03-11-2020

martedì 3 novembre 2020

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4^n + a^n}{n^2 2^n + 5^n}$$

$a \in \mathbb{R}$

$a > 0$

poniamo $a = 1$ così il limite diventa

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4^n + 1^n}{n^2 2^n + 5^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 4^n}{n^2 2^n + 5^n}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4^n \left(4^{-n} + 1\right)}{5^n \left(n \frac{2^n}{5^n} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{\to 0} \frac{\overbrace{1 + 4^{-n}}^{\to 1}}{\left(\underbrace{\frac{n}{\left(\frac{5}{2}\right)^n}}_{\to 0} + 1\right)} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$$

Rapporto tra POTENZA n^1

e ESPONENZIALE DI

BASE > 1 $\left(\frac{5}{2}\right)^n$

$$\lim_{\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall a > 0 \quad a \neq 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4^n + a^n}{n^2 2^n + 5^n}$$

Per $0 < a < 4$ raccogliamo al numeratore 4^n:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n\left(1+\left(\frac{a}{4}\right)^n\right)}{5^n\left(n^2\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)} = 0$$

$\to 0$ poiché $\frac{a}{4} < 1$

$\to 0$

Per $a = 4$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n+4^n}{n2^n+5^n} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4^n}{5^n\left(n^2\frac{2^n}{5^n}+1\right)} = \frac{2\cdot 0}{1} = 0$$

$\to 0$

Per $a > 4$ raccogliamo a^n al numeratore:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n\left(1+\left(\frac{4}{a}\right)^n\right)}{5^n\left(n^2\frac{2^n}{5^n}+1\right)}$$

$\to 1$

$\to 1$

Ora però bisogna distinguere i casi con a maggiore o minore di 5. Allora

$4 < a < 5$ il limite dà zero poiché $\frac{a^n}{5^n} = \left(\frac{a}{5}\right)^n \to 0$

poiché $\frac{a^n}{5^n} = \left(\frac{a}{5}\right)^n \to 0$

Per $a = 5$ gli esponenziali si semplificano:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\left(\frac{4}{a}\right)^n}{n^2\left(\frac{2}{5}\right)^n+1} = \frac{1}{1} = 1$$

Per $a > 5$ il limite vale $+\infty$

poiché $\frac{a^n}{5^n} = \left(\frac{a}{5}\right)^n \to +\infty$

($\frac{a}{5}$ è base maggiore di uno)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(a^n + n^a\right)$$

Per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste finito il limite?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} = a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = ?$$

Possiamo riscrivere a_n "razionalizzando"

$$a_n = \frac{n+1-(n-1)}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}}$$

così $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ quindi

la serie data può convergere.

Ora osserviamo che a_n è

asintotica a:

$$\frac{2}{n\left[\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right]} =$$

$$\frac{2}{n\left(\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$\frac{2}{n\sqrt{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}_{\to 2}}$$

quindi $a_n \sim \frac{2}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}$

$$\left(\text{cioè} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{2}{n^{3/2}}} = 1\right)$$

e il carattere della serie data allora coincide con quella della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ e noi sappiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty \iff \alpha > 1$$

(SERIE ARMONICA GEN.)

Allora la serie data converge per confronto con la serie armonica generalizzata.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = a_n$$

La serie è a termini positivi, applichiamo CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \frac{1}{a_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(n+1)!}{n!}\right]^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$= \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ la serie converge per il criterio del rapporto.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \operatorname{sen}(e^{-n}) \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$\operatorname{sen}(e^{-n}) \to 0$, $\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \to 1$

Ricordiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, allora

$\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

$\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

Allora $\operatorname{sen}(e^{-n}) \sim \frac{1}{e^n}$

e $\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ da cui

ricaviamo la forma asintotica

$$\operatorname{sen}(e^{-n}) \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{e^n} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Il carattere della serie data

coinciderà con il carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 e^n}$$

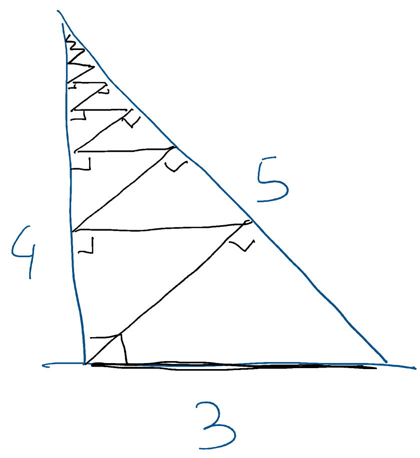
che controlliamo con il criterio

della RADICE:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}} e} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{\underbrace{\frac{2\log n}{n}}_{\to 0}} \cdot e} = \frac{1}{e^0 \cdot e} = \frac{1}{e} < 1$$

quindi $\sum_{n} \frac{1}{n^2 e^n}$ converge per criterio della radice, allora converge anche la serie data.



Calcolare la lunghezza della linea spezzata "infinita"

(TOTALE $= 15$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

poiché $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ NON ESISTE $\Longrightarrow$ la serie NON PUÒ CONVERGERE.

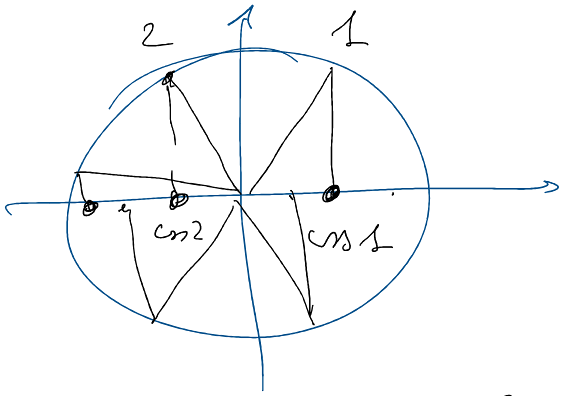
OSS: $(-1)^n = \underline{\cos(n\pi)} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$$

OSS: $\lim \cos(n)$ non esiste

$n \to +\infty$

è il il segno non è alterno!



(quindi non è possibile applicare il criterio di Leibniz)

Però $\cos(n)$ è successione LIMITATA quindi osserviamo che

$$-\frac{1}{n^2} \le \frac{\cos(n)}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

e poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ è convergente.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{\log(\log n)}{\log n}\right]^n$$

$$\sum^{+\infty} n^{-\frac{2^n}{n}}$$

$n = 1$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \right) = 1$$

calcoliamo la somma osservando che

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$$ (l'INDICE è k !)

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$ è SERIE GEOMETRICA! di RAGIONE $\frac{1}{n} < 1$

che converge $\forall n \geq 2$ e la somma vale

$$S = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{n}\right)} - \overset{k=1}{\frac{1}{n}} - \overset{k=0}{1} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1 \right]$$

Allora la serie data è uguale a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

(controllare: è serie telescopica ...)

403695