(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. Ogni sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$ ammette estremo inferiore appartenente a $\mathbb{R}$
2. Se x e y appartengono a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora $x + y$ non appartiene a $\mathbb{Q}$.
3. Se $A = [a, b]$ è un intervallo chiuso, ogni punto di accumulazione di A appartiene ad A
4. Dati x, y in $\mathbb{R}$ vale sempre la disuguaglianza $x \leq |x - y| + |y|$
5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 + 2|x|$ è invertibile

(B) Esercizi.

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$
2. Sia $a > 1$. Siano
$$f(x) = \sqrt{\log_a x}, \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$$
Determinare il dominio di definizione D di $f \circ g$ e scriverne l'espressione analitica. Quante soluzioni ha l'equazione $f(g(x)) = 1$ per $x \in D$?
3. Sia $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Determinare il più grande dominio D tale che $f|_D$ sia invertibile sulla sua immagine e scrivere l'inversa di questa restrizione.
4. Determinare per quali $\alpha \geq 0$ le serie seguente sono convergenti
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$$
5. Mostrare che l'equazione in $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} = 1$$
ammette almeno due soluzioni reali

[1] giustificare tramite un argomento o dimostrazione o negare tramite un controesempio