Punteggi indicativi: (A) 3+3+3 (B) 8+6+7. Totale 30 punti. Voto massimo senza orale 27.

(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile allora f ammette sempre un punto di massimo in $[a, b]$.
2. Lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \log(1 - x^2)$ in $x_0 = 0$ è della forma $-x^2 + \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.
3. L'equazione $\cos(x) = x$ ammette almeno una soluzione in $\mathbb{R}$.

1. VERO. Infatti se f è derivabile allora è anche continua, e per il teorema di Weierstrass ogni funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo su tale intervallo.
2. FALSO. Si ha per $t \to 0$ lo sviluppo noto $\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ dunque sostituendo $t = -y$ si ottiene

   $$\log(1 - y) = (-y) - \frac{(-y)^2}{2} + o(y^2) = -y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

   da cui ancora ponendo $y = x^2$ si ha

   $$\log(1 - x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

3. VERO. Infatti ponendo $f(x) = \cos(x) - x$ si ha che f è continua sull'intervallo $[0, \pi]$. Inoltre $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$ e invece $f(\pi) = -1 - \pi < 0$ dunque per il teorema dei valori intermedi c'è almeno un valore x_0 tale che $f(x_0) = 0$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

   Per capire come applicare questo teorema si poteva prima osservare i grafici che si intersecano come in Figura 1.

(B) Esercizi.

1. Limitandosi allo studio della derivata prima, studiare la funzione seguente sul suo dominio

   $$f(x) = (1 + x)\mathrm{e}^{1/x}$$

   e tracciare l'andamento qualitativo del grafico indicando eventuali asintoti.

[1] giustificare tramite un argomento o dimostrazione, o negare tramite un controesempio

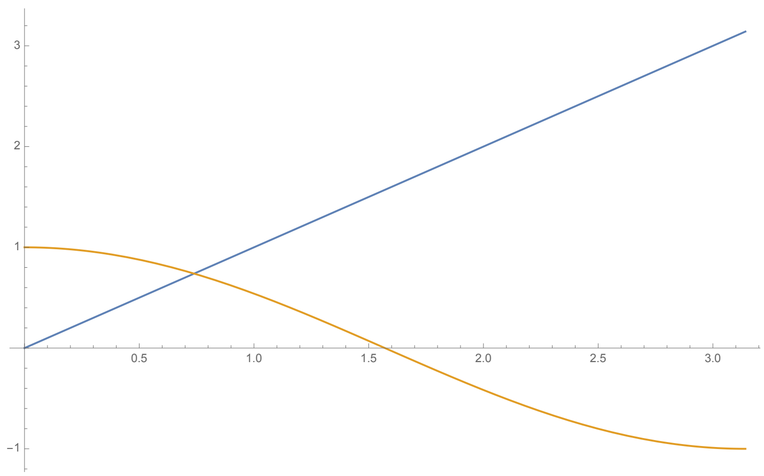

Figure 1: grafico di $\cos(x)$ ed x su $[0, \pi]$

sol. Si ha che la funzione $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{1/x}$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si trovano i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} (1+x)\mathrm{e}^{1/x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} (1+x)\mathrm{e}^{1/x} = -\infty$$

come si può vedere facilmente dato che $\lim_{|x|\to+\infty} \mathrm{e}^{1/x} = 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0+} (1+x)\mathrm{e}^{1/x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0-} (1+x)\mathrm{e}^{1/x} = 0$$

come si può vedere facilmente dato che $\lim_{x\to 0}(1+x) = 1$. Si ha anche

$$f'(x) = \mathrm{e}^{1/x} + (1+x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{1/x} = \frac{x^2-x-1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}$$

Il segno della derivata è lo stesso del polinomio $x^2 - x - 1$ che si annulla nei due punti

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} > 0$$

ed é positivo all'esterno delle due soluzioni. Dunque x_1 massimo locale mentre x_2 minimo locale. Si noti che tuttavia in $x = 0$ la funzione non è definita.

Vi è anche asintoto obliquo $y = x + 2$. Infatti, scrivendo $|x| \to \infty$ per indicare che il limite vale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1+x}{x}\mathrm{e}^{1/x} = 1$$

ed inoltre

$$\lim_{|x|\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{|x|\to\infty} x(\mathrm{e}^{1/x} - 1) + \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^y - 1}{y} + \mathrm{e}^y = 2$$

dove nell'ultimo limite abbiamo spezzato nella somma dei limiti e posto $y = 1/x$. Quindi il grafico è come in Figura 1.

Si veda anche la Figura 2 per uno zoom in un intorno sinistro dell'origine. Lo studio della derivata seconda (più difficile in quanto necessitava uno studio di un polinomio di grado 3, e non richiesto) avrebbe evidenziato un flesso tra x_1 e 0).

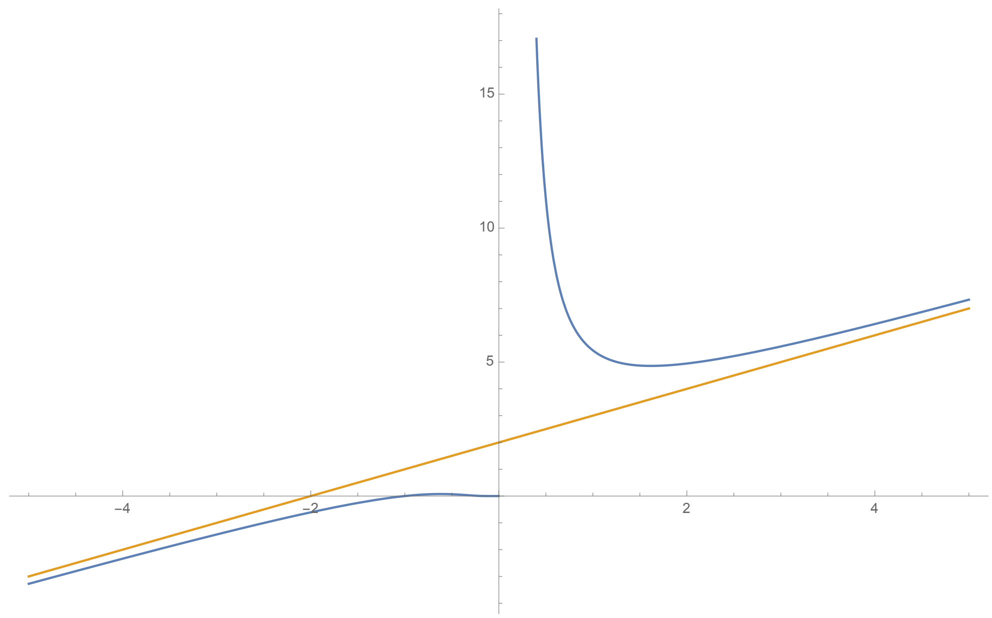

Figure 2: grafico di $f(x)$ e dell'asintoto obliquo

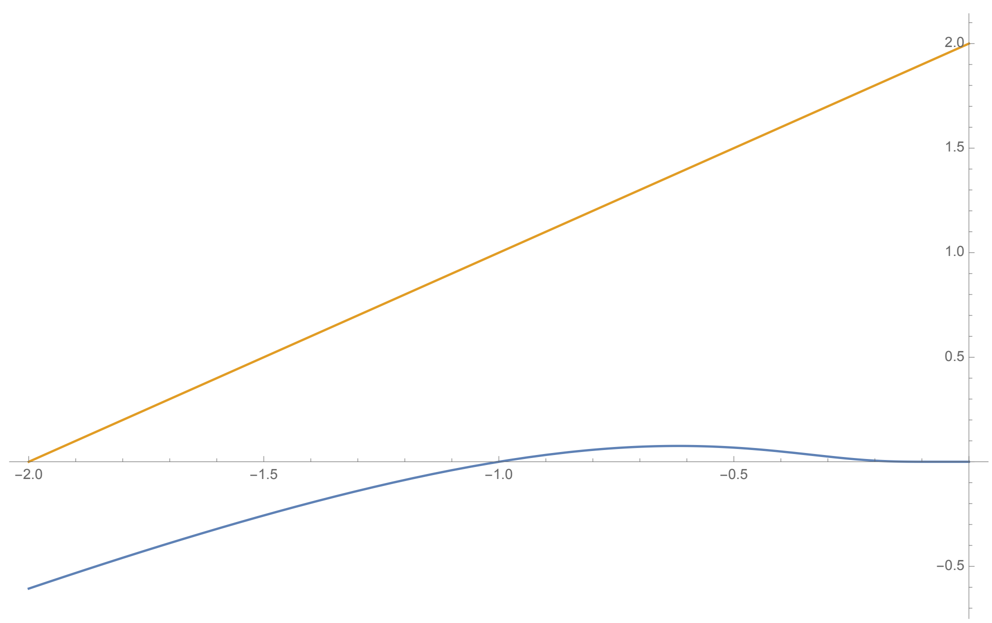

Figure 3: zoom in un intorno sinistro dell'origine

2. Dimostrare che per ogni $x \in [0, \pi]$ vale la disuguaglianza

$$0 \leq \sin x \leq x$$

e poi studiare la convergenza della successione definita per ricorrenza

$$a_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad a_{n+1} = \sin(a_n).$$

sol. Vale evidentemente $0 \leq \sin x$ per ogni $x \in [0, \pi]$ per la definizione della funzione seno. Per dimostrare l'altra disuguaglianza poniamo $f(x) = x - \sin(x)$ e vediamo che f è sempre positiva. Si ha $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ dunque la funzione f è crescente. Ne segue $f(x) \geq f(0) = 0$ per ogni $x \geq 0$.

Ora sia a_n la successione definita per ricorrenza come nel testo. Dalla disuguaglianza mostrata in precedenza segue che $0 \leq a_{n+1} = \sin(a_n) \leq a_n$ per ogni n, in altre parole la successione a_n è positiva e decrescente. Per il teorema sulla monononia esiste dunque finito il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

e vale inoltre $L \geq 0$. Deve inoltre valere per continuità che $L = \sin(L)$ e dunque necessariamente $L = 0$.

3. Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 + x}$$

e poi determinare l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2u^2 + u \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

sol. La primitiva si trova facilmente decomponendo

$$\frac{1}{2x^2 + x} = \frac{1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{2x+1}$$

dunque

$$\int \frac{1}{2x^2+x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{2x+1} dx = \log|x| - \log|2x+1| = \log\left|\frac{x}{2x+1}\right|$$

Allora possiamo risolvere l'equazione a variabili separabili $u' = 2u^2 + u$ scrivendo

$$\int \frac{1}{2u^2+u} du = \int 1 dt$$

ovvero

$$\log\left|\frac{u(t)}{2u(t)+1}\right| = t + c$$

Ponendo $u(0) = -1$ si trova il valore di c

$$\log\left|\frac{-1}{-2+1}\right| = c$$

ovvero $c = \log|1| = 0$. Se ne ricava l'identità

$$\frac{u(t)}{2u(t)+1} = e^t$$

da cui $u = e^t(2u+1)$ ricavando rispetto a u

$$u(t) = \frac{e^t}{1 - 2e^t}$$