Indice

Insiemi e Sottoinsiemi

Insieme: collezione di elementi o oggetti.
Insiemi principali:

- **N** naturali
- **Z** interi
- **Q** razionali (finiti oppure PERIODICI)
- **R** = **Q** U **I** irrazionali (non finiti OPPURE non periodici)

Principio dei cassetti: Se *n+k* oggetti sono messi in *n* cassetti, allora almeno un cassetto deve contenere più di un oggetto.

Sottoinsieme: insieme contenuto in un altro

- Teorema: Un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi

Cardinalità di A=cardA: Numero di elementi di A
P(A): Insieme dei sottoinsiemi di A

Maggiorante

- Sia **E** ⊆ ℝ**, allora diciamo**
- **M**∈ℝ è maggiorante di **E** se **x≤M** ∀**x**∈**E**

Massimo

M∈ℝ è il **massimo** di **E** se:

- **M** è maggiorante di **E**
- **M**∈**E**

Minorante

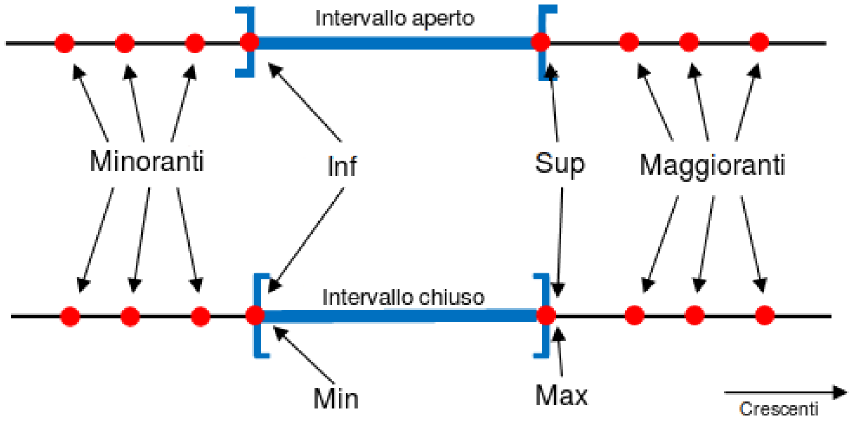
- Sia **E** ⊆ ℝ**, allora diciamo**
- **M**∈ℝ è minorante di **E** se **x≥m** ∀**x**∈**E**

Minimo

M∈ℝ è il **minimo** di **E** se:

- **m** è minorante di **E**
- **m**∈**E**

Estremo superiore e Inferiore



Sia $E \subseteq R$ non vuoto, λ è estremo superiore di E ($\lambda \in R$) se valgono:

- $x \leq \lambda \ \forall x \in E$ (dunque λ maggiorante)
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E: x > \lambda - \varepsilon$ (ovvero λ il più piccolo tra i maggioranti)

Teorema estremo sup

Un insieme E non vuoto e limitato superiormente ha sempre estremo superiore.

Teorema estremo inf

Un insieme E non vuoto e limitato inferiormente ha sempre estremo inferiore.

Ricorda:

- Se $E \subseteq R$ non è limitato superiormente allora scrivo **supE=+∞**
- Se $E \subseteq R$ non è limitato superiormente allora scrivo **infE=-∞**

Valore assoluto

Dato $x \in R$, si definisce valore assoluto di x:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Teorema Disuguaglianza triangolare

Per ogni a,b $\in$ R si ha $|a + b| \leq |a| + |b|$

Distanza tra numeri reali

Dati x,y ∈ R definisco la distanza tra x e y $d(x, y) = |x - y|$
Proprietà della distanza:
- $d(x, y) \geq 0$ e se $d(x, y) = 0$ allora $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$per il teorema della disuguaglianza triangolare

Intorni

Sia x_o un punto di R, e sia r un numero positivo. Si chiama intorno di centro x_o e raggio r l'insieme $I(xo, r)$ dei punti che distano da x_o meno di r:

$I(xo, r) = \{x \in R : |x - xo| < r\} = (xo - r, xo + r)$

Punti di accumulazione

Dato un insieme A⊆R, il punto di accumulazione è un punto xo⊆R (che non sta per forza in A) se in ogni intorno di xo cadono infiniti punti di A. Questo vuol dire che, se xo è un punto di accumulazione per A, qualunque sia il raggio dell'intorno (xo,ε), ci sarà sempre un punto contenuto nell'intorno che sarà diverso da xo.
- xo∈R è di accumulazione per A⊆R se$\forall \varepsilon > 0\ E \cap I(xo, \varepsilon)$ contiene infiniti punti
- xo∈R non è di accumulazione per A⊆R se$\forall \varepsilon > 0\ E \cap I(xo, \varepsilon) \setminus \{xo\} \neq \emptyset$

Per

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Un insieme E⊆R limitato e infinito ha almeno un punto di accumulazione.
- Se l'insieme non è infinito potremmo non avere punti di accumulazione
- Se un insieme è infinito ma non limitato, potrei non avere punti di accumulazione

Principio di induzione

Serve a verificare se la proprietà di una funzione P(n) è valida per qualsiasi n∈N
1. Verifico con P(0) o con P(1) se è vera (dipende dalla funzione)
2. Suppongo che P(n)⟶P(n+1)
3. Verifico se l'implicazione è vera

Se entrambe le condizioni sono vere allora P(n) è vera per ogni n∈N

Funzioni

Definizione di funzione

Siano A, B insiemi
- f : A ⟶ B (Funzione da A a B, con A detto **dominio** e B detto **codominio**)

Una funzione è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed un solo elemento di B.

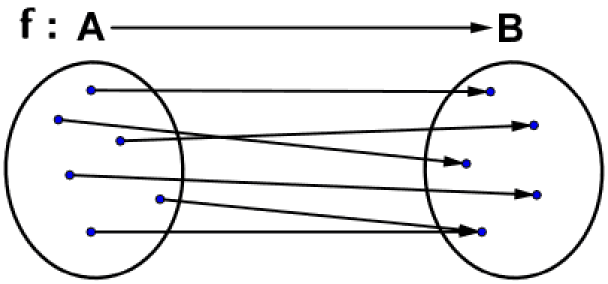
Immagine: si dice immagine di f l'insieme dei punti y∈B che provengono da qualche punto di A

$$f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A: \ y = f(x)\} \subseteq \ B \ = \{f(x) \mid x \in A$$

Controimmagine: Sia f : A ⟶ B una funzione e sia D ⊆B. Si chiama immagine inversa di D l'insieme dei punti di x∈A tali che f(x)∈D:

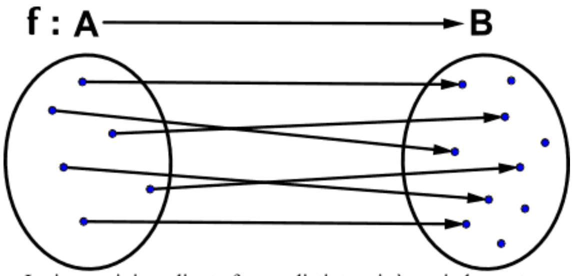
$$f^{-1}(D) = \{x \in A: \ f(x) \in D\}$$

Se f(A)=B la funzione f si dice **suriettiva**



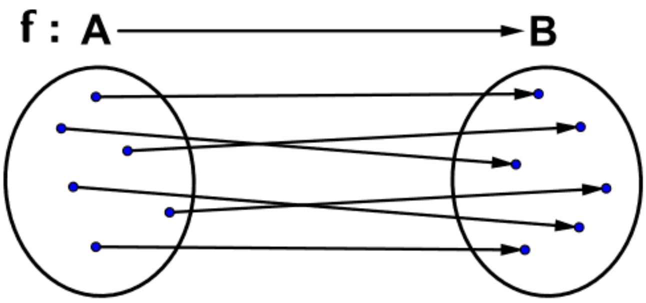
Ogni punto dell'insieme B è
raggiunto da almeno una freccia.
Però è possibile che più di due elementi di A puntino verso lo stesso elemento di B.

Una funzione f:A⟶B è **iniettiva** se $\forall x1, x2 \in A$, $x1 \neq x2 \Rightarrow f(x1) \neq f(x2)$. Ovvero f manda punti diversi in punti diversi



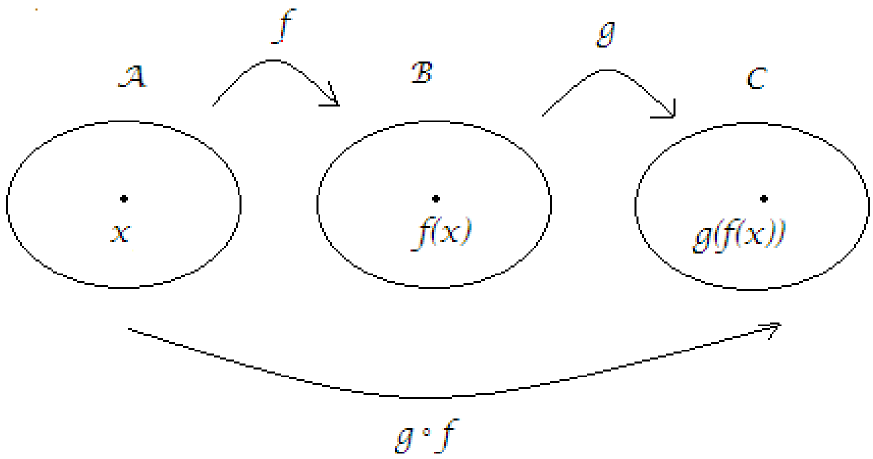
Le immagini mediante f sono distinte, cioè ogni elemento
di A punta ad un unico elemento di B.
Però è possibile che non tutti gli elementi di B vengano raggiunti.

Una funzione si dice **invertibile o biunivoca** se f è sia iniettiva che suriettiva



f è sia iniettiva (ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B)
che suriettiva (ogni elemento di B è raggiunto da una freccia)

Composizione di funzioni



Siano *f:A→B* e *g : B →C* due funzioni. Si chiama funzione composta di *g* e *f*, e si indica con *g σ f*, la funzione che ha come dominio A e come codominio C, e che ad ogni *x* ∈ *A* associa il punto *g(f(x))*:

g σ f(x) = g(f(x))

Funzioni elementari

Funzioni lineari

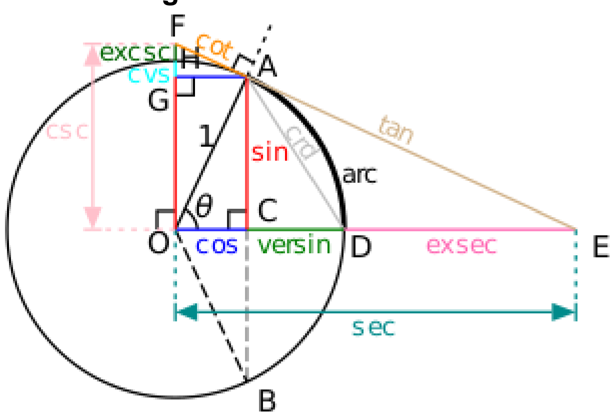
$a, b \in R$ $\quad$ $f: R \to R$ $\quad$ $f(x) = ax + b$

Funzioni potenza

Con n positivo:

- $f(x) = x^n$ per n pari è sempre **<u>non</u> iniettiva** e pari $f(x) = f(-x)\ \forall x \in R$
  “Il grafico è simmetrico rispetto all’asse y”
- $f(x) = x^n$ per n dispari è iniettiva e sempre dispari $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in R$
  “Il grafico è simmetrico rispetto all’origine”

Funzioni Trigonometriche



RELAZIONI FONDAMENTALI

$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$ ó $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \longrightarrow \dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \longrightarrow \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$

$\dfrac{\text{ctg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$

$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$

ARCHI ASSOCIATI

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{ctg}\,\alpha$

$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{tg}\,\alpha$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\,\text{sen}\,\alpha$

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\,\text{ctg}\,\alpha$

$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\,\text{tg}\,\alpha$

Funzioni esponenziali e logaritmi

Sia a>0

$$f: R \rightarrow R \qquad f(x) = a^x$$

con n<m:

$$a^n < a^m \text{ sse } a > 1$$
$$a^n > a^m \text{ se } 0 < a < 1$$

Sia a>0 , sia y>0, $f: [0, +\infty[\rightarrow R$:

$$log_a y = x \text{ se } a^x = y$$

"$log_a y$è l'esponente da dare ad a per avere y"

$a^{log_a y} = y$ per $y > 0$ $\qquad log_a 1 = 0$ $\qquad log_a a^x = x$ per $x \in R$

Funzione pari: $\forall x \in R\ f(x) = f(-x)$
Funzione dispari: $\forall x \in R\ f(-x) = -f(x)$
Funzione monotona crescente: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
Funzione monotona decrescente: $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
Funzione strettamente monotona crescente/decrescente: se le disuguaglianze valgono col segno > e < al posto di ≥ e ≤

Insiemi di definizione

Il dominio di una funzione, o insieme di definizione, è quel sottoinsieme di R in cui $y = f(x)$è definita.

- Rapporti → Denominatore diverso da 0
- Logaritmi → Argomento > 0, Base >0 e ≠ 1
- Radice con indice pari → Radicando ≥ 0
- Arcoseno /Arcocoseno → Argomento compreso tra -1 e 1
- Esponenziale con base variabile $f(x)^{g(x)}$→ Base maggiore di 0

Restrizioni e funzioni inverse

Sia f: A→ B, e sia D⊆A. Chiameremo restrizione di f a D ($f|_D$) la funzione f considerata solo nell'insieme D; più precisamente $f|_D$è la funzione definita in D , che coincide con f in questo insieme:

$$f|_D : D \to B \qquad\qquad f|_D(x) = f(x)\ \forall x \in D$$

Si possono quindi rendere **biunivoche** e quindi **invertibili** funzioni iniettive ma non suriettive considerando una restrizione del loro dominio.

Per disegnare il grafico di una funzione inversa basta prendere il grafico della funzione e scambiare la posizione di x e y.

Estremo superiore e inferiore di funzioni

data f: A⊆R→R

1. f è **limitata superiormente** se f(A)⊆R è limitata superiormente, ovvero se
$$\exists M\in R:\ f(x)\le M\ \forall x\in A$$
2. f è **limitata inferiormente** se f(A)⊆R è limitata inferiormente, ovvero se
$$\exists m\in R:\ m\le f(x)\ \forall x\in A$$
3. f è **limitata** se f soddisfa 1 e 2 cioè $\exists m\le M:\ m\le f(x)\le M\ \forall x\in A$

Si possono quindi definire i massimi e minimi di f:

M= Max f se

- $M\ \ge\ f(x)\ \forall x\in A$
- $\exists xo\in R\colon\ f(xo)\ =\ M$

cioè $\exists xo\in A:\ f(xo)\ \ \ge\ \ f(x)\ \forall x\in A$

m= min f se

- $f(x)\ \ge\ m\ \forall x\in A$
- $\exists xo\in R\colon\ f(xo)\ =\ m$

cioè $\exists xo\in A:\ f(xo)\ \ \le\ \ f(x)\ \forall x\in A$

"Esiste un punto nel dominio per il quale la sua funzione è più grande di tutte le altre di tutte le altre"

Quindi possiamo definire gli estremi superiori ed inferiori di f:

sup f se

- $sup\, f\ \ge\ f(x)\ \forall x\in A$
- $\forall \varepsilon\ >\ 0\ \exists xo\in A\colon\ f(xo)\ >\ supf\ \ -\ \varepsilon$

inf f se

- $sup\, f\ \ge\ f(x)\ \forall x\in A$
- $\forall \varepsilon\ >\ 0\ \exists xo\in A\colon\ f(xo)\ <\ inf\, f\ \ +\ \varepsilon$

Se una funzione non è limitata superiormente → sup f =+∞
Se una funzione non è limitata inferiormente → inf f =-∞

Limiti di funzioni (limiti finiti)

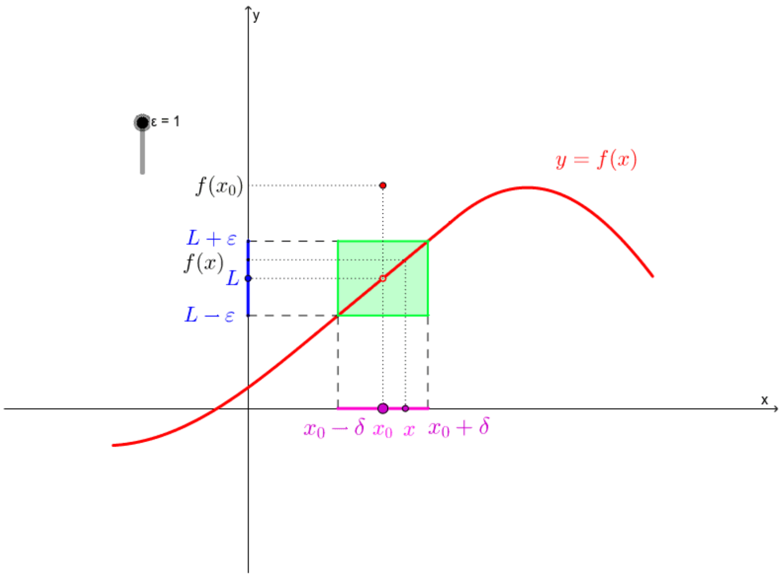
Definizione di limite: sia f: D⊆R→R e sia xo∊R [punto di accumulazione] di D, allora diciamo che $\lim_{x\to xo} f(x)\ =\ L$ con L∊R

Se vale:

$$\forall \varepsilon\ >\ 0\ \ \exists \delta\ >\ 0:\ \forall x\ \in\ D\ con\ x\ \in\ I(xo,\delta)\backslash\{xo\} o\ ugualmente\ xo\ -\ \delta\ <\ x\ <\ xo\ +\ \delta$$

Se questa condizione è valida, allora $|f(x)\ -\ L|\ <\ \varepsilon$ oppure $f(x)\ \in\ I(L,\varepsilon)$

"Per ogni ε>0 esiste un δ>0 per i quali per ogni x (appartenente al dominio), interna all'intorno di xo+δ, xo-δ, esista almeno una parte della funzione interna all'intorno L+ε, L-ε"



Teorema unicità del limite

Sia $f: D \subseteq R \rightarrow R$ e xo punto di accumulazione per D
Allora se $\lim_{x \to xo} f(x) = L$ e $\lim_{x \to xo} f(x) = L'$ Allora $L = L'$

Teorema della permanenza del segno

Se la funzione f(x) ha limite L positivo $\lim_{x \to xo} f(x) = L > 0$
Allora esiste un $\delta > 0$che per ogni $0 < |x - xo| < \delta$ si ha
$\lim_{x \to xo} f(x) = L > 0$allora $\exists \delta > 0 : \forall x\ con\ 0 < |x - xo| < \delta\ f(x) > \frac{L}{2}$ ed in particolare $f(x) > 0$

Teoremi fondamentali sui limiti

- $\lim_{x \to xo} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to xo} (f(x)g(x)) = LM$
- Se $M \neq 0$ $\lim_{x \to xo} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Teorema dei due carabinieri

Siano f,g,h tre funzioni e xo punto di accumulazione per i rispettivi domini$Df,\ Dg,\ Dh.$
Supponiamo che $f(x) < h(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in I(xo, \delta) - \{0\}$
(per ogni x in un intorno bucato di xo)
Allora se $\lim_{x \to xo} f(x) = L = \lim_{x \to xo} g(x) \Rightarrow \lim_{x \to xo} h(x) = L$

Limiti infiniti

Definizione: sia $f: D \subseteq R \rightarrow R$ e sia xo punto di accumulazione per D
Diremo che $\lim\limits_{x \to xo} f(x) = +\infty$ se:

$$\forall M \in R\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D\ \ 0 < |x - xo| < \delta\ si\ ha\ \ f(x) > M$$

Analogamente $\lim\limits_{x \to xo} f(x) = -\infty$ se:

$$\forall k \in R\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D\ \ 0 < |x - xo| < \delta\ si\ ha\ f(x) < -k$$

Forme indeterminate

- **Somma:** $+\infty - \infty$
- **Prodotto:** $0 \cdot (+\infty)\ \ 0 \cdot (-\infty)$
- **Quoziente:** $\frac{0}{0}\ \frac{+\infty}{+\infty}\ \frac{+\infty}{-\infty}\ \frac{-\infty}{+\infty}\ \frac{-\infty}{-\infty}$
- **Potenze:** $0^0\ 1^{+\infty}\ 1^{-\infty}\ (\infty)^0$

Limiti all'infinito

Sia f(x) una funzione definita in un insieme D non limitato superiormente. Diremo che:

Definizione

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu\ tale\ che\ \forall x \in D\ con\ x > \nu \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists u\ \ tale\ che\ \forall x \in D\ con\ x < u \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Teorema limiti per sostituzione

Siano $f: D_f \rightarrow R,\ g: D_g \rightarrow R$ tale che $f(D_f) \subseteq D_g$. Sia xo punto di accumulazione per D_f e yo punto di accumulazione per D_g tale che:

$\lim\limits_{x \to xo} f(x) = y0$ e $\lim\limits_{y \to yo} g(y) = L$

Allora $\lim\limits_{x \to xo} g(f(x)) = L$

Limiti Notevoli

esponenziali e logaritmici	goniometrici
1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$	1) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$
2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$	2) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}$	3) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1$
4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=e^{na}$	4) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
5) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{1}{e}$	5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
6) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^{a}$	6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2}$
7) $\lim_{x\to 0}\lg_{a}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\lg_{e}a}$	7) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\,x}{x}=1$
8) $\lim_{x\to 0}\frac{\lg_{a}(1+x)}{x}=\lg_{a}e=\frac{1}{\ln a}$	8) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
9) $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$	9) $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1$
10) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a$	10) $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
11) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{ax}=1$	11) $\lim_{x\to 0}\frac{senh\,x}{x}=1$
12) $\lim_{x\to 0}x^{r}\lg_{a}x=0\quad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$	12) $\lim_{x\to 0}\frac{settsenh\,x}{x}=1$
13) $\lim_{x\to 0}\frac{\lg_{a}x}{x^{r}}=0\quad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$	13) $\lim_{x\to 0}\frac{tgh\,x}{x}=1$
14) $\lim_{x\to+\infty}x^{r}a^{x}=\lim_{x\to+\infty}a^{x}\quad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$	14) $\lim_{x\to 0}\frac{settgh\,x}{x}=1$
15) $\lim_{x\to-\infty}\lvert x\rvert^{r}a^{x}=\lim_{x\to-\infty}a^{x}\quad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$	15) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^{3}}=\frac{1}{6}$
16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{r}}=\lim_{x\to+\infty}a^{x}\quad\forall r\in R^{+}$	16) $\lim_{x\to 0}\frac{x-arctg\,x}{x^{3}}=\frac{1}{3}$
17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{r}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}a^{x}\quad\forall r\in R^{+}$	
18) $\lim_{x\to-\infty}e^{x}x^{r}=0\quad\forall r\in R^{+}$	

Limite destro e sinistro

Diremo che il limite della funzione f(x): D⊂R che ha limite L per x→ xo è:

- $\lim_{x\to xo^{+}} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \forall x \in D\ \ 0 < x - xo < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

  (limite destro)
- $\lim_{x\to xo^{-}} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \forall x \in D\ \ -\delta < x - xo < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

  (limite sinistro)

Nota bene:

$\lim_{x\to xo^{+}} f(x) = L$ esiste solo se il limite dx coincide con il limite sx, altrimenti **non esiste**

Limiti di funzioni monotone

Sia $f: D \to R$ diciamo che f:

- **monotona crescente** se $x1 \leq x2 \Rightarrow f(x1) \leq f(x2)$
- **monotona decrescente** se $x1 \leq x2 \Rightarrow f(x1) \geq f(x2)$

Teorema monotonia limiti

Sia $f:]a, b[\to R$ monotona crescente e sia $xo \in]a, b]$

Allora $\lim_{x \to xo^-} f(x) = sup\, f(x)$

Analogamente per le funzioni decrescenti $\lim_{x \to xo^-} f(x) = inf\, f(x)$

Stessa cosa vale per i limiti destri delle funzioni crescenti

$$\lim_{x \to xo^+} f(x) = inf\, f(x)$$

e per le funzioni decrescenti

$$\lim_{x \to xo^+} f(x) = sup\, f(x)$$

Successioni

Definizione: una successione è una funzione definita in N

$$f: N \to R \;\; f(n) = an, \; (an)_{n \in N}, \; (an)_{n}$$

L'unico limite che ha senso considerare per una successione è quello per $n \to +\infty$

Diremo che

$$\lim_{n \to +\infty} an = L \quad \text{se } \forall \varepsilon > 0 \; \exists v \in N: \forall n \geq v \; si\, ha \; |an - L| < \varepsilon$$

Può non esistere

Analogamente definiamo $\lim_{n \to +\infty} an = +\infty \quad \lim_{n \to -\infty} an = -\infty$

Successione

- **convergente se** $\lim_{n \to +\infty} an = L \in R$
- **divergente se** $\lim_{n \to +\infty} an = \pm \infty$
- **indeterminata se non ha limite**

Spesso (ma non sempre), la successione an è la restrizione ad N di una funzione definita su R. In questo caso se esiste $\lim_{x \to +\infty}$ della funzione allora anche il limite della successione an esiste e coincide

Ricorda: $\lim_{n \to +\infty} (an + bn) = \lim_{n \to +\infty} an + \lim_{n \to +\infty} bn$

Corollario: ogni successione monotona crescente e limitata superiormente ha limite (sia finito che +∞)

Successioni per ricorrenza

Sono successioni il quale limite si trova partendo dalla loro forma ricorsiva, definita dal prima termine a1 (o partendo da 0) e la legge con la quale un termine determina il successivo

$$a_1 = k \qquad\qquad a_{n+1}$$

Per risolverli bisogna verificare l'esistenza del limite, il quale esiste se la successione è monotona decrescente e limitata inferiormente

Ricorda:

Monotona decrescente → $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in N$

Verifico per induzione $a > 0 \quad \forall n \in N$

Serie

Data una successione di n∈R a_n, si chiama serie dei termini an la somma degli infiniti termini della successione.

Interpretiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$$

Come il **limite delle somme parziali:**

$$Sn= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n}$$

Dunque possiamo definire la serie come una vera e propria espressione del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, dove \, (a_n)_{n\ge 0} \text{ è } una \, successione$$

Sia per fissato Sn:= $\sum_{k=0}^{n} a_k$ **(somma parziale n-esima)**

- Diciamo che la serie è **convergente** se esiste
  - $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} sn = s$
- Diciamo che la serie è **divergente** se
  - $\lim_{n\to+\infty} sn = +\infty \; (oppure \; 0 \; o \; -\infty)$
- Diciamo che la serie è **indeterminata** se il limite non esiste

Serie geometrica

Sia c∈R ed $a_n = c^n$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \rightarrow Sn = 1 + c + c^2 + ... + c^n = \sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c} c \ne 1$$

Per n→ ∞, il comportamento dipenderà dal numero c, e quindi dovremmo studiare il limite con i diversi casi di c per comprendere il carattere della serie. Avremo quindi che la serie:

- |c|<1 convergente
- c≥1 divergente
- c≤-1 indeterminata

Serie armonica

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ Diverge

Serie armonica generalizzata

$\frac{1}{n^{\alpha}}$ $\alpha > 1$converge oppure $\alpha \leq 1$diverge

Serie telescopica

Se i termini di una serie sono del tipo $a_k = b_k - b_{k-1}$si ha

$sn = \sum_{n=1} (a_n - a_{n+k})$ oppure $\sum_{n=m}^{\infty} (a_{n+k} - a_n)$

- se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ esiste, allora converge

Serie a termini positivi

Studiamo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, con \, a_k \geq 0 \;\; \forall k \geq 0$

In questo caso Sn= $\sum_{k=0}^{n} a_k$ è una **successione monotona crescente**

Abbiamo solo due possibilità:

1. $(Sn)_n$ non è limitata superiormente: $\Rightarrow s = \lim_{n \to +\infty} Sn = +\infty$
2. $(Sn)_n$ è limitata superiormente: ⇒la serie è convergente

Criteri di convergenza

Teorema criterio del confronto

Bisogna innanzitutto verificare che la serie sia a termini positivi.

Siano $\sum a_k$e $\sum b_k$ due serie, e supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n \;\; \forall n \in N$ allora:

1. Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \, converge \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, converge \, e \, si \, ha \, \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$
2. Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$

idea: se sn= $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e tn= $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

- $\forall n = 0 \;\; 0 \leq sn \leq tn$ e monotone
- Allora:
  - se (tn) Converge allora (sn) Converge
  - se (sn) Diverge allora (tn) Diverge

Teorema criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$e $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi e sia $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$allora la serie:

- Se $L \in \,]0, +\infty[$ allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere
- Se $L = 0$ e se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ converge allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ converge
- Se $L = +\infty$ e se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ diverge allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ diverge

Teorema criterio della radice

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ serie a termini positivi, supponiamo $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

- Se L<1, $a_n \to 0$ (converge) e $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$<+∞
- Se L>1, $a_n \to +\infty$ (diverge) e $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$=+∞
- Se L=1 non posso concludere e bisogna cambiare criterio

Teorema criterio del rapporto

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ serie a termini positivi, supponiamo $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

- Se L<1, $a_n \to 0$ (converge) e $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$<+∞
- Se L>1, $a_n \to +\infty$ (diverge) e $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$=+∞
- Se L=1 non posso concludere e bisogna cambiare criterio

Serie a segno variabile

Un classico esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ...$$

Teorema della convergenza assoluta

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ serie a segno variabile, se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_n < +\infty$

di più, vale $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (disuguaglianza triangolare)

Teorema del criterio di Leibniz

Supponiamo che $(a_n)_n$ sia successione **positiva e decrescente**, $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

Questo ci dice che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Funzioni continue

Sia $f: A \to R$, diciamo che f è continua in un punto $x_0 \in A$ se vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è continua in un insieme E ⊂ A se è continua in ogni punto di E.
Infine, se è continua in ogni punto del suo insieme di definizione, diremo semplicemente che è continua.

Teorema continuità della funzione composta

Siano $f(x)$ una funzione continua in xo, e $g(y)$una funzione continua in $y_0 = f(xo)$. La funzione composta $g(f(x))$è continua in xo.
Supponiamo che risulti
$\lim_{x \to xo} f(x) = yo$ e sia g una funzione continua in yo. Allora:
$\lim_{x \to xo} g(f(x)) = g(yo)$oppure, più suggestivamente
Se $g(x)$è una funzione continua, allora:
$\lim_{x \to xo} g(f(x)) = g(\lim_{x \to xo} g(f(x))$

"Si può portare il limite dentro il segno di funzione"

Punti di discontinuità

Un punto di discontinuità per una funzione f è un punto in cui f(x) non è continua.
Ne esistono tre tipologie:

- **Di prima specie (salto):**
  Sia $xo \in R$ un pto di acc per il dominio di f, e supponiamo che f sia definita in un intorno di xo. Diciamo che la funzione ha in xo una discontinuità di prima specie se esistono finiti i limiti destro e sinistro, ma non sono uguali:
  $$\lim_{x \to xo^-} f(x) \neq \lim_{x \to xo^+} f(x) \quad entrambi\ finiti$$
- **Di seconda specie:**
  Sia $xo \in R$ un pto di acc per il dominio di f, e supponiamo che f sia definita in un intorno di xo. Diciamo che la funzione ha in xo una discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, è infinito oppure non esiste:
  $$\lim_{x \to xo^-} f(x) \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases} \vee \lim_{x \to xo^+} f(x) \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases}$$
- **Di terza specie:**
  Sia $xo \in R$ un pto di acc per il dominio di f, e supponiamo che f sia definita in un intorno di xo. Diciamo che la funzione ha in xo una discontinuità di terza specie se esistono finiti i limiti destro e sinistro sono uguali tra loro, ma non coincidono con la valutazione della funzione nel punto:
  $$\lim_{x \to xo^-} f(x) = \lim_{x \to xo^+} f(x) \quad esistono\ finiti\ e \neq f(xo)$$

Funzione di Dirichlet

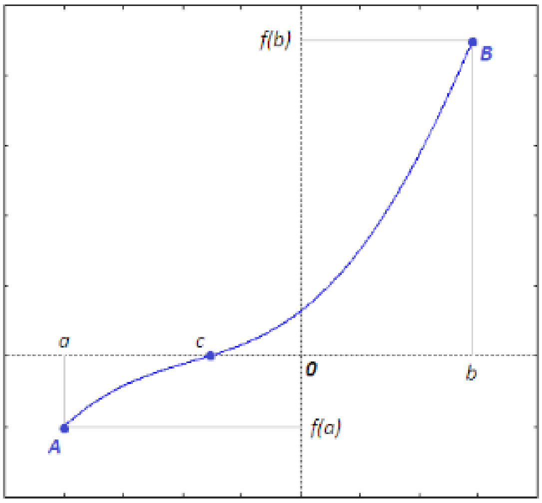
f:R→R
$f(x) =$

- 1, $x \in Q$
- 0, $x \in R - Q$

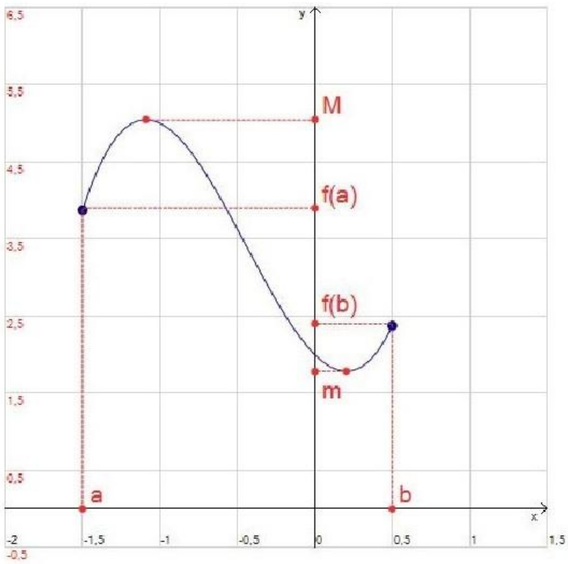
Sia Q che R-Q sono densi in R. Significa che $\forall x_0 \in R$e per ogni $\delta > 0$ in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ci sono infiniti punti razionali e infiniti punti irrazionali.
Ne segue che $\lim_{x \to x_0} f(x)$**non esiste** $\forall x_0 \in R$dunque $f$non è continua in nessun punto.

Teorema della permanenza del segno
Sia $f: A \rightarrow R$ una funzione continua su A, e sia xo un punto di A. Se risulta $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno I di xo tale che $\forall x \in I \cap A$ si ha $f(x) > 0$

Teorema degli zeri delle funzioni continue
Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ continua, supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.
Allora esiste un punto c∈]a.b[tale che $f(c) = 0$



Teorema dei valori intermedi
Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ continua. Allora $f$assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.
Ovvero $\forall y$ $tale$ che $f(a) \leq y \leq f(b)$ se $f(a) \leq f(b)$
$\exists x \in [a, b]$: $f(x) = y$



Corollario: sia $f: I \rightarrow R$continua allora $f(I)$contiene tutti i valori compresi tra inf f e sup f
ovvero $f(I) \supseteq]inf$ f, sup $f[$, Iintervallo (aperto o chiuso, limitato o illimitato)

(l'intervallo può essere aperto o chiuso in funzione del fatto se $inf\ f$ e $sup\ f$ sono min o max)

Teorema di Weierstrass
Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ continua e definita su un intervallo chiuso e limitato. Allora f ammette massimo e minimo

conseguenza: $f([a, b]) = [min\ f,\ max\ f]$

Derivata

La derivata di una funzione si può definire come il limite del rapporto incrementale

Alcune derivate di funzioni

$$
\begin{aligned}
&1)\ D(x^p) = px^{p-1} \quad (p \in \mathbb{R})\\
&2)\ D(a^x) = a^x \ln a\\
&3)\ D(e^x) = e^x\\
&4)\ D(\log_a x) = \tfrac{1}{x}\log_a e\\
&5)\ D(\ln x) = \tfrac{1}{x}\\
&6)\ D(\sin x) = \cos x\\
&7)\ D(\cos x) = -\sin x\\
&8)\ D(\tan x) = \tfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\\
&9)\ D(\cot x) = -\tfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x\\
&10)\ D(\arcsin x) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&11)\ D(\arccos x) = -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&12)\ D(\arctan x) = \tfrac{1}{1+x^2}\\
&13)\ D(\sinh x) = \cosh x\\
&14)\ D(\cosh x) = \sinh x\\
&15)\ D(\text{settsinh} x) = \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\
&16)\ D(\text{settcosh} x) = \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

Proprietà delle funzioni derivabili

Se $f:]a, b[\rightarrow R$ derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 **(non vale viceversa)**

- $f + g$ derivabile in x_0 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$
- fg derivabile in x_0 $(fg)'(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0)$
- $\frac{1}{g}$ derivabile per $g(x_0 \neq 0)$ allora $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

- $\frac{f}{g}$derivabile allora $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Teorema di Fermat

Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ e $x_0 \in]a, b[\ t.c\ x_0$massimo o minimo relativo per f allora se f è derivabile in $x_0$si ha $f'(x_0) = 0$

Teorema di Rolle

Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ continua, derivabile in $]a, b[$ e tale che $f(a) = f(b)$ allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$

Teorema di Lagrange

Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ continua, derivabile in $]a, b[$ allora $\exists c \in]a, b[$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teoremi di de l'Hopital

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow R$ continue derivabili in $]a, b[- \{0\}$.
Supponiamo $f(x_0) = g(x_0)$ e $g'(x) \neq 0\ \forall x \neq x_0$
Allora esiste:

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Nella pratica il teorema dice

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow calcola \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Vale anche per

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Derivate successive

Sia $f:]a, b[\rightarrow R$che sia derivabile in ogni di $]a, b[$ allora $f']a, b[\rightarrow R$ la funzione derivata potrebbe a sua volta derivabile.
Diremo che f ammette derivata seconda in $x_0 \in]a, b[$ se esiste

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

In maniera analoga (iterando il ragionamento) si possono definire le derivate di ordine superiore:

$f^n(x_0)$derivata n-esima di f in x_0

Integrali

Definizione

L'integrale è un operatore che, nel caso di una funzione di una sola variabile a valori reali non negativi, associa alla funzione l'area sottesa dal suo grafico entro un dato intervallo [a,b] nel dominio. Se la funzione assume anche valori negativi, allora l'integrale può essere interpretato geometricamente come l'area orientata sottesa dal grafico della funzione.

Sia f una funzione continua di una variabile a valori reali e sia a un elemento nel dominio di f allora dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che l'integrale in [a, x] di fè una primitiva di f.

Una funzione f, definita in un intervallo I = [a, b[e limitata, si dice integrabile in [a, b[se

$$sup_{\psi\in\gamma^-} \int_a^b \psi dx = inf_{\varphi\in\gamma^+} \int_a^b \varphi dx$$

se ciò accade, il loro valore comune si chiamerà integrale della funzione f esteso all'intervallo [a, b[, e si indicherà con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

Integrale definito secondo Riemann

L'**integrale di Riemann**, o *integrale definito secondo Riemann* o ancora *integrale definito*, è un operatore matematico che associa alle funzioni reali di variabile reale l'area sottesa al grafico su un intervallo a scelta, sotto opportune ipotesi.

Si dice che F(x) è una primitiva di f(x) se è derivabile e F'(x)= f(x) per ogni x appartenente al dom

ogni funzione continua in un intervallo a,b ammette delle primitive

la primitiva non è mai unica: infatti se F(X) è una primitiva, allora lo è anche F(x) + c con c appart. a R costante

Equazioni differenziali

Definizione:

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita è una funzione, ed in cui compaiono una o più derivate della funzione incognita.

Equazione differenziale lineare di primo ordine

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Con y la funzione incognita e a(x) e b(x) due funzioni assegnate continue in un intervallo I.
Soluzione:

$$y = e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)\, dx$$ con A(x) una primitiva di a(x)

Equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = a(x) * b(y)$$

Soluzione:

$$\int \frac{1}{b(y)}\, dy = \int a(x)\, dx$$

Problema di Cauchy

Definizione: Determinare la soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine soddisfacente la condizione di passaggio per il punto di coordinate (x0, y0), ossia y(x0)= y0 sistema tra:

$$y' = a(x)y + b(x)$$
$$y(x0) = y0$$

oppure sistema tra:

$$y' = a(x)b(y)$$
$$y(x0) = y0$$

Ringraziamenti

Noi autori, Scara e Hosam, ringraziamo chi ci ha aiutato, tra cui Stecca e Marco