Prima edizione maggio 1991

 Stampato in Italia dalla Stampatte di TOMo CL 74..931o...X ISBN 88-339-S473-O

Eserdd e complementi di ...usi maleraaDa / Enrico Giusti. - Torino ; Bollati 8orinabi

ri. 19'1 Y. : iD. t 24 gn. -IProanaunl di macCIIIIIDcl, fidai. c1ctuonica) Vol. 1 : 27J p 1. GtUSTI. Enrico I. ANALISI MATEMATICA. Esercizi ecc '1'.076 C. CIlra . $. & T. . ToriIlcd

Indice

Prefazione

Questo libro, e quello che seguirà col numero 2, ha lo stesso destilUltario dei miei volumi "Analisi matematica I" e "Analisi matematica 2 t, pubblicati in questa stessa collana: gli studenti di matematica, fisica.

nformatica. ingegneria, e in generale tutti coloro c

hanno bisogno di untl rigorosa preparazione di base in Analisi matematica. Benché strettamente collegato con il corrispondente testo "Analisi nultematicQ J tt (che nel seguito chiameremo più. brevemente Lezioni), di cui costituisce un com- plemento

esso può nondimeno essere utilizzato, indipendentemente da quello, da tutti gli studenti che desiderano avere una collezione di problemi di Analisi sui quali esercitarsi e saggiar:e la propria preparazione. Per questo, nei vari capitoli, che corrispondono grosso modo Q quelli delle Lezioni, sono riportati in primo luogo le definizioni e i teoremi principali, pur omettendo ovviamente le dimostrazioni, per le quali il rinvio alle Lezioni è d'obbligo, ma che potranno essere trovate anche nella maggior parte dei testi di Analisi matematica. In alcuni casi, i teoremi dimostrati nelle Lezioni vengono generalizzati ed estesi,. più. di rado si introduce qualche nuovo concetto e si dimostra qualche risultato che, pur non' essendo' privo di interesse, non poteva trovar posto nelle Lezioni per non appesantire troppo la m/Iteria, già abbastanza vasta. Il nucleo principale del volume è comunque costituito da esercizi. Alcuni di essi vengono rjsoltl per inlero. e potranno servire di guida per lo svolgimento di quelli proposti, le cui soluzioni (o meglio le risposte) si potranno trovare alla fine del volume. Benché si sia lana una certa attenzione, in alcuni casi, c

mi auguro non troppo numerosi, queste potranno risultare sbagliate. Me ne scuso fin d'ora con i le "ori. Generalmente. gli esercizi non richielloM altre conoscenze che quelle richia- mate via via e trattate nei testi di Analisi I in particolare nelle Lezioni: è utile, naturalmente, una certa inventiva. È comunque buollQ norma, quando non si riesce Q risolvere un eserCIZIO. non saltare subito alle risposte. ma provare a ritornare; su di tanto in lamo, per vedere se le nuove conoscenze acquisite e le nuove tecniche assimilate non posgano essere di aiuto nella SUiJ soluzione. Gli esercizi sono numerati separatameme per capitolo: quelli più difficili sono contrassegnati con un asrerisco.

ENR1CO GIUSTI

Esercizi e complementi di analisi matematica

Introduzione Come si legge un libro di matematica

Una delle principali difficoltà nell'affrontare la preparazione di un esame di matematica (ma quello

he si dice vale in gran pane anche per le altre materie scientifiche) è costituita dallo stabiJire un rapporto corretto con il testo che si deve studiare. Lo studente in genere ha ascoltato le lezioni, nelle quaJi ha capito alcune cose, mentre altre. che gli sono sfuggite. si ripromette di vederle più tardi sui libro in modo da chiarime i punti oscuri; come pure sul testo dovrà lavorare per fissare le parti che a lezione gli erano chiare. In ambedue i casi, il libro di testo è uno strumento indispensabile per l" apprendimento dei contenuti del corso, e non di rado la buona riuscita di un esame dipende più dal modo in cui si è affrontato lo studio che dal tempo passato sul libro. Ora, una deJ le caratteristiche dei testi di matematica è di essere ellittici; sono libri densi, nei quaH cioè ben poco spazio è riservato ai commenti e alle di. vagazioni, che semmai trovano posto a I e7..ione; libri in cui quasi ogni parola è essenziale e richiede di essere ricordata. Né d" altra parte potrebbero essere molto diversi, a meno di non pensare a volumi di parecchie centinaia di pagine. È dunque forte la tentazione di affrontarne lo studio a colpi di memoria bruta: di considerare cioè .il . libro, e in. particolare alcune sue parti quali ad esempio le dimostrazioni dei teoremi, come un testo immutabile e fissato una volta per tune, che si può solo sapere, vale a dire essere in grado di recitare senza interruzioni, o non sapere, e dunque aver bisogno di ulteriore lavoro. In realtà le cose non stanno così i o meglio non stanno esattamente così. Se infatti è innegabile che la memoria svolge un ruolo imponante nella preparazione (e questo vale per qualsiasi cosa si stia leggendo, da un romanzo all'annuncio pubblicitario), è anche vero che l'apprendimento mnemonico è troppo e troppo poco. Troppo, perché ad affrontare un testo per pura memoria sfugge mi dato importante che invece è bene tener sempre presente, e cioè che la maggior parte delle dimostrazioni è una semplice variazione su un numero molto limitato di metodi fondamentali. Troppo poco, perché por essendo eli ittico, un testo di

matematica non è completo, e in genere, specie quando si è abbastanza progrediti nel corso, molti passaggi facili (o almeno giudicati tali da chi scrive) sono solo accennati o addirittura taciuti.

Una lettura proficua di un libro di matematica dovrebbe in primo luogo avere di mira questi due obbiettivi: da una parte individuare nella molteplicità delle dimostt8ZÌoni il gioco di alcune tecniche che si ripetono costantemente; e dall 'I altra completare le dimostrazioni esplicitando tutti gli anelli mancanti o solo accennati. Il primo di questi aspetti è più complesso e può eSsere visto solo a posteriori, quando cioè si sia completata la lettura; il secondo invece Don richiede grandi conoscenze e può essere intrapreso fin dal!' inizio. Ambedue mirano non tanto a sostituire e a rendere inutile il lavoro mnemomico, che resta sempre una pane importante, quanto piuttosto a sopperire alle lacune di memoria aiutando a ricosttuire passaggi eventualmente dimenticati Il e a garantire che la mancanza di alcuni dettagli non causi la perdita irreparabile dell 'intera struttura. Per non restare nel vago, vediamo su un esempio come si può operare in una prima lettura del testo. La scelta del secondo paragrafo ("Il valore assoluto") del primo capitolo delle Lezioni è dovuta unicamente al fatto che il primo paragrafo non contiene altro che la descrizione del sistema dei nwneri reali, WI argomento in parte già DOto e in parte da imparare a memoria. (Riporteremo in corsivo il testo, e in tondo i "commenti di lettura".)

Sia d E R. Si definisce valore assoluto (o modulo) di a il massimo tra i due numeri a e -a:

lal = max{a, -a} = { a -a

se a > O se a < O.

In effetti

se a > O, il massimo tra a e -a è a, che è positivo, mentre -o è negativo.. Se invece li < Oi a è negativo e -a è positivo. Allora il massimo tra a e -a è a se a > O, e -a se a < O. Vediamo qualche esempio. 131 è 3, perché 3 > 0. 1- 11 è uguale a -(-1) cioè a I, perché -1 < O. Quanto fa

-al? Farà -Q se -Q > O

cioè se a < 0, e a se -a < 0, cioè se a > O. Proprio come Ial

tranne che c.è > O invece di > O, e < O invece di < O. Ma con questo non cambia nulla, perché quando" è zero anche -Q è zero, e allora l"uguale può stare sia sopra che sotto. Quanto fa II - x 2 11 Si deduce immediatamente dalla definizione che 101 > O, Come? Se a > O

Ial = 4. è > 0, mentte se a < O, Ial = -a > O.. e che)a I = O se e solo se a = O. Se ti = O. Ial = a = O. Viceversa, se Ial = O, a non può essere negativo, perché altrimenti Ial == -o > O. Ma allora a = Ia) = O.

Si ha inoltre I-al = Ia) (questo si era già visto). e a < Ia); -a < Iai (per forza, Ial è il massimo b'a a e -4). Siano ora a e b due numeri reali. Dalla proprietà (AB) e dalla relazione b < Ibl segue che

a + b < CI + 1&1 < Ial + Ibl.

La prima disuguaglianza è proprio la (AB}. perché nella diseguaglianza b < Ibl si somma a a destra e a sinistra. La seconda è identica; basta aggiungere Ib[ai due membri di a < Ial.. Si doveva però dire a rigore: "dalle relazioni a < Ial e b < Jbl", e non: "dalla relazione li < Ibl"; meglio ancora: udaIla relazione b < Ibl, che vale per ogni numero reale b.'. RicordiJndo che la + bl = max{(a + b),. -(a + b)}, si deduce dalle precedenti relazioni la disuguaglianza triangolare la + bl < Jal + Ibl. [2.1J Certo, infatti sia a+b che -(a+b). e dunque anche il maggiore tra essi, è minore o uguale a Ial + Ibl. Se ora in quest'ultima relazione poniamo a + b = -c (e dunque b = -c - a), e ricordiamo che I-al = Ial. otteniamo lei < la[+ Ja + cl, Vediamo.. Se poniamo a+b = -C t abbiamo Jel = I-ci < Ial+I-(a+c)1 = Ial+[a+cl. e dunque la + cl > Iei - Ial. [2..2] Viceversa, da quest' ultima relazione sl può risalire alla [2.1] sostituendo a c il suo valore -a - b; Infatti si ottiene I-bl > I-(a + b)1 - Iat. cioè fbl > Ia + bl- Ial. cosicché le [2.1] e [2.2] sono due relazioni equivalenti. Naturalmente possiamo scambiare tra loro a e c nella [2.2], e ottenere la relazione equivalente la + cl > > lai - Iei, Scambiare tra loro vuol dire chiamare a quello che prima era c e viceversa. Questo si può fare perché la [2.2] vale per ogni a e c" da cui I confrontando con la [2.2], si ottiene I a + c I > Ilai - Ie II. [2.31 Infatti)a + cl è maggiore di Ial-Ie) e di 'cl-Ia) = -{Ial-Iei}, dunque anche del maggiore tra essi, cioè di IIal - Iell. Siano ora :1:, 11 E R. Si definisce distanza tra % e 11 il numero reale d(9:,!J) = = Ix - !II. [2.4] Si verificano facilmente le seguenti proprietà: (di) d(z, y) > O; d(x,,y) = O se e solo se % = y. (d2) d(x, y) = d(II, z). (d3) Per ogni z E 1R, d(x, y) < d(x, z) + d(z, y) (disuguaglianza triangolare). Verifichiamo: (di) d(:t, II)

O; d(%, y) = O*>z = y. Questo Perché Ix - tll è sempre positivo, e si annulla solo se x - JJ = 0, cioè se e solo se z = y. (d 2) d(zj 11) = I

- !II; d(y,:r;) = I!I - zt = I-(

- y)1 = 1

- yl.

(d]) Bisogna dimostrare che):1: - yl < Iz - z' + t z - yl. Questa disuguaglianza è simiJe alla [2.J]

che si chiamava anch'essa disuguaglianza triangolare e che diceva Ia + bI < IaI + IbI.. Qui dovrebbe essere a = x - z e b = z - y. Ma allora a + b = (x - z) + (z - y) = x - y. Bene, è proprio ciò che si cerc

va. Infatti Ia + bI = Ix - y I < I aI + 'bI == Ix - z I + I z - ul, che è quello che si voleva dimostrare. Se %0 E Re.,. > O, chiameremo intorno sferico di centro %0 e di raggio r /' insieme di tutti i numeri reali che distano da Xo meno di r; in simboli: I(xo, r) = = {% E]R : d(x, %0) < r} = {x E R : Ix - 2:01"< r}. Facciamo qualche esempio. 1(2,1) = {x E R : 1

-21 < l}. Vediamo di trovare per quali x risulta Iz - 21 < L Se x < 2, si ha Iz - 21 = 2 - x, e dunque dovremo porre 2 - x < 1.. che è verificata per :t > 1. Se invece z > 2, risulta 13: - 21 = % - 2

e dunque si avrà :E - 2 < I, cioè x < 3. In conclusione, la disuguaglianza Ix - 21 < 1 sarà verificata per gli z < 2 e >] 'I e per quelli > 2 e < 3, in breve per gli z compresi tra 1 e 3. In definitiva, 1(2, 1) = {x E R : 1 < % < 3}. Allo stesso modo si vede che 1(1,3) = {x E R : Ix - I) < 3} = {:c E JR : -2 < x < 4}, Più in generale, I(xo,r) = {z E R : Xo - r <

< %0 +r}. Con questo termina il paragrafo esaminato.. ma non la nostra introduzione alla lettura di un testo matematico. Infatti in questo paragrafo manca il punto centrale del discorso matematico:

la dimostrazione di un teorema. Un teorema è costituito da una o più assunzioni (le ipotesi) e da una conclu- sione (la tesi).. La sua dimostrazione consiste in Wl8 serie di argomentazioni che conducono a provare come la tesi sia una conseguenza deUe ipotesi, nonché di altre proprietà già note.. vuoi perché sono parte delle definizioni degli oggetti in gioco, vuoi perché sono state dimostrate in precedenza. La lettura di una dimostrazione mira a individuare i vari elementi che vi intervengono: le ipotesi, le definizioni, i risultati precedenti. Ogni frase della dimostrazione rinvia in genere a uno o più di questi elementi; talvolta i rimandi sono espliciti (per il Teorema 5.2. ...., dalla Definizione 1.4. .u), in alcuni casi vengono sottaciuti

ed è compito di chi legge renderli palesi, in modo da porre in luce la ttama completa dell'argomentazione. Da questo punto di vista, la lettura di un teorema non differisce molto da quella di un qualsiasi testo matematico. La domanda che ci si pone davanti ad ogni atlennazione del tipo: da P segue Q. è sempre la stessa: perché? Ma a differenza di passi quale il paragrafo che abbiamo appena commentato, e proprio a causa della sua struttura compiu

un teorema (o lemma, o proposizione. ...) richiede anche un altro tipo di indagine, in particolare riguardo aJ ruoto delle ipotesi neU'economia della dimostrazione. Qui le domande a cui bisogna rispondere si situano a livelli successivi di elaborazione, e non sono sempre le stesse per tutti i teoremÌ- Vediamo le più semplici. In primo luogo: dove entrano le ipotesi nella dimostrazione? A que.

ta domanda si sarà già risposto tramite l

analisi precedente, che avrà pennesso di individuare ed esplicitare tutti j pa..

saggi della dimostrazione.

Viene ora la seconda questione: le ipotesi sono tutte necessarie? Essa per- mette una risposta di due tipi. TI primo, fannale, consiste nel ripetere il passo precedente, facendo vedere che per ognuna delle assunzioni c'è un passaggio della dimosttazione che non potrebbe essere compiuto senza di essa. Natural- mente, questa risposta non prova altro se non che la particolare dimostrazione non potrebbe funzionare senza l'ipotesi K in questione, ma non dimostra che in assenza di questa il teorema diventerebbe falso. Non si dimentichi che in generale un teorema può essere provato in più modi, cosicché l'ipotesi K, se è essen- ziale nella dimostrazione riportata ne1 libro, può divenire super8ua in un' altra dimostrazione, magari più complessa della prima; in altre parole. è possibile che K sia un t ipotesi di comodo, fatta allo scopo di semplificare una dimostrazione a1nimenti molto complessa. I Entra allora in gioco il secondo tipo di risposta. più sostanziale del precedente: far vedere che togliendo l tipotesi K il teorema Don è più vero, individuando una situazione nella quale tutte le ipotesi (ad eccezione di K) siano verificate senza che la tesi sussista. Si tratta, come si dice, di trovare un conttoesempio.. Perlopi

questo esempio si presenta immediatamente" e non ci insegna praticamente nulla; talvolta però esso è più riposto

e dunque contribuisce a chiarire il significato del teorema in esame. illustriamo quanto detto con un esempio, questa volta preso un po' più avanti nel testo. Va da sé che il lettore è invitato a leggere, o quanto meno a rileggere

la parte che segue quando avrà studiato il teorema in questione, cioè il Teo- rema di Weier8trass sui massimi e minimi di una funzione continua (vedi Lezioni, cap. 3, Teorema 10.4). Esso dice: Una funzione contjnua f in un insi me compatto ha massimo e minimo. Le ipotesi sono dunque due: che la funzione I sia continua in un insieme Q C R, e che Q sia compatto. Quest'ultima poi si divide in due, dato che in R sono compatti tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati. Dove entrano queste ipotesi? Esaminando la dimostrazione si vede che la compattezza di Q si usa quando dalla successione x" si estrae una sottosuccessione x: che converge a un punto :1:0 E Q: la continuità della funzione I, quando si conclude che

lim r1: = lim I(x;) = f(zo). "'.....00 n.....co

In ambedue i casi le ipotesi sono essenziali per condwre a termine la di- mostrazione. Sono però veramente essenziali per la validità del teorema? Cominciamo dalla compattezza. Ci domandiamo: il teorema sussiste ugualmente se supponiamo soltanto che Q sia chiuso, ma non limitato? o che sia limitato 1 ma

I In genere, quando si fa un "ipotesi di comodo. è buona nonna segnalarto. Non è detto però che le buone nonne vengano sempre seguite, neanche da chi scrive. UD 'altra possibilità. più rara in un testo elementare.. è che I- autore Don si sia accorto di aver aggiunto OD 'ipotesi superft

o non abbia sBputo condune a termine la dimosttazione senza di cssa.

Don chiuso? Qui il conttoesempio è presto ttovato: la funzione x non ha massimo né minimo in R (un insieme chiuso ma non limitato), mentre la funzione tg x Don ha né massimo né minimo nell tintervalJo aperto e limitato (-7r /2, '1r /2). In ambedue- i casi l'esttemo inferiore della funzione è -00, e quello supe

ore è +00. Ma allora ci possiamo chiedere: e se aggiungessimo l'ipotesi cbe la funzione f{z) è limitata? Neanche così va bene: la funzione arctg

è continua e limitata in R., e la funzione

.. (il lettore completi) è continua e limitata in (-1, 1), ma esse non hanno né massimo né minimo. Veniamo ora alla continuità: si può ttovare una funzione I(s) definita in un insieme Q compano (ma non continua) e che non abbia né massimo né minimo? Anche qui l'esempio si ttova subito: basta prendere una funzione f(:t) definita in un intervallo compano [a, b] e con un unico punto di massimo e uno di minimo, ambedue interni ad [a, b], e cambiame il valore in questi punti. Un esempio potrà essere allora la funzione sin z, che ha massimo in 1(" /2 e minimo in 311"/2, ambedue interni a [O, 211"]. La funzione I(:J;) definita in [0,211"] e che vale sin :z; se 2: =111"/2 e :£ :/31['/2 e vale O in questi due pUDti, non ha né massimo né minimo. Con ciò abbiamo tenninato 1'analisi de] teorema di Weierstrass. Ci si potrebbe però spingere più oltre, come abbiamo in parte fatto durante la discussione della compattezza, verso un terzo livello di elaborazione.. Potremmo chiederei: si possono indebolire le ipotesi. magari ottenendo Wla tesi anch

essa più debole, ma ancora significativa? Cerchiamo di rosicchiare qualcosa alla continuità: supponiamo di voler dimo- strare solamente che la funzione f(z) ha minimo in Q; possiamo rare a meno deUa continuità di f(s), sostituendola con qualche ipotesi più generale? La risposta viene in questo caso dall'analisi della dimostrazione.. Qui avevamo preso una successione minimizzante 2;. (tale cioè che

1(3:.,.) --t infQ!(z» e ne avevamo esttatto (grazie alla compattezza di Q) una successione x

-+ $0 E Q.. Vogliamo dimosb'are che f(

o) = infQ/(z). È qui c!te entra la continuità della funzione f(:t): questa implica infatti che !(x;)

1(:£0), e dato che per costruzione I(:r::> -. infQf(2:) si può concludere che J(

o)

infQf(z), e dunque che So è un punto di minimo.. Ma, a pensarci bene, per dimostrare che /(:£0) = infQf(z) è sufficiente. far vedere cbe I(zo) < inCQf(x), dato che il segno < è impossibile.. Ma anora non sarà necessario supporre che 1($:> --) /(:£0) (ovvero la conti

uità della funzione f), ma basterà che sia /(:£0) < 1im /(:t;), o meglio, poiché non sappiamo se questo 'R

OO limite esiste (avendo abbandonato)'ipotesi che la funzione I(x) sia continua), che risuJti

/(zo) < min 1im I(

R). ft

CO

Ciò conduce alla definizione di semicontinuità inferiore (o superiore, se si cerca il massimo) e alla gene r a li77J17.i one del teorema di Weiersttass a cui abbiamo accennato negli esercizi 10..1 e 10.2 del capitolo 3 delle Lezioni..

Lo stesso esame ci dice come si può evitare l'ipotesi di compattezza., sostituen.. dola con opportune ipotesi sul componamento della funzione I(x) in vicinanza della frontiera di Q. Limitiamoci per semplicità al caso in cui Q è un intervallo [a, b), con b fi. nito o +00. Come abbiamo visto, la compattezza di Q serviva per garantire che da una successione mÙ1imizzante X n era possibiJe esttarre una 50ttosuccessione convergente a un punto 3:0 E Q.. Nel nosb'o cas

o. pottebbe accadere che X n .... b, e allora, poiché b

Q t la dimostrazione crolla? Dobbiamo dunque escludere questa possibilità t introducendo un 'ipotesi sul comportamento della funzione / (z) in un intorno di b. Un' ipotesi sicuramente sufficiente è che risulti

lim f(x) = +00, z.....6

dato che in questo caso una successione minimizzanle Zn non può tendere a b. Più in generale, sarà sufficiente suppone che

infQJ(x) < min lim f(x). %-+6

Con questo terzo livello di elaborazione, con il quale siamo già vicini alle soglie del1a ricerca matematica, tenniniamo questa introduzione. N ell t esposizione siamo stati volutamente prolissi, sia per mostrare le particolari tecniche che differenziano la)ettUra di un testo matematico da quella di un

opera letteraria, sia per mettere in evidenza come anche in un paragrafo iniziale, nel quale dunque non si dà nulla per scontato, molti passaggi vengano solo accennati, lasciando al lettore il compito di completarlL Naturalmente un lettore esperto può tralasciare le cose più semplici, concentrandosi sui passaggi più delicati. Non bisogna però mai dimenticare che ciò che sembra evidente quando si ha un'esperienza abbastanza ampia può non esserlo affatto all'inizio, e che I t esperienza si acquista anche esercitandosi su cose che più tardi sembreranno banali. Anzi, si può dire che lo scopo di un testo matematico è proprio quello di diventare ovvio.

2 In effetti. questo è quaoto accade in genenle: ad esempio la funzione 1/% non ba minimo in [1, +00). e tube le soccessioni minimizzanti

&endano a +00.

Capitolo 1 Elementi di logica e di teoria degli insiemi

Come tutte le teorie matematiche, anche l'analisi si fonda su metodi rigorosi di dimostrazione (e dunque in ultima analisi sulla logica matematica) e attinge alcuni metodi e pane del suo linguaggio dalla teoria degli insiemi. Per non appesantire il discorso, nelle Lezioni abbiamo evitato quaJsiasi riferimento alla logica fonnaIe, sia perché essa viene nonnabnente trattata in altri corsi, sia perché tutto sommato le necessità dell'I analisi non vanno. al di là di nozioni elementari di logica, o se si vuole di buon senso, che, come si sa, è la cosa meglio distribuita del mondo. Per quanto riguarda la teoria degli insiemi. abbiamo qua e là fatto uso di alcune nozioni e di semplici risultati, senza preoccuparci di giustificarli né di dame delle dimostrazioni. Né ciò. è possibile in questa sede, dato che non solo la teoria formale, ma anche quella che si chiama la teoria "ingenua" degli insiemi richiederebbe, per essere ttattata con un minimo di completezza, uno spazio ben maggiore dì quello che è possibile riservarle in un volume di analisi matematica.. Del resto, anche la teoria degli insiemi fa di solito parte del programma di albi corsi, ai quali saremmo COS1retti a sovrapporci. Quello che invece ci proponiamo, è di raccog1iere e uniformare alcuni concetti principali delle due teorie., in modo da avere una specie di sunto di ciò di cui avremo bisogno per gli scopi deU 'analisi. Così facendo, avremo anche l'opportunità di toccare uno o due punti un po' delicati i che talvolta sono causa di incomprensione e occasione di elTOre.

1 Nozioni elementari di logica

Benché gran parte del

a

ria1e della matematica sia costituito da proposizioni, dire che cosa sia una proposizione è cosa piuttosto delicata, per la quale rimandia-mo volentieri ai testi di logica. Molto spesso si dice che una proposizione è una frase per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa. In effetti una proposizione in matematica è usualmente o vera o falsa, ma questo ovviamente è troppo vago per costiw.ire una definizione; semmai si può prendere come un avvertimento: se di una frase, espressa in linguaggio comune, non ha senso chiedersi se sia vera o falsa. essa non sarà una proposizione, ma quaIcos'a]tro (ad esempio: "che ora è?"). In ogni caso, più che la definizione, ci interesserà il modo in cui le proposizioni si legano tra loro per fonnare nuove proposizioni. Ciò avviene per mezzo di operatori che si chiamano connenivi logici e si possono ridUl1'C ai tre che seguono: (1) Negazione, che si indica col segno.., (non) (2) Congiunzione, che si indica con A (e) (3) D isgiunzione, che si indica con V (o).

n significato intuitivo dei tre connettivi è immediato. Ad esempio, se P è la proposizione c

piove" e Q indica "è giovedì"\ ...,p vuoi dire c'non piove"', P A Q sta per "piove ed è giovedì" e P V Q significa "piove o è giovedì.... Da notare che il connettivo v indica la disgiunzione debole (che conisponde a11atino vel);

V Q è vera se almeno una delle due prOPOSiziOlÙ P e Q è vera, e quindi anche se sono vere ambedue. Per fare un esempio, se P è 6t.6 è un numero pari" e Q sta per "6 è divisibile per 3'., ambedue vere, sarà vera anche P V Q = "6 è pari o è divisibile per 3"'. Naturalmente sono consentite combinazioni di connettivi, come ad esempio ,p V .Q (da non confondere con -.(P V Q), che indica tutt'altra cosa).. È inte- ressante stabilire per questi c onnettiv i delle tabelle di verità, che ci dicano se la proposizione costrUita è vera O falsa a seconda della verità o falsità de))e componenti. Peraltro, dato che ci interessa so.lo il modo in cui i valori di verità delle singole componenti vengono trasformati dai connettivi, queste tabelle si possono considerare delle vere e proprie definizioni dei connettivi stessi.

(1) Negazione: .. p .,p

V F F V

(2) Congiunzione:

p\Q V F V V F F FF

(3) Disgiunzione:

p\Q V F V V V F V F

In base a queste tavole si possono dimosb'are facilmente le seguenti relazioni: (1)

p = P (doppia negazione) (2) -.(P A Q) = --p V -,Q (3)

(P V Q) = Il' A"'

(leggi di De Morgan) (4) p A (Q V R) = (P A

) V (P A R) (5) P V (Q A R) = (P V Q) A <I' V R} (leggi distributive), . oltre alle proprietà commutati va e associativa dei simboli A e V:

(6) P 1\ Q = Q A 1': P V Q =

V P (7) P 1\ (Q 1\ R.) = (P 1\ Q) 1\ R. (8) P V (Q V R.) = (P V Q) V R.

In matematica sono poi molto usati anche due altri c onnettiv i: l'implicazione (P implica Q: P =?

) e la doppia implicazione o equivalenza (P se e solo se Q: P *'

). La prima è la foma di quasi tutti i teoremi, che infatti dicono che le ipotesi (P) implicano la tesi (Q)t ovvero che da quelle segue questa. Spesso anziché P implica Q si dice che P è condizione sufficiente per ,Q, ovvero che Q è condizione necessaria per P. L'equivalenza esprime una condizione necessaria e sufficiente: la proposizione Q sussiste se e solo se è vera la P. Definizioni più precise sono le seguenti:

p

Q = -.P V Q p * Q = (P => Q) 1\ (

:+ 1').

[1.1] [1.2]

Varrà qui la pena di osservare che l'implicazione P =>- Q è vera Don solo quando p e Q sono ambedue vere. ma anche quando P è falsa, indipendentemente dal valore di verità di Q. aò conisponde al fatto ben notq che da ipotesi false si può dedurre qualsiasi proposizione. e si può vedere dalla tabella dei valori di verità:

(4) Implicazione: P=>Q. V F V V F F V V

Notiamo anche l'uso duplice del segno =. che nelle relazioni (1-8) s

a significare cbe i termini a destra e quelli a sinistra del segno = sono definiti

indipendentemente e risultano uguali (nel senso cbe hanno gli stessi valori di verità), I mentre nelle fonnale [1.1] e [1.2] indica una definizione: il simbolo nuovo p

Q viene infatti definito come uguale a -,1' V Q. Talvolta per questa uguaglianza "definitoria", al fine di distinguerla dall'uguaglianza oonnale. si usa iJ simbolo =: o anche def. Perlopiù comunque è il contesto a chiarire senza possibilità dì equivoco di cosa si tratti. Si possono poi dimosttare le seguenti proposizioni!! facendo vedere che esse sono sempre vere, quali che siano i valori di verità delle singole componenti: (9) p V...,p (terzo escluso) (IO) ...,(P A -,P) (principio di non contraddizione) (11) " A (P

Q) => Q (modus ponens) (12) .., f2 A (P =>

) => -.P (modus tollens) (13) (P => Q) A (Q =+ R) => (P =-> R) (transitjvità) (14) p ==+ P V Q (passaggio all' alternativa). Infine, sono da menzionare in particolare aJcune forme alternative dell'impli- cazione, che hanno un ruolo non secondario nelle dimostrazioni. In primo luogo osserviamo che si ha

p => Q = ..,p V Q =

p V ...,.....k! = -,(...,.Q) V (...,P) =...,Q =* ...,P.

Questa uguaglianza, che si chiama legge di contrapposizione (e che si può anche verificare direttamente dalle tabelle di verità), è utile n

lle dimostrazioni per assurdo: la dimostrujone di una proposizione P

Q si può eseguire negando la tesi Q e facendo vedere cbe allora risulta falsa anche l'ipotesi P. In realtà

molto spesso le dimostrazioni per assurdo hanno un andamento un po' più complesso: si assume che l'ipotesi P sia vera e che la tesi {j, sia falsa, e si fa vedere che ciò conduce a una contraddizione, e cioè a una proposizione deJ tipo Z " ..., Z. In altre parole, si dimostta che

P A -, Q => Z A -.Z. Ora, poiché Z A -.Z è falsa, tale implicazione è vera se e solo se P 1\ -.Q è falsa, e dunque essa è equivalente a -, (P A ..,

). cioè a P => Q, che era quello che si voleva dimostrare.

Esercizi

1. Dimostrare le re]azioni (] -14). 2. COSb11ire la tabelJa dei valori di verità per la disgiunzione fone: P aul Q (P o Q, ma non ambedue). Scrivere questo connettivo in termini di quelli fin qui introdotti.

J A ben vedere, questO è per l'apPUnto il sigoificalo della doppia implicazione: infatti

come si può vedere da una tabella di verità, P

Q Doo significa aJb'o se DOn che i valori di verità di P e Q sono gli stessi. A rigore quindi avremmo dovuto usare il simbolo '* nelle (1-8) al posto di =.

Dimostrare le seguenti proposizioni:

3. (P V Q) 1\

p => Q s. (P

Q) V (Q => P)

4. P * (.....p

P) li. (P * Q) <=> (P A Q) V (-.P A ...,Q).

2 1 predicati

Quella che abbiamo brevemente descritto fin qui è la logica delle proposizioni, che è alla base delle dimostrazioni matematiche. Le sue regole possono sembrare evidenti, nondimeno la maggior parte degli errori nelle dimostrazioni deriva proprio dall'mosservanza o dalla cattiva applicazione di esse. D'altra parte la logica delle proposizioni è troppo povera per essere sufficiente allo sviluppo di una teoria matematica complessa come l'analisi, e occorrerà ampliarla quanto meno alla logica dei predicati del pn'mo ordine. Intuitivarn

nte, un predicato è una frase che contiene una o più variabili, e che afferma una proprietà di queste. 2 Ad esempio, sono predicati le frasi (a) .'$ > 1" (b) '5Z è più alto di 'U" (c)

':r;2 + 1 > O" (d) "y2 = X U .

In generale sarà opportuno evitare di introdutTe variabili generiche, che creano notevoli difficoltà tecniche. Per i nostri scopi basterà limitarsi al caso iD cui il campo di variabilità è circoscritto a priori, come i numeri interi, i numeri reali, le funzioni continue ecc. In questo caso possiamo dare una definizione un po' più precisa: un predicato (su un insieme A) è un enunciato P(z) tale che P(a), ottenuta sostituendo alla variabile % W1 elemento a di A. è una proposizione. Per fissare le idee, supponiamo che le variabili denotino numeri reali; in questo caso la frase (b) è da scartare, perché non enuncia una proprietà dei numeri reali" mentre le altre sono dei predicati, sui quali è possibile operare con i connettivi -', V e 1\ per ottenere altri predicati più complessi.. Una cosa importante da notare subito è cbe un predicato non è una propo- sizione (tranne che nel caso in cui in esso non appare nessuna variabile)!! e dunque in generale un predicato non è né vero né falso, anche quando (come avviene ad esempio per .Q(x) = U z = x") esso è vero per ogni particolare ele- mento a dell'insieme A. Per atttibuirgli un valore di verità, è necessario in primo luogo tra..c;formare il predicato in una proposizione.. Ciò è possibile in vari modi. n

2 In genere si dice che un predicato a una variabile P(z) esprime unapropprit!tà della variabile:r; e che un predicato a due variabili Q(z.,) è una relazione tra le variabili se fl. Quando Q(s,1I) è ven, si dirà che z e" verificano la re)87jone Q.

primo

che abbiamo già menzionato, consiste nel sostituire alla variabile un valore particolare, ovvero un elemento dell'insieme A in cui il predicato è definito.] Ad esempio 9 dal premcato P (x) = ":I; > 1 " otteniamo

sostituendo alla x il valore 2, la proposizione vera "2 > 1", e ponendo % = -?I" la proposizione falsa "-7r > 1". In questo senso si dice talvolta che il valore di verità di un predicato dipende dal valore che attribuiamo alla variabile z.. Un secondo modo per ottenere una proposizione da un predicato consiste nell'introduzione dei cosiddetti quantificatori: il quantificatore universale V (per ogni) e il quantificatore esistenziale 3 (esisle). Così, dal predicato P(z) otteniamo le due proposizioni seguenti:

(I) V'X, P(z) (per ogni :1:, P(z»,

che asserisce che la proposizione P (a) è vera quale che sia il valore a che noi assegniamo alla variabile z;

(2) 3x : P($) (esiste un % tale che P(:I;».

che affenna che per almeno un valore a di z la proposizione P(a) è vera.. Naturalmente i valori assunti dalla variabile x sono quelli dell

insieme A in cui il predicato in questione è definito.. Ad esempio, dal predicato c'z

}.' si onengono le proposizioni

(1) "Per ogni

risulta z > 1'

(falsa) (2) "Esiste un z > I" (vera), mentre dal predicato 6'3;2 + 1 > O'" si ottengono le due proposizioni vere (1) "Per ogni :r; si ha x 2 + 1 > O" (2) "Esiste un % tale che %2 + 1 > O"..

Naturalmente, in ambedue i casi gli z in questione sono numeri reali. Osserviamo esplicitamente cbe, quando la variabile di un predicato sia stata "saturata" mediante un qu

tificatore, essa sparisce dalla struttura logica della fra..c;e, anche se nella maggior parte dei casi-.resta tipograficamente ptesente

Così si può dire che la proposizione 3, : Q (y) non contiene la variabile y; essa è per l'appunto una proposizione e non un predicato, e dunque non è possibile sostituire alla y un valore. Ad esempio, se nella proposizione 32: : % > I (esiste un s >]) si sostituisce a z il valore O, si ottiene la frase .'esiste uno O

1", che non è una proposizione (e non deve essere confusa con la proposizione falsa

'O

t"

). Al contrario, il simbolo '!I (che, lo ripetiamo, non è più una variabile) può essere sostituito con un altro qualsiasi simbolo: ad esempio con :t, o con z, o anche con

3 Per semplicità, ci limitiamo aJ caso di predicati a ODa variabile. Nel caso generale, ogni variabile potrà avere il suo particolare campo di vlriabilità.

segni un po. stravaganti. come O. Così, le proposizioni 3:1: : :J: > 1, 3D: D > I sono assolutamente equivalenti. I segni x o D che vi compaiono si chiamano taJvolta variabili mute, per indicare cbe ad esse non può essere più assegnato nessun valore particolare.. Più in generale, se R(:t 1 y) è un predicato binario, le espressioni P(z) = "'11, £(Z1 y) e Q(z) = 3y : R(Z

!J) SODO due predicati nella variabile :1:. Ad essi è ancora possibile applicare un quantificatore relativo alla z

e ottenere così una delle proposizioni seguenti:

(1) V:r:, 'tItJ, R($, II) (2) 3x : 't/Y1 R(x, y) (3) Vx,3y : R(z, y) (4) 3z,3, : R(x, y)

(1') Vy, V'I;, 1I(z, y) (2') Vy,3x : R(.x, ti) (3 ') 3y : V:r;, R (z, y) (4') 31/,3:1: : R(x, V).

Nella seconda colonna abbiamo riportato le ana10ghe proposizioni ottenute invertendo l II ordine di saturazione delle due variabili x e '.' TI lettore potrà con- vincersi facilmente che le proposizioni (1) e (1') sono equivalenti, come pure le (4) e (4'). Non così invece le altre. Infatti la (2') asserisce cbe. per ogni 'Y c'è un z per il quale R(x, y) è vera, mentre la (2) dice che esiste un % per il quale R(%, y) è vera per ogni 1/. Nel primo caso il valore di z dipende da quello di y, mentte nel secondo una stessa x deve andar bene per tutte le JJ. Si vede dunque subito che quest'ultima richiesta è molto più stringente della prima, e dunque che (2) => (2'), mentre il. viceversa Don è vero in generale. Ad esempio, se R($, II) è il predicato "z + 1 = 'Y

', la (2) dice che esUte un

tale che per ogni 11 risulta z + 1 = 11 (il che è evidentemente falso), mentre)a (2') affenna che per ogni !J c t è un % tale che % + 1 = y, che è vero (basterà infatti prendere :I: = rJ - 1).. Con un ragionamento analogo si può provare che (3') => (3). Le proposizioni che contengono quantificatori intervengono molto spesso negli enunciati matematici; dato poi che sovente le dimostrazioni procedono per assurdo, si comprende come ci si possa trovare a dover negare una propo.sizione contenente uno o più quantificatori. Non sempre questa operazione risulta agevole, specie quando si ha a che fare con più di un quantificatore. Per evitare di fare errori, basterà attenersi ad alcune semplici regole. Supponiamo ad esempio di voler negare la proposizione V2:, 1'(z). È chiaro che negare che per ogni x si abbia P(s) equivale ad affennare che c'è almeno WI Z per cui P(x) è falsa; e dunque per cui è vera

P(2:). Ne segue cbe -,(Vz, P(x» = 3% : .,P(x). Analogamente, -,(3% : P(z» = Vz, ..., p (x).

In definitiva, quando una negazione incontta un quantificatore, essa lo scava)ca cambiandone la natura: da universale diventa esistenziale. e viceversa. Se poi il predicato P (%) contiene anch'esso dei quantificatori, si continuerà come sopra, fino a ottenere una proposizione in cui l'eventuale segno di negazione segue tutti i quantificatori. A titolo di esempio, proviamo a negare la proposizione (2) scritta sopra. Si ha -.(3x : V'I, R(z, y» = y:£

,(\;Iy) R(x, 1}» = \;/x, 3y : -,R(z, y) c, se ad esempio poniamo R(x) y) = :t > 9, possiamo concludere che negare che esiste un 2: tale che per ogni y risulta :r > 1/ è equivaJente ad affennare che per ogni :& e

igte un !/ tale che

non è maggiore di y, ovvero, più brevemente, che per ogni x esiste un y > z.

Esercizi

Negare le proposizioni seguenti:

7. \/z,3y : Vz,z + II =

9. Vs,

> 2 * 3y: V2,1}2 < z+ z.

8. 3

: CrI1J..

> 1/) V (3z : % < z)

3 Elementi di teoria degli insiemi

Come la logica t anche la teoria degli insiemi non può essere trattata che approssimativamente in un corso di analisi. Come si s

anche quella che si chiama la teoria "ingenua" (cioè non completamente formalizzata) degli insiemi è una . costruzione abbastanza delicata, nella quale si deve operare con molta accortezza al fine di evitare paradossi e circoli viziosi. Fortunatamente, lo svolgimento deJ co

so non ha bisogno della teoria più generale, ma può limitarsi a considerare solo insiemi che siano parti dell 'insieme dei numeri reali o che si costruiscano a partire da questo" In altre parole, pottemo inttodurre i nostri conceui a partire da un insieme dato, che chiameremo R perché nel seguito verrà identificato con l'insieme dei nwneri reali: tutte le variabili che introdurremo saranno sempre, salvo avviso conttario, a valori reali, così come tutti gli insiemi che considereremo saranno parti.. o sottoinsiemi, di R. Naturalmente non ci porremo qui il problema di definire il tennine '

insieme", per il quaJe ci limiteremo a ricorrere all'intuizione, o al più a dare dei sinonimi, come "aggregato", "conezione", "famiglia", ...classe". Un insieme sarà dunque u una raccolta, classe, aggregato, totalità di oggetti detenninati ben distinti della nostra intuizione o del nostto pensiero" (Cantor). Gli oggeui che compongono un insieme si chiamano anche

elernenti"; per dire che un oggetto a è un elemento 0011 t insieme A (o che "ti appartiene ad A"), si scrive a e A. [3.11

Ad esempio, per dire che 2 è un numero reale, si scrive 2 E R.. La negazione della proposizione [3.1], cioè "a non appartiene ad A'", si scrive a fi A. Dati due insiemi A e B (ambedue composti di elementi di R.)

si dice che A è contenuto in B se ogni elemento di A è anche un elemento di B, ovvero se B contiene tutti gli elementi di A più, eventuaJmente

degli altri. Se A è contenuto in B, si dice anche che B contiene A, o che A è un sottoinsieme o una parte di B, e si scrive

A C B ovvero B:J A. Quando si verificano ambedue le relazioni A C B e B C A (in altre parole, A e B hanno gli stessi elementi), si dice che A = B. 4 In breve:

A CB<=> \t'x E JR,z E A=> :r E B

A = B

"Ix e R, x E A <=> :J: E B

Esempio 3.1 Se A = {I, 3, 5} e B = {I, 2, 3,4, 5, 6}

si ha evidentemente A C B. Lo stesso avviene se A è l'insieme dei multipli di 4 e B è quello dei numeri pari. . L'esempio precedente mostra anche due modi diversi per definire un insieme. Il primo, che è possibile solo per gli insiemi finiti (cioè con un numero finito di elementi). consiste nell' elencare tutti gli elementi dell'insieme. Ad esempio, se a E 1R, si indica con {a} l'insieme il cui unico elemento è a, con { a, b} quello i cui elementi sono a e b, e così via. Naturalmente, bisogna far attenzione a non confondere l'elemento a con l'insieme {a}. n secondo metodo definisce un insieme per mezzo di una proprietà caratteristica, di una proprietà cioè che è soddisfatta da tutti e soli gli elementi del'insieme. Questo secondo metodo è J praticabile sia quando l'insieme in questione è finito cbe quando è infinito; anzi in questo secondo caso esso è l'unico possibile, dato che non si può certo elencare tutti gli elementi dell'insieme. Le fonne miste che talvolta si 1ro v ano , e di cui spesso faremo uso, come ad esempio { II 1 } E = 1, 2' 3' 4 ecc. , non sono che delle forme mascherate di definizione del secondo tipo, in cui l'ecc. sta a significare che i tennini elencati d

vrebbero essere sufficienti a individuare la proprietà caratteristica di E

Così, per l'insieme dell'esempio risulta che i suoi elementi sono gli inversi degli interi positivi: E={:i:ER:

EN}, dove con N si è indicato J'insieme dei numeri naturali (interi positivi)..

4 Quesro significa che un insieme è determinato univocamente dai suoi elementi. Talvolta ci si riferisce a questo fatto come al principio di uten.sionalità.

In generale, se P(z) è un predicato definito in R, si indica con {:z: E R : P(:,;)} l'ÌDsieme i cui elementi sono tutti e soli i numeri reali

per i quali P(:E) è vera.

Osservazione 3.1 L

espressione precedente pennette di definire una parte di un insieme assegnato R.. Si potrebbe pensare di definire insiemi generici tt8UÙte espressioni del tipo {x : P (x) }, senza specificare a priori quali valori possa assumere la variabile z. Ci si accorge subito però che così facendo si va incontro a seri inconvenienti. Ad esempio

ammettiamo che l'espressione {z : z ft z} rappresenti un insieme E (e precisamente l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono sé stessi come elemento), e chiediamoci: E contiene o no sé stesso come elemento? o in altre parole: la proposizione E E E è vera o falsa? Si vede subito che nessuna delle due alternative è possibile.. Infatti, se E appartiene a E,,' E deve verificare la condizione x

x (infatti gli elementi di E sono tutti e soli gli insiemi che non contengono sé stessi come elemento), e dunque si deve avere E ;. E. Viceversa, se E non appartiene a E, allora E non potrà verificare la condizione x rt x, e dunque si dovrà avere E E E. In ambedue i casi si giunge quindi a una contraddizione (paradosso di Russell). TI paradosso non si presenta se si considerano solo insiemi che sono parti di un insieme fissato R, o cbe si ottengono da questi mediante opportune operazioni, come ad esempio il passaggio all'insieme delle parti e la costruzione del prodotto cartesia

di due insiemi (vedi più oltre). Questo non è il caso per l'aggregato E, che pertanto non è un insieme

Di conseguenza l'enunciato E e E non è una proposizione, dato cbe esso ha senso solo se il tennine che segue il simbolo e è un insieme. Poiché nella maggior parte delle teorie assiomatiche degli insiemi si esclude la possibilità che un insieme possa essere elemento di sé stesso, il paradosso di Russell ci dice che non si può postulare l'esistenza di un insieme di tutti gli insiemi, ovvero di un universo U nel quale qualsiasi operazione sia possibiJe e dia luogo a un insieme. Infatti, poiché in questo caso la relazione %

% è sempre verificata, un tale universo U non sarebbe altro che l'E defmito S()

che come abbiamo visto non può essere un insieme. . Riprendiamo ora la nostta breve trattazione, per introdurre alcune operazioni fondamentali sugli insiemi. (a) Unione. Se A e B sono due insiemi. si chiama

&unione di A e B U l'insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di uno almeno degli insiemi A e B. In simboli: A U B = {x e R : :r; e A v :r; e B}.

(b) Intersez;one. L"'intersezione di A e S" è l'insieme i cui elementi sono quelli comuni ad A e B:

AnB = {z E R : % E AA!I: E B}.

Osservazione 3..2

" E possibile che i due insiemi A e B Don abbiano elementi in comune, come avviene ad esempio se A è Pinsieme dei numeri pari e B quello dei numeri dispari. Per comprendere nella definizione di intersezione anche questo caso. si introduce un insieme peculiare, l''insieme vuoto, che non ha nessun elemento e che si indica con 0. Se dunque A e B non hanno elementi in comune 9 si scriverà

A n B = 0.

L'insieme vuoto si può caratterizzare con un qualsiasi predicato contraddittorio: ad esempio,

0= {xeR ::r7':t}..

Esempio 3.2 Si ha

(A U B) n c = (A n O) u (B n C).

Dalla definizione abbiamo infatti

(A U B) n c = {:r: e R : % E A U B A x E C} = = {% E R : (x E A v x E B) A:z; E O},

e, per la proprietà (4) del paragrafo precedente, quest'ultimo insieme è uguale a

{:I: E R : (x E A A % E O) V (x E B A z E C)} = (A n C) U (B n 0). .

Naturalmente si può fare Itunione o l'intersezione di Ire, quattro o più insiemi. e anch

di una famiglia qualsiasi di insiemi, sia finita che infinita.. Se indichiamo con 1 una tale famiglia (ricordiamo che famiglia è un sinonimo di insieme) si ha

u 1= U A={xeR :3Ae7:2:EA} Ae1

e

n T = n A == {s e R : VA E 1, x E A}. Ael

4) Un aRJp!iamentt I di ori

zonte

29

(c) Complemento. Si chiama "complemento di un insieme A.' l'insieme degli elementi di R che non appartengono ad A:

CA = {x E R : x ff A}.

Segue dalla definizione che, se A = {z E R : P(z)}, allora CA = .{2; E R : -,pex)}. (d) Differenza. La "differenza di due insiemi A e B" è l'insieme costituito da tutti quegli elementi di A che non appartengono a B:

A - B = {z E]i : x E A A:r:

B} = {z e A : x

B}.

Si vede sub

to che CA =][t - A. Viceversa, A - D = A n CB. cosicché il complemento e la differenza possono essere definiti l'uno tramite l'rotto. Talora si usa anche definire la differenza simmetrica:

A

B = (A - B) U (B - A).

Esercizi

IO. Ricordiamo che si indica con (a, b) l'intervallo aperto di estremi a e b, cioè I

insieme dei numeri reali (estrenU esclusi) compresi tta a e b: ((I, b) = {z E R : a < :J: < b}. Se invece uno degli estremi si considera incluso netl 'insieme, esso verrà indicato con una parentesi quadra al posto della tonda; ad esempio

(a,6) = {z E R : a < 2: < b). Infine

l'insieme (a, Il] è l'intervallo chiuso di esttemi 4 e b. Dimostrare che se (a,b) e (c. d) sono due in

alli aperti, la loro intersezione, se non è vuota, è un intervallo aperto. Si può dire lo stesso per intervalli chiusi?

Siano A e B gli insiemi seguenti. Si trovi A U S, A n B

A - B e B - A.

II. (0,2); (1,3) 12. [-1, I); (O) I] 13.. (-oo

3]; (-00, I) 14. (-IJ +(0); (I, 3) 15. [-1, O]; (0, 1] 16. {s E R : z2 > 4}; (1,3).

4 Ua ampliamento di orizzonte

Se A è un insieme, si denota con P(A) l'insieme i cui elementi sono tutte e sole le parti di A, ovvero i sonoinsiemi di A.. Se A è finito, anche P(A) è finito 1 e i suoi elementi si possono elencare completamente; ad esempio, se A = { I , 2

3}, si ha

P (A) = {0, {I }, {2}, {3}, { 1, 2}, {I J 3}, {2, 3}, { I, 2, 3} }..

Come si vede, tra le parti di A figurano anche l'insieme vuoto e lo stesso A. Questo fa sì che le operazioni di unione, ÌDtersezione e differenza siano deUe oper87joni interne nell'tinsieme P(A). Con l'insieme P (A) (in particolare con P (R » siamo usciti fuori del nostro in- sieme di partenza R, nel quale ci eravamo sempre mossi finora. La considerazione del l ' insieme costituito dalle parti di un insieme dato pennette di costruire degli insiemi via via più grandi (più precisamente, di cardinalità via via più grande). In effetti, si può dimostrare il seguente

Teorema 4.1 Sia A un insieme. Non esiste nessuna applicazione surgettiva tra A e P(A).5

Dimo..ftrazlone. Supponiamo per assurdo che esista un'applicazione V' : A -+ P(A) surgettiva (cioè tale che per ogni E E P(A) esista almeno un e E A tale che so(e) = E), e consideriamo l'insieme

E = {x E A : x

4p(x)}.

Poiché VJ è surgettiva, esisterà un e E A tale che E = \D(e). Ci chiediamo ora: e appartiene a E o no? Ambedue le possibilità portano a una contraddizione.. Infatti, per la definizione di E Il se e E cp(e) allora e

E, menb'e se e ft cp(e) allora e E E. D'altra pane E =

(e), e dunque e E E => e

E, mentre e

E => e e E. Siamo così giunti a una conttaddizione, dalla quale segue cbe un'applicazione surgettiva di E su P(E) non può esistere. . Peraltro, un'applicazione iniettiva di A in "(A) è subito trovata: basta prendere l'applicazione che ad ogni x E A associa l'insieme {x}. Ne segue che A è "più piccolo" di P(A), o più precisamente che la cardinalità di A è strettamente minore di quena di P(A). ,

Osservazione 4.1

Si noti l'analogia tra la dimostrazione del teorema 4.1 e il paradosso di Russell: non tutto il male vien per nuocere. . Un altro modo di allargare, per cos1 dire, I

orizzonte (por senza aumentare Ja cardinalità) è la costruzione del prodotto cartesiano di due insiemi. Se A e B sono due insiemi, indichiamo con (a, b) una coppia ordinata costi- tuita da un primo elemento a E A e da un secondo elemento b E B. Naturalmente, bisogna fare attenzione a non confondere la coppia ordinata (o, b) con l'insieme

5 Per la defmizione di applicaziooe iniettiva, surgeuiva e bigeaiva si vedano le Le%ioni. cap. 3. i 3 1 e il cap. 5. i 4, di questo volume.

lx, y) y ----------, I I I I I I

o

x

Figura 1.1

{ 0" b};6 ad esempio, mentre in quesfultimo l'ordine in cui sono elencati i suoi elementi è inile v ante , nella prima è essenziale. Infatti, { 0" b} = {b, a}. ma in generale (a, b) :f (6, a).7 Si chiama prodotto cartesiano degli insiemi A e B I

insieme

AxB={(a,b):aeA, beB).

Un sottoinsieme del prodotto cartesiano A x B si chiama anche una relazione. In effetti, se R(:z:, y) è un predicato in due variabili (una relazione tra le variabili % e y) definito in A x B, l'insieme

R. = {(x, y) E A x B : R(z, y)}

è un sottoinsieme di A x B. Viceversa, ad ogni R, C A x B possiamo associare il predicato

R(z, y) = "(x, y) E R.'t"

cosicché i predicati in due variabili, definiti in A x B, si possono mettere in

li E nemmeno con l-intervallo aperto (a, b), cbe si indica con lo aesso simbolo. In genere dal contesto si capisce di cile cosa s.i stia parlando. 7 Poiché una coppia ordinata si può individuare dicendo quali sono gli elementi che la compongono e quale di essi è il primo. si può dame la seguente definiziODe, pii1 rigorosa: (a, b) = {{CI,b}14}. Si tratta di un insieme che ba due elementi.. di cui il primo. {CI I "}. indica quali sono gli elementi che coscilUiscono la coppia «(lt b), e il secondo, 4, dice quale dei due è il primo elemento. Ad esempio, la coppia ordinaJa (I, 2) si può indicare con {{3, 2},3}.. o anche con {{2, 3},3}.

corrispondenza biunivoca con i sonoinsiemi di AxB. Molto &1M'SSO si distingue tra la relazjone R.(s, 'Y) e l'insieme R

chiamando quest'ultimo grafico deUa relazione R(:i:, V). Talora inoltre, invece di)(x, II) si scrive %R.1I. Un caso interessante è quello in cui A = B = R. Se con R indichiamo la retta reale, il prodotto R x R, che si indica di solito con R 2 f rappresenta il piano canesiano, e i suoi elementi, coppie ordinate (%, 11) di numeri reali. danno le coordinate dei punti del piano (fig. 1..1).

Esempio 4.1 Se A == B, la relazione z = 'IJ ha come grafico la diagonale di A X A, cioè 1

insieme delle coppie del tipo (a, a). Se poi A = B = R, la relazione 3: 2 + y2 S I ha come grafico il cerchio (pieno) con centro neU' origine (O, O) e mggio 1. . Sempre nel caso A = B, possiamo introdmre la nozione di relazione di equi.. valenza. Si chiama così una relazione R(:r, 11) tale cbe <a> V!1: E A., !tR.z (proprietà riflessiva) (b) Vz,!I E A, :zR.1I => JJR.x (proprietà simmetrica) (c) V:r., y, z É A, ,;R,y A IIRz => zllz (proprietà transitiva)"

. La relazione x = 11 è ovviamente una relazione di equivale

come pure la relazione %2 = 1/2; non lo è invece la relazione 3: 2 + 11 < I. Se R, è una relazione di equivalenza in A, e a E A, si chiama classe di equivalenza di a rispetto alla relazione R l'insieme (a] costituito da tutti gli elementi di A equivalenti ad a:

[a] := {x E A : :z:Ra},

mentre l'elemento a si dice un rappresentante della classe [a]. Naturabnente, ogni altro elemento b equivalente ad a sarà un rappresentante della stessa classe.. Infatti se aR.b si ha [a] = (6). dato che, per la proprietà tranSitiva, ogni elemento equivalente ad a lo sarà anche a b e viceversa. Non è difficile dimostrare che' due classi di equivalenza [a] e [6] o coincidono o non hanno elementi in comune (in altre parole, [a] ti [b] :/0 => r a] = [b]). Jnfani, sup

niamo che [a] e [6] abbiano un elemento e in comune. Per definizione, dovrà essere aRc e bR.c, e dunque per quanto detto sopra sarà [a] = [c] e [b] = [c], cosicché [a] = [b]. Le classi di equivalenza distinte sono dunque degli insiemi a due a due disgiunti; ogni elemento a di A appartiene ad almeno una di queste, dato cbe appartiene ad [a].. Una relazione di equivalenza detennina quindi una partizione deU'insieme A (cioè una decomposizione di A in una famiglia di insiemi a due a due disgiunti). Viceversa., ogni panizione di A definisce una relazione

i equivalenza (basterà osservare che ogni elemento di A appartiene a uno e un sQlo

insieme della partizione, e definire equivalenti due elementi che appartengano aUo stesso insieme). L

insieme composto da tutte le classi di equivalenza si chiama insieme quoziente e si indica con il simbolo A / R..

Esempio 4.2 (L'insieme Z dei numeri relativi) Indicato con N l'insieme dei numeri interi .non negativi (vedi Lezioni, cap. 1

Osservazione 6.]). ci proponiamo di definire i numeri relativi (cioè gli interi positivi e negativi). Per questo, consideriamo l'insieme N2 delle coppie ordinate (n, k) di numeri naturali, e in esso definiamo la seguente relazione:

(n, k)R(m, h) "* n + h = m + k.

Si vede facilmente che R. è una relazione di equivalenza.. Infatti le proprietà riftessiva e simmetrica sono ovvie: per la transitiva, si osservi che sommando membro a membro le relazioni

$n+h=m+k$

$m+b=a+h$

e sottraendo ad ambo i membri i tennini comuni m + h, si ottiene la relazione

$n + b = a + k,$

cosicché (n, k)R(m, h) e (m

h)R(a, b) implicano (n, k).£(a) b). Chiameremo Z l'insieme quoziente N 2 f R.

Osservazione 4.2

Intuitivamente, vogliamo definire un numero relativo come differenza di due interi positivi: z = n - k.. Naturalmente ciò non è possibile, perché se non si conoscono già i numeri negativi la differenza si può fare solo se n > k. Per aggirare questo ostacolo, definiamo fonnalmente "numero relativo" la coppia di interi che pensiamo (senza dirlo) di sottrarre tra loro. Così, per definire il Dumero -3 non diremo 2 - 5, che non si può fare, ma (2,5). Naturalmente lo .stesso nwnero è rappresentato da (1

4) o da (5,8). Si capisce Ofa la ragione della re.. lazione di equivalenza che abbiamo imposto; se (a, b) sta intuitivamente per a - b, allora (a, b) e (c, d) rappresentano lo stesso numero quando a - b = c - d, cioè quando a + d = b + c. Con queste precisazioni, sarà più facne capire il seguito della storia.. .

Naturalmente, non ci basta aver definito l'insieme Z; occorre anche poter ef... fettuare sui suoi elementi (i numeri relativi) le operazioni di somma, differenza

2

e prodotto. Per questo, cominciamo a definire tali operazioni in N2 ponendo (a, b) + (c, cl) = (a + c, b + cl) (a, b) · (c, d) = (ac + bd, bc + ad).

Osserviamo ora che, se in queste operazioni sostituiamo alle coppie (a, b) e (c, cl) due altre coppie equivalenti, i risultad sono coppie equivalenti alle precedenti (questo è immediato nel caso della somma, mentre per il prodotto si vede facil- mente se si cambia una coppia alla volta). Ne segue cbe le operazioni di somma e prodotto passano al quoziente; in altre parole, esse si possono definire su Z ponendo semplicemente

(a, b)] + [(c

d)] = [(ti + c, b + d)] [(4) b)] · [(c, d)] = ({ac + bd, bc + ad)).

Lasciamo al lettore la fatica di proseguire la descrizione delle operazl0m su Z'I limitandoci a osservare che [(O, O») è reJemento neutro della somma ([(a, b)]+ +[(0, O)] = [(a, b)l) e [(1, O)] quello del prodotto ([(a, b)] · [(l, O)] ::: [(4, b)]). Inoltre, l'opposto di [(a, b)] è [(b,o.)]. .

Esercizi

17. Riponare ne) piano cartesiano l'insieme N 2 e individuare le classi di equivalenza rispetto alla relazione R definita sopra. .

Dire se le seguenti sono deUe relazioni di equivalenza in R :

1& 2:11

O 21. :£2 = ,2 24. Z - II è intero 27. z(1 -,'1.) =,(1 _ %2)

19. zy < O 22. % < JJ 25. % + II è intero 28. % - 'II è razionale

20.

,,> O 23.. sÌI1z = siny 2'. 2:(1 + li> =.(J + :2) 19. z -" è irrazionale.

Per quelle tra le precedenti che risultino delle relazioni di equivalenza, trovare per ogni s E R la classe di equivalenza [CI].

Dire se le seguenti sono relazioni di equivalenza in a+ = {:I: E R = s > O}:

30. z'II = 1Jz

31. SI' > o.

Verificare che 1e seguenti sono relazioni di equivalenza. e per ogni ti e R. trovare la classe (8].

31. 2: = 11

33.

2 + 11 > O

34. COsz = cos'g.

Capitolo 2 I numeri reali

I Disuguaglianze

Una delle disuguaglianze fondamentali deriva dalla semplice osservazione che il quadrato (a - 6)2 è sempre positivo, e si annulla se e solo se a = b.. Ne segue, sviluppando, che

2ab < a 2 + b 2 - ,

[1.1]

dove] 'uguaglianza sussiste solo se a = b. Alcune variazioni sui tema si possono ottenere prendendo a = v'flsJ e b = lyl/v'f (£ > O). Si ricava, per ogni £ > O, 11 2 213:111 < E

2 + -. E

[1..2]

Esempio 1.1 Se A è l'area di un rettangolo e P è il suo perimetro, si ha

16A < p2,

[1.3 J

dove l'uguaglianza vale solo per il quadrato. Infatti, detti z e y i lati del rettangolo, si ha

4:1:9 = 2z!I ... 2Z11 < 2z!I + 2: 2 + ,2 = (2: + fJ)2

e quindi

16A = 162:11 < (2% + 2J1)2 = p2,

e] 'uguaglianza vale solo per x = 1/, cioè per il quadrato. .

Esercizio

I. Si dimostri che la [1.3] vale (a) per un parallelogrammo, (b) per un ttapezio.

La [1.3] prende il Dome di disuguaglianza isoperimetrica; essa dice che, a parità di perimetro, il trapezio di area massima è iJ quadrato. Una disuguaglianza più complessa è quella che asserisce che, a parità di perimetro

il cerchio è la figura piana di area massima. Poiché per il cerchio si ha 4r A = p2, la disuguaglianza 4.A < p2 vaJe per qualsiasi figun. piana. Una disuguaglianza analoga alla r 1.3] vale per figure solide.

Esempio 1.2 Detti V il volume ed S la superficie di un parallelepipedo rettangolo, risulta 216V 2 < 83; [1.4] iJ segno di uguaglianza vale solo per il cubo. Siano %, y e z gli spigoli del parallelepipedo.. Risulta 13,2'1}2 z2 = z2yz · 2yz < s2yzCJJ2 +

) = :,;2('113 Z + 11%3). Analoghe disuguaglianze si ottengono scambiando tra loro te variabili :1:, !/ e %. Ne segue . 6x'271z2 < z2CJJ3 Z + rJz3) + 11 2 (:&3 Z + 2:Z 3) + ';'(:1: 3 " + ZI/3). (1.5] D 9 altra parte si ha :x 2 z = B -Vxz 2 < .!.:3 + !:I;Z2 = !:r: 3 + !z. rzC < !!J;3 + !;!J + !z2% - 2 2 2 2 v

- 2 4 4 e quindi

3:i: 2 z < 2:1;3 + z3..

[1.6]

Inttodducendo questa disuguaglianza, e le analoghe che si ottengono per le altre variabili, si trova

3Z271Z2 < !J;3,3 + ,3 z3 + z3!E 3 ..

In conclusione, sommando a quest'ultima disuguaglianza la [1.5] moltiplicata per 3, e aggiungendo ad ambo i membri la q

antità 6X 2 JJ2z2 si ottiene 27:r: 2 ';Z2 < (zy + %Z + tlz)3, da cui infine

moltiplicando per 8 ambo i membri,

216 (%!lz)2 = 216 V 2 < (2%y + 2zz + 21/z)3 = 8 3 .

[1.71

Perché in questa valga il segno di uguaglianza, occorre che valga l

uguaglianza nella [1.5] e nella [1..6].. In particolare, da quest'ultima si ottiene 2: = z, e dalla stessa scritta per z e !J si ricava z = y; pertanto nella [1.7J il segno di uguaglianza vale solo se 2: = 'IJ = z, cioè se il parallelepipedo è un cubo. .

Esercizi

2. Dimostrare che, se L è la somma delle lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo. risulta

248 S L 2 1728V

L J a

dove l'uguaglianza vale solo per il cubo. 3. Cosa avviene per un parallelepipedo generico?

Osservazione 1.1

La [1.4] .è ancora una disuguaglianza jsoperimettica; essa ci dice che, a parità di superficie

il cubo è tra i parallelepipedi rettangoli quello che ha il volume maggiore. Se invece si considerano tutti i solidi, allora, analogamente a quanto avveniva per le figure piane, è la sfera ad avere volume massimo a parità di superficie. Ora, per la sfera si ha 36wV2 = S3, e dunque per ogni figura solida vale la disuguaglianza

361rV 2 < 8 3 - ,

con l'uguaglianza nel caso della sfera.. .

Esempio 1.3 La r 1.6] si può riscrivere, ponendo a = Z2 e b = z, 2 1 ab < 3 a 3 /2 + 3 ';' Quest'ultima è un caso particolare della disuguaglianza

a P b" ab< -+- - , p q

[1.8]

valida per ogni coppia di numeri positivi a e b, e dove p e q sono numeri reali maggiori di 1 e verificanti la relazione 1 1 -+-=1. p q La dimostrazione si può compiere osservando che per ogni z E R + risulta (vedi più oltre, cap. 6, Esempio 4.6) :z:P 1. 1 x - - < 1 - - = -. [1.9] p - p q Se ora si pone

= a I c e si moltiplicano ambo i membri per c"

si ottiene I a P cl' ar:!- < - + - - , p q e la disuguaglianza [1.8] segue scegliendo c in modo che cp-I = b. .

Esercizi

Trovare il più piccolo valore dena costante a per cui valgono le disuguaglianze

4. 6%11 < 4%2 + 01.71 2

5. %1J2 < 3:t 3 + 01';

(j. (a + 6)2 S 36 2 + aV. + Gr..

7. Dimostrare che peT ogni z, y > O e per ogni E > O si ha ti' z" 'Y' %u< -+-. - p qc9 8. Dimostrare che per ogni z,,, 2: O risulta I,;s - Vii s v t

- JJI. Trovare i numeri reali z che soddic;fano alle seguenti disugua elian7.e :

9. :c - 1 < à + 3 4 - 3 II. 2% + I < 3 :1:-2 -

IO. 3:1: - 2 > -2

12. h + 1 < 3(z - 2)

13. :t - 1 > O %2 + :z:

Z2 z 14. I

2: I I: - 31 16. I

+ 21 < I

15. I:c + 31 - 1% - 11 < O 17 Jx - 31 >! · 12:1: + J I -: 2 19. IIzI - 31 < 2 Iz - 31 1 21.)cos %1 < J2

18. :1: 4 - 6z2 + 8 < O

20.. :1: 3 +

2 - 2 < O

22.. 2

+ 12% - I J < 2

2 1 Distanze

39

23. 1+ V2 (InS)2 + 310% - 2 > In

25. I

- 31 < 31

+ 21

24.. 21+

logJO(I + z2) < 2 10 2fi.. 1% - 11

Z2 - 3 28. zIzI + 122: - 11 > O

17. I z2 - 3% + 21 <

+ I

29. 1:t1 3 - 2z(J + I%J} < O 31. 1%2 - 21 < z + Iz + 11

30. (z - II < 212:1 32. 1

2 - 1 J < % + 1% + I(

33. ..; z2 - % + I :::; x + 3 35. V %"2 - 3:1: < Z - I 37. v3 s - s 2

2z - J

34. ..j ';1; 2 - 2% + 4

% - 2 3(j" % + I 2 ..j zZ - 'h 38. ../ S 2 - 2m:!: S z - b (m, b > O).

2 Distanze

Ricordiamo cbe una metrica o distanza in R è una funzione d(Z,II) con le . ." seguentI propnet.à: (1) d(x,y) > O; d(:t, y) = O... z =:u (2) d(z, y) = d(y, z) (3) d(:i:, y) S d(z, z) + d(y, z). Si noti che la (3) ha una fonna leggermente differente da quella delle Lezioni (cap.. 1 1 fi 2). dove invece di d(JJ, z) appariva d(z, y). Naturalmente le due formulazioni sono del tutto equivalenti, a causa della (2). Io realtà, quesfultima è una conseguenza delle altre due relazioni nella fonna anuale (ma non in quella delle Leziom), cosicché gli assiomi della distanza si potrebbero ridUJTe ai soli (1) e (3). Se non lo abbiamo fatto, è perché in tal modo quello cbe si guadagna in concisione si perde in espressività. Per vedere come la (2) derivi dalle altre, basta osservare che, se si pone z = :J: nella (3), si ottiene d(x,I/) < d(g, z). Analogamente, se si scambia :r: con JJ nc;Ila (3) e si pone z = y, si ricava d(y, x) $ d(x,3/), e dunque la (2). . La distanza usuale in]i è data da

d(

, 'Y) = Iz - !II,

per la quale è facile verificare gli assiomi. D'altra parte questa non è la sola distanza possibile. Abbiamo visto (Lezioni, cap. 1, Esercizio 2.] O (b» che la funzione { I se :r::t'Y f(z

y) = O se :J; = Y

è una distanza, ancorché un po' bizzarra, in R.. Vi sono però anche delle metriche meno strane.

Esempio 2.1 La funzione

d(z, ti) = V I2: - 111

è una distanza in R. Infatti,]e relazioni (1) e (2) sono evidentemente verificate. Per la (3), osser- viamo c he si h a Iz - !/r

tz - %1 + bl - zr, e d unque v i x - !Il < v I x - z) + 111 - zI < v I x - zI + VI y - zI,

come si vede facilmente elevando al quadrato. .

Esercizi

Dire se le seguenti funzioni sono deUe distanze in R:

39. Iz2 - 111 43. Ir - eli I.

40. 1% - ,1 2

41. v Ix2 -11 2 1

42.I

-Jj;i1

44. Dire se le precedenti funzioni sono delle distanze in R. + = {:t e R : z > O} o in R- = {:t E R : s < o}.

45. Dimostrare che, se f(s) è una funzione sttettamente crescente in un insieme A C R (cioè tale che z < 71 * I(s) < !W», allora

I/(s) - fUI)1

è una distanza in A. Lo stesso vale se 1(:£) è strettamente decrescente (2: < 11

1(:) > IUi»).

3 Estremo superiore ed estremo inferiore

Ricordiamo dalle Lezioni (cap. 1, fi 4) le definizioni di estremo inferiore ed estremo superiore di un insieme. Un insieme E E R. si dice limitato superionnente (inferionnente) se ammette un maggiorante (minorante), cioè se esiste un numero .À tale che per ogni x e E risulta :z; < A (z

À).. Se E non è limitato superionnente, si dirà che il suo estremo superiore è +00; altrimenti l'estremo superiore di E è il minimo dei maggioranti.m E. Analogamente, l'esuemo inferiore di un.insieme E è il massimo dei minmanti se E è limitato inferionnente i -00 altrimenti..

3 r ES/femcl superiori!

(/ ,'Sorte/no infeJ.;ol e

41

Segue immediatamente dalla definizione che, se E ha massimo, cioè se esiste un elemento M E E tale che x < M V

E E, allora l'estremo superiore di E coincide con M.. Analogamente, se E ha minimo, l'estremo inferiore coincide con quest'ultimo.

Esempio 3.1

Si consideri l'insieme

E = {x E R : x =

2 ' n e N } .

L'insieme E è limitato sia superionnente cbe inferiormente, dato che risulta O <::: l/n2 < 1. Poiché 1 E E, 1 è il massimo e quindi anche l'estremo superiore di E. Per trovare l'estremo inferiore,. consideriamo l'insieme dei minoranti di E. Abbiamo già osservato che tutti gli elementi di E sono positivi, e dunque ogni numero < o è un minorante. Se ora a > O, il nwnero l/n2, che è un elemento di E, sarà minore di a non appena n 2 > l/a, e cioè per n > 1/,;0,. Ne segue che a non può essere un minorante,

pertanto l'insieme dei minoranti di E è costituito da tutti e soli i numeri < o. U massimo dei minoranti, ovvero l'estremo inferiore di E, è dunque O. .

Esempio 3.2

Si trovino gli estremi inferiore e superiore dell'insieme

E={xe [; .

] :x= ; ; n.mEN}.

Poiché 1/2 è del tipo m/2R, risulta 1/2 e E t e dunque inf E = min E = 1/2. AI contrario, 2/3 non è del tipo m/2ft... e dunque nOn è il massimo dell'insieme E. D'altra parte, se si considerano i punti k/2ft. con k = I, 2t . .., 2 n , esisterà un intero m tale che m/2ft < 2/3 < (m+I)/2 f1 . Per tale m risulta 0< 2/3-m/2n < < I/2 ft . In conclusione, se a è un numero minore di 2/3, prendendo 2- n < 2/3-a, cioè n > -1082(2/3 - a), e scegliendo opportunamente m'I si poni far sì cbe risulti a < m/2ft < 2/3. Ne segue che nessun numero minore di 2/3 è un maggiorante, e dunque che sup E = 2/3. .

Eserc:izi

Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi. Dire se I t estremo inferiore è un minimo e ."estremo superiore un massimo.

I IUln7er; r

Qli [COI'. 2

46. {:/:=

:2 : nEN}

47. {z = _,,2 +22n+ IO; n E N}

48. {% = n 2 - Sn + 3: n E N}

{ t+l } 49. :t ;:: t _ 2; t e R, t > 2

50. {% = n 2 + 371 - 1; n e N}

51. {:J: = 71 3 - IOn; n E N}

52. { :J: = L; n E N } n+3

53. {2:" sin 1'1 : ; ti E Z }

54. {% E R : %2 è razionale} So.

u {:J; = -

: n E N }

55. {lxl: 3: 2 +:1: < 2} 57. {:r.. (

) "; 1'1 E N} .

S8. Si dice diametro di un insieme A.c R il numero

diam (A) = sup {lz - 111: 2:,1/ E A}. Si provi che diam(A) = supA - inf A.

59. Si dimostri che un insieme è limitato se e solo se il suo diametto è finito.

60. Due pani A e B di R si dicono contigu.e se ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B e inoltre per ogni E > O esistono a E A e b E B tali che b - a < E. Dimostrare che, se A e B sono insiemi contigui. allora sup A = in! B. Se A e B sono due sottoinsiemi di R. si può definire la somma A + B come Itinsieme i cui elementi sono tutte le possibili somme di un elemento di A e di uno di B:

A + B = {:t E R : 34 E A, 3b E B, Z = G + b}. Si trovi A + B quando A e B sono gli insiemi seguenti:

61. A = N; B = {3}

62. A=R; B=N fiS. A = (a, b); B = [e, dJ

'J. A = (O, 1); B = (2, 3) '6. A=R+; B=R-.

64. A = (a, b); B = (c,ti)

67. Si dimostri che sup(A + B) = supA + supB e inf(A + B) = infA + infB. Prima di procedere oltre, ricordiamo cbe si definisce distanza di un punto z da un i1I3ieme E C R il numero

d(:t, E) = inf{ d(x, 1I}; y E E}.

Esempio 3.3 Sia E = (O, I). Si ha allora

{ x-I d(z, E) = O -%

se z>] se o < z < 1 se s<O

4 I La parte inlera e la porre !raz;onal.;o di un numero reo/t'

43

Lo stesso risultato si avrebbe prendendo E = [O, I], con la sola differenza che in questo caso l'estremo inferiore della definizione è WI minimo. .

Similmente, si definisce distanza tra due insiemi E ed F il numero

d(E,F) = inf{d(x,y); Z E E, JJ E F}.

Esercizi

QI. Provare che per ogni

e R si ha d(E, F) < d(z, E) + d(z, F). ti,. È valida la disuguaglianza d(E.F>

d(E,G) + d(G, F)? 70. Dimostrare che si ha deE, F) = inf{ tl(:r:, F); z e E}.

4 La parte intera e la parte frazionaria di un numero reale

Se a è un numero reale, si definisce parte intera di a il massimo intero che non supera a.. Ad esempio, la parte intera di 7/4 è I, quella di 3 è 3, quella di - 7/4 è - 2.. La parte intera di un numero a si indica col simbolo [a].1 Naturabnente, si dovrà dimostrare che la parte intera di un numero è ben definita 0, in altre parole, che l'insieme

E = {n E Z: n < a}

[4.1]

ha massimo, ovvero che sup E E E. Sia

= sup E. Poiché a è un maggiorante di E, si ha

< a, e dunque per dimostrare che

E E sarà sufficiente provare che £ è un intero.. Supponiamo per assurdo che ciò Don sia vero; esisterà allora un E > O tale che tra

- E e

non cadano numeri interi. D'altra parte, siccome € - (non è un maggiorante, dovrà esistere un numero ti E E, e dunque intero, tale che € > n > € - E. Siamo così giunti a una contraddizione; dunque ç è intero e di conseguenza.è il massimo di E. .

Si può definire ora la parte fro2ionaria {a} del numero reale a:

{a) = a - [a].

Si ha ovviamente O < {a} < 1; inoltre risulta {a} = O se e solo se a è un intero.

J Si noterà che lo stesso simbolo sta anche ad indicare la classe di equivalenza di CI. Di che si tratti. to si capirà seuZ8. possibilicà di equivoco dal contesto.

Esercizi

71. Provare cbe [-o] = - [a] se (I E Z, mentre se a

Z risulta r -o] = -[a] - 1. 72. D

ostrare che se Ci;' Z si ha {-a} = 1 - {o}. 73. Dimostrare che se {a} + {b} < 1 risulta [a +0) = [4]+["] e {a+ b} = {a} + {b}1I mentte se {a} + {6}

I si ha (a+b]=la]+(b]+ I e {o+b} = {a} +{b}-1. 74. Trovare delle relazioni analoghe per la - 6] e {a - b}. 75. Dimosttare che {a} = d(a, E), dove E è l'insieme [4.1]. '6. Dimostrare che {m}{1 - z} <

.

5 Proprietà equivalenti all'assioma di DedekiDd

Come abbiamo visto nelle Lezioni (cap.. 1 ,1 fi

3 sg.), un ruolo essenziale nella teoria dei numeri reali è svolto dall' assioma di Dedekind: (D) Per. ogni sezione (A, B) E R esiste un numero reale

tale che per ogni a E A e per ogni b E B si ha: . a < .À < b. Ricordiamo che una sezione è una coppia (A, B) di pani di R che verificano le sçguenti proprietà: (a) A U B = R; A n B = 0 (b) Va E A, Vb E B, a < b. Non è difficile vedere che l'elemento separatore .À è unico. Supponiamo infatti che ci siano due elementi separatori À e p. con À < IJ. TI numero reale (À + p,)/2, che è compreso b'a À ed 1-', essendo maggiore di À dovrebbe appartenere a B, mentre essendo minore di IJ (che separa anch'esso le due classi A e B) dovrebbe appartenere ad A. Ciò è impossibile perché, per la definizione di sezione, l'intersezione A n B deve essere vuota. .

Abbiamo mosttato neUe Lezioni (cap. 1,

4; cap.. 2, fifi 12 sg.) che l'asgiorna (O) (unitamente agli altri assiomi di R) implica una serie di altte proprie tà, tra le quali le seguenti: (E) (Estremo superiore) Ogni insieme A C R limitato superiormente ha estre.mo superiore. (A) (Archimede) Per ogni coppia a, b di numeri reali positivi esiste un intero N tale che Na > b. (S) (Principio di Caucby) Ogni succe3sione di Cauchy è convergente.

5 t P/"aprietà equ;'laJ

nli all'assÙ)mo di Dedekilld

(M) (Successioni monotòne) Ogni successione monotòna e limitalo è conver- gente.

Sempre conseguenza dell' assioma di Dedekind è il seguente: (C) (Principio di Cantor) Ogni famiglia numerabile di inlervalli chiusi non vuoti I}(= [a/r, bk] (k = 1,2, ...) ognuno dei quali è contenuto nel precedenle:

1) :> 12

. . . :J Ik :> Ilc+1 :> .. . .

ha intersezione non vuota; in altre parole. Cf è almeno un punto comune a tutti gli intervalli Ilc.

Dimostrazione. Sia A l'insieme dei primi estremi degJi interValli 11::

A = {aj;; k E N},

e sia B l'insieme dei maggioranti di A.. Posto A = R - B, la coppia (A, B) è una " sezione di R. Sia

il suo elemento separatore. E chiaro che o, < À per ogni k eN. D'altra parte, dato che gli intervalli I k sono contenuti ciascuno nel precedente, ogni b n sarà un maggiorante di A. Ne segue che

< bk per ogni Ie, e dunque À appartiene ad ognuno degli intervalli flc. . . Vogliamo ora far vedere che, fermi restando gli altri assiomi di R,)' assioma di Dedekind si può dedurre dalle proprietà sopra elencate. Più precisamente, dimostreremo che si ha

Teorell18 5.1

(D) <=> (E) <=> (A) A (C) * (A) A (5) 4=> (M).

Dimostrazione. Avendo già mosnato che l'assioma (D) implica tutti i rimanenti, resta da far vedere che questi implicano (D).

(1) (E) * (D). Sia (A, B) una sezione di R. L'insieme A è limitato superionnente e quindi per (E) ha esttemo superiore L. Poiché L è un maggiorante di At risulta a < L per ogni a E A. D'altra parte ogni b E B è UD maggiorante di A e, siccome L è il minimo dei maggioranti, si avrà b > L. Il numero L è dunque l'elemento separatore (necessariamente unico, come si è visto sopra) della sezione (A, B).
(2) (A) A (C) =} (D). Consideriamo una sezione (A, B) di R e costruiamo una famiglia di intervalli chiusi nel modo che segue.

(a) Prendiamo un punto 4 di A e un punto b di B e poniamo

Io = [a, b).

(b) Consideriamo il punto di mezzo dell'intervallo Io. Se questo punto appar- tiene ad A, poniamo al = (a, + b)/2 e b 1 = b; se invece appartiene a B, definiamo al = a e bl = (4 + b)/2. In ogni caso indichiamo con 11 Jtintervallo di esttemi al e bIli (c) Ripetiamo il procedimento precedente considerando il punto di mezzo (al + bl) /2 dell'intervallo Il e definendo l'intervallo 12. come abbiamo fauo sopra per l'intervallo Il, poi l'intervallo 13, e così via. Abbiamo così ottenuto una famiglia di intervalli chiusi Il, 12, ..., ognuno contenuto nel precedente. Per la proprietà di Cantar (C)., esiste un punto L comune a tutti gli inte

al1i 1". Faremo vedere che L è l'elemento separatore della sezione (A, B). Supponiamo per assurdo che esista un elemento a E A.. maggiore di L. Per]'assioma dì Archimede (A), esisterà un intero N tale che

b. - al < N(a - L),

ed essendo 2 N -1 > N, risulterà

bN - aN = 2 1 - N (b 1 - 41) < a-L.

Ma allora dovrà essere

aH = bN - (bN - aN) > bN - (a - L) > L,

dato che bN > a. Ne segue che L non può appartenere all'intervallo [4,N, b N]., contro l'ipotesi. Si dovrà dunque avere a < L per ogni ti e Ali In maniera analoga si dimostra che b > L per ogni b E B, e dunque L è l'elemento di separazione cercato.

(3) (A) A (5) =+- (D). Sia (A, B) una sezione di R e siano I" gli intervalli costruiti sopra. Sia E un numero positivo e sia N un intero tale che NE > b I - al. Si ha, come sopra,

b n - fin :: 21-R(b 1 - al) < E

per ogni n > N. Inoltre, se n ed m sono maggiori di N, i punti a,. e a m sono contenuti neU'intervallo [aN, bN]. e dunque Jan - ami < f. La successione dei primi estremi {aie} è dunque una successione di Cauchy e, per ipotesi, converge. Sia À il suo limite; facciamo vedere che À è l'elemento separatore della sezione (A, B). Osserviamo innanzi tutto che '" è anche il limite della successione { b n }

6 I I numeri I,oluJ.Qli e ,

Ii ossiomi di Peono

dei secondi esttemi degli intervalli I n" Infatti I b" -

I < Ib R - a n I + Ia. - À I

e le due successioni a secondo membro tendono a zero. Se ora b è un elemento di B, si ha b - an > O, e dunque, facendo tendere n all 'infinito 9 b - A > O.. Analogamente, se a E A, risulta a - b. < O, e dunque (I -

< o. Risulta così a <

< b per ogni a e A ed ogni b E B, e dunque

è l') elemento separatore della sezione (A

B).

(4) (M)

(D). Osserviamo innanzitutto che (M) => (A). Supponiamo infatti cbe il principio di Archimede non sia vero, e cioè che esistano due numeri positivi a e b tali che per ogni intero ti risulti no ::; b. La successione crescente {na} sarebbe allora Iinùtata, e dunque convergente.. Sia (J il suo limite; poiché (n+ I)a = na+a, si ba

lim(n+ I)a = O+a. R

ca

D'aJtta parte, la successione {(n + I)a} è estratta dalla { na}, e dunque ha lo stesso limite (J, una contraddizione. Ciò premesso, si può ripetere la dimostrazione precedente. osservando che la successione {4k) dei primi esttemi è crescente e limitata superionnente da b i ; dunque convergente. .

6 I numeri naturali e gli assiomi di Peano

Abbiamo visto nelle Lezioni (cap. 1.

6) come i numeri naturali si possano definire assiomaticamente mediante gli assiomi di Peano. Secondo questa teoria, il sistema dei numeri naturali è costituito da un insieme N nel quale è definita un t applicazione o : N

N con le seguenti propJ i età:

(1) 31 E N : 1 (t O'(N); (2) u è iniettiva; (3) Se A C N,le A e q(A) C A, allora A = N.. Tutte e tte le proprietà elencate sono necessarie per caratterizzare un sistema che abbia le proprietà intuitive dei numeri naturali. Ad esempio, la (2) e la (3) sono verificate da un insieme composto da due soli elementi, che chiameremo 1 e 2. quando si definisca (1(1) = 2 e (1(2) = I. Se invece si omette la (2), si può soddisfare alla (1) e alla (3) con un sic;tema di tre eJemend, 1, 2 e 3, con (/(1) = 2, (1(2) = 3 e (1(3) = 2. Infine, la (1) e la (2) sono soddisfatte da un sistema composto dagli usuali numeri interi, con]' aggiunta di due ulteriori elementi a e (:J, con u(a) = fJ e u(fJ) = Q" La propri età (3) è nota come principio di induzione, ed è equivalente a1I' affer.. mazione che ogni insieme non vuoto N c N ba minimo (vedi Lezioni, cap. 1,

I nume"; reu/i I C"p. 2

6).2 Essa è alla base di un gran numero di dimostrazioni. Vediamone alcune conseguenze.

TeoreID8 6.1 Ogni numero diverso dall' unità è successivo di qualche nu.. mero; in simboli:

{1}Ua(N)=N.

Dimostrazione. Sia A = {l} U u(N). Evidentemente 1 E A; inoltre, se n E A (ma più in generale se n E N), risulta D (n) E A. Per la (3), II = N.
.

È evidente che il predecessore di un numero n

I (cioè quel numero k tale che a(k) = n) è unico; infatti, altrimenti (J non sarebbe iniettiva. Possiamo ora dimostrare quanto detto in pr ecedenz

cioè che tutti i modelli dei numeri naturali sono tra loro equivalenti. Osserviamo innanzitutto che, quando abbiamo defi1Ùto i numeri naturali mediante gli assiomi di Peano (1), (2) e (3), non abbiamo discusso la possibilità di trovare un insieme che verificasse tali assiomi, perché avevamo già fatto vedere che si. poteva costnlire un sottoinsieme di R con le proprietà volute; in altre parole, avevamo costrUito un modello dei numeri naturali. Naturalmente, non è detto che tale modello sia unico; e in realtà si possono costruire modelli di N che non fanno ricorso all'insieme dei numeri reali. Ora, perché si possa parlare di "numeri naturali'" senza specificare a quale modello ci si sta riferendo. è necessario che tutti i possibili modelli siano tra loro equivalenti. Poiché W! modello di N è costituito da un insieme F con un elemento e (l'unità) e un'applicazione 8 : F -l> F verificanti gli assiorni di Peano, occorrerà dimostrare il seguente

Teorema 6.2 Siano (F, e, s) e (4), E

t1) due modelli di' N. Allora esiste un' ap- plicazione bigettiva U : F -+

tale che U(e) = E e U(s(n» = u(U(n» per ogni n E F.

DimoJtrazione. Definiamo l'applicazione U cominciando col porre U(e) = E. Inoltre, se abbiamo definito U(n), definiamo U(s(n)) = u(U(n». Abbiamo così definito un'applicazione di F in 4>: infatti l'insieme G degli n E F per i quali U è definita contiene e, e se contiene n contiene anche 8(n); quindi per la (3) G=F.

2 A rigore. la dimosttazione delle Lezioni si basava sul fano che i nwneri Daturali erano considcnui come un sottoinsieme di R. Quando invece i numeri naturali sono incrodotti assiomaticamente, bisogna cominciare col

il signifiC810 deU.cspressione ti < II, come pure deUa nozione di minimo, che si basa su di essa. Si ttana di un lavoro lungo. che noi Don intraprenderemo. anche perché, come m

UQçW o tta poco, tutti i modelli dei numeri namra1i SODO equivaleoti tra 10m.

Resta da far vedere che U è bigeniva (cioè inieniv8 e surgettiva). Sia r= U(F); risulta f = U(e) E F), e inoltre se II E r (cioè se v = U(n) per qualche n E F) allora anche f1 (II) = U (8(71» e rt cosicché r =

e U è surgettiva. Infine, per dimoSb'are che U è iniettiva, consideriamo l'insieme A degli elementi v E

che provengono da un solo elemento di F, e cominciamo a far vedere che

E.4. Si ha £ = U(e); se ora E provenisse anche da un altro elemento n E F. detto m il predecessore di n (vedi il teorema precedente) si avrebbe u(U(m» = U(s(m») = = U(n) = €, e dunque £ sarebbe il successore di U(m), contto l'assioma (1). Ne segue che f E A. Supponiamo ora che J) e .ti e dimostriamo. ragionando per assurdo, che I1(v) E À.. Supponiamo che ciò non sia vero

e siano m) n E F tali che U(m) = U(n) = O'(v). Né m né n possono essere l'unità e, dato che U(e) = ft che non può essere successore di nessun v E

. Detti allora ;Ti ed n i loro predecessori, risulterà O"(v) = U(s (m» = a(U (m» e dunque, per)'iniettività di (/, si. avrà U(m) = I). Analogamente, U (n) = II. Ma aHora v proviene da due elementi distinti di F, contro l'ipotesi. Ne segue che u(II) e A.; dunque, sempre per la (3), A =

. Ciò dimostra l'inienività di U e conclude la dimostrazione del teorema. .

Esempio 6.1 Abbiaino visto nel teorema precedente che il principio di induzione può essere usato anche per definire un

applicazione di N in un secondo insieme. Un caso importante è costituito dalle successioni, cioè dalle applicazioni di N in R. Un esempio di come opera il principio di induzione è dato dalla definizione di n1 (il fattoriale di n)" Nelle Lezioni (cap.. 1, fi 6) si era posto

n! = 1 . 2 . . .. . . (n - I) . n,

una definizione che fa appeno immediato all'intuizione, ma un po' debole for. ma1mente, a causa della presenza dei puntini di sospensione... Una definizione più rigorosa si può dare usando il principio di induzione:

1 J = 1; (n + I)! = (n + I)n!. Un altro caso è dato dalla definizione del simbolo di sommatoria L. Intuitivamente si definisce ad esempio:

ft E k 2 = I + 2 2 + 3 2 + . . . + (n - 1)2 + n 2 , 1=J

mentre la definizione rigorosa può essere la seguente:

1 E k 2 = I; Ic=1

n.+ I n. L k 2 = L k 2 + (n + 1)2.

1 k=1

N aturalmente quanto si guadagna in rigore lo si perde in intuitività e quindi, in ultima analisi, in comprensibilità immediata: per questo motivo abbiamo con- tinuato e continueremo a usare j puntini invece delle più rigorose definizioni per induzione o, come si dice, per " ricoe nza. Notiamo però che queste ultime sono particolannente adatte quando si debbano eseguire dei calcoli con un computer. Ad esempio, se si vuole scrivere un programma che calcola la sonuna dei quadrati dei primi n numeri interi, si dovrà usare la definizione formale e non quella intuitiva, che il computer non riesce nonnalmente a capire. . In N si possono definire una somma e un prodono per ricomnza. La somma si indica col simbolo + ed è definita dalle seguenti proprietà: (a) V'a E N, a + I = q (a). In particoJare, d'ora in poi si scriverà a +.1 invece di t1 (a).. (b) Va 1 b E N, a + (b + I) = (a + b) + 1. In maniera analoga, a partire dalla somma si può definire il prodotto mediante le seguenti relazioni: (c) Va E N, a.I = a.. (d) Va, Ii E N, a.. (b +]) = a.. b + a. Le operazioni di somma e prodotto soddisfano alle proprietà commutativa [a + b = b + a; ab = ba], associativa [a + (b + c) = (a + b) + c; a(bc) = (ab)c] e distributiva [(a + b)c = ac + bc], le cui dimostrazioni f8IUIO WI uso massiccio del principio di induzione (3).

Teorema 6.3 (Proprietà associativa della somma) a + (6 + c) = (a + b) + c.

Dimostrazione. Fissati i due numeri interi a e b, sia II l'insieme degli interi c tali che a+ (b+c) = (a +b) + c. Per la proprietà (b) si ha a+ (b+ I) = (a+b)+ I, e dunque I E A. Supponiamo ora che c E If, cioè che sia a + (b + c) = (a + b) + c. In particolare. risulterà anche [a + (b + c)] + 1 = [(a + b) + c] + I. Usando ripetutamente la definizione (b). si ottiene allora a + [b + (c + 1)] = a + [Cb + c) + 1] = [a + (b + c)] + I = = [(a + b) + c] + 1 = (a + II) + (c + I)

e dunque c+] e A. Per il principio di induzione, A = N, e il teOrema è dimostrato.

.

Una conseguenza del teorema 6.3 è che si può scrivere la somma di Ire o più termini senza parentesi, .in quanto l'ordine in cui si eseguono le varie operazioni di somma è irrilevante. Ad esempio, si può scrivere a + b + c, dato cbe si ottiene lo stesso risultato sia calcolando prima la somma a + b e poi aggiungendovi c, sia aggiungendo ad a la somma b + c.

Teorema 6.4 (Proprietà commutativa della sOII101a) a + b = b + a"

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che 1 + (I = CI + I. Per questo.. indichiamo con A l'insieme degli interi che verificano tale uguaglianza. Si ha I E A: inoltre. se a E A (cioè se 1 + ti = a + 1), risulta I + (a + 1) = (1 + a) + 1 = :: (a+I)+I, cosicché a+I E A. Per induzione, A = N 0, in altre parole, a+I = I+a per ogni a E N. Fissato ora a e N, indichiamo con B la classe degli interi b tali che a+b = b+a. Si ha 1 E 8. Se ora be B (cioè se a+b=b+a) risulta

a + (b + I) = (a + b) + I = (b + 4) + I = b + (o + I) = b + (I + a) = (b + I) + a

(neI1'ultimo passaggio si è usata la proprietà associativa delta somma). Ne segue cbe b + 1 e B e dunque. per induzione, cbe B = N. .

Teorema 6.5 (Proprietà distributiva) (a + b)c = ac + bc.

Dimostrazione. Fissati due interi a e b, sia A l'insieme degli interi c per i quali vale la propl ie tà in questione. Si ha

(a + b) x J = a + b = a x I + b x 1

e dunque 1 E A. Supponiamo ora che c E II, cioè che risulti (a + b)c = ac + bc. Usando la definizione (d) del prodotto, si trova (a + b)(c + 1) = (a + b)e + (CI + b) = ac + bc + a + b = = (ac +a)+ (bc + b) = 4(C+ 1)+ b(c + I).

Ne segue che c + I E Jf e, per induzione, A = N. .

Esercizi

77. Dimostrare (nell' ordine) le proprietà commumava e associativa del prodotto.

ostrare le seguenti relazioni: 78. 1 3 + 2 3 + 3 3 +... +n J = (n(R 2 + '> f . 79. 1+3 +S +.. .+(2n - I) =.2

80. fa! > 2 n - 1

81. n ft

nl

82. 2 ft > IO" (n

6)

83. 2" > n 2 (n > 4)

n(n - I) 2 84. (I + ti)"

I + no + 2 a

(o

O)

52

I "ume,.; "

Qli I Cap. 2

. o' n(ft - 1) 2 n(n - 1)(71 - 2) 3 85. Dimostrare che per ogm CI

-I nswta (I +o)ft > 1 +tIa+ 2 a + 6 a . SCi. Dimosttare che, se IJ

, #2. ..., Pn sono dei numeri non negativi e minori di 1 (O < < Pi < I), si ha

(I - #-'))(1 - P2) .. . (I - Pn) > 1 - (I't + 1'2 + . . . +

).

87. Per n e N si definisca nl' nel modo seguente:

I!! = I. 2!! = 2; (n + 2)!! = (1& + 2) . n!!.

Trovare una espressione esplicita per n!!. Dimosttare che risulta (271)! I = 2 n n!. 88. Dimostrare che. se A è un insieme con N elementi, l'insieme P(A) ha 2 N elemenù.

7 InsieDli numerabili

Un insieme JI si dice numerabile se si può porre in corrispondenza biuni- voca con l'insieme N dei numeri naturali. In partìcolare N stesso è ovviamente numerabile; inoltre sono numerabili (a) l'insieme dei numeri pari, (b) I

insìeme dei numeri dispari, (c) l'insieme dei quadrati, dei cubi e così via, (d) l'insieme Z dei numeri interi (positivi e negativi). Non è difficile trovare le conispondenze biunivoche richieste tra N e gli insiemi elencati; ad esempio, la relazione che ad ogni intero n associa 2n è OOB corrispondenza biunivoca tta N e l'insieme dei numeri pari.. Molto spesso, invece di dare esplicitamente la corrispondenza in questione, è più comodo indicare il modo in cui)'insieme considerato può essere numerato. aò si può fare scrivendo l'uno dopo l'altro i tennini dell'insieme; ad esempio, i numeri pari si possono dispo1Te nella successione:

2, 4, 6, 8, ...,

che indica implicitamente la corrisponde

n +-+ 2n. Vale comunque la pena di osservare che questa scrittura, anche se è spesso più espressiva. Don è altrettanto rigorosa della formula esplicita della corrispondenza biunivoca. Per quanto riguarda la numerabilità di Z, osserviamo che non si può pensare di contare prima i numeri positivi e poi i negativi. In tal modo infatti non si arriverebbe mai a questi ultimi. Si deve invece numerare l'insieme prendendo alternativamente numeri positivi e negativi, ad esempio nel modo seguente:

0, -1, 1, - 2, 2, - 3, ...

Lasciamo al lettore il compito di trovare un'espressione esplicita della conispon- denza biunivoca tra N e Z indicata sopra.. Si noti che tutti gli insiemi considerati (con la sola eccezione di Z) sono dei so1toinsiemi di N, che dunque ha la proprietà un po' paradossale di poter essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Peraltto quest'ultima è una proprietà caratteristica degli insiemi infiniti.. al punto che nella teoria a..cnratta degli insiemi essa è usata come definizione: Un insieme A si dice infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sotlQinsieme proprio; in CQ.'iO contrario si dice finito. Con questa definizione, si può dimostrare il seguente teorema, il quale dice che l'insieme N è in un ceno senso il più piccolo insieme infinito.

Teorema 7.1 Ogni insieme infinito contiene una parte ìsomorfa a N.

D imostraz;I?ne. Sia E un insieme infinito, e sia (f un'applicazione biunivoca tra E e una sua parte propria. Sia e un elemento di E che non appartiene a f1 (E). Un insieme K C E si dice induttivo se e E K e a(K) C K. Ad esempio, E stesso è un insieme induttivo. Sia)J l'intersezione di tutti gli insiemi indunivi. Faremo vedere che JI è isomorfo a N, ovvero che soddisfa gli assiomi di Peano. In primo luogo, l'applicazione (1 manda JI in)/. Infatti risulta (f ()I) C ti (K) c K per ogni insieme induttivo K, e dunque (1 (J/) C J/. Inoltre, poiché e ti. (1 (E), si avrà a maggior ragione e ft a(N). II primo assioma è dunque verificato. n secondo è evidente, dato che CF è iniettiva come applicazione di E in E. Infine, sia A C JI un insieme tale che e e A e (J (A) C A.. Ne segue che A è induttivo, cosicché)/ c A per la stessa definizione di)J. Ma allora A =)J, e il terzo assioma è verificato. .

TI lettore avrà osservato l'analogia tra la dimostrazione di questo teorema e l'inttoduzione dei numeri naturali neUe Lezioni (cap. 1, 9 6). In effetti, la coslJUzionè delle. Lezioni consiste nel prendere E = {:t E R : :J: > I}, e = 1 e (1 (z) = :J: + 1. Si riconoscerà anche che i primi due assiomi di Peano non di.. cono altro se non che N è un insieme infinito, mentre il terzo affenna che N non ba sottoinsiemi induttivi propri (cioè diversi da 0 e da N stesso) rispetto all. applicazione a introdotta nei primi due.

Teorema 7.2 Un sottoinsieme infinilo di un insieme numera bile è numerabile.

Djmo3trazione. Sia A un insieme numerabile.. Ad ogni n E N corrisponde uno e un solo elemento di .Il, che indicheremo con 4ft. Consideriamo ora un insieme infinito B C A9 e sia K l'insieme degli n che conispondoDo a elementi di B:

K={neN:aneB}.

54

I numeri ,.

Ii I Cop_ 2

Chiamiamo 8) il più piccolo tra gli elementi di J((tale elemento esiste per il principio di induljone), 712 quello inunediatamente successivo (cioè il più piccolo degli elementi di K2 = K -{nl})' n3 il più piccolo degli elementi di KJ = K'2-{n2}, e così via. Gli elementi

b I = a...;

= (1"2; IIJ = Bn 3 ; ...

appartengono per costruzione a 8, cosicché la conispondenza n -+ 6ft associa ad ogni n E N un elemento di 8. Questa corrispondenza è evidentemente iniettiva, dato che tale è la conispondenza n -+ ano Facciamo vedere che essa è anche surgettiva. Osserviamo per questo che si ha I < nl < 82 < n] .... II e dunque n, > k. Supponiamo ora che esista un elemento b di B che non coincide con nessuno dei 6,. defirùti sopra. Poiché b E A, sarà b = a. per qualche intero s. D'altra parte. siccome b non coincide con nessuno degli elementi ani

,... ., il numero s dovrà appartenere a tutti gli insiemi Kj (j = 2,3, ". .). Questo è assurdo, dato che, come abbiamo osservato, risulta

mio KII+ t = n. + I > S + 1 > s

e dunque s non può appartenere a K.. I. . Si vede subito che l'unione di due .insiemi numerabili è nwnerabile. Siano infatti A e B due insiemi numerabili

e siano

a" (1,2, 43, ... bl, h2, b 3 , ... le successioni degli elementi rispettivamente di A e di B.. La successione

al, bl, G2t

, 4], ":3,...

è una numerazione di A u B. Allo stesso modo si può procedere per l'unione di tre, quattro o più insiemi numerabili. Del tutto analogo è il caso di un 'infinità numerabile di insiemi finiti; basterà infatti considerare prima tutti gli e1ementi del primo insieme, poi tutti quelli del secondo, del terzo, e così via.

Teorema 7.3 L'unione di un'infinità numerabile di insiemi numerabili è un insieme n umerabile.

Dimostrazione. Naturalmente non si può procedere come sopra, prendendo prima gli elementi del primo insieme, poi quelli del secondo, e così via, perché non si aniverebbe mai al secondo insieme, dato che il primo ha infiniti elementi. Né si può far meglio prendendo prima tutti i primi elementi, poi i secondi ecc., dato che, essendoci infiniti insiemi, non si arriverebbe mai nemmeno a esaurire gli

elementi di indice l. Si può allora operare nel modo che segue. Siano Jf) B, C, D ecc. gli insiemi in questione, ognuno dei quali numerabile, e siano

al, a2, G3, 04, ... b.,

, b 3 , 641

Cl

C2, c], C4, dI, d2, d3,

, ...

le successioni degli elementi rispettivamente di A, B, C, D ecc. La successione

al t G2, 6., a]

b2, Cl, a4, 113, C2, .d1, aS, ...

fornisce una corrispondenza biunivoca tra N e l'unione di tutti gli insiemi dati.

.

Un caso particolare, ma di una certa importanza, è quello delle frazioni. È chiaro che gli interi si possono considerare come frazioni con denominatore 1.. che così risultano numerabili. Sono alttesì numerabili le frazioni di denominatore 2, quel1e di denominatore 3, e così via. Ne segue per il teorema precedente che l'unione di tutti questi insiemi, cioè l'insieme di tutte le frazioni, è un insieme numerabile. Se poi si osserva che i numeri razionali si possono identificare con un sotto- insieme delle frazioni, e preci

amente con quelle che hanno il numeratore e il denominatore primi tra loro. si può concludere dal teorema 7.2 che è anche numerabile l'insieme Q dei numeri razionali.

Teorema 7.4 L'insieme dei numeri algebrici è numerabile.

Dimostrazione. Ricordiamo che un numero reale Q si dice algebrico se è soluzione di un'equazione algebrica P(2;) = O, dove P(7:) è un polinomio a coefficienti interi. Ad esempio; ogni numero razionale q = m/n è algebrico; dato che è soluzione dell'equazione 712: - m = O, a coeffìcienti interi. Analogamente, è un numero algebrico ,;2. che è soluzione dell'equazione

2 - 2 == O. Se P(s) è un polinomio a coefficienti' interi, definiamo lunghezza di P la somma del grado di P e dei valori assoluti dei coefficienti di P. Ad esempio, la lunghezza di x2 - 2 è 5. È chiaro che un polinomio a coefficienti interi ha lunghezza almeno 2 (l'unico polinomio di lunghezza 2 è 2:), e cbe i polinomi di lunghezza fissata M sono in numero finito. Dato un numero algebrico a, diciamo che ti ha lunghezza L se è radice di un polinomio di I

ghezza L ma di nessun polinomio di Junghezza minore di L. Ad esempio

I ha lunghezza 3 (essendo radice de) polinomio % - I), mentre ,;2 ha lunghezza 5.

Da quanto detto sopra, l'insieme dei numeri al gebric i di lunghezza data L risulta finito

dato che sono in numero finito i polinomi di lunghezza L e ognuno di essi ba un numero finito di radici. Ne segue che 1'insieme di tutti i numeri algebrici, unione di un 'infinità numerabile di insiemi finiti, è numerabiJe. .

Si potrebbe a questo punto pensare che ogni insieme sia numerabile, ad esempio che sia numerabile l'insieme dei numeri reali. Niente di più sbagliato; si ha infatti

Teorema 7..5 L'insieme dei numeri reali non è numerabile.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che R sia nwnerabile. e sia

ah (12, Q3,...

la successione dei numeri reali, che supponiamo scritti in fonna decimale (Lezioni, cap. 2,

9). Definiamo ora un. numero reale p = O, 131{hf33 . .. come segue. Se la prima cifra decimale di al è diversa da 5 si pone {:Il = 5. altrimenti fJ. = 3. Analogamente, se la seconda cifra decimale di Q2 è diversa da 5 si pone P2 = 5, alnimenti f32 = 3. In generale, se 1a n-esima cifra decimale di a,. è diversa da 5 si pone /J. = 5, alttimenti fJ. = 3. TI numero {3 così definito non può far parte della successione al, Q2, Q3, ... dato che esso differisce da Q I per la prima cifra decimale, da al per la seconda, da £¥3 per la terza, e così via. Ma allora l'applicazione n -+ a. non poteva essere surgettiva, contro l

ipotesi. .

Fardzi

89. Dimostrare che. se A e B sono due numeri interi primi tra loro e a è un numero positivo e diverso da l, allora il numero

log.A lo&a B

è imiZionale.

90. Una successione è un

applicazione U che ad ogni numero naturale ft fa COIrispon.. dere un numero reale Un. Sotto quale condizione una successione può costituire un modello di N?

'1. Dimostrare che l'insieme dei numeri iJTazionali non è numerabile. È numerabile l'inlervallo (O, 1]1

92. Una parola è un insieme finito di lettere den"alfabeto (italiano), come ad esempio sneuhn. Dimostrare che l'insieme delle parole è numerabiJe.

8 La topologia della retta reale

Ricordiamo dalle Lezioni (cap. 1,

5) alcune nozioni fondamentali. Un insieme A C R si dice aperto se per ogni :r e A esiste un intorno di x contenuto in A. Un insieme si dice chiu.fo se il suo complementare è aperto. Se BeR, si chiama del.jvato di B l'insieme DB dei punti di accumulazione di B. e chiusura di B l'insieme B = B U DB. Si chiama infine frontiera di B l'insieme IJB dei punti x tali che in ogni loro intorno cadono punti sia di B che del suo complementare. Un insieme K C R si dice sconneS30 se esistono due insiemi apeni A e B tali cbe A n K e B n K sono ambedue non vuoti, K C A U B e A n B = 0. In caso con ttari o, K si dice connesso. La nozione di insieme connesso non è di grande importanza in R.. Infatti si ha il seguente

Teorema 8.1 J soli insiemi connessi K C R sono gli intervalli (eventualmente illimitati da una o da ambedue le parti)..

Dimostrazione. Sia K un insieme connesso; posto do = inf K e b = sup K, facciamo vedere che K :J (a, b). Se ciò non fosse, esisterebbe un PUDtO 2:0 compreso tra a e " che non appartiene a K. Se poniamo A = (-00,3:0) e B ::; (:1:0, +(0), A n K e B n K sono Don vuoti (dato che, per la definizione di estremo inferiore e superiore, sia tra a e

o che tra :1:0 e li devono cadere punti di K) e tali che AnB = 0,e AUB = R - {xo}:J K. Ma allora K sarebbe sconnesso, contro l'ipotesi. In conclusione, K è l'intetvallo (a, b) più eventualmente uno o ambedue gli estremi. In ogni caso, K è un intervallo.. . Un rU.'I11tato di una certa imponanza è il seguente, che caratterizza gli insiemi aperti di R.

Teorema 8.2 Ogni insieme aperto non I1UOtO A, di R. è unione finita o numerabile di infervalli disgiunti.

Dimostrazione. Per ogni :z: E A, sia J

il massimo interVallo contenuto in A e contenente 3:. Osserviamo che, se Jz e J, sono due tali intervaUi, allora o sono disgiunti (J

n J, = 0) o c

incidono, dato che, se hanno un punto in comune, allora J s U J, è un intervallo.. Dobbiamo far vedere che gli intervalli J s disgiunli sono io nwnero finito o, aI più, un 'infinità numerabile. Per semplicità, supponiamo che A sia limitato e cbe sia contenuto in un

terVallo Q di'lunghezza L. Gli intervalli Jz non potranno dunque avere lunghezza ., maggiore di L. mentre al più uno potrà avere lunghezza compresa tra L/2 ed

L, dato che se ce ne fossero due si dovrebbero sovrapporre. Consideriamo ora quelli di lunghezza compresa tra L/4 e L/2; di questi. per la stessa ragione, ce ne possono essere al massimo 3. Continuando, ci sono al più 2

- I intervalli di lunghezza compresa tra L/28 e L/2,-I. AI variare di 8 tta I e 00 si trovano tutti gli insiemi J z , che dunque sono in numero finito (se l'estremo inferiore delle loro lunghezze è maggiore di zero) o al più costituiscono un "infinità numerabile. .

Esercizi

93. Completare la dimOSb'azione del teOrema precedente considerando il caso che A non sia limitato.

Sia A un insieme di R.. Un punto x E R si dice interno ad A se esiste un intorno di :t tutto contenuto in A; si dice estel.no se esiste un intorno di x che non interseca A. Un punto 'Che non è né interno né esterno è evidentemente un punto della frontiera 8A" dato che in ogni suo intorno cadono sia punti di A che del complementare CA. Si chiama parte inte,-na (o inrerno) di A, e si indica con AO, J'insieme dei punti interni di A, ed esterno di A l'insieme dei punti esterni. In genere quest" ultimo non ha un simbolo che lo denoti (talvolta si indica con A e , nel qual caso la parte interna si indica con AI), perché coincide con la parte interna di CA.

Esereizi

Trovare i punti interni e i punti di frontiera degli insiemi E qui definiti:

'4.. {:t E R : %2 < -3;}

95. (0 , 1)

96. [O, II

98. {%=

; BEN} 100. {% =

; p,q E N, q < IOO}

97. (-00, O)

00 99. U (2n - 1, 2n.) 11-= J

101. {,;:: 5; p,q E N, q dispari}

102. N

103. {z E R: %2 +2(1%+ b < O}

104. Dimostrare che per ogni insieme A si ha AO U (C A)O U DA = R. 105. Provare cbe, se Q è l'insieme dei nwneri razionali, si ha fl' = (CQ)O = 0 t e oQ = R.

I0'. Provare che AO è il massimo insieme apeno contenuto in A" ovvero l'unione di tutti gli insiemi aperti contenuti in A. Di conseguenza, A è aperto se e solo se AO = A.

107. Dimostrare che A = A U BA.

108: Sia A un insieme &peno. Dimostrare che 8A non può avere punti interni.

109. Si può dire lo stesso se A è chiuso? E se non si fa nessuna ipotesi su A?

IIO! Sia K un insieme chiuso. Dimostrare che esiste un insieme E tale che 8E = K.

9 Numeri complessi

Ricordiamo che un numero complesso z si può scrivere sia in forma c arte siana: z = a + ib, sia in fonna trigonomettica: z. = peiV' = p(cos Il' + i s

n f{). Le relazioni tra le coordinate trigonometriche p, rp e quelle cartesiane a, b sono date dalJe formule

p = va 2 + IJ2 a" b cos ti' = -; sm tp = - p p

O\1Vero

a = p cos

; b = p sin tp.

n numero p si chiama modulo di z, mentre l'angolo V'

che è definito a meno di multipli di 21[', si dice argomento di z. La forma trigo

ometrica è particolarmente adatta per eseguire prodotti (dunque anche rapporti, potenze e radici). Infatti, se z = pei'P e w = Rei.. si ha

zw = pRei(Ip+"'.

Risu1 . 1 J I itl') COS

- i sin \O d · oord " . ta mo tte z- = -e-"" = t e, toman o IO C male carteslane, p p 1 a "b - = -I Z a 2 + b Z cz2 + IJ2 ·

Esercizi

Mettere io fonna trigonometrica j seguenti numeri complessi: ,I 7 IU.

=i II1. z= -1 4J U3. z= I +s

U4.

= i(1 +i)

1 J +i 15. z = _ 1 .. -I

) n,. z = 3 -----:;= + .'JI

...v

6 ,...,.

r c I CUIi I ""CI#!.

U7. z=sÌDa+jcosa

4i U8. z = ../3 . 3+.

D A i(i - 1) 7. z= (i + 1)2

120. 2: = (I + 1)(2 - 21)

2 8 111. ti = ,j6 '..;2 S (- 6 -. 2)

3 122. z = . 4 (-1 +

)

Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:

123. I +i - I 2i 1-

I 2. 124.

+ -=-- 1 1-1.'-

125. 3 - i (I +i¥

1 -- I -i

Calcolare ZZ, z6. z'-2 se

2 I 126. z = .,fj + -; 3-i I

I 127. a = ')2 - I (1-1

128 '!1'_I

i . e - ---:---- I

Risolvere le seguenti equazioni:

129. (.8 + i)2 = (J3 + 'I)'

130. z6 + .1 3 + t = O

131. z3 = 'zr 2 . 134.. [z12 + Sz + lOi = O

132. r +ii= 1

. 133. .z2 +iJSJzl +6 = O

135. z2 + i..;3z + 6 = o. 136. Verificare che se 1.111:. I si ha I

+ i; I :. 1. 137. Sapendo che 1 +i è radice del polinomio z4 - sz3 + lar - 102+4, ttovare le altre radici.

Capitolo 3 Successioni

1 LiDliti di successioni

Una successione {a.} è WI'applicazione di N in R 0, più semplicemente, una Jegge che ad ogni intero n fa conispondere un numero reale ano Ricordiamo dalle Lezioni (cap.. 2. fi 3) le definizioni di limite di una successione..

Definizione 1.1 Una successione 4n ha limite finito L se per ogni é > O esiste un numero Il E R ta1e che per ogni n > v risulta lan - LI < f. .. .. .

Definizione 1.2 Si dice inoltre che fin -+ +00 [ara -. -00] se per ogni M E R esiste un ti E R tale che per ogni n > v j:isulta 4u > M [aD < M].

Esempio 1.1 Si ha

lim (n - .[n) = +oo

.-+00

Infatti n - ..fR = ..fR<vn - I), e dunque 11 - ...;n > ...;n non appena n > 4. Dato allora un numero reale M, si avrà n - vn > M non appena si prenda n > Il = max(4, M 2). . Come si vede dal1' esempio precedente, non e .!,

Q_ ca!co I.@!

iJ .fll!gijQr _!.

!

j

j1

_.

II (cosa che nell'esempio si sarebbe potuta fare a gevolmen te risolvendo la disuguaglianza 11 -

> M e trovando n > (1 + 2M + V I + 4M}/2 se M > O e n > I se M < O). È invece sufficiente trovare un valore di v a partire dal quale la disuguaglianza richiesta è verificata. Questo in generale è più semplice che non trovare il 1/ più piccolo, cosa che si può fare solo in casi molto particolari.

U.,c.U;,J,J'VI,. I \;.up. J

Esempio J.2 Si dimostri che

li n+sinn _ O m -. n.

oo n 3 - n 2 + I

Risulta In + sin nl =E; n + 1 < 2n, mentre n 3 - n 2 + 1 > n 3 - n 2 = n 2 (n - I) > n 2 non appena n

2. Ne segue che per ti > 2 si ha

2

1ay.1 < -, :.

n tvl

cosicché per avere I Bn I < E basterà prendere n > ti = max {2, 2/ c }.

.

Esercizi

Verificare. usando la definizione. che

I. 1im 71 2 + 4 =! R-tDD 2n 2 + 3 2

2. lim (3Ji - 4'1) = -00 "'

t'IO

3 I " tl3 - 3D

un =+00 Q-.oo n+ 2

4. lim (ti - .../n'l. - I) = O ,......DO

5. lim (n2 - n5mn) = +00 n....oo

ti. lim (2 ft - n) =: +00 ."'00

2 . 1 7. tiro n - nsmn = _ 0-00 3n 2 + cos ti 3

8 . . 2ri - 1 _ 2 . 1m -- D-OD m+2 3

9.. liro I + 2 x IO" =

n-co 5 + 3 x IO" 3

IO. lim IOIa. (I + 1) := O (o: > I) ,,

t'IO ft

11. lim

= ...L .....CO V

J2

12. lim

-l = o. ft

OO 3

Siano {Gn} e {6n} due successioni tali che

(a) Gn > O; lim Gn = I h-oo

(b) 16,.1 < 1 Vn E N.

Dire quali delle 8Sserzioni seguenti è conseguenza delle ipotesi (a> e (b):

13.. 311: 2an - 6n > O Vn > v

14. 3 lim (a,. + b n) n.-.co

15. 3 lim Ran + bn n

oo n + I

16. 3v : Gn +11. > O 'In >

· t -,..,., "". ..,..... "'

uu,u"'u

UJ

17

3 lim b. +

+ .. · + b. ft

OO n

18

lim a,.6a = I n

oo

19

3K > O : Ha. + bn > O \In E N

28. 3 1im (

+ Ib"In). n-tOQ

Negli esercizi 1-12, iJ limite della successione era dato, e si trattava solo di applicare la definizione per verificame l'esattezza. Molto spesso però è assegnata solo la successione, e si tratta di esaminare se essa ha limite ed eventuabnente di calcolarlo. Un caso importante di successioni che hanno limite è costituito dalle successioni monotòne, cioè dalle successioni crescenti o decrescenti. Queste successioni hanno sempre limite, che nel primo caso (successioni crescenti) è uguale all'estremo superiore, nel secondo all' estremo .inferiore.

Esempio I 3 n Consideriamo la successione a n = I + _ k + · . ,,+ . b - 2Jn = E -* - 2..;n. v2 v n k=1 vk Risulta aa+1 = a.. + 1 _ 2 "j n + 1 + 2..;n = a.. + 2yn(1£

I) - 21£ - 1 < a", ,fn + 1 n + 1 dato che si ha 2 Vt1 (n + I) < 271 + I. La successione ara è dunque decrescente. Ne segue cbe essa ha limite, uguale all'estremo inferiore- Per dimostrare clie il limite è finito, osserviamo che risulta

I 1 _-

I= < < + v k + 1(2k + I +: 2

) 4 v' k(k + I} v' k + 1 . . I I 1 (1 1) < 2 v'k(k+ I)(v'k + 1 + v'k> = 2 .{k - v'k + 1

e dunque

,

ti 1 a 1 I Gn+1 = di + E(a

+1 - al:) > -1 - . 2 E (fi. r Jk+f) = . 1:=1 , i=I V k Ie + I =-I-! (I- 1) . 2 v'
n + 1

La successione 4n è allora limitata inferiormente, cosicché il limite è finito; passando aI limite nella reJazione precedènte, si ottiene inoltre

I - 3 1m a" > - 2 " · B-fOO

Come si vede dall' esempio precedente, non sempre si riesce a calcolare espli-

citamente il limite di una successione convergente.. Anche nei casi in cui ciò è possibile, non ci sono in genere regole fisse per il calcolo del limite, e ci si dovrà spesso affidare all " intuizione per immaginarsi quale esso possa essere.. salvo poi dimostrare l'esattezza di quanto si era congetturato. Naturalmente saranno di aiuto sia i limiti notevoli che i teoremi dimostrati nelle Lezioni, in particolare il cosiddetto teorema dei due carabinier (cap. 2, Teorema 4.1): se a n < hA < CB e se lim 4n = lim c., allora anche la succe3sione b. avrà lo stesso limite. Non di '"

DO n

oo rado sarà utile anche ricordare i metodi di dimostrazione usati, dato cbe in molti casi si ha a che fare con semplici variazioni sul tema.. Per comodità del lettore, ricordiamo alcuni limiti notevoli:

(J) lim vA = 1 (A > O) n.

oo

(2) lim n'A-R =O(A > I) R

OO

(3) lim n-aln n = O (a > O) ,,

oo

(4) lim v'R = 1 ft

OO

(5) lim (1 + 1) 8 = e n-.go n

(6) lim (1 +

) ft = e Cl . R-OO n

È anche interessante il limite del rapporto tra due polinomi. Se P(

) = Gmz m + +... + al

+ 00 e Q(z) = bk Zk +... + b1z + 60, si ha

100 P(n) = O b

CO Q(n) lim P(n) = 4m R-fCO Q(n} b

lim P(n) = :I: 00 "-+OCJ Q(n)

se m<k

se m=k

se m

k,

dove si ba il segno + se 4m e blc sono dello stesso segno, e il segno - se sono di segno opposto.

Esempio 1..4 Si calcoli lim n (.ti n + 2 - .(in) . n

CIO

Per calcolare q uesto limite basterà ricordare che a J - 6 3 = (o - b)(a 2 + ab + b 2).. Posto allo ra a =

n + 2 e b =.(jft. si ottiene n (

n + 2 - fR) = 2n , {j(n. + 2)2 +

n (n + 2) + .:Jfi2

dalla quale segue facilmente che il limite richiesto è +00. .

J I Li,niti di sut:t:t1ssio/,;

65

Esempio J.5 Si calcoli

lim n (r;;+t - I) ."'00 V n+3 4

Se moltiplichiamo e dividiamo per J::

+ I. otteniamo, dopo aver sempli- ficato, n(J::

-I)= (

) ' (n+3) _ 3 + 1 n+

e quindi il limite richiesto è - I. .

Esempio 1.6 Calcolare il limite

li

v nlnn. h

OO

Per n > 3 risulta I < In n < n e dunque

vn < vn Inn < .:{;j4

Poiché sia la prima cbe la terza successione hanno limite I, si avrà anche

lim V' n In n = 1. . R-OQ

Per il calcolo di alcuni limiti può essere utile il seguente risultato, per la dimostrazione del quale rimandiamo alle Lezioni (cap. 2.

6; cfr. Esercizio 6.4).

Teorema 1.1 Sia {4ft} una. successione Q termini positivi. Se risulta lim a,,+l = L, allora si ha anche n-+oo a,.

lim .yra; = L. n

oo

Esempio J.7 Si calcoli il limite

lim V (2R) . fl-OO n

J

Risulta

(2n + 2) n+I C:)

(271 + 2)(2n + 1)2n ... (n + 2) - (n + I)!

n!

2n(2n - I) ... (n + t)

(2n + 2)(2n + I) (n + 1)2

e dunque

(2n + 2) liro n + 1 = 4. n-DO (

)

Per il teorema precedente. si ha allora anche

100 i/ (2n) = 4. . n

co n

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti:

. -In 3 +90 2 - v.", 4 + I 21. 11m 2 n-fag n + 2

22. lim v'n 4 + 9ft - vn 4 ... 1 'h-OO n 2 + 2n

23.. lim v n 4 + I ft

24. lim v2n 5 +1 n

co

25.. lim n n

oo 2 ft _ 3 ft

,,2 26. lim - ft

CO ft!

"27. lim 1&2 + 1 n

oo 2 ft + S-

28. lim (,;n+T - ft,;n=T) ..; n 3 + I _

co

29. lim n20... 4ft 4 + 1 ti-CC) D!

30.. lim n (f);I -

) n

co V I T ;,2 V J - n

31. lim .y'2 n + 3 ft R-fOO

32. lim (8 + 1)6 - (1& - 1)6 n-DO (n + 1)5 + (n - I)S

33.

n(.J n 2 +n -n)

34. lim (1 + 1.) ti n-fao n!

J I L.imi'; di succ

ssioni

35. lim V G 2n + I {a e R} n-.co

37. 100 (2!...- - !..:!:I) . .-'00 n + I no

39. lira sin n 'n-DO n

'1 41. 100 (_])n !!:. ft-.co ufa

43. lim V'Q! ,,

co n

45

lim 1+J2+

+...+{Yn n-oo n

47. lim lnn! n-.co nln n

49. lim (n - Vi) (Vl + 2 - l) n-oo n.

51. 1im n (

8 + sin 2 1 /,. - 2) n....oo

53. lùn i/3A+2 n-.oo u 2

55. liJn "n+2 n-oo n

57. lim (n../fa - 2") .-"(10

59. tiro 1 n (1 - ti} n-tco 1 + n. 2

61. lirn [l + (-1)fl] n-oo

63. Jim 4n - 3 X 2" . .-- (S X 2,,-1 - 3)(

-

)

'5" lim (n 4 + 3 _ ,,4 + 3n) .-co n. n. - 2

". lim (1 + 1) 2'1 ft

OO n

67

) ' In (I +ta +u 3) - 3 lnn

. 1m ( ) "-'00 J " 1 - cos n Z

38. lim (2t... _ 7&2 + 1) 11-'00 n. + 1 R

40. lim n! "-'00 n ft

42. 1im

.-'00 n

44. lirn

("'n. + 1 - JR) ft-'CO

46. lirn V'n(n + I). . . (271) n-.co ti

48. lim V'D. " o/n + I . - ..

n-DO

so. 100 In n 3 n

co 10 (n 3 + 3n 2)

52. lim {(JD) 1& - 3 R } n

co

2 - 54. lim n +nSU1D ......00 I + n 2 + ti

S(j. lim n 2 (Inn¥ ,,

oo

+)

58 lim v'n:! + I +.Ji · ,.....CO

ns - 1 - .Ji

fiO. lim t12- n

oo 3 ft

62

lim (..;n -

fl3 - n + sin n) n-.oo

(3 3 1) ct4 lim n n- · n-<XJ n 2 + I - n 2

M. lim (,,3 - 2 _ ,,3 - 2n 2) 71-'00 n + 2 n + I

68. lim n22-

- ft

CIO

68

s"t.:t O eS3;oni I. Copo 3

69. !

n[l- (1- ; f]

70. lim (

n 6 + n 2 - 1 - 0 2) 0....00

71. lini 3 ft - (_2)d n

(Q 3 11 + 1 + (-2)11+1

72. lim (2n) n-.oo n .

73. lim n (,;n:;:r - -1ft) n-+oa

fI1I 74. lim (1 + .1) n-+co n!

75. Jim (1 + L) 1Ir n-+oo n"

.76. 100 1 0325 n n-tca n,2 - 3

". lim (1 + 2 3. 4) " n-+()O ft + n

2 v'd nn

+Inn2 78. lim 2 .-+00 n

I

1101 ' IO vi d n .)2+1n n

79. 2 D-.t)a n + I

80

lim si

(21r V n 2 + ..;n) n-DO

81. IÙ11 V (3ft) "-+00 ti 83. lim

(hn) .....00 kn

81. lim V (371) n-+oo 2n

84. lim n Q An' ft -'00 o

8S I . (1 t 1) . un + +.0.+ 11-+00 -../n 3 + I -./n 3 + 4 "n 3 +"2

86. Urn 2a \V ft ft

CO

87. lim (V'2 _ J) ft n

oo

Dire per quali valori reali di G esistono finiti j limiti

88. lim (1 + ",2 + I) " p.....OO ft, o

S,.. lim (a n + nO) D

OO

90. Dimostrare che, se 4n e h n sono due successioni posjtive

risulta

tim Va. + Il. = max { lim

, tim Vh: } n-+oo n.....oo 11-+00

opi volta che esistono i limiti a secondo membro. 91

Provare che, se On ..... L. allora la successione qn = a] + 42 +... + G,a ha anch'essa limite L. n 92. Si dimostri che risulta lim

= lim (Bn - On-I) non appena il secondo limite n-.ao ft n.-aa

esiste.

93. Sia an una successione tale che Q() = 6 e I S 4n+J . <

.. Dimostrare cbe

.... 1 iniite e trOVare il suo .valore.

94

Dimostrare che l'equazione 3",1 + x - ! ha una sola soluzione reale Xn. Trovare il n limite della successione %ft.

Esempio 1.8 Per ogni numero razionale positivo r = k , risulta p

..

n{ (1 +

r - I} = r.

Se r è un intero positivo, si può applicare la formula del binomio:

n{(t +

r - I} = ÉG)nI-',

da cui segue subito

2

n{(1 +

r - I} = (

) =r.

[1.1]

Supponiamo

ra r = k II Si ha per ogni {J reale p

(jP - 1 = <P - 1)(1 + ,8 + .8 2 + . . . + ,8P- J),

e, prendendo {J = a. k/p ,

ol

/p - I _ a" - 1 -] + a"/p + ... + ai(P-I)!J"

Prendiamo ora a = I +! e moltiplichiamo per n; si ottiene n

t r n{(I+

)'-I} n{(t+;) -I}= (If (I)r<P-IP 1+ 1+- +....+ 1+- n n

da cui, tenendo conto della [1.1] e del fatto che ognuno dei p addendi al deno.. minatore tende al, si ottiene il risultato voluto. Osserviamo che il risu1tato resta vero per ogni valore reale di r (vedi più oltre, cap.. 6, Esempio 2.2). .

Esercizio

95. Dimostrare la relazione dell" esempio precedente per r razionale e negativo.

2 Massimo e minbno limite

Quando il limite di una successione non esiste, può essere di qualche interesse calcolare il massimo e il minimo limite. Ricordiamo (vedi Lezioni, cap.. 2, fi IO) che il massimo limite di una successione a. è l'estremo inferiore dei ma

inT8nti definitivi di ti.. Il o anche il massimo dei possibili limiti delle successioni estratte dalla a n . jl minimo limi1e poi è l'estremo superiore dei minoranti de

o anche il minimo degli eventuali limiti delle successioni estratte..

EJempio 2.1 La successione a. = {V'i} (si ricordi che {z} è la parte frazionaria di z) non ha limite, e risulta mulim {

} = I; minlim {

} = o. n-too R

OO

Poiché O e t sono rispettivamente un minorante e un maggiorante della succes- sione {

}

sarà sufficiente trovare due successioni estratte che convergano l'una a O e l'altra a 1. La prima è subito trovata: basta infatti prendere n = k 3 per avere {V'i} = o.. P er la s econda, osserviamo che, se 0< f < I, si ha (1_£)3 < I-f <] _(3 e dunque .r; 1 - E 3 > 1 - E. Allora, preso n = k 3 - I, si ttova

R t (I) 1 k> n=k I-->k 1-- =k-- k 3 k 3 k 2 ·

Ne segue che

{ y.' k3 - I } > 1 - ;2 '

e dunque la successione {¥B} ha massimo limite I. .

Esempio 2.2 Se Q è un numero i1Tazionale, risulta

maxlim{na} = 1; minlim{na} =0. n--(IO n

oo

Cominceremo col dimostrare la prima di queste relazioni. Dato che {na} < 1, basterà provare che per ogni £ > O esiste un n con {nO!} > 1 - E.

.I I MasSlmD t. nitilimò limite

II

Useremo il cosiddetto principio della piccionaia, che può essere enunciato come segue: se in una piccionaia ci sono N cubicoli e N + 1 piccioni, allora ci sono almeno due piccioni in uno stesso cubic%. Dividiamo l'intervallo [O, I] in N parti uguali

ognuna di lunghezza minore di £, e consideriamo i numeri { ka }, con k = 1, 2, ..., N + I. Poiché a è irrazionale, questi numeri SODO tutti distinti. Infatti, se fosse { ka} = {ma} con k =I m, si avrebbe ka = p + {ka} e ma = q + {ma} = q + {ka} con p e q interi, e dwique a sarebbe uguale a (p - q)/(k - m), cioè sarebbe razionale. Per il principio della piccionaia, due di questi numeri cadranno neJlo stesso intervallino; in altre parole, ci saranno due interi p e q, con p < q, tali che I { qa} - {pa} I < £. Ricordando che

{ {a}-{&} a-b - { }- I-{b}+{a}

se {a} > {b} se {a} < {b}

si può concludere che esiste un intero m = (q - p) tale che o {ma} > I - E o {ma} < E. Se si verifica la prima eventualità non c'è più nulla da dimostrare. Supponiamo allora che risulti {ma} < f i e consideriamo i numeri {sma} con 8 = 2, 3 ecc. Se osserviamo che

{ {a} + {b} a+b - { } - {a} + {b} - I

se {a} -f: {b} < 1 se {a}+{b} > 1

concluderemo (si noti che, poiché i numeri {ka} sono tutti distinti, si ha sempre {ma} > O) che esiste un intero ,. tale che, se s < r, {sma} = s{ma} < I, mentre r{ma} > 1. Risulterà allora 1- {(r-I

a} < r{mo:} - (r-I){mo:} = {ma} < f e dunque { (r

1)ma} > I - f:. Abbiamo quindi dimostrato cbe per ogni f > O esiste un intero ti tale che {no:} > 1- E, cosicché il massimo limite della nostra successione è 1. Per dimosb'are che il minimo limite è O, basterà osservare che il ragionamento precedente si può ripetere per la successione {-na}, e che dunque anche questa ha massimo limite I. D'altra parte si ha

{-a} = 1- {a}

e dunque

minlim {na} = rninlim (1 - {-na}) =] - maxlim {-na} = O, n

oo n

ft

cosicché il risultato è completaJ1:lente dimostrato. .

72

SI, n.essiolJ i I CQP. j

Esercizi

Trovare il massimo e il minimo limite delle successioni seguenti:

96. (1 + sin n]

97. 1&2 + 3",+ 2 Sn 2 -4

98. I + (-I)n

99. -.,/n 2 - I - ti

100. n(-1)"

101. (- 1)° + I + (_I)" n 2

102. n(n + 2) _ L n + I n 2 + I

]03. R - [v'ii]

) 04.. 1 + 2 + 3 + . . . + n n

105. n?-/3 sin n! n+I

106. 1 + 2 + 3; . . . + ti. n

IO '" n I . 11' , I. ....:. sm n - 2 ft 2

108. arctg (- 2)ft

09. Vf (-I)tlft

110. n +] sin ftlr O . n I

3 Successioni definite per ricorrenza

In molti casi la successione di cui si vuole calcolare il limite è definita per ric

assegnando il primo tennine e la legge con la quale il temUne a n + 1 si può ricavare dal termine a.,., che lo precede:

{ ao=a a n + I = leaII,).

[3.11

A partire dunque da] primo tennine ao = Q, si potranno detenninare, per mezzo della seconda relazione, i tennini

01 = f(a) a2 = !(al) G3 == 1(42)

... . e COSI VIa. D problema del calcolo del limite, se esiste, di una successione definita per ricorrenza si divide in due parti distinte: la dimostrazione dell'esistenza del linùle e il suo calcolo effettivo. In molti casi quest'ultimo problema è più semplice .del pnmo. .

Esempio 3.1 Si calcoli il limite della successione definita da

1 ao= - 2 40+1 = a;.

Cominciamo a far vedere cbe la successione 4n converge, dimostrando per induzione che

o < a n < I.

Questa relazione è vera per n = O; inoltre,

e la si suppone verificata per a,,

lo sarà anche per (In+ 1 = a

. Di qui segue che la nostra successione è decrescente; infatti, essendo tutti i suoi tennini compresi tra O e I, risulterà

0,..... = a; < 40.

Abbiamo così dimostrato che la successione a n è decrescente e positiva e dunque è convergente. Sia L il suo limite; passando al limite nella relazione che definisce la successione, si ottiene

L = lim an+1 = 100 a; = L 2 , n

oo n-.co

e dunque si deve avere L = O o L = I. Quest'ultima eventualità è esclusa, poiché la successione è decrescente, e dunque

lim a,. = o. . "-'00

Esempio 3.2

Cambiamo ora il primo tennine della successione, ponendo ao = 2, e la..c;ciamo inalterata la legge di ricorrenza an+ I = a;. In questo caso si dimostra, sempre per induzione., che la successione 4. è crescente e non è limitata superionnente. Ne segue che

lim a n = +00. . a-.oo

Osserviamo che le successioni degli esempi precedenti e, più in generale, le successioni definite da

ao=aER

0,,+1 = a;

si possono calcolare esplicitamente per induzione, ottenendo

2" Gn=Q . Risulta aHora lùna.={

se lal <] se lal = l .-'00 +00 se lal > l..

In generale però non è possibile ottenere un'espressione esplicita per il tennine generico di una successione

corrente.

Esempio 33 Studiare la successione 10

40=0>0

an. Clu+I = 1 + Ora ·

. Si vede facilmente per induzione che rotti ì termini della successione SODO positivi. Ne segue che 1 +a n > 1, e dunque che Ou+ 1 < a.., cosicché la successione risulta decrescente. Esisterà allora finito il limite L. Passando al limite nella espressione che definisce la successione per ricorrenza, si ottiene

L L= I +L ' da cui segue L = o. . In generale. se la successione a" è definita dalle relazioni [3.1], il suo eventuale limite si dovrà ricercare tra le soluzioni dell'equazione

L = f(L),

comprendendo tra queste anche iJ, valore +00 [o -00] qualora risulti lirn f(x) = +00 [O lim f(z) = -00] .

-

s

-

Che poi la successione a n tenda effettivamente a uno dei valori così ottenuti, bisognerà dimosttarlo indipendentemente, u tili7:7.an do di nuovo la formula di ricorrenza. In alcuni casi, come abbiamo visto sopra, la successione è monotòna, e si può allora concludere immediatamente che il limite esiste; in altri casi ciò non avviene e la conoscenza dei possibili limiti può aiutare a dimostrare la convergenza.

J I

Esempio 3.4 Si studi il comportamento della successione definita dalle relazioni { ao=a > o 4ra+ I =

. I possibili limiti della successione sono O, I e +00.. Se a = O si ha a n == O, e dunque il limite è o. Supponiamo dunque a > o. È immediato vedere che se O <. a < 1, la successione a n è compresa tra O e I ed è crescente, mentre se a > 1 la successione resta maggiore di] ed è decrescente. In ogni caso esiste il limite, che non può essere né O né +00. Si ha allora

lim Bra = 1.. . .-+00

7 e

JJ' Esempio 3.5 Si studi il comportamento della successione { ao:;;:a>

4n+1 = _ c;- . van

) possibili limiti della successione 4n sono le soluzioni dell' equazione L = I/VL; dunque L = I.. TI valore +00 non è da considerare perché lim 1(2:) = o. s

oo Si vede fac

ente che la successione Don è mODotòna; infatti se a,. > I risulta Bra+ I < I e, viceversa, se a. < 1 si trova an + 1 > I. I tennini risulteranno dunque alternativamente maggiori e minori di I; ciò suggerisce di considerare separatameute le due sottosuccessioni {02.} e {02.+ I }. Si ponga pertanto b" = 02,.; risulta I 1 ./L b b u + 1 = a2n+2 = =

= V un- . '; a2n+1 1 · y 0 2n Per l'esempio precedente la successione b. è monotòna e. converge a 1. Analoga- mente, la successione C n = G2n + I è monotòna e tende a I. Ne segue che lim a" = l. . n-.ca

Esempio 3.6 Si studi la successione { ao=a a..+ I =

. °n

76

uc.:(..I,..,)",'Utu I

U"'. .J

Deve essere ovviamente CL ¥ O. Possiamo limitarci a studiare il solo caso a > O, dato che se si cambia il segno di Q tutti i termini della successione restano invariati a eccezione del primo. L.unico possibile limite è L = 2. Se a = 2 si ha Bu = 2 e dunque la successione ha limite 2. Supponiamo dunque Q :I 2. Come nell'esempio precedente, i tennini della successione sono alternativamente maggiori e minori di 2. Consideriamo le successioni b

= "2ft e C n == G2n + J. La successione b n verifica la relazione b 8 _ a

_ b

1'& + I = a2ft + 2 = 2 - 8 - 8 . a 28 + I

Con un ragionamento analogo a quello degli esempi 3..1 e 3.2, si conclude che

100 6.=0 se a<2 e lim b,,=+OO se 0>2. ft

n

Consideriamo ora la successione e. = a2n+I. Questa successione verifica la stessa relazione di ricorrenza della b., ed essendo Co = Q1 = 8/0 2 risulta

limcn=+oo se a<2 e limcn=Osca>2.. R-toc) p-tCO

In ogni caso le due successioni G2ft e (I2f1+ t Don hanno lo stesso limite, e dunque la successione a n non ha limite. In conclusione,

{ 2 lim G n = n

oo non esiste

se 0=2 se Q =i 2.

Si noti cbe si poteva fare a meno di considerare la successione C RI dato che l'unico possibile limite per aft era L = 2. mentte i limiti della successione b. erano O o +00. .

Infine, in alcuni casi] 'equazi

e L = f(L) non può essere risolta esplicitamente, e quindi il valore del limite può solo essere dato implicitamente e calcolato approssim

vamente..

Esempio 3.7 Si studi la successione definita da

{ ao=a IIu+ 1 = arctg a,. + 1.

I possibili limiti deUa successione ara sono da ricercarsi tra le soluzioni dell' equa- zione

L-I = arctgL.

Se si traccia il grafico delle funzioni

- 1 e arctg x. si vede che esiste un unico punto ç in cui esse sono uguali; inoltre, per z >

si ha :I: - 1 > arctg x. mentre iJ conttario accade per x < €. Supponiamo ora che sia Q > E, e dimostriamo per induzione che tutti i tennini della successione restano maggiori di t. Infatti ciò è vero per il primo termine ao; supponendo che sia vero per aft si ha, poiché arctgx è crescente,

411+1 = arctga n + 1 > arctg

+ I =

..

Possiamo ora far vedere che la successione GR è decrescente. Infatti, poiché 4n è maggiore di

, risulta arctg 4n < ah - 1 e du

que

Gn+1 = arctga n +] < a,..

La successione aft ha dunque limite, che non può essere altro che

. In maniera analoga si nana il caso Q <

. . n valore di € può essere calcolato usando appunto il fatto che esso è limite della successione o.; nel nostro caso si trova

2,132268 . .. In genere, la fonna ricorsiva della successione rende particolannente agevole calcolame il limite (se esiste) per mezzo di un computer.

Esempio 3.8 (Algoritmo di Eron e)

7 E un metodò per il calcolo della radice quadrata di un numero positivo x mediante una successione ricorrente. Si consideri la successione defmita da

{ Bo=a¥o CIa+I =

(<<In +

). I possibili limiti della successione 4n verificano la relazione

L=

(L+

)._

-

e dunque L =

.JZ o L = ::i:oo. È chiaro che, se si cambia Q in -a, tutti i tennini della successione cmnbiano di segno, cosicché sarà sufficiente supporre Q > O, nel qual caso risulta a. > O per ogni n. 'In realtà, 1ranne al più il primo, tutti i tennini della successione risultano maggiori di IX. Infatti si ha CIa+I - -1%=

(a; +3: -2a.-I%) =

(an - -I%f > O. Non è difficile ora dimostrare che 4n è decrescente; infatti CIa+I -a,. =

(

- «In) =

R (,; - a:) < O.

Ne segue che il limite della successione esiste ed è vIZ, indipendentemente dal valore di a > O.. Se invece Q è minore di zero, la successione a,. tende a -.Ji. .

Esercizi

Studiare il comportamento delle seguenti successioni definite per riconenza:

U1. a..+ I = :. :

. · CICI > O I 113. tIn+ I = 2Bn ' ao

O

11S. dn + I = ,,/SBn , ao

O

2(2an + 1)]12. Cln+ t = J ti«) < -3 Cln+3 ! U4. a..+ I = 7t1n - :.. .
ICICII >

. ... 116. a..+1 = -Ha.. +

), 1Io;t'0

117. Clq+1 = sinGa,

us. a..+1 =muH.

} t

BGn 119. °n+I = 2ft f 1

, I 120. Gn+1 = '2 tJn + 1

121. an+ I = 2an + 1

122. An+1 = 4:, A] > o.

,,+1 113. 6n+ I = -Gn, al > O 1&

125.. Gn+1 = V

' 01

-1

124.. Gn.+ I = -!L. sn n+ I

124ii. 4,.+1 = a

+ 1, ao > o. 4

Si trovi il 100

, dove la successione Gn è definita per ricorrenza da n

oo

127. Gn+I = 24,. + I, G() > -1

128

an... = 3a. - no + I, G() > O

U9: tIn+ I = n(1+1n a,.), 41 = I.

Talvolta la relazione di ricorrenza coinvolge più di due tennini successivi della successione, e si presenta come una relazione del tipo

Zn+k = I(n,

,u 2:,,+ J, · .. ,

n+k-'I).

In questo caso, per innescare il catcolo dei tennini successivi si dovranno asse.. gnare

oltte a 2:0, anche i tennini z., X2, ..., Zk-I; i tennini successivi si possono ricavare uno alla volta dalla relazione data. Naturalmente la complessità del calcolo dell'eventuale limite dena successione cresce al crescere dell' ordine. Ci limiteremo a un solo esempio.

.J I .)Ut'

eS5'f1I1' UeJf/",e pel r rU}Ur:IIJ.U

F

Esempio 3..9 Si consideri la successione. definita dalla relazione

f&+] :J: n +2 = 1 + - Zn

e dalle condizioni iniziali Zo = Q! > 0,2:1 = P > O.. Si vede subito che tutti i tennini della successione sono positivi e dunque (almeno a partire da 2:2) maggiori di I. D'altra parte si ha

1 + 2:.+1 Zn I 1 2:.+3 = I + = I + - + -, :t n + I %.+ I Zn.

e dunque se n > 5 si ha X n < 3. Ne segue che la successione $. è limitata. Sia L = max lim Su e

= min I.im X.I Si ha 1 < À < L < 3 e, poicbé n-+oo R

OO

min lim

= 1. e max Jim "'-+00 x. L u-tCO

1 1 3;n = À '

si ottiene

2 L < I+

,

2 >' > 1+ L .

Moltiplicando la prima relazione per À

la seconda per L, si ottiene .À+2 > L+2. e dunque .À = L, cosicché la successione Zn ha limite. Le relazioni precedenti danno L 2 = L + 2, e dunque L = 2, dato che la soluzione -] è esclusa. .

Esercizi

Trovare il limite (se esiste) delle successioni seguenti, definite per ricorrenza:

130 Zn+1 · :l: n +2 = - 2:n

131. Zn+ 2 = v' :z: ;+ l +

con le condizioni iniziali :1:0 = a :> 0, %1 = P > o.

Esempio 3.10 Un caso piuttosto semplice è quello delle relazioni lineari:

BkZn.+k + Cli-Iz..i-l + ... + al

R+J + aoz. = o.

[3.2J

In questo caso si può dare un'espressione esplicita della successione Zn, o in altte' parole della soluzione dell'equazione [3.2]. Per questo cominciamo con ltos

ervare che, se le successioni x. e !1ft verificano la [3.2],]0 stesso accade per

tJ()

Succ:l!ssiolJ; I CQP. 3

ogni loro combinazione lineare A:J:fl + BYn o Ciò premesso 1 cerchiamo soluzioni della fonna

z. = AÀ",

che.. introdotta nella relazione precedente. conduce all'equazione caratteristica

P(À) == ak

k + ak_1A'-1 + ... + GIÀ + ao = O.

[3.3]

Se si indicano con A I, .À2, ..., "le le soluzioni di questa equazione, la soluzione generale della [3.2] sarà data da

zfl=AJ

i+A2À2+ .... + AkAt"

Le costanti AI, A2, ... o, Ai saranno detenninate dalle condizioni i tt17.iali. .

Esercizio

132. Dimostrare che, se À = a+ib (e dunque anche .À = a - i6) è una soluzione complessa dell'equazione [3.3]. allora. posto). = pei', si hanno le soluzioni reali So = ;a cosn" e !In = '" sin nt7..

Esempio 3.1 J Consideriamo l'equazione

%'t+ 2 - :1:,,+1 - 6z n = O.

L" equazione caratteristica è

À 2 - À :... 6 = O

e ha soluzioni .À = 3 e À = -2. Si avrà dunque

Zn = A3 ft + B(-2)"',

e le costanti A e B dovranno essere detenninate a partire dalle condizioni iniziali.. Nel nostro caso risulta ao + 2:1 B 3:':0 - :1 A= t = ,
5 5

e dunque lim Sg = :i:oo a seconda cbe sia A > O oppure A < O, mentre non tJ-tOO esiste se A = O.. .

J I SUCL'eSS;OlU definile per ,.;c.'orren1.0

8/

Esempio j .12 I numeri di Fibonacci 4n SODO definiti per ricorrenza da

an.+2 = Q,n+ I + 4ra

e dalle condizioni iniziali a.o = .al = 2. L'equazione caratteristica

À 2 - À - I = O d . . \ I ::I: J5 L 1 . '" a11 ha ra ICI A = 2 . a so uZIone e ora

_ v'5 + 1 (I + J5) f& -15 - 1 (1 - v'5) n a,,- J5 2 + J5 2 .

Si noti che, nonostante la fonna un po' irrazionale. i numeri di Fibonacci sono interi. I primi tra essi sono

2, 2, 4, 6, IO

16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, 1220, 1974, 3194, ...

Esercizi

133. Dimostrare che i numeri di Fibonacci sono interi.

Risolvere le seguenti equazioni:

134. Zn+ 2 - 2:E R + I - 6z" = O

135. So+2 - M R + I + 5z

= O

136. 2:.+2 - 2z n + I - 3zft = O

137. 2:n+2 - 2Zn+1 +4%n = O

138. 2Zn+2 - Zn+ I - Zn = O

139. Zn.+2 = '\I'% ft+ 12: n

140. Zu+2 =

+I%n

141 2:n+1 . Zn+2 = - Sra

141. Sn+2 = V% ;+1 +s

.

Esempio 3.13

Consideriamo le successioni a n e b n definite per ricOJTeDZa come segue:

an.+ 1 =

an+b,. 2

b ft . I = va n + I b...,

con valori iniziali al e b 1 positivi.

lj.l

ucceSSIon; I Cap. j

Vogliamo dimostrare che le successioni a. e b n convergono allo stesso limite. Poniamo z,. ==

. Dalle formule di ricorrenza si deduce facilmente

- an+1 _ f¥ n+l - Ja..+b,. - f¥ +ZA 2:.+1 - _ 6 - - b - 2b - 2

n+ I . R

Consideriamo dapprima il caso al < b., e dimostriamo per induzione che

n < l. Infatti ciò è vero per n = 1; se si suppone vero per n, si ottiene

{l+f :l:n+J = V

< VT = l.

Si ha dunque, per ogni f&, a,. < bill' Se mpre . dalle formule di ricorrenza si trova a,.+1 >

;(1,. = a.. e inoltre 11.+1 < v' b,.+Jbn. cosicché la successione a,. risulta crescente e la 6ft decrescente. In maniera analoga si dimostra che, se 61 > bJ, allora risulta Cl" > b I1 per ogni n e inoltre la successione fin è decrescente e la b n crescente.. In ogni caso le due successioni hanno limite finito. D'altra parte la successione x" ba limite 1 (vedi esercizio 125), e dunque lim aD = 100 b n . n

oo ft

OO Questo limite, che ovviamente dipende dai valori iniziali 41 e b., velTà indicato con V'(BI1 bl). La convergenza delle successioni au e b,. è piuttosto rapida.. Infatti (limitandoci al caso a I < b.) risulta 2 2 _ _bu+a n b,,-4n_I 2 2 b n + 1 - an+J - a n + i(bft - a,,+I) - 2 . 2 - 4 (h n - °n),

d . -/; b 2 2 .. I e unque, se SI pone Yn = V

R - a,., SI ottiene !Ju+) = 2 !ID- Infine

per calcol are \O(a I , &1), osserviamo che la successione v'

- a

!Ira ZI'Io ':" a. = mccos--- UCCOSZ n b.

è una successione costante; infatti,

1 2 !In _ , {f"+i; - 1 arccos V T 2 arccos Sn

I - y,.. 2

=: Zn.

!In + I %n+1 = arccos x. + I

Si ha dWIque lim z" = ZI. D"altra parte risulta n-DO

b _ z.n arccos X n n - v' I

x;

e, ricordando che %,. --+ 1 't

(b) I " b lìm v

- 41 rp a I, I = 1m n. = Zn = %1 = a J · ......00 n.....oo arccos _ bI

, Allo stesso modo si dimostra che, se aI > bI (cioè se %t > I), si ha 4n > b n e inoltre la successione a. è decrescente e la b" è crescente. Per calcolare VJ(aI, "1), si può osservare cbe la successione

va 'I -

W - n. R .- In (Xn + v'

- I)

assume valore costante. Infatti, po iché v'4

+1 -

+I =

v'ti!. -

. risulta v' a

- b: W ft +I = 2 = w n - In (J

n; I + J

2 I) Ne segue che

. . w,,1n (Xtt + v's : -1) v'a

_

(al, b 1 > = lim b n = 100 = WI = . n-oo n-ao v's

- I In (SI + v'x

- I) La relazione precedente assume una forma più semplice se si prende al == a; b e 6 1 = J;b, con a > b. Poiché risulta J a

-lif == a ; b e (XI + J:I;

1 f == : ' si ha

a-b

(ah b I) = a . · m- b

Osservazione 3.1

La fonnula a -vfil - 0,2 arccos b =

(a1 b) può essere utilizzata per il calcolo approssimato dell

arcocoseno. La convergenza è piuttosto rapida, dato che sia]a successione CI,. defuùta sopra (che tende a

(a, II)) sia l'algoritmo di Erone per la radice (vedi sopra, Esempio 3.8) sono

velocemente convergenti, cosicché bastano pocbL: iterazioni per ottenere un buon numero di cifre esatte. Analogamente, dalla fonnula a a-h In-

b ¥,(a;b ,Jab)

si possono calcolare i logaritmi. .

Capitolo 4 Serie numeriche

I Criteri di .convergenza

Ricordiamo dalle Lezioni (cap.. 2, fi 5) che si dice serie di termine generico an una coppia di successioni ({ G n }, { 8,.}), con

n Sa= E ak.. k=l La successione s. si dice successione delle somme parziali della sene. In genere una serie si indica con i1 simbolo 1: B., o anche con

00 E a.,... R=l

Notiamo cbe il fatto che si cominci a sommare da n = 1 è puramente con. venzionale; in effetti, è possibile sommare a partire da O, o anche da S, 29, o in generale da un no qualsiasi. Naturalmente in questo caso le somme parziali cominceranno anch'esse dallo sresso tennine, e differiranno dalle precedenti per una costante (la somma dei temùni trascurati). Una serie 1:a. si dice convergente se è convergente (cioè se ha limite finito) la successione 8a delle sue somme parziali.. Questo limite si chiama somma della serie. e si indica con il simbolo

00 E Bn- n=1

In generale, l'uso dello stesso simbolo per indicare sia una serie cbe la

ua somma non dà 100go a equivoci, in quanto il contesto è sufficiente a detenninare di cosa si tratti. Nelle Lezioni (cap. 2, 14 sg.) abbiamo visto alcuni criteri di convergenza.. vale a dire delle condizioni sufficienti ad assicurare la convergenza di una serie

ta. In particolare ricordiamo i seguenti:

00

")f'IIt' numer'Cni' I

QP. II

(1) Assoluta conver8enza. Se converge la serie I: I ara I dei valori assoluti, allora converge anche la serie Ia n , e si ha

00 00 lEI a,.1 < Et!a,.I.

(2) Criterio della radice. Se On > O e max 100 .:::;a; < 1, allora la serie L «In R--OO converge. Se invece risulta max lim

> 1, la serie diverge. n

oo (3) Criterio del ral?P0rto. Se a n > O e se max liro 4n+I < 1

la serie Iau n

OQ 4.. S . . h I - an + I 1 all I . di converge. e Invece SI a 1m - >, ora a sene verge. n.

oo Gn (4) Criterio di Leibniz. S e]a successione an è decrescente e infinitesima, allora la serie a tennini di segno alterno

00 E (-l)tl an n::(

" e convergente. (5) Criterio di condensazione di CauchL S e On è una successione a tennini positivi, decrescente e infinitesima, la serie 1: On converge se e solo se converge la serie

E 2"02-.

Esempio 1.1 La serie

E n 2 fa = l 2 ft

è convergente. Infatti, applicando il criterio della radice si ha

. .

n2 l lim n12 J l un - = - vn'" = - < .. .-+00 2 n 2 n.

co 2

Esempio 1.2 Si con..c;ideri la serie

DO 1 E . .=2 nlnn

La successione

è decrescente e infinitesima. Applicando il criterio di Cauchy, n n

si perviene alla serie

00 2'" 00 1 L =L n.= 1 2 n 1n 2 n n = I n In 2 .

Poiché quest'ultima serie diverge, sarà divergente anche la serie di partenza. .

Esempio 1.3 La serie

00 1 L- n=J In n!

è divergente. Si ha infatti

Inn1 =ln2+1n3+...+Inn < nInn

e dunque In I , >

· Ora, quest'ultima serie diverge, e quindi per il criterio ft. n n del confronto sarà divergente anche la prima. .

Esempio 1.4 Dire per quali % E R converge la serie

eo L enz . R= I n

La successione e

/ ti è a termini positivi. Applicando il criterio della radice si trova

li

e- z m -=e, ft-fOC) n

e questa quantità è minore di 1 per z < O, e maggiore di 1 per :t > O.. D altra parte, per s = O, la serie si riduce a I I/n, cbe diverge. In conclusione, la serie converge per x < O e diverge per x > O.. .

Esempio 1.5 Si consideri)a serie

00 L (I+COS n) R. n=1 3

La serie è a tennini positivi. Applicando il criterio della radice si ottiene . (1 + cos n) 1 . 2 maxbm = 3 (1 + max hm cos n) = _ 3 < I, n-.oo 3 n.

oo

e dunque la serie converge. .

Esempio 1.6 Dire per quali % e R è convergente la serie

00 E :L_ a= 1 1 + nx 2 · Applichiamo il criteJi.o della radice alla serie dei valori assoluti. Si ha

lim 12:1 = !...I, ...00 V I + RZ 2

e quindi se 12:1 < 1 la seDè converge assolutamente.. Se invece 12:1 > 1 la serie non converge, perché non è verificata la condizione necessaria tIr& -. O. Resta da considerare il caso IxI = 1, cioè i punti 1 e -I. Per z = 1 la serie si riduce a E _ 1 I ,che diverge. Se invece 2: ;:: -1, abbiamo la serie f \-1)n t che per il .=1 +71 a

1 +n criterio di Leibniz è convergente. In definitiva, la serie data converge se e solo se-I < x<I..

Esempio 1.7 Si consideri la serie

00 E n!

n .. R= 1 nn

La serie converge ovviamente per :x = O. Se :& =I O, si ha !an+I! _ (n + I)IIzIn+Inn -12:\ (

) n _ JzI la n ! - n!I2:In(n + 1)'1+1 - n + 1 - (1 +

r e dunque lim 14,.+ II = 1:1:1 . n-+oo 1 ani e Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti, si può concludere che la serie converge assolutamente se IxI < e. Se invece I:tl > e, si ha 14..+ 11 = IxI II > e n > I. Ian] (1+

) - () +

) -

La successione lanI risulta quindi crescente e pertanto non può tendere a O.. Viene dunque a mancare la condizione necessaria per la convergenza. Riassumendo, la serie converge nell'intervallo (-e, e) ma non altrove. .

Esempio 1.8 Le serie telescopiche. T

volta una serie si presenta sotto la fonna particolar- r. mente semplice

gg L (bk+ I - bk). 1:=1

In taJ caso si possono scrivere immediatamente le somme parziali:

n Sn = E (b/ç". - bk) = b n + I - bI_ 1;=1

Ne segue cbe la serie data coDverge se e solo se la successione blc ha limite finito b. Si può anche calcolare esplicitamente la somma, che è s = b - b J . Ad esempio, si ha

E 1 = 1. 8=1 n(n + l)

btfatti l n(n + l) 1 con b... = --. . fl

--

1 1 . d .. 1 d . . l .. l + -, e qum 1 siamo ne caso 1 una sene te escoplca n+ n

Esempio J.9 Risulta

00] E ft=1 n(n +])(n + 2)

1 = -. 4

Basta infatti osservare che

l 1 (1 1) n(n + 1)(71 + 2) = 2 n(n + l) - (n + l)(n + 2) ,

c

rientra nel caso precedente, con a.. = - 2n(

+ I)' ·

Esercizi

Dire se convergono le serie seguenti:

00 I. E cos 1I'n IJOZO n. + 2

OQ 2. E In (I + .I. 3) ",=1 n

co 3

I. 1 .. L., -SID- n=ln. 71+1

CC) 4

E lnn n.=1 n,)

00 5. E I fa = I B(lo n)2

CC) 6. L tg (---1!....-) n =0 I + n 3

DO 7.. E n! n= J n R

00 8. E I ..=2 n In n!

00 9.. E n + 1 11. =0 n[

00 IO. E I sin(sin n»)'- ,,=1

00

nn 11. L)

=I C:

(IO 12

L n..m ft

O 2 P

cc 13

E arctg (

) n=I n

CC) 14.];1 (

)

DO

nn JS. L-, - n= I (n!)2

CD { O 1(j

E Gli;. dove tli = 1 k= I {k

se k non è un cubo 17. E 2-.Ji. se le è un cubo - n.:O

CC) 18.. E (nn- I/n . n.

1

Dire per quaJi 2: E R convergono le serie seguenti:

00 CC) 00 19. E :r;ft 20. E sft In ZR 21. L m(I + nI%I") n=1 1+ z2n '*= I ,.=J tX) DO OQ 12.. E nsinx n 23. E ../ 1 +zn 24. L z'A n=O n + :c 2 n. ..=0 :£11 n=O 2 + zft 00 00 00 25. E sin :J;R 26. E 2 2 M; 27. E nz.,d p=o (I + X)R 11=0 n=O cc co 31 f(IUf 28. E 2 11 + 3 ft :r;2n + 1 29. E (nz 2)111% ,,=0 3 71 + 4 ft 11= I -:. n=O 1 +nz 00 00 OQ 31. E z+n 32.2: I 33.. E Innz n=O 1 + n 3 %2 ta =0 I + n 2 z 2 a= 1 I + n 2 z'- f .2 00 00 34.

35. E r n 36. L

"=1 n 11=0 .=0 1 + z.

2 I Ulteriol'; crite,i d; CORI't'rgenza

9/

00

2ft:t 37.. /.,.,

n=O I + 2"z-

00 2 38. E In" z n= I n 2 + i2

00 39. E zra. - Ji n=O

00 40. E

h:Z(X > O) n=O

00 41. L e-n sin (n!z) n=O

oc 42.L I n= I 1 + (2z)"

CC) 43. E I - x ft n

1 J+z2 n

co 44. L In(I + n.) Q = I n

n

co 45. L In V I + :J: ra= I n

co 4(i. L 1 71=0 I + zn

00 47. L I n= J (In s)lnn

OQ " "R% 48. L.J - n= J n!

00

(n + x 2)'11% 49.

ra= I n!

so. f (z2 n + ,,2%) n=1 n s

00

n ftZ SI. L, - Q= I (n

)D

00

:J;n 51. L,- n= I n!

oa 53. L I .- 0=03 + (In zy.ra

00 54. E , I 1'1=0 I + e n - z

QO 55. E nCJz Jft (2:

O) nzi

00 56. L In(J + 2 ft) II =0 n,2 + :z2n

. CC) 57. L ",Ox'" (

> O) tI= .

co .!t " :r: + 810 - 58. L- f1 . ,.=1 n !I:

Trovare la somma delle serie seguenti (Pietro Mengolj., Novat quadralurae a r;lhm etica e.. 1651):

00 59.. L) '11.=0 (€In + b)(a(n + I) + b)

00 Qt.L I n=O (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)

00 61.. L J .. dove (lA: = ak+b n=O An4n.+ I ... Bn+ 7

00 62.E) n= I n(n + 2)

OC) 63. L bn.

+. -

,dove bn. è una SI,lccessione crescente con lim b,. = b. n=O ra+ I ...
+.s n-CG

2 Ulteriori criteri di convergenza

Oltre ai teoremi dimostrati nelle Lezioni e riportati sopra, possono talvolta essere utili i criteri seguenti. Cominciamo con le serie a termini positivi.

Teorema 2.1 (Criterio del rapporto Dligliorato) Se 1:an e Ib n serie a termini positivi, e se da un certo JI in poi risulta Bn + I < hA + I - b ' a"
n

sono due

[2.11

allora, se la serie :E h,. converge, convergerà anche la serie

Bn, mentre, se questa diverge, lo stesso farà la serie !b n .

Dimostrazione. Dalla [2.1] segue per induzione che per ogni n > lo' si ha

a., 4n < b", b o . Infatti questa relazione è vera per n = v. Se si suppone vera per n, si ttova,' usando la [2..1]

a n + I b R + 1 GJI ali 4.+1 = - Ora < --.:-- - b bn = - b 11....1. a. un I} ll

La tesi segue ora dal teorema del confronto. .

Si osserva che il teorema appena dimostrato è una generalizzazione del crite- rio del rapporto (Lezioni, cap. 2, Teorèma 14.2). Infatti, se da un certo v in poi risu1ta G n + I /4R < Q < I, si avrà anche GR + 11 a,. < DiR + l/aD.. e si può dunque applicare il teorema precedente, dato che la serie geometrica

an converge. Una conseguenza del teorema 2.1 è il seguente criterio di oonvergenz

che si ap- plica quando il teorema del rapporto non dà risultati i cioè quando lim an + I /4n = 1. . n-+oo

Teorema 2.2 (Criterio di Raabe) Sia I',an una serie a termini positivi. e si ponga (la = n (

- I) . a.. + t

Se da un certo II in poi risulta "n > a > 1, la serie 1: (In converge; se invece si ha definitivamenle Un < I, la serie diverge.

Dimostrazione. Se (J ti. < 1 per n > ", si ha

a n +1 > n G:-- n+I '

e dunque, confrontando con la serie armonica, la serie 1", IIn diverge per il teorema precedente. Per dimostrare la prima pane del criterio di Raabe, osserviamo che, se T è un numero razionale con 1 < ,.. < Q, risulta (vedi cap. 3, Esempio 1.8) lim n {(I + 1.) 1" - 1 - !! } = r - Q < O.. .-'00 n n

Ne segue che se n è abbastanza grande si ha (I) r a 1+; < 1+;;-

2 f tJlterio,.i crjte,.; di (..o'I&"':

e'J

a

Se ora un > Q, si ha

ara Q (n) F - > 1+- > a n +I - n - n +1

e dunque, per n abbastanza grande,

I« n:I r. Confrontando con la serie

n -1" tramite il teorema precedente, si ha la tesi. . In particolare

se esiste il limite

lim n (

- I) = L, ft,-OO a. + I

allora se L > 1]a serie 1: ano converge. mentre se L < I diverge..
Possiamo ora dare un' altra versione del criterio del rapporto:

Teorema 2.3. Sia 1:a,. una serie a termini positivi, e supponiamo che risulti a n Q (1) -= 1+-+0 - .. tln+1 n n 2

[2.2]

Allora, se Cl > 1 la serie :Ea n è convergente, mentre se €N < 1 è divergente..

Osserviamo che in questo teorema viene contemplato anche il caso Q = I t che di solito sfugge ai metodi generali. Ricordiamo che con il simbolo 0(0- 2) indichiamo una successione W n tale che n 2 W.. è limitata..

Dimostrazione. Se a ;/ I, il reorema è. conseguenza del criterio di Raabe, dato che si ha

lim n (

-1) =Q. ti-CC ali + I

Possiamo dunque limitarci a considerare il caso Q = 1. Consideriamo la successione

1 b" = . nlnn

Poiché In (1 +

) :=

+ O (

2) (vedi pjtì o]tte. cap. 6. Esempio 6.1). risulta 1 (1

) Io(n + I) = Inn + n +0 n 2 ,e dunque

In(n + 1)] (I (1))] (I) In n = In n In n + n + O ",2 = I + n In n + O n2 ·

Ne segue

= (n+I)ln(n+I) = (I+.!.)(I+ 1 +0 (2..)) = b n + 1 nInn TI. nInn n,'2 1 I (1) =1+-+ In +0 2 . n n n n

Si ha aDora, per n abbastanza grande,

4n b. ....- <

11II an.+ I 611+ I

Poiché la serie I b" è divergente t lo sarà anche la serie 1: a" per il teorema 2.1. .

Osservazi()ne 2.1

Si noti cbe si può sostituire la con

one [2.2] con la più generale

a n a (1) -=1+-+0 - an+1 n n P

Cfl > I).

Comunque, questi criteri di convergenza sono più betli che utili. Più interessante è invece il seguente.

Teorema 2.4 (Criterio di Diricblet) Sia

CC) E Ck 1:=) UIIa 3erie tale che la successione {8 ft } delle sue somme parziali sia limitata da un numero M:

lSni S M.

Sia qk una succes..

ione positiva e decrescente. Allora, dena {(1 ti} lo successione delle somme parziali della serie

C1cQk, risulta

1u ta I < Mq1-

Se poi la ,f;ucces$ione qlc tende a zero, allora la serie 1:cleqlc converge..

Dimosrrazione. Poiché CI =

I e CIc == Sk - 31:-1, si ha

Un::: 9)81 + 92(82 - 81)+.. .+q.{Sn - 8 ft -I)

e dunque

(I n == 81 (ql -

) + 82(q2 - q3) + . . . + 8,.-1 (qn-l - q,,) + spq,,"

Passando ora ai moduli, e tenendo conto cbe Ja successione qa è decrescente, si ottiene

fUni < M(q1 - q2) + M(f12 - q])+... + M(Q"-1 - q.) + Mq,.. = Mq)- Supponiamo infine che la successione q" tenda a zero. La serie

00 L SA:(9t - 9/c+ I) 1;=1 è assolutamente cODvergente, dato cbe risulta I S k(9, - 9k+ .>1 < M(tJk - qk+.) e quest'ultima serie converge, perché la sua somma parziale n-esima è M(QI-Qn+I), che tende a M qt.. Se 'indichiamo con Pn le sue somme parziali, si ba t1 li = Pn-I + snqn, e, poiché si ha Jim 8.q. = 0, la successione o.. ha lo stesso limite della Pn. . n-+oo

Esempio 2.1 Un caso particolare del risultato precedente è il criterio di Leibniz per le serie a tennini di segno alterno (vedi sopra e Lezioni, cap. 2, TeOrema 15.2). Infatti le somme parziali della serie E(-I)k sono alternativamente 1 e 0, dunque sono limitate. Allora, se aie è una successione decrescente e infinitesima, la serie 1: (-1)" 01: è convergente. .

Esempio 2.2 Se la successione qD non è decrescente, il risultato non sussiste, nemmeno se 9ra -+ O. Infatti, se si prende c" = (-1)n e q" uguale a l/n O 1 In 2 a seconda che n sia....pari o dispari, Ja serie 1: Ct.qn diverge. . Il criterio di Dirichlet può servire come criterio di convergenza per serie di segno arbitrario. Esso è utile soprattutto quando la serie in questione non sia né assolutamente convergente né a termini di segno alterno..

Esempio 2.3 Per a > O, la serie DO . E 8111 nx n=l nCl

[2.3]

è convergente per ogni x E R. n risultato è ovvio per Cl > l, dato che in questo caso la serie in questione converge assolutamente. Se invece O < a < l, si può applicare il criterio di Dirichlet, dimostrando che le somme parziaJi

ra D' n = L sin k

A:=l sono limitate..

Per questo. consideriamo la successione complessa e i "% = cos 1c

+ i sin kz. Risulta n ft. e'(ft+1)s _ I 1:.. = Pn +ia.. = L (cos k:I: + i sin 1::1:) = L e'a = . 1 k= I k= I e'

-

e dunque 11:..1 = vi!. +Ir

< 1eU=

Il ' Ne segue che per x 12k1l" ambedue le successioni p. e ti n sono limitate. Per il criterio di Dirichlet, la serie [2.3] converge allora per ogni x ¥2k1r, e dunque per ogni x, dato che per

= 2k1r è ovviamente convergente. Inoltre, abbiamo dimostrato che la serie

00 E cos nz .=0 n"

è convergente per ogni :J: ;/ 2kr. .

Esercizi

64: Dimostrare che la serie f (-l}l"P) è convergente, mentre la serie f (_I)[2RPI n=J n n:1 n diverge. O::J .

5 Di h I .

sm(n:t +"> è . . ..o .-1 u _ mostrare c e a sene L., convergen,e per ogm ", ogm Z 7 O, e n-= I nO per ogni a > o.

Dire se convergono le serie seguenti:

co . 66. E (-l)Rsmnz n=1 ..;n

CIO [(-1)n + !] (-1)£0/2.) ". E 2 n=J n

00 68.. E (-l)Rcos ft

8=1 .;n

. nr ftr 00 SUI-+COS- 69. E 2 2 n=1 n+ In ft

. "". fl.'I" CC) Asm-+Bcos- 70. E 4 4 nl: I ft + 2

oa. . z 't"' sm nz sm - 71. L.J ti. . fa;: I ln(n + l)

Un risultato interessante è anche il seguente teorema.

Teorema 2.5 (di AbeJ) Sia I ai una serie a termini positivi, e sia Ba la successione delle sue somme parziali. La serie 1:0& è convergente ae e solo se converge la serie

00 E

. k=) 8k-1

Dimostrazione. Poiché alci 8"-1 < al; /81, se la serie I ai è convergente, lo sarà anche la serie I alc/ BIc-l. Per dimostrare J' affennazione contraria, supponiamo che la serie I a. di verga. Si ha

(aj;) aie m8, -1n8i-J = In 1 + - < -, 8k-1 St-I

dato che per % > O risulta In(I + z) < !I (vedi più olb'e, cap. 6, Esempio 6.1). Ma allora

00 n E

> E (tOSi -lo 81:-1) = Insn -m SI. k=J Sk-J k=)

Facendo tendere n all'infinito!! e osservando che In Sn -+ +00 dato che la serie 1: tIn diverge, sI conclude che anche la serie 1: a.j 81:-1 è divergente. .

Esercizio

72

Nelle ipotesi del teorema precedeo[c" dimostrare che I ai converge se e solo se converge la serie L alc/ Si. Si può dire lo stesso per 'Eat!SIc+J?

Una conseguenza del teorema di Abel è di tipo negativo. Per illustrarl

COD- " sideriamo una serie

an a tennini positivi. E chiaro che se mio lim no. = 6 > O n-tOQ la serie I Bu diverge, dato che si ha definitivamente ara > 612n e quest'ultima serie diverge. Viceversa, se per qualche o: >] risulta tim n ti 4ft = 0, la serie a

oo 1: fin converge. dato che è maggiorata daUa serie cODvergente I n -o" Ci si può ora chiedere: esiste un criterio generaJe di convergenza? O più precisamente: esiste una funzione universale

(n) tale che una serie positiva

4n diverge se min tim

(n)4ra > O mentre converge se lim cp(n)an = 01 a

ft

La risposta è negativa. Infatti, se una tale funzione esistesse, la serie 1: 'l':n) dovrebbe divergere, in quanto minlim

(n). _ (1) = l. 1&-00 tp n D'altra parte, detta 8ft]a successione deUe somme parziali di questa serie, n Sft = E (1,..) ,]a serie 1: (: dovrebbe convergere, in quanto k=O Cl' " \O n 8n-1

lim ,,(n). 1 = lim -.!...- = o. n-+oo

(n)sn.-l .--00 8.-1

Questo risultato contraddice il teorema di Abel

cosicché la funzione (,O(n) non p

ò esistere.

3 Introduzione di parentesi

Sia L ak una serie numerica. Consideriamo una nuova serie, i cui tennlnl blc sono ottenuti raggruppando insieme un certo numero di tennini della serie precedente:

b J = a2 + a2 + . t . + alci

62 = ak. + I + 4A:. +2 + . . . + a

63 = 4k:!+1 + alc,+2 +. .. + Q

Intuitiv, amente la serie L bn corrisponde a introdurre delle parentesi nella serie Lak; in altre parole. a sommare quest'ultima dopo aver raggruppato i tennini a blocchi: prima j primi k) termini, poi i successivi k 2 - kl t e così via; sen7A però variare l'ordine nel quale i tennini vengono sommati. n problema che ci poniamo è il seguente: che relazione c'è tra la convergenza della serie I4k e quella della serie I b. ? . È subito visto che la successione {on} delle somme parziali della serie 1:bk è estratta da quella {8n} delle somme parziali della serie I: al;; più precisamente, si ha

O',,=Skn"

Viceversa t ad ogni successione estratta dalla {8 R } conisponderà l'introduzione di opportune parentesi. D nostro problema diventa dunque: che relazione c' è tta la convergenza della successione delle somme parziali {8. } e que

a di una successione estratta {f1 ft} ? . Una prima risposta è immediata: poiché se una successione ha limite ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite., se la prima serie tale converge o diverge

convergerà o divergerà anche la seconda I,bkt Più interessante è il caso in cui la serie di partenza

alc non è né convergente né divergente, cioè quando risulta

min lim Sn < max lim Sa. f&

OO 00

[3.1]

Si vede subito che, se la successione {8n} è limitata (o più in generale se { Su} ha una sottosuccessione limitata), è sempre possibile estrane da essa una sottosuccessione convergente, e dunque introdurre delle parentesi in modo che la serie Ib u che ne deriva risulti convergente. Questo avviene ad esempio se, essendo soddisfatta la [3.1], la successione {ak} è limitata. Se poi la successione { alt} è infinitesima, è sempre possibile introdurre deUe parentesi in modo che la serie

b. così ottenuta converga a un qualsiasi numero reale compreso tta min lim S'II e max lim SIJ. n....oo "

QO ...... Sia' infatti

un tale nwnero, e per £ > O sia v un numero tale che per ogni n > II risulti 14n I < E. La successione { 8n} non pottà essere definitivamente maggiore né definitivamente minore di À, e dunque esisteranno degli interi le ed m maggiori di II tali che 8. > Jt e Bm < À. D'altra parte, se h> v si ha

1 8 h+ I - BAI = lah+lI < f..

'.

Ma allora almeno una deUe somme parziali s", con h compreso tra le ed m, dovrà cadere nell'intervallo (À - E,

+ (). Abbiamo dunque trovato, per ogni E > 0, un numero h tale che Js/& - À I < c: Prendendo successivamente e = I,!, 1., ... si .. ,\ 2 3 ottIene una successIone 8 AI , 81&1' .... -convergente a . Se poi

= max tim S'II ovvero

= min lim BR' il risultato precedente segue ft u

da) teorema che asserisce che da ogni successione 8ft è possibile estrme una sottosuccessione che tende al massimo (o al minimo) limite. . Un caso interessante si ha quando i gruppi di tennini che si accorpano sono sempre nello stesso numero; ad esempio quando si riuniscono i termini deUa serie 1: an a due a due, o a tre a tre, ecc. Nanmùmente può accadere che la serie L b

così ottenuta converga, mentre la serie di partenza non convergeva.. Ad esempio, se nella serie di Grandi

1",(_1)ft

si raggruppano i termini a due a due, si ottiene la serie

O, che ovviamente converge. Se però la successione Gk è infinitesima, la convergenza della serie I 6

ottenuta dalla Io" raggruppandone i tennini a m a m. implica queUa della serie di partenza. Siano infatti SA e u" «(1 n = SRm) le successioni delle somme parziali delle serie 1:a1c e tb k . Si ha

811 = u(n/m] + am(tl/m]+I + .. . + Qn,

dove abbiamo indicato con [n/m] la parte intera di n/m. Quando n tende all'infinito, anche [n/m] tende all'infinito, e dunque i termini am(nIm)...i, Gm[ta/mJ.f2' · · · , ara

tendono a zero. Poiché il loro numero non supera mai m, anche la loro somma tende a zero i e dunque si ha

lim Sta = 1im (1 [-1m]. ".....00 00

Esercizio

73. Sia {b.} una successione ottenuta come sopra, raggruppando i termini della successione {an} a m a m. Si dimostri che

se Ja serie Ibu è diveJgente e la successione {..} è limitata, allora anche 1: a,. diverge. DimOS1IaIe con un esempio che ciò non è vero se la successione {CIta} non è limitata.

Capitolo 5 Funzioni e loro limiti. Funzioni continue

1 Insieme di definizione

Siano A e B due insiemi.. Una funzione / : A

B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere un elemento di B. Sono esempi di funzioni:

(1) La fuJWone identità: 1(2:) = 2:, che ad ogni elemento di un insieme A associa I II elemento stesso. (2) La funzione x

:r: 2 , che ad ogni numero reale z associa il suo quadrato. (3) Se 9 è l'insieme dei calciatori e S quello delle squadre di calcio, è una funzione la relazione che ad ogni calciatore associa la sua squadra. Non è invece una funzione da S in 9 la legge che ad ogni squadra associa i suoi giocatori, dato che a un elemento di S corrisponde più di un elemento di 9. (4) Quest'ultima si può invece considerare come un'applicazione di S in P(9), l'insieme delle parti di 9. (5) Analogamente, la legge che ad ogni (n + I)-upla ao, ah ..., a,. di numeri reali associa le soluzioni reali dell'equazione

anx- +.

. + al

+ ao = O

è una funzione di R."'. in P (R). (6) Una successione reale {au} è una funzione di N in R.

Nel seguito noi considereremo prevalentemente funzioni I : A -+ R, dove A è una pane di

t o) più brevem ente II funzioni reali di una variabile reale. In questo caso l'insieme A si chiama insieme di definizione della funzione f(z). Di . particolare interesse sono le cosiddette funzioni elementari, di cui diamo una lista

102

con i Joro insiemi di definizione:

zie (k E N) XCII (o E R) In

ff£

R {:i;

O} {

> O} R

zg (m,n E N) sin z, cos z arcsin x, arccos z arctg %

R R [-1, I] R.

Osservazione 1.1 In generale per assegnare una funzione è necessario indicare non solo la legge di associazione, ma anche il dominio A e il codominio B. Nel caso di funzioni a valori reali il codominio è sempre R, mentre il dominio può essere una parte qualsiasi di R, che in linea di principia dovrebbe essere indicata insieme con la legge di conispondenza e che con questa caratterizza la funzione in questione.. Ad esempio, risultano

iverse b'a loro le funzioni ez : R -+ 1R e e S : [O; 1] -+ R. (restrizione della precedente all'intervallo [O, I]), in quanto hanno dominio differente. Molto spesso però, quando la funzione in esame sia una combinazione di funzioni elementari, si tralascia di precisare il dominio, intendendo che esso coincida con l'insieme di definizione

cioè sia il massimo insieme in cui tutte le funzioni sono definite e tutte le operuioni possibili.. Si specificherà invece il dominio quando questo è diverso daUtinsieme di definizione. .

Esempio 1.1 Si trovi l"insieme di definizione della funzione f(z) = "'; 1 + In %. La funzione lo $ è definita per :J: > O; d'altra parte, perché sia possibile estrarre la radice

la quantità l + In:I: non deve essere negativ

e dunque si deve avere In z > -1, cioè x > l/e. In conclusione, la funzione in esame è definita per z 2 l/e. .

Esempio 1.2 L'tinsieme di definizione delle funzioni f(z)-J:g(x) e f(x)g(z) è l'intersezione di quelli di f(x) e di g(z); mentre l'insieme di definizione di /(z)/g(z) è costituito dal!' intersezione di quelli di f (

) e di ,(z), meno i punti in cui la funzione g(:I:) si annulla.. Ad esempio, la funzione tgx = sin x/ cos 2: è definita per tutti gli :I: E R nei quali cos x =I O, cioè per

, (2k + 1)1r /2. .

Esempio 1.3 La funzione

( ) r x-I f(z) = z + 2

2 I Immagine e cont,.o;mn,Qg;ne

10J

è defInita per gli :t =I -2 per i quali risulti (x - 1)/(% + 2) > O.. e dunque il suo insieme di definizione è (-00, -2) U [1, +(0). .

Esercizi Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni: '

I. ";z 3

2 z+ 1 · z2 - 3z + 2

3.

VH2

4. % 10&10(2: 2 - 3)

s. il

I

-2

6. v'2 sin

+ 1

7. " In 2'. :J: I 9. I +1gs (-w < z < 11') 1 + tg 2z II J + I · vsin:r; ycosr,

8. {(I oab(3

2 + 2:1:)

IO. Vln (';$ 3 + "'4 - z)

12. J' 2: 13:1 I

.13. vt z - 31-1:1: +4r

1%+ 1) 14. I082 1o g] 1%'

15. r:/lz-21

16.

lz l - 1% + I r -l 2

17. Jn(lzr - 21% - ll>

18. In sin -=- %+1

19. · ll e-e :z

SSin2 + I 20. . e SJnz - 1

21. J In ,(Z+

(a> O)

22. t ln(.,f 2z-I+

.

2 Immagine e cODtroimmagine

Sia f : A -J> B. Se z e A, si chiama immagine di z il punto 1(,;) e B..
Si cUce poi immagine di A (tramite I) l'insieme f(A) dei punti 71 di B
che SODO immagine di qualche punto x di A:

f(A) = {y E B : 3x e A : 11 = f(z)}.

Più in generale, se C C A, si indica con /(0)]'insieme cos

tuito dalle immagini dei punti di O.

Esempio 2.1 Se. 1(:.:) = 2: è la funzione identi si ba f(A) = A per ogni A C R. .

Esempio 2.2 Riportiamo le immagini delle funzioni elementari: ili [O, +00) %211:+1 x G [O, +00) e% sin %, cos

[- I, I] . 10 z

R (O, +00) R

Esempio 23 Si trovi l'immagine della funzione vi I + In 2:. La funzione in esame è definita per z > I/e; bis ognerà allora vedere per quali y E R esiste un x > I/e tale che !I = '; 1 + In:.. In primo luogo, dato che la radice è sempre positiva, dovrà essere !J > O. Per tali JI si ha

JJ = V I + In:r: *' % = e fl -I ,

e dunque ogni y > O è immagine di un :t > I/e. Ne segue che f([I/e,+oo) = = [O, +(0). .

Esempio 2.4 Si ttovi l'immagine della funzione f(z) = [:.: + x 2].. Poiché la parte intera è un intero, si avrà evidentemente f(R) C Z. Per decidere se un intero n appartiene a f (R), si dovrà vedere se è possibile risolvere l'equazione (z2+ z] = ti, ovvero se è possibile trovare qualche numero reale

tale che n < :r;2 + x < n + I. Cominciamo con la seconda disuguaglianza.. L'equazione z2 + z = n + 1 ha soluzioni

-l ::l: v'l +4(n + l) al,2 = 2 '

e la disuguaglianza richiesta avrà luogo per gli 2: interni alle due radici. Perché questo insieme non sia vuoto

occorre che le radici siano reali e distinte, e quindi che sia 1 +4(n+ l) > o. Dato cbe n è intero, ciò accade per n > -1. Per quanto riguarda la prima disuguaglianza, essa sussiste sempre per ti = -1, mentre se n > -1 è verificata per x esterno a11e radici

t:l _ -1 ::!: v' 1 + 4n Pl,2 - 2

1 l Imnlagine e cOlltn

;mmaRint'

105

dell'equazione $2 +

= fl.. Poiché si ha al < fJl < P2 < Q2, le disuguaglianze richieste saranno ambedue soddisfatte per z E (al, (Il] U fth, a2) (se n = -1, per !l e (Ql, (t2). In conclusione. l'immagine di f è costituita d2N11tb gli interi n

-l. .

Esercizi

Trovare J 'immagine f(C)

dove I e C sono J (O

J) 24. %2 + I (2t +00) 23. 1 - - s'I _. s 25. z2+ I. (1, 2J z2 + I G,I) z2 -1 26.z'I -I 17. In(ez + 1) R 28

2 + z-2 R - {O} 29. In

(0 1 +(0) 30.

2 + 2: + I R z+ 31. [%2 + z] (0,3) 32.

+ [3:] R 33. Iz - II {O, 5] 34. z+ Izi (-2,2). 2

Sia ora I. : A -+ R una.,funzione reale, e sia BeR. Si chiama immagine inversa (o controinuDagine) di B l'insieme

,-I (B) = {z E A : I(x) E B}. Si noti cbe può anche essere f- J (B) = 0: ciò accade quando per nessun 2: E A risulta I(x) E B, cioè quando B n I(A) = 0. Si ha inolare f-I(R) = A.

Esempio 2.5 Sia f(z) = ':£2 - I. Si calcoli ,-I ((O, 1]). Si deve cercare per quali x si ha O < %2 - I < [. La prima disuguaglianza è verificata per Ixl

I, la seconda per Jxl < .;2. Ne segue allora che 1- 1 ([0, l]) = = [-.;2, -1] U [1, J2]. .

Esempio 2.6 Sia I(x) = x. + v' I - ,;2. Si calcoli f-I({y}) per y E R. OccOITe trovare i valori di z per cu i risulta x + '; 1 - z2 e {y}, ovvero. il che è lo stesso, per cui si ha x + V I - :1; 2 = y. Riso1vendo J'equazione precedente si b'ova

ll :i: v'4Y - 3 x= . 2

Dunque f-I({y}) = 0 se !I < 3/ 4, f-I({3/4}) = {3/8}, mentre se Il > 3/4 risulta r I ({y})=={ Y+v;Y-3 , y-v';!1- 3 }..

Esercizi Si c alco1 i /-1 (O) nei casi seguenti: 35.. in:J: (O, I J 36. 2x+3 [1 , 3] 37.. :1: 2 + 1 [O, 2) 38. vr;;. (O, 1] 39. (

2 + 2:] [0, Sl 40. :£ + [z) {U 41.

+ (:z:] U} 42. z - izl (-I, I). 2

3 Grafico di una funzione

Si chiama grafico della funzione I : A -+ R l'insieme del piano cartesiano (2:, y) costituito dalle coppie (x,/(:r:»), con x e A. Notiamo che la definizione è coerente con quella del grafico di una relazione data al capitolo 1 (

4). In effetti, il grafico della funzione f non è altro che il grafico della relazione

R(a:, y) = {z E A A Y = f(x)}.

Ù1 generale, un sottoinsieme r del piano cartesiano è grafico di una funzione se per ogni :£ E JR c'è al più un y E R tale che il punto di coordinate (z, y) appartiene a r. In questo caso, la funzione f. che ha r per grafico sarà quella che ha per dominio l" insieme degli x per i quali c'è un siffatto y, e che manda 2; in questo y. Nel caso di funzioni di una variabile reale è possibile disegnare il grafico, e dunque farsi un'idea dell'andamento della funzione.. Abbiamo già visto nelle Lezioni (cap. 3,

2) i grafici delle funzioni elementari; albi grafici di funzioni più complesse li vedremo più avanti.

Esempio 3.1 Si b'acci il grafico della funzione "parte intera di :t":

f(x) :: [x1.

La parte intera di x è il massimo intero che non supera x. Quando x varia tra due interi consecutivi n e n + I, la sua parte intera resta sempre uguale a ft, mentre [z] assume il valore

nei punti di ascissa intera; pertanto [2:] è costante nell'intervallo [n, n + I), nel quale assume il valore ft. Si ha dunque il grafico della figura 5..1.. .

Similmente, il grafico di {z}, la parte frazionaria di x, è quello riportato nella figura 5..2. :

Esempio 3.2 Disegnare il grafico de'Ua funzione max { 2:, :I: 2 }. Riportiamo sovrapposti i grafici di :I: e di Z2 (fig. 5.3a). La funzione max { x, x2} assume in ogni punto 2: il più grande tra i valori 2: e :il. Essa varrà dunque 3: se O < z < I, e :&2 altrimenti; il suo grafico è quello riportato nella figma 5,,3b.. .

y

2 ·

1 T

-3

-2

-1

o

]C

1

2

3

-1

.

-2

FIgUra 5.1

y

-2

-1

Esercizi

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

43. 12: + 11 44

+ Isi · :2 4fi. I-s] 47. -1 - [-z] 49. max(sin z, cos s) 50. max({z}, {-%})
52. [z] + { -2: } 53. [z] - {z} 55. z + { -z} 56. [

] S8. t+2[

] 59. I + L: z2] · I+z

4 Funzione composta; funzione iDversa

1

)C

2

Figura S.2

45. 1:I:1;:.t

48. {-:r;} 51. I:t) = min({s}, {-x})

54. {2 - z} + {s + 1 }

57. min(

. z1)

Siano l : A --+ B e g : B --l> O due funzioni. Si chiama composta delle due la funzione 9 o J : A -+ C definita da

(g Q f)(x) = g(f(:J;»).

Formalmente, basterà scrivere g(x), e poi sostituire f(z) al posto di 2:.

y

(a)

y

1 ------------

I I t , I I I I t I , I

o

1

(b)

x

x

Figura 5.3

/IO

E.fempio 4.1 Siano g(x) = e z + 1 e f(z) = !C - 3; si ha (g o f)(x) = e/(z)+1 = e

-]'+.J = e z - 2 . Si noti che (I o g)(x) == e%+1 - 3, e quindi in generale 9 o f i t o

. .

Esempio 4.2 Siano f(x) = (x - 1)/:£ e g(z) = In z. La funzione f è definita in R - {D}, e ha come immagine R - {I}, che non è contenuto nel dominio della funzione g(x} = 10 x. Ne segue che la funzione composta 9 o J non esiste. D'altra parte, molto spesso si parla della funzione In [(x - 1)/ z], che non è altro se non ciò che si ottiene calcolando formalmente la funzione 9 o f

senza preoccuparsi dei domini; e non sarebbe per niente comodo rinunciare alla possibilità eli comporre fonnalmente funzioni elementari. La difficoJtà si supera considerando la restrizione della funzione I alla controimmagine /-) CB) del dominio della funzione g; nel nostro caso ali 'insieme (-00, O) U (I, +00).. Naturalmente.. occorrerà sincerarsi che A n /-1 (B) non sia vuoto.. Si noterà come la ricerca dell'insieme di definizione di una funzione consista in molti casi nel calcolo di A n ,-I (B). .

Esercizi

Trovare 1 1 insieme di definizione e l'espressione della funzione composta g o J quando 9(z) e f(z) sono le funzioni seguenti:

60.. x 2 + z: x - I 22; + 5

61. VI _ zJ ; :..:2 + I :t-3

61. In(I _ s); 4% z2 +3

%2 _ l 63. v'in z

z

64. v'ln x ; -;- x + l

's. V

- 1; sin z

(j(j. e2=l:; %2 + l

67. sin z; sin z.

Una fun7jone f : A --+ B si dice iniettiva se manda elementi diversi in elementi diversi, cioè se 1(0) = f(b) => a = b. Una definizione equivalente è cbe per ogni y E B 1 t-l ({ 'Y}) ha al più un elemento. La funzione f si dice invece surgettiva se ogni elemento di B proviene da almeno un elemento di A; più brevemente, se f(A) = B. Se poi / è sia iniettiva che surgettiva. si dirà che è bigeniva. Osserviamo che per i nostri scopi la surgettività non è molto importante, dato che una funzione f : A

R si può sempre considerare come un'applicazione da A in f(A), che è sempre surgettiva. Al contrario, aU'iniettività è legata la possibilità di invertire la funzione f. Infatti" se questa è iniettiva ogni 71 e f(A) prov iene da un solo x E A, e dunque è possibile defirure una funzione f - & (y)

che ad ogni 71 e f(A) associa appunto quell'unico z E A tale che f(x) = 1/.. La funzione I-I : f(A) -+ A così definita verifica le relazioni

1- 1 (/(x)) =

\Ix E A; 1(/-1 (JI) = fJ V'I} E f(A)

ovvero

t-Io I = IA; f o f-t = II(A),

dove con IA e If(A) abbiamo indicato l'identità su A e su f(A) rispettivamente.

Osservazione 4.1 Non si confonda il simbolo I-I (y) con il simbolo f- I ({1J }) introdotto preceden- temente. TI primo indica il valore nel punto 'Y deila funzione /-1, inversa di I(z); il secondo, l'insieme dei punti x E A che hanno !I come immagine. Quest'ultimo ha senSo per ogni funzione I(z). il primo solo per le funzioni iniettive. . Nel seguito le funzioni iniettive saranno anche chiamate invertibili. Una classe particolare di funzioni invertibili sono le funzioni strettamente monotòne, che si distinguono in (strettamente) crescenti, che verificano la relazione

x < 'Y * I(z) < I(y),

e (strettamente) decrescenti, per le quali invece

< 11

f(!t) > /(1/).

Esempio 4.3

Le funzioni Irigonometriche sin x, cos x, tg x non sono iniettive, e dunque non sono globalmente in verti bili. Sono invece iniettive le loro restrizioni agli intervalli [-1r /2, w /2], [O, r] e [-7r /21 7r /2] rispettivamente. Le funzioni inverse si indicano con arcsin x, arccos 2;, arctg:I:. .

Esempio 4.4 La funzione A:t (A > 1) è crescente, dunque invertibile. La sua inversa è la funzione)og...t:t. .

Eser

izi

'''rovare l'insieme di definizione deUe seguenti funzioni:

68. arccos :t - 3 z+1

6'. I arcr. g !1: ; 2

70. In arcsinez2 - 3)

J/2

Fu II: ioni t loro limiti. Fun!.;oni continue I Cap. 5

71. arcsin % - J + 10(1 - :.:2) %+1

72. tg arccos

s+2

73. e vmU + s)

74. arccos(1- a:2; I).

75. Dire quali delle funzioni degli esercizi 68-74 sono invertibili. e in caso di risposta positiva trovare le loro inverse. Esaminare se le funzioni date sono monotòne. '6. Se il grafico della fun7jone 1(%) è quello disegnato nella figura 5.4, tracciare il grafico di [/(z») e di {f(z)}.

x

Figura 5.4

Trovare" se esiste.. l'inversa delle seguenti ftmzioni:

77. aJCtg:J:

78. [z] - {z}

79. [z] + {-:I:}

so. z + [s]

-

81. % - Izi

8Z.

x+{1

83. ! s

84. 22: + Izi.

Dire se le funzioni in esame sono mon01òne.

85. La funzione I(

) = 2. _:£2 non è iniettiva in R. Trovare un intervallo [4, b) tale che la restrizione di I a tale intervallo sia in v ertibile , e scrivere la funzione invers

.

86. Dire per quali valori di Ot E R è invenibile la funzione I(z) = % + al2:I, e scrivere la funzione inversa. Tracciare un grafico di f e

quando esiste, di /-1.

5 Limiti di funzioni

Riponiamo dalle Lezioni (cap. 3, fi 4) le definizioni di limite di una funzione:

Deftrtizione S.1 Sia J : A -+ R. e sia %0 un punto di accumulazione per A. Si dice che

lim I(x) = L E R z....ZO

se per ogni E > O esiste un numero 6 > O tale che per ogni :J: E A, con O < Ix - :liol < 6, risulta 1/(2:) - LI < f. Diremo invece che lim f(

) = +00 [-00] :E-+SO

se per ogni M E R esiste un 6 > O tale che per ogni x E A, con 0< Ix-zol < 6. si ha I(

) > M [< M]. Una definizione simile si può dare quando x -t- :1:00.. Ci limiteremo a un solo caso, lasciando al lettore il compito di dare le definizioni nelle altre situazioni.

Definizione 5.2 Sia A un insieme non limitato superiormente, e sja / : A -+ R. Diremo che

lim [(:r.) = L :r-++co

se per ogni I > O esiste un M E k tale che per ogni z E A, con % > M, risulta I/(z) - LI < f.

Esempio 5.1 Risulta

lim z[z] = o. %.....0

Si ha I [z] I < 1 per Izi < 1; per tali valori di :r: risulta allora Iz[z] I < Ixl, e quindi si avrà 13:[:1:]1 < E non appena Izi < E. La definizione è dunque soddisfatta con 6 = min{E, I}. .

..T

rU'I.:.nmr f" IUIU "",UI. rUIU'OnI CUII1I1"Ae I {,af'. .J

Esempio 5.2 Si ha I " !I: - 3 - 1 un - . :t.....-co !t + 1

Valutiamo la differenza :t -: - 1 . Abbiamo :t+

:I: - 3 1 ' I -4 I -I = - <E x+1 x+I

non appena Ix + 11> 4/€, e dunque quando z < -1 - 4/£ = M. .

Nel calcolo dei limiti sono di aiuto un certo numero di limiti notevoli, che abbiamo trattato nelle Lezioni. Ne riportiamo una lista:

(I) lim sin x = 1

-o $

(2) too 1 - cos z = ! z-.0:r;2 2

(3) lim(I + ax)I/% = e a x-o

(4) lim (1 + a) % = eOI 2:-++00 X

(5) lim (1 + a:)

= e"

--oo 3:

(6) lim ln(1 + z) = I

x

(7) tiro e

- 1 = 1 %.....0 X

(8) lim x a A -

= O (A > 1) :z;....+co

(9) tirn (In :t)pz-a = O (a > O)

.....+oo

(] O) lim xQllntxU' = O (Q > O) :-+0

Esempio 5.3 Si calcoli il limite lim tgx - sin 2: . %.....0 z3

Risulta

tg

- sin x = tgx(l - cos x)

e dunque tgx-sin% _ 1 %3 -cosz

sinz l-cosx X z2

J I umrll Uj JWUIOIII

II,)

Ricordando che lim sm x = l, lim 1 = 1, lim 1 - cos x = ! z o 2: s-.() COS % J:

2 2 '

si ottiene

1im tgx - sin :t 1 - - . :t

O z3 - 2'

Esempio 5.4 Per A > O risulta lim AZ -] = lnA.. 2:-tO :t

Si ha infatti AZ - I

lnA - I ez lnA - 1 z - z = ln A

lnA Da questa relazione si ottiene subito il risultato voluto, dato cbe per z -.. O l'ultima frazione tende a I. .

Esempio 5.5 Si calcoli il limite

lim arcsID 2: . :1;-40 :t

La funzione arcsin :t è J'inversa di sin :1:, 0, meglio, della restrizione di sin x ali 'intervallo [-'1'/2, 1r /2]. Eseguendo il cambiamento di variabile JJ = arcsin :t, e osservando che quando % -+ O anche 11 - I> O, si ottiene

, . arcsin z lim y 1 un = -=.- z.....o

11

sin 11

Osservazio1.Je 5.1 n cambiamento di variabile eseguito nell'esempio precedente si può giustifi- care così. Si debba calcolare il 100 f(g(x». dove g(2:) è una funzione definita in un Z

2:O intorno di 2:0 e tale che lim g(z) = yo. Si ha 2:--

lim f(g(z» :' lim !('Y), 2:-"So . fI......fID

qualora quest'ultimo limite esista. Infatti

sia L = lim I <ti).. e sia :t n una succes.. JI....IIQ

sione convergente a :to. Posto 1/" = 9(2:.), risulta 71ft -I> !/o, e dunque lim f(g(:r:ft») = O-DO = lim f(yu) = L.. Poiché la successione %0 è arbitraria, si può concludere che anche n

oo . lim I(g(x» = L. Nell'esempio precedente si aveva f(y) = --!!- e g(2:) = arcsin :r:. :z:

zo sm 11 .

Esempio 5.6

Spesso, grazie anche all'osservazione precedente, limiti piuttosto complessi si scompongono in combinazioni di limiti semplici. Ad esempio, per calcolare I , cos(e:r - e-

) -] 1m :E-O arctg x 2

basterà scrivere cos(e S - e- Z) - I = cos(e S - e- S) - 1 (

- e- Z) 2 2;2 arctg z2 (e S - e-%)2 % arctg %2

Siamo così ricondotti al prodotto di tre limiti, Il primo è uguale a-I /2, dato che lim(e% - e- Z) = O. Analogamente, il terzo limite è liguaJe a 1. Per il secondo, %

o si ha

e S - e-

e&s - 1 = 2e- z % 2%

e dunque

., lim (e

- e- S) - = 4. z-+O x

Penanto il valore del limite richiesto è -2.. .

Esercizi

Si calcolino i seguenti limiti: 87. lim %3 - 3z 2 + 4:1: - :1.....0 ,.,5 - x

88. lim z3 - 3:1: 2 + 4% r-++oo

- 2:

89. lim z' - 3

- :z.......ca 2z 3 - ;a:"

90. lim 62: 4 - z'- z.....+oo

- z3

91: lim A% - BS --

.....o s

91. 100 sin(1f + 4z) z-t() :r;

r(l - :t) cos 93.. lim 2 .. z-o %

94 . ' 10(2 - COS z) · 1m '2 s.....o sm 2:

95. lùn (

- sm 2 :.: In s) _ _ s-..oo

96. lim [-L -

] .

-- 2;-.0 % tg % Z sm %

fJ7. lim "5 + cos :r: --- z

:r?+ 1

98 . lim : + CO.S % 3:-+00 4z - SUI $

99. lim vT+'Z - 1 -.--... %-.6 Z

I.. lim (

2 + z3 -

1 +22: 2 + %3)

%-++00

101. tim 10(3 + sin z) _ :Z:-++CIO z3

102 r !nO +%f

. un {fif . - z

o sin 5% + x smz

103. lim(I + z)1&% -- s....O

104. lim (I + cos 2 ',J;)er S - s-rr/2

105. lim (Sin:t - sin 1) ----s.....o s

106. Iim z sin ! --.....

-....oa 2:

107. lim eZsin(e-:r:sins) -

-+oo %

108 r 3 arctg

+ (I - COS 23:)sin 2 z · un 4. z.....o 27

+ S sm 2:

, 109. lim (1 - cosz) tgs + Sz _ s-tO 2

-

111. lim rino + 2:) + ti:

-+O sin z + ?li n3. tim 32:£5 + (1 - cos :r:) :r......o tg 2 s 10(1 + s) +
Hz

110. lim (1 - cosS

)tg3%

-t() (sin 2: - :1: 3)3

U2. lim (1- cos3z) + 7%3 s...o lin 2 S:r: + 1 S:z:6

115 lim]O(tg4z + 1)

....o e2- ilJ'4 % - 1

114. lim e'JJs - I ,.-0 :J; (COi:J: -

) 116. lirn I + 21/

s-.o 3 + 21/% -

3 s 3 -z 118.. lim - ---.. %--00 3% + 3- z

n,. lim v'I +11% - ...tI - tgs - z.....O sin %

120. lim (1 - cosz)2 z-o 10(1 + sin 4 z)

119. lim { " %2 +2z+s} %--00

21

: tim sin (1I'.COS :1:) -- . -;: %...... z sm z ..-'

122. lim ze:ISin (e-sSin a) %-++00 Z

123. 1im In cos 2: s....o r 125. lim sin 2s :1....0 tg 3:t

124. lim (...ti - 1 + 0082:) s-.+oo

126 lim 1 - COS 23: ·

-.o 8 in 2 3:

3 2. . 't 127. lim % + % sm z + sm"z 2:-+0 2;4 + s3 + zsin%

128. liro ../% + I +

2 - I ._ s-tO

129. lim sin(v 1 + %2 - 1) :z-o 2:

130" lim z - 5 . ,.-5 v'i - ,

131. lim in sin:z; %....0 ln z

132. lim lo&. (

+ 2) - 10&&2 s....o z

- ./' . 1 133 . j lim (. 2) l/loJ

\}' sm 2:

..

-tO

v'sin z I 134. lim e - %-0 Vi

135. lim e ID -. v'T'='Z

-o sm z

I - cos: + 1n(1 +

) 136. ___

-1

137. lim tg :z:(eCO!Z - I) %-../2

138: lim z tg (:z:a + arctg !) %....0 Z

139. lim log2(e

+ J) ..--- Z'-++oo

+ sm 3:

In molti casi può accadere che il lim f(z) non esista, ma che ci siano invece 2:-+ZO i limiti destro e siniSb'O, ovvero i limiti delle restrizioni della funzione I(x) agli insiemi An (zo) +00) e, rispettivamente, A n (- 00, %0). Talora poi la considerazione di questi limiti può essere di aiuto per calcolare il lim 1(2:). Infatti quest'ultimo s....SO esisterà se e 80JO se i limiti de

trO e sinistro esistono e sono uguali

Esempio 5.7 Si calcoli, se esiste, il limite limlx] { z } . z

4 Calcoliamo i limiti destro e sinistro. Se 4 < % < 5 (possiamo sempre limitarcj a un intorno del punto 4) risulta [z] = 4, e dunque lim [z]{:r} = 1im 4{z} = o. Al z.......+ 2:-t4+ contrario, se 3 < x < 4 abbiamo [:t=] = 3, e dunque lim [2:] { %} = lim 3{:J:} = 3. :r;-t4- . :r-t4- Poiché i due linùti sono diversi, il limite cercato non esiste.. .

oi la funzione 1(2;) in questione è monotòna, i limiti destro e sinistro esistono sempre, e il problema è ridotto al !'?fO _ calç,

lo:.

Esempio 5.8 Si calcoli il limite

. .. 2 - I / z 1m . :r:-.o+

La funzione in esame è crescente (infatti l/s è decrescente per x > O, -l/x è crescente, e dunque 2- 1 /% è crescente). cosicché il limite cercato esiste.. Per determ in ari 0, consideriamo la successione x. = l/n. Dato che il limite esiste, si ba (vedi Lezioni, cap. 3, Teorema 4.1) lim 2- 1 /:r = lim 2- 1 /:Z Q = lim 2- n = o. z-t

ft

OO ft-+OO

Allo stesso modo lt1 dimostra che lim 2- 1 /% = +00. . . g

%-

.

5 I Limi# di funzioni

119

Esercizi

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti, o altrimenti i Umiti destro e sinistro:

140. lim :t sin :t s-.o I

I

141. lim :J: COS Z :1-0 Iz I

142. lim [m]{ I - :r} S-.O

143. lim ln(I + 23;) :1:70

144. lim txll/z %.....0

2 s · 1 / % 1415. lion . z-.Q I + 2 1/ %

Calcolare j seguenti linùti:.

I". lim (

lnz)l/:r s...o+

!J:liD!: I 147. lim - :c

o+ X

148. Um (tg x) Vcos:Z s-. i -

14'. Una (tOg 3 Z + !) %-.

Z

150. lim vz'2 - I . z.....1+ In (

+

z2 - I)

I limiti di funzioni possono essere talvolta u tiliz7.a ti con profitto per calcolare i limiti di successioni, soprattutto quando queste si presentano nella fonna f(:£n), con %8 -+ 2:0.. In questo caso, se esiste il limite

lim 1(,;), :c-.zo

allora esisterà anche il 100 f(%f&)

e sarà uguale al precedente. .

oo

Esempio 5.9 Si calcoli ,

lim n(¥'2 - I). n

oo

Questa successione è della forma f(x n), dove :C n = ! e f(z) = 2:1: - 1 . Si ha lim z" = O e lim 1(:.:) = In2, e dunque n % ,.-.oa s-o

lim n(¥'2 - I) = In 2. . n

oo

I

2I!J Esercizi

Si calcolino i limiti per 11 -+ co delle seguenti successioni: 151. n 2 (I - cos

)

152. n[InCn + 1) - Inft]

.,£ In

(e+

)

In !!..!I 154. :+ I cos w 2n 157. (I +n 2)sin 2 2 n +3n

1

n sin (V1...)

(3V'2-2V'3).

159. (n - v'fi) (v'H ; - I)

158. (n + I) (3 J / n - I) IA. (n 2 + Vii) In (COll

)

In n+2 161. 1& + I . Jft +1 sm 2 n

Iti2. n 3 + ft cos (!: _ 1) n-2 2 n

1630 n[V COS

- e I / il]

(I) n+

]64. I + sin ii

. J 1- cos- +t g - 165. n ft .y2-1

. n(y'9+sin(2I/

- 1) - 3).

Dire se convergono le seguenti serie:

CIO 167. :; (

- arctgn)

Cct 168. E (1 - cos 1) n= I n

CQ 169: E (I - cos x R). ra:O

(j Funzioni continue

Ricordiamo dalle Lezioni (cap. 3,

8) la definizione di funzione continua..

Definizione 6.1 Sia f : A

R t e sia So E A. Si dice che I(x) è continua nel punto 2:0, se per ogni f > O esiste un 6 > O tale che per ogni x E A

con Ix - zol < 6, risulta I/(x) -/(zo>1 < E. Se poi I(x) è continua in ogni punto di A, si dirà continua in A.

Si vede subito che se :£0 è un punto isolato di A, la funzione I(x) è necessa- riamente continua in

o (infatti basterà prendere 6 così piccolo che in 1(%0,6) Don cada nessun punto di A diverso da 2;0).. Se invece %0 è un punto di accumulazione di A, la definizione è equivalente a

tiro I(x) = 1(:1:0). 2:

SO

6 I F ""ZiORI conlll

Ue

Sono de1ì.ni2.ioni equivalenti di funzione continua le seguenti:

(1) La funzione I(z) è continua in %0 se per ogni intorno V di 1(2:0) esiste un intorno U di Zo tale che f(U) C V. (2) La funzione 1(:.:) è continua in un aperto A se, per ogrù aperto BeR, f-I(B) n A è un apeno.

Esempio 6.1 Come si è visto nelle Lezioni., le funzioni elementari e le loro inverse, quando esistono!J sono continue in tutto Itinsieme di definizione. .

Esempio 6.2 Consideriamo la funzione

{ z2 I(z) = I

se z #0 se

;I0

Si ha lim I(x) = O ;' I{O), e dunque la funzione non è continua nel punto O. :r-.() Abbiamo in questo caso una discontinuità eliminabile, dato che può essere rimossa cambiando il valore della funzione nel punto in esame.. .

,.,. ....' . EsempJ

63 /i ....--"" Di diverso tipo è la discontinuità della funzione

f(x) == { ::1

se :t ;l O

se %=0

In questo caso si ha lim 1(:1:) = 1 e 1im f(x) == -l, cosicché il limite per x -+ O :r

O+ 2:

o- non esiste. Né è possibile modificare questa .circostanza cambiando il valore della funzione f (z) in O (o anche in un numero finito di punti); in altre parole, la discontinuità è essenziale. Essa si dice di prima specie, dato che esistono finiti i limiti destro e sinistto. .

Esempio 6.4 Si consideri la funzione

1(%) = x + J:tl .

2

Per :t > O risulta f(:t) = 2/z. mentre f(x) = O per x < O. La funzione è dunque

I

r Un

Ollf

'UIT.I ""nu. r UIIZfOfll r;OII"'m

I

ap. J

continua per

=I O. Risulta inoltre lim f(z) = lim 2 == +00, 1im I(s) = lim O == O, :z;-tO+ s-O't Z z-tO-

-+O-

e dunque la funzione ha una discontinuità nell'origine, indipendentemente dal suo valore in O.. Si tratta di una discontinuità di secont/Q specie, in quanto uno dei limiti è infinito. . . Un tipico esempio di funzioni che hanno discontinuità di prima specie sono le funzioni monotòne in un intervallo, dato che esse hanno sempre limiti destro e sinistro finiti in ogni punto interno all'intervallo di definizione. Come si è visto nelle Lez;oni (cap. 3, 9), le funzioni monorone possono avere al pii! un'infinità numerabile di punti di discontinuità. L'esempio che segue mostra cbe ogrù insieme numerabiJe può essere l'insieme delle discontinuità di una funzion

monotòna crescente.

Esempio 6.5 Sia E = {ql, Q2, ..., 9f1, ...} un insieme numerabile. Per ogni le E N si consideri la funzione

ft,(z) "" {

_II

se s < q. se $>q.

DO e sia I(x) = E /k(:e). La funzione I(x) è definita per ogni x e R, dato che la serie .::1 che la definisce converge per ogni %, essendo maggiorata dalla serie convergente 00 L 3- k . Inoltre la funzione 1($) è crescente, dato che sono crescenti tutte le I,,(z), 1.=1 e dunque, se x < y,

OQ 00 f(:&) = :E /I;(X) < E I,.(y) = I(y). 1.:=1 k=1 Facciamo vedere che la funzione I è discontinua in ogni punto 9m. Per questo spezziamo la serie nel modo seguente:

m-I

f(x) -. E fh(:E) + Im(x) + E I.(z). k = I k=m+ I

Osserviamo ora che la prima somma è continua in qm, e che si ha

00 eD I O <: E !,,(:£) < L 3- k = _3- m . k=m+ I k=m+ I 2

Pertanto

m-I tiro f(s) > L f"(q,,.)'" 3- m

.....t:. k =)

e

m-t 1 100 f(z)

E Jk(qm) + _ 2 3 -'" < lim f(:c). %.-.

k = I s.....q

La funzione J ha dunque una discontinuità di prima specie in ognuno dei punti q,. Facciamo ori vedere cbe 1(%) è continua in ogni punto .2:0

E. In primo luogo osserviamo cbe tutte le funzioni fk sono continue in %0. Sia ora (> O, e sia m un intero tale che 3- m < f. Come si è visto sopra, risulta

1

E flc(z) < _3- m < - lt==m1- J 2 2

per ogni :t E Il.. Sia ora 6 > O taJe che nessuno dei punti Ql, tJ2

..., qm cada in 1(2:0,6). In tale intorno risulta . allora J1e(

) = 1,,(2:0) (k = 1) 2, ..., m).. Ne segue che per ogro

E 1(2:01 6) si ha

00 00 1/(2:) - /(:1:0)1 = I E f,(z) - E II&(zo> 1 < - Z E + 2 E == €, '=m+) 4=m+t

e dunque la funzione I(z) è continua in Zoo .

Esercizio

J78. Si dimostri che se E è denso (cioè se in ogni interVallo cadono punti di E) la funzione f(z) definita neJ]'esempio 6.5 è strettamente crescente. Si provi cbe un insieme E è denso se e solo se. E = a..

Quando infine uno o ambedue i limiti destro e sÌDiS1IO non esistono, come nel c

o della funzione sin ! t o dena funzione di Dirichlet z

f(z)

{

se

è razionale se % è ilTazionale,

si dirà cbe si ba una discontinwità di terza specie. La funzione di. DirichIet dà anche)' eSempio di una funzione che non è continua in nessun punto di R.

Esercizi

Dire se le funzioni seguenti sono continue in R (o se possono essere rese tali assegnando o cambiando opportunamente il Joro vaJore in qualche pW'Ito). In caso contrario, classificare j punti di discontinuità.

I 171. arctg 2" z

1 172" arctg-

173. 3;[3:]

174. {z}{J -

}

12-1

FUII

ioni e loro /

m;';. Funzioni continue I Cap. 5

+ el/

175. II lsi - e IO

17'. 1(:Jr{z}

177. I I - Inlcos 2:)

178. {(-l)[s]z)

119. {z}{ -z}

]80. {z} + {-z}.

181. Dire se le funzioni che compaiono negli esercizi del paragrafo 3 sono continue. In caso contrario trovame i punti di discontinuità.

Dire se sono continue le seguenti funzioni. e in caso contrario trovame i punti di discontinuità:

182. zsin (,..{z})

183. 1(%) = lim

· ft-ao J +(2sms)2R

7 Funzioni uniformemente continue

Ricordiamo dalle Lezioni (cap.. 3, t II) che una funzione f :, A -+ R si dice uniformemente continua in A se, per ogni f > O. esiste un 6 > O tale che, se XI,:I:2 E A e 1$1 - %21 < 6, risulta 1/(xI) -f(Z2)1 < t. È evidente che una funzione unifonnemente continua in A lo è anche in ogni insieme B C A, e inoltte è continua in ogni punto di A. Al contrario, esistono delle funzioni continue che non sono unifonnemente continue., Per indagare l'unifonne continuità di una funzione SOdO utili i seguenti risultati

per le cui dimostrazioni rimandiamo alle Lezioni:

(1) Se I è unifonnemente continua in un insieme limitato A, allora I è limitata in A. (2) (Teorema di Weiersttass) Una funzione continua in un insieme A compatto (cioè chiuso e limitato) è unifonnemente continua in A.. (3) (Teorema di estensione) Una funzione I(

) è unifonnemente continua in A se e solo se è la restrizione ad A di una funzione / (x) uniformemente continua in A .

Quest'ultimo è un coroUario del teorema] 1..2 delle Lezioni. Infatti basterà definire f (s) = I(:r:) se x E A, e 1 (:£) = 1im /(y) se :E è un punto di accumu- ,

s lazione di A. La funzione così definita coincide ovviamente con f(z) in A, ed è uniformemente continua in A . In genere, il primo teorema può essere utile per dimostrare che una data fun- zione non è uniformemente continua; il secondo per provare l'uniforme continuità, e infine l'ultimo per ambedue gli scopi. Peraltro. quando tutti i metodi dovessero fallire, si può sempre ricorrere alla definizione.

Esempio 7.1 La funzione I(z):: 1/(%2 - 4) non è unifonnemente continua in (-1,2). dato che non è limitata. Essa invece è uniformemente continua in (-1, 1). Infatti 1(%) è definita e continua neO' intervallo chiuso [-I, I]; dunque per il teorema di Weierstrass è unifonnemente continua in [-1, I], e quindi anche in (-1, 1) che è contenuto in questo. .

Esempio 7.2 La funzione f(x) = :t sin 1.. è unifonnemente continua nell'intervallo (O, I]. z Infatti 1(%) è continua in (O, I], e risulta

lim · 1 O :tsm-= . s.....()t Z

Ne segue che 1(:£) si può pro1ungare, ponendo 1(0) = O, a una funzione continua nell'intervallo chiuso [O, 1], dunque

onnemente continua. .

Esercizi

Dire se sono unifonnemente continue te seguenti funzioni. negli intervalli segnati a lato:

184 z e;S (-1 J O) 185. zlnz (O, 3]

I:.: I 186. {z- n (_1 !) 187. {z- il [_1 !] 2' 2 2' 2 1 (-I, O) I (O, 1) 188.arctg- 189. arctg- 2: z 190. arclg! (-1, O) U (o. 1) 191. x arctg ! (-1, O) U (O, I). 2: Z

191. Dimostrare che

se f(z) è unifonnemente continua in (4,6) e in [b J c), allora lo è anche in (CI, c).

193. Dimostrare che, se f(z) è uniformemente continua in un intervallo (eventualmente illimitato) A. allora esiste una costante O tale che, per ogni

, %0 e A, risulta 1/(z)-!(:to)1 < < I +Olz - sol..

194. Mostrare con esempi che il teorema di Weierstrass non sussisre se l'insieme .A (1) non è cmuso, (2) non è limitato.

Quando Itinsieme A è chiuso ma Don limitato, si può ancora ottenere I

unifonne continuità se si fanno sulla ftmzione continua f(

) delle ulteriori ipotesi. Ad 8$empio, se A è limitato inferionnente, ma non superiormente, sarà sufficiente

.I.IO

. .....u,jlr.. . ,_." .... - ....._.v.

, "vn

nMi" I ","Wl" J

supporre che f(z) abbia limite finito, o più in generale che abbia un asintoto, per

.--t +00. Analogamente, se A è limitato superionnente, sarà sufficiente l

esistenza di un asintoto per :c

-00. Ambedue gli asintoti sa,-anno sufficienti a garantire l'uniforme continuità quando A non è limitato né inferiormente né superionnente. Ricordiamo che un asintoto per z --+ +00 è una funzione affine (1% + {3 tale che

lim (f(z) - ax - (J) = O. 2;-+00

Si può vedere facilmente che un asintato esiste se e solo se esistono i due limiti

tiro f(z) = a, z

+oo X

lim f($) - ax = (J. %.....+00

Esempio 7.3 La funzione f(z) = J z 3+ 2 x+I è uniformemente continua in [1, +00).. Infatti essa è continua nell'insieme dato

e inoltre

lim f(x) = lim [;3+2 = I, lim f(x) - z = _!. .

.....+co

z-+co V

s-+oo 2

Esempio 7.4 La funzione .J% è unifonnemente continua in [O, +00). Per dimosttarlo, non potendo usare il criterio precedente dato che ."fi non ha asintoto per z

+00, ricordiamo cbe per ogni %, 'II > O risulta

IJZ - vii < v' Iz -!II

(vedi cap. 2.. Esercizio 8). Se ora E > O, si avrà (Vi -lUI < E non appena Ix - !II < £2 == 6, e dunque .1a funzione

è uniformemente continua" .

Esercizi

195. Dimostrare che, se I(

) è unifonnemente continua in [a, +oo)

e se g(s) è una funzione continua nello stesso insieme e tale che

lim (/(:1;) - g(z)] = O, Z-+co

allora anche g(2:) è unifonnemente continua in [a, +00).

Dire se sono unif'onnemente continue in [1,+00) le seguenti funziOJÙ:

196.

197. sin:r: 198. :):4 199. r + I :z2 200. sinr 201. zJi I 203. e

202. ..ti . 2 I 204. %+

205. :t 10(1 + z)

Capitolo 6 n calcolo differenziale

1 Derivazione delle funzioni elementari

Ricordiamo brevemeote la definizione e alcune proprietà della derivata (Lezioni, cap. 4, fi 6 e cap. 5, il). Una funzione 1(:), definita in un intorno del punto

o, si dice derivabile in

o se esiste finito il limite

li f(z) - 1(3:0) m · z

so % - :1:0

In questo caso t il limite si chiama derivata della funzione f(%) nel punto %0, e si indica con il simbolo ./'(:1;0) o con D f(

o). Se poi la . funzione f(s} è derivabile in tutti i punti di un aperto A, si dirà che essa è derivabile in A. In questo caso la derivata prima j'(z) è una funzione definita in A.

Esempio /.1

Dire se è derivabile nel punto %0 = 1 la funzione

{ %2+1 I(:z:) = 2:1:

se z > 1 se :1:<1

Risulta I(1) = 2, e inoltte

XI - I 1(%) - /(1) = { % - 1 =!: + 1 :.:-1 2x-2 =2 %-1

se :1:>1

se 2: < 1

I I Deril'QziO,lc delle J

m1.iOll; e/enre"tol.i

129

Si ha dunque

lim f(x) - 1(1) = lim (2: + I) = 2 s..... J " :r: - 1 z...... J +

I . /(3:) - 1(1) - I . 2 - 2 1m -un-. s-+ 1- % - 1 :r.....I-

Poiché i limiti destro e sinistto sono uguali, la funzione è derivabile nel punto 1, e j' (1) = 2. .

Esempio 1.2 Dire se è derivabile la funzione 1(%) = sinlxl. Per x > O si ha sinlxl = sin x, e dunque Dsinlzl = D sin x = cosx. Analogamente, per % < O risulta sinfzr = - sin z, e dunque, per tali x I D sinlz I = -cos %. Infine, nel punto % = O si ha

I . sin z 1 1m -;:::: , z-+O" X

li -smx 1 m =-, %....0- $

e dunque la funzione è derivabile in tutti i punti tranne che nel punto O. .

Esercizi

Trovare dove sono deri vabil i le seguenti funzioni, e calcolame la derivaca:

I. z

2.

+ Isi

3. coslzl

4. Izisinlzi

5. %2... 3% - 2

7 { 3% · $3 _ sin $

se x > O se z<O

(I. sin(sins) IL {

-z

se z > I se z> 1

9. Dimosttafe che, se /(z) e g(x) sono due funzioni definite in R e tali che [(%) = g(z) in un aperto A. allora. se I (z) è derivabile in un punro So e A. anche 9(:];) è derivabile in 2'0. e risulta 9'(2:0) = /'(:1:0). Si può dire lo stesso SCI17..a supporre che A sia apeno? 18. Siano ! <x) e g(z) due funzioni definite in R e tali che !(z) = 9(:1:) in un insieme BeR. Sia %0 un punto di accumulazione di B, e si supponga che sia I che 9 siano derivabili in

o. Si dimostri che in tal caso risulta /'(2:0) = !/(zo).

11

Trovare una funzione I(x) derivabile nell 'intervallo (-I, I) e tale che /'(x) non sia continua in o.

IJU

.. ..-......,.- -',IJI.Ir

..,A....r" I I."Up. ..,

2, Regole di derivazione

Riportiamo nella seguente tabella le derivate delle funZioni elementari (Lezioni, cap. 5, fi 2):

I(

) II (:£) ZO OZC2-1 1012: + a) 1/(% + 0.)

e S 0 2 a% In a sinz cos

COS :I; -sin :r; tgl: I/cos 2 s cotg z -1/Sin 2 z arcsin % I / ../ t _ :& 2 arccos % -1/ ../ 1 - z 2 arctg z 1/(1 +

) sinh z cosh z cosh % sinh x

Per calcolare le derivate di combinazioni di queste funzioni, si potranno uti.. lizzare le seguenti regole di derivazione (Lezioni, cap. 5,

1):

(1)

D[/(

)

g(x)] ::: D /(x):I: Dg(x)

(2)

D[f(x)g(:r;)J = fez) D g(z) + g(x) D /(x) D f(z) = g(:x) D f(z) - f(:i;) Dg(x)
g(z) [g(z)]2

(3)

(4)

D(I o g)(z) = D [(g(z» = J'(g(!1:»g'(!I;)

(5)

_I 1 D f (x) = /'(/-1(:1;»

2 t Rego/

di der;\'Qzi()ne

131

Esempio 2.1 Si calcoli la derivata deUa funzione h(z) == sine% ..
ln(z - tg :r;2) La funzione h(:r;) è del tipo I(z)/g (3:) , con 1.(3:) = sin e

e g(z) = In(z - tgz 2). In vista di un'applicazione della (3), dobbiamo calcolare le derivate I' (x) e g'(!t). In ambedue i casi si può applicare la (4). Si ottiene /' (x) =. cos e S D e Z = e S cos e Z

1 2 1 I - 2 2

:r: COS 2 X 2 - 2x 9'(Z)

z _ tgz2 D(z - tgz 2) = x

t:z2. = Z

22:2 _ sinz2cosz2

In conclusione: cos 2 X 2 - 2% e Z cos ezln(x - tg z2) - siD e

2 2 .

2 Dh(%) = cos Z - sin coss .. 10 2 (2: - tg x 2)

Esempio 2.2 Risulta

ft

n((I+

r -1) =

.

Infatti, il limite 1 . (1 + :t)0 - I 1m %.....0 x

non è altto che la derivata nell' origÌ!Je della funzione (1 + 3:)0, e dunque è uguale ad a" D'altra parte, la successione ! tende a O, e quindi si ha anche . n

1 a ((I+!) Dt -1) lim n ((t + -) - 1) = lim n = a. _ R

OO ", 71-00 .! n

Esercizi

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

12. z2 - I s(z + 2)

13.r

14. sin z2e-:1:

1511 lolln sin 2: J

16. . sin s arccos 2:

17. IOL2:t

18. 8ICSin (

- sm z)

I'. 2$ "1 + z2

20. (z + an:tg s)

Jj2

Il calcolo differenziale I Cap. 6

29. v' t + z3

:n. ..; sin % - ',I: 23. z + v'2 + Z2 24

J -3z-

2: - -'/ 2 + %2 cosz 26. :t 2 sgn(z) 27. I 28. (;) siD

Inz 30. In (% ... V' J ... ',1:2) 31. arctg(2z _ %2) 32. $4 _ 4 s .

21. 21: sins

15. sin arccos z

Lo studio della derivata prima può essere di aiuto per stabilire se una funzione è crescente o decrescente su un dato intervallo. Si ha infatti il seguente teorema (vedi Lezjoni, cap. 4, Proposizione 8.3):

Teorema 2.1 Sia f(x) una funzjone derivabile in un intervallo (4, b). Con- dizioni! necessaria e sufficiente affinché I sia crescente (decrescente) in (a, b) è che per ogni

E (o, b) risulti I'(x) > O « O).

Se poi si ha II (

) > O « O) in (a, b). allora la funzione I è strettamente crescente (decrescente) in (a, b). Si noti che non è vero in generale il viceversa.. come si vede dalla funzione Z3, che è strettamente crescente in (-1, 1) ma ha derivata nulla in O.

Esempio 2.3 Si consideri la funzione f(z) = v' I + % - ...,fi. definita per s > O.. Risulta

, 1 1 ! (x) = v'I+""X - 2 r; < 0, 2 1 + x V X

e dunque f(x) è sttettamente decrescente. In particolare, per $ > O risulta J (:c) < J (O) e dunque

V 1 + x -/X<L-

Esercizi

33. Dimostrare che una funzione derivabile I(z) è strettamente crescente in (4,0) se e solo se /'(%) > O in (a,b) e l'insieme E in cui la derivata prima si annuUa non contiene nessun intervallo. 34. Dimostrare che la restrizione della funzione I(:r:) = sJn% alla semiretta U,+oo) è invertib

e. Detta g(s) la sua inversa, trovare ,'(O) e g" (O).. 35: Dimostrare che l'equazione

+i +:1:+ t = O ha una sola soluzione reale Zn. Trovare, se esiste, il limite lim Zn. II -"00

j I Deri"O'e aUct"essive

3 Derivate successive

Sia I(z) una funzione derivabile, e sia /'(

) la sua derivata. Se accade che I'(x) sia anch'essa derivabile, la sua derivata si chiama derivata seconda della funzione 1(:1:), e si indica con I''(x) o con rY f(:r.). In maniera analoga si definiscono le derivate terza, quarta ecc. La derivata k-esima della funzione f(x) si indica con D k I(x) o con /(") (x).

Esercizi

Si calcolino le derivate seconde e terze delle seguenti funzioni:

36. z2 41.

:r;

37. :c 2 sin:z:

38. e S cos %

39. sinz 2

40. z3 - sin 2 :c

42. In sin z

43. Jf+Z

44. 1n(:r + z2).

Il calcolo della derivata seconda. terza ecc. è nient'I altro che l'esecuzione successiva di due, tre, . .., derivate. Più difficile è oUenere .. espressione generale della derivata k-esima di una funzione. Questo è possibile solo in alcuni casi semplici.

Esempio 3.1 Risulta, per k > 1,

D k 10 % = (':'1)k-l(k - l)! z-k.

La fonnula precedente è valida per k = 1; procedendo per induzione, si ha

Dk+ 1 In 3: = D D k In x = (-I)"-I(k - 1)(D :t-a = (-t)A:k! X-k-I, che conclude la dimostrazione. .

Esempio 3.2 Calcoliamo la derivata

D"(zO lo =-:).

Si dimostra facilmente per induzione cbe

D"(z4r In z) = GkX'rt-A: + b/cx a - Ic In!J:,

e dunque si ttatterà di trovare i coefficienti QA: e bIc t Ora, Dk+I(XCZ In z) = D(ak:E°- k + b/:!£OI-Ic In!C) =

= [(a - k)a, + bk]X o - k - 1 + (Q - k)bk:I: cr - i - 1 lnx;

quindi i coefficienti al; e b,. verificano le relazioni Gkd-I = (a - k)ak + hA:

blc...I = (o - k)blc,

,. e inoltre 40 = O, bo =]. Dalla seconda relazione segue facilmente

bk = a(a - I)... (o - Ii + I).

Per risolvere la prima, poniamo ak = a(a - 1).

.. (o - k + 1)Air. Si ottiene 1 Ak+1 = A. + tk Q-

e dunque

11:-1 1 Air = E · 8=0 Q - 8

In conclusione:

{ A:-1 } Dk(zo In 2:) = a(a - I)... (a - k + 1)xo-I; E. 1 + In x . $=0 a - s

Questa formula si può verificare direttamente per induzione..
Naturalmente, se a è un intero positivo (Q = m) la fannula vale se k < m.. In particolare si avrà

.. { m-I 1 } D m (2;m lnx) = mI E + In x ,=0 m - t' e dunque:

Dm+h(:J:m lo x) = m! D h lo z = (-l)h-lm!(h - l)!

-h. .

Esempio 3.3 TalvoJta, per il ca1colo delle derivate n..esime di un prodotto può essere utile la formula di Leibniz (Lezioni, cap. 6, Teorema 2..1)

R Dn(fg) = EoG)D 1c fD n - k g.

.,. I IrJu

.)jlln r nl"uIIII

Ad esempio, si voglia calcolare la derivata

D R e S 10x.

Risulta

n n D" e% In:r: = E (n)

In X Dn-ke z = e:I: In

+

E (n) DkIn x t=o k &= 1 k e dunque { ti (I)k -le } D R e S In:t = e Z .In:t - n! L - % . . . .=1 k(n- 1e)1

Esercizi

Trovare le derivate k-esime delle seguenti funzjoni:

45. ztr

46. zPe

47. zeo

48 I .

49. cos 2 s

50. 10 2 z.

4 Massimi e miniDli

Ricordiamo dalle Lezioni le definizioni di massimo e minimo (relativo e asso- luto) e alcuni risultati fondamentali.

Definizione 4.1 Sia f(x) una funzione definita in un insieme A. Il punto $0 e A si dice punto di massimo (assoluto) per la fumioM f se per ogni s e A risulta [(z) < f(

o). Il valore /(xo) si chiama valore massimo o. più semplicemente. massimo della funzione J in A.

Analoghe definizioni per punto di minimo e valore mmuno. Molto spesso, oltre al massimo e al minimo assoluti, si considerano anche i massimi e i minimi relativi:

Definizione 4.2 Sia I(x) una funzione definita in un insieme A. Il punto 2:0 e A si dice punto di massimo relativo per la funzione I se esiste un intorno U di 2:0 tale che, per ogni :c E UnA. risulta I(,;} < 1(%0).

Se poi si hanno le disuguaglianze strette, i punti corrispondenti si chiamano di massimo o di minimo (relativo o assoluto) stretto. Si ha il seguente teorema:

Teorema 4.1 (di Weierstrass). (Lezioni., cap. 3, Teorema 10.4) Una funzione continua in un insieme compatto ha massimo e minimo.

Per quanto poi riguarda la ricerca dei punti di massimo e di minimo, e dei relativi valori, è essenziale il seguente teorema:

Teorema 4.2 (Lezioni, cap. 4, Proposizione 8.1) Sia f(z) una/unzione definita in un insieme AI e sia :1:0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad A. Se I(z) è derivabile in

o, allora risulta ['(2:0) = o.

In particolare, se 1('1',) è continua in un insieme compatto C e derivabile in C (tranne eventualmente in un numero finito di punti), allora il massimo e il minimo di I (che esistono in virtù del teorema di Weierstrass) cadranno in uno dei punti seguenti: (a) i punti di frontiera 80, (b) i punti in cui I (x) non è derivabile, (c) i punti in cui la derivata I' (x) si annulla.

Esempio 4.1 Si calcolino il massimo e il minimo della funzione f(:£) = % - z3 nelrintervallo chiuso [O, I]. La funzione f(x) è sempre derivabile; si ha I'(x,) = 1- 3z 2 , e dunque I'(x) = O per 2: = 1/..fj (il punto x = -1/.J3 cade fuori dell 'interv

o [O, I] e quindi non . deve essere preso in considerazione). Risulta

f(O)=O; 1(1)=0; f(

) = 3

.

Confrontando questi valori si deduce che il massimo della I nell'intervallo [O, 1] è 2/(3.J3), che è assunto nel punto 1/.J3, e il minimo è O, assunto nei punti O e I. .

Esempio 4.2 La funzione 1(,;) = Jz 1(2% - I) è derivabiJe in tutti i punti deU 'intervallo [- 1, 1], a eccezione dell'origine. Si ha

{ 4Z-1 I' (z) = -42: + 1

se %>0 se x<O

cbe si annulla solo per :J: = 1/4. Confrontando i val ri /(-1) = -3, 1(0) = 0, /(1/4) = -1/8, 1(1) = I t si conclude che il massimo della I nell'intervallo [-1, I] è I, assunto nel punto I, e il minimo è -3, assunto nel punto -1. .

Esempio 4.3 Per andare dal punto A al punto B sulla circonferenza di raggio 1 (fig. 6.1), si percorre prima un tratto rettilineo di ampiezza 28 con velocità 1)1., e poi si prosegue lungo la circonferenza con velocità tI2. Trovare l'angolo {} in modo che il tempo impiegato sia minimo o massimo.. n tempo è dato dalla fonnuJa

T(I>;:: 2 sin" + ('1r /2 - 2-D) "1 "2

(O < -t9 < '1r /4), e dunque T(iJ) = 3.. (cos6 _ "1) .. 'V 1 "2

Si hanno allora tre casi:

(a) t'I > "2. In questo caso la derivata T'(") è sempre negativa. e dunque la funzione T è decrescente, cosicché

11' (11") J2 f Tmax=T(O)=- Tmin=T - =-.

2"2 ' 4 111

(b) 111 < 112 < ViVI- La derivata si annulla per d = arccos DII tJI. e la funzione T è prima crescente e poi decrescente.. D tempo massimo si ha dunque per () = arccos 'Vi / 'V2, e vale

2 {

11" "I } Tmax=- --I+--arccos-, 1)2 vi 4 V2

B

A

Figura 6.1

roentte il minimo si ha per 6 ::: 1C/4 (Tmin =

) se 2'f' < : < 1, e per 1("]

I 2V2 iJ

O (T min = 2tJ:z) se "'J2 < tI2 < --;:-. (c) "2 > v'2vJ. Risulta T' > O nelPintervallo [O, 1r /4], e dunque il tempo è massimo per iJ=1t/4 (Tmax =

) e minimo per 6=0 (Tmin= 2:)'. Esempio 4.4 Fra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio l, si trovi quello di volume massuno. Se 22: è l'altezza del cilindro (fig. 6.2), il volume sarà f(:&) = 211"x(1 :.. x 2).

Di questa funzione bisogna calcolare il massimo nell 'intervallo [O

l]. Si ha

f'(%) = 211"(1 - 3%2),

che si annulla per % = -1/,;3 (da non considerare, in quanto cade fuori deU'in.. tervallo in esame) e per x = l/VJ. Si ha

(I) 411" /(0) = /(1) = O, / ..fj = 3.J3 '

e dunque il volume massimo di un cilindro inscrino nenà sfera di raggio l è 4w

. 3,;3.

Se l'insieme a in cui si considera la funzione I(

) Don è compatto (ad esempio se è un intervallo aperto, una semiretta. o tutta la retta)

non è detto che la fimzione abbia massimo e minimo. Per dee iderlo , occorrerà esaminare il comportamento della funzione nell'intorno dei punti di frontiera di C che non appartengono a C, ed eventualmente, se C non è limitato superiormente [inferiormente], il comportamento di f(!r) per

-+ +00[-00].

Esempio 4.5 Trovare il massimo e il minimo, se esistono, dena funzione I(x) = (2z + I)e-

nell'insieme [O, +00). Risulta /'(

) = (t - 2z)e- S , che si annulla solo per x = 1/2. Si ba 1(0) :: 1, 1(1/2) = 2e- 1 / 2 , e inoltre lim I(x) = O. Poiché Je < 2, il valore massimo è :&-+00 assunto nel punto 1/2. D'altra parte la funzione è sempre positiva, ed ha estremo inferiore O, per cui non ha minimo. .

Figura 6.2

Esercizi Trovare, se esistono, il massimo M e il minimo m delle seguenti funziooL negli intervalli indicati a fianco di ognuna di esse: 51. sin z - cos % [O, 2r] 52. -!- [-2,3J 1+z2 53.

bt2: H,2] 54. z(z - 2)2 (O, 3] 55. tfZ H,2] 56: ZftIni x [

, e] s 57. GZ 2 +! (O, +(0) 58. z z2 (-00,+00) 2: 1+ %2 (-00,+00) 60. z"e- S (ft

O) (O, +00) 59. ;r- +1 Cil. 2cosx - 3 sinz [O, T] 62. 7sins+ sin

[o,

] 63. :r: - ardg 2: (-00, +00) 64. In sin x - 2sin

(o.

] 65. sinJ!I:1 - 18in zI L-IO, IO] 66.

+3

-2s [-1, O)

 67. (%2 - 3)e 2 - s [1, +(0) 68. sin % + Icos xI [O. r) ., 6'. (2: 2 - 8)e- S [3,+00) 70. (2% - 1) e-zoO [0,+00) 71. 2ze I -;r;/2 (-00, +00) 72. zP + z-' (p, q > O) (O, +(0) { arctg(z /V I +

) se -1 < :r:<0 73. I(z) = [-1, 1] I+x-r se O

% < 1 74. :z; In :E + 3% (O, 51 75. 31n(I + %2) + %3 [- 2, O] 76. t% I sin :I: + cos x (-.,11'] 77. arctg:t - In(1 .. z2) [O. J].

78. n volume di un prisma retto. la cui base è un triangolo equi1atero

è V. Trovare il lato della base in modo che la superficie totale sia minima. 79. Fra miti i cilindri inseritti neUa sfera di raggio I, trovare <a> quello di superficie laterale ti massima, (b) quello di superficie totale S massima.

IO. FnL tutti i rettangoli con j vertici su un' ellisse di semi assi ti e b, trovare quello di area massima.

81. Fra tutti j cilindri inscritti in un ellissoide ottenuto Notando attorno all'asse delle % I' ellisse di equazione

z2 ,2 0 2 + fj2 = I,

trovare . (a) quello di volume V massimo, (b) quello di superficie laterale (f massima, (c) quello di superficie totale S massima. 82. Fra i coni inscriUi nella sfera di raggio I, trovare (a) quello di volume V massimo t (b) quello di 'superficie laterale f1 massima. (c) queUo di superficie totaJe S massima. 83: Fra i coni circoscritti alla sfera di raggio 1

trovare (se esistono) (a) quello di volume V minimo, (b) quello di superficie laterale (1 minima, (c) quello di superficie totale S minima. 84. Nella parabola di equazione y = z2 si brino dall' origine due rette petpendicolari in modo che <a> il rettangolo C01Dposto dai segmenti staccati su di esse dalla parabola abbia area minim

(b) la somma delle lunghezze dei segmenti sia minima.

85. Dimostrare che un triangolo di cm siano dati la base e il perimetro ha area massima se è isoscele.

86.. Fra tutti i rettangoli di data area ttovare quello di diagonale minima. 87. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti nel cerchio di raggio 1, trovare (a) quello di area massima. (b) queno di perimetro massimo. (c) quello di perimetro minimo. 88. Una figura è costituita da un rettangolo sormontato da un semicerchio (fig. 6.3). Se il perimetro P della figura è assegnalo, ttovare l'area massima.

Figura 6.3

89. Con un foglio rettangolare di lati a e b si vuole costruire una scatola ritagliando quattto quadrati di)ato r agli angoli e ripiegando i lembi (fig. 6.4). Come si deve scegliere , in modo che il volume sia massimo?

r l- l - -

-

....._--

-

I I I I I I I I I I J I I I I I

-----...._-

b

l'''

-l

a

Figura 6.4

90. Fra tutti i triangoli rettangoli al/enti la somma dei cateti S fissata, ttovare (se esistono) quelli di ipotenusa minima e massima. '1. Nel

cerchio di raggio 1 inscrivere un rettangolo tale che.. detti a il suo lato minore e b il maggiore, la quantità a';' sia massima. . 92. Da un cerchio di raggio 1 ritagliare UD settore tale che, facendo combaciare i due lati in modo da fonnare un cono, questo abbia volume massimo. 93. Un punto materiale di massa m può muoversi sulla parabola di equazione y = %2 't ed è unito con una molla di costante le al punto Fa di <:oordinate (O. I) (fig. 6.S). Trovare il punto in cui l'eneJgia totale è minima (si ricordi che l'energia è data dalla somma dell'energia gravitazionale mgy e di quella elastica, che è uguale a le moltiplicato per il quadrato deUa distanza del punto da Pc).

y

o

x

FIgUra 6.5

94. Un grave cade da A verso P, e poi prosegue fino a B con la velocità acquistata in P (fig. 6.6). Trovare la posizione del punto P sul segmento BO in modo tale che il tempo totale del percorso sia minimo.

A

h

c.

L

B

Figura ,.,

.., l"Jlu,).urlJ, (; ""nlfln

95. Tre sfere elastiche sono situate su una retta. La prima sfera si muove cm velocità v e urta la seconda, che è in quiete; questa acquista una cena velocità e va a urtare la teI7.a. Se le masse della prima e della terza sfera sono assegnate, trovare quale deve essere la massa della seconda affiJJché la velocità assunta dalla terza sfera sia massima. 96. Una grondaia è costruita piegando una striscia di larghezza L in modo da ottenere un profilo costituito da una base orizzontale e da due quarti di circonferenza come nella figura 6.7. Trovare quale deve essere la]ungheu.a della base affinché la capacità sia massima.

Figura 6. 7

97. Si deve andare da un punto A O' origine degli assi) a un punto B di coordinate (

, b), percorrendo prima un tratto sull'asse delle z con velocità VI e poi un ttatto rettilineo fino a B con velocità "2 (fig. 6.8). Trovare in qua1e punto si deve abbandonare l'asse delle :r; perché il tempo totale impiegato sia minùno.

y

a --------------------- B

b

A

)(

Figura 6.8

Talvolta si riesce a dimostrare delle disuguaglianze notevoli riconducendole a problemi di massimo e minimo.

Esempio 4.6 Sia p un numero reale maggiore di I. Si trovi il ma..

simo della funzione

fJ [(:r:) = z - - p

nella semiretta [O, +(0)..

La derivata /'(%) = I - $p-I SI annulla per :r; =]. Si ha 1(0) = 0, /(1) = =]-! >0, e inoltre p lim f(x) = -00. Z-++CO

Da quest'ultima relazione segue che esiste un punto 2:0 > I tale che f(x) < O per ogni :I: > $0. Risulta ovviamente /(:1:0) < O. e il massimo della funzione f(z) sarà assunto nelJ'intervaUo [O, :to], e dunque nel punto l, dato che 1(1) > 0= 1(0) > > [(so). Si ha allora

zP I z--<I--. p - p Osserviamo che se p = I si ha /(:£) = O, mentte se p < 1 la funzione non è limitata superionnente. .

Esempio 4.7 Dire per quali a > O è risolubile l'equazione

% = Jo&.

e quante sono le soluzioni La funzione 10&.2: è definita per gli a positivi e diversi da 1, e risulta 1080% = = I m :c .. Consideriamo dunque la funzione Da

Ins !(x) = :£ - In a . Si dovranno distinguere due casi. (1) a > 1. Risulta lim f(:x) = lim I(z) = +00, e dunque la funzione ha un :t-++oo 2:-.0 minimo. La derivata

1 j'(:J:) = I - xIna si annulla solo per :EO :::

a ' cosicché la funzione è decrescente in (O) zo) e cre- scente in (2:0;+00). n minimo di I(z) sarà I JnIna m = Ina + Ina ' e risulterà maggiore

uguale o minore di O a seconda che 10 In a sia maggiore, uguale o minore di -1, cioè che a sia maggiore, uguale o minore di elle. Nel primo caso la funzione ha minimo positivo, e quindi non si pottà annullare; nel

secondo il mmuno è O

e dunque la funzione I(x) si annulla solo nel punto :1:0 = l/e.. Infine,. se 1 < a < elle. la funzione ha minimo negativo nel punto %0. e dunque si annullerà in due punti, uno minore e uno maggiore di :J:O.

(2) a < 1. In questo caso si ha 104 < O, e quindi lim f(x) = +00 e %- +00 lim f(:£) = -00. Inoltte la derivata prima è sempre positiv

e dunque la funzione %-+0 è crescente. Ne segue che esiste uno e un solo valore 2:0 in cui si ha 1(%0) = o. In conclusione,)*equazione

= IO

:J: ha una soluzione se O < a < I, due soluzioni se I < a < elle, una soluzione se a = el/

, e infine nessuna soluzione se a > elle.. .

Esercizi

98. Sia O < a < I. e sia

tI) la soluzione dell'equazione

-10&.% = O (vedi esempio precedente). Si dimostti che risulta

lim

(Q) = I. a..... 1-

Dimostrare le seguenti di suguagJ i anze:

99. --L > 2 - 2 13 (z - .!) . % e [2(" 11'] sin 2: - V

6 t 6 ' 3

00 I · I .. COS:I: < ; o <

< - - ../ 1+z2 - - 2

101. arctgx > %

; z E (0,+00) 1+

102..

+ sinz $ 2(r - I); % > 0

:£2 :J:n 103. r

1 + :r; + _ 2 +... + ,.; z

O, n E N 1\.

Z3 11" 104. tg:r 2: % + 3; O:S % < 2:

10S. 1;4 < at + 1 - a; t > O, O < a < 1

106.. e 1rl -I2:1 +COS% > 2; x E R

107.

s; s > O

108. (I +:r)P -:£P S I; p < 1, :c > O.

109.. Dimostrare che per O

z

I si ha

.

arccoss = 2arcslnV

= 2arccosV 2 = arctgv -;r.

110. Verificare che). equazione 4z 2 -1n(1 +%2) =

- 2arctgs 2

ha una sola soluzione nell 1 intervallo IO. I).

5 Massimi e nainimi relativi

In molti casi si richiedono non tanto il massimo e il minimo assoluto di una funzione, quanto piuttosto i punti di massimo e di minimo relativi. Come nel paragrafo precedente 1 i punti di massimo e di minimo (brevemente: gli estremi) relativi saranno da ricercare tra (a) i punti in cui la funzione f(x} non è derivabiJe, (b) i punti in cui la derivata si annulla, (c) i punti di frontiera di A (in particolare, se A è un intervallo, gli estremi).. Naturalmente, Wla volta trovati i punti di cui sopra. non si ttatterà più di confrontare i valori deUa funzione, ma di esaminare per ognuno di essi se si tratta di un massimo o di un minimo relativo (o di nessuno dei due). Nei casi (b) e (c) questo si può fare esaminando il comportamento della derivata prima ed eventualmente il segno della derivata seconda (vedi Lezioni, cap. 6, Teorema 2..2), mentre nel caso (a) non ci sono metodi generali, anche se talvolta può essere utile esaminare separatamente i comportamenti della funzione a destra e a sinistra del punto in questione.

Esempio 5.1 Si trovino gli estremi relativi della funzione

I(z) = Ixle s .

La funzione è definita ovunque ed è derivabile in R - {O}.. Si ha

, x _ { (:t + 1)

f ( ) - -(x + I)

2:>0 x<O

e dunque l'(z) = O per x = -1.. Poiché !'(x) è positiva per x < -I e negativa per -1 < x < O., il punto -1 è di massimo relativo.. Per quel che riguarda i1 punto O, basterà osservare che I(z) > O e 1(0) = O.. Ne segue che O è un punto di minimo relativo.. -

Esercizi

Trovare i punti di massimo e di minimo relativi delle seguenti funzioni:

w. 2z3 - 9z 2 + 12% - 1

112. z3 +s2 +

+ 1

113. 2;(:r - 1)'1.

114. s4 - z3

II5! zi(Z - I)m. con k ed m interi> I

116. %2 +: _ ! z

117. x2 ";%2 - 1 121. (,; + 1)Il(z2 - I)i

R Ua. % v J - : 2 122. 1%2 - 41 s / 3

119. % + I 120. 2 sin 3s + sin 6:

I 123. s' +

+ 6z + c 124. 2m:.: - S arctgs.

125. Sia /(s) una funzione derivabile in [0 1 Il), e supponiamo che

bia un massimo (un minimo) relativo in CI. Cosa si può dire della derivata f(a)1 E cosa di /'(6) se I(x) ha OD massimo o WI minimo relativo in b?

126: Si dice che una funzione F(z) ha la proprietà di Darboux in un ÌDten-allo [a t b] se in ogni intervallo [a, Il] C "[a, b] assume tutti i vaJori compresi tra F(o) e F(fJ). Dimostrare che. se F(z) è una funzione derivabile in [a 1 b], la' sua derivata ha la proprietà di Da.t"bQux.

6 I teorelDi di De l'H6pitai e U calcolo dei limiti

Quando il limite di una funzione si presenta sotto la forma indeterminata O/O o 00/00, è talora vantaggioso ricorrere a uno dei teoremi di De J'H6pitaL ma che più propriamente si dovrebbero chiamare di Johann Bemoulli (Lezioni, cap. 6, fi 1):

Teorema 6.1 Siano f(x) e g(s) due funzioni derivabili in [a, b] - {zo}, e tali che lim /(:I;) = lim g(x) = O (ovvero lim /(:&) =

oo f! lim g(2;) = ::1:(0). %

SO :r:-+zo %

SO s-tSo Supponiamo che g(,;) e g'(%) siano diverse da O in un intorno di %0- Se esiste il limite

lim l'(x) S'''So g'(

)'

allora esiste anche il limite del rapporto

:

, erisulla

lim f(x) = lim f'(x) . %-+$0 g(x) s-+so g'(z)

Esempio 6..1 Calcolare il limite

I . ln(l + z) - Z lD1 · %

2

1.410

JI t'UJC'mo ai.DerenIIllJe I L'op. ()

Siamo nel caso O/O, e dunque si può vedere se esiste il limite del rapporto delle derivate: -L-I 1 lim l+x =lim - %.....0 2:1: $.....0 2(1 +:1:)

I = ...

. 2

Per il teorema di De I , Hopital si ha allora lim ln(l + x) - z = _! . . %-+0 %2 2

Esempio 6.2 Si calcoli il limite

. . e %-sms 1m IO z.....O z3

Calcolando la derivata del numeratore e del denominatore Il si trova lim f'(x) = 1im 1 - coss = ! Z-'O g' (:r:) %.....0 3%2 6 ' e dunque per il teorema di Pe l'H6pital si avrà anche lim :I: - sin:t = ! IO . z-tO s3 6

Esempio 6.3 Si trovi il limite lim 1/:I:-2+s " s.....1 8in 2 7r

Si è nelle ipotesi del teorema di De I 'Rapita!, e dunque ci si può ridurre al calcolo dellimite del rapporto delle derivate: 1 . _1/,;2 + I un 2

, 2:.....1 1[" sm r

cos w-x

che è ancora del tipo 0/0.. Derivando di nuovo: lim l/z - 2+ S = lim 2/:&3 =

.. . :r;-.I sin 2 wz :£.....1 21r2(cos 2 wz - sin 2 1r3:) ...2

Esempio 6.4 Si calcoli il limite

s

x (arctg x - ;).

6 I I leol'em; di De J' H6pi1Q/ e il ca/culo dei linli/;

14':1

Abbiamo qui un limite del tipo O. 00, che si riduce al tipo O/O se si scrive I , (7r) li arctgx - tr/2 1m % arctg

- 2 :: m 1/

-+co %-.+00 2:

Si ha allora lim (1[") . . 1/(1 + z2) 1 :t arctgz- 2 = un 1/ 2 =-.. z-.+co S

- Z

Quando poi il limite cercato si presenta nella forma 00, 00° o 1 cc), ci si può ric ondurre al caso O.. 00 (e di conseguenza ai casi 0/O o 0(/00) scrivendo f(

)'(

) = e 9 (s)In/(:r)..

Infine, i limiti della fonna 00 - 00 si possono 1raSfonnare in limiti del tipo 00/ 00, scrivendo e/(s) I f(z) - g(z)

In - · eg(s)

Esempio 6.5 Si calcoli

I .100 (sin 2:) i .. :1:-.6

Risulta (.) ! 1im In S

:I: sm S :E lirn - = eJ:-o

.. :r.....0 2:

Ora si ha . In

.. . lim x = lim

:ecos:!: - smx = 1im ZCOS2:.- sm:.: = O 2:.....0

s-o sm x 2: 2 :.....0 % sm x

e dunque.. in conclusione, 1 lim (Sin:I:) i = 1. . s.....o 2:

Esempio 6.6 Si calcoli il limite

100 R(

- t). n-+ca

Natura1mente non si può usare direttamente il teorema di De l'HOpital. dato che qui si ha a che fare con una successione. Si può però (Lezioni, cap. 3, Teorema 4.1) considerare il limite

s!!Too x(3:

- 1),

che è deUa fonna O. 00. Risulta

! (I-lnS) I 2;% xi - 1 . :£2 I lim 1 = Iim I = 1im :ts (In x - I) = +00, s

.f.oo z

+co %.....+00 Z - :t 2

e dunque si avrà anche

tiro n(;fft - I) = +00. . a-oo

Esercizi

Si calcolino, se esistono, i seguenti linùti:

127. lim(I +

m)J/%

z-tO

-z I 128. lim ;J; -

-O+ !t

: .{ d -I) 129. lim I s-+oo n %

130. lim n (V'A- 1) ft-CC

131. lim %3 (arctg

- !. + 1) z

2 %

132. lim (1 + Sin%) * %

o

133. lim (sinz) % %-++00 %

134. lim

z-o+

135. lim

- 1 - Z 3:-0 I - cos% +

2

13fi. lim

z.....o+ S

(.) 1/

2 137. tim

%-.0

138. ,,

{:I: -

In(I + sin

)}

. 2 I . 2) 139. lim (arcsln z) + n(I - sm z %.....0 cosh z :t - J

140. lim 2'Uas .-+00

141. .lim lnr + sin 2: z.....+oo I + cos 2 z

142. lim [vI - sin:t - eDS zI sin z %.....0 1 COS % - "; 1 - tg 2:] lne 1 + z)

6 J I teoremi di De r HIJpitol t il calcolò (Jel I

mlt

143. lim)nO + zarctgz) -

+ I I:

O ..; I +

- I

145. lim. [tg(rs2)+ (2!t - 1)4:5 +6

- 4] cotg (z - 1) s-i 2

146. lim(co8:t)l/z2 :I-O

V I - (I - z2

m(I + 2 sin 2:) an:tg

147. lim . 2 s

Z-sm%

In sins 148. lim s :.:.....0 In cos z

150. 1im (I + z2)l/z - 1 :-0 S

152. lim [3

x +cosv'il2s

-t+OO I + J

154. lim (e-% + ! 18in zl)]:r; s--+oo 4

156. tim [-L - ..!.] z....o z tg z il-

158. lim cos.(f% -

z

z2

IQ). lim 10(3 + sin :r;) 2-+00 :z

162. lim 2;(arctg z - arccos %-2) %

164. 1im zlins - J z.....o+ s

1". lim sin[In(3z + I)] s....o

- 32:

v .2 168. lim I +sm %-1 ......00 {(I + sins}-I!z - e-I} In (I + V I - e-.. 2 J

16'41 100 3 &retg z + sin 2 s(1 - cos 2%) s-o 27s 4 +Ssinz

144. lim 1 - C

S2:z %--00 l + sm 2 :

14'. lim (8mb 2: - sin s;f! :.:-+0 (cosh % - cos z)3

151. Um [

- arctg z] bu: ....ot ZZ

153. lim (Sz sm ! + cos %r' %-t+co %

155. lim [il cotg % + sin 2;] 1/1n:r s...o+

. [21/

+ 31/s + Sl/ z] s 157. luo s

co 3

159 l . cos

-

· un . 2 / 3 2:.....0+ Z

16L lim x 2 (arctg z - arecos z-2) s-++oo

163. lim Isin,;flz s-+co

165. lim z

arctg[3(!J: - %2)J s

sinh

- :& cosh:t

1 1:..'"l 1 9n1 ...t 1 - e- s v I 41 AUI s....Ot ..ti

170. 100 (I - c:- s)tgz + 53: s....o 2

- -Vi

}52 171. lim . 1n(1

s)3 . :I-+O smSz+

Sm% J73. lirn In(e S coss) - sin(sinhz) %-0 (eS - 4%)2 17S. lim cos(e S - e- S) - I Z-+O arctg :£.2

172.

{(sins r1/z2 - s-I/z2} 174. lim (3:1: - :22:) tg z z

0082$ - I

170. lim [I + arcsin(

- J)] I/lin

s-O--

177. lim I + 21/% z-.()4 3 + 2 1 / s

178. lim 1 + 21/

:a;

3 + 2t/

( ) 3:z+1o 2: 179. s!.

1+

180. lim (tg!I:) 'V'COSS :r-'-

181. 100 e - (1 + arctgz)l/

S"'O !t

182. lim .J2 - S

% - COSs z-I Insm2s

183.. lim {In:c }c-n[stjz z--++co

184. lim (

- I +cosz)

185. lim I + 2:t - ccs z

-.o tgz +z3 187. lim sin :t z-O+ :r + .;;.

18().. lim 2

- 3 s s....o I - 4$

188.. lim "1 - :il

.....J'" arccos s

189. lim (1o(2%2 + z - 3) - In(S2 + I) } s-+co

190. lim In:r: :1-1 tg1f%

1'1. lim (I + arctgs) (1-lins)/(s2+2:) 2:-+0

(.) t,s'I. 192. lim 7 _ 3zsm$ %....0 1 - cos s

193. lim (sin 2: + cos z) I/s :z......o+

1'4. lim (sin s + cos s) (2+s)/%J. %-.0+

195.. lim (sin % + cos %) I,s . s.....o-

196. 100 (4tgs +cosz) I/s s

O'"

197. lim (I + h J + z) C0f8 S z ......0+

(1) 3 1/

+1+ b:lz 198. lim l + - %

2z

199. 1im v'4 - %2 - 2coss 2:.....0 z?

. ln(v' l - z 2 +

) - s 2OO.lim 2 s.....o z.

201. 1im (Z - arctgS) JJ1as s.....er z2

202. lim 1 - cos z cosh :I: %-+0 %4

203. lim J + sin z COS 2: - CO

S - smz s

1 (% - 11'/2)

204. lim .J2s2 +3 . (I + 1) j:r :1:--00 4: + 2

. (I ... %)l/s - e 205. lun .

-+O :r;

Dire per quali numeri reali 4 esistono finiti e diversi da O i seguenti limiti:

206. lim sin z %-0 -V I - :r CI - cos

. 111 207. lim sin % :I

-.,/ 1 + sinz - v' sin

+ cos%

208. lim 2(:1: - -,.)CI :I........ -V I + tg x - v'I - tg z

(I - COS4%) COS 11' 2 209.lim x :1.....0 :I2

210. z

[z - :cAIn(1 + ;)]

2 . 2,U. tim ln (COS:l: + arctg Z +

) (ln (1 + e1/z») G :r:-+O+ Z +

:z2 J 212. um e.- :1:.....0+ v I - sm" z - COS %

Z2 213. lim a - COS% . :r.....0 z3 sin

Dire per quale o quali valori reali di G risulta

214. lim o.v':£2 + h + (I - a)JSIji; = O s-

215. lim (vi 4 z2 ...

-

- a) = _! .

2

7 La formula di Tajlor

Abbiamo visto nelle Lez.ioni (cap. 6, A 5) che, se I(:/;) è una funzione di classe (]D in un intorno di un punto :1:0, si ha la formula di Taylor:

/(t)(2:o) f(z) = {-:o k! (z - ZO)k + R,.(x;

),

dove il resto n-esimo R.(z; :1:0) è infinitesimo. per

--+ 2:0, d i ordioe superiore a n:

lim Br. (x; :£0) = o. Z

2:0 (z - :1:0)71

Se poi f(z) è infinitamente derivabile, si può considerame la serie o lo sviluppo di Taylor, che in molti casi converge alla funzione data (vedi Lezioni, cap. 6.

7). Ricordiamo dalle Lezioni gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari, nei quali il punto iniziale Zo è I

origine (a fianco è indicato, per ciascuna funzione,

.IJ'"

- - - ....».... ._.

., I

"'y' v

l'intervallo di convergenza della serie di Taylor):

00 n

=E

n=O n!

xER

z2n+1 sin:J: = .£-, (- I)" (2 1)1 a::O n + ..

zeR

00 20 cos Z = Y{ -1)"...!..- °.=0 (2n)!

%ER.

ca gQ I = E x ft ; -1- = E(_])f&

n 1 - Z n=O 1 + x . n=O

. x E (-1, I)

00 1 2 = E (- J)8 x"" I + x ....=0

:tE (-1,1)

DO '" x..+ J , 10(1 - :r) = -

- 0=0 n + I

xe(-I,I)

1 + z

:r;20+1 In = 2 LJ 1 - x ,,=0 2n +]

z E (-1, I)

00 2.+ I aretg2: = E (-1)" ; I n=O ti +

ze(-I,I)

(I + 2:)Q == :E (a) ZA; (a) = a(a-I) · · · (a - n + 1) 11=0 n ti n!

XE(-I,I)

1 _

( ) R (2n - I)!! n - LJ -I z

n=O (28)!!

ze(-I,I)

1. =:E (2n - I)!! :&2n v' I - :r;2 n=O (2n)H

z E (-1, I)

co '" (2n - 1) 11 arcsin X == L, · .. :J:2n+ I n=O (2n)!!(2n + I)

x E (-1, I)

Naturalmente, ci si può limitare a considerare un numero finito di tennini della serie; in questo caso il resto sarà dell'ordine del primo termine omesso.. Così. se nella serie del seno ci si anesta al tennine z5. il resto sarà clell' ordine di x 7 . Se poi si vuole ottenere una stima quantitativa del resto, si potrà ricorrere, ad

esempio, alla sua espressione integrale:

s R,.(X; zo) :;: A J <:I: - t)1& f<n+I)(t)dt, R.

ovvero si potrà utilizzare la fonna di Lagrange: ( ) ,,+1 D (.) = x - 2:0 I (n.+I) (

) .I Ln %. :1:0 (n + I)!

, dove ç è un opportuno punto compreso tra % e %0-

Esercizi

Trovare lo sviluppo di TayJor deUe funzioni seguenti. con punto iniziale zo = o:

216. ---L- 2-%

I 217.

3 4-:&

218. sin(1f _.:1:) . .

219. 2 s - 1

220. arcsin

221. 1D{(I + :r)() - z)J.

Scrivere fino al tennine

s incluso gli sviluppi deUe seguenti funzioni:

222. sin 3 :z:

213. Ji+Z -

224. sin 2 :t - sin %2

225. (tP _)2 228 . 1 · t+s+z 2

22'. ln(1 + sinz)

1.27. tg:J:

229. z -

inz %

230. arctg(1 - z2).

La fonnula di Taylor ha varie applicazioni. Ad esempio, essa è utile per il calcolo approssimato dei valori di particolari funzioni.

Esempio 7.1 Si calcoli ,fè con un errore non superiore a 10- 6 . Si ha

q 1 (1) "re = Eo k!2i +R,. 2; O · Quanto alla stima del resto, risulta utile la fonna di Lagrange:

R,. (

; O) :;: (n + :)!2t1+1 e(, dove

è un numero compreso. tra O e 1/2. Essendo e E < ve < 2, si trova O < R,. (

; O) < (n+ 11)!2" ·

1;6

Se vogliamo avere un errore inferiore a 10- 6 , sarà sufficiente prendere " = 7. Avremo allora 7 1 ve

r-1 2 '

1,648721.. · .t-o 11;.

Esempio 7.2 Un valore approssimato di 1f si può ottenere dallo sviluppo di arcsin

. Nelle Lezioni (cap. 6

fi 6) abbiamo visto che .

(2k - I)!! 2k+ I arcSID:Z: == f:o (2k)!!(2k + I) :z: + R2f1+2(X; O), dove

R (. O) = (2ft + 1)1! f t2R"'2 [1 - (t) 2] -a- 3J2 dt

+2 X, (2n + 2)11 fJ o

ed 'J(t) è un nomero compreso tra O e t. Ne] nostro caso si ha :t = 1/2, e dunque O < '1(t) < t < 1/2, cosicché

1/2 R (!.o) < (2n+l)1! (4) t&+3/2 f t 2R + 2 dt= 2" - (2n + 2)!! 3 o = (2n + 1)11 (!) n+3/2 < (2" + l)!! (!) 8+1 (2n + 2)!!(2n + 3) 3 - (2n + 2)!!(2n + 3) 3 ·

Se ora si vuole avere un errore minore di 10- 4 , sarà sufficien

prendere n = 4; si ha allora

. 1 '1r 4 (2k - l)!! (I) 2k + I arcSIO 2: == 6

(;o (2k)!! (2k + l) 2

0,5236. ·

Esempio 7 J Calcolare rintegrale

00 J e- r ds I

con un errore inferiore a 10- 4 ..

Cominciamo col detenninare un numero a tale che risulti

DO . J e- r tk <

10-4. a

Poiché e-:r::I < e-W; per x > 0:, si ha

00 00 J e- r dx < f e-IIt%dx =

e- a2 . Q a

Ora si ha e- 9 /3

4,12 x 10- 5 , e dunque basterà prendere Ot = 3. Ciò premesso, si dovrà ora calcolare .. integrale

3 J e- r tk 1

con un errore inferiore a

10- 4 . Dallo sviluppo di e- s ! si ha

3 3 f -r a (-1)1.(3 2 1:+ I - I) f e th = 'fo k! (2k + I) + R2n+2(Z; O)dx. 1 I

I ' ul · . gra1 . Ò . 3 2ft + 3 h ". d . 1 10 - 4

ttmo mie e SI pu magglorare con (n + 1)!(2n + 3)' c e e mmore 1 2 non appena n = 28. Con tale valore di n otteniamo

J co -z:1 28 (-1)k(3 2k + I - I) e tk

fto k!(2k + I)

0,1394. I

Si noti come i primi tennini della somma sono piuttosto grandi, e come il valore relativamente piccolo dell'integrale sia dovuto alla compensazione di addendi positivi e negativi.. Ciò spiega perché ci siano voluti molti tennini per ottenere I approssimazione richiesta; un fatto che rende lo sviluppo di Taylor un metodo tutto sommato poco efficiente (tranne che in alcuni casi) per il calcolo approssimato di integrali.

Esercizi

Calcolare i seguenti nl1meri con un errore minore di 1 0- 4

231. ln 2

231. ln 19°

233. sinh I

I . 234. f

d3; o %

1/2- 235. J 10(1 + 2:) eh. o 9::

8 Lo sviluppo di Taylor e il calcolo dei Jimiti

Lo sviluppo di Taylor può essere di aiuto per il calcolo dei limiti della fonna O/0, specie quando venga usato insieme al cosiddetto principio di sostituzione degli infi n ilesim i . Ricordiamo che una funzione f(:£) si dice un inftnitesimo (per z -+ 2:0) se lim f(z) = O. Se f(x) e g(x) SODO due infinitesimi, si dice che g(z) è di ordine Z:-.ZO superiore a, f(x) se lim g(:z:) = o. 2:.....2:0 f(z) In questo caso si scrive anche 9 = 0(/) e si dice che 9 è un o-piccolo di f. Ricordiamo inoltre, benché ciò non sia rilevante in questo momento, che esiste anche la notazione 9 = 0(/) (g è un o-grande di f). A differenza della precedente, non c'è univocità nella definizione di 0(/). Taluni intendono con ciò che esiste finito e diverso da zero il limite 1im g(x) . z.....so 1(:£)' altri, più generalmente, cbe in un intorno di :1:0 si ha O < A < g(3:) < B < +00. - I(x) - Ancora più generalmente, noi intenderemo che Ig(z) I si possa maggiorare con I/(x»), ovvero che il rapporto g(z)/ ,(x) sia limitato in un intorno di %0. Ciò posto, il principio di sostituzione degli infinitesimi dice che, se g = 0(/) e G = o(F), allora 1im 1(3:) + g(z) = tim f(x) . :r-

F(:r:) + G(x)

.....zo F(z) La semplice dimostrazione è lasciata peT esercizio.

Esempio 8,] Si calcoli il limite I . :t - sin x un . z-tO x In cos x Risulta sin:J; = ,;-x 3 /6+o(x 3); e dunque x- sin x = z3/6+o{x 3), Analogamente, si ha COS!E = I - iJ',2/2 + o(

2), e pertanto

:£2 .Incosz =.-2" +o(z2).

In conclusione,

x 3 3 z3 z - sin % 6" + O(Z) _ 6 1 lim = lim =lim - = --.. :z

o X lo cos 2: 2;....0 x 3 (_'\ ) s....0:.:3 3 -2" +O:ll -T

m generaJ

, occorre sviluePare il numeratore e il denominatore arrestandosi al tnimo tennine non DUnO, e calcolare il limite del rapporto così ottenuto, ciò che a questo punto è piuttosto agevole. È possibile fare un confronto tra questo metodo e quello basato sui teoremi di De l'Hapita!. Quest'u1

o è più generale. dato che contempla anche il caso 00/00. Per quanto riguarda invece i .'imiti del tipo 0/0.. si vede subito che con il teorema di ne 1.Hopital OCCOIIe calcolare almeno tante derivate quanto è il yado del primo tennine Don nullo dello sviluppo. Ne segue che se questo grado è abbastanza grande, in pratica da 3 in SU è conshdiabile usare

li sviluppi di Taylor, mentre per gradi

li i due metodi sono sostanzialmente equivalenti. Naturalmente, bisogna stare ben attenti a non trascurare termini dello stesso ordine dell' infinitesimo principale. Per que.c;to

è bene scrivere sempre il tennine 0(. ".), in modo da tener presente quali termini si sono trascurati. Senza tale accorgimento si rischiano elTori, come si vede dall

esempio che segue.

Esempio 8.2 Si calcoli

" V I - 4%2 io z4 - 1 + Z2 11m · %-+0 ri

Si ha

t + t

1 +

t. e dunque V' t - 4

+ x4

1 - :r2 +

:I:4. Ne segue che il limite richiesto è

I _$4 1 lim L =- . z.....o z4 4

In realtà, si è commesso un enure nel calcolo del numeratore. Ilifatti nello sviluppo della radice si è trascurato il tennine t 2 ovvero (-

2 + z4)2, cbe è sì trascurabile rispetto a (_:1,2 + 2: 4), ma non rispetto al numeratore, nel quale i termini in z2 si elidono. Infatti, se sì tiene conto dei termini omessi. risulta

t + t .,.) +

t + o(t), e dunque V I - 42: 2 + x 4 = I - z2 + ! 2;4 + 0(:1: 2) == 1 - z2 + o(z2), 4

160

1/ (:al(:ol() diff

J.ell:ia[e I Cap. 6

cosiccbé il numeratore si riduce all'espressione 0(2: 2). Bisogna dunque prendere in considerazione un tennine ulteriore nello sviluppo della radice:

V' I - 4x 2 +

4 = I - :z;2 + ! 3: 4 - 2.(-42: 2 + z4)2 + o(x 4) = 4 32 5 =] -

2 - 4: x 4 + 0(%4),

da cui

5 4 I . v I - 4:.;2 + z4 -] + :r: 2 I . - 4 x 5 1m = un = -- · . 3:-0 Z4 . %

O s4 4

Esereizi

Calcolare i seguenti limiti:

23ft. lim J - e-

+ :r 3 sin(l/z) __ %-.0 %2

2 - 1 237. lim

- sm z z.....o x 3 (r - cos z)

238. lim (S I +.rz - 5)(1 + sin' z) z

1 - COS%

139. lim %S[(

)2]_ J] s....o . v' I +:çB - vI + .1: 8

240. 1im s-()f In 1 +

"A I 1 . (sin2% - Incos z)lo(1 + sin z) M"I. 1m .. :.:....0 Z SIn z S1D à

(. 2 In · 2 242. lim arcsm z) + (J - sm z) s.....o cosh z2 - 1

243. lim 5 arctg:t + 32:1; .sin]

z-O 1 - COS 2% + sm 4z

244.. lim In(I + z) arctg z - % sin :;£ :I-O arctgz - I -10(1 +:1:) +COSs

. 4 . 2 . 2 245. lim sm

(smz - sm :1:) :I-O I - cos z4

246 r z5 e

' - 10(1 + z5) ...

[-vi] +ZC - I t

147. lim I V1 -:J:4 -

L s....o Z4(sinz 4 - sin 4 z)

. 2 248. lim z arCSUl:E - Z %-0 ,; , + rt - cosr

149. lim tg:!: - z :1:-0 (I - cos:r;) sin :I:

...rA 1 - V(I + z2)'J. - I arctg

ln(1 + 2 sin z) LtWV. un .

.....o+ 2: - sm:J:

251. lim ln(I +!t arctgz) -

+ 1 %....0

1 + 2%4 - I

252 lim cos(sinb s) - cosb(sin z) · s-tOt (e JS - 5

yt

9 I F uFlz;uni convesse

. J . 3 253.. lim Sin z - Sin :r;

-O :e3(COS %3 - cos 3 z)

254. lim In(J + z)sin (I) s-+co In(2z - I)

2SS. lim In(J - cos 2x) :1-0+ In .g 2:r

256. tim

- cos,f% . z-o- In[1n

e + %2)]

9 Funzioni CODYes&e

Una funzione I(

) definita in un inteIVallo (a, b) si dice convessa se per ogni coppia di punti :1:1, 2:2 e (a, b) e per ogni >., O < .À < I, si ha

/().SI + (1 - A)X2) <).f(zI) + (1 - À)f(Z2).

[9.J]

Geometricamente, una funzione 1(:) è convessa in (a, b) se, comunque si prendano i punti (z), /(3:1)) e (%2, /(X2» sul grafico di I.. il segmento che li congiunge sta tutto al di sopra del grafico, una relazione che equivale a

f(z) < /(SI) + /(2;2) - 1(:tl) (x - %1). %2 - 2;1

La funzione 1(':£) si dice concava, se - f(x) è convessa.

Esempio 9.1 La funzione

{ -s /(z) = :£2

se ,;<0 se :t

O

è convessa in .R. Per dimostrar lo , consideriamo due punti XI e

2 e facciamo vedere che il segmento di esttemi (ZI, /(2:1» e (2:2,/(:1:2» è sempre al di sopra del grafico della funzione /(x).. Se $1 e %2 hanno lo stesso segno, ciò segue dal fatto cbe ambedue le funzioni -x e x2 sono convesse. Supponiamo ora che :1:1 < O < %2.

Il segmento di estremi ($., i (:c I » e (:&2) 1(2;2» taglia l'asse delle y in un punto di ordinata positiva, e dunque si trova al di sopra dei due segmenti che congiungono i suoi estremi con l'origine. D'altra parte, sempre per la convessità delle due funzioni -:t e r, questi due segmenti stanno al di sopra del grafico di f(z), cbe dunque risulta convessa. .

Quando la funzione /(x) è regolare in (a, b), si hanno i seguenti risultati (vedi Lez;oni, cap. 6, i 3):

(1) Una funzione 1(:1:) derivabile è convessa se e solo se per ogni

11 2:0 E (Q

b) risulta

f(zl) > /(3:0) + /'(2:0)(%1 - :1:0);

geometricamente

se il grafico sta tutto al di sopra della retta tangente in qualsiasi punto. (2) Una funzione /(:&) derivabile è convessa se e solo se I'(x) è crescente.. (3) Una funzione 1(:) di classe C'I è convessa se e solo se f"(z) > o.

Esempio 9.2 La funzione 1($) = 1/,;2 ha derivata seconda J'/(

) = 6/:r,4 > O.. Di conseguenza essa è convessa in (-00, O) e in (Ot +(0). Non è invece convessa in tutto l'insieme di definizione R -: {O}.. dato che questo non è un intervallo. .

Esempio 9.3 La funzione In z è di classe C 2 in (O, +OO)i e ha derivata seconda negativa.. Ne segue cbe Ina: è concava, e dunque In(I/

) = -Inz è CODvessa. In particolare si ha

I in ZI < In:I:o + - (:I:. -

o), 2:0 e, prendendo $1 = 1 + x, 2:0 = I

si trova

In{ I +

) < s. .

Esempio 9.4 Per a > 1, la funzione (I + Z)OI è convessa nel1 , intervallo (-1, +00).. Ne segue, per:c > -I, (1 + x)a > 1 + £IX. .

Esercizi

257. Dimostrare che, se fes) e ,(:.:) sono convesse in (4, b)

10 sono anche le funzioni I(

) + g(z) e I(z) V g(z) = max{f(s), g(s)}.

Dire per quali valori di Q SODO convesse. in R le funzioni

258

+ Q%3

259. elU - (1 + Ot)z2.

Dimostrare che, se /(s) è. convessa in (o, b) e se [a, P] C (a, b), la funzione f(s) è lipscbitziana in (a, PJ

cioè che esiste una costante M tale che

1/(2:1) -/(z2)1 S MI

I - Z2t '1:1:1, %2 E [0,,8].

IO Studio del grafico di fuozioni

Abbiamo visto nelle Lezioni (cap. 6, fi 4) in cosa consiste lo studio qualitativo del grafico di una funzione. Esso è in genere un esame mirante a foDÙre una descrizione di massima dell'andamento di una funzione data, spesso in vista di uno studio più approfondito per la soluzione di problemi particolari. Così, ad esempio. se si vuole risolvere J'equazione /(:1:) = O sarà necessario uno studio preliminare della funzione I(z), che pennetta di detenninare se l'equazione data ammette soluzionL quante esse sono e dove si trovano, in modo da poter poi affrontare con maggior sicurezza il loro calcolo approssimato. Se invece si vuole avere un t idea dell'andamento asintotico della funzione f(z), cioè del suo comportamento per valori grandi di x, sarà spesso utile lo studio degli asintoti e del modo in cui la funzione data si avvicina ad essi, e così via. Uno studio generale del grafico di una funzione deve tener conto di queste . . diverse possibili esigenze, e dunque sarà. allo stesso tempo, più generale di quanto sarebbe necessario in vista. della soluzione di ogni singolo problema particolare, e più generico poiché esso mira a servire di punto di partenza per tutti. Come abbiamo visto nelle Lezioni, lo studio di una funzione comprende j seguenti passi: (1) La determinazione dell'insieme di definizione e lo studio del comportamento della funzione in vicinanza della frontiera di questo. (2) La ricerca dei punti di massimo e di minimo relativi (o quanto meno la detenninazione del loro numero e della loro posizione approssimata) e dei corrispondenti valori. (3) L'individuazione di eventuali asintoti e del modo di avvicinarsi ad essi. (4) Lo studio degli intervalli di concavità e di convessità della funzione e dei punti di flesso.

Una voJta eseguite queste ricerche, si può infine disegnare un grafico che metta in luce l'andamento della funzione in esame. In questo grafico veJT8DDO privilegiati gli aspetti qualitativi (massimi, minimi, punti di flesso

asintoti. ecc.) rispetto alla precisione quantitativa nel rappresentare fedelmente j valori assunti dalla funzione. Da questo punto di vista, lo studio del grafico che proponiamo è diverso e complementare di quello che si potrebbe fare calcolando con un computer

un numero cospicuo di valori della funzione e riporta11doli in un diagramma, uno studio in cui la precisione numerica è l'aspetto predominante.

Esempio 10.1 Si studi la funzione %2+3

-I

(1) La funzione è definita in R - {I}, e risulta

lim z2+3 = +00 s

I" :I-I ,

lim z2+3 - = -00 1 - %-1 , z

lim :z2+3 = +00 S

2:-1 ,

lim s2+3 = -00..

-oo $-1

(2) La derivata prima è 2: 2 -2z-3 f(x) = (:I: _ 1)2 e si annulla nei punti -1 e 3. Dall'esame dei segni si vede subito che -1 è un punto di massimo relativo, e 3 un punto di minimo relativo. I valori assunti dalla funzione sono rispettivamente - 2 e 6. (3) Come si è visto neJ]e

Lezioni" gli eventuali asintoti !I = az+b (per z -+ ::1::00) si trovano calcolando i limiti

lim 1(%) = G S-t'

CO X

e.. se questo esiste ed è finitO,

100 </(s) - 4%) = b. :I

;I:CJQ

Nel nostro caso

lim f(z) = Iim

2 +3 = 1 %-t

OD:& z

oo z2 - z

e

lim (/(:1:) - :..:) = lim 3 +

= 1, :J:-t

CD s

:I:OQ 2:-

e quindi la retta U = % + I è un 8SintOtO sia per 2: --) +00 che per :t -+ -00. La quantità

4 1(:£) - Z - I = z-I

è positiva per % > 1 e negativa per z < I, cosiccbé la funzione sta al di sopra dell"asintoto per :I: ..... +00, e al di sotto per :t --+ -00. (4) La derivata seconda,

, " 8 (:I:) = ex _ 1)3 '

è positiva per :E > I e negativa per :t < I. Ne segue che f(s) è convessa per 2: > 1 e concava per z < I. Dato che !"(z) non si annulla mai, non ci sono punti di flesso.. Il grafico della funzione è dunque quello rappresentato nella figura 6.9. .

y

y=x+1

x

Figura 6.9

Esempio 10.2 Si tracci il grafico della funzione

/(x) = V

2 + ';l, - !&.

(1) La funzione è definita per

2 +:£ > O

e dunque in (-00, -1] U [O, +00). Si ha

s

(v' :£2+:£-X) =

t "'!.

DD (v' x2+x-x) =+00;

e inoltre

1ùn (v:r: 2 +:r: - Z) = 1, 1im (';% 2 +% - Z) = o. s-+-l- s.....o-

(2) La derivata prima. I' (%) = 2:1: +] _ I, 2 " z2 + Z

non si 8IUlulla mai; essa è positiva per % > O e negativa per z < -1., cosicché la funzione decresce per z < -1 e cresce per % > o. Si ha inoltre

lim /I(Z) = -00, lim f'(

) == +00, :1:--1- z-+O+

e dunque nei punti -] e O la tangente è verticale. (3) Abbiamo già trovato un asintoto orizzontale 'Y = 1/2 per x """+00.. Per :x -. -00 si ha

100 (v':£2 +:£ _ 1) = -2, lim ("\1'2: 2 + x + X) = _!, Z--OQ x S--CC) 2

y

1

1 2

-l

o

1(

Figura 6.10

e dunque la retta 11 = -2:.: - 1/2 è un asintoto per :c -+ -00. In ambedue i casi risulta /(:1:) - dz-b < O, e quindi la funzione si avvicina agli asintoti dal di sotto. (4) La derivata seconda,

" 1 f (x) = - 4(2: 2 + 2:)3/ 2 '

è sempre negativa, e quindi la funzione è concava sia in (-00

-1] che in [O, +00)" D grafico è dunque quello rappresentato nella figma 6..10. .

Esempio 10.3 Non di rado il calcolo esplicito degli zeri della derivata prima (e più ancora di quelli della derivata seconda) non è possibile.. Si dovrà allora ricorrere a dei calcoli approssimati, o quanto meno si dovranno determinare il numero e la collocazione approssimata di tali zeri. Supponiamo ad esempio di voler studiare la funzione

J( ) - :J: -% %-4z+1 e .

La funzione è definita per

=1-1/4, e si ha

lim 1(2:) = O, s

+oo

1im f(

) = +00,

-oo

1im I(x) = +00, 1- Z

-1

lim 1(:£) = -00. s

-l +

Risulta inoltre

f 4z2 + z - 1 _% j " ( ) = 16$3 + 82: 2 - 7% - IO _% (2:) = - (42; + 1)2 e,

(42: + 1)3 e.

La d .. . .. lla -1 :J: Ji7 b I d .. da .. envata pnma S1 annu per 2: = 8 .. rer a envata secon SI po- b'ebbe risolvere l'equazione di terzo grado 162;3+8z2-7

-10 = O

D'altra parte, ci interessa soprattutto detenninare quante volte la derivata seconda si annulla, e dove si trovano gli eventuali zeri.. Per questo sarà sufficiente studiare il comportamento del polinODÙo al numeratore. Essendo di terzo grado. il polinomio g(x) = 16:£3 + 8%2 - 72: - IO avrà almeno una radice reale; resta da vedere se le altte due sono reali o complesse. Per questo osserviamo che risulta

lim g(x) = -00, lim g(x) = +00. s

-

Si ha poi g'(z) == 48r + 16z - 7, e questa si annulla per :J; = -7/12 e per z = 1/4. È chiaro che g(,;) ha un massimo relativo per x = -7/12, e un minimo relativo .per 2: == 1/4. I va10ri della funzione g(:I:) sono rispettivamente -172/27 e-II, ambedue negativi.. La funzione g(%) ba allora t'andamento riportato nella figura 6..11, con un solo zero reale in un punto So > 1/4.

y

7 1 12 4

o x

Figura f).n

In conclusione, la funzione f(z) è convessa negli intervalli (-00, -1/4) e (zo, +(0), ed è concava in (-1/4,3:0)" Il suo grafico è riportato nella figura 6.12. .

y

I I 1 I_- t 4 \ .Ji7 + 1 8

x

f

x) == 4x

1 e-.1

Figura 6.12

Esercizi

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

161. J;+1- -li

262. (z2 + 2x)ez

263. -In sin %

264. J :t J :1:+3

265. 1 - z

2+3

+ I 166_ e:r: - I

2D1. % -; I z

2'8. %2 (In J: - 1)

"

e2s + I 269. e;l. - I

170.

+ 3 r-S

271. % + 2cos:t

%2 - 2 272.

+I

273.

e-% z-1

274. (n(I + 2 sin:! x)

275. (z + 1)e

/t%- H

276. (z - 2)e

/t

-I)

277. In L %-1

278. 2% - arcsin:J:

279. In: 3:

280. sin !I: + cos

281. z - 2arctg:a:

282. e- s /ez'1+I)

')

O'2- z/(%,,",. I)

. e

I . 284. cOS:J: e

5InJ:

285. -2..... e- Z x+I

28'

arctg:t . z

In alcuni casi la funzione in esame contiene un parametro 0:, e quindi assume aspetti diversi a seconda del valore del parametro.

Anche in questo caso sj può sntdiare il grafico della funzione, privilegiando ancor più J'aspetto qualitativo.

Esempio 10.4

Si studi la funzione

z f(z) = 2 (a ;/0). x +a

(1) L'insieme di definizione è R se a > 0, mentre se a < O si devono escludere i punti :i: "; O!. Si ha

lim I(x) = O, %-+ %00

e inoltre, se Q < O, risulta

1im f(z) =

oo, lim /(x) = ::1::00. %

- v-a

%

J=G*

y

-

"

"'

..2 X (a < O)

-+a

(a)

r

-..fa - ..J3a I I ;

v3a J f t I I

X --2 (a > O) Jc+a

Ib)

x

x

Figura 6.13

(2) La derivata prima è

a-z 2 /'(7:) = (:r2 + 0)2 ;

se a < O essa è sempre negativa., e dunque la funzione è decrescente in ognuno dei tre intervalli (-00, - va), (- ...; a , "'; a), (...; o, +(0). Se invece a > O, la derivata si annuDa per :t = :I:,fa, e la funzione ha un minimo relativo in -,fa e W1 massimo relativo in ,fa. (3) La derivata seconda è r(7:) = 2%(7: 2 - 30) . (:t 2 + a)3 Se a < 0, essa si annulla solo per z = 0, che è Wl p\B1to di ftesso, ed è negativa in (-00, - y a) e in (0, " a) , e positiva altrimenti. La funzione 1(:1:) è dunque concava in (- 00, - ..; a) e in (O, "'; a), convessa in (- .J a, O) e in ("" a, +00). Se invece a > Oi si ha /" = O per

= O e s = :i:

, e la funzione è convessa negli intervalli (-..j3Q, O) e (..j3Q, +00), e concava aJttimenu. I grafici relativi ai due casi sono riportati nella figura 6.13. .

Esercizio

287. Studiare in dipenden7.a del parametro Q J'andamento della funzione

Q 1(%) = Ins - -. %

Capitolo 7 TI calcolo integrale

n calcolo esplicito degli integrali di funzioni continue si basa sul teorema fondmnentale del calcolo integrale (vedi Lezioni., cap. 4. Teorema 9.2), di cui riportiamo l'enunciato: Sia f(:£) UnLI funzione continua nell'intervallo fa, b). La funzione integrale

F(s) = J f(t) dt . Cl

è der;vabile. e si ha, per ogni 2: E [a, b), 1"(:I;) = f(

). Inoltre. se G(

) è una funzione der;vabile in [a , b) tale che G'(:r:) = 1(:.;) in [a,b), allora

F(:e) = .G(::) - G(a).

Una funzione G(2;) che verifica la relazione G'(x) = I(

) si dice una primitiva della funzione I(x). In particolare, la fun2ione integrale F(s) è una primitiva di I(z). Nota che sia una primitiva della funzione integranda, rintegraJe definito è subito trovato: infatti basterà porre z = b nell

espressione di F(x) precedente per ottenere

& J f(t)dt = G(:J;)I

= G(b) - G(a). 41

L'integrazione è così ricondotta alla ricerca delle primitive. Come abbiamo già osservato nelle Lezioni, Don sempre è possibne esprimere la primitiva di una funzione per mezzo di funzioni elementari o di loro combinazioni. Nel seguito esamineremo alcuni casi importanti in cui l t integrazione può essere eseguita.

} J Integl"QzJ"olJe delle funzioni roz;OI'uU

17J

1 Integrazione deDe funzioni razionali

Una funzione razionale è una funzione del tipo

P (:l:) f(z) = Q(z) '

dove P(:c) e Q(x) sono due polinomi in x. Possiamo supporre che il grado del numeratore sia minore di quello del denominatore; in caso conttario si dovrà eseguire la divisione, in modo da ottenere

R(2:) f(z) = L(z) + Q(z)'

con R(z), resto della divisione di P per Q, di grado minore di Q. " . E noto cbe ogni polinomio Q(s) si fattorizza nel prodotto di fattori di primo e di secondo grado (i primi conispondono alle radici reali, j secondi alle complesse). Noi supporremo che questa fatt ori'77.B7i one sia già stata eseguita, e che il polinomio Q(x) sia dato nella fonna

Q(x) = (x - ZI)ml(X - X2)m 2 . .. .. (z - Xt)m'[(:r - (ti)'! + ,81]8 1 II. . .. . [(z - a,)2 + P,]"'. .

Per integrare una funzione razionale si dovranno determinare delle costanti AI, A2, ..., Alu BI, ..., B" Oh ...., CB' e un polinomio Z(:z:) in modo tale che

P(z) _ AI AIr 2BI (:r - (rl) + CI Q +....+ + 2 +....+ (:I:) - X -

I % - 2:. (s - al) + (jl 2B,(x - a,) + G a d Z(z) + +- ($ - 0I.)2 + fJs dz QI (3:)'

[1.1]

dove Q.(x) è il polinomio che contiene tutte]e radici (reali e complesse) di Q(z) con molteplicità diminuita di uno:

QI (x) = (2: - XI),",I-I .. · (:.: - 2:A:)m t -I [(:I: - al)2 + .81 1'

1-1 · .. . · · · [(:.I: - Qa)2 + p,]n..-I, e il grado di Z(x) è inferiore di uno a quello di QI (2:). Le costanti Ai, Bi, Ci e i coefficienti di Z(

) (in totale in numero pari al grado di Q(z») dovranno essere detenninati in modo che la [1.1] sia un 'identità. Ciò fatto, l'integrazione è immediata (Lezioni, cap. 5, A

3 sg.).

,..

Il COf["OIO ,n,egrale I l.ap. I

Esempio J.l Calcolare l. integrale

f x-3 dx. x(:r: - l)(x - 2)

Si pone

x-3 A B C =-+ + .. z(z - l)(z - 2) % % - l :r; - 2 Per derenninare le costanti A, B e O si può procedere come segue. Si moltiplicano ambo i membri per % e si pone x = 0, ottenendo A = -3/2. Moltiplicando per (z - l) e ponendo :£ = l, si trova B = 2.. Infine, moltiplicando per (3: - 2) e ponendo % = 2, si ricava C = -1/2. 'In definitiva, 2:-3 3 2 =--+ :J:(:r: - I)(

- 2) 22:!Z - I e dunque f %-3 3 1 . %(:t - 1)(:1; _ 2) d:r: = - 2 Inl:tl + 21n1% - 11 - 2 101% - 21. ·

I 2(z - 2)'

Esempio 1.2 Si calcoli f 2:] + 1 :J:(z - 1)2 dz. Qui il grado del numeratore è pari a quello del denominatore, e quindi si deve anzitutto eseguire la divisione. Si ottiene z3+1 a 2 -:z:+1 =1+ z(x - 1)2 2:(:'; - 1)2 D'altta parte. 2x2-s+1 A B C =-+ + . x(x - 1)2 % x-I (,; - 1)2 Le costanti A e O si possono determinare come sopra. Moltiplicando per :t e ponendo s = O, si ottiene A = l; moltiplicando per (

- 1)2 e ponendo % = I, si trova C = 2.. Per trovare B si può dare un valore arbittario a z. ad esempio 2: = 2. Si ricava

7 A -=-+B+C 2 2

e dunque B = l. In conclusione,

f %3+1 . 2 (2 eh = :J: + lnl:zl + lnls - 11 - 1

· x z - l) !t -

Esempio 1.3 Calcolare

J 32: - 2 d,x. (x - 1)(z2 - 2z+2)

Posto

3:1:-2 A 2B(:i;-1)+C (:z= - 1)(%2 - 2s + 2) = % - l + (:r: - 1)2 + 1 '

si trova al solito modo A = 1.. Per ttovare B e C, si può ancora moltipticare per :1: 2 - 2s + 2 = (9; - 1)2 + l e pom 2: = l +i. che è radice di 2: 2 - 2z+ 2. Si trova.

1+3i_ 2B . C . - 1+, l

da cui, uguagliando separatamente la parte reale e l f immaginaria, si ricavano i valori B = -1/2 e C = 3.. In conclusione, (3,;-2 l 2 .' Y (:.: _ 1)(:.:2 _ 2:J: + 2) cb: = 1n1:.:1 - 2 ln(:.: - 2:t + 2) + 3 arctg{:t - 1). ·

Esempio 1.4

. Calcolare / :il(Z

+ 2)2 ·

Si pone

1 A 2Bx+C d (DZ2+E

+F) x 2 (%2 + 2)2 = % + xl + 2 + dx s(:r2 + 2)

e.. sviluppando la derivata e riducendo allo stesso denominatore.. si ottiene

A:c(2: 2 + 2)2 + (2Bz + C):r!-(2: 2 + 2) + (2D% + E)

(:E2 + 2) - - (D:t 2 + Ez + F)(3

2 + 2) = l.

Uguagliando i coefficienti delle varie potenze della s. si trova

A +2B == O C-D=O 4A+4B - 2E ==0 20 + 2D - 3F == O 4A=O

-2F = I,

da cui segue A = B = E == O

F = -1/2, C = D = -3/8. In conclusione si ha allora

f

3 x 1 3%2 + 4 z2(x2 + 2)2 == - 8\1'2 arctg

- i s(x 2 ... 2) · ·

Esercizi LJ cb 2. J :1:-1 dz 3 J :1: 4 +9 dz (2: + 1)(

+ 2)(:r: + 3) 4s3-z ·

-Ss+6 . 4.J $-3 dz 5. J z3:1 dz 6. J z3

:I: . 2z J - 7%2 + Ss 7 J zS+4 dz 8 J cb 9 J cb · 2: 2 +3%+2 · 3:r 3 +4z2 - 4% · s(z' + J) IO. J:n:r+ 3) dz 11 J dz 12. J z-3 dz %4_1 · :t 2 (:t + I) %4 +z2 13. / tdt 14. J dt J z3dz 15. (t + 2)(t - I) t(t + I)(t - 3) (z... J)(z - 2) 16. J ;'ds 17. J t 3 +3 dt 18. J :r? - 1 ds (1- z)(z- 2) (t + 1)(t2 + I) z2(z} + I) 19 f dt 20 J tdt 1.1. J dt · t2(t+ 1)2 · (t2 +2)(t - 2) t(t 2 + 2t + 3) 12/ dt 23. J %+3 cb. " (t + 1)(t2 + 1)2 (z4 - 16)

2 L'integrazione per sostituzione

Oltre ad essere interessanti di per sé, gli integrali del1

funzioni razionali sono importanti perché ad essi si riconducono, con opportune sostituzioni, un buon numero di altri integrali. n metodo di integrazione per sostituzione si basa sulla fonnula di derivazione di una funzione composta:

D F(g(:t» = F'(g(:J;»g'(x).

Questa formula si può rileggere in termini di primitive: se si deve integrare una funzione del tipo \0(,(:£»11'(%), e se si conosce una primitiva F della funzione \O, la funzione composta F(g(z» sarà la primitiva cercata di 1,0(0(:1:»9' (z). Si avrà dunque f 'P(g(z» g'(x) <13; = f

(y)dtl I [2.1] 1Ff(z)

Esempio 2.1 Si calcoli] 'integrale

f Sin 2: cos :d%.. sin 2 z - 3 sin z + 2 Siamo qui nella situazione descritta sopra, cc;m 9($) == sin $ e

(y) = 2 _

+ 2 ' Calcoliamo dunque una primitiva della funzione V'. Risulta 11 II 'Y A B = + . y2-3y+2 y-I !I-2 Detenninando le costanti A e B come negli esempi precedenti, si trova A = - 1 e B = 2.. Una primitiva della funzione tp è allora

-loltl - 11 + 210111 - 21,

cosicché in conclusione f · 2 sin

COS$«h = -ln(1- sin x) + 2ln(2 - sin x). . sm z-3sm:r+2 La fonnula [2.1] si può interpretare in questo modo: se si vuoi calcolare l'integrale J

(g($» g'(3:) dz,

si compie la sostituzione JI = g(2:) (e di conseguenza dy = g' (x) ds), riducendosi al calcolo dell'integrale deUa funzione fP(,1): una volta trovata una primitiva F(y) deUa funzione ¥'. si torna alla variabile % con la sostituzione 11 = g(:I:).

Esempio 2.2 Si calcoli J] + 2

cb.. eh-I

L'integrale non sembra a prima vista del tipo descrino sopra; lo diventa però subito se si moltiplica e divide la funzione integranda per r.. Siamo allora nel caso considerato. con g(x)::

e !p(y) = 1 ; 21/ >" Abbiamo quindi YW - I

J] + 2e

..:1- - J 1 + 2y d

-

. e 2z - 1 y(r - 1)

Quest 'ultimo integrale si calcola come sopra; il risultato è

J 1+2eZ 3 1 dx = -Inllli + -1nly- 11- -10111 + 11= eb-I 2 2 3 1 = - % + 2 Int

- II - 2 In I

+ II. ·

In generale, un integrale del tipo

J P(eZ) dz Q(

) ,

dove P e Q sono dei polinomi, si può calcolare. moltiplicando e dividendo per e S e facendo la sostituzione e% = t. In questo modo ci si riduce aD 'integrale

J P(t) dt t Q(t) ,

che è de1 tipo considerato nel paragrafo precedente. Benché utile per il calcolo di alcuni integrali. la fonnuJa [2.1] Don sarebbe molto importante se usata solamente nel modo appena detto: dopo tutto, non SODO molti gli integrali che si presentano nella forma

(g(:z» ti (z).. In reaJtà la [2..1] si può interpretare in un secondo modo. più generale.. Supponiamo infatti che la funzione g(:.;) sia invertibile, e sia g-1 (:.;) la sua inversa. Possiamo aDora scrivere la [2.1] nella fonna equivalente J tp(g(t» g' (t) dt I = J

(z) <12;.

-I (s)

Supponiamo ora di voler calcolare l'integrale J

(z)dz_ Possiamo eseguire un cambiamento di variabili :r; = g(t), tramite il quale I iintegraJe cercato diventa J ¥,(g(t» g'(t) dt. Se la funzione g(t) è ben scelta. può accadere che il nuovo integrale sia più facile del primo, a che quindi si possa trovare una primitiva G(t) della funzione \O(g(t» g'(t). A questo punto si può tornare alla variabile z ponendo t = g-I(Z). e ottenere quindi I i integrale cercato. 1 La scelta della sostituzione più opportuna dipende ovviamente dalla fimzione da integrare.. Ci sono

un certo numero di sostituzioni stan

h JLPPssono

.

. ....,

.- ---- eSsere utilizzàte Per ricondurre alcune classi di integrali a integrali di funzioni razionali. L Una prima sostituzione riguarda in tegrali del boa f1!<sin s, cos s) ds, dove R è ancora una funzione razionale, cioè il rapporto tra due polinomi. In ..-..-.

....

:t'

.. - qu

cas

s

. esegue l a

òstituzione .:

tg 2' è9siccbé 1 - t 2 . 2t 2dt

QS.S = J +t 2 ' sm:J: = 1

2 ' s = 2arctgt, d2: = t2 + 1 · In tal..modo l'integrale diventa / R (2t t2 - 1) 2dt t'I + I' t 2 + I t 2 + I '

che è del tipo trattato nel paragrafo precedente.

Esempio 2.3 Si consideri t'integrale J I+cosz €b. I-CDS2:

6 1 Naturalmente. se si vuole calcolare l'iDlepale definito I tp(s)cb:, non è necessario eseguire n cambia- CI mento di variabile t = ,-I (s) e poi 50th_le i valori oegli estremi " e Il della funzione così

uta. QPesto procedimeDto porta infaui aDa formula

6 ,-\(&) I \0(2:. = f N{t»),i (t) di, . ,-I{a}

cbe può dunque essere usata diretbUDeote per ca1c

1arc integrali definiti.

/80

JI cal,'olo integrQle t CIJp. 7

Con la sostituzione indicata sopra si trova I] +cosz d% = 1 2dt = - 2 - 2 arctg t = -

-:t.. . 1 - COS :t t 2 (1 + t 2) t tg= 2

Esempio 2.4 Calcolare f sm s cb 4 - 5 sin x ·

Si ha f 4 _s

s7n :I: d2::: J (1 + t'l)(;: 2t'l - 5t) :: f (1 + t 2)(t

)(2t - l) · Quest'ultimo integrale si calcola al modo usua1e

e dà 2 8 1 f % 15 lnlt - ll - 1S lnl2t - 11 + 5 ln(+ 1), t = tg 2 . · Se la funzione razionale R(sin 2:, COS 2:) contiene saio le funzioni sin 2 2:) cos 2 x . e sin z cos 2:, è più utile la sostituzione t = tg z. che conduce a un integrale più semplice di quello che si otterrebbe con la sostituzione standard vista sopra.

Esempio 25 Calcolare J COS2

1 - 2 sin2% W:. . . .... " . 2 I . 2 t 2 t Posto t'; tg 2:.)81 ha cos z:: '}. . s10 x = t? sin 2: COS 2: :: '}. , d2::: dt '___"' .. 1 + t 1 + I + t = 2 ' e dunque I+t f 0082% / dt I 1 1 I _ 2 sin 2 x cb: =. (I +t'I)(I _ t'I) :: 4 1n1t + 11- 4 Inlt - 11 + 2 arctgt,

e. tornando alla s, f COS 2 2: dx = ! 10 cos 2z . 1 + !:I: . 1 - 2 sin 2 % 4 1 - sin 2z 2"

pio 2.6 Calcolare l'integrale f 1 - sin :t COS Z

. 1 - 2 sin 2 x

j I Primo inlermezzo: la disuRuogliaRza di Young

181

Posto t = tgz, si ha

J I - sin z cos :J: €b - f t'I - t + 1 dt _ I - 2 sin 2

- (1 - t 2)(t 2 + I) - = 3 In It + 11 - ! Inlt - II - ! 1n(t 2 + I), 4 4 4 e dunque, semplificando

J 1 - sin x cos x d i 10 (1 + sin 2:J: I 2 I) x = - . t cos Z .. 1-2sin 2 x 4 I-8m2:.:

Esercizi

f dz 24. . 3sm:z: + 4cos%

25.. J I +tgz dz COS%

,J.' p J sin 3:

\ I . !b -sm:x

27. f

sm%

, 28

f .1 + COS2;. d% 4smz - 3smz

29. f eh I io ccs S

f .2 30. 2 -: sm Z eh SUI

31. f . I + sin4

cb: (SUI:t - cos

) COS %

32.. f . sin s dz (1 - sm z)(1 + cos z)

)3: f 2 sin z + sin 3 :z: d% ,... COS 3 z

34. f . cos

<Ix (1 - 801z)(1 - COS3:)

35. f I + 2c

2z d2; 7 1+ 2sm 2 z

'36. f . cos z d:c 4smz-3cosz

37_ f I

+smz

f d% 38. . sin

+ cos 2 :r

3 Primo intermezzo: la disuguaglianza di Vouag

È questa una disuguaglianza di una certa utilità in analisi, e che contiene come casi particolari molte disuguaglianze che abbiamo visto in precedenza.

Teorema 3.1 (Disuguaglianza di Youog) Sia /(9:) UIUI funzio

di classe . CI e strettamente cre8cenle, con 1(0) = o, e sia J-. ItJ sua inversa. Per ogni coppia

a, b di numeri positivi, con b < sup I e a < sup ,-1, risulta CI. b a6 < f f(t)dt+ f r 1 (s)ds. o o

.[3.1]

Dimostrazione. Supponiamo (come nella fig" 7.1) che risulti II < 1(4) (in caso conlrario basterà scambiare tta loro gli assi). La figura stessa mostra la ragione della disuguaglianza [3.1] se si osserva che le aree AI e A2 SODO appunto i due integrali a secondo membro.. Per dare una dimostrazione più rigorosa, si faccia il cambiamento di variabile 8 = 1(%) nel secondo integrale; si ottiene G . d rl

f f(t)dt + f rl(s)ds = f f(t)dt+ f xf'(s)dz = o o o o G /-1(6) /"'1(1) = f f(t)dt+:J:j(z) - J f(s)dz= o o o

. = J j(t) dt + 6f-l(b). 1- 1 (6) L'ultimo integrale si può valutare facibnente, ricordando che f è crescente, e dunqoe f(t) > J(J-l(b» = b. Ne segue

6 f j(t)dt + J r 1 (s)ds > [a - r 1 (b»)b + br 1 (b) = ab, o o cioè la disuguaglianza richiesta. .

y

b.

Jt

a

Figura 7.1

Esempio 3.1 Se si prende f(z) = %, si ha f-l(s) =:r e dunque

. " ab < f z

+ f :J:dz= !a2+ !b 2 , - 2 2 o o

Più in generale. si può potTe 1(%) = %p-1 (p > l); risulta /-1(:r:) = SI/<P- 1), e dunque

G II / / aP b' ab <

-l cb; + :z:lJ(P-l) cb; = p + q' o o

p t I con q = 1 (ovvero - + - = l). · p- p q

Osservazione 3.1

L'esame dena dimostrazione dice anche che nella disuguaglianza di Young si ha il segno = se e solo se a = /-1(,,), ovvero" = f(o).. Nella disuguaglianza ,. dell 1 esempio precedente ciò avviene quando b = aP-I

.

Esempio 3.2 Prendendo f(z) =

- I, si ha f-I(

) = IA(z + I), e dunque

ab < e G - B+ (b+ 1)1n(

+ I) - b,

con il segno = quando b = eD - 1. .

Esercizi

Scrivere la disuguaglianza di Young quando f(z) è una deUe seguenti funzioni:

39. t? -; e- s

40. sin s

41. arctgs.

4 IntegrazioDe di a1eune funzioni irrazionali

Diverse speçie

L in tegrali che coinvolgono radicali si riconducono a integrali di funzioni razionali m ediàDte . o pportUn e sos tituzioDi .

Esempio 4.1 Calcolare l'integrale

f 1+y'i dz I +:J:+VZ ·

Ponendo x = t 2 t ci si riconduce all'integrale f 1 +t 2 I 2 t dt, +t+t

che può essere calcolato coi metodi del paragrafo precedente. Si trova

f I+t 4 2t+I 2 1 2 tdt = 2t - pj arctg ,f3 ' +t+t v 3 3

e dunque

I f 1+

43==2JZ-

arct ¥+I .. 1 +x+Ji)

v'3 g J3 .. ..

Esempio 4.2 Calcolare

i "I . J 2+-«%+ 1 :

. I +

z+ 1; 1.

Si pone in questo caso 2: + 1 = t 6 ; si ottiene

f 2 + t 2 6 I + t]

dt = :5 t S + 4

- 3t 2 - 61nlt + 11- ...2

2t - 1 - 3ln(r - t+ 1)+ 2v3 arctg ,f3 I

e dunque

f

:

d:t = : <:1:+ 1)5/ 6 +4 '\1':1:+ 1 - 3(:z:+ 1)1 /3 - 3 1n (

2; + I + 1) _ . ( ) _ M 2

!t + 1 -). - 3ln I + " :z: + I + 2v 3 arctg ,fj . . .

Esempio 4,,3 Calcolare

1 a:+l;

+ -.. f .

3

/1 d:t. l_

%+l ,

2: + 2: .

S . z + l 6 d . 2t 6 - l d 6t5 dt C . . l pone _ 2 = t, a CUI x = 6 e :J: = 6 2 . OD questa soshtuzione :J: + 1 - t (1 - t) l'integrale proposto diventa f 6t5dt J 6tSdt (1 - t 2)(1 - f3)2(1 + t

) = (1 - t)3(t + t)2(1 + t + t 2)2(1 - t + t 2) .

Quest

ultimo inregrale si calcola con un po' di fatica, ottenendo

1 l 23 1 l l l2(t - 1)2 + 6(t - 1) + 72 lnlt - 11 + 4(t + 1) + 8 lnlt + ll + 3(t 2 +t + l) i- l 2 1 2t + 1 l 2 1 2t - l + 36 ln(t +t + 1) + 2V3 arctg V3 - 4 ln(t - t + l) + 2V3 arctg .J3 ·

e il risultato finale si ricava scrivendo

::

al posto di t. . In generale, se si deve integrare la funzione

'R (X, (aZ+b) r', (a%+b)

cx+d cx+d

(a:J: + b) r n) , ..., C:3: + d '

dove R(s,

I, é2, ...,

a) è una funzione razionale (cioè il rapporto tra due poli- nomi) in $,

I, t2, ... ,

n.. e dove "1, "2, ..., r II sono numeri razionali, si farà la sostituzione

az + b _,/:.N) d

6....., ex + '--'

dove !!.. è _ il

'.fli1T) O _comune .m_

pl

.

ei denominatori dei nu

ri. r

...

:..., Inutile dire cbe i calcoli si complicano notevolmente non appena l'integrale coin- volge più di due radicali Una seconda classe di integrali che si ridUCODQ a integrali di funzioni razionali sono quelli del tipo

f R(s. ...; O Z2 + bs + c) dx.

Questi integrali si trattano in maniera diversa a seconda che sia (J > O o (I < O (il caso a

O rientra in quelli già 1rattati). Se a > O, si pone

ax 2 + bx + c = a(z + t)2

ovvero

at 2 -c

= . 0- 2at

. t=at 2 -bt+c at2-bt+c Si ha allora " 4%2 + hz + c = -va b 2 t ' cb: = -2a b 2 dt, e dunque - a (- 2at) l'integrale dato si riduce a

f (at2 -c (at2 - bt+c)) at2 - bt+c -2a R b-2at '-v'ii b-2at (b-2at)2 cit,

cioè all'integrale di una funzione razionale fratta.

Esempio 4.4 Si calcoli l'integrale

f ";S2 + 2 dz. 22: -1

La .. 2 - t2 .. d all t. ,_l sostituzione :t = 2t CI neon uee mtegrcu.e

f (t2 + 2)2 dt 2t 2 (t 2 +t - 2) ,

che, calcolato con i metodi standard, dà

I I 1 3 3 - t + - - - lnltl ... -lnlt - I r - - lnlt + 21 2 t 2 2 2 '

"

2 1 v: 2 +2+:I: e dunque (sostituendo t = S + 2 - s e osservando che t = ' 2)

f .../s2 + 2 rh = .../:z2 + 2 - ! In ("';z2 + 2 - %) +

In 1 "';:1: 2 + 2 - 2: - 1 1 - 2z-[2 2 -

]n (v's 2 + 2 - :I: + 2) . .

Esempio 4.5 Si calcoli

f 1 + v' :.:2 + 3:r:

. 2 - v% 2+32:

La sostituzione 2: = 3

2t conduce aU'integraie

2 / (t2 - 3t)(3 +t - il) - (3 - 2t)2(t 1 - 7t + 6) dt,

che risolto dà

1 9 12 12 2 t + 4c2t _ 3) + 3 In I3t - 21 - SInIt - 11 + SInIt - 61.

Per tornare alla z, basterà ora sostituire t = V :£2 + 3% - %. .

Quando a < O, la sostituzione precedente Don funziona. e si dovrà invece porre 2

s =

(a

: :: - b). a = v' b2 - 4ac.

Si ha

2 a2 {(1 - t 2) 2 } t2

-2atdt az +2bX+C= 4a 1+t 2 -1 = -a(t 2 +1)2 ' ds= a(t 2 +1)2 '

e dunque l'integrale si trasforma in

/ R (I (1 - t 2 li) ta.) 2at dt - . 2a a 1 + tI - ' '" a(I + t 2) . a(t 2 + 1)2 '

che si può calcolare con i metodi precedenti.. UJ:l8 volta eseguiti i calcoli, si può tornare alla variabile 3: con la sostituzione

t=

a - (2a% + b) a + (2a:c + b)

2 Si ROti che, se CI < o

deve risultare ,; - 4Gt > O, percb6 altrimeuti la quantità sotto radice S8IdJbe seJIIpIe negativa.

Esempio 4.6 Calcolare l'integral e f ";2% - z2 +:1: eh 2- .v2 s-z 2 · Si ha a = -1, b = 2, c = O, ti = 2 e dunque 1 - t 2 2t 2 4t x = I - 1 + t 2 = 1 + t 2 ' W: = (1 + t 2)2 dt. Con questa ttasfonnazione ci riconduciamo all'integrale f 4t2(1 +t) 2 (t+ I) I . (t _ 1)2(1 +t 2)2 dt = - t _ I + lnIt - 11 + t2 + I - 2 1n(

+ 1) - 2arctgt, che si può esprimere in termini di :& ponendo t = J 2 :I: 3:. ·

Esempio 4.7 Si calcoli

J :1:(8- S

4 - z2) · . 1 - t2 8tdt SI ha ti = -1, b = 0, c = 4, Q = 4, :t = - 2 I + t 2 ' dx = (I + t2.)z ' e I-integrale diventa

f tdt I 1 - (1- t 2)(2+ 2t 2 _ 5t) = - 2 In1t - 11 + 18 Inlt + 11+ 2 2 + 9 Jnlt - 21 + 9 Inl2t - 11, h Ò · .. di d J2+; c e pu essere espresso U1 temum % ponen o t = V r=-;. .

Come abbiamo osservato nelle Lezioni (cap. 5, g 7), si otterrebbe Io stesso risultato eseguendo successivamente le sostituzioni Q'I1 - b 2 t x = a (a = b - ac), " = cos u, u = tg 2 ' ovvero, più brevemente, acosu-b t %= , u=tg-. ti 2

In molti casi è più opportuno eseguire queste due sostituzioni successivamente, in quanto talvolta la funzione che risulta dopo la prima sostituzione (una funzione razionale di sin u e cos u) si può integrare con la sostituzione più semplice u = tg t.

Esempio 4.8 Calcolare

/ ",2 - z2 1 2 d:r:. -3:

Posto 2: = ,fi cos t, si ottiene

f ../2 - :£2 d3: = -2 / sin2t dt 1-%I 1-2cos 2 t'

e di qui, con la sostituzione ti = tg t't

f "';2 -

2 / u2 d:t = 2 dUe 1 - z2 (1 +u 2)(1 - u 2)

Quest · ultimo integrale si calcola facilmente; si ottiene

I I . - 2 Inla + 11 + 2 1nlu -.11 + arctgu

e. tornando alla 2:. si ba il risultato richiesto:

/ "'; 2 7 z2 1 I 1 - :1;2 I % d.x=-ln +arccos -.. 1 -

2 2 I + :1: ";2 - %2 J2

A integrali del tipo considerato finora si possono ricondUITe quelli del tipo

J R(z, ..; o.z + b, ..; C2J + ti) ch,

dove al solito R è una funzione razionale (rapporto di due polinomi) neUe sue variabili. Con una prima sostituzione a:t + b = t 2 si ottiene infatti l'integrale

J R(P

b ,tI J: (t 2 -b)+d) 2t: ,

che è appuDto del tipo visto sopra.

Il colcolo ;n'

Esempio 4.9 Si calcoli

/ 2/X - 3"'1 + z d.x. IX + '; 1 + z

Con la sostituzione x = t 2 , si trova

/ 2.fi - 3.;f+"Z eh = J 2t - 3v't 2 + I 2tdt, /X + ..; 1 + :r: t + v't 2 + I

da cui, ponendo al solito t 2 + 1 = (u + t)2. si giunge aD'integrale

/ (5U2+ 1)(1- 1£2)(1 +u 2) du = _ 5 ,,4 _ !u 2 _ !u-2+ 5 1n 1 u I . 4u 3
6 8 8 4 '

dove

u= " 1 +t 2 -t =

- VX..

In alcuni casi si può evitare la sostituzione descritta, che in genere porta a calcoli piuttosto complicati. e ottenere l'integrazione con metodi più semplici. Una circostanza favorevole si presenta quando si ha a che fare con integrali della Conna

J P(

) dx Vo. 2:2 + b% + c 1

in cui P(x) è un polinomio di grado n in 2:. In questo caso si pone

/ P(x) dx = Q(z) V a:r: 2 +bX+c+A ! dx , va :c 2 + bx + c v ax 2 +b:t + c dove Q(%) è un polinomio di grado n - I e A è una costante. I coefficienti di Q e la cos tante A possono essere determinati derivando e moJtiplicando per " az 2 + b:: + c. L'ultimo integrale dà luogo a una funzione logaribnO o arcoseno.. a seconda che sia a > O o a < O.

Esempio 4.10 Calcolare

/ $-3 .../2%1 + 1 eh.

.. I · "

..a" _!!!!!!!!..

..!!!!!,

"'!!!!!!"!!!!.. "'!!!'W'r-"!!!!"".......-- -- J

il"'!!!!!!!!!!!!!!.". .

.il". "."W"__."

JYI

Posto

/ :1;-3 / dz (Ix = B " 2z2 + 1 + A , V 2%2 + 1 -V 2%2 + I

derivando si ottiene

:z; - 3 2Bs A = + V 2z 2 + I " 2z 2 + I .../ 23: 2 + 1)

da cui B = 1/2, A = -3.. Si ha allora

J % - 3 dx = ! V 2:r;2 + 1 - 2.10 (:I: + "4 z2 + 2) v' h2 + 1 2 V2 '

dato che, se a > 0, risuJta .

/ <b: =

10 (a

+ 2 b + v'a (az 2 +bz + C» . . -V ax 2 +bz + c va

Esempio 4.11 Calcolare

/ a-3 ./3 + 2x - r <b:.

Si ha

/ 2%-3 v': / ds dx=B 3+2s-z2+A "' 3 + 22: - x 2 \1'3 + 2x - x 2 '

e derivando si ottiene B = -1, A = 1, da cui

f a-3 v': (X-l) 2&:=- 3+h-%2+ arcs in 2 ' "' 3 + 22: - Z

poiché se CI < O si ha

J dx l. b + 20:1: "" = _ r--= arcsm , a = fi2 - 4ac. . va z 2 +"z+c v-a a

1'.J

.. · 'W.......... ,. ....e . .... I ""..,.. . ,

Esempio 4.12 Calcolare l'integrale I %2+ 1 V:I: 2 +4 W:. Si ba I x2 + I W: == (Az + B) V :£2 + 4 + C f €Ix · \l' z2+4 v' 2: 2 +4 Derivando e moltiplicando per V x 2 + 4, si ottiene z2 + 1 = A(Z2 + 4) + A:J: 2 + Bs + C,

e dunque A = 1/2, B = O, 0= - 1. In conclu sione, f

2+1 dx= 2 1 z

2+4-1n (2:+ v'4 +2:2) .. "; :1: 2 +4 Agli integrali precedenti si possono ridwre quelli del tipo J <Pz+9),f:2+b+C ' di I .. 1 me ante a sostituzione t = . p:J; + q Esempio 4.13 Calcolare J (:I: + 1),f:: - 2:t - 2 · Facendo la sostituzione t :::: :£

I ' si ha z == ; - 1, dz :;;: -

, e)' integrale diventa J (:/:+ I),f

- 2:t - 2 = - f ,fl _:+t 2 . L'ultimo integrale è immediato e dà J d.t = ln (t-2+ V t 2 -4t+I) .. ..; 1 - 4t + t 2 Un tipo speciale di integrali che coinvolgono dei radicali sono i cosiddetti integrali binomi, della forma I :çr (a + b:J:.)' d:c,

dove r, B e q sono numeri razionali. Questi integrali si possono integrare elemen- tannente nei tre casi seguenti:

(1) q è OD intero. In questo caso basta porre z = t N , dove N è iJ minimo comune multiplo dei denominatori di r ed 8. (2) r + 1 è intero. Si fa]a sostituzione t1 + b

' = t"'.. dove h è il denominatore di 8 q. (3) r + 1 + q è intero. In questo caso è efficace la sostituzione az-' + b = t h . 8

Esempio 4.14 Calcolare

J i/ 1 +

dx. S . h O 1 1 P . b ' r + 1 1 4 . I (2) S . " 1 a r = ,8 = 4 ' q = _ 3 4 ole e - = - = i SIamo ne caso . 1 porra . . 8 s quindi

I + V'Z = t 3 , X = (t 3 -:- 1)4, eh = 12t2(

- 1)3dt, e dunque l'integrale diventa J 12t4(t3 - 1)3dt = 6 t 14 _ 36 t I1 + 9 tI _ g

. 7 II 2 5.

Esempio 4.15 Si trovi

J

1 + ..;x

-

u.. Risul 2 1] d . I (3) . r + 1 Ia r = - 3 ' B = 2 ' q = 3 t e unque siamo ne caso , m quanto 7 +q è intero. Si porrà allora x-i + I =

% = (t 3 - 1)-2, dz = -6t 2 (t 3 - 1)-3.

Con questa sostituzione l'integrale diventa

J 6t3 2 2 2 t-I - (t 3 - 1)2 dt = 3(t - 1) - 3 lnlt - II - 3 t 2 +t + I + 1 2 2t+ 1 + 3 ln(t 2 +t ...]) + .J3 arctg "f3 ..

'"

.. ,"UrLU'I(.I' "U

1<' urli:' I

up. I

Esercizi 42. J 3: - 4 cb: 43. J .,fzZ - J ds J z3 44. v 2 d:t ..;

2 _ 4% + 5 x(a - I) Z +2; 4S. J

I +

cb: 46/ ds 47. f J3 +4ii cb: ../% ·

v' I + JZ _ Vi % 48. J 3-z2 eh; 49 J dx J I :r 2 50.

- dz .../ 2-z2 · (I + z2) v 1 - 3: 2 1+ z2 f (1 + :..h 3 / 4 52. J ../ 1 -

+ I dx S3 J dx 51. .

cb: z- · V I + Vi 54. f J./4 x :I: eh: 55. / eh: 56. f V I;

d:J; . (1 + x 2) v' I + 3: 2 57. f ,/I +.jZcb: 58: J

- ,fi d:i; 59! f 2%+ I - 2 ../ %2 +:1: dz sii + 3v'f+Z 4-1% + SJ]+% f dx 60. . (x + 1) ";% 2 + 3

5 Altre integrazioni per sostituzione

I metodi dei paragrafi precedenti si possono applicare a integrali del tipo

f R (ea:r,

(ae<':J + :) '1 , (aetu: + b) "':! .. . . (aea:r + b) r.) <b: ceM: + ce"S + d' cea::z: + cl

ovvero

J R(ecrz, v' ae 2a%+be=+c) dx.

Basterà infatti eseguire la sostituzione eaJ: = t per ricondursi agli integrali

.!. J R (t (at + 6) '1 (at + b) r J ... (at + b) r n) dt Q t cf + d ' ct + d ' , ct + d. t

j

Altre in,egrazioni per sostituzione

/95

o rispettivamente : f R(t, v'a t 2 + bt + c) dt. che rienttano nei casi trattati nei paragrafi precedenti.

Esempio 5. J Si calcoli f

€h. V

Posto e Z == t., l'integrale dato si riduce a

f ltH dt 1 - t t ' che si caJcola con la sostituzione : +

= u 2 . divenendo f 4du 1 1 (1£2 _ 1)2 = - 1£ _ l - u + 1 + 10lu + 11- lnla - 11. Naturalmente, si sarebbe ottenuto lo stesso risultato sostituendo direttamente tJ2 = = (1 + eS)f(l - e S). _

TaJora, per calcolare integrali in cui compaiano radici di espressioni che coin- volgono funzioni trigonometriche. è utile la sostituz,ione t = tg ; . Non è facile dare Wla teoria generale di tali integrali; basta a. volte cambiare un coefficiente, e la so

tituzione che pennetteva di calcolare l'integrale richiesto non funziona più.. La cosa migliore è di mostrare con alcuni esempi ciò che è possibile attendersi.

Esempio 5..2 Si ca1coli

f

l-cosz cb] - sin z ·

Con la sostituzione t = tg ; si ottiene

f I - cos Z €h = J f2i2 2dt = 2V2 J I ...!.- 1 - sin 2: V0=t)2 1 Tt 2 1 - t
Calcolando quest'ultimo integrale si trova infine

dt 1 +t 2

J

I-cosx

{ II-ti } (Z) 1 · cb; = :f:v 2 in + arctg t t = tg 2 ' - smz " t 2 + 1

dove il segno è + se t < O o t > I, ed è - se O < t < I.. Tornando aUa % si ottiene

/

1 - c

s z dz =

..fi { In I +cos z - sin

+

} , I-smx 2 2

in cui si deve prendere il segno - per O < % < 7r /2 e il segno + per 1['/2 < x < 2w.. .

Esempio 5.3 Calcolare Itintegra1e / v'1::in % · Posto t == tg

. ci si riduce all'integrale

2 / dt (1 +t) v' I + t2 t che si calcola con la sostituzione u = (1 + t)-I, da cui si ottiene

-2 / du = -.J2 1n { 2u - 1 -f. V4 u 2 - 4u + 2 } .. y 2u 2 - 2u+ 1

Osservazione 5.1 Notiamo che in ambedue i casi precedenti si aveva a che fare con radicali fittizi, che poteVano essere eliminati' applicando le fonnule di bisezione.. Si ha infatti · 2

1 .. (.:r; Z) 2 I-cosz=2sm 2 e %sm:z= sm 2 :I:cos 2 .. Quando tale semplificazione non è possibile, in genere l'integrale non si esprime per mezzo di funzioni elementari. Ad esempio, se si fosse applic

to il metodo sopra descritto a 11 tintegrale f v'I +

sjn% ' si sarebbe pervenuti alt 'integrale / 2dt \1' (1 + t 2)(1 + t 2 + 4t)'

che non è esprimibile elementarmente.. .

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

61. J

dz V

'2. J .J 1 · cb: 1 - sm

63. J .,fi'"t7 cb:

, 64. / " COI 2: d:J: -) - sin 2:

70. J V I+ y4e"' + I d2:

65. f J I +ehe-zd:J: 68. J Je 2z - 3eZ+ I ds 71. J . V e2s

2e'

66 / ds · V i + e 3 %

'7. / cb V (I - 25m 3:)(1 + eDS z)

69. f

1 + eU e- Z cb:

6 Secondo intermezzo: UDa dimostrazione semplice dell'irrazionalità di 1['

La seguente dimostrazione dell' ilTazionalità di 2r, che ricorda in parte quella della trascendenza di e (vedi Lezioni, cap. 5, A 9), è dovuta a Ivan Niveo (A ,sjmple proof that 1(" is i"ational, in c

Bul1etin of the American Mathematical Society", Lm, 1947, 6, p. 509). Supponiamo per assurdo che 71" sia razionale: 'Ir = a/b, con a e b interi. Consideriamo il polinornio di grado 2n

P(z) = xB(a - b:I:)" , n!

dove n è un numero che sarà fissato più tardit e sia

Q(z) = P{x) - P"(2:) + p(4)(:r=) _ .. . + (-1)" p(2R)(%)..

Osserviamo che nel punto z = O il polinomio P(z) e le sue derivate fino ali. ordine ft - I incluso si annullano, mentre 1e derivate di ordine superiore (cioè da n a 27&) assumono valori interi. Poiché si ha

P(z) = p (: - z) ,

lo stesso avviene per z = '1r = a/b. Ne segue che sia Q(O) sia Q(1r) sono interi. Inoltre, tenuto conto del fatto che le derivate di P(z) di ordine superiore a 2n

sono nulle, si ha

Q"(x} = P($) - Q(X),

e quindi cf; {Q'(:r;) sin:r; - Q(:r;)

z} = Q"(z) sin z + Q(x) sin z = P(:r;) sin x. Allora, w- I P(:r) sin xdx = [Q' (x) sin :r; - P(x} cos z]

= Q(1I') + Q(O), o cosicché 1"integrale in esame ha valore intero. a "" D'altra parte P(x) ha un massimo nel punto :t = 2b - 2' e dunque, se O < :r; < 'K 't risu lta ",n.on 0< P(x) sin % < 4-n! ' da cui I" I

q+lan 0< P(z)sinzdx< 4 n n! · o Per n -+ 00 la successione a secondo membro tende a zero; se dunque si sceglie ti abbastanza grande si avrà

. O < f P(x) sin :r;dx < I, o in contraddizione col fano che l'integrale è un numero intero. .

7 L'iotegrazione per parti

L

integrazione per parti consiste ne 11 ' applicazione della formula I [g' dx = [g - f /,grh. In pratica, dato un integrale f

&:, si tratta di scomporre rp ne] prodotto di due funzioni f e g'. in modo tale che l'integrazione della funzione /' g risulti più semplice di quella della cp. La scelta delle funzioni I e g' non è soggetta a regole generali, ed è più un 9 arte che una tecnica. Riporteremo qui alcuni esempi, che pennettono di farsi un 'idea delle varie possibilità del metodo di integrazione per parti.

Esempio 7.1 Si calcoli l' in

gra1e ,

J

arctg

.. v I + 3: 2 Ponendo I(x) = an;:tg z e 9' (z) = ";1: z2 ' si ha g(x) == ";
1-+ z2 e dunque f :r;arctgx d.s = v I +2:2arctg

- f dz = v' I +:1;2 v' I + %2 = "; 1 + z2arctgz -ln(J + "; 1 + z2) . .

Eaempio 7.2 Si calcoli l'integrale

J zdx cos 2 2z ·

Si pone qui I(s) = z e g'(x} =

t da cui g(s) == _ 2 1 tgh, e dunque cos a

f zdx

1 J 3: I c0s2 2z = 2 tg2s - 2 tg2:1:d3: = 2 tg2s - 4 lnl cos 22:1. ·

Esempio 7.3 Calcolare

f

sin s d:r:.

Risulta

J

sinzd3:=essin:J:- J

cosxd3:= =

sin z -

cos z - f

sin z d:r:,

e dunque

J

sin x d:r: ::

é(sìn z - COS :1:). ·

Esercizi

Si calcolino i seguenti integrali:

72. f x sin 2 :r: cb: 74. f arcsin 2: dz Ji+; 76. J arcaiu cb: 78.. f s+ J lnzds z2 80. J (x - I)lo(x + '" z 2 + 2) cb 82. J ;:<10(1 - e- S) cb: 84. J %(arctg:r:)'2 cb: 86. f:r.2 arctg:l: cb:

73. J arctg:r: cb: 75. f (z.+ :2) arctgzcb: 77.f2:IIJ'CCOSScb: 79. J z In{x 3 - I)cb: 81. J sin:& In 18 :I: cb: 83. f z m(:!: + ../1 - x'2) cb: 8S. f z2 (lu)3 cb: 87. f %(1 +

)

1D:I:cb: 89. J e" sin 2zcb: 91. J e" cos2x <b 93. f arctg Z eh (I + S)2 95. f sin t In sin t dt I - 8io 2 t 97. f eh sin Q:& cb:

88. J:I:2 arc:sin :r: cb: 90. f

cos az cb: 92. J z3(arctg zY cb: 94. f sin a: ID(sin :r:) cb: 96. f (sin:I: + cou:)In(sin:J; - COI z) cb:

98. f arcain.fi cb:

99. f arctg G - v'Z) cb: JZ

/2 111. f sin":!:&:. o

8 I / t,JleRral; impl.op,.i

20/

8 Integrali impropri

L'integrale in senso improprio o generalizzato (Lezioni, cap. 6, fi 8) è un'esten- sione dell'integrale di Riemann. utile quando la funzione inlegranda non è limitat

o Don è limitato l'intervallo di integrazione. Supponiamo ad esempio che f(

) sia una funzione definita nell'intervaUo. (a, P] e non limitata nell'intorno del punto a (o, più precisamente, limitata in ogni intervallo [a, ,8], con a < a < (J). Supponiamo inolb'e che I(z) sia integrabile in (a,{J) per ogni a E (Q, P). Se esiste finito il limite

:£

. f j(t)dt, z

si dirà che I(:r:) è integrabile in senso improprio in [o,P), e si porrà

(J p J j(z) eh = II

J f(t)dt. G %

Esempio 8.1 Si calcoli I

integrale

2 J Inzdx. o

La funzione In % non è limitata vicino all' origine. Si ha d

altra parte 2 J mz d:r: = z(1n z - 1)1

= 2(1n 2 - I) - aOna - I) II

e quindi, passando al limite per a

O+?

2 J In:td:r: = 2On2 - I).. . O

In maniera analoga si definisce l'integrale improprio negli altri casi, per i quali rimandiamo alle Lezioni. Si ricorderà comunque che, se la funzione f(x) non è limitata neU 'intorno di un punto interno a11' intervallo di integrazione, o, più ge- nerabnente, di più punti? si dovrà spezzare l'intervallo di integrazione nell'unione di tanti intervalli, in ognuno dei quali la funzione da integrare sia illimitata al

più in un estremo. Ciò vale anche ne] caso in cui]a funzione 1(3:) sia illimitata nell 9 intomo di un estremo e l'intervallo di integrazione sia illimitato.

Esempio 8.2 Si calcoli

1 J .J]

x2 . -I La funzione integranda è illimitata sia nell'intorno del punto -1 che del punto 1; si deve quindi spezzare l'intervallo di integrazione in due intervalli, ad esempio (- 1, O) e [O, 1). Si ha pertanto

I 11 o f dz lim J dt I .. f dt - + 1m - V I - :1;2 - ......1 V i - t 2 2:-+-1 v' I - t 2 - -I o z

= lim arcsin t J

+ 100 arcsin tl

= 7r 2 - (- 1[' 2) = '7r.. ,-1 %--1

Naturalmente, lo stesso risultato si sarebbe ottenuto spezzando l

intervallo (-1, l) in due altri intervalli, ad esempio (-1

1/2) e [1/2, l). Infatti risulta 1/2 o . 1/2 f dt J dt J dt vi - t 2 = v I - t 2 + v' I - t 2 :I :r o

e

y , 1/2 J dt J dt J dt VI - t 2 = '; 1 - t 2 -

1 - t 2 ' 1/2 o o e quindi 11 1/2 !' o f dt I . f dt . . f dt I . J dt lim +Im =un +un .. .,....1 V I - t 2 %"'-1 V I - t 2 ,.....1 v' 1,- t 2 z.....-I v' I - t 2 1/2 % O..... :

Esempio 8.3 Si calcoli l'integrale

DO f . In 2: ..1- (x + 1)2 u;(;.. o

U I .

u

6" .... "l'll' ....". ·

I,UJ

La funzione integranda non è limitata nell'intorno dello O, e l'intervallo di integrazione non è linùtato. Si deve allora spezZare l'integrale; ad esempio,

00 1 z f In:.; dx = lim f Int dt + lim f Int dt. (z + 1)2

.....o (t + 1)2 %

(t + 1)2 O s I

Ora risulta, integrando per parti. f Int Int t t (t + 1)2 dt = - t + 1 + In t + 1 = t + 1 In t - In(t + .)

e dunque

DO f Inx ds=-1n2-lim (

lnx-ln(%+1») + (z + 1)2 :r:.....o X + 1 o

+ lim (- In:!: . +ln

) +102=0. . %-10+00 Z + % + I

Esempio 8.4 Calcolare l'integrale

I f (z - :v1Sr -I

La funzione da integrare non è limitata vicino all' origine t che è un punto interno a1J'intervallo di integrazione. Si spezzerà dunque l'intervallo [-1, I) in [-l, O) e [O, 1). Si ha

t) f dz r f dx (z - 4)M = ,5 (z - 4)v'Z · o ,

Con il cambiamento di variabile z = f2 Il si trova

f dz - f 2dt -! In I t - 2 -! In J ..{i - 2 j (z - 4)..{i - t 2 - 4 - 2 t + 2 - 2 ..{i + 2 ' e dunque

I f <lx -!ln! (z - 4)M - 2 3. o

AnaIogamente i

o

J dx r J <b (% - 4)

== E

(s - 4) J=Z ' -1 -I

che si tratta con il cambiamento di variabile z = - t 2 :

f dx f 2dt t vCX - -arc -- t (x - 4) " z - t 2 + 4 - tg 2 - arc g 2 .

Si ha allora

o J d:r: 1 (2: - 4)Ji;j = -atCtg 2 -I

e in conclusione

1 J dz I I 1 (x _ 4)M = 2 in 3 - arctg 2 . · -)

Esercizi Si calcolino i seguenti integrali:

t , 101. f a: - 1 dx (z + 2),fi o

co 102. f (

- 1:) ,r:& cb o

00 104. J In:t d$ (z + I

2

CC) 10S

J In

/ 2 cb (s+ Ir o

I" 107. J cb

1 - sms o

OCI 108. J arctg % tb: :1:../% o

CIO 110. f :t-2e-I/

cb o

I W f .z3 cb . -.I I -

o

00 113. f zRe- z cb o

00 114. J e- Pz sinpt.sch o

] 103. f In:r; dz %...jZ o

I 106. f \I1;j dz z2-2z ' -1

QO]09. f arctg 2: - w /2 «b -li o

00 111. f dz eS + e- Z o

00 115. f e-PzcosQzdz. o

In molti casi il calcolo esplicito dell'integrale non è possibile, e ci si accontenta di stabilire se la funzione data è integrabile in senso improprio

ovvero, come anche si dice, se l'integrale in questione converge. Per questo sono utili i criteri di convergenza delle Lezioni (cap. 6, t 9), che qui ripetiamo adattandoli al caso di funzioni definite in un intervallo limitato [a, b), integra bili in ogni intervallo (a, e), c < b, ma non necessariamente limitate vicino al punto b.

:Critqio del c.onfront.o: ;Se esiste un punto 2:0 E (a, b) tale che per :z: e (2:0, b) si ha O < f(

) < g(z)

e se la funzione g(z) è integrabile in la) b), allora anche f(s) è integrabile in [a, b).

. - CrWrio delrtusol_ irwgrabiUtd: Se 1/(2:)1 è integrabile in [a

b), allora lo è anche f(

), e si ha

" I. f le,;) d,; < J 1/(,;)1 dx. a G

Notiamo che la funzione J:.: - bl- a è integrabiJe in [a, b) se a < I, e non lo è se li > I

Ne segue che t se per qualche a < t risu1ta lim Ix - blol/(:r:)i = O, la %

6- funzione 1/(z)l, e dunque l(z), risulta integrabile in [a, b). Viceversa, se risulta lim lx - bl C1 lf(2:)1 > O per qualche a > l, la funzione 1/(%)1 non è integrabile. :r

6-

Esemp;o 8.5 Notiamo che in generale nuUa si può concludere in questo secondo caso ri- guardo a1l'integrabilità della funzione 1(3:).. Ad esempio, ta funzione I : (O, I] -+ R così definita:

1(2:) = (_1)8 TI

in (1 _.!. I -]) n E N n' n+ 1 '

verifica la relazione tiro 1% - 111/(x)1 = 1, cosicché [/(x)1 non è integra bile in :I;-tl [O, 1). D'altra parte si ha

I-i 1-i!T f N-I J N -I (1 1) N -1 (I)k f(!I:)d% = E f(z)dx = E (_1)1: k - - - = E -

= I k= I k k + 1 J: = 1 Ie + 1 o I-t

e quindi la funzione 1(:1:) è integrabile in [O. 1). Se però 1(:.:) è coDtinU e se 1im 1:£ - bIIJ(z)1 = L > O, si può concludere che 2:-+." la funzione I(:z:) non è integrabile. Infatti in tal caso esisterà un punto 2:0 e (a, b)

tale cbe per ogni 2: > :1:0 risulti Is - "11/(2:)1 > L/2 > O. Ne segue che la funzione f(

) non può cambiare di segno in (ZOI b), perché altrimenti, essendo continua, si dovrebbe annullare in qualche punto, contraddicendo la relazione precedente.. Cambiando eventulmente il segno, si può supporre 1(:1:) > I L I in (zo, b). · h ' I è · 2

- Il COSICC e non mtegrabile..

Esempio 8.6 La funzione (I - cos

)a è integrabile in [0, I) se a > I, e non lo è se a < I..

-x - Infatti si ha

lim 3-2a (] - cos x)" 3 % =-, %....0+ tg x - :J: 2°

e dunque in un intorno dell'origine si ba

! 2. s2a-3 < (1 - COS :£)a < 22. z2a-3" 22 m - tgz-z 2"

La piima disuguaglianza implica che, se o: < I. la funzione non è 'integrabile, dato cbe in questo caso 2a - 3 < -1. Al contrario, se a > I, si ha 3 - 20: < I, e dunque per la seconda disuguaglianza la nostra funzione è integrabile in [O, 1). .

Esempio 8.7 La funzione I (z) = x- 2 e- 1 / s2 è integrabile in (-oo

+00). Infatti, poiché risulta

100 I(x) = O, z-+O+

la funzione f sarà limitata in (- 1, 1), e dunque O < I (x) < M per qualche M > O. D

altra parte, per 1:£1 > 1 si ha O < I(:r:) < x- 2 , e quindi, posto

g(:1:) = {

2

in (-1, I) altrimenti,

risulta O < 1(3;) < g(z).. Poiché la funzione g(2:) è integrabile, per il criterio del confronto lo sarà anche [(z). .

g I UII

" IU' ""P" "V' ·

Esercizi

Dire se esistono i seguenti integrali impropri:

I D6. J 10 2 :J: <b D

00 II7. ! sios cb: s2 + 1 o

1 ns. J dz In(1 + 2:) o

-I 11'. J

<b -OD

I 120. f sin z..,g cb; o

2

121. ! e

- J smz o

DO I21. J sin 2 :t cb; o

00 , w. ! :: <b · 2

o 124. !

d% 12:1 - smz -I

] 125. J (:r - 1) cotg:z: <b o

I 126. ! zIDs cb; o

I 127. J

sin(t -jCOS 2:) cb; o

I U8. / % ds (r - Ir o

00 129. / sr . cb (z4

J) sinh:r

-00

00 IJCr. / (-

Z] cb; I

I 131. ! (r

) % -I o

00 131. / sinurcsin

cb; 1

00 133. J (arctg z - w+ D cb;. I

134. Dimosttare che, se f(z) è UD8 funzione decrescente e di classe al (deri'Yabile con derivata continua), e lim f(s) = O. allora l'integrale s

+oo

CIO J f(z)sinscb; o è convergente.

, Finale: la formula di Stirliog

La fonnula di Stirling dà una valutazione di n!, per n grande. in tennini di funzioni elementari, mostrando in che modo n! cresce con R. Risulta

n! = nn e -n< .v2wn + a n)...

[9.1 J

con IO:nl < l, e dunque, in particolare,

n!

nRe-ft ';21rn ,

dove il segno

indica che i1 rapporto tra il primo e il secondo membro tende a 1 quando ti tende a1I' infinito. Per dimosttare]a [9.1], si ricordi che si ha

00 f :J!ie-

dz = n! o

(vedi Esercizio 113). Se si ppoe :t = z + n, si ottiene

o

n!:: f (z + n)ft e-#-ft dz = f (z + n)ft e- JI - ft dz + f (z + n)" e- JI - ft dz -A -n O

e dunque

n! =nne- n { J (1 + =)ft e-IIdz+ j (1 + :)ft e -adZ } .. -n O

[9.2]

Facciamo ora due cambi amenti di variabil e. ponendo t= - Jz -nln(I+ =) nel primo integrale e t = J z - n ln(I + =) nel secondo. In ogni caso si ha t 2 :: Z - n In(I + =)

e quindi (I + !) ft e.- z = e

t1 e 2tdt = z dz. Usando]0 sviluppo di Taylor n z+n della funzione In(I + x) (Lezioni, cap. 6, t 6), si conclude che esiste un punto

compreso tta O e z (quindi

= fJ z , con {J dipendente da n e da t e compreso n n

9 I Finale 00 1/1 fo,.mulD di S r;rling

209

tra O e 1) tale che

(z) Z z2 1 z %2 I In 1 + n = n - 2n 2 (1 + 02 = ; - 2n 2 (1 + 17 : r! ·
Se ne deduce facilmente

2 il 1 t -- -2n { Z) 2' I +t7- n

e dunque '1

z

1

t

fJ

- =

n

e

dz = (1 + :) 2tdt = [v'2D + 2t(1 - ')]dt.

Introducendo i valori così trovati negli integrali della [9.2], otteniamo

n! = n"e-. v'2n {I e- t2 dt + vk I0 - ")2te- t2 dt}.

n primo dei due integrali è uguale a

(vedi Analisi matematica 2, cap. 6, Esercizio 8.6). Al contrario, il secondo non si può calcolare esattamente, dato che non si conosce l'espressione di {J in funzione di n e di t; si può tuttavia valutare osservando che esso si scompone nella somma di due integrali:

+00 o +00 J (I - 11)2te- t2 dt = J (1 - ")2te- t2 dt + J (1 - ")2te -&2 dt,
-00 -00 o

dei quali il primo è negativo e il secondo positivo {si ricordi che la quantità (1 -') è compresa tra O e 1), ambedue maggiorati in modulo da

+co J 2te- t2 dt = I. o

Si avrà allora

+oa J (1 - 11)2te-t! dt < 1 -00

210

1/ calcolo integrale I Cupo 7

e quindi, in conclusione,

n! = nRe-" { ";21m + ((n } ,

con laul < l.

Esempio 9.1 La fonnula di Stirling può essere utile per calcolare limiti che coinvolgono fattoriali. Supponiamo ad esempio di voler calcolare per quali z converge la serie

(2n)!! 2ft L., :J: . fa:: 1 n R

Applicando i1 criterio della radice, e ricordando che (2n)l! = 2 T1 n!, si ottiene lim ti (2n)!! 2 2 2 1im

";27m .. n!e" 2J:2 z R = =r; IO = -, ...00 n R n--co eD n a v'2wn e

e quindi)a serie converge per Ixl <

e diverge per Ixl > If.. Infine. se Ixl =

, risulta lim (21&)!! (e) B - lim _ '2=- - - v ,I,1rR - +00, A

OO fin 2 5-"00

e dunque la serie diverge. .

Esercizio

135. Scrivere una formula del tipo della [9.1] per (2n)!! e per (2ft + I)!!.

Capitolo 8 A mo' di conclusione

Raccogliamo in questo capitolo finale alcuni esercizi che, sia per la loro maggiore complessità, sia perché fanno appeno a metodi e risultati di varie parti dall'analisi, non ttovavano il loro posto naturale in nessuno dei capitoli precedenti. SODO problemi talvolta difficili, in ogni caso più di quelli contenuti negli altri capitoli di questo volume, e che pertanto non sempre si riesce a risolvere compiutamente. D'alb'a parte, essi sono istlUttivi soprattutto perché, a differenza dei precedenti, non si riaJlacciano direttamente a nessun teorema o metodo appena descritto e del qua1e costituiscano una più o meno semplice applicazione, ma richiedono invece una più matura riflessione e talvolta l'uso di parti della teoria piuttosto distanti tra loro.. In breve, essi sono dei problemi più che degli esercizi. Naturalmente, non tutti sono della stessa difficoltà: e così, accanto a problemi che costituiscono niente più che variazioni di esercizi proposti in

ce ne sono altti più nuovi e difficili. Buon divertimento.

(1) Dimostrare che, se :;c = f (p e q primi tra loro) e p è dispari, allora la . q sene

f (_I)(ns] n=1 R

[0.1]

converge. La serie invece diverge se p è pari"

(2) Dimostrare che, se I{s) è una funzione semicontinua inferionnente in un insieme Q limitato e

inf mio 1im I(x) > inf f(s), flE8Q s-., seQ

allora I(z) ha minimo in Q.

J

SI mu UI "' U'U, I w

IUII

I I.Up. O

(3) Dire per quali numeri reali a è convergente l'integrale

00 J I sin sIS'" ds.

(4) Sia 1(2:) una funzione derivabile in R e tale che

lim I(s) = .À E R. 2:

+OO

Dimostrare che risulta

M = max lim 11(:r:) > O :r

+CO

m = min lim I'(z) < o.

-t+co

È possibile cbe si abbia M = +00 e m = -oo? (5) Una funzione f(s) si dice periodica di periodo T se per ogni :t e R risulta 1(:£ + T) = !(z). Ad esempioi sin:£ è periodica di periodo 271", e {z} è periodica di periodo I.. Sia [(z) una funzione periodica di periodo T e limitata. Dimostrare che, se o < I, la funzione 2;-£1 f(z) non è integrabile in (T, +00), a meno che non sia T J f(z) tb: = O, o nel qual caso $-a [(:£) è integrabile per ogni Q > o. (6) Dimosuare che, se q è razionale, él è 1raScendente. (7) Dimostrare che la. successione a" = 1 + 4 +

+.. · + n

1 - In n ha limite finito.. (8) Sia I(z) una funzione definita in un interVallo (a, b), e tale che ogni punto %0 E (a 1 b) sia un punto di minimo o di massimo relativo.. Dimostrare che, se J è continua, allora è costante. Si può togliere] lipotesi di continuità di 11 Se 1(:1;) ba in ogni punto un massimo relativo, allora è semicontinua superior- mente. Si può dimostrare che. se ogni punto è o di massimo o di minimo relativo, e I(

) è semicontinua superionnente, allora ogni punto è di massimo relativo? (9) Sia f(!£) una funzione derivabile in (0,+00) e tale che per ogni 2: E (0)+00) risulti

I'(x) > 1 2 (,;).. Dimostrare che I(:r:) < O e lim f(z) = O. S

Cc/p. 8 I A mo' di co"ch'J;o"

2/j

(IO) Supponiamo che la funzione f(:t) sia di classe 0 2 (0, +00), e cbe risulti

/"(';1;) > 1 2 (:1:).

Si dimostri che I(

) > O e lim f(x) = O. :r-++oo

Risposte agli esercizi

Risposte agli esercizi del capitolo prilDO

1. Occorre far vedere che i due membri dena relazione hanno la stessa tabella di verità. Ad esempio,)a tabeUa di verità di -.(1' A Q) è

F V F V F V V

la stessa di ...,p v ...... Q .

* 2. VF V F V F V F Risulta P aut Q = (P v Q) 1\ -.(1' 1\ Q) = (P v Q) A (...,p V -.Q) = (-.Q A p) V (-;P A .Q).

3. (P v Q) 1\ -.P * Q

(-,f.P V Q) v P) V Q '* ...,(P v Q) v (P v .Q)

4. P => (..,p => p) '* ...,p v (P v P) *' -.1' v I'

s. (P

Q) V (Q * P)

(...,p v Q) v (.....Q v P) ... (-.p v p) v (..,Q V Q). In rea1

si dimostra allo stesso modo la proposizioDe (1' =+ Q) V (Q =+- R)..

6. (I' ... Q) *' (P * Q) A (Q * P) '* (-.p V Q) 1\ (-.Q V P) *' ... (...,p A ..,Q) V (...,p 1\ P) V (...,Q " Q) V (P A Q) * (...,p 1\ -.Q) V (P A Q)

7. 32: : 'V'Il, 3z : Z + !I

z

8. Vz(3y: r < Il) A ('9'%,Z

z) 9. 32:: (:r;2 > 2) 1\ (V,I, 3% : Il >

+.1)

Ruposte agli esercizi del capitolo primo

IO. L'intersezione non è vuota se e solo se si ha a < d e c < b. e quindi, dato cbe risulla sempre a <

e c < d 1 è necessario e sufficiente che sia max {a, c} < min{ b'l d}. In questo caso si ha (o, b) n (c, d) = (max { li, c}. min{ b, d}). Se gli intervalli sono chiusi. la loro intersezione si può ridurre a un solo punto; ad esempio. 10*)] n [l t 2] = {l}. Se però l'intersezione contiene almeno due punti. allora è un intervallo chiuso.

II. (0,3); (1,2); (O. I]; 12,3)

12. (-I, 1); (O) I); [-I, O]; { I }

13. (-00,3]; (-(X), I); (1,3]; e

15.. [-1 1 I); 8; (- 1 , O]; (O, I)

14. (-1,+00); (113): (-I,I]U[3,+oo); 0 16. (-00, -2) U (1, +(0); (2 , 3); (-00, -2) U (3, +(0); (1,2]

17. I punti nella stessa classe di equivalenza sono uniti, nella figura, da una linea tratteggiata.

vt .,..." . -.. , ,/' ;" , ,,; ,,'

" " II" ,II" "." ".' " '

" ".' ,."

II , " , " ,/ " , , ." /." ,-"

', ".".",

". , .; .I" , , "'

,, , I' ,

"

,

I' ,," , ,,","

'

, ;" ," x .' ." .".' ".".".". I ,

r ,,;' , ,

, ;- , " ,"

, ,

, .' .' . .

, .' ,: . .

Analilicamenle:

{ {(4 - b + 8 , S); 8 e N } se a > b (4, b)) = {(8, b - a + s); s E N } se 4 < b

18. No

19. No

26. No

21. [OJ = {O}; [a) = {a, -a}

24. [o) == {a + k; k e z}

23. (4) = {a + 2kr; k E z} U {(2k + 1)1r - 4; Ie e Z} 25. No

1Z. No

16. (O).. {o}; (aI = { a, H

27. [O) = {O}; [a]" {a, -ti }

28. (a):= {a + r; ,. E Q}

29. No

30.. Sì

31. S1

32. [al = {a}

33. (4] = R

34. [al:: {2/nr z a; k e Z}

I. Basterà osservare che l'area di un trapezio (o di un paraJlelognunmo) è uguale a quella di un rettangolo che ha la stessa altezza e come base la semisomma delle basi. Questo rettangolo ha perimetro mmore di quello del trapezio. Siccome la [1.3] vale per il rettangolo, a maggior ragione resterà valida per il trapezio.

2. Si usino 1a disuguaglianza 6z!I

z2+v2+4sfI e le analoghe per 6!12 e 63Z. Sommando si ottiene

6(%71 + 11.1 + z:z:) S 2(z + II + .1)2

e quindi la prima disuguaglianza, dato che L = 4(

+ 11 + z). La seconda disuguaglianza si dimostra allo stesso modo t partendo dalle relazioni

4ZV%

2%2, + 2'JJ

<

3 + S!J2 .... z3 + ZJJ2

e dalle tqJa)oghe che si ottengono ruotando le lettere SI 11 e a.

3. Si ragiona atlo stesso modo, osservanJlo cbe l'area di una faccia è comunque minore o uguale al prodotto degli spigoli conispondenti 1 e che il volwne non supera il prodotto dei tre spigoli.

4. 9/4

5. 2/9

fi. 9/8

7. Basta scrivere la [1..7] con (I = fZ e b = _/E.

8. Si può su pporre s> rJ.. RjsuJta allora (Ji - .Jfj)2 = S+Jj - 2/Zi < :r: +11- 2y = % - I..

9. {-3 t +oo)

13. (-1 1 0) U (1,+00)

IO.. [O, TOO) 12. (7 1 +00) 14. (-00, O] U [2, +(0) 16. U.+co)

11. (-00,2) U [7.+00)

15. (-00, -I)

1'7. (-oo,

] 19. R - {3}

18. (-2

-.J2)U (../2t2)

20. (-00, I)

21. U (

+ k1r.

+ kW) iez 4 4

n (-] +4 J5 ,o) u (J5 4 - I , 3 +4v'S) - H }

23. (O,e- 2] U (,Je,....CO)

24. (-3,3)

25. (-00, -n u (-

,+co)

26. (-00, _ I +

] U [2,+00)

1.1IJ

H.IspDste Dr'J es

rcui ilel capitolo secolf/lt)

17. (2 - .;3,2 + 0)

29. (O, I + J3).

28. (-I - v'2, +00) 30. (-oo,-I)U G,+oo) 3%. (0, I + v'3>

31. (.{2 - 1,3) 33. [-++(0)

34. R

35. [3, +00)

36. [-

,O] U [2,+(0)

37. [7 + J29 3] IO '

38. [2m,+oo) se b < m; [2m, 2(&

m)] se rn < b < 2m; {2m} se b = 2m; . se b> 2m

39. No 42. No

40. No 43.. Sì

41.. No

445 "" ..,.....,.. · 1. SI; no, no; SI, S1; SI, SI; SI.. SI.

45. La dimostrazione è uguale a quella per 1:1: - 111, con in più la sola osservazione che

poiché I(s) è sb'ettamente crescente (decrescente), risulta I(

) = IUI) se e solQ se % = !I.

46. I(m);

47. -00; 131(M) 48. -3(m); +00 49. I; +00 SO.. 3(m); +00 SI. -12(m); +00 52..

(m); +00 53. -I"(m); I(M) 54. -00; +00 55. O(m); 2 56. -l(m); +00 57. -l(m); !(M) 2

58. Siano :tI '1/ e A. Si ha tz - 111 < sup A - inf A, e dunque anche diam(A) S S sup A - in{ A. Vicevers

sia E > 0, e siano s, '1/ e A tali che 2: > sup A-f. e , < inf A + E. Risulta 1

- ,,1 2:

- JJ > sup A - inf .A - 2E.. e dunque diam(A) > sup A - inf A - 2£. Per J"arbittarietà di E si ha allora diam(A)

sup A - in! A.

59. Segue dall'esercizio precedente.

60. Per (> O, siano a e A e b E B tali che b - a < f. Risulta allora in(
B - sup A <: £.. cosicché sup A

inf B. D'altra parte, poiché per qualsiasi a e A e "E B si ba Cl <: b.. sarà sup A

inf D, e dunque in conclusione sup A = iDf B.

61. {n E N ; n > 3}

62. R

'3

(2.4) 66. R

64. (4 + c,

+ d)

fi5. (o + c, b+ d)

67. Se zeA+B sj ha z==G+6

con aEA e beB. Ne segue che s < supA+supB. e dunque sup(A +B) supA+ supB. Sia ora E> 0, e siano a e A, con a> supA - Et e b E B, con b> supB - f. Poiché a + b e A + B, risulta sup(A + B) > supA + supB - 2£, da cui la conclusione dato che f è arbitrario. lo maniera analoga si dimostra l'altra relazione.

Risposte Gg/i esercizi del capitolo secondo

219

68" Per f > O. siano e E E ed f e F tali che cI(z, e) < d(z,E) + e e d(%,/) < d(z,F) + E. Si ha allora d(E,F) :5 dee,f) S d(e,z) + d(z, f) < d(s, E) + tl(z,F) + 2f

e la tesi segue dall t arbittarietà di (.

".....No; infatti può. essere d(E,G) = O.. d(F,G) = O senza che sia d(E,F) = O. Ad esempio, ciò avviene se E = (0,2), F = (4,6) e G = (1, S).

70. Sia Q = inf{d(zJ F); :t E E}. Risulta d(

111)

d(s, F)

Q per ogni :r; e E, li e F; dunque anche d(E, F)

Q. Viceversa, fissato E > O, sia 2:1 E E tale che d(zI t F) < Q + E, e sia !/I e F tale che cf(zi ,.!fl) < d(Zi, F) + f. Si ha allora deE, F) <

d(:l:l,'l) < Q + 2f

da cui segue la tesi.

71. Se

E Z, si ha [a] = a, e dunque [-a] = -6 = -(a]. Se invece a

Z, risulta [a] < a < {a] + l.. e dunque -[a] - 1 < -a < -la]. cosicché - La] - l è il più grande intero che Don supera -4.

72. Segue dal precedente. dato che {-(l} = -o - [-aJ. 73. Risulta 0+6 = [a]+lbl+ta}+{b}. e dunque. se O < {a}+{b} < l, risulta (a+b] = (a)+[b] e {s+b} = {a}+{b}. Se invece {a}+{b} > 1, dato che {Cl}+{b}-l < 1. si ha [a+6] = [4)+lb]+1 e {a+b} = {ti} + {b} - l. { [4] - [b] { a _ b } = { {e} - {i} se {a} > {b} 74. [6 - b] = [o] _ [61- l io} - {b} + 1 se {a} < {ll}

75. Dato che (l > la.] = supE, si ba d(a,E) = inf{a-z; % E E} = a-supE = a-fa] = {a}.

76. Poiché risulta {z + k} = {

} per ogni k E Z. basterà sU

rre O S % S 1. Si ha allora {z} {l - %} = s(J. - %) = :t - 2;2 = :E _ z2 _ ! + ! = ! _ (z _ !) 2 < !. 4 4 4 2-4

77. Cominciamo col dimostrare cbe a. l = l .8.. ovvero che.. siccome per definizione a · l = a, anche 1 . a = a. Questa relazione è vera per

(I = 1: se la supponiamo vera per a, si ba I. (o + 1) = 1 . 6 + I = a + I., e dunque essa è vera anche per o + 1. Ne segue che per ogni G risulta a. I = J . 4. Veniamo ora aJla proprietà COIIUDutativa del prodotto: ab = 64. Questa relazione è vera per b = I; supponendola vera per b, si ha a(b+ I) = a. b+ II = b. G + CI = 6. a+ I,a = (b+ 1)0, cioè la stessa relazione è vera per b+ I. Per quanto riguarda la proP.I; età associativa del prodotto: (a6)c = a(be)? osserviamo che essa sussiste per c = 1 dato che (06). I = a(b. I) = Gli. Se ora si suppone vera per e, si ottiene (ab)(c + I) = (ab)c + ab = a(6c) + e(b. J) = a(bc) + (6. 1) = a(cb) + (I · fI» = a«e + 1)11) = a(6(c + 1)), cioè la relazione cercata per c + I.

78-85. Tutte queste relazioni si dimostrUIO per induzione. Vediamo ad esempio l'ultima. Essa è vera per n = 1. Se la snpponiamo vera per n't otteniamo

I (n(n - 1) 1 n(n - I)(n - 2) 3) (1 + a)ft+

(I + ti) I + ntI + 2 8 + 6 a = (1 \- (n + I)n 2 (n. + I)n(n - I) J n(n - 1)(1'1 - 2) 4 =)+71+,ru+ 4 + a + 4, 266

da cui segue la tesi, dato che 1'ultimo termine è positivo.

86. La relazione è vera per ti = I. Se la si suppone vera per n si ha

(1 - 1'1)(I - 1'2) . - . (I - Pn+ &) > [1 - (p I + 1-'2 + . . . + Pn»)(I - Pn+I)
= = I - (IA. + 1'2 + . . . + ,. + J£n+I) +

+ I Vii + P2 + . . . + IIoR),

da cui segue la tesi, poiché ..ultimo lermine è positivo.

87. Risulta nU = n(n - 2)!! = n(n - 2)(n - 4)11 = ... = n(n - 2)(n - 4). ..3 . I se n è dispari. ovvero n!! = n(n - 2)(n - 4) . . .4 . 2 se n è pari. Per quanto riguarda la relazione (2ft)!! = 2 n n!, essa è vera per n = I. Se poi la si suppone vera per n.. si ha (2(n + I»)rr = = (2'n + 2)(2n)!! = 2(n + 1)2 R n! = 2 n +) (o + I)!, e quindi risulta vera per n + ..

88. L'asserzione è vera se N = I, cioè se A tia un solo elemento; infatti in questo caso peA) ha due elementi. .. e A. Supponiamola ora vera per N, e sia A un insieme con N + I elementi. Sia Zo uno di essj

e sia B = A - {%o}. Poiché B ha N elementi. P(B) ne avrà 2 N . D-a1tni pane, ad ogni elemento Q e P(B) conispondono due elementi distinti di P(A), precisamente Q stesso e Qu {:ro}. Ne segue che gli elementi di A sono il doppio di quelli di B.. e dunque P (A) ha 2 N + 1 elementi.

lo &. A n · k 89. Se fosse lo&. B = le " ovvero k 101. A = m lo&. B" 51 dovrebbe avere A = Eh, il che è impossibile. dato che .A e B sono primi tra loro. Generalizzare.

90. Quando è iniettiva.

91. Detto J l'insieme dei numeri irrazionali, si ha R = J U Q, c dunque J non può essere numerabite, perché aJtri m enti , essendo Q numerabile , lo sarebbe anche R. Neanche l'tintervallo (0, J] è numerabile.. perché altrimenti lo sarebbe ogni intervallo (k, k + I], e dunque anche R, che è unione numerabile di tali intervalli: R = U (I:, le + 1). keZ

91. Le parole composte di n lettere sono ovviamente in numero finito. Ne segue che J.insieme delle parole. essendo costituito da un insieme numerabile di insiemi finiti, è esso stesso numerabile.

93. Consideriamo l'insieme Qm degli intervalli Jz di lunghezza compresa tta 1. e m. m Di questi, solo un numero finito possono essere contenuti nell'intervallo [-S,8), e dunque Qm. sarà numerabile. in quanto wlione numerabile di insiemi finiti. Ne segue che tutti gli intervalli Jz limitati formano un insieme numerabile. poiché esso è unione numerabile di insiemi n umerabi1i. Poiché al più due degli intervalli Jz possono essere illimitati

si ha la conclusione del teorema.

94. (- 1, O); { -I, O} 97. (-00, O); {o} 100. 0; E

9S. (O, I); {O, I} 98. e; E U {O}. 101. e; {

e R ::£

O}

%. (0 1 1); {OJ 1 } 99. E; N 102. 0; N

Rispo&le agli esercizi del capitolo secondo

{ e;., se 0. 2 < b 103. 0; {-Il} se a 2 = b (-4 - ...j 0, 2 - b, -4 + V 4 2 - b); {-4 -

4 2 - b t -8 + v' 4 2 - b} se 4 2 > b

104. Se un punto z e R non appartiene ad A O , in ogni intorno di % dovranno cadere punti di CA. Analogamente, se % non appartiene a (CAt. in ogni intorno di z cadranno punti di A. Se ora z non appartiene né ad AO né a (CAt, in ogni intorno di % cadranno sia punti di A che di CA, e dunque % E a A.

105. Né Q né il suo complementare pOssono avere punti interni, dato che m ogni intervallo cadono sia punti razionali che irrazionali. Ne segue che 8Q ;: R.

106.. Sia 2:0 e AO, e .sia 1(2:0, r) C A. Se Z E 1(3:01 r/2), risulta I(s, r/2) C I(zo,1') C A, e dunque x E A O . Ne segue che AO è un apeno contenuto in A. Sia ora E un apeno contenuto in A. e sia z E E. Poiché E è ape no, esisterà un intorno I di

contenuto in E, e dunque a maggior ragione in tA. Ne segue che :t E AO. e dunque E C AO t

107. Risulta C(A) = (CA)(I; infatti C(A) è apeno, e se B è un aperto contenuto in C(A), C(B) è un chiuso che contiene A e quindi A .. Ne segue che B C C(A)? e dunque quest.uJtimo è il massimo aperto contenuto in C(A). D 1 a1tra pane 1 per l'esercizio 104, si ha (CA)O = C(A U 8A), e dunque A = A u 8A.

108. Se A è aperto risulta An8A = 0, e dunque 8A C CA. Se ora si avesse 3: e (8A)O, esisterebbe un intorno di z tutto contenuto in 8A.. e dunque in C A. Ma allora in questo intorno di % non potrebbero cadere punti di A, e dunque non polrebbe essere z E 8A.

109. Sì, perché 8A = 8(CA) e CA è aperto. In generale il risultato non è vero; infatti. ad esempio, 8Q = R.

118. Se K non ha punti interni, basrerà prendere E = K. Se invece K ha punti i nterni, si può prendere ad esempio E = IJK U (Ko n Q). Infatti si ha E = 8K U (KO n Q):: K. D'altra parte. E non ha punti interni; infatti se z E 8K in ogni intorno di :J; cadono punti di CK C CE, mentre se z e KO nQ in ogni intorno di % cadono punti di KO - Q. Ne segue che E C 8E't e dunque K = E = EU8E = BE.

'. W. e"!

112. e'w

113. ..rU t

114. ..fki J :

.. 115. e' !

I .. Uti.

e-I.. 3v 2

U7. e i <' -CI)

.. 118. 2e I1

1 .. 119. .J2 e'T

120. 4 (= 4e iO)

121. .{i eii

122. ;

e"

.'. 1¥ 3 113. - 5

124.

12S

,f5

1 .

1 - 13 . I - '3 . MI- - -

I -I - +

2 2' 1 2 2

222

Risposte a,li esercizi del capitolo terzo

1 I I 127 -- -- -- · 4 ' 2 6) 2 22

128. 2i, -Si, -2048;

129. 2 +i; -2 - 3i

130. e i('+

): e i (

+

) . (k = O, I) 2)

131. o; I; -t%i

'7 - 132. :I: x..!. - ! 2 2

133. -1:.{f (I - i.;5)

134. -I - 2i; -4 - 2i

135. iv'3; -2iJj

136. Invece di compiere la verifica d

tta, aJqu

to noiosB: si p1ò l!i0ltiplicare iJ denominatore per I:iI (= I), ottenendo 1 3 %

' I = I

: -

I = 1 3Z - I I =

= I. 3 + '&.8 . + I 3.a - i r3z - il 137. Una seconda radice è I - i

dato che iJ polinomio è a coefticienti reali. Si può dunque dividere per (z - J - i)(a - 1 + i) =: z2 - à + 2, ottenendo z4 - 5.1 3 + 10,82 - 103 + 4 = = (.1 2 - 2.J .... 2)(.1 2 - 3.1 + 2). Le altre radici

no. allora 1 e 2..

Risposte agli esercizi del capitolo terzo

I. Risulta . 1 n2t4 - 2 ! 1 = i <

. e quest'ultima quantità è minore di E non 2n+3 4'I'&+64n appena n > .ft..

2.. Si ha 3,jn - 4n = ,fD(3 -4

) < --1ft < -M non appe

..ft > M 2 . o - --...:- - ..'*' 3_ La relazione n S - 371 > M è equivalente a A 3 - (M + 3)n - 2M > 0, e quest'ultima n+2 è certamente verificata se 71 3 > 3(M + I)tI, cioè se n > -,/3 (M + 1).

4.. Moltiplicando e dividendo per n + ...; n 2 - 1, si ottiene In - ";n 2 _ II = J < n + ../.2 - 1)] < - < , se n > -. n (

5. Risulta n 2 -n sin n > D'I -1& = u(n-1) >" per n > I. e dunque si avrà n 2 -n sin n > M per n>M+1.

n(n - 1) 6. Si ha

= (1 + 1)"

I + n + 7. (vedi cap. 2, Esercizio 84). Ne segue cbe 2ft _ n > n(n - I) - 2 .

1 n2 - "sin n 1 1 / - 3D sin n - COS ti I 371 + I 7.. Segue dalla disuguaglianza - - = < < 371 2 + cos n 3 3(3n 2 + cos n,) 3(3n 2 - I J < 4n 3 . 2n 2 ·

8. Si ha 1 2ft - I _

I = 7 <!. 3n+2 3 9n+6 n

9. Risulta I I + 2. Ion _

I = 7 < -L. 5 + 3 . IO" 3 15 + 9.. I()'I 10"

n.,IINoIIC; U,s I

CoJC' """lo UC;' L."f'IIJUIU ...'

U

£

IO. Poiché a > I, si ba sempre lo&. (I + ;) > O. Se si prende £ > O, risulterà 10&0 (1 + !) < t: non appena 1 + ! < ex'-, cioè Don appena n > ., = I ti n 0(-1

=

U. Mol1i.plicando e dividendo per J n

+ 2 + .

si ha 271 - 1 v2 n 2 + 2 J 271 2 - 1 2 = n 2 +2 I (+ - (4n 2 - 2) 2n 2 - I ..ti

1= V

- J2

S 5.;2 n 2 + 2 1) < 4n 2 - 2. +- 2n 2 - 1 ..;2

12. Poiché 3 3ft = (1 + 2)3n > 1 + 6ft , si ha 0< 3 1 - m < -2- < ...!.. - -1+671 2,..

13. Si. Infatti, preso f =

. esiste lUl li e R tale ch

l -

< Cla < l + i per ogni ll > ll. Ma aDora per n > ll si ha 2a.. - 6n > 1 - l = o. 14. No. Ad esempio, se Cla = l e b,. = (_l)n

, la successione Cla + b,. .. l + (-;)n non ha limite. 15. n limite è l. Infatti tlCla +t"n . ..!L /ln +.Jn..... Ora, la successione ...!L l tira ha n. + ti + l' ti + 1 n + limite l, mentre risulta l JL l < -L.. e quindi la successione JL ha limite O. ,,+1 n+1 7&+1

. de D-t 1 l'. No. Ad eSempio, se si pren Ga = - e bu = 2' - t.. si ottiene A,a + bn = n n = 1... - ! < o. n. l n

17 N S .' bl +

+ . · . + 6n .

a la . b ... di . d . . o. 119ft = , e SI t'I "....... succesSIone n costituita zen e I ti

nel modo sepente: si comincia con O,

; poi si prendono tanti zeri fino ad avere 9n < !. quindi tanti _ 2 1 fino ad avere qp > ! t poi di nuovo tanti O finché f" non tomi ad 8 4 essere < !, e così via. È chiaro che la successione gli non potrà avere limite. Resta da . 8 far vedere che è sempre possibile operare nel modo detto. Supponiamo dunque che per un certo m risulii 9m >

, e facciamo vedere che si possono prendere un certo numero ft - m d . .. odo b J S . ha II. +

+ ... + 6m + ... + b,. 1.1 + b2 + .. - + b m . I zen m m c e 9n < -.. q... = =. m 8 ti D quanto se m < Ie :S ti si è posto "t = o. Poiché quando n - + 00 l'ultima quantità tende a zero, si potrà prendere n così grande che sia tln < i. In manieJ:a III8loga si dimostra che prendendo IUI numero abbastanza grande di valori

si può rendere tln >

.

18. Si. Sja infatti f <

. e sia li tale che per B > " risulti I - f < CIa < I H. Si ha, per tali R, t - E <

< -L" e quest'ultima quantità è minore di 1 +2E. In definitiva, se I-e: n. > v, risulta I - 2E <

< 1 +2(, e dunque lim

= I. . n

19. Sì. Infatti, poicbé o. -+ 1, esiste ", tale che per ogni n > II risulta Gn > !. 2 Sia .>. = IDin {

. (1.1, fI2, ..., /I" }. Dato che tutti i termini a" SODO positivi. anche .>. sarà positivo, e si avrà Gr& > À per ogni n E N. Se ora K è tale che K À > I, risulterà K tira + "" > I + 6n > o.

20. No. Ad esempio, sia 4n = I, e sia b n la successione che assume iJ valore O per ft ( ) l/h pari, e 1 - ; per ft dispari.. La successione tiri + I"ol ft varrà allora I per ti pari, e 2 _! per n dispari, e quindi non am limite. n

21. -1 21. O 23. I 24. 1 25. O 26. O 17. O 28. -00 29. O 30. 2 31. 3 32.6 33. +00 34. 1 35. max{ (1,2, I) 3(). +00 37. O 38. -1 39. O 40. O 1 1 41. O 41. O 43. - 44. 2 e 45. I 46.! 47. I 48.. +00 e 2 SO. 1 SI. +00 52. +00 49. .- 3 53. I 54. 1 55. I 5'. O 57. -00 58. O 59. -cc a. O 61. Non esiste Q. -00 63. O 64. O '5. -00 fifi. -00 "'I e J4 68. +00 1 72. +co 69. 8 78. O 71. - 3 73. +00 74. +00 75. J 7'. O 71. I 78. O 79. +00 IO. O 81 27 82. 27 83. hA · 4 4 11:1;(11. _ k)la-t 84. Se p > O, il limite è O se O S A < I, +00 se A

I.. Se fJ = 0, il limite è +00 se Q > o.. O se t¥ < o, A se Q = o. Se II < 0, iJ limite è +00 se o > O, I se a = O. O se CI < o. 85. O 86. -1 87. O 88.0 > 3 89. -1 < A < o

90. Supponiamo che L = liDI y'i;' > lim {li); = I. Per ogni E > O esjste un EI tale R

OQ 11-+00 che per n> IJ si ha L - f < y'i;' < L + (e y1; < I + e. Per tali valori di II si ha aUora L - € < yta; <

an + bn < y (L + e)R + (I + E)R S (L + e) V'2. Se ora si prende v cosl grande che sia anche V2 < 1 + f, si ottiene L - f < vGn + bn < L + E(L + I) + f2 per ogni n > II.. e dunque la tesi. Si osservi che lo stesso risultato si ottiene supponendo solamente cbe mu lim y'b";:s lim

. ft-oo n-c)O

91. Per E > O, sia II tale che .per ogni 11 > ", risulti L - E < 4n < L + E:. Per tali n si ha . (II + 42 + . . . + Gn 4) + 412 + · .. + 4v 41'+. + .. . + Gn n ali M (In = :. + . rosto ora ::= 41 + . . . + a", n ft n M (n - v)(L - E) M (n - v)(L + c) si ha - + < qn < - + . Sia ora 111 > II un numero tale che ft n n n per 11 > 111 risulti IMI < f e !! < E. Se B."> II., si ha L - f(L + 2) < 9ft < L + 2f, cosicché II fi ."t lim fa = L. ft-tOQ

92.. Si ponga b n = Gn - 4n-l; risulterà allora 4n - G() = 11 1 +

+ . . . + 0,., e dunque

= 6. +

+ - . . + IA,. +

. Se b = lim 6n = lim (an - fin-I), iJ secondo membro del1 'ultima 1& ft ft n

oo _-'00 IO relazione rende a b grazie al risultato dell'esercizio precedente, e dunque anche lim !!! = b. n

oo n.

! 93. Tutti i termini della successione 4n sono maggiori di 1, e dunque risulta tln+1 :S <

< GnI cosicché la successione è decrescente, e di conseguenza ha limite L. DaUa relazione data segue, passando al limite, che I < L < .fL, e dunque L non può essere che 1.

94. Sia P(z) =

' + z - I. Si ha P(O) < O. e poi.",) > O, cosicché P(:r:) ha uno zero n compreso tra O e I (Lezioni, cap. 1, Teorema 4.1). D.altra pane, se si ha z7 +z = 11 ' +1J = 1, n n ragionando come nella dimostraZione del teorema 4.2 del capitolo 1 delle uzioni si dimOSb'a che z = 11; di conseguenza la Tadice z" b'ovata è unica. Poiché O < ZII < !, per il teorema dei carabinieri si conclude che lim Sta = O. n n

co

95. Basta osservare che se r < O si. ha

!

_ _ n{ I - (. +

r

} n{(I+ nJ I} - (I+;r' , e

utilizzare l'esempio precedente..

,ti. I, O I 98. 2, O 99. O 97. 5 J 00. +00, O 101. 1. O 102. 1 103. +00
104. +00 105. O t 107. +00,-00 106. 2 108. ". _ r 109. 1,-J 110. 1,-1
111. lim Gn =

2' 2 ft

oo U2. lim 4n = 2 "-00

rzo

113. max lim tIn = min { CIO, _ 2 1 } ; max lim Gn = max { 00, _ 2 1 }
11 e dunque la successione n

ga Go R-CO ti()

I converge se e solo se ao = % ..;2 .

114. Il limite è +00 se ao> I, -00 se ao < -1.

115. Il limite è 5 se G() > o, O se G() = O.

116. Risulta max lim fin =

e max lim £In = -0. n-co ,,

oo

I 118. lim ara = {

'Q-De +00

{ -oo 121. lim an = - 1 .-'00 +00

113. +00

124. O

{ +oo 126.. lim fin = I ft...oo _ 2

127.. lim .y'i; = 2 n-oo

117.. lim tira = O n

oo

se laol < I se laol = I se lao r > J

119. lim Gn = O n-oo

120. lim G,a = 2 "-00

se G() < -) se G(J = - I se fIO > - I

111. lim An = {

ft-IOO +00

se al < I se 41 = I se CII > I

125. 1

seGo>l 2 SC

<! """"-2

128. lim

= 3 R-OO

129. lim

= 1 "-00

130. Risu1ta max liman = min { a, p, 1, !,

, {3 } e max limOta = n

oo a p lo' a n

co

- max{ - f.l ! ! !!. f! } - -, I" o

P' p'l a .

131. lim an = +00 la

aa

132. Posto

=)." = p"tI"", si ha Q == GkZn+k +... + GIZn+1 + GQZn = Àn(ak>.k + ... + al

+ +00) =).ft P(>a) = o. Ma allora saranno uguali a zero sia la parte reale che la pane immagi- naria di Q, cosiccbé risulterà CI

2:n+k +... +OIZn+1 +aoZn = O e tlrcYn+i +.. .+0111,,+1 +GC)7In = o.

133. La proprietà !In e N è vera per n = O,). Supponiamo ora che n. > 2, e che per ogni k < n risulti ai e N. Dalla relazione di ricorrenza si ha (I" = Att-I + Gn-2, da cui segue immediatamente che Gn è intero.

134. A(I + ,fi)R + B(I - J7t a

135. A + BS-

136. 3" A + (-1)TI B

137. 2" (A COS ft 3 7r + B sin fa 3 !!')

138. A+B(-

r

139. eA+ BC - i)"

140. In:t" = A C \JS)" + s (' -2 IS)" 142.

=A C +2,/.5)" +8 (' -2

r

141 nw. nr · 1nzn == Acos J +Bsm 3

Risposte agli esercizi del capitolo quarto 1. Sì 2. Sì 3. Si 4. Sì S. Sì 6. Si 7. Sì 8. Sì 9. Si IO. Sì U. No 12. Si 13. Sì 14. Sì 15. Sì 16. Sì 17. Sì 18. No 19. J

I:;I1 20. O < 2: < I 21. Izi < I 22. IZI:f I 23. :r > I 24. Izi < I 15. {:r> -HU{s < -2} 26. Mai 27. I:tI < I 2 29. z < O 30. z ,'0. -1/k.(1c E N) 28. Izi < J3 31. x:IO 32. %;/0 33.%>0 34. - I S :t < I 35. Mai 36.z>1 37. {:r < o} u {z > I} 38.z>O 3'. 1:r;1 < 1 40. O < z <: 1 41. Sempre I 43. :r;<-I e s > I 42. Izi > 2 44. 2: > 1 45. z > -I 46. JsJ > I 47. 3: > e 2 48. % < I 4'. :ç < I I 51. Z < Q S1. tsI < I 50. -I s < -2 S3. (o,

) U (e, +00) S4.

>o 5S

O

2: < I S6. Izi > I

57. Se a < -I e p < 0, la serie converge per ogni $. Se Q <: -I e {j > O, la serie converge per O S %

I. Se o

-1 e p < O, la serie converge solo per z = O. Se o

-I e p > 0, la serie converge per O:S z < I.

61. ..!.. I 7m aoGI o.. G{i

=

1 7ab(b + (I) . . . (b + 60)

59. ..!. ah 62.

4

(60. 12 '3 b' - bob I ... 6 8 - I · b-bobI.... b'_1

58. % = O e % > I

64. La successione (-1)In/31 assume successivamente i valori 11 I, -1, -1, - I, I, I, I, -1, ... Di conseguenza, la successione delle somme parziali è I, 2

I, 0, -1, 0, I

2, .. t. ed è quindi limitata. Per il criterio di Dirichlet la serie converge. I valori della successione (-1)[2ra/31 sono invece I J -1 tI, I, -1 1 I .... e dunque la successione delle somme parziali non è limitata. Inoltre la somma di sei tennini consecutivi, con n da 6lc: + I a 6k + 6, è maggiore di 611:

3 + 6k '+ 6 ' Ne segue che la serie divetge. 65. Risulta sin(n:r + i) = sin nz cos i + cos n

sin tJ; la convergenza segue daU' esempio 1..3. 66. Per ogni z (si osservi che (- J)8 = COI n'I") 67. Sì 68. Per z 1 (2" + 1)71"

69. Sì

70. Sì

11. Per ogni %.

72. Come nel teorema di AbeI. basterà far vedere che se la serie I4n diverge, aliora diverge anche la serie I

. Possiamo considerare dUe casi: a) ara < 811.-1. In questo caso si ha 4n C1n Gn I -= >-=-. Bft 8,,-1 + ara - 2a,. 2 b) G.n

8n- h e dunque 4n 4n «ta -: >-. Sp Sn-I +CIn - 28...-1

Se si ha il caso a) per infiniti n, la serie anI Sn diverge. Se invece ciò non avviene, sarà verificata definirivamente l'ultima relazione e la serie diverge per il teorema del confronto, tenendo conto del teorema di Abel. Non è invece vero in generale che se I fin diverge, allora diverge anche la serie I Gn . oS,a+ I Ad esempio. se Gr.: {n!)2 risulta

< "a,. = I i e quest'ultima 'serie converge. B n +1 -.+1 (I: + 1 11 risultato però sussiste se si suppone che la successione G.n sia limitata (dimostrare).

73. Se la serie I, bn diverge e tan I

M.. risulta Bo

(I fra/"'I - mM, e dunque anche 8. -+ +00. Ciò non avviene se tIn non è limitata; ad esempio, se 4ra è la successione - 1 , 2, - 2, 3 1 - 3, 4.

- 4. ..., risulta "2ft = n + I e 828-1 = -I.. oosicché la serie 1: b n ottenuta

ggruppando i tennini a due a due è divergente, mentre la serie t a. è indetenninata.

Risposte agli esercizi del capitolo quinto 3. (-00. -2) U U.+co)

1. z

3

2. :z: 7' I, 2

4. 13:1 > -V3

s. :I:

2

6. U [2k'I' - !, 21:,," + 7 6 ""] kez 6

7. % < O

8. (-oo, -I)U H, +00)

9 .J :I::

:I:: !. :I: 311" _ :! 3... _

7... .2: 7 2 , 4' 4' 8' 8' 8' 8

t ..

.

IO. [3, 4]

n. .u (2k1r1 2" + 1f) }eZ 2

12. s

-1

14..2: > -

e

15. % '12

1'. .

. DO 18. (-00 - --.!-) u U (_ 2k2r _ (2ft + 1)11') U · 11" - I k-O
21cw- - I

(2k + I)r - I U a (- (2h - 1)11" . _ 2hr) U (0,+00) 1&=0 . (2h - 1)21' + I
2h". + 1

19. z =t 1

20. z > o, z :; Ie.., Ie E N

21. L'insieme di definizione è " H}

1 13. :t S - 2

17. n,2)

se a > ,fi. se Q = ,f2

[I - ar , 1+ aF] se I < Il! < Vi [O. I J se O < a S 1

229

22. !<J:<

13. 1J < O 24. (1,

] 2 - - 9 25. [

,

) 16. (-

I-n 27. (O, +00) . ;W. [

I

) 28.y

2 19. (-00, O) 31. {ft e N : o

ti < 12} 31. U [2n,2n + 1) 33.. [0,4] .ez 34. [O) 2) 35. (I, e] 36. [-I) O] 37. (-1, I) 38. (-I, O) 39. (-3, -1] U 10,2) 40. tH 4t. ., 41. (-1,+00) 43. V 44. y

-1 O

JC

y=lx+11

x

230

Risposte agli esercizi .1 capirolo tpdllt

)

45

46.

y

v

r -= (- x]

L_l -)l y= 2

2

-1

-3 -2

1 2 3

J(

-2 ---

JC

-3 -

47.

48.

y= -1- C-KJ -.-.

y

--.

Y= 1-.)

1

2

)t

-2 -1

49.

y

y - mextslnM, COU'I

x

Risposte agli u

rcizi del capitolo quinlo

13/

so.

v

SI.

y

y= maxI{KJ, I-"U

-2

-1

1

2 1t

t' = mInUx), (-xI)

-2

-1

,

2 x

52.

53.

v= IKJ + (- xJ

"

v= Ix] -(x)

x

Ie

" -1 -2

54.

55.

y

y 2

y=.x+ I-xl 1

1 1 y- (2-xf + IJr+11 O , 2 1t -2 -1 -2 -1 O 1 2]C - -1

S().

.... 4 .... I I I I I I .... 3 ---- I I r I I I ----... 2 .---II I I I I I I I . , .

)' - (xl]

6

o

-2 ---13 -.J2 -1

1

.J32

x

57.

y

y - mintr,]t -.)

-1

o

1

J(

58.. 59. V y Y'" 1 +2[-2-] 1+.r 2 . 1

=1+ (-k-] 1+r , O 1I -1 O 1 x

Risposte dgli

$erciz; del CQpitoW quinto

60. R _ { _

} ; 3z2+z-4 2 (2

+ 5)2

62. (-00, I) U (3) +(0); in (I _ ::1:) z +3

64. "

66.. R; e2(s-+ I)

67. R; sin sin :J:

70. v'3 < I:z: I :S 2

71. [O, I)

74. (-I, I - J21 U [I. 1+ V21

75. (68) 3 + cos:r ; sì I - cOS:r:

(70) Non invenibile { _2 V I+

2_1 (71) ,-1(:&) = _) z2 2 v'I+'? + J ? z-

(74) Non invenibile

76.

v

l/

l r l l , l l l ll ll l l l J l l

ll l l l l J l f-J l l

o

-1

-2

61.

< 3;

233

I _ (%2 + J) 3

-3

63. [I -2 v'S , O) U [v'S2 + I , +00): JIO %2 s I

65. U {2k1I' t (2k + 1)1("]; ..; e sin s - I tez

68.% > 1

71. %

-1.%:;I0

:1:<0 z=ONo x>O

r = I 'IKII

1\ 1\ : \ & \ ] \ I' I \ II 1\ / 1 I ,__.... I I I I I a I I I I I I .

fa.

'9. (-00 , - 2} U (O

+00)

73. z 2: O

., (69) ; ; no tg

- - I

(71) Non invel1ibile

(73) zln% - 1; sì

I I I ,t,- I J I I I I I I I I

. 11.

3

(segue)

y

y:z:: (f(xll

" J I I I' li , I I I I I Y I I

j '-./" I I I . I I

I I I I J / I I \ I 1/ \ I 11 \ // '-_411"

)C

.0

Cbt

77. La restrizione di tg:t all'intervallo

[_:! !:] . sì 2' 2 '

78. {-!t} - l-x]; DO 80" !(% + {z}) { z E U [2k,2k + l) } ; sì 2

ez

'9. [z] + {-z}; no

81. Non inverti bile

82. a + /J z ; no 1-%

83. 1; no z

84.

z - ! 1 :1; 1 . sì 33'

85. La funzione è invenibile in ogni intervallo [o, p] c: (-00,1]? e in ogni intervallo 10,,8) C [l

+oo). L"immagine !(Ia,,8J) è contenuta in (-00, I]. Risulta I-I(z) = I -

se {a, PI C (-00, 1]. e /-ICz) = 1 + J'I=Z se [0,,8] C U, +00). 86. La funzione è invertibile per 1011 < I, e risuJta rl(z) = 11 - OI

I . 1-

87. -4

x

r

f[od a>1 / /

tBt

IbI

y fC;tJ - 1 < o < D t- I Cx) 0< CI <1

x

]t

4c) Id) LIMITI 88. O 89. ! 90. -00 'L InA/B 2 92. -4 93" 11'/2 I '5. +cc 94. - 2 1 fJ7. O I I 96. -- 98. 4 99. - 2 2 2 101. O 101.

103. I 100. -- 3 5

104.. e 105. Non esiste 106. I 107. O 108

109. O 110. 7S 01. O · 5 2 9 U3. O 2 1 U2. SO 84. -- ns. 2 3 116. Non esiste 117. I D8. -1 11'. -1 120 ! 121. ; 112.. 2 I · 4 123. 2 124.+00 2 2 127.. I 125. 3 126. 9 I 12'. O 130. 2/5 131. i 128.- 2 1 133. S 134. 1 I 132. T 135. Q! + - 2 a 2 13(). I 137. I

138. "/<1 - 46) se ab;ll; -co se ali = I e a > O; +00 se ob = I e G < O

I 139.. In 2 143. +00

140. O

141. 1, -I

141. O

144. 0,-00

145. I, O

14(1. O

236 Rispo,ste a8J; esercizi del capitolo quinto 147. -00 148. 1]49. +00 ISO. I 151. ! 152. 1]53.. elle 154. 2. 2 W- 155. -'I' bt 3 8 157. I 158. lo 3 15'

9 2 1 I'l. +00 162. +00 159. 3 IQt. - 2 I 166. In 2 163. -) 164. e I'S. In 2 6 167. No 168. Sì Iti9. Converge per I:tI < I.

170. Sia s <!I. La funzione IJc(z) è crescente, e risulta f"Cs) < 11;(") se :z < qI: < II. cosicché f(s) < I(JJ) se e solo se almeno uno dei punti qI; cade tra z e 1/. Ne segue che I(z) è strettamente crescente se e solo se in ogni intervallo (ZIY) cade almeno un punto di E, cioè se e solo se rinsieme E è denso. Ciò equivale ana relazione E = R. Infatti

se E è denso. in ogni intorno di un qualsiasi punto z cadranno punti di E. e dunque E = R. Viceversa, se esiste un intervallo (a, b) in cui non cadono punti di E

quest'ultùDo sarà contenuto nell'insieme chiuso R - (a, b), e dunque E ;lR .

171. Si. se si pone 1(0) = ; .

172. No.. Infatti risulta r(O) =:! e 1 -(0) = _ 1r . . 2 2

173. È discontinua in Z - {O}, con discontinuità di seconda specie: f+(n) = ft2

I-(n) = = n(n - I).

174.. Si

17S. Esiste un punto

> O in cui il denominatore si annulla (discontinuità di terza specie). In O la funzjone ha limile -1, e dunque può essere resa continua assegnandole tale valore.

176. La. funzione ha discontintrItà di seconda specie in tutti i punti interi (u E Z), tranne n = 2. Si ha /+(n) = 1 e J-(n) = n - I.

177. La funzione si può rendere continua assegnando il valore O ai punti !: + k'If. , 2 178. Si può rendere continua cambiando da O a I il valore che essa assume nei punti 2n + I (n e Z).

179. Sì 180. Sì 181. (43) Sì (44) Si (45) Sì (46) Z (47) Z (48) Z (49) Sì (SO) s

se si pone !(n) = I. (51) Sì (52) Z (53) Z (54) Sì, se si pone !{n) = I. (55) Z (Sfi) ;r...fi (n T'O) (57) Sì (58) {O}

(59) La funzione è discontinua in O <reO) = I, ,-(O) = O). mentre può essere resa continua in I cambiando il suo valore da 2 a I.

Ruposte agli eserciz

del capitolo Se3to

237

.- ,

181. Sì

183. Discontinuità di seconda specie in :t: 7r + le., le E Z 6

184. Sì 188. Sì

185. Sì 189. Sì

186. Sì 190. No

187. No 191. Sì

192. In primo luogo si osserva che 1(.) si estende a una funzione uniformemente continua in [a, b] e in [6, c] (teorema di estensione). D'I altta parte. risulta 100 f('J;) = s...6<t = lùn I(z) = 1(6), e dunque /(

) è continua in la, c]. Per il teorema di Weiersttass f(x) è

&- unifonnememe continua.

193. Si prenda E = I nella definizione di uniforme continuità: esisterà un 6 > O tale che. se ISJ - s21 < 6, allora 1/(2:)) - 1(%2>1 < I. Siano ora :t e Zo due punti di A, e sia ,

tale che 716 < Iz - sol < (n + 1)6. Si possono allora trovare ft + 1 pW1ti :tI, S2J ..., Z,,+ t = % compresi tra 2:0 e z e tali che la distanza Ira due punti successivi sia minore di D. Ne segue

..+1 I/(s) - /(%1)1 < L I/(Zt) - /(%10-1)1 < II + I s: 1%

%01 + I. k=1

194.. La funzione l/z non è unifonnemente continua in (OJ l].. mentte la funzione

2 non lo è in (1 1 +(0) per il risultato deU. esercizip precedente.

195. Fissato E > O, sia M un numero tale che per 2: > M risulti 1/(,;) - g(:i:)1 < (. Sia poi 6. > O tale che, se I

I - z21 < 6., risulti 1/(2:1) - /(:£2>1 < E. Infine, poiché g(3:) è unifonnemente continua in (4, M + 111 esisleJ'à un

> O tale che. se 2; I

2:2 E [CI, M + I) e I Z 2 -:Ed <

, aDora ig(Z2) - g(St)1 < f. Si ponga 6 = min{61'

11}, e siano zJ!I E (a 1 +oo) rali che Is - 111 < 6. Per la scelta di D, i due punti z e II apparterranno ambedue a [a, M + 1] oppure saranno ambedue maggiori di AI. Nel primo caso risulta 19(:r;) - g(II)1 < e; nel secondo si ha

Ig(s) - 9(g)1 < Ig(%) - f(s)1 + I/(

) -/(u)1 + I/(u) - II(y)1 < 3f. In ogni caso, se Is - 111 < 6 si ha Ig(z) - g(y)1 < 3E.. e dunque g(z) è uniformemente continua.

196. Si 201. No

197. Sì 202. Sì

198. No 203. No

199. Sì 204. Sì

200. No 205. Sì

Risposte agli esercizi del capitolo sesto

3 /Wl l. R; /'(2:) = 2 sgn(z)v lxl

2. R - {O}; l + sgn(z)

3. R; sinz

4. R; sin 2: + z COsz

5. R; 2% + 3

ti. R; cose sin :r;) cos x

7. R _ {O}; /'(,;) _ { 3 se z > O - 3:r2 - COI:t se s < O

{ I se:!:>I 8. R; f'(z) = 22: _ 1 se z

I

I Si chiama segno di z la funzione sgn(z). che vale -1 per % < O. O per % = O. e 1 per :z: > o.

9. Si ha I{z) = g(z) per s E A, e dunque 1(%) - /(=0) = ,(2:) - 9(:1:0) . Ne segue che %-So 2:-';0 se 1(%) è derivahile in So lo è anche g(s). e le derivate coincidono. Se .A non è aperto, l'esistenza della derivata II(z) non implica quella di g'(z). Ad esempio, le funzioni O e max {%, O} coincidono per

< O, ma la seconda non è derivabiJe in o. Peraltto., ancbe quando g'(z) esiste, non è detto che sia uguale a f' (s), come si vede dalle funzioni O e %. che coincidono per z = O, mentte le derivate SODO evidentemente diverse. Si veda comunque l'esercizio seguente.

IO. Per ipotesi, esistono ambedue i limiti !'(:J;o) = lim 1(%) -leso) e ,'(%{») = :E-SO S - 3:0 = lim g(z) - g(so) . Sia 018 {:J:n} una successione a valori in B't convergente a :to. Le fun-

-zo s - So zioni I(s) e g(s) SODO continue in So, e dunque si ha leso) = lim /(Zn) = lim g(sn.) = g(

o)t ,.

oo n-.co e inoltre /'(so) = Um !<s.) - /(zo) = tim g(zn) - ,(2:0) = I(:to). n -'00 :tra - 2:0 n.....oo

n - 2:0 II. Si può prendere ad esempio I(z) = rr:" sin I per % :/0, 1(0) = o. Si ha 1'(0) = O, e z /' (z) = 2z sin ! - cos !, che non ha limite per :I: - + o. =t z

12. 2(z2 + z + 1) z2(z + 2)2

13. %2:(I + In z)

14.

s (:le; 2: _ In 2:) oou20-.

1 COI re 15. In sin z sin z

1 - COSs 18

..; . - (z - sinZ)2

17. _ 102 s(1n z)2 19. 2 1 + a2 V . + z2

16. eDS

arccos

_ sm z .../ 1 - s2

20" (x + arct g Z)S { 1n(Z + arctgz)+ 2: (' 1 + ---s) } z+arctgs I +r

11. 22: sin:I(sin x + J; cos

) In 2

12. I J .COS2: 1- cou-zsinz 2 sm% -

cos 2 z

23. - 2 (z + 1 + z2) V2 +

2 25. - . ,: v 1 - 2; 2

24. - 3:(1 - 33:)-2/3 - 1

Z'.. 2z sgn(z)

27.. _ 1 :1:(10

}2

(J) sios (.) 28.. - ; s

z +coszln:z:

29. b 1 +z2

30 I · ../ . + :r;2

2(1 - z) 31.)2 I + (2% - z2

32. 4:.: 3 - 4 20 ln4

Risposte tigli esercizi MI capitolo sesto

2.39

33. Una funzione f(z) è crescente in (ti, b) se e solo se /'(s)

o. D'sltta parte.. I' (z) = O ìn (o, fJ) se e solo se I(z) è costante in (ct, fl). Ne segue che una funzione I è strettamente crescente in (Gtb) se e solo se /'(:1:)

O e /' non si annulla in nessun intervallo contenuto io (a, b).

34. La derivata prima 1'(%) = m% + 1 si annuOa solo per 2: = e-I ed è positiva per

> e-I. negativa per 0< s < e-I. Poiché

> e-I. /(

) è crescente. e d1D1que mvemùi1e, in [- 2 1 .+00) . Detta g(z) la sua inversa. si ha ,(0) = 1. e dunque 1'(0) = + = I. I (J) Per trovare la derivata seconda, si deriva la fannula g'(s) = 1/ f'(g(:r;»: " /'"(g(z») ,'(z) II (z) = - [I' (g(s»]2 ' e dunque g" (O) = -1. 35. Sia /(:1:) =

+J + s + 1. Risulta /(-1) = -I < O e /(-D =

- G) 211+1 > o, e quindi l'equazione I(z) = O ha una radice z.. compresa tra -1 e _I. D'altra parte 2 r(z) = (2n+ 1):c2" + 1 > O, e dunque la funzione 1(:) è strettamente crescente, per cui non si può annullare due volte. La radice s. è pertanto unica. Infine. dato che -I < :1:. < -

. si I (1) 1/(2.+1) a

-I >

1 = -1-:J:n > -2' Ma aDora dovrà esliere -1 < $.n < -2 . coslcché Zn

-1.

36. 2; O

37. (2 - ZI)sin z+ 4:ccos z; (6 - z2)coss - 6z sin z

38. -2r SU1Z; -2e S (sin % + cos =z:)

39. 2 cos r - 4:r;2 sin %2; -122: sin

- sz3 COI

40. 6z - 2cos2z

6+ 4 sin 2z

41 2 - In z . Jn2z - 6 · sln 3 S ' z2ln 4 s

42. _---L-; 2

8io 2 Z sin 3 z

43. -

(I +

r3/2;

(I +:r.}-s/2

44 _ I + 2z +

2 . 2(1 +2z)(1 +3: + %2) · (

+ r)2 t (

+ z2)3

45. (I; + z)et

II: 46. E (k) p(p - 1)... (p - B + 1) :rP-' eS pl B

47. a"-1 (II: + az)

48. 1.3... (2k - 1) (1 _ %)-t-I/2 2"

{ (_1)'/22 1f - 1 COS 2% 49. (-I)(Ic+ I)/'12"-1 sin 2s

kpari h dispari

1:-1 50. 2z-i;(_1)i(k - I)! (E ! -In

) -=1 .

51. Massimo = J2 [nel punto 3:); minimo = -../2 [nel punto 7:]

S II 2. M = 2 [IJ; m = - 2 [-1]

53. m == -

1n2 UJ Ad == 2m2 [2J

54. M = 3 [3]; m = O [0,2]

e 2 55. M = 2 [2]; m = e [1]

56. AI = e R [e]. Se k è pari, m = O [I]; se k è dispari e > n, m = -e-n n/e); se k è dispari e < n, 111 = - (e

)" [1::-1-/"1.

(fi2) 1/3 [(b) 1/3] 57. Se a > O e b > O, m

3 4 4 2a ' sup = +00; se ti < O e (al} U3 [ ) 1/3] Ad = 3 "4) (

. in! = -00; se ah < o. sup = +00. inf = -00.

b < O,

1 l 58. m = - - [-l]; M = - [l] 2 2

59. m = O [O]: sup = l

60. Se ,,> 0, m = O [O];. M:= n" e-n ln.]. Se ,,= O, M = 1 [O), in! = O

61. Ad = 2 [O); m"" -vn [arct g (-D] 61. Ad == 15f5 [àrccos

]; 111 =0 [O] 64. inf "" -00; M = -l -ln2 [:]

()3. inf = -00; sup = +00

[3

3

] v.J. M = O [2; e [-321", -27rJ U (-11', r] U [2r, 3w]]; m = -2 2'-2"

7 66. M = 4 IO); m = - +21n2 (-ln2] 4

67. M = 6e- J £31; m = -e [1)

68.Ad=V2 [: ,

Im=l[o, ; ,lr] 70. .Al = e-I II); m = -1 [O)

69. M =.8e-4 [4]; in! = O

71. Al:: 4 [2]; inf = -CC)

+ ( ) -,,/(P+q) 72. sup= +00; m =

:

[(;f/

)]

73. Ad =

[

]; m= - : (-1] 74. m = -e-4 [e-4J; M = 5 ln5 + 15 (5]

7S. m=3InS-8 [-2J: M=31n2-1 [-I)

7'- m= -J [-w,..]; M = ; [;]

R

'sposte agli

sercizi del capi.tolo sesto

241

77. fI'& = : -1n2 [1]; M = arctg I-]n

U] 79. (a) 6max = 2r; (b) Smax = ,,"(I + V5)

78. I =

4V

80. 2ab; i lati sono 4../2 e bJ2

81. (a) VIIIIIX = 411": : (b) f7max" 211'11": (e) Smu = d(b+ v'4Ql +112) 3 3

8 1 ( ) 'IT _ 32r. (b) _ 821' . ( ) S _ 107 + 51 Ji1 6. a rmax - 81. 6max - 3.J3" c max - 7r 128

83. (a) Vmin = !1r; (b) (J min = 7r(3 + 2V2); (c) Smin = 821' 3

84. In ambedue i casi le rette sono quelle di equazione 'Il

:I::r:. L'area minima è 2, la somma detle lunghezze 2..;2.

85. D vertice sia su un' eli is se , e il segmento che unisce i due fuochi di questa è la base. È chiaro che raltezza (e dunque. l'area) è massima quando il vertice sra sul semiasse, e dunque quando il triangolo è isoscele. Per trovare analiticamente lo stesso risultato si può usare la formuJa di Erone.

86. n quadrato 87. (a) Amax = 3v'3 ; (b) Pmax.= 3.Jj (in ambedue i casi il mangolo è equilatero); (c) inf P=4 4

88.

p2 2(4 + 7r) 90.. 7ft =

(è il triangolo isosce1e); sup = S

tJ + b - va 2 + tJ2 - ab 89. T = 6

2 II 91.4= J3' b=2V 3

92. Detto

l'angolo del settore

si ha \O = 2 fi?I' e V = 2

. V .3 9v3

93. Se mg

le, P = (0,0) ed Emin = k; se mg < k. II = ,,- mg ed Emin = 2k _ (k + mg)(3k - mg) - 4Ic: M. s = mio {L, -Ì3 }; il tempo minimo è t = L

h se h < /3L. t = 2 Jh

f se la > ,fjL. .

95. Dette Al I II ed m le masse delle tre sfere, se v è la velocità della prima, la velocità massima della terza si ha per p = ";mM (1Imax;; M 4MtI) . +m+2

. L2 96. Si ha capacità massima Cmax = 211" quando la base ha lunghezza O (cioè quando la grondaia ha la forma di una semicirconferenza).

2 2 97. Se

2 (I r,2 ' iJ tempo minimo si ha andando direttamente da A a B; altrimenti, "I CI + il punto di distacco ha ascissa

1m2 ZO = (I - ,

t} f - v

e il tempo minimo è

b y" f -

a 7: . = +-. nun VIV2 VI

98. Risulta /(0,) = CI - 1 < 0, mentre 1(1) = 1. Ne segue che la soluzione ,,(a) dell'equazione z = lo&.% è compresa tra a e 1. e quindi lim VJ(m) = I. CI

1-

99. Posto 1(%) =

2; + 2../3 (z - ;), si ha I (:) = 2, I (;) =

(1 +

) > 2, e f(%) > O in (

, ;). Ne segue che 1(%) ha un minimo in : . ,

100. Nell'intervallo in questione risulta 2;

18%, e dtmque ..; 1 :il > 1 = eou. 1+

1 +tg 2 z

101. Posto 1(%)::: (1 + z2)arctg:t -:E, si ha 1(0) = O e /'(z) = h arctgz > O in (0,+00), per cui 1(2:) > O in (0,+00).

102. La funzione 1(:£) =

+ sin i - 2(r - I) verifica Je relazioni 1(0) ::: O e /'(:1:) = = I + cos z - 2

< o.

103. Si può dimostrare per induzione. Infatti essa è vera per n = o. Supponiamo ora b . . I . t 1? t R In d c e per Ogni t 2: O e per un certo n nsu ti e > 1 + t + _ 2 +.... + .. tegran o tra O e

ti. 2 3 %.'"1 si ha allora

- 1 > :J; + !... + =- + ... + , cioè la relazione voluta per n + I. - 2 6 (n + I)!

104. Se si pone I(z) = tg:r: - :J: - z} , si ha 1(0) = O e /'(:£) =

- I - :r > O (vedi .. 98) 3 cos :r: esetClZ10 -

105. Posto I(t) = t f1 - at, risulta 1(0) = O e lim f(t) = -00. 1noltre la derivata !'(t) = t-.+oo = CI(f8- 1 - 1) si annulla solo per t = I, e si ha /(1) = 1 - ti. Ne segue che f(t) < 1(1) = 1 - a.

106. Poiché la fuD7Ione a primo membro è pari (f(z) = f< -z» si può supporre s

o. In questo caso si ha 1(2:) = r -:J;+cOS:J:. Risulta 1(0) = 2 e /'(%) = r -1-sÌDz > ,r -1-% > O per % > o. Ne segue che f(z) ba minimo in O, e dunque f(z) > 2. 107. Consideriamo la funzione f(z) = r- I . Se 2: > I risulta 2: - 1 > O, e dunque !(:z) > I; s,e invece 0< z < 1 si ha %-1 < O, e dunque di nuovo f(z) > J. Poicbé /(1) = I, si ha 1<3:)

I per ogni :c > O, e dunque per tali s si ha r 2 s.

108.. Sia I(z) = (I + z)P -

. Se p

O risulta /(z) < O; si può quindi supporre O < P

I. nel qual caso la funzione è definita anche per % = O. Risulta 1(0) == I e f(!t) = p{(I +2:)'-1 - zJl-I] < 0, per cui f(z) ha un massimo in o. 109. Consideriamo la funzione I(z) .. arccos z - 2arcsin ..; I - z . Si ha /(1).. O e inol1re , 2

-I 1 1 (1 - 2:) -1/2 (I) /'(z) = -2 - - -- =0. .; I - z 'I -I I - z 2 2 2]-- 2

Ne segue che 1(%) = costante = O in (O, I]. Le a11re relazioni si dimostrano allo stesso modo. no. Sia I(:r;) =4:1: 2 -ln(I +z2)+ 2arctgz - 7r . Si ha 1(0) = -

< O e.fU) = 4 -ln2 > O, cosicché l'equazione data ha almeno una loluziOlle tra O e 1. D"altta parte

si ha /'(2;) = 82: - :à, + 2., > O, e dunque la funzime /(%) è strettamente crescente e può J +

I +r armullarsi al più una volta.

111. J [M]: 21m]

112. Nessun massimo o minimo relativo

tt3. 1 [m];

[M]

114.

1m]; nessun massimo relativo

115. <a) le pari, B pari: O [m]; t [m];

[M]

+" (b) k pari, n dispari: O [Ml; - k k 1m] +ft (c) le dispari. n pari: I [m]; - k k [M] +n (d) le dispari, D dispari: - k k [mJ +n.

11'. -1 [m]

117. ../2 [m]; -..[2 1m] n9. 2 [m]

118. Se ti è pari

O è un punto di minimo relativo

1.10. 2k; 1 ft [M]; 6k; 1 ft (m] (le e z) 121. (a) 'le pari, " pari: -1 [m]; I [m]; k+ le " [M] (b) le pari, h. dispari: I (m); k

k" [M] (c) le dispari, Il pari: le +le h. [m] (d) le dispari. Il dispari: -1 (m); le +k h [M]

122. O [M]; - 2 [mI; 2 [",J

244

RùpCJSle agli esercizi del capitolo sesto

-ti - V Q 2 - 36 -G+

a 2 - 3b 123. Se 8 2 > 3b: 3 [M); 3 [m]

124. ! [M]; 2 (m] 2

125. Si ha f(o.)

O [> O]. Infatti in un intervallo (al G + f) risulta 1(3:)

/(0), cosicché 1(%) - /(4) S O e, passandO a1 limite, /'(4) S O. Analogamente.. se /(

) ha un massimo %-a (un minimo) relativo nel punto b, risulta I' (b)

O [< O].

IUi.. Supponiamo che sia F' (o) < O e F' (fi) > o. Per l'esercizio precedente, la funzione F(z) (ristretta ali 'intervallo [cr,,8]) non può avere un minimo né in Q né in {1; ne segue che essa ha minimo in un punIO interno E. nel quale F' (

) = o. AJlo stesso modo. ovvero cambiando di segno la funzione F(z), si dimostra che.. se F'(a) > O e F'(jJ) < 0, esiste un punto

e (Ot(l> in cui F'(t) = o. In genende, se). è un valore compreso tra F'(Clt) e F' (fl) , ci

i riconduce al caso precedente ponendo G(z) = F(:r:) - Àa:.

127. I se m > k e se m = k; +00 se m < le e k - m è pari; non esiste se m < le e k - m è dispari.

128. +00 119. 1 130. In A 1 132. 1 133. Non esiste. 131. 3 134. 1 1 136. +00 135. 3 137. e- 1 / 6 I38. 1 139. O 2 J 40. Non esiste. 141. +00 142. -1 4 144. Non esiste. 145. 2r + IO 143. -- 3 146. I/,fi 147. 6../2 1 148. - 3 149.

ìso. I I S 1. +00 152. +00 153. +00 154. O 155. e I IS7.

156. - 3 158. -00 l 160. O 159. - 2 161. -00 1'2. -1]63. Non esiste.. 164. -00 1

. -9 3 166. - ln3-1 167. l]68.

3 169. - S

R ;.spostt agli esercizi del capilolo sesto

l7G. O

1 173. - 2(ln 4 - 1)2

176. e

179. e3f2

1 182. -- 2-12

185. 2

188. l

191. -li

194. +cc

197. e

100. -I

1 203. 2

206. a = I [lim = -2]

3 171. 5

1 3 174. -2 10 2

177. I

180. I

183.. 1

ln3 I 18'. 1n4 - 2

189. ln 2

192. e

195. e

198. e312

201. e

/4 204. - 2..;2 207. a = 2' [4]

209. a 2 = 2k + J (I: e N) [(-I)k(

+ 1)2..]

211. a = I [3/2]

-1 214. CI =

v 2 - 1

O' 217. ! E (2ft - I)!!

:m 2 n=O (20)!! 4....

00 220. E (2n - I)!! z2 n + J RSO (2n)!!(2n + 1) 2 m -4-I

Z3 7. 5 223. 2:+ 8 + 128 226 s- z2 + %3 _ z4 +:: · 2 6 12 24

212. a:> 2 (2}

215. a = 3/4

og '" n

2ft+I 218.. L,,(-I) (2 t neO ti +)!

00 z2n+2 221. -L- 8=0 n+ I

224. _;%4

z3 2

227. z+ - +- 3 1S

245

172. +00

t75. -2

178.

181.

184. +00

187. +00

190. ! 1t

193. e

196. e 4

199.

4 I 202. - 4

205. -

.

208. a = 1 121

210. a=2 H]

1 213. a = .;e [1/12]

DO 21'. ! L ZR 2 ft=O 2 ft

00 I

z"In n 2 119. - Li 2 '1&=0 n!

222. %3 _

z5

1.c z2 + r + 7z 4 + r5

. 12 4

228. I - Z +:1: 3 _ %4

246

Risposte agU

s

rcizi .1 capitolo sestC1

x %3 :r;' 229. - - - + - 6 S! 7!

ft' z2 :4 130. 4 -2-4

231. Risulta in I + 2: 1-z Ix 1 2n + 3 00 I 1 2.-+3 maggiorare in modulo con 2 E x2h = 2 :J; 2n + 3 11=0 2n + 3 a110ra

n 00 = 2 E

21c+1 + 2 E z21=+1 . e la secon da

k=O 2k + I k=ra+ i 2k + I . somma SI pUO

I Se si pone

= 1. si trova I - =2 ' 3

p 102=2 L I +Rn k=O 3271+1 (2n + I) ,

con IRnI < 1:2 I ' Basterà dunque prendere ti = 3 per avere un elTOre inferiore a 4(2'1. + 3)3 n+ 1/70000.. dunque largamente minore del richiesto. Si ha in definitiva ln2 = 53056

0,69313. 76545

231.. Si può usare la stessa fonnula del1" esercizio precedente con z = ..L, per cui 19 basterà prendere n = I. Si ha allora In

= :O15

7

0,10536.

Q 2hI . 233. Si ha, per z e R., sinh%= E Z +R.(s), con &a(s) = coshf z2.+3, t essendo i=O (2k + I)! (2n. + 3)! un punto compreso tta O e

. Nel nostro caso si ha % = I, e quindj IR..I < e . Sarà (2n + 3)! allora sufficiente prendere ft = 3. n valore cercato sarà dunque sinh I = 5923 R: 1,1752. 5040

2k+J [z I 2n+3 234. La fonnula di Taylor dà sio2: =

(-I)k % + Rn(x).. con [Rn I < 1:=0 (21c: + I)! t - (2n + 3)[. 1 . fa Dividendo per z e integrando, si trova f!!!!.! d2: = L (-1)" I + Pn. con o Z 1:=0 (2k + 1)(2k + I)! J I . IPn I

. Sarà dunque sufficiente prendere n = 2, per ottenere f

dz = (2n + 3)(2n + 3)! o z = 1703

O 94611 1800 ' ·

n 1 / 2 ,,1:+1 Jz!n+2 ln(I + z) 235. Si ha ln(I +z) = .L, (_I)k - k z +R,. (z), con tRnt < _ 2 ' per cui J dz = k=O + I n + O % n k = E <-.1 k t + Pn. con IPnI S 1 2 +2 . Sarà allora sufficiente prendere n = 6; si k=O (k + I) 2 + (n + 2) 2" 1/2 tti ' J ln(I

z) ..1- = I 265 728

O 44 846 . O ene O 2: u:IO 2822 400 'J

) 242. 3

I 237. 3 243.

4

138. IOInS

239. 12

240. £ 2

3 241. 4

236.

3 244. 4

24 5

· 3

246. 4

Risposte B8'i e8ercizi de' CQpitolo SUIO 241 247. +00 I 2 250.. 12..
[i. 4 248. 6 249. 3 251. -"3 252. O I 254. I 2SS. 2 256. ;4 253. 3

257. La convessità di I +g segue direttamente dalla definizione. Sia ora 4p(

) = f(z) V ,(:.:). Per ogni %, J/ E (Br b) e per ogni .>. E (O, I) si ha /(.>as + (1 - >.)y) S "' 1(%) + (I -).) /<'11) S

À cp(z) + (t -

) V'(J/). Analogamente, g(}.z + (I - À)y) <). g(z) + (I - .>a) g(,) < .A ,, (z) + (1 - A) tp(y), e dunque in conclusione si ha anche (Àz + (1 - À)y) < ÀfP(z) + (J -

)

(y). 258. -!<a<O 6- -

259.

< -I 260.. Siano 2: e J/ due punti di [a,I1J. La funzione F(:r:) = 1(;£) - I(fI) è crescente in s-, (a, b) - {y} (vedi Lezioni, cap. 6, Proposizione 3.1), e quindi, posto 'J = 41

Q e

"' b; fI , risulta B < "t < a S z S fj < () < b, cosicché /("'1) - JCJJ)

!(:z) - /('IJ) < 1(6) - 1CJ1) . ,-y x-y

-y D t altra pane, la funzione I(

) è continua, e dunque Ibnitata. nell 'intervallo 11',6]. Posto M = max I/I

si ha, per ogni 11 E [a,,8], /('1) - /('1/)

_ 2M c [(6) -j(y)

2M 'I e h

J

-y Q-

6-y B-p dunque in definitiva 1/(:1:) -f{y)1 < Q = max { 2M , 2M } . 1:£ - yl - Q -1 6 - P

261.

1

. y= "x+ 1 - J"it

o

J(

262.

y

Y = (K? + 2x) 8"

-3-"3

-2-.../2

x

263.

v

Y I: - In4sinN)

o

2

11"

x

R.isposre agli esercizi del capitolo sesro

249

264.

y

y... .J x" x+3

!.J3 2

9 2

-3

Z1 8

)t

265.

1-.. y=-)(2 + 3

x

1 -- 6

250

266.

1.67.

Rispos'

d,li esemzi ., copitolo sest()

y

.-+1 y=- ll- - 1

1

o -1

IC

y

x-1 y-- -. xl

D

1C

Risp03re agli esm:izi del capitolo sesto

268.

269.

y

x

y=r4lnx-1)

WJ

o

y

2{.J2 + 1t

.a. + 1 r= ,,--1

o

InC1.. ../2)

251

x

252

Risposte alli eserCizj .1 capitolo se3to

270.

y

x-3 y=- r-5

-1 -46 I O I

171.

y

)I.=.t+ 2cos.K

.J5

x

13. 6

x

Risposte agli esercizi del capitolo sesto

272.

y

253

r-2 y-- .x + 1

273..

Jt _.)fs-e x-1

1

J(

x

254

274.

y

y= ln(1 + 2sin z xJ

ln!

. -- 2

o

1r 6

1r 2

s.... . 6

]C

275..

y

y= lx+ 1)e-n-- 11

x

Risposte alli uercizi del capitolo sesto

276.

277.

y

y =- (x - 2",.1"'-1'

-4

o

r

r y-=ln- .x-1

1

x

2

2 + ..J2

255

x

256

Risposte a,li esercizi del capitolo seSIO

278.

.J3 -1 2

y .n-e!. 3

y=2

- arcsinx

..Ji1 2

Jt

--------------------- -

+

3

279.

y

lnK)'=- r

o

x

Risposte agli esen:izi del capilulo sesto

257

180.

y= sinx+ çosx

o

T 4

x

281.

y= x-2arctgx

"

282..

y = e- """.11

-1 O

1

x

283.

. -1

284.

-'l'-JCo

285.

-1-.J6 2

y

y= ..''-'-11

o

1

x

y

, y = . 'i.... COSA:

x

Xe= al'ClinC.J2-1)

y

x v=-e-- x+1

-1

"

.liIOU.

287..

y

1

-ctglC y= J(

-Kg

o

Xo

y

y-In.x _.!:. «> O

f..

y

)'= In.r- : a<O

o

-a

-2a

Ctd

11

J{

11

n '-tp.....uc us U

CI LI

C &CC J L LIP,IV'U .U:U.mc.

Risposte agli eserdzi del capitolo settimo

I 1 I. 2lnJz+ Il- In Ix-t21 + 21nlz+31

1 3 2. In Izi - - In 12% - 11 - - 10 12% + Il 4 4

3. !

3 +

iI + 19% + 9010 Iz - 31 - 25ln 13: - 21 3 2

321 4. - - In tzl + - In Iz - Il - - In Ih - Sl 5 3 15

5 I In t I I I 2 I (2z + I) . - 1%-1 -- n(

+%+I)--arctg - 3 6 v'3..j3

6. In Izi -

Jn(z2 + 1)

7. *Z4 -z) +

:J:2 - 152:+3101%+ 11+28lnt

+21

J 1 3 8. - - In I

I + - In 1% + 21 + - in 13z - 21 4 16 16

9. In 1:r:1- ! In Ix + 11- ! In(s2 - z + 1) . 3 3

1 3 2 I IO. In Ix - II + - 2 1n)3: + 11- -In(z + 1)+ - arcrgz 4 2

II. 10 Iz + II - In Izi - ! :z:

12.

+ Io 1$1- ! In(z2 + J) + 3 arctg% % 2

13.

In It + 2[+ ! In It - II 3 3

14. -- 3 1Inlti +! Inlt+ II + .1I o If - 31 4 12

I 2 I 8 15. 2 % + Z + 3 In t

+ I [+ 3 In 1:1: - 21

1'. -:I: + In Iz - II - 41n Iz - 21

17. t + In It + I[- In(t2 + I) + arctg t

I 18. - + 2arctg% z

19. -2Int + 21nIt + 11_ 2t + I t(t + I)

20. ! In tt - 21- IIn(t2 + 2) + 1ft; arctg

3 6 3v2 v 2 11. ! In ItI - ! In(t 2 + 2t + 3) - -L arctg W 3 6 3,;2 Vi

22. ! In It + 11- ! In(t 2 + I) + ! arclgt + ! !.:t..!.. 4 8 2 4 t 2 + I

23. 1. In Ix - 21 - J.. In Ix + 21 - 1.. 10(%2 + 4) - .I 8TCtg ! 32 32 16
16 2 14. _! In II... 21 + ! In 12t + J I = ! In 1 2 - 2 COS z + s

n z 1 5 S 5 I - cos

- 2 sin z

25. - , 2 _ In It - II + In It + II = ---L- + I + In I cos.:!: I t.. - I cosx I - Sin
%

2'. -:J: + 2 2: I-tg 2 28. - ..!..In It + 3 1 + .2. In)3t - I I - .i. In(t 2 + I) - .!.
arctgt. [t:: tg = 2] 25 25 2S 25 t

1.7. In I tg

I

29. tg

. 2 30. !lo

2 cosz

31. in Is - II + 2 8 2 +1 - 2arctgs rs = tgzI s + I

32. _2- + 2m It - 11 = 2si

% + 182 1 1 - sin:r: I [t = Ig ! 2] t - I cos :J: + sin z - I I + cos :t

33. In Icou:1 + 3 s2 2 co. z

34. _- t i + 21n Itl- 210 tt - 11 = -cotg = 2 + In I - 2cos z [t = Ig ! 2] 2(I - sin 3:)

35. -x +

arctg(,f3 tg x) .36. _1.. In It + 21- 1.10 12t - II + 1.. In(t 2 + 1) + .!. arctg t [t = tg

2] 25 2S 25 25

37. ,fi aretg(.J2 tg x)

38. ! In II + 2tgzl 2

39. ah $. e" +2 e - a +bln(b+

) -

; a > 0, b > O

40. ab

1 - cos a + b arcsin b + "; 1 - b2 ; O < a <

1 O < II < 1.

41. aD < aarctgo -

In(1 + a 2) -Incosb; a 2: O, O S b <

.

4Z. v'z2 -

+s - 21n(

- 2+ V(x - 2

+ I)

J.OI

J(uposle DgII

gerc

zI a

, CapIIOIO se mmv

43. -

In ItI + 2 arctg t - -/3arctg 2tJj I [e = vs 2 - I - :1:]

44. (!z2 - 1. z + 15) V :z:2 + x - .2.. tn (:z: + ! + ";7: 2 + 3;) 3 12 24
16 2

45.

2 t7 - 3t 4 [t = V' I +

]

46. -L +

+ In It - 11- In It + II [t = /

+ J] t-I t+1 v'" 47. -4t+4Inlt+21- 4In It-21 [t= /4+ Jx]

48

v2 - 2;2 2 . 2; . + arcsm

2 v2

I t

49.

arc g V ' v 2 J - ZOo

so. -

+

In(..Il +z2 u)

I 3 I I 3 t 3 51. + - In It + 1 + - - In ft - Il + 2 - - arctg t 8(t + I) 8 8(t - I) 8 4(t + I) 4

[t = t :2 + I]

51. 2 +2arctg J I - s JI-% -I 1+2: I+z

53. H

-2) y I+

54. - 4 -

In It + Il +! 2 t + I +

In(t 2 - t + I) -

arctg 2t - I [t = V 4 -

] 3(t + I) 3 3 t - t + I 3 v 3,f3 :z:

5S.

1+2:

56. 6 y J +

- 31n

I +

+ I I+

-I

4 ( ) 5/2 4 ( ) 3/2 57. 5 I + vi - 3 I.. Ji

58. -H 1+22: - 2 ..1 :1: 2 u) - I

In II + 2z - 2 vz2 +zI- :; In 122: - 2 v z2 +z - 31

59.

uJ - 9u+

arctgu [. = v'Z+i - JZ]

60. ! In 2v?"+3+z - 3 1 2 I+z

61. 21nlt-21-2lnlt+21+arctgt [t=

] V I _H

Z

'2. .../2 In I I + t + v'2{t 2 + I) =.j21n I + sin

+ "I + COS:I:+ v'I - C08:1: I - t COSz

-I 63. 2u -Inlu+ 11+ In lu - iI = 2v I +eZ+ In Ji+éi lu 2 = I +eJ:] I + e

+ I

64.

In u: - 2u + 2 + v'2arcIg(u + 1) + J2arclg(u - I) v2 u +2u+2

[. IO .,j 2

:t] I - sm:I:

65. -t+

InIt+ 11-

InIt -11 [t = v' I +e" 20;]

I V I + e 3 :1 - I 66. - In 3 V I +e J % + 1

({I. J2In (t - 2 + v't 2 - 4t + I) [t = tg

]

68. !! + In Iu - II + In Ia + iI - 5 + I1n(2u + 3) [u = ve 2z - 3e2: + I -

] 2 4(2u + 3) 2

1 I 1 [( ) 1 /4] '9. -u + 4: In Iu + II - 4 In Ju - I) + 2 arctg u u = e- 4 :r +

71. .../28 - 2

In 18+ II + 2

ln la - ll [s = / l + "7 + l]

2 71. - ...j éJ.z + 2e S - e S

72. z2 _ % sin 22; _ cos 2x 448

73. :r:arctg

-

10(1 + r)

74. 2v'T'+Z arcsin % + 4

75. (%2 _ ! + !) arctg:t -

+ ln lzl':' ! ln(z2 + 1) 2 z 2 2 2

2 l _

l 77. !... arccos z - -,;y l + z2 + - arcsin z 2 4 4

76.. z arcsin % + ..; l - ,; 2

78. ! In 2 :t - ! In z - I 2 z %

%2 ( ] 3) I [I 1 __"1 -1) b: + I 79. - In(:J: - I) - - - - In 12; - I + - Io(r- + :a: + I) +

aretg - 2 2 2 4 2 J3

80. ! (s2 - 2z)In(z + .J 2;2 + 2) _ I (z - 4) 2 4 v z 2 +2

81. -COSs Intgz+ Inlg

82.

In(I - e- Z) - H

+ In(

- I)) -

83 (%2 _ !) 10 (1 + 22; -/1 _

2) -

- ! arccOS% · 4 8 v 4 4

84. i (:z2 + I)(arctg :1;)2 - z atetg z + i)nO +:z2)

%3 (3 I 2 2 1 2) 85. "3 In % - n x + 3 n

- 9

86 %3 I 2 I) _

· 3 arctgz - 6:t + '6 n(I + x-)

87. i:z2F In:!: -

%3 I 88. - arcsin:I: - - v' I - % 2 (2 + z2) 3 9

89. !eS(sin 2:1: - 2 cos.2%) 5

e. Bz 90. a2 2 (,8 COS Q:J: + a sin a:t) +

91. ; {I +

(cos2z+ 2sina) }

92. !(z4 - l)arcig2:t - ! (:):3 + :r) arctg% + 1.Z2 - ! 10(1 + z2) 4 2 3 12
3

arctg :r: 1 I 2 1 93. - + - In(I + z) - - In(I +:t) + - arctg:r 1+% 2 4 2

94. -008

In sin:r; + cos:c - ! Ine I + cos 2:} +

In(I - cos s)

95. CC:St In sin t -In It g ti

96. (sinz - cosz)1n(sinz - COS z) + cos % - sin z

efJ:c 97. a"I :2 <P sin a:E - Q!COS a=r:) +(J

98. :t an:sin Ji. - .!. arctg J Z + ! v%(1 - x) 2 1-% 2

99. <2y'Z + I)arctgG - y'Z) + In(z - Ji + n

100. Dalla fonnula di integrazione per parti si ottiene (vedi Lezioni. cap. 5, Esempio 5.4)

J sin D :!: tb: =- -;; sin D - 1 3: cos :I: + n : I J sin n - 2 :1: ds

e dunque

n-I In = - In-2) n

/2 dove si è posto In = f sin n z cb:. O

Di qui, per induzione, si ottiene facilmeo[e

I - Cn - I)!! 1 n- II o n..

ovvero

I - (n - I)!! 1 n - U I n..

a seconda che " sia pari o dispari. D' &In parte. si ha Io =

e I I = 1. e quindi 2 s/2 I - f . n ..1- - (n - 1)1! B n - sm Sua; - 'h n!! o

dove DA = ,.. se n è pari, e B", = I se n è dispari. 2

101. 2 - 3.,12 arctg

2 104. --102 + 103 3

102.. 1

103. Non esiste.

105. 4)n2

106. .,f2 (1n(.,f2 - I) +8rctg

)

107. Non esiste.

188. 7tJ2

109. -7r

110. I

2 111. 3

112. :

113. n!

U4. ') o "J se {3 > O; non esiste se fJ < o. o" + P"

fJ se p > o; non esiste se {j < O. 11S. ex'- 2 +fJ 116. 81 U7. Sì 118. No 119. Sì 120. Sì 121. Sì 122. No 123. Sì 124. Sì 125. Sì 126. No 127. Sì 128. Sì 12'. Sì 130. Sì 131. Sì 132. Sì 133. Sì

a 4

134. Risulta J I<s)sinzd% = I(O)-f(a)cosa.+ f !'(x)cosxcb. L'Iintegrale f I'(

)coszd% O D O converge, in quanto risulta II'(2:) cos xI ,S II'(2;)1 = -/'(:1:) (si ricordi che I è decrescente" e dunque /'

O). D'taltra pane, J(a) cos a ..... O quando a .... +00, e dunque in conclusione risulta

CO CIO J f(z)sinz<b: = I(O} + J f(:I:)cossdz. o o

- c:=:: (2n+ I)! I - -' J (I)

135. (2n)!!

(2n)R e nv221"n; (29 + I)H ==

(2ft + I)P+! e n

21r tJ + - -. (2ft)!!. 2 ;t Le due espressioni si possono riunire in una sola:

le!! == 1c i / 2 e- k12

A(k), dove A(k) = I se k è pari. e A(k) = .f! se k è dispari.

Risposte agli esercizi del capitolo ottavo

1. Cominciamo col considerare il caso di p dispari. In vista dell'applicazione del teorema di Dirichlet (cap. 4

Teorema 2.4), si tratterà di vedere se le somme parziali della sene

00 E (_I)(n p / t) 8=1

[0.2]

sono limitate. Sia m il più piccolo intero tale che mPlq sia un intero pari 28. Risulta

[(m + k)p/q] = [28 + Icp/fl = 2B + (kplq)

e dunque (-I)1(m+i)Pf9J = (_1)11:,,/9'.

Ciò significa che i valori di (-I)(Qp/91 si ripetono quando n aumenta di m; ne segue che le somme parzia1i dena serie [0.2] sono limitate se e solo se si ha m E (_1)1.'/9) = o. n=1

Nel caso di p dispari, tenendo. conto del fatto che p 'c q sono primi tra loro, risulta m = 2q. Se ora l < n < q, nPlq non è intero. e dunque si ha

(2q - n)plq] = [2p - nPI'l} = 2p - [uplq] - l.

Ne segue per tali " (-l)rrlt-n)p/q] = -(-1)ITaP/V]

e quindi

2q q-l q-l E {-l)1"p/91 = E (_1)lnp/91 + E (-l)1(2q- n >P/t) + (-1" + (-1)2"

o. n=1 n

l "-=1

Dunque la serie [0.1] converge. D caso di p pari è più complicato, poiché il fatto che le somme parziali della serie [0.2] non siano limitate non basCa per concludere che la serie [0.1] non converge. Cominciamo comunque a esaminare la somma

m E (-t){QP/ql. n=1

Poiché p è pari, risulta m = q, che a sua volta è dispari. Come in precedenza. per I < ft < t.=...! si ha - - 2 (- t)l{q-ra)P'f] = -(-1)[ftl'/') 1

e dunque i primj q - l tennini della somma si e1idono a vicenda, lasciando solo l'ultimo = 1. Veniamo ora alla valutazione della serie [0.11. cominciando a valutare la somma

(k+1 >9 L (_l)(n p / t) . tt=q+ I ft

In questa somma, come abbiamo appena visto, dei primi q-I tennini metà sono positivi e metà negativi, mentte l'ultimo è sempre positivo. Due termini di segno opposto saranno del tipo

I I ;-

,

con O < CI < q. n valore assoluto di qùesta differenza è.

I I I I a q ;; -

= n(ft% ti) S ("9+ 1)2 .

In conchu;ione. si ha dunque

(k+1)q

(_I)IAP/t) I q(q - I) L.J > - 2 ' _::k9+1 n - (k + I)q 2(Icq + I)

da cui segue che la serie

00 DO (1=+ 1)q E (-1)[.,,/9] = E L (_I)lnp/9) n.= I n i=O n =Icq+ I ft

è divergente.

2. Dall'ipotesi segue che esiste un punto so E Q tale che /(2;0) < min lim /(:&) per s-, ogni JI E 8Q. Sia ora ,I" una successione minimizzante. Poiché Q è limitato, da essa si può estran'e una sonosuccessione 2:. convergente a un punto 3:1 E Q U 8Q't e si Iratta di dimostrare che 2:1 E Q. Infatti., se fosse 2:1 e 8Q., si avrebbe

inf I(z) = lim !(z.)

mio lim 1(.) > leso), :zEQ .-'00 J:....zl

che è assurdo.

3. Si ha (vedi cap.. 7 t Esercizio 1(0)

./2 f . n ...a_ - (ti - I)U D sm Z\Q; - 'I Uftt 8.. O

dove B A = I se n è dispari, e B_ = 21'/2 se n è pari. Valutiamo il secondo membro con

la formula di Stirling (cap. 7'1 i 9; cfr. cap. 7

Esercizio 135). Risulta

_/I f . n..I_ (n - 1);:1 e-¥ ""I'CB -])A.-I B sm

J r== n, nftJ'le-fi 2 V wn .A..n O

e dunque, tenendo conto dei valori di Ai e BI:,

r/2 f (n_I) -12 rK:

sinR:E d:z:

-;-

V 7.;

V 1; . o

In conc1usione,

. _/2 f sin":/: eh = 2 f sin":J: d:I: :!

. o o

Veniamo ora al nostro integrale. Si ha per ogni le intero

,. (k+1)w' .. f sin"':/; cb: s f Isiuls" cb: s f sin":!: eh, o b o

dove si è posto n = [("1r)Q] ed m = [«k+ I

)ar] + I. Ne segue-

(t+I)w' f Isin:/;F' eh :::! J 2(:')fJt · k

L'inregrale dato sarà dunque convergente se e solo se: convergerà la serie 1: Ic- a / 2 t cioè se e 50JO se a > 2? mentre divergerà per a S 2.

4. Supponiamo per assurdo cbe sia m > o. In questo caso. esiste un So tale che per ogni z > :ED si ha /'(z) >

, e duoque, per il teorema del valor medio,

m f(!J;) - /(zo) > - (s - 2:0). 2

Ma aJlora lim I(z) = +00. contto l'ipotesi. In maniera analoga si esclude il caso s

\ M < o. Peraltro, M ed m possono essere arbibmi.; ad esempio, la funzione

. 3 f(z) =

2;

ha derivata prima 3 sin

/' (z) = 3z COS :t - ---;r-'

per la quale M = +00 e m = -00.

5. Se Q > 1'J1 l'integrale coDverge per il teorema del confronto. Supponiamo dunque O<a

1. Consideriamo l''intervallo [O. TI, e per k = 0, I, ... poniamo

At = {s E (kT,(k + 1)T) : f<z) > O}

e

BI: = {z E (kT,(1c + I)T) : f(s)

o}.

Poiché 1(,;) è periodica. risulta

f f(z)dz = f J($)dz = L A. Ao

e

f f(z)dz = f f(z)dz = -M. B. Do

Si ha allora

[(1:+ I)T}-aL $ J s-Qj(z)dz < (k7')- a L A.

e

-(kT)-aM < J z-a/(:t)dz $ -[(h 1)1']-0 M. BJc

Dato che

(...,)2' J z-a f(z)ds = J s-o f(z)dz + J :t-"/(:t)dz,

A,

si ha

(k+ 1)7'

-"(k+ W"L - A:-M) $ J s-.. f(z)dz :;; ,...a(k-"L - (h I}-a M) , JeT

. " Cloe

(i+I)T (L - M)(TIe)-or - L(

- (,,: I)'") < I

-aJ(s)dz 'S:. I(J'

< (L - M)(Tk)-a + M (

- (le: I)'")' Supponiamo ora che L - M :f O (cambiando eventualmente il segno di I(z), si può supporre L - M > O). La serie I k- a diverge, mentre al contrario la serie i: (I I) i=1 sa (k + 1)f2 è convergente. Dalla prima delle maggiorazioni precedenti segue allora che l'integrale dato è divergente. Se invece L - M = O, risulta

(1c+I)T J I ' 1) 2:-" /(:t) W: 'S:. M(Ie'" - (k + I)'" ;o CIA:. J:T

00 Sia ora f > o. Poiché la serie 1: ai è convergenle, esiste un no tale che E Clk < E. Se :1:1 e 3#2 sono maggiori di Tno.. risulta

=no

Z:! hT IJT %1 J z-Gf(!1;)dz < J

-Ot/(z)ds + I z-or/(s)d% + I z-a/(z)d% · 2:1 2:1 Ir.T .T

dove hT è il minimo multiplo di T maggiore di s).. e .T il massimo multiplo di T minore di

2. Ne segue

2 I z -or !(z) ds :S Ls ," + E+ L{8Tr G < 2Lz'jor + (. Zt

Si ha pertanto

:tI

2 J z-a !(z) W: - f z-G/{z) dz < 2Lz.'" +E T T

e quindi

E E max lim i z-af(2:}<b - mio lim I s-o/(z)d% < E; (-+oa E-+co T T

l'integrale dato è dunque convergente.

Ci. Si procede come nelle Letioni (cap. 5, I 9), mettendo Q = eli al posto di e, e sfruttando il fatto che q = ma è razionale: q = riti. Si inizia dunque integrando per parti:

G f a-" P(s}dz.. -'0-" P(s} 13 +, f a-" p'(z)d:I:, o o

dove P(s) è un polinomio di grado R. Posto F(z)

P(z) + q 1"(z) + ... :.. qft p(ft)(z), si ha quindi

CI F(a) = a" F(O) -

f a-"P(z)ds. O

Supponiamo ora che Q sia a1gebrico, cioè che risuJti

Co + Cla +C20l. 2 +... +CmOl m = o,

con C(), c I, C2, ..., Cm interi. Si ba allora, come nelle Lezioni t

BR

' f i sfJ(eoF(O) + clF(1) +... + emF(m» = - -

Cjoi" a-:r P(:r:) cb: , . q t=O o

dove si è moltiplicato per il denominatore di qft. Risulta

BR F(O) = (-l)"'P(ml)PBn-pf-] + A,

con A divisibile per p. . Inoltre gli altri prodotti SR F(ì) (i = l, 2, ..., m) sono divisibili per l'. Ne segue che il primo membro è un intero non nullo, e quindi

IsR(coF(O) + cIF(I) + .. . + cmF(m»1

1.

(.sm)(m+))p-I D-altra pane, per O < s S m si ha !8" P(

)! < (p _ 1)1 t e dunque

i m ."

. f (}Im '" . (.sm)(m+I)P-1 -

Ci CZI a- z P(z) dz S ...2 !-t Io'! (p 1)1 ' q.

r pO - O

che tende a zero qwmdo p -+ +00.

7. Dimostriamo innanzitutto che Ja successione CI,. è crescente. Si ha infatti

IIao+I = IIn +

- In(I +

) > 40&, dato che In(I + z) < 2:. D? altra parte risulta., per ft

2,

I .-2 E ! < 1 + f .!. eh = I + ID(a - 2), i= I k z I

e quindi fin < 1. Ne segue che la successione a. è convergente, e che il suo limite è compreso tta 42 = I -ln2 e I.

8. (a) Supponiamo per assurdo che esistano due punti Zt < 3:2 tali che !(ZI) # /(

2), ad esempio I(

[) < f(z1,). Siano À e p due numeri reali con 1(3;1) < A < p < f(

2); per XI

z

3:2 poniamo

:t - :E I Z2 - % g(3:) = II +). :1:2 - xl %2 - %1

(il grafico di g(:t) è la retta che congiunge i punti (%1, À) e (Z2,. p)). Si ha I(z i) < g{%I) e /(Z2) > g(:£2).. cosicché l'insieme

E = (2: E (Zl*2:2) : !<z) < ,(x)}

non è vuoto. Sia :1:0 = supE. Poiché !(2:) e g(z) sono funzioni conùnue, si ha :1:1 <: zo < :1:2- Si ha, come nella dimostrazione del teorema degli zeri di un polinomio (Lezioni, cap. I, Teorema 4.1), f(

o) = g(so); inoltre, per :E >

o risulta /(%)

g(z) > g(%o) = [(';0)" mentre in ogni intorno di %0 ci sono degli x < so tali che f(s) < g(z) < 9(zo)

/(%0). Ma allora Zo non può essere né un punto di massimo relativo né un punto di minimo relativo. (b) Se si toglie l'ipotesi di continuì

il risuitaCo non sussiste più. Ad esempio.. la funzione [z] ha un massimo relativo in ogni punto, senza essere costante.

(c) Se %0 è un punto di massimo relativo. esiste un intorno U di 2:0 tale che per ogni z e U si ha f(:£.) < /(%{)). Ne segue che

max lim 1(,;)

!(so)) 2:

ZO

e dunque f(%) è semicontinua superionnente in .ZO

Il viceversa non è vero. Infatti la funzione 1($) definita in (-l, l) e che vale O nell' origine e k- i se IsI appartiene ali 'intervallo (2- k - I , 2-A:), è semicontinua superionnenle e ba in ogni punto un massimo o un minimo relativo? e precisamente un massimo J se z

O e un minimo sttetto in O.

9. La funzione I(

) è crescente, e dunque ha limite Q (finito o infinito) per

--+ +CX). Se o: è un numero reale diverso da 0, da un certo PURto in poi risulterà I' (s) > (0/2)2, il che non è possibile in quanto in tal caso 1(%) avrebbe limite +00. Non è possibile neanche a

+00, poiché in questo caso si avrebbe !(s) > O da un certo punto in poi. La funzione g(,;) = I/I<z) è anch'essa positiva, e verifica g 'IZ) = - "(%) < -I. \ f2(z) - , pettanto essa dovrebbe avere limite -00, una contraddizione. . n limite deve dunque essere O.. e, siccome /(2:) è crescente, risulta I(z) S o.

18. La funzione 1'(2:) è crescente, e 1(%) è convessa. Esaminiamo vari casi. (a) ,'(2:)

O per ogni s. . La funzione f(z) è decrescente. e ha limite o. Come sopra, non può essere a :/ O. perché altrimenti si avrebbe da un ceno punto in poi /"(%) > (01/2)2, e ,'(s) tenderebbe all' infin ito.

R;spost

agli esercizi del tapitolo seRimo

(b) Esiste un %0 laIe che l' (zo) > o. Essendo ['(7;)

f'(zo) per % > $O

risulta lim 1(%) = +00. Moltiplicando per J'(

) s-+oo ambo i membri della disuguaglianza I"

/2.. si ottiene

k <f2)'

(f3)';

dunque la funzione 3/ 12 - 2[3 è crescente, e in particolare assume valori magglon di À = 3/'(%0)2 - 2/(ZO)3. Ma allora

3/,(%)2 - /(';1;)3

.A + [('1:)3 > O

per % abbastanza grande.. in quanto 1(,;) tende ali 'infinito. Ciò conduce a un assurdo. Infaui si ha l'(

)

!p I(z)3/ 2 , e dunque, posto g(z) = :. f(

)-I/2, risulta da una parte g(z) > O e dall'altra

('J:) < - 2./J ' e quindi g(x) -+ -00. n caso (b) è dunque impossibile. Si deve allora verificare il caso (a), cosicché si può concludere che f(z) -. O e, essendo decrescente, /<3:) > o.