

In questo testo $\log x$ indica il logaritmo in base e

(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:¹

1. La funzione $f(x) = \log(x^2)$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intervallo $[-1, 1]$.
2. Esiste un valore $M > 1$ tale che $\int_0^M \frac{x}{x+1} dx > 2021$
3. L'equazione differenziale $u'(t) = u(t)^2 + 4$ non ammette soluzioni costanti

(B) Esercizi.

1. Studiare la funzione seguente sul suo dominio naturale D , tracciandone il grafico

$$f(x) = xe^{-|1-x^2|}$$

Si dovrà rispondere in particolare alle due seguenti domande.

- a. La funzione f è continua in ogni punto di D ? derivabile in ogni punto di D ?
- b. Determinare l'immagine di f

2. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

Suggerimento: si può usare opportunamente uno sviluppo di Taylor di $\sin x$.

3. Siano $a, b > 0$ due numeri reali positivi che soddisfano la relazione $a + b = 5$.
 - a. Calcolare la somma $S_{a,b}$ della serie

$$S_{a,b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{5^n}$$

- b. Esistono valori di a, b per cui la somma $S_{a,b}$ è minima (rispettivamente massima) al variare dei parametri a, b come nelle ipotesi? In caso affermativo, determinarli.

¹giustificare tramite un argomento o dimostrazione, o negare tramite un controesempio