Esercizio Scrivere i polinomi di Taylor all' ordine n delle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad x_0 = 0$$

$$g(x) = \sqrt{1+x} \qquad x_0 = 0 .$$

Ricordiamo dove eravamo:

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e derivabile n volte nell' intervallo aperto $]a,b[$, sia $x_0 \in]a,b[$

Allora per x in un intorno di x_0 si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

polinomio di Taylor di f in x_0 di ordine n

dove $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 .$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{polinomio di grado } n} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{resto } n\text{-esimo}} .$$

$P_n(x) = P_n(x; x_0, f)$

$R_n(x) = R_n(x; x_0, f)$

Esempi $\quad f(x) = \sqrt{1+x} \qquad f: [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

f è derivabile in $]-1, +\infty[$ e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

-1 è escluso.

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

Se vogliamo scrivere uno sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ abbiamo bisogno delle derivate in $x_0 = 0$

$$f''(x) = D\left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

calcoliamo anche la derivata terza

$$f'''(x) = D\left(-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f'''(0) = \frac{3}{8}.$$

Allora si trova lo sviluppo di Taylor di ordine 3

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + R_3(x)}$$

$$\underset{f(x)}{\parallel} \qquad f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{\underset{3!}{\overset{6}{\parallel}}}(x-x_0)^3 + \ldots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

si scrive anche $R_3(x) = o(x^3)$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + R_3(x)}$$

Oss Per $x \to 0$ l'approssimazione all'ordine 1 ci dice

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + R_1(x) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

A un certo punto avevamo calcolato un valore approssimato per $\sqrt{101}$

$$\sqrt{101} = \sqrt{100\left(1+\frac{1}{100}\right)} = 10\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

approssimo $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$

$$\simeq 10\left(1 + \frac{1}{200}\right) = 10 + \frac{1}{20}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + R_3(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + R_3(x) - \cancel{1} - \cancel{\frac{x}{2}}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{8} + \underbrace{\frac{x}{16}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{R_3(x)}{x^2}}_{\xrightarrow{x\to 0}\ 0} \right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{R_3(x)}{x^3}}_{\to 0} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^k} = 0 \qquad \forall \quad k \leq n}$$

Per il calcolo del limite sarebbe stato in effetti sufficiente usare uno sviluppo all'ordine inferiore (cioè 2 in questo caso)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_2(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{8} + R_2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{8} + \frac{R_2(x)}{x^2} \right) = -\frac{1}{8}.$$

Ora possiamo dimostrare il.

Teorema Supponiamo f derivabile n volte

E sia $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
$f^{(n)}(x_0) \neq 0$] n prima derivata non nulla.

Allora
(a) se n dispari x_0 né max né min
(b) se n pari $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min. locale
$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max. locale

dim Usiamo la formula di Taylor all'ordine n nel punto x_0

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

tutti i termini tranne l'ultimo sono zero per ipotesi

dove $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

posso scrivere $R_n(x) = \varepsilon(x)(x-x_0)^n$
dove $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x)\right)(x-x_0)^n.$$

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) \right) (x - x_0)^n .$$

① Supponiamo ora che n sia pari e che $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Allora siccome $\varepsilon(x) \to 0$ quando $x \to x_0$ esiste un intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ t.c.

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) > 0 \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Quindi per $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 \implies f(x) \geq f(x_0)$$

$\implies$ x_0 minimo locale.

② Se n pari $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies$ rag. analogo

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(\qquad)}_{\leq 0} \underbrace{(\qquad)}_{\geq 0} \leq 0$$

③ Se n dispari allora $(x - x_0)^n$ cambia segno a destra e a sinistra di x_0 e si può vedere che quindi $f(x) - f(x_0)$ anche cambia segno.

Esempi

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad f(x) = D\left(\log(1+x)\right)$

voglio scrivere lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$.

Della funzione $\log(1+x)$ abbiamo già scritto lo sviluppo di Taylor (quindi anche calcolato le derivate in zero)

$$f^{(k)}(x) = D^{k+1}\left(\log(1+x)\right)$$

$$D^{(n)}\left(\log(1+x)\right)\Big|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f^{(k)}(0) = D^{k+1}\left(\log(1+x)\right)\Big|_{x=0} = (-1)^k k!$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \qquad \forall k \geq 0.$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + R_n(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x).$$

analogamente (o sostituendo x con $-x$)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + R_n(x).$$

Qui si vede il legame con la serie geometrica.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + R_n(x)$$

Oss Se ricordiamo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

quindi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$

abbiamo trovato $\displaystyle R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Esempio Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine due della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \quad \text{in } x_0 = 0$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + R_2(y) \;\; \text{"} \; o(y^2)$$

$$\uparrow$$

$y = x + x^2$

$$o((x+x^2)^2)$$

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + (x+x^2) + (x+x^2)^2 + R_2(x+x^2).$$

$$= 1 + x + x^2 + (x^2 + \cancel{x^4} + \cancel{2x^3}) + \cancel{R_2(x+x^2)}$$

Stiamo cercando

$$\frac{1}{1-x-x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \bar{R}_2(x)$$

↑ tutto ciò che ha x^k $k \geq 3$

$$= 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$$

?] Cosa è successo col resto.

Il resto era $R_2(y) = o(y^2)$ $\left[\lim_{y \to 0} \frac{R_2(y)}{y^2} = 0 \right]$.

Poi devo sostituire $y = x + x^2$

$$o(y^2) = o\left((x+x^2)^2\right)$$
$$= o(x^2 + x^4 + 2x^3) = o(x^2)$$

rimane il più piccolo dei gradi

<u>Esempio</u> Sviluppare la funzione

$$f(x) = \log(1 + \sin x) \qquad \text{in } x_0 = 0$$

fino al termine x^4.
(sviluppo di Taylor di ordine 4)

Mi devo ricordare

la derivata quarta del sin è zero.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$t = \sin x$.

$$t = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} \qquad t^2 = (\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2$$
$$= x^2 - \frac{2}{6}x^4 + \cancel{\frac{x^6}{(3!)^2}}$$

la derivata quarta del sin è zero.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$t = \sin x.$

$$t = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} \qquad t^2 = (\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2$$

$$= x^2 - \frac{2}{6}x^4 + \cancel{\frac{x^6}{(3!)^2}}$$

$$t^3 = (\sin x)^3 = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 = x^3 + \cancel{} \qquad t^4 = x^4 + \cancel{}$$

Mettendo tutto insieme (verificate i calcoli)

$$\log(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{1-\sqrt{1-x^3}} \leftarrow \text{forma } \frac{0}{0}$$

il denominatore

$$\sqrt{1-x^3} \simeq \, ?$$

$$\sqrt{1+t} \simeq 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$

ho sviluppato il denominatore all'ordine più piccolo significativo.

vedo che è dell'ordine x^3

$$\sqrt{1-x^3} \simeq 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$1-\sqrt{1-x^3} \simeq \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Mi serve lo sviluppo di arcsin x all ordine 3

$$f(x) = \arcsin x \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f'(0) = 1.$$

$$\arcsin(x) \simeq x + o(x).$$

esercizio

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\arcsin x - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{1-\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{3}$$

$\frac{o(x^3)}{x^3} \to 0$

<u>Esempio</u> $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ forma ind $\frac{0}{0}$

Se uso de l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{+\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

Posso usare Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) \to o(1)$$

$x \to 0.$ $\to 0$

Oss In generale quando ho $\frac{o(x^n)}{x^m}$

posso anche dire che questo è $o(x^{n-m})$

$f(x) = o(1)$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = 0$

cioè un $o(1)$ è una funzione che tende a 0.

Esempio 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x - \tan x - x}{x^5} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\cos^2 x} - 1}{5x^4} \overset{(H)}{=} (?)$$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$ scritto ieri

Troviamo quello della tangente in $x=0$

$f(x) = \tan x \qquad f(0)=0$

$f'(x) = 1+\tan^2 x \qquad f'(0)=1$

$f''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x) \qquad f''(0)=0$

$f'''(x) = 2(1+\tan^2 x) + 4\tan^2 x(1+\tan^2 x) \qquad f'''(0)=2$

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x - \tan x - x}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{3}} + o(x^3) - \left(\cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{3}} + o(x^3)\right) - \cancel{x}}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^5}$$ non posso concludere.

Serve andare fino all' ordine 5.

$$\left.\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \end{aligned}\right\}$$ verificare per esercizio

ora sostituendo si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x - \tan x - x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{60} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{60}.$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{3(\cosh x - 1)\sinh x}$$

$1 + \log\left(\frac{1}{e}\right) = 0.$

$3\cdot(1-1)\cdot 0 = 0.$

forma indet 0/0.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$\log\left(\frac{1+x}{e}\right) = \log(1+x) - 1$ quindi sviluppo $\log(1+x)$.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Quindi il numeratore si sviluppa

$$e^{-x} + \log(1+x) - 1 = \left(\cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$+ \left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \cancel{1}$$

$$= \frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$ meno preciso di

Il denominatore

$$3(\cosh x - 1)\sinh x.$$

$$\cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

nel prodotto tengo solo l'ordine 3 e quelli più alti li metto in $o(x^3)$

$$3(\cosh x - 1)\sinh x = 3\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{3(\cosh x - 1)\sinh x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{3}{2} + o(1)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Altre domande

① Trovare un polinomio di grado 3 tale che

$$P(1) = 0 \qquad P'(1) = 2 \qquad P''(1) = 0 \qquad P^{(3)}(1) = 1.$$

ossia che assegno tutte le info in $x = 1$.

Ricordo la formula di Taylor.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{} + R_n(x)$$

è un polinomio $P_n(x)$ tale che

$$P_n(x_0) = f(x_0) \qquad P_n'(x_0) = f'(x_0) \qquad \dots \qquad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

Quindi per costruire il polinomio scrivo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$$

$P(1) = 0 \qquad P'(1) = 2 \qquad P''(1) = 0 \qquad P^{(3)}(1) = 1.$

Dunque

$$P(x) = 0 + \frac{2}{1}(x-1) + \frac{0}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3$$

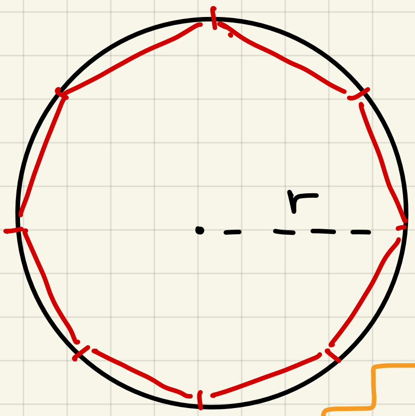
$$= 2(x-1) + \frac{1}{6}(x-1)^3$$

$$= 2x - 2 + \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$P(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - \frac{13}{6} \qquad P(1) = 0.$$

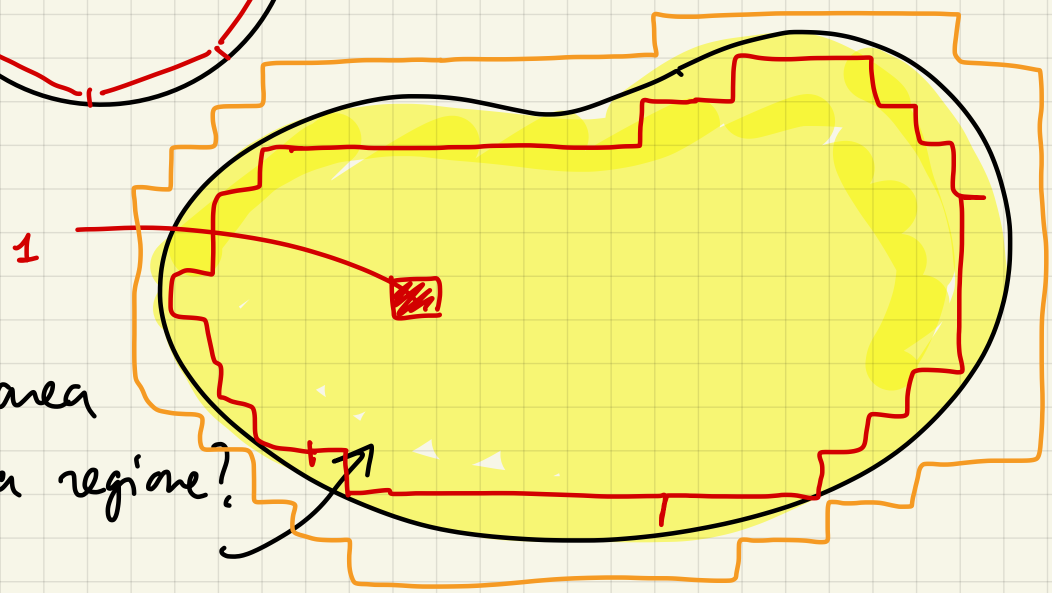
10 INTEGRALE

Integrale ⇝ nozione di area.



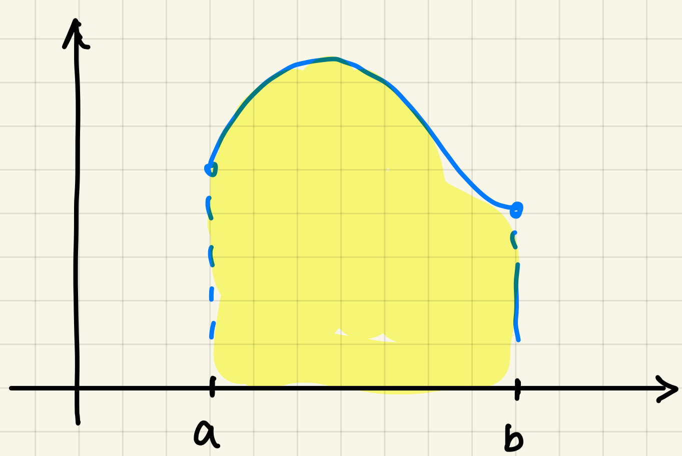
Area = πr^2

Area cerchio raggio 1 = π



Cos'è l'area di questa regione?

Area del sottografico di una funzione



Voglio descrivere l'area come limite.
↓
limite delle aree inferiori e superiori

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata.
(ad esempio se f continua è ok)

Divido $[a,b]$ in n intervalli

$$I_k = [x_k, x_{k-1}] \qquad k = 1, \dots, n$$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a).$$

$$\text{lunghezza}(I_k) = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}.$$

Sia $\quad m_k = \inf_{I_k} f \qquad M_k = \sup_{I_k} f$

Definisco

somma inferiore $s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$

(somma aree rettangoli arancioni) $= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k$

somma superiore $S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$

(somma aree rettangoli verdi) $= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k$.

<u>Def</u> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>limitata</u>

Si dice che f è <u>integrabile</u> <u>secondo Riemann</u>.

se

$\exists \lim_{n\to+\infty} s_n = s$

e vale $s = S$.

$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$

In questo caso il valore comune di questi due limiti si denota

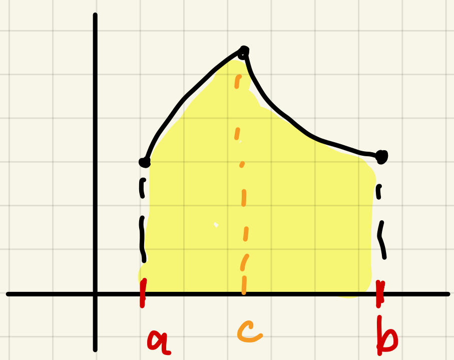
$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad (*)$$

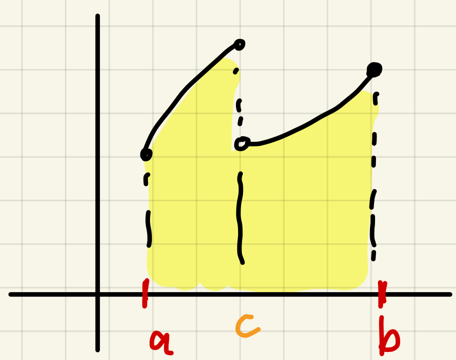
<u>Oss</u> Nella notazione $(*)$ la x è "variabile muta"

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b f(t)\, dt.$$

Teorema Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. (quindi limitata). Allora f è integrabile

Oss In effetti sono integrabili tutte le funzioni $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate che hanno solo un numero finito di punti di discontinuità.





In questi casi le funz. con. sono integrabili

Proprietà $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(linearità dell'integrale).