Teorema Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora esiste $\lambda = \sup E \in \mathbb{R}$.

dim

Costruiamo una sezione di $\mathbb{R}$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ maggiorante di } E \}$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ non è maggiorante di } E \} = D^c$$

Automaticamente $S \cup D = \mathbb{R}$, $S \cap D = \emptyset$.

E limitato superiormente $\Rightarrow \exists$ almeno un magg. $D \neq \emptyset$

E non vuoto $\Rightarrow S$ non vuoto. $S \neq \emptyset$

Per dire che è sezione voglio vedere che

$\forall s \in S$, $\forall d \in D$ $\quad s \leq d$.

Siccome s non è maggiorante, $\exists x \in E$

$$s < x \leq d$$

perchè d è un maggiorante.

Sia λ l'elemento separatore che soddisfa

$\forall s \in S, \forall d \in D \quad s \leq \lambda \leq d$

Vogliamo vedere che $\lambda = \sup E$.

devo vedere

A) λ è maggiorante $(\lambda \in D)$

B) $\forall \varepsilon > 0$ $\lambda - \varepsilon$ non è maggiorante.

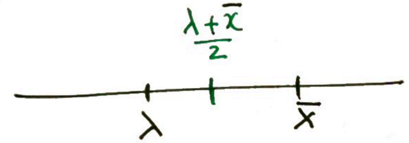
Ma per $\varepsilon > 0$ $\lambda - \varepsilon \in S$ allora B) vera.

Per dimostrare A) procedo per assurdo

Se λ non è maggiorante

$\exists \bar{x} \in E$ tale che $\lambda < \bar{x}$

Ma allora anche $\dfrac{\lambda + \bar{x}}{2}$

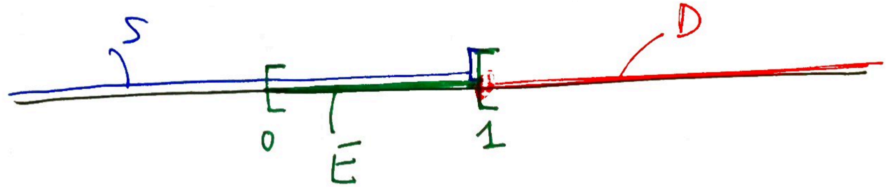


soddisfa

$$\lambda < \frac{\lambda + \bar{x}}{2} < \bar{x}$$

cioè ho trovato un numero più grande di λ che non è un maggiorante (cioè $\in S$)

Contraddizione con la ~~definizione~~ proprietà di elemento separatore.



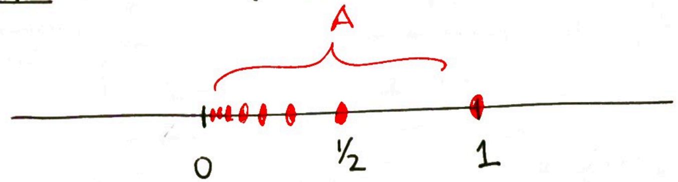
Oss Analogamente se $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente $\Rightarrow \exists \inf E$.

Oss 2 Se $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto ammette $\inf E$ e $\sup E$ allora $\inf E \leq \sup E$

Def Se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente (non ammette maggioranti) allora scrivo $\sup E = +\infty$

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiorm. (non ammette minoranti) allora scriviamo $\inf E = -\infty$

Esempio $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$



A non vuoto e limitato

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

(qui posso mettere <)

Qui $1 = \max E = \sup E$

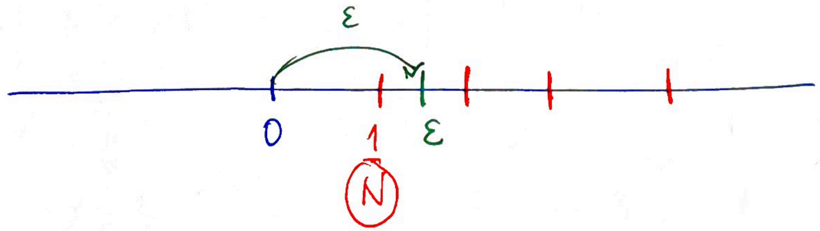
Mostriamo che $\inf E = 0$.

Infatti 0 è un minorante

ma $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 + \varepsilon = \varepsilon$ non è minorante

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \varepsilon > \frac{1}{N}$

è vero basta scegliere $\boxed{N > \frac{1}{\varepsilon}}$.



Oss Notiamo che $\min E$ non esiste.

In generale se $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato sup con $\sup E \in E$ allora $\max E$ esiste e $\max E = \sup E$.

Il valore assoluto.

Def Dato $x \in \mathbb{R}$ definisco il valore assoluto di x

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \max\{x, -x\}$$

Ad esempio

$$|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$$

Notiamo che $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Oss Posso scrivere $\cancel{\boxed{|-x| = x}}$? NO

Per $x = -1$ $|-(-1)| = -1$

Esempio Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\boxed{|x-3| < 2x+1}$$

Se $x - 3 \geq 0$ allora $x - 3 < 2x + 1$

Se $x - 3 < 0$ allora $3 - x < 2x + 1$

In sintesi devo risolvere

$$\begin{cases} x-3 < 2x+1 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 3-x < 2x+1 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x < 4 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} -3x < -2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -4 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

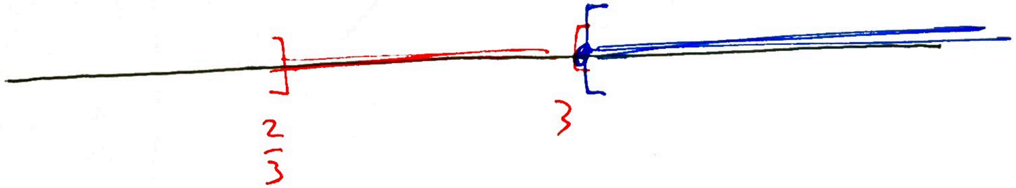
$$x \geq 3 \qquad\qquad \frac{2}{3} < x < 3$$

Dunque l'equazione è soddisfatta in

$[3, +\infty[$ e $]\frac{2}{3}, 3[$

ovvero l'unione

$$]\tfrac{2}{3}, 3[\cup [3, +\infty[=]\tfrac{2}{3}, +\infty[$$



Esempio Risolvere in $\mathbb{R}$

$$|x-1| < 3|x+1| \qquad (*)$$

Siccome $|y| \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

allora $|A| \leq |B| \iff |A|^2 \leq |B|^2$

quindi $(*) \iff (x-1)^2 < 9(x+1)^2$

e da qui risolvo

verifica $\cancel{-2 < x < \frac{1}{2}}$ $\boxed{x < -2 \ \cup \ x > -\frac{1}{2}}$

Disuguaglianza Triangolare

Proposizione Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora vale

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$$

dim Infatti $x \leq |x|$, $y \leq |y|$

sommando $x + y \leq |x| + |y|$.

Analogamente $-x \leq |x|$, $-y \leq |y|$

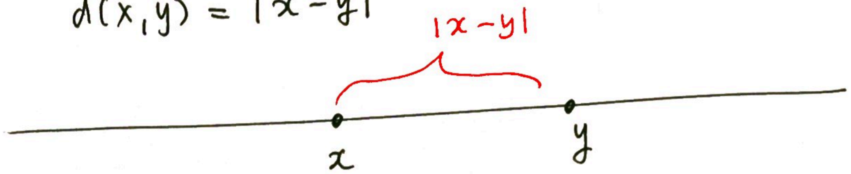
sommando $\underbrace{-x-y}_{= -(x+y)} \leq |x| + |y|$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
$$\|$$
$$\max\{x+y, -(x+y)\}$$

Distanza tra numeri reali

Dati $x, y \in \mathbb{R}$ definisco la distanza tra x e y

$$d(x,y) = |x-y|$$



Corollario Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$. Allora

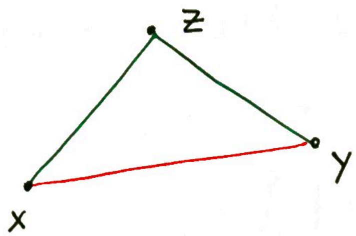
$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \qquad (**)$$

dim

$$|x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$$

Oss. La $(**)$ in termini di distanza dice

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$



Oss le proprietà della distanza: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

(i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ — POSITIVITÀ

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ — SIMMETRIA.

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ — DIS. TR.

Infatti la (iii) appena dimostrata

la (ii) evidente perché $|x-y| = |y-x|$.

la (i) anche vera perché $|x-y| \geq 0$

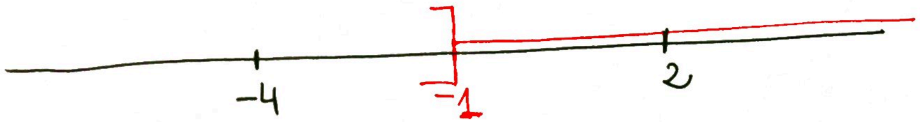
e se $|x-y|=0$ allora $x=y$

(segue da $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{-|x-y|}} \leq x-y \leq \underset{0}{\underset{\shortparallel}{|x-y|}}$)

Esempio Risolvere la disequazione

$$|x-2| < |x+4| \Rightarrow \boxed{x > -1}$$

verifica!



riscrivo o penso $d(x,2) < d(x,-4)$

Esercizio Scrivere esplicitamente la distanza tra $|a|$ e $a+1$ in funzione di $a \in \mathbb{R}$.

Corollario Dati $x,y \in \mathbb{R}$ vale:

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| . \quad (*)$$

dim

$|A+B| \leq |A|+|B|$

$$|x| = |\underbrace{x-y}_{A} + \underbrace{y}_{B}| \leq |x-y|+|y|$$

ne segue $|x|-|y| \leq |x-y|$. (1)

Ripetendo il ragionamento scambiando i ruoli di x e y ho

$$|y|-|x| \leq |x-y| = |y-x| \quad (2)$$

Mettendo insieme (1) e (2) ottengo $(*)$.

Corollario Siano $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Allora

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_i|$$

dim Per induzione (esercizio!)

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Per ogni intervallo non vuoto $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ si ha $]a,b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Proposizione Se $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$ allora $\exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $a<q<b$

dim Basta dimostrare per $a,b>0$.

Siccome $]a,b[$ non vuoto $\Rightarrow b-a>0$.

Fisso $K \in \mathbb{N}$ tale che $K(b-a)>1$. PROPRIETÀ ARCHIMEDEA

Allora sia $n := [Ka]+1$

parte intera.

$x \in \mathbb{R}$ $\quad [x] =$ parte intera di x
$= \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

Allora $\quad Ka < \underbrace{[Ka]+1}_{n} \leq Ka+1 < Kb$

Dividio per K (e rimuovo il terzo termine) $\quad a < \frac{n}{k} < b$

q

Oss Anche $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$

Dati $a<b$ in $\mathbb{R}$ prendo $q \in \mathbb{Q}$ $a<q<b$ come prima poi cerco $n \in \mathbb{N}$ (grande) tale che

$$a < q < \underbrace{q + \frac{\sqrt{2}}{n}}_{\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} < b$$