In questo testo $\log x$ *indica il logaritmo in base* e

(A) Domande.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la propria risposta:[1]

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile e $f'(x_0) = 0$ per $x_0 \in \mathbb{R}$, allora x_0 è un massimo o un minimo.
2. Data la successione $a_n = \frac{100n}{n^2+1}$, esiste un numero intero $N > 0$ tale che $a_N < \frac{1}{100}$.
3. L'equazione differenziale $y'(t) = \cos(y(t))$ non ammette soluzioni costanti

1. FALSO. La funzione $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ non ha massimo né minimo ma $f'(0) = 0$.
2. VERO. Siccome $a_n \to 0$, per la definizione di limite, si ha che dato $0 < \epsilon < 1/100$ esiste N tale che $a_n = |a_n - 0| \leq \epsilon$ per ogni $n \geq N$, in particolare $a_N < \frac{1}{100}$.
3. FALSO. La funzione costante $u(t) = \pi/2$ è soluzione perchè
$$u'(t) = 0, \qquad \cos(u(t)) = \cos(\pi/2) = 0$$

(B) Esercizi.

1. Si studi la funzione seguente sul suo dominio naturale
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$
e se ne tracci un grafico qualitativo indicando eventuali asintoti (orizzontali/verticali/obliqui). La funzione f è iniettiva?

SOLUZIONE. La funzione è definita per $x^2 + x \geq 0$, risolvendo si trova $x \leq -1$ oppure $x \geq 0$ quindi
$$D =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$$
I limiti ai punti di bordo del dominio si calcolano facilmente i limiti
$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x^2 + x} - x = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + x} - x = 0$$
mentre si ha
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$$
L'ultimo limite si può ad esempio calcolare moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2 + x} + x$
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

[1] giustificare tramite un argomento o dimostrazione, o negare tramite un controesempio

Per $x \to -\infty$ esiste un asintoto obliquo infatti si ha (notare che x è negativo!)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 = -2$$

inoltre (moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x}-x$) si arriva a

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - x + 2x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} + x = -\frac{1}{2}$$

quindi l'asintoto obliquo è $y = -2x - \frac{1}{2}$.

Calcolando la derivata si ha la formula

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1$$

definita sulla unione degli intervalli aperti $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$. Studiando le disuguaglianze si vede che

$$f'(x) < 0, \qquad \text{se } x < -1$$
$$f'(x) > 0, \qquad \text{se } x > 0$$

Notare che $f'(x) \to -\infty$ per $x \to -1$ mentre $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 0$.

2. Studiare la convergenza delle serie seguenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$$

(nel secondo caso determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge).

SOLUZIONE. Per il criterio del rapporto sulla prima serie si trova

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2^n}{n^2} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

dunque la serie converge. (Si può applicare anche il criterio della radice)

Per il criterio della radice sulla seconda serie si trova

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{n}} = \lim_n \frac{e^x}{\sqrt[n]{n}} = e^x$$

quindi la serie diverge se $e^x > 1$ ovvero $x > 0$, mentre converge se $e^x < 1$ ovvero $x < 0$. Per $x = 0$ il criterio non si applica ma la serie si riduce alla serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge.

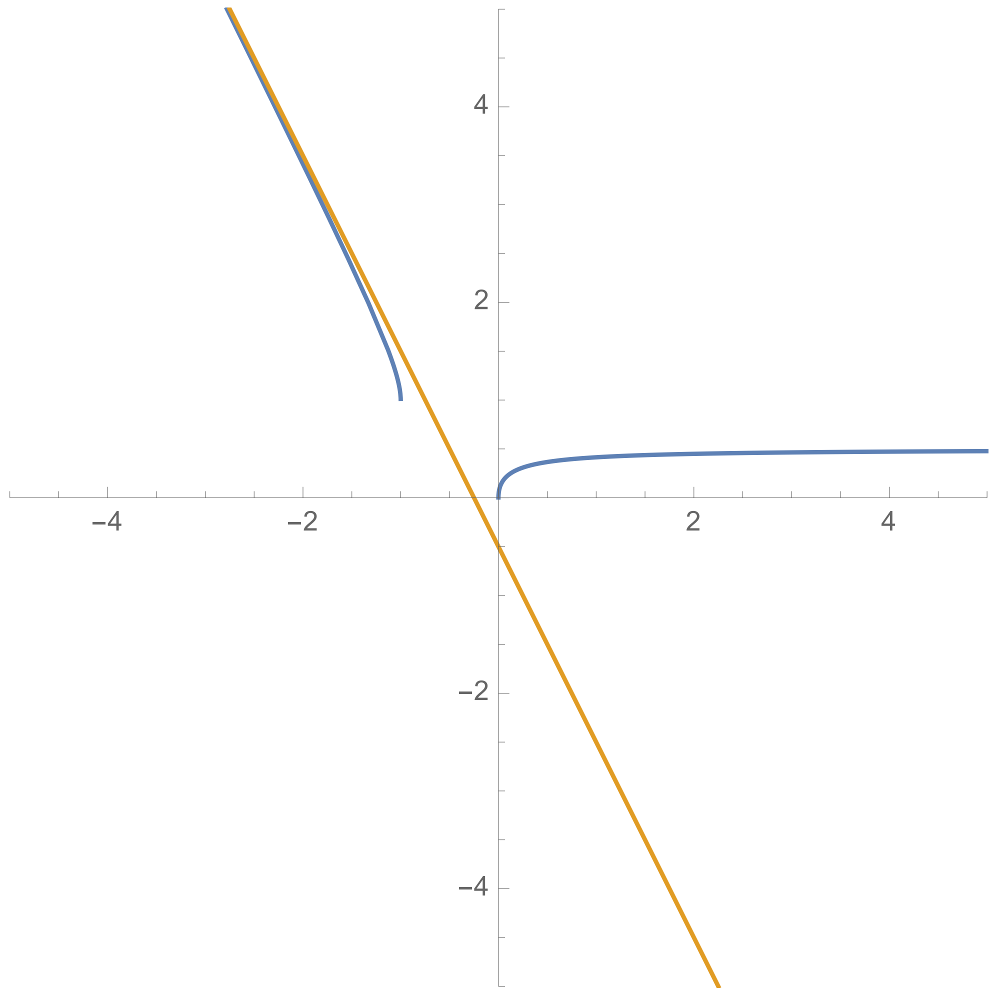

Figure 1: grafico di $f(x)$

3. Calcolare l'integrale indefinito (ovvero l'insieme delle primitive) seguente

$$\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}dx$$

Indicazione: usare una opportuna sostituzione

SOLUZIONE. Facendo il cambio di variabile $u = e^x$ e dunque $x = \log u$ con $dx = \frac{du}{u}$ si ha

$$\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{1+2u}{u^2-1}\frac{du}{u}$$

Scomponendo il denominatore in fratti semplici

$$\frac{1+2u}{u(u^2-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{u-1}$$

si trova che (calcoli omessi) $A = -1, B = -1/2, C = 3/2$.

Da qui si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1+2u}{u(u^2-1)}du &= \int \frac{-1}{u} + \frac{-1/2}{u+1} + \frac{3/2}{u-1}du \\ &= -\log|u| - \frac{1}{2}\log|u+1| + \frac{3}{2}\log|u-1|\end{aligned}$$

Sostituendo $u = e^x$ si trova l'insieme delle primitive

$$= -x - \frac{1}{2}\log|e^x+1| + \frac{3}{2}\log|e^x-1| + c$$