$. Sicuramente $x = 0$ è una soluzione. Basta trovarne un'altra diversa da 0. Se $x > 0$ la equazione diventa $x^3 + 2x = 0$ che non ha soluzioni positive. Se $x < 0$ invece l'equazione diventa $x^3 - 2x = 0$ che si riscrive $x(x^2 - 2) = 0$ che ha esattamente una soluzione negativa $x = -\sqrt{2}$. Dunque $f(x) = 0$ ha due soluzioni 0 e $-\sqrt{2}$ ed f non è iniettiva.

(B) Soluzioni:

1. Vogliamo dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \qquad (P_n)$$

L'identit (P_1) è vera in quanto

$$1 \leq 2 - 1$$

Supponiamo vera la proprietà (P_n) e vogliamo provare (P_{n+1}) cio

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1},$$

Ma abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

e usando (P_n) si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ci resta da verificare che

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$$

ma questa ultima disuguaglianza equivale a

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

che e' facilmente verificata in quanto si riscrive come

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

Questo dimostra tra le altre cose che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

.

2. Si ha

$$f(g(x)) = \sqrt{\log_2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}$$

definita se

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 1, \qquad x \neq 0$$

La prima diseguaglianza si riscrive come

$$\frac{x^2-1-x}{x} \geq 0$$

che ha soluzioni

$$D = \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

L'equazione $f(g(x)) = 1$ si scrive

$$\sqrt{\log_2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)} = 1$$

ovvero

$$\frac{x^2-1}{x} = 2$$

che ha due soluzioni in D

$$x_1 = 1+\sqrt{2}, \qquad x_2 = 1-\sqrt{2}$$

3. Siccome arcsin è definita su $[-1,1]$ (a valori in $[-\pi/2, \pi/2]$), il dominio di definizione di

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

è dato dal richiedere

$$-1 \le \frac{x-1}{x+1} \le 1$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} \ge -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} \ge 0 \\ \dfrac{2x}{x+1} \ge 0 \end{cases},$$

Quindi bisogna che sia $x+1>0$ e $x \ge 0$. In sintesi $D = \{x \ge 0\} = [0,+\infty[$. Notare che

$$f([0,+\infty[) = [-\pi/2, \pi/2[$$

Per $x \ge 0$ abbiamo

$$y = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = \frac{x-1}{x+1}$$

che significa

$$x = \frac{-1-\sin(y)}{-1+\sin(y)}, \qquad y \in [-\pi/2, \pi/2[$$

4. Il termine generale della prima serie soddisfa $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \sin(1/n^\alpha) = 1$ quindi per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge se e solo se converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cioè $\alpha > 1$.

La seconda serie non converge in quanto non soddisfa la condizione necessaria. Il termine generale infatti non tende a zero in quanto se $\alpha > 0$ si ha $n^{-\alpha} \to 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$$

Il termine generale della ultima serie soddisfa invece

$$\lim_{n\to\infty} n^{2\alpha}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{2}$$

in quanto si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2}(1-\cos(x)) = \frac{1}{2}$$

dunque per il criterio del confronto converge se e solo se converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ cioè $2\alpha > 1$ ovvero $\alpha > 1/2$.

5. Definiamo la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} - 1$$

che è definita per $1-x>0$, ovvero $x<1$. Notiamo che $f(x_0) = 0$ significa esattamente che x_0 è una soluzione della equazione. Si nota subito che $f(0) = 0$ dunque $x_0 = 0$ è una prima soluzione della equazione. Vogliamo vedere che ne esiste *almeno* un'altra.

Per fare questo è sufficiente usare il teorema dei valori intermedi su un opportuno intervallo. Notiamo che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

dunque per il teorema della permanenza del segno esiste un $x_1 < 1$ (arbitrariamente vicino ad 1, che quindi possiamo scegliere maggiore di $1/2$), tale che $f(x_1) > 0$. Inoltre si ha

$$f(1/2) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{1/2}} - 1 = \sqrt{\frac{2}{e}} - 1 < 0$$

dunque per il teorema dei valori intermedi esiste uno zero della funzione nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1[$.