Infiniti e Infinitesimi.

Definizione Una funzione $f(x)$ si dice infinita per $x \to x_0$, x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \to \infty$) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, (oppure $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

Definizione Una funzione $f(x)$ si dice infinitesima per $x \to x_0$, x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \to \infty$) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, (oppure $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$).

Esempi di infiniti e infinitesimi.

$f(x) = 3^x$ è un infinito per $x \to +\infty$ infatti $\lim_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$,

$f(x) = 3^x$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$ infatti $\lim_{x \to -\infty} 3^x = 0$,

$f(x) = tgx$ è un infinito per $x \to \frac{\pi}{2}$ infatti $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \infty$,

$f(x) = \frac{1}{x}$ è un infinitesimo per $x \to \infty$ infatti $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Definizione : Ordine di infinito (o di infinitesimo).
Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti (o infinitesimi) per $x \to x_0$ o per $x \to \infty$, con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha \in \Re^+$ e $l \in \Re$, $l \neq 0$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \quad \text{(o per } x \to \infty\text{)},$$

allora , si dice che per $x \to x_0$ o per $x \to \infty$, $f(x)$ è un infinito (o infinitesimo) di ordine α rispetto all'infinito campione (o infinitesimo campione nel caso degli infinitesimi) $g(x)$.

Esempio

Stabilire l'ordine di infinitesimo di $f(x) = tgx$ rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$ per $x \to 0$,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x^\alpha} = 1$ se $\alpha = 1$, quindi $ord(tgx) = 1$ rispetto a $g(x) = x$.

Allo stesso modo:
$1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine 2, per $x \to 0$, rispetto a x;
$\sin x$ è un infinitesimo di ordine 1, per $x \to 0$, rispetto a x;
$x^2 + x^3$ è un infinitesimo di ordine 2, per $x \to 0$, rispetto a x;
$x^2 + x^3$ è un infinito di ordine 3, per $x \to \infty$, rispetto a x.

Non sempre è possibile determinare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Per esempio, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \forall a > 1,\ \alpha > 0,$ cioè per nessun $\alpha > 0$, a^x ha lo stesso ordine di infinito di x^α.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \forall a > 1,\ \alpha, \beta > 0,$ per nessun $\alpha, \beta > 0$ $(\log_a x)^\beta$ ha lo stesso ordine di x^α.

CONFRONTO TRA INFINITI

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinite per $x \to x_0$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ non\ esiste & non\ confrontabili \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \to \infty$.

Esempio.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1,\qquad ord\left(\frac{1}{\sin x}\right)=ord\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x^2}=0,\quad \text{infatti}\ \ 1=ord\left(\sqrt{x}+x\right)<ord\left(x^2\right)=2$$

Nel caso di polinomi, l'ordine di infinito è dato dal grado del polinomio e si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^h+a_1x^{h-1}+.....+a_h}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+....+b_k}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & \text{se }\ h=k\\ \pm\infty & \text{se }\ h>k\\ 0 & \text{se }\ h<k\end{cases}.$$

In generale, nel calcolo $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, (f_1, f_2, g_1, g_2 infiniti per $x\to x_0$) si possono trascurare gli infiniti di ordine inferiore, infatti se per esempio $ord(f_1)>ord(f_2)$ e $ord(g_1)>ord(g_2)$ si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}\frac{1+\frac{f_2}{f_1}}{1+\frac{g_2}{g_1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1},\quad \text{(in quanto}\ \ \frac{f_2}{f_1}\to 0,\quad \frac{g_2}{g_1}\to 0\ \text{)}.$$

CONFRONTO TRA INFINITESIMI

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x\to x_0$ si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} l\neq 0 & ord(f)=ord(g)\\ \pm\infty & ord(f)<ord(g)\\ 0 & ord(f)>ord(g)\\ non\ esiste & non\ confrontabili\end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x\to\infty$.

Esempio.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^3+\sqrt{tgx}}{\left(e^x-1\right)^2+\sin x}=+\infty$$

infatti $\frac{1}{2}=ord\,(x+x^3+\sqrt{tgx})<ord\left[\left(e^x-1\right)^2+\sin x\right]=1$

Nel caso di polinomi, l'ordine di infinitesimo è dato dal grado più piccolo del monomio che lo compone.

Per esempio il polinomio $P(x)=x^2+x^3+x^5$ per $x\to 0$, è un infinitesimo di ordine 2.

In generale, nel calcolo $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, (f_1, f_2, g_1, g_2 infinitesime per $x\to x_0$) si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore, infatti se per esempio $ord(f_1)>ord(f_2)$ e $ord(g_1)>ord(g_2)$ si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_2}{g_2}\frac{\frac{f_1}{f_2}+1}{\frac{g_1}{g_2}+1}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_2}{g_2},\quad \text{(in quanto}\quad \frac{f_1}{f_2}\to 0,\qquad \frac{g_1}{g_2}\to 0\ \text{)}.$$

Nell'esempio precedente l'ordine di infinitesimo (per $x\to 0$) del numeratore $x+x^3+\sqrt{tgx}$ è $\frac{1}{2}$, in quanto $ord\,(x)=1,\ ord\,(x^3)=3,\ ord\,(\sqrt{tgx})=\frac{1}{2}$,

l'ordine di infinitesimo (per $x\to 0$) del denominatore $\left[\left(e^x-1\right)^2+\sin x\right]$ è 1,

in quanto $ord\left[\left(e^x-1\right)^2\right]=2$, $ord\,(\sin x)=1$.

Si ha: $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^3+\sqrt{tgx}}{\left(e^x-1\right)^2+\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{tgx}}{\sin x}=+\infty\,.$$

REGOLE ARITMETICHE

Siano $f(x) = o(x^{\alpha})$ (si legge *o piccolo di* x^{α}) cioè un infinitesimo di ordine superiore ad α per $x \to 0$,

$g(x) = o(x^{\beta})$ cioè un infinitesimo di ordine superiore a β per $x \to 0$,

allora

$$cf(x) = o(x^{\alpha}) \qquad \forall c \in \Re,$$
$$x^{\lambda} f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$$
$$f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$$
$$f(x) + g(x) = o(x^{\gamma}), \qquad \gamma = \min\{\alpha, \beta\}$$

Se invece $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite di ordine rispettivamente α e β,

allora

$$ord\big(f(x) + g(x)\big) = \max\{\alpha, \beta\}.$$

Esempi.

$1 - \cos\frac{1}{x^2}$ infinitesimo per $x \to \infty$, di ordine 4, rispetto a $\dfrac{1}{x}$.,

$\sqrt{x} + x^2 + 3x^{\frac{5}{2}}$ infinitesimo per $x \to 0^+$, di ordine $\frac{1}{2}$, rispetto a x,

$\sqrt{x^2 + x}$ infinito per $x \to \infty$, di ordine 1, rispetto a x,

$\sqrt{x} + x^2 + 3x^{\frac{5}{2}}$ infinito per $x \to +\infty$, di ordine $\frac{5}{2}$, rispetto a x,