In questo testo $\log x$ *indica il logaritmo in base* e

(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua e soddisfa $f(0) = 2$ e $f(1) = 0$, allora esiste un $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = \frac{\pi}{2}$.

2. Esiste un numero intero $N > 0$ tale che $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{3^k} > 2$

3. La funzione $f(x) = \dfrac{\log(x)}{|x^2 - 1|}$, definita per $x > 0, x \neq 1$, si può prolungare a una funzione continua su tutto l'intervallo $]0, +\infty[$.

(B) Esercizi.

1. Calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x \to 1+} \frac{e^{-1/x} - 1}{\log(\frac{x-1}{x+1})}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{\log(\frac{x-1}{x+1})}$$

2. Mostrare che la serie seguente è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2}$$

e poi studiare per quali valori di $\alpha \geq 0$ la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^3 + n^2}$$

3. Considerare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

a) Trovare una primitiva di $f(x)$
b) L'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$ è finito?

[1] giustificare tramite un argomento o dimostrazione, o negare tramite un controesempio