INSIEMI

Insieme = "collezione di elementi/oggetti".

A insieme, a elemento,

$a \in A$ "a appartiene ad A"

$a \notin A$ "a non appartiene ad A"

$A = \{1, 4, 7\}$. ← descrizione per elencazione

es.

$\frac{4}{3} = 1,333\ldots = 1,\overline{3}$

$\frac{3}{5} = 0,6000\ldots = 0,6$

$\frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

esempi: insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ naturali $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ interi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$ razionali → espressione decimale finita o infinita periodica.

$\{x \in X \mid P(x) \text{ vera}\}$ → esempio $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ primo}\}$

proprietà di cui posso stabilire V/F

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ← irrazionali → espressione infinita non periodica.

unione

$$x = \boxed{13,2\overline{7}} = \frac{\boxed{1327} - \boxed{132}}{90} = \frac{1195}{90} = \frac{239}{18}$$

$$10x = 132,\overline{7} = 132,7\overline{7}$$

$$10x - x = 132,7\overline{7} - 13,2\overline{7} = 132,7 - 13,2$$

$$9x = \frac{1327 - 132}{10}$$

?! Perché ogni $\mathbb{Q}$ è periodico?

$$\frac{2}{7}$$

```
20   | 7
 60  |0,2857...
  40
   50
```

PRINCIPIO dei CASSETTI

Se metto $n+1$ oggetti in n cassetti c'è almeno un cassetto con 2 oggetti

ancora sulle proprietà caratteristiche

$P = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$ pari

potremmo definire

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 \in P\}$ ← non ha elementi

B è l'insieme vuoto. Indicato $\emptyset$.

Oss $a \neq \{a\}$ ← singoletto (insieme con un elemento)

⚠ Quando considero una propr. caratt.

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

↑ è importante precisare l'insieme.

In quel che segue consideriamo sempre un insieme universo X

Se non si fa questo ~~si rischi~~ esistono paradossi nella teoria.

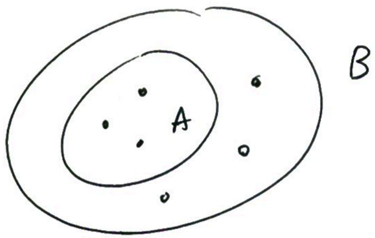
Paradosso di Russell

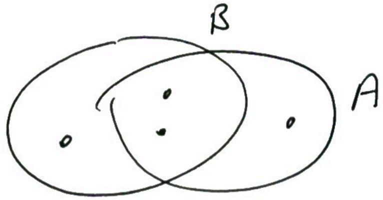
Sottoinsiemi A, B insiemi

$A \subseteq B \overset{def}{\iff}$ perogni $x \in A$, allora $x \in B$

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

incluso se e solo se per ogni implica





$A \not\subseteq B \overset{def}{\iff} \exists\, x \in A : x \notin B$

non incluso. tale che (anche " | ")

Notiamo $A \subseteq A$ $\emptyset \subseteq A$ per ogni A insieme.

es. $A = \{a, b\}$. I sottoinsiemi di A sono

$\emptyset$ $\{a, b\}$ $\{a\}$ $\{b\}$

2 elementi
↓
4 sotto.

Oss Se scrivo $\{a, b\}$ ma $a = b$ l'insieme ha un solo elemento!

$B = \{1, 2, 3\}$

3 elem.
↓
8 sott.

$\emptyset$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1,2\}$ $\{2,3\}$ $\{1,3\}$

$\{1,2,3\}$

Teorema

~~Un sottoin~~

Un insieme A con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

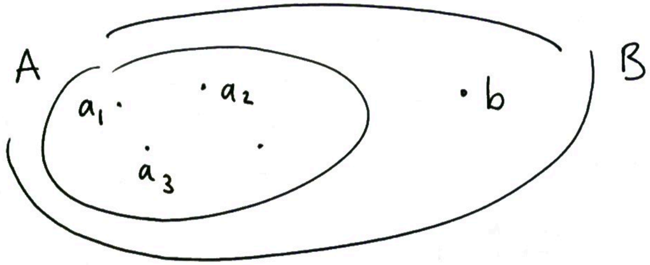
Teorema Sia $n \in \mathbb{N}$.

Un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Oss Vale anche per $n=0$. L'insieme vuoto ha 0 elementi e $2^0 = 1$ sottoinsieme.

dim

idea: aggiungendo un elemento raddoppio il numero di sottoinsiemi di un insieme.



$$\{\text{sottoinsiemi di } B\} = \left\{\begin{array}{l}\text{sottoinsiemi di } B \\ \text{che contengono } b\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{sottoinsiemi di } B \\ \text{che non contengono } b\end{array}\right\}$$

→ tanti quanti i sottoinsiemi di A.

↳ tanti quanti i sottoinsiemi di A

$$\{\text{numero di sott. } B\} = 2\,\{\text{numero dei sott. } A\}.$$

Es $p(n) = n^2 - 79n + 1601$

da un numero primo per

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 10, 11, \ldots, 61, 62, \ldots \cancel{80}$

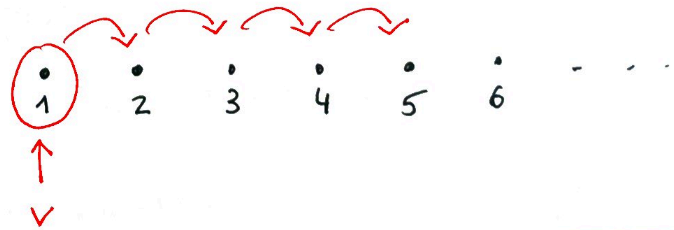
PRINCIPIO DI INDUZIONE.

Sia $P(n)$ una proposizione che dipende da $n \in \mathbb{N}$.

Se •) $P(1)$ è vera — inizializzazione

•) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ — eredità.

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.



Oss Si può modificare così:

Se •) $P(n_0)$ è vera.

•) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geq n_0$

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Esempio (somma dei primi n interi)

Vogliamo dimostrare che

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \leftarrow P(n)$$

es. $S = 1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

$$\begin{array}{l} 1+2+3+\dots+100 \\ 100+99+98+\dots+1 \\ \hline 101+101+101+\dots+101 \end{array} \qquad 2S = 101 \cdot 100$$

·) $P(1)$ vale perché $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

·) Se ipotizzo $P(n)$ vera allora voglio mostrare $P(n+1)$

$$\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$\overset{\text{sì!}}{(?)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Quindi $P(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$!

Esempio 2 (somma dei primi dispari)

La somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2

$$1+3+5+7+9+\dots+(2n-1) = n^2.$$

$$\sum_{K=1}^{n}(2K-1) = n^2$$

somma per K da 1 a n di (2K−1)

• $P(1)$ vera. $1 = 1^2$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

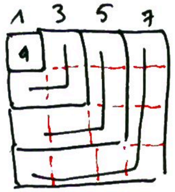
$$\sum_{K=1}^{n+1}(2K-1) = \sum_{K=1}^{n}(2K-1) + (2(n+1)-1)$$

$$= \underbrace{\sum_{K=1}^{n}(2K-1)} + 2n+1.$$

$$= n^2 + 2n + 1.$$

$$= (n+1)^2.$$

Idea intuitiva



Esercizio Come dedurre la formula per i numeri dispari da quella precedente?

La dimostrazione del teorema sul numero di sottoinsiemi si può formalizzare proprio in questo modo.

$P(n)$ = un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi

$P(1)$ vera

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è l'argomento di prima.

Oss Se A è un insieme indichiamo

$\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A
l'insieme dei sottoinsiemi di A

Se A è un insieme finito indico con $\mathrm{card}(A)$ il numero dei sottoinsiemi

Il teorema dice

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\mathrm{card}\, A}$$

In maniera suggestiva, indicando con

$$2^A := \mathcal{P}(A)$$

significa che definisco il simbolo a sinistra

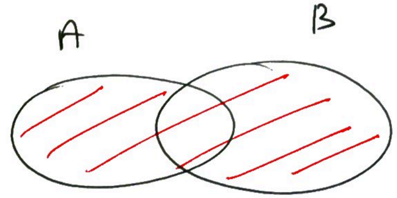
il teorema dice $\mathrm{card}(2^A) = 2^{\mathrm{card}\, A}$.

Operazioni fra insiemi

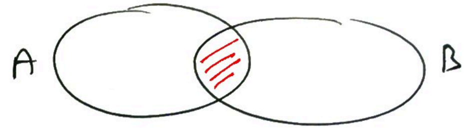
Dati $A, B \subseteq X$ insiemi

$A \cup B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B \}$ $\qquad \vee = $ "o"

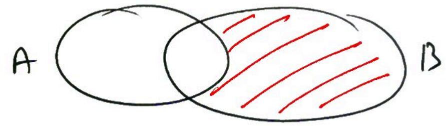
o non esclusivo



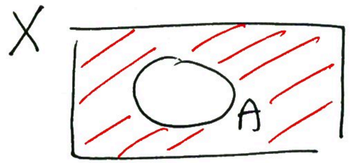
$A \cap B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$ $\qquad \wedge = $ "e"



$B \setminus A = \{ x \in X \mid x \in B \text{ e } x \notin A \} = B \cap A^c$



$A^c = \{ x \in X \mid x \notin A \}$



Oss $\quad A \cup B = B \cup A$ (commut)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \rightarrow$ ci permette di scrivere $A \cup B \cup C$. (associat)

Se $A \cap B = \emptyset$ diremo che A e B sono disgiunti.

Esercizi (distrib.)