Lezione giovedì 19 10h30 - 12h30.

tutorato → giov. pomeriggio

venerdì 20 8h30 - 10h30 ONLINE

ricevimento 11h00 - 12h00

---

8 CALCOLO DIFFERENZIALE

Ricordiamo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow \exists \max_{[a,b]} f \;,\; \min_{[a,b]} f$ teorema Weierstrass.

? Come determinarli?

Introduciamo la derivata:

def Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$

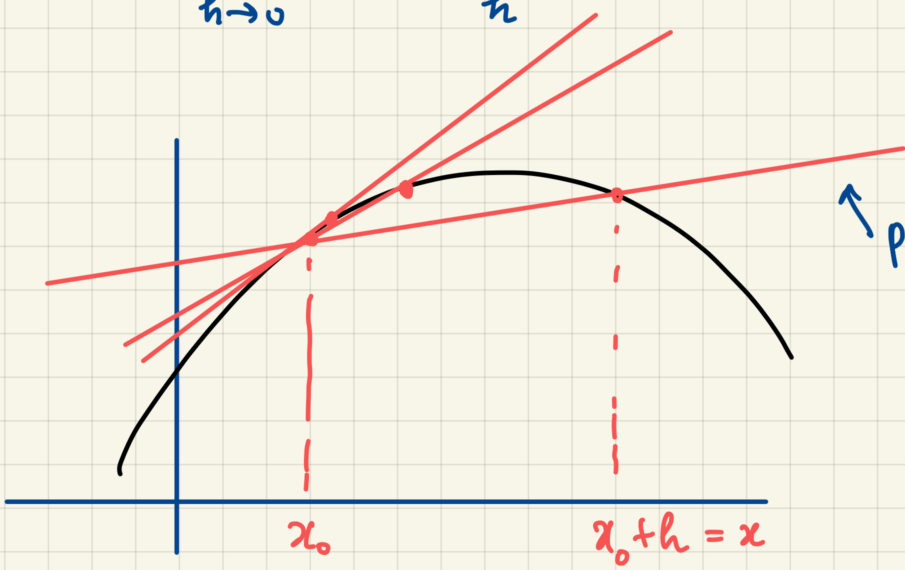
Diciamo che f è derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

$$Df(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0)$$

scrivo $x = x_0 + h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



pendenza $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Oss Se f derivabile in x_0 allora

esiste.

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Allora posso scrivere

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = r(x) \qquad \text{dove} \quad r(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

ovvero

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\boxed{r(x)(x - x_0)}}_{R_1(x)}} \quad \text{dove} \quad r(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

ovvero

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\boxed{r(x)(x-x_0)}}_{}}$$

$R_1(x)$.

dove $r(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

In sintesi abbiamo visto che se f è derivabile in x_0 allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$$

$$\text{dove} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$$

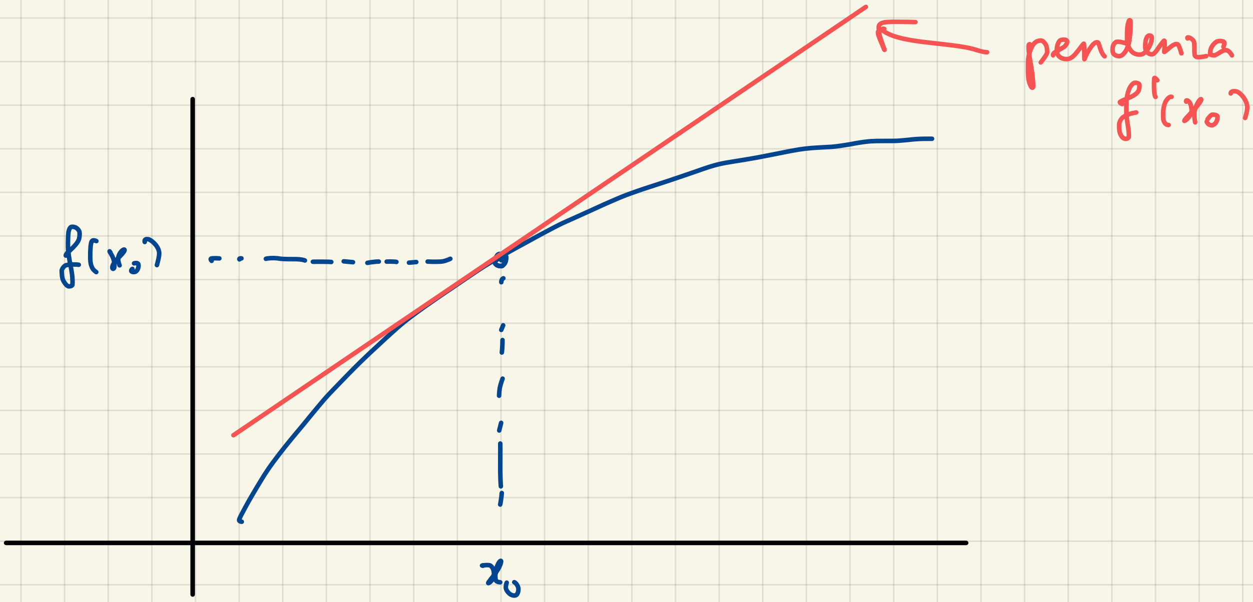
resto tende a zero "più veloce" di $x-x_0$

Notiamo che

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

è l'equazione di una retta

che passa per $(x_0, f(x_0))$ e pendenza $m = f'(x_0)$.



Esempi (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = c$

allora $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ $\quad \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{c-c}{h} = 0$

Allora $\quad \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$.

Dunque se $f(x) = c$ costante $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$.

Voglio vedere che $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[(x_0+h)^n - x_0^n\right] = n x_0^{n-1}}$$

$$(x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k$$

$$= x_0^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{= n} x_0^{n-1} h + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{= n} x_0 h^{n-1} + h^n$$

$$(x_0+h)^n - x_0^n = n x_0^{n-1} h + [\qquad\qquad]$$

h almeno a potenza 2.

$$\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = n x_0^{n-1} + [\qquad\qquad]$$

h almeno a potenza 1.

③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin(x)$

Voglio vedere $f'(x_0) = \cos(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin(x_0) \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} + \cos(x_0) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 1} \right]$$

$$= \cos(x_0).$$

in base e.

④ $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \log x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\log(x_0+h) - \log(x_0)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{1/h} = \log\Big(\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}}_{= e^{\frac{1}{x_0}}}\Big)$$

$$= \log\left(e^{\frac{1}{x_0}}\right) = \frac{1}{x_0}.$$

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\left(\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{1}{x_0}}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{1}{x_0}}$$

uso che $y \to y^{\frac{1}{x_0}}$ continuo se $y>0$.

uso $k = \frac{h}{x_0}$ (ricordo $x_0 > 0$)

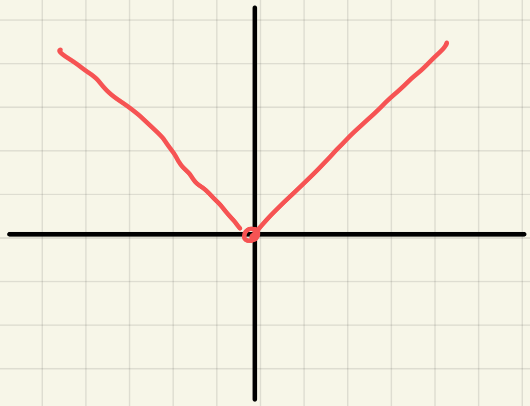
$$= \Big(\underbrace{\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}}_{=e}\Big)^{\frac{1}{x_0}} = e^{\frac{1}{x_0}}$$

	$f(x)$	$f'(x)$	
	c	0	
	x^n	nx^{n-1}	
	$\sin x$	$\cos x$	
	$\cos x$	$-\sin x$	← esercizio.
	$\log x$	$\frac{1}{x}$	
$a>0$, $a\neq 1$	$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$	← esercizio.

Esempi (di f. non derivabili)

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = |x|.$

$$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 > 0 \\ -1 & x_0 < 0 \\ \text{non esiste} & x_0 = 0 . \end{cases}$$



$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h}$$

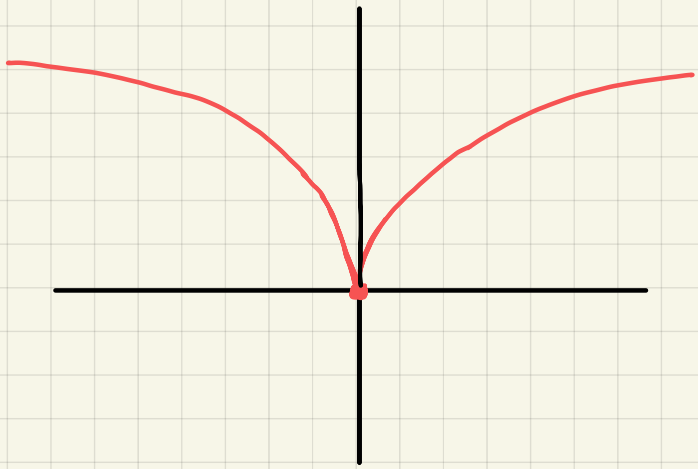
quindi $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{|h|}{h}}$ non esiste.

↑ è 1 $\quad h>0$

-1 $\quad h<0$.

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \sqrt{|x|}$

La tangente in zero è verticale; lo formalizziamo così



$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{qd } x_0 = 0 .$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0} \text{segno}(h) \frac{\sqrt{|h|}}{|h|}$$

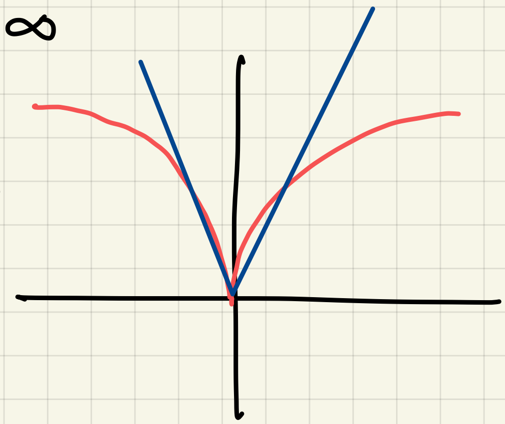
$$h = \text{segno}(h) \cdot |h| \qquad = \lim_{h \to 0} \text{segno}(h) \frac{1}{\sqrt{|h|}}$$

Quindi (per $x_0 = 0$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{segno}(h) \frac{1}{\sqrt{|h|}}$$

ora $$\lim_{h\to 0^+} \operatorname{segno}(h) \cdot \frac{1}{\sqrt{|h|}} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \operatorname{segno}(h) \frac{1}{\sqrt{|h|}} = -\infty$$



Quindi $f(x) = \sqrt{|x|}$ non der in $x_0 = 0$.

Per $x_0 \neq 0$ è derivabile !

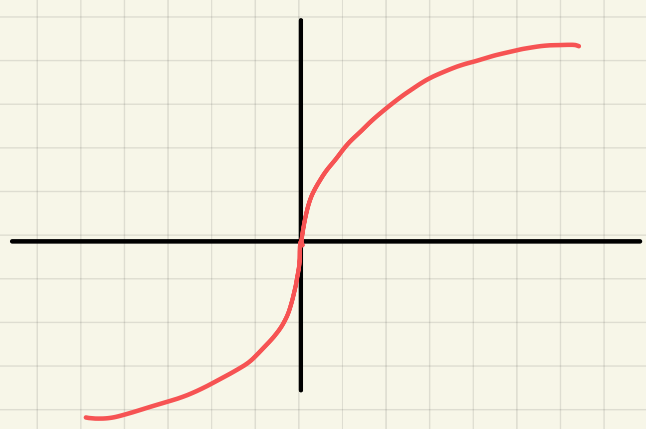
esercizio

se $x_0 > 0$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

$x_0 < 0$ $\qquad f'(x_0) = -\frac{1}{2\sqrt{-x_0}}$.

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

Esercizio $\quad f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$



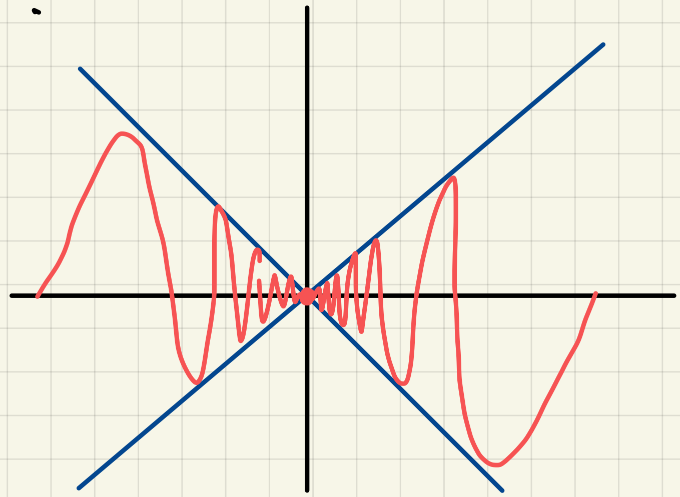
③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Notiamo che f è continua su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 .$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$.



Infatti

$$\frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)$$

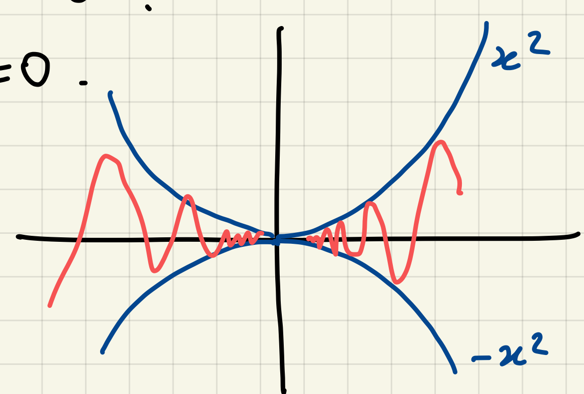
$$= \frac{1}{h}\left(\underbrace{h \sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{f(h)} - \underbrace{0}_{f(0)} \right) = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

NON HA LIMITE per $h \to 0$

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(x_0) = 0$.



PROPRIETÀ DELLE F. DERIVABILI.

Prop Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile in x_0
Allora f è continua in x_0.

⚠ non vale il viceversa.

dim Devo dimostrare $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ovvero $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$.

Ma abbiamo
$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \, f'(x_0)} \cdot \underbrace{x - x_0}_{\downarrow \, 0}$$
per $x \neq x_0$. per $x \to x_0$.

Quindi $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ come volevamo.

Prop Siano $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabili in x_0.
Allora

1. $f+g$ derivabile in x_0 $\quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. fg derivabile in x_0 $\quad (fg)'(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0)$
3. se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{g}$ derivabile in x_0 $\quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Nota che nella ③ $\quad g$ der in x_0

$$\Downarrow$$

g continua in x_0

teo preced.

Allora $g(x_0) \neq 0 \implies g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0

perman. del segno.

Ne deduciamo la formula

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Esempi ① $\quad f(x) = x \log x \qquad$ (def per $x>0$)

$$D(x\log x) = (D\,x)\cdot \log x + x \cdot D\log x$$

$$= \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1 .$$

② $f(x) = \tan(x)$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$D \tan(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \\ 1 + \tan^2(x) \end{cases}$$

Teorema Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $g :]c,d[\to \mathbb{R}$ tale che f derivabile in x_0 e g derivabile in $y_0 = f(x_0) \in]c,d[$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(\overset{y_0 \,=}{f(x_0)}) \cdot f'(x_0).$$

$$\begin{tikzcd}]a,b[\arrow[r, "f"] &]c,d[\arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x_0 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & y_0 = f(x_0) \arrow[r] & g(y_0) = g(f(x_0)) \end{tikzcd}$$

Esempio $h(x) = \sin(x^3)$

$h'(x) = \ ?$

Vedo $h = g \circ f$. dove $f(x) = x^3$

$g(y) = \sin y$.

infatti $g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin(x^3)$.

Allora $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

$h'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$.

Nella pratica $\sin(x^3) \rightsquigarrow \sin(Y)$

$(\sin(Y))' = \cos(Y) \cdot Y'$

Esercizio $f(x) = \log(\tan x)$

Per quali x è definito? È derivabile?

$$D \log(\tan x) = \frac{1}{\tan x} \cdot (1 + \tan^2 x)$$