In questo testo $\log x$ *indica il logaritmo in base* e

(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua e soddisfa $f(0) = 2$ e $f(1) = 0$, allora esiste un $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = \frac{\pi}{2}$.

   VERO. Per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori compresi tra $f(0) = 2$ e $f(1) = 0$, ed essendo $0 \leq \pi/2 \leq 2$ esiste un $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = \pi/2$.

2. Esiste un numero intero $N > 0$ tale che $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{3^k} > 2$

   FALSO. Infatti la successione s_N definita dalla somma parziale $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{3^k}$ è monotona *crescente* e il suo limite è la somma della serie geometrica

   $$s := \lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

   dunque essendo crescente per ogni $N > 0$ si ha $s_N \leq s = \frac{3}{2}$ e quindi non può essere $s_N > 2$.

3. La funzione $f(x) = \dfrac{\log(x)}{|x^2-1|}$, definita per $x > 0, x \neq 1$, si può prolungare a una funzione continua su tutto l'intervallo $]0, +\infty[$.

   FALSO. Infatti calcolando i limiti destro e sinistro in $x = 1$ si vede che sono diversi (ad esempio qui usando de l'Hopital essendo il limite di tipo $0/0$)

   $$\lim_{x\to1+} \frac{\log(x)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to1+} \frac{\log(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to1+} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}$$
   $$\lim_{x\to1-} \frac{\log(x)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to1-} \frac{\log(x)}{1-x^2} = \lim_{x\to1+} \frac{1/x}{-2x} = -\frac{1}{2}$$

(B) Esercizi.

1. Calcolare i limiti seguenti

   $$\lim_{x\to1+} \frac{e^{-1/x}-1}{\log(\frac{x-1}{x+1})}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x}-1}{\log(\frac{x-1}{x+1})}$$

   Soluzione. Il primo limite si trova subito studiando limite di numeratore e denominatore in quanto si ha $\lim_{x\to1+} e^{-1/x} - 1 = e^{-1} - 1$ (che è negativo) mentre $\lim_{x\to1+} \log(\frac{x-1}{x+1}) = -\infty$ dunque

   $$\lim_{x\to1+} \frac{e^{-1/x}-1}{\log(\frac{x-1}{x+1})} = 0$$

[1] giustificare tramite un argomento o dimostrazione, o negare tramite un controesempio

Il secondo limite si può ad esempio risolvere con De L'Hopital dopo un opportuna semplificazione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x}-1}{\log(\frac{x-1}{x+1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x}-1}{\log(x-1)-\log(x+1)}$$

dunque usando De L'Hopital e semplificando un po'

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2}e^{-1/x} = \frac{1}{2}$$

2. Mostrare che la serie seguente è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$$

e poi studiare per quali valori di $\alpha \geq 0$ la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^3+n^2}$$

Soluzione. La prima serie converge per il criterio del confronto asintotico in quanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+n^2} = 1$$

dunque la serie di partenza converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, che è convergente per quanto visto a lezione (serie armonica generalizzata con potenza > 1). Per il secondo studio si pu usare il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{n^3+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{\sqrt[n]{n^3+n^2}} = \alpha$$

in quanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Allora la serie converge per $\alpha < 1$ e diverge per $\alpha > 1$. Per $\alpha = 1$ il criterio della radice non conclude ma si ritrova la serie sopra che abbiamo mostrato essere convergente. Dunque la serie converge se e solo se $0 \leq \alpha \leq 1$.

3. Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$$

a) Trovare una primitiva di $f(x)$
b) L'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$ è finito?

Soluzione. Per trovare una primitiva si può dividere il polinomio e semplificare l'espressione in

$$\frac{x^3+2}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

Dunque

$$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+2}{x^2-1}dx$$

per risolvere questo ultimo integrale si può scrivere

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

da cui si ricavano le relazioni $A+B=1$ e $-A+B=2$. Se ne deduce $A=-\frac{1}{2}$ e $B=\frac{3}{2}$. Dunque una primitiva è

$$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-1|$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \lim_{x\to 1-}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-1|\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log(2) + \frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 1-}\log|x-1|\right) = -\infty\end{aligned}$$

dunque l'integrale improprio non converge.