FORMULA DI TAYLOR

Ripartiamo dalla derivata (prima)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se questo limite esiste posso scrivere

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x)}$$

dove $R_1(x)$ una funzione t.c $\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$

$R_1(x) \to 0$ più velocemente di $x - x_0$ qd $x \to x_0$.

Possiamo ancora riscrivere così

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (*)$$

polinomio di grado 1 $\quad a_0 + a_1(x - x_0)$

quindi $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = 0$$ (**)

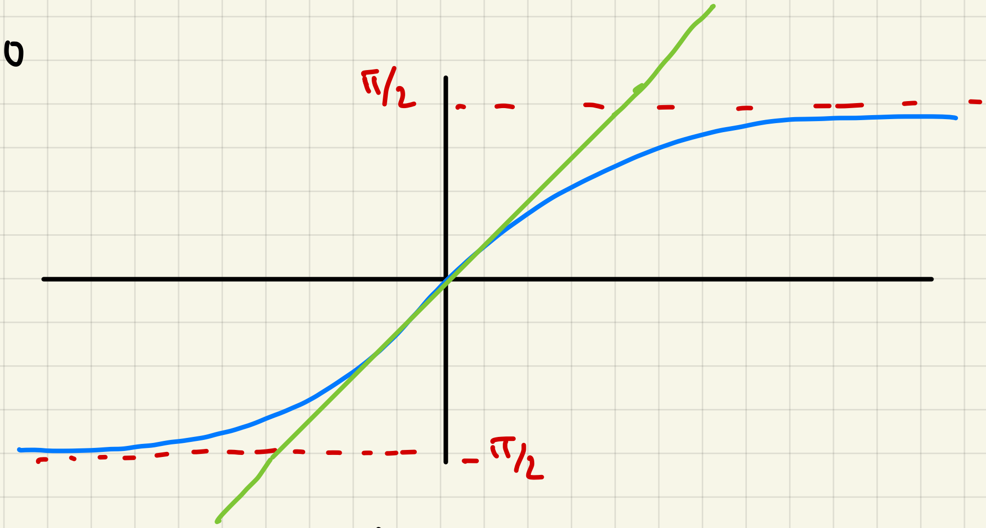
$P_1(x)$ approssima $f(x)$ vicino x_0 "meglio che all'ordine 1"

Infatti, per costruzione, $P_1(x)$ così costruito (come in (*)) è l'UNICO polinomio di ordine 1 che soddisfa la proprietà (**)

Esempio $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

$x_0 = 0$



$$P_1(x) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f(x_0)} + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{f'(x_0)}\,(\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{x - x_0}) = x$$

? Posso trovare, data f, un polinomio $P_n(x)$ di grado n (intorno ad x_0) tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Cominciamo a capire: quando si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{H(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad ?$$

Lemma Sia $H(x)$ una funzione derivabile n volte nell'intorno di un punto x_0.

Allora
$$\lim_{x \to x_0} \frac{H(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad (*)$$

n+1 identità

se e solo se $H(x_0) = H'(x_0) = \dots = H^{(n)}(x_0) = 0$.

Notazione Una funzione H che soddisfa $(*)$ si dice un "o - piccolo" di $(x-x_0)^n$ e si scrive

$$H(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

Più in generale se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora

$f(x) = o(g(x))$ $\quad$ f è un "o-piccolo" di g

dim $\boxed{\Leftarrow}$ Suppongo $H(x_0) = H'(x_0) = \dots = H^{(n)}(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{H(x)}{(x-x_0)^n} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{H'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{H''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$$\dots = \lim_{x \to x_0} \frac{H^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} \quad \cancel{\overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{H^{(n)}(x)}{n!}}$$

~~non so~~ $\cancel{H^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} H^{(n)}(x_0)}$!

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{H^{(n-1)}(x) - H^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{1}{n!} H^{(n)}(x_0)$$

$$= 0.$$

$\Rightarrow$) Suppongo $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{H(x)}{(x-x_0)^n} = 0}$

e voglio vedere $H(x_0) = H'(x_0) = \dots = H^{(n)}(x_0) = 0$.

Supponiamo per assurdo che esiste $k \leq n$ tale che

$$H(x_0) = H'(x_0) = \dots = H^{(k-1)}(x_0) \qquad H^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Allora ragionando come sopra si vede che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{H(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{1}{k!} H^{(k)}(x_0) \neq 0$$

ricorda $k \leq n$

D'altra parte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{H(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{H(x)}{(x-x_0)^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(x-x_0)^{n-k}}_{\to 0} = 0.$$

Teorema (di Taylor)

Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un intorno di un punto x_0.

Esiste un unico polinomio di grado al più n, $P_n(x)$, tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Il polinomio $P_n(x)$ detto POLINOMIO DI TAYLOR di f all'ordine n è

$$\boxed{P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Sinteticamente

$$\boxed{P_n(x) = P_n(x; f, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

OSS Quindi nelle ipotesi del teorema

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

con $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Corollario Se nelle ipotesi precedenti supponiamo anche che f sia $(n+1)$-volte derivabile e che sia $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \forall x \in I$.

allora

$$\boxed{\underset{|R_n(x)|}{\underset{\parallel}{|f(x) - P_n(x)|}} \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}}$$

Esempio $f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$.

Per scrivere il polinomio di Taylor mi servono tutte le derivate in x_0 fino all'ordine n.

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad \dots \qquad f^{(n)}(x) = e^x$$

quindi $\quad f^{(k)}(x_0) = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = o(x^n)$$

Il corollario

$$\boxed{\underset{|R_n(x)|}{\underset{\shortparallel}{|f(x) - P_n(x)|}} \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}} \qquad \forall x \in I$$

nel caso di $f(x) = e^x \qquad x_0 = 0 \qquad I = [0,1]$

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1} .$$

$$M = \max_I |f^{(n+1)}(x)| = \max_{[0,1]} |e^x| = e$$

$\boxed{x=1}$

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

<u>dimostraz.</u> (teorema di Taylor)

Cerco un polinomio di grado n della forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

che soddisfi $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Per il lemma $H(x) = f(x) - P_n(x)$ deve soddisfare

$$H(x_0) = H'(x_0) = \dots = H^{(n)}(x_0) = 0 .$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

$$H(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$H(x_0) = f(x_0) - a_0 = 0 \implies a_0 = f(x_0)$$

$$H'(x_0) = f'(x_0) - P_n'(x_0)$$
$$= f'(x_0) - a_1 = 0 \implies a_1 = f'(x_0)$$

$$H''(x_0) = f''(x_0) - P_n''(x_0)$$
$$= f''(x_0) - 2a_2 = 0 \implies a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

in generale

$$H^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - n!\, a_n = 0 \implies a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

ESEMPI

1. Polinomio di Taylor di e^x in $x_0 = 0$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

2. Polinomi di Taylor di $\sin x$, $\cos x$ in $x_0 = 0$.

Per scrivere questi polinomi devo calcolare le derivate successive di sin e cos.

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0 \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

si ripetono con periodo 4.

$$f^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \pm 1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

alternati

$$\boxed{P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Per $f(x) = \cos x$ in $x_0 = 0$ posso sfruttare i calcoli precedenti

$f(x) = \cos x \qquad x_0 = 0$

$$\boxed{P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

③ In maniera del tutto analoga si trovano gli sviluppi di
$\sinh x$ e $\cosh x$

$D \sinh x = \cosh x$
$D \cosh x = \sinh x$

quindi si trova esattamente la stessa formula di prima ma senza alternanza di segni

$f(x) = \sinh x \qquad x_0 = 0$

$$\boxed{P_{2n+1}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

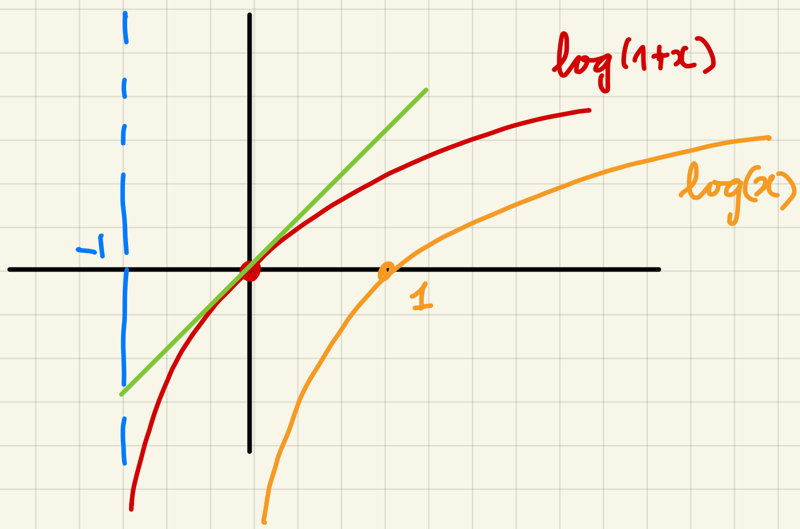
$f(x) = \cosh x \qquad x_0 = 0$

$$\boxed{P_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

⚠ Si vede $\sinh x + \cosh x = e^x$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = e^x$$

(4) $f(x) = \log(1+x)$ in $x_0 = 0$.



$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = +\dfrac{+2}{(1+x)^3}$	$f'''(0) = 2$
$f^{(4)}(x) = -\dfrac{3!}{(1+x)^4}$	$f^{(4)}(0) = -3!$
$\vdots$	
$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{f'}{f^2}.$$

$$D\left((1+x)^{-2}\right) = -2\,(1+x)^{-3}$$

va da $k=1$ perchè $f(0)=0$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cancel{(k-1)!}}{\cancel{k!}\ k}\, x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\log(1+x),\ P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

<u>Esercizio</u> Scrivere i polinomi di Taylor all' ordine n delle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad x_0 = 0$$

$$g(x) = \sqrt{1+x} \qquad x_0 = 0 .$$