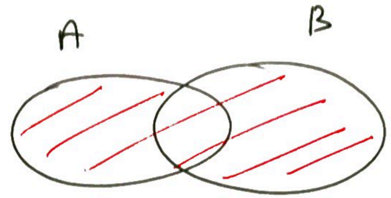
Operazioni fra insiemi

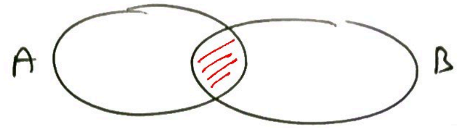
Dati $A, B \subseteq X$ insiemi

$A \cup B = \{ x \in X \mid x \in A$ oppure $x \in B \}$ $\quad \vee =$ "o"

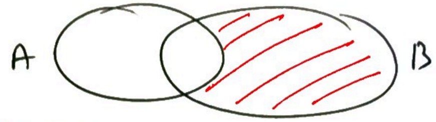
o non esclusivo



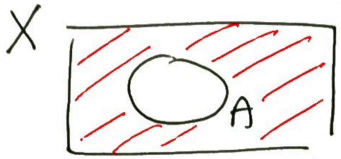
$A \cap B = \{ x \in X \mid x \in A$ e $x \in B \}$ $\quad \wedge =$ "e"



$B \setminus A = \{ x \in X \mid x \in B$ e $x \notin A \} = B \cap A^c$



$A^c = \{ x \in X \mid x \notin A \}$



Oss $\quad A \cup B = B \cup A$ (commut)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\rightarrow$ ci permette di scrivere $A \cup B \cup C$. (associat)

Se $A \cap B = \emptyset$ diremo che A e B sono disgiunti.

Esercizi (distrib.) Siano $A, B, E \subseteq X$ insiemi

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B)$$

$$E \cup (A \cap B) = (E \cup A) \cap (E \cup B)$$

analogo " $e(a+b) = ea + eb$ "

Leggi di De Morgan

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$$

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$

ho operazioni diverse

2. NUMERI REALI

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

somma prodotto

inverso di a per la somma
è il numero b t.c. $a+b=0$ $\quad b=-a$

→ elemento neutro addiz $a+0=a$

→ elemento neutro prodotto $a \cdot 1 = a$

inverso di a per il prodotto
è b t.c $a \cdot b = 1$ $\quad b = \frac{1}{a}$

Proprietà di $\mathbb{Q}$.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un CAMPO

le due operazioni $+, \cdot$ sono "interne"
"invertibili"

e sono tra loro compatibili

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

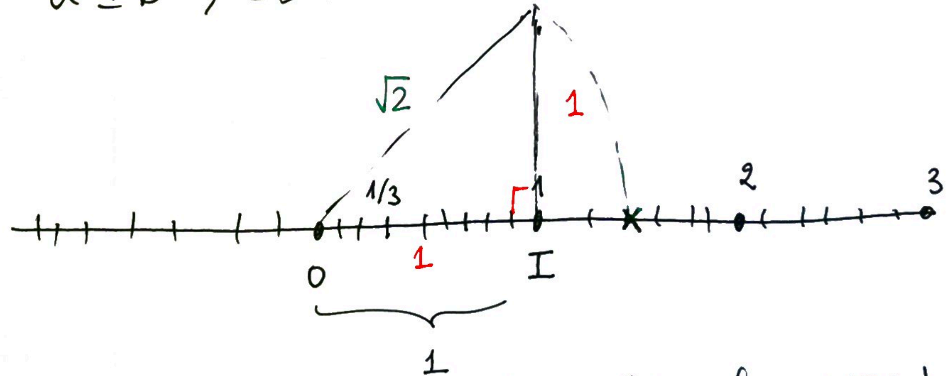
$\mathbb{Q}$ ha anche un ordinamento $a \leq b$

$\boxed{(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq) \text{ è CAMPO ORDINATO}}$

Anche ~~l'operazione~~ la relazione di ordinamento è compatibile nel senso seguente

$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}$

$a \leq b,\ c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}$.



Esistono dei punti sulla retta che NON corrispondono a numeri razionali

<u>Def</u> Dato $a>0$, $a \in \mathbb{Q}$, indichiamo con $\sqrt{a}$ il numero $b>0$ tale che $b^2=a$

$\sqrt{a} > 0$, l'altra radice $-\sqrt{a}$

<u>Teorema</u> $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$

Non esiste alcun $q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

dim

Dimostrazione per assurdo.

Supponiamo che esista $\boxed{q = \frac{m}{n}}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ — $\frac{m}{n}$ ridotta ai minimi termini

tale che $q^2 = 2$. (posso prendere $m \in \mathbb{N}$)

Avremmo $\frac{m^2}{n^2} = 2$ ovvero $\boxed{m^2 = 2n^2}$

In particolare m^2 è pari $\Rightarrow$ $\boxed{m \text{ pari}}$

$m = 2K$ per un certo $K \in \mathbb{N}$ $\quad 4K^2 = 2n^2$

$\boxed{2K^2 = n^2}$

Allora $\boxed{n \text{ è pari}}$ per lo stesso argomento applicato a K ed n

Dunque $\frac{m}{n}$ non è ridotta ai minimi termini.

Contraddizione. Dunque tale q non esiste.

$\sqrt{2}$ è un numero IRRAZIONALE

↳ no ratio

non esprimibile come un rapporto.

Esercizio Provare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = 1,4142135623 7\ldots$

algoritmo di bisezione

$1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4$

$1,5^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$.

$1,25^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < 2$

$\vdots$

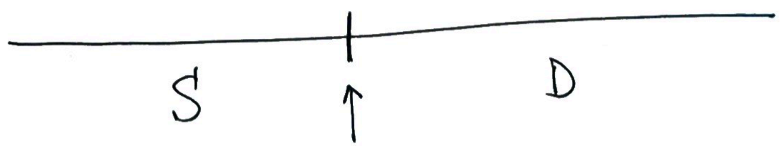
Def Siano S e D due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Allora diciamo (S, D) sezione di $\mathbb{R}$ se

(i) $S \cap D = \emptyset$

(ii) $S \cup D = \mathbb{R}$

(iii) $\forall s \in S, \forall d \in D$ vale $s \leq d$ $(s < d)$

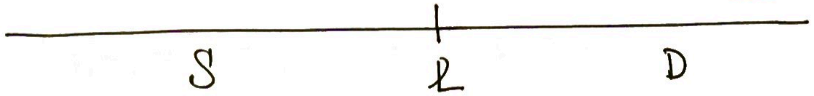


Principio di completezza di $\mathbb{R}$

Per ogni sezione (S, D) di $\mathbb{R}$ esiste un unico elemento separatore $\ell \in \mathbb{R}$, ovvero

$$\forall s \in S, \ \forall d \in D \qquad \underline{s \leq \ell \leq d}$$

al più uno dei due è =



(Ciò giustifica l'espressione "RETTA REALE" e il parlare di "PUNTI" per indicare numeri reali)

<u>Oss</u> | Questo principio per $\mathbb{Q}$ <u>non è vero</u>

$$D = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, \ x^2 \geq 2 \} = \{ y \in \mathbb{Q} \mid y > 0, \ y^2 \geq 2 \}$$

$$S = D^c = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ oppure } x > 0, \ x^2 < 2 \}.$$

Abbiamo ~~[illegible]~~

$$S \cap D = \emptyset$$

$$S \cup D = \mathbb{Q}$$

$$s \leq d \quad \forall s \in S, \ d \in D.$$

MA non esiste $\underline{\ell \in \mathbb{Q}}$ separatore

Se esistesse tale $\ell \in \mathbb{Q}$ necessariamente $\ell^2 = 2$.

e questo non è possibile.

Infatti si avrebbe una delle seguenti.

$$\underline{\ell^2 < 2}, \quad \ell^2 = 2, \quad \underline{\ell^2 > 2}$$

devo escluderle.

Supponiamo $\ell^2 > 2$.

Scriviamo $\ell^2 = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

Posso trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left(\ell - \frac{1}{N}\right)^2 > 2$$

infatti

$$\left(\ell - \frac{1}{N}\right)^2 = \ell^2 + \frac{1}{N^2} - \frac{2\ell}{N} \geq \ell^2 - \frac{2\ell}{N}$$

$$= 2 + \underbrace{\varepsilon - \frac{2\ell}{N}} > 2$$

scelgo N in modo che $\varepsilon > \frac{2\ell}{N}$

ovvero $N > \frac{2\ell}{\varepsilon}$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ CAMPO ORDINATO COMPLETO.

SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$

I primi sottoinsiemi da considerare sono gli intervalli

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ int. chiuso.

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ int. aperto.

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ int semi aperto

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ int. illimitati

$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Qui $+\infty$ e $-\infty$ sono simboli, non numeri reali.

Es $E = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

$\max E = 1$

$\min E = 0$

Def Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che

·) $M \in \mathbb{R}$ è MAGGIORANTE per E se
$x \leq M \quad \forall x \in E$

·) $M \in \mathbb{R}$ è il MASSIMO di E se
(i) M è maggiorante per E
(ii) $M \in E$.

·) $m \in \mathbb{R}$ è MINORANTE per E se
$m \leq x \quad \forall x \in E$

·) $m \in \mathbb{R}$ è il MINIMO di E se
(i) m è minorante per E
(ii) $m \in E$

Scriveremo $m = \min E$, $M = \max E$

Proposiz Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. $\max E$, se esiste, è unico

dim Siano M_1, M_2 due massimi per E.

$\boxed{x \leq M_1 \quad \forall x \in E} \xrightarrow[x=M_2]{} M_2 \leq M_1$

$\boxed{x \leq M_2 \quad \forall x \in E} \xrightarrow[x=M_1]{} M_1 \leq M_2$

$\Rightarrow M_1 = M_2$

Es $E = [0,1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$.

il massimo NON ESISTE!

Per assurdo sia $M \in E$ massimo

Allora considero $M' = \frac{1+M}{2}$

Si ha $M' \in E$ infatti

$$0 \le M < 1$$

$$1 \le M+1 < 2$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1+M}{2} < 1$$

M'

E vale anche $M' > M$.

Se per assurdo $M' \le M$

$$\frac{1+M}{2} \le M$$

$$1 + M \le 2M$$

$$1 \le M.$$

Def (estremo superiore)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ nonvuoto. Diciamo λ è l'estremo superiore di E, e scriviamo $\lambda = \sup E$, se valgono

(i) $x \le \lambda \quad \forall x \in E$ (λ è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : \ x > \lambda - \varepsilon$

(λ è il più piccolo dei maggioranti)

Teorema Ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore

esiste almeno un maggiorante.