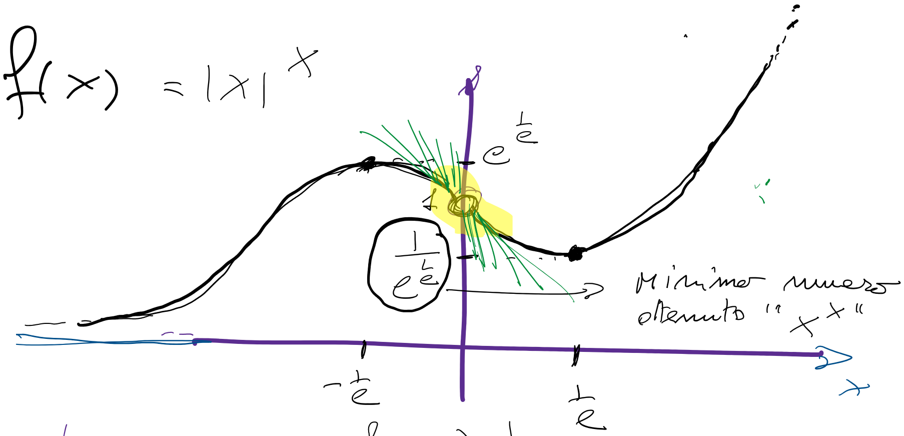
24-11-2020

martedì 24 novembre 2020 10:33

$$f(x) = |x|^x$$



$$f'(x) = \left(e^{x \log|x|}\right)' =$$

$$= e^{x \log|x|}\left(1 \log|x| + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{|x|}} \cdot \frac{\cancel{|x|}}{\cancel{x}}\right)$$

$$= |x|^x \left(1 + \log|x|\right) \qquad x \neq 0$$

f è derivabile in tutto il suo dominio.

PUNTI STAZIONARI: $f'(x) = 0$

$$|x|^x \cdot (1 + \log|x|) = 0$$

$$\underbrace{|x|^x = 0}_{\text{imp.}} \quad \vee \quad \underbrace{(1 + \log|x|) = 0}$$

$$\log|x| = -1$$

$$|x| = e^{-1}$$

$$x = \pm \frac{1}{e} \simeq \pm 0{,}36..$$

$$f\left(\tfrac{1}{e}\right) = \left|\tfrac{1}{e}\right|^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} \sim 0{,}7..$$

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \left|-\frac{1}{e}\right|^{-\frac{1}{e}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}} = e^{\frac{1}{e}} \sim 1{,}4..$$

INTERVALLI DI MONOTONIA $f'(x) > 0$

$$|x|^x \cdot (1 + \log|x|) > 0$$

① $|x|^x > 0 \rightarrow$ sempre vera

② $1 + \log|x| > 0 \rightarrow \log|x| > -1$

$$e^{\log|x|} > e^{-1} \qquad |x| > \frac{1}{e}$$

$$x < -\frac{1}{e} \quad \vee \quad x > \frac{1}{e}$$

		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	
①	+		+		+		+
②	+		−		−		+
	+		−		−		+
	↗		↘		↘		↗

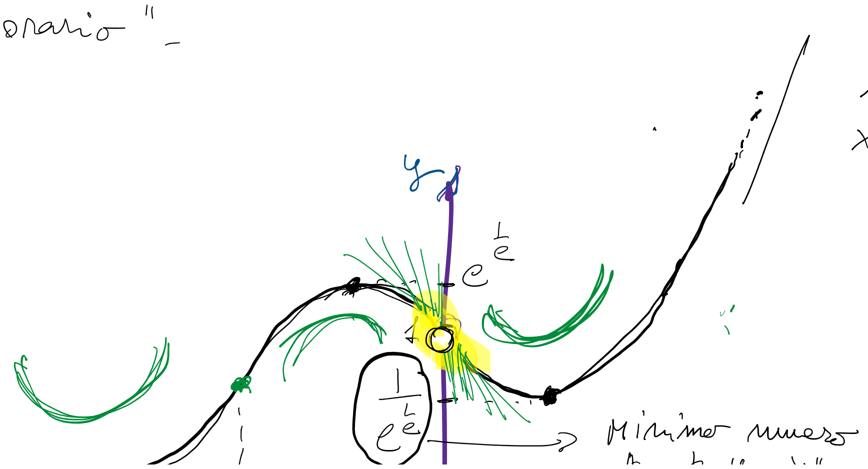
$x = -\frac{1}{e}$ p.to di MAX. REL.

$x = \frac{1}{e}$ p.to di MIN. REL

Valutiamo l'inclinazione "limite" delle rette tangenti per $x \to 0^{\pm}$

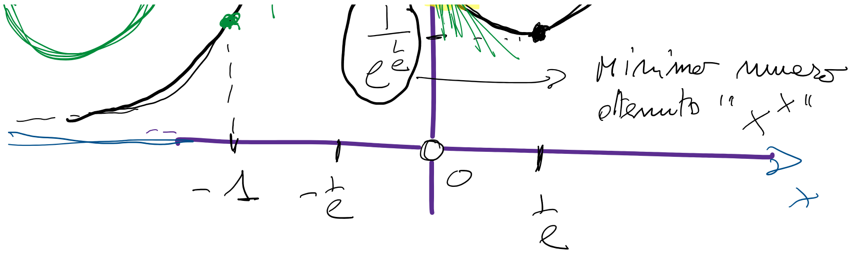
$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \underbrace{|x|^x}_{\to 1} \underbrace{(1 + \log|x|)}_{\to -\infty} = -\infty$$

quindi le rette tangenti tendono a diventare verticali "ruotando in senso orario".



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

VERIFICARE!



$$f''(x) = \left[|x|^x \left(1 + \log|x|\right) \right]' =$$

$$= |x|^x \left(1+\log|x|\right) \cdot \left(1+\log|x|\right) +$$

$$+ |x|^x \left(0 + \frac{1}{\cancel{|x|}} \cdot \frac{\cancel{|x|}}{x}\right) =$$

$$= |x|^x \left[\left(1+\log|x|\right)^2 + \frac{1}{x} \right]$$

PUNTI DI FLESSO $f''(x) = 0$

$$|x|^x \cdot \left[\left(1+\log|x|\right)^2 + \frac{1}{x} \right] = 0$$

$|x|^x = 0$ imp.

$\left(1+\log|x|\right)^2 + \frac{1}{x} = 0$ eq. trascendente...

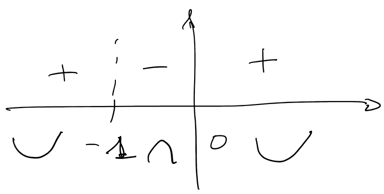
però osserviamo che $x = -1$ è soluz!

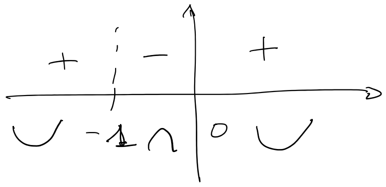
infatti $\left(1+\log|-1|\right)^2 + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$

Inoltre per la CONCAVITÀ/CONVESSITÀ si osserva che per $\boxed{x > 0}$ l'eq.

$$\left(1+\log|x|\right)^2 + \frac{1}{x} = \underbrace{\left(1+\log x\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{> 0} > 0$$

poiché è somma di quantità positive





$$f(x) = |x|^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{\log x}}$$

$$f(x) = \log_{\operatorname{sen} x} \cos x$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\operatorname{senh}(x)$ = "seno iperbolico di x"

$\cosh(x)$

$\operatorname{tgh}(x)$

$\operatorname{settsenh}(x) \equiv \operatorname{arcsenh}(x)$

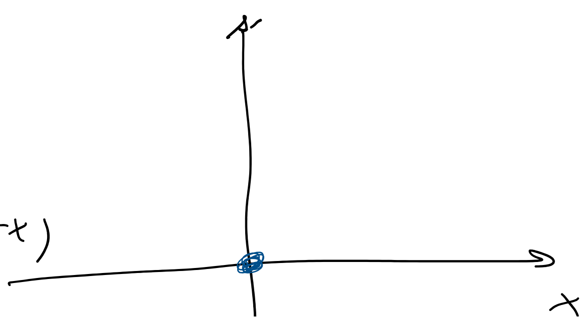
"settoreseno iperbolico" "arcoseno iperblico"

$$\operatorname{senh} x := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

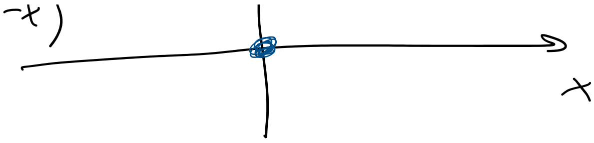
Dominio: $\mathbb{R}$

simmetrie:

$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2}$$



$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2}$$



$$= \frac{e^{-x} - e^{x}}{2}$$

$$= -\,\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$= -\operatorname{senh} x \quad \rightarrow \text{ è dispari!}$$

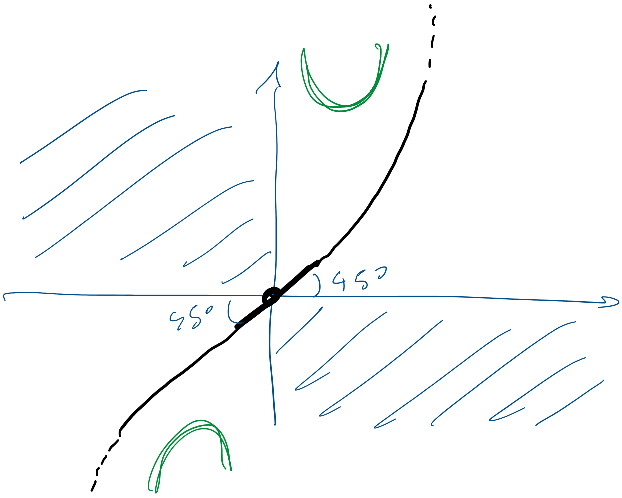
$$\operatorname{senh}(0) = \frac{e^{0} - e^{-0}}{2} = 0$$

$$\operatorname{senh} x > 0 \qquad \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} > 0$$

$$e^{x} - \frac{1}{e^{x}} > 0 \qquad e^{2x} - 1 > 0 \qquad e^{2x} > 1 = e^{0}$$

$$2x > 0 \qquad x > 0$$

(NON è PERIODICA)



$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{e^{x}} - \overset{\to 0}{e^{-x}}}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ NON CI SONO ASINTOTI OBLIQUI

$$\left(\operatorname{senh} x \sim \frac{e^{x}}{2} \quad \text{per } x \to +\infty\right)$$

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} =: \cosh x$$

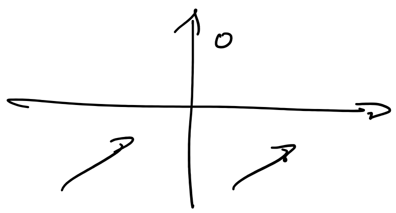
Il $\cosh x$ è definito proprio con

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$$

MONOTONIA : $(\operatorname{senh} x)' > 0$

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} > 0 \quad \text{vera } \forall x \in \mathbb{R}$$



Con che inclinazione passa per l'origine?

$$f'(0) = \frac{e^{0}+e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f''(x) = (\operatorname{senh} x)'' = (\cosh x)' =$$

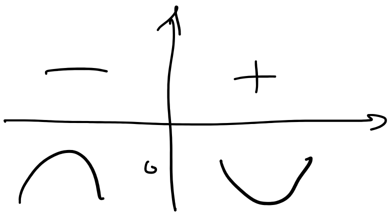
$$= \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

Quindi $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ punto di flesso

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ p.to di flesso

$f''(x) > 0$ senh $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$



Osserviamo che senh x è funzione biettiva e quindi invertibile e la sua inversa ha espressione:

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ isoliamo la x

$2y = e^x - \frac{1}{e^x}$ $\quad 2e^x y = e^{2x} - 1$

$e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0$ poniamo $e^x = t$

$t^2 - 2yt - 1 = 0$

(FORMULA RIDOTTA)

$t_{12} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 1\cdot(-1)}}{1} = y \pm \sqrt{y^2+1} = e^x$

$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$

verificare che $y + \sqrt{y^2+1}$ è sempre > 0 mentre $y - \sqrt{y^2+1}$ è sempre < 0.

Allora

$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow$

$$e^{x} = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow$$

$$x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \Rightarrow$$

cambiando i nomi si ha

$$\text{arcsenh}\, x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(\text{arcsenh}\, x)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} \left(\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

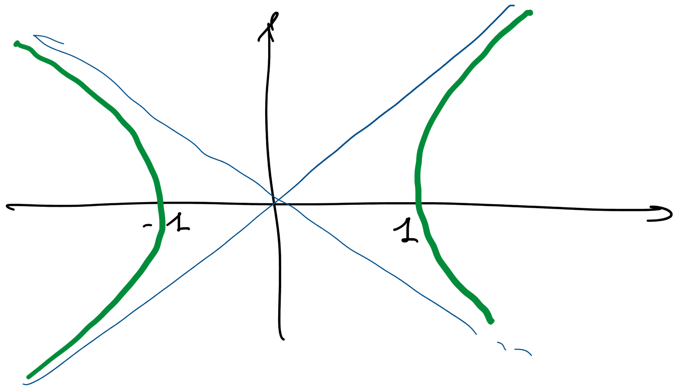
OSS: arcsenh x è dispari: verificare $f(-x) = -f(x)$

$$\log\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = -\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

VALE IDENTITÀ:

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$



Valgono anche le formule di duplicazione e bisezione (e altre...)

$$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cdot \cosh x$$

$$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

verificare...

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

$$\overset{!}{=} 2\cosh^2 x - 1$$

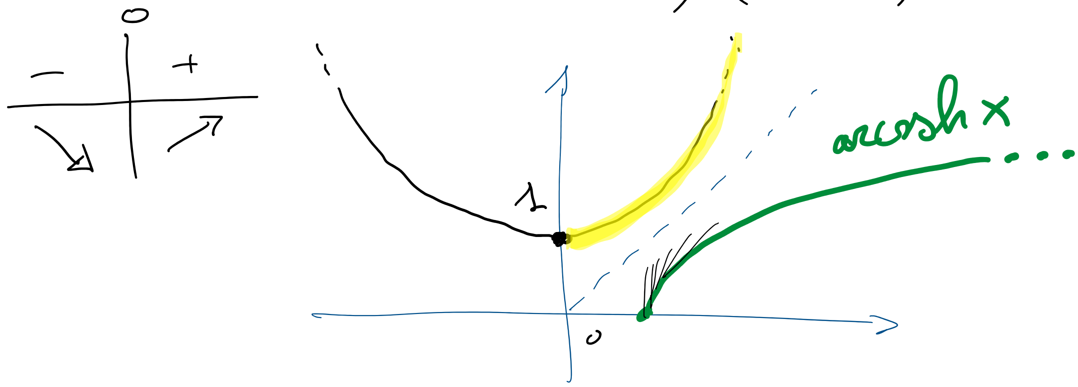
$$\overset{!}{=} 2 \operatorname{senh}^2 x + 1$$

$$\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cosh x}{2}$$

$$\operatorname{senh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dominio = $\mathbb{R}$, é PARI, é sempre positivo, $\cosh(0) = 1$, $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$

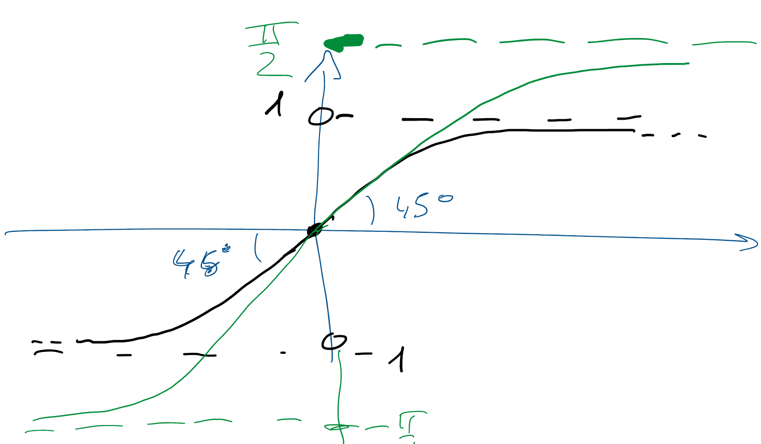


Non è invertibile su $\mathbb{R}$, ma si definisce $\operatorname{arccosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ per $x \geq 1$

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1)$$

non derivabile in $x = 1$.

$$\operatorname{tgh} x := \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$(\operatorname{arctgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

SALUTI!