Esercizio 1. Applichiamo il teorema di Lagrange ad una funzione il cui grafico è una parabola e diamo interpret. geometrica.

Teo. Lagrange $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

derivabile in $]a,b[$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad \text{per un certo } \xi \in]a,b[$$

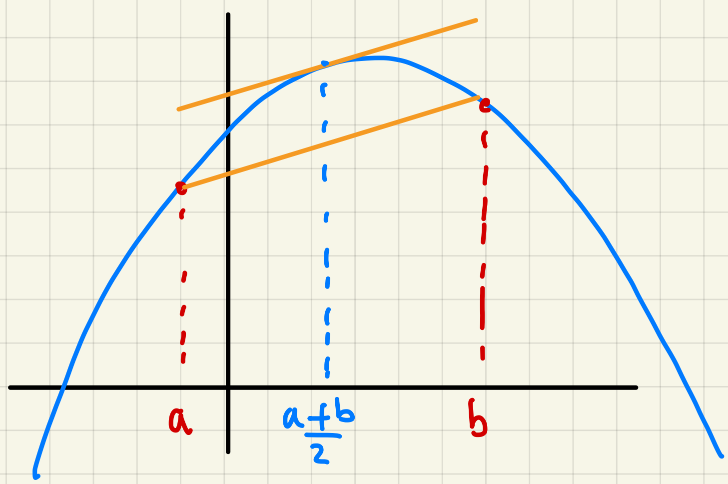
$f'(x) = 2\alpha x + \beta$

Qui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

$$\alpha b^2 + \beta b + \cancel{\gamma} - (\alpha a^2 + \beta a + \cancel{\gamma}) = (\underbrace{2\alpha\xi + \beta}_{f'(\xi)})(b-a)$$

$$\cancel{\alpha}(b^2 - a^2) + \cancel{\beta(b-a)} = 2\cancel{\alpha}\xi(b-a) + \cancel{\beta(b-a)}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}(b+a)$$ ← punto medio di $[a,b]$.



Esempio Calcolare $\sqrt{101}$ con una certa precisione. Uso il teorema di Lagrange per mostrare

$$10+\frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10+\frac{1}{20}$$

$10,0\overline{45}$ $\qquad$ $10,05$

Applico il teorema di Lagrange a

$f: [100, 101] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f(101)-f(100) = f'(\xi)(101-100) \qquad \xi \in]100, 101[$$

$$\sqrt{101}-10 = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot 1$$

monotona in ξ decrescente.

$$\xi \in [100, 101] \qquad \frac{1}{2\cdot 11} \leq \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{2\cdot 10}$$

Esempio Mostrare che per ogni $x>0$ vale

$$\boxed{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}}$$

Definiamo la funzione

$$f:]0,+\infty[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

Se dimostro $f(x)>0 \quad \forall x>0$ ho finito.

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Calcolo

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(1+x)^2}$$

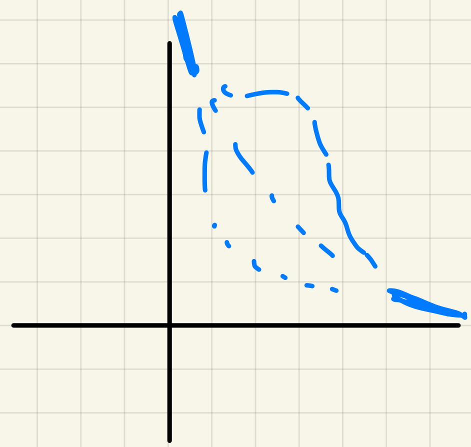
per ogni $x>0$

$$= -\frac{1}{\underbrace{x^2+x}_{=x(1+x)}} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-(1+x)+x}{x(1+x^2)} = -\frac{1}{x(1+x)^2} < 0.$$

Allora f strettamente decrescente su $]0,+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\to 0} = 0$$



$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\to 1} = +\infty$$

Applicazione La serie armonica generalizzata

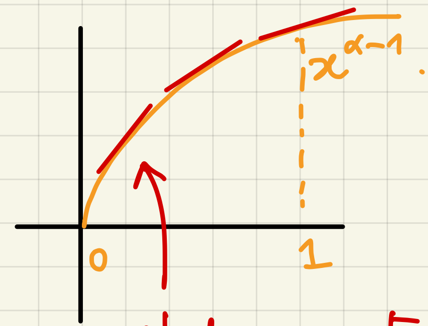
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad \text{converge per} \qquad 1<\alpha<2 .$$

Considero $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad \boxed{f(x)=x^{\alpha-1}}$

(caso modello $\alpha = 1{,}5 \rightsquigarrow f(x)=\sqrt{x}$)

Si ha $f'(x) = (\alpha-1)\, x^{\alpha-2} \qquad \forall x>0$

è una funzione decrescente perché $-1<\alpha-2<0$



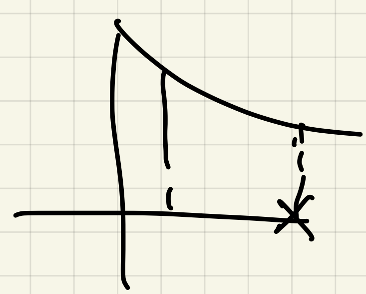
f' decrescente

la pendenza della tangente dimin.

Scriviamo il T. Lagrange nell'intervallo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ← per ogni $n\in\mathbb{N}$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad \xi \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$$

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\,\xi^{\alpha-2}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]$$



$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq (\alpha-1)\frac{1}{n^{\alpha-2}}\,\frac{1}{n^2+n}$$

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq (\alpha-1)\frac{1}{n^{\alpha-2}}\cdot\frac{1}{2n^2}$$

più piccolo se metto n^2 al posto di n.

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq (\alpha-1)\frac{1}{n^{\alpha-2}} \cdot \frac{1}{2n^2}$$

cioè
$$\boxed{\frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{2}{\alpha-1}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right].}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$!

allora
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{2}{\alpha-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)}_{\text{serie telescopica!}}$$

ricorda! $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n$

$$\leq \frac{2}{\alpha-1}\left(1 - \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}}_{=0}\right).$$

In conclusione
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{2}{\alpha-1} \qquad \forall\ 1<\alpha<2}$$

Teoremi di de l'Hôpital

Teorema Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue derivabili in $]a,b[\setminus \{x_0\}$

Supponiamo $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$

Se esiste

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Nella pratica il teorema dice

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \text{calcola} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se esiste è uguale al primo

dim Per dimostrarlo mi serve una variante del teo di Lagrange (detto teorema di Cauchy)

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}} \qquad \xi \in]a,b[.$$

se $g(x) = x$ è il teo. Lagrange.

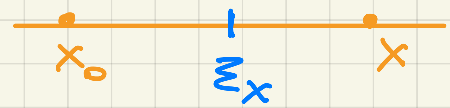
Il punto ξ è lo stesso per entrambe f, g.

Dimostro ora de l'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\overbrace{f(x_0)}^{=0}}{g(x)-\underbrace{g(x_0)}_{=0}}$$

ora uso il teorema appena enunciato:
esiste $\xi_x \in]x_0, x[$ tale che

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$



se $x \longrightarrow x_0$
allora $\xi_x \longrightarrow x_0$.

$$\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = L$$

Il teorema vale anche nei casi seguenti:

se $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\left(\text{oltre a } \frac{0}{0}\right)$

con $x_0 \in \mathbb{R}$

ma vale anche se $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$.

Esempi vari

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x}} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)}_{=1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x}{1} = 1.$$

uso de l'Hopital
quindi se esiste il lim a dx
allora esiste anche quello a sx e sono uguali

Altra idea

$$\frac{\log(1+\sin x)}{x} = \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$

$x\to 0$
$y=\sin x$
$y\to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Anticipazione: $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!}$ + ordine sup.

(3) $$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-2+x}{\sin^2 \pi x} = \frac{1-2+1}{0} = \frac{0}{0}$$

non è un vero uguale.

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}+1}{2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)\pi} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0. \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{1}{\cos(\pi x)}}_{=-1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}+1}{\sin(\pi x)}$$

$$\overset{(H)}{=} -\frac{1}{2\pi} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x^3}}{\pi\cos(\pi x)} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{-\pi} = \frac{1}{\pi^2}$$

confronto tra infiniti / infinitesimi $\boxed{a \neq 1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^n} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a e / x}{n\, x^{n-1}} = 0 .$$

$$\left(\text{ricordo } D \log_a x = \frac{\log_a e}{x} \right)$$

quindi $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0}$$

ogni Polinomio va all infinito più veloce del log.

esercizio $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^m}{x} = 0$$

Analogamente si può vedere $\boxed{a > 1}$

$a^x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0}$$

($x^n \to +\infty$, $a^x \to +\infty$)

l'esponenziale tende a $+\infty$ più veloce di ogni polinomio.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{(\log_e a)\, a^x} = \frac{n}{\log_e a} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{a^x}$$

$$\overset{(H)}{=} \dots \overset{(H)}{=} \underline{\underline{\text{cost}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$$

Esercizio Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \log_a x \qquad \lim_{x\to 0^+} x\left(\log_a x\right)^m$$

Esempio
$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow\,+\infty}{x}\Big(\underbrace{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}_{\downarrow\, 0}\Big).$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{1/x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1.$$

Esercizi

1. $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)}$$

2. $$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x}}$$

Esempio (definizione di e)

Avevamo definito $e = \boxed{\lim_{y\to 0^+} (1+y)^{\frac{1}{y}}}$

(oppure $e = \boxed{\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$)

Mostriamo che $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ crescente.

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

e che la $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ decrescente

$$g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = f(x)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Inoltre vale $f(x) < g(x) \quad \forall x > 0$

Si ha
$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \sup_{x>0} f(x) \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) &= \inf_{x>0} g(x) \end{aligned}}$$
sono uguali!

Mostriamo che f è crescente

$$f'(x) = D\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = D\left(e^{\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}\right)$$

$$= D\left(e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \underbrace{D\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}_{\vee\, 0} \cdot \underbrace{f(x)}_{\vee\, 0}$$

$$D\, e^{\varphi(x)} = \varphi'(x)\, e^{\varphi(x)}$$

$$D\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot D\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

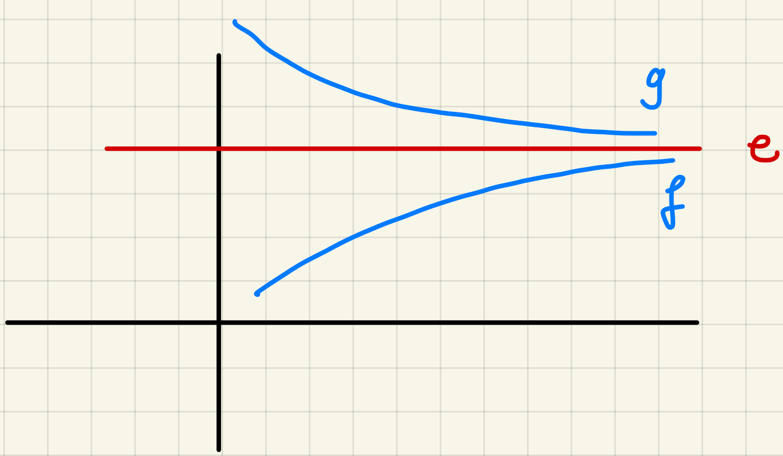
Ieri abbiamo dimostrato che questa quantità era sempre strettamente positiva!

Dunque $f' > 0$ $\forall x > 0$ e f strettam. crescente.

Usando che $g(x) = f(x)\left(1+\frac{1}{x}\right)$ g è decrescente (o ripetendo ragionamenti analoghi)

Sia $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ Infatti $L = e$

Allora $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\left(1+\frac{1}{x}\right) = L\cdot 1 = L$



Ne segue che $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

e $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \nearrow \quad \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) \searrow$

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$n=1 \qquad 2 < e < 4$$

$$n=2 \qquad \underset{2,25}{\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2} < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3,375$$

trovo approssimazioni di e tramite numeri razionali

9 DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ che sia derivabile in ogni punto di $]a,b[$.

Allora $f':]a,b[\to \mathbb{R}$ la funzione derivata potrebbe essere a sua volta derivabile

<u>def</u> Diremo che f ammette derivata seconda in $x_0 \in]a,b[$ se esiste

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

In maniera analoga (iterando il ragionam.) si possono definire le derivate di ordine superiore

$f^{(n)}(x_0)$ derivata n-esima di f in x_0

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

serve che f ammetta $n-1$ derivate.

<u>Altre notazioni</u>

$$f''(x) \qquad D^2 f(x) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f^{(n)}(x) \qquad D^n f(x) \qquad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Esempio Sia $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 \log x$$

$$f'(x) = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \log x + x$$

$$f''(x) = 2\left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) + 1 = 2 \log x + 3 .$$

Noto che $f'(x) = x(2 \log x + 1)$

è positiva se $2 \log x + 1 > 0$

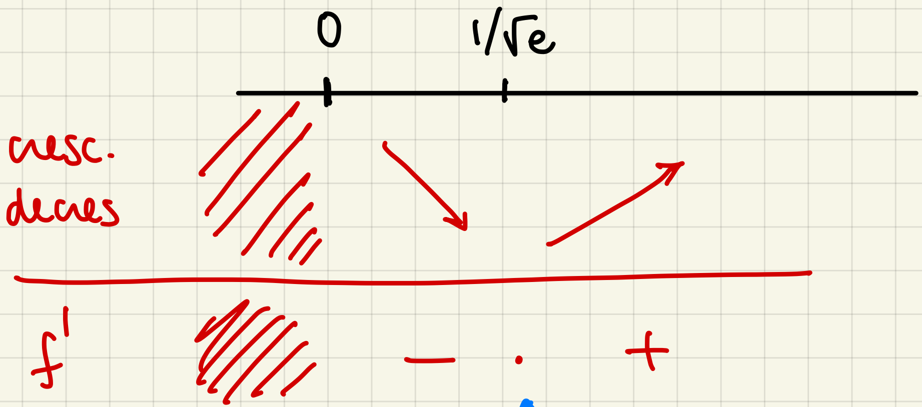
$$\log x > -\frac{1}{2}$$

$$x > e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$

$f'(x) = 0$

$\Updownarrow$

$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$



si vede che $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è un minimo

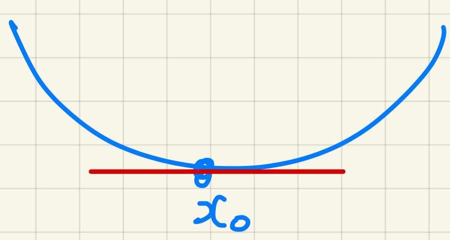
f' è crescente lì vicino.
allora $f'' > 0$

Calcolo

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + 3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2 > 0 .$$

$f''(x_0) > 0$

$f'(x_0) = 0$



$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x$$ del tipo $0\cdot(-\infty)$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2 = 0 .$$

[analogo

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \log x = 0$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x^n (\log x)^m = 0$$

serve usare de l'Hopital m volte.

<u>OSS</u> $$\lim_{x\to 0^+} x^n (\log x)^m = 0$$

se $y = \frac{1}{x}$ ottengo

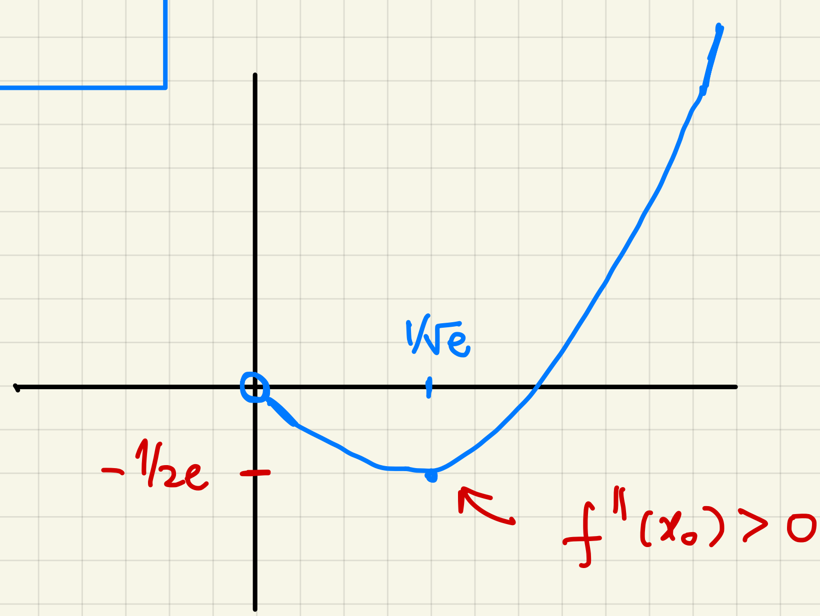
$$0 = \lim_{y\to +\infty} y^{-n} \log\left(\frac{1}{y}\right)^m = \lim_{y\to +\infty} \frac{-\log(y)^m}{y^n}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{y\to +\infty} \frac{(\log y)^m}{y^n} = 0}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \log x = +\infty$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e}\cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2e}$$

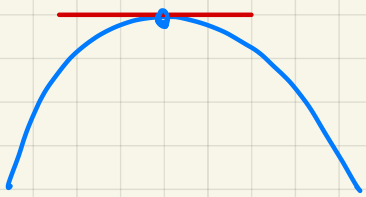


Teorema Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua e derivabile due volte tale che

- $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \implies x_0$ minimo relativo
- $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \implies x_0$ massimo relativo

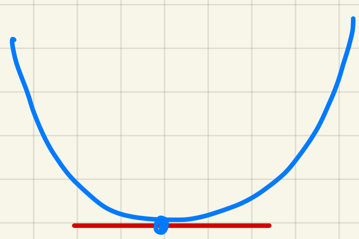
(locale non nec. globale)

Graficamente



$f''(x_0)<0$

concavità verso il basso



$f''(x_0)>0$

concavità verso l'alto

$f''(x_0)=0$.

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x}$

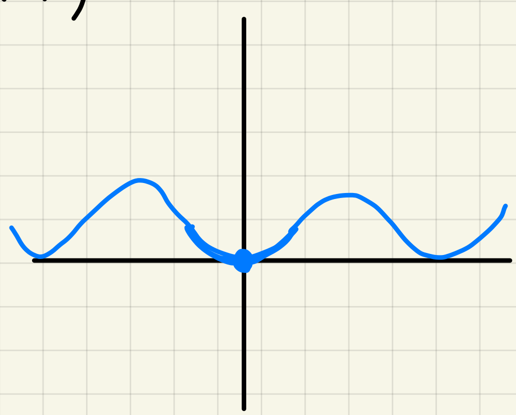
0 è un minimo della funzione f.

$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$ $\qquad f'(0)=0$.

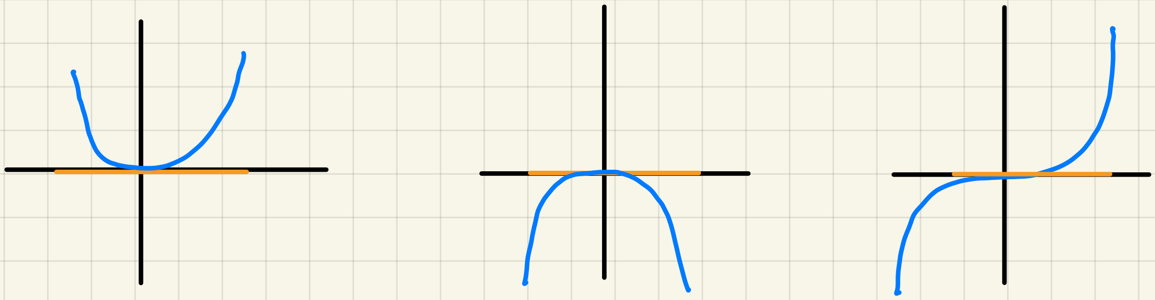
$f''(x) = 2\left(\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)\right)$

$f''(0) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$f''(0) = 2 > 0$



Esempi Prendiamo le funzioni



min x^4 $-x^4$ max x^3 flesso.

In tutti e tre i casi $f''(0)=0$

	x^4	$-x^4$	x^3
$f'(0)$	0	0	0
$f''(0)$	0	0	0
$f'''(0)$	0	0	$\boxed{6}$
$f^{(4)}(0)$	$\boxed{+24}$	$\boxed{-24}$	0

Teorema Supponiamo f derivabile n volte e sia

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{array}\right]$$

n prima derivata non nulla.

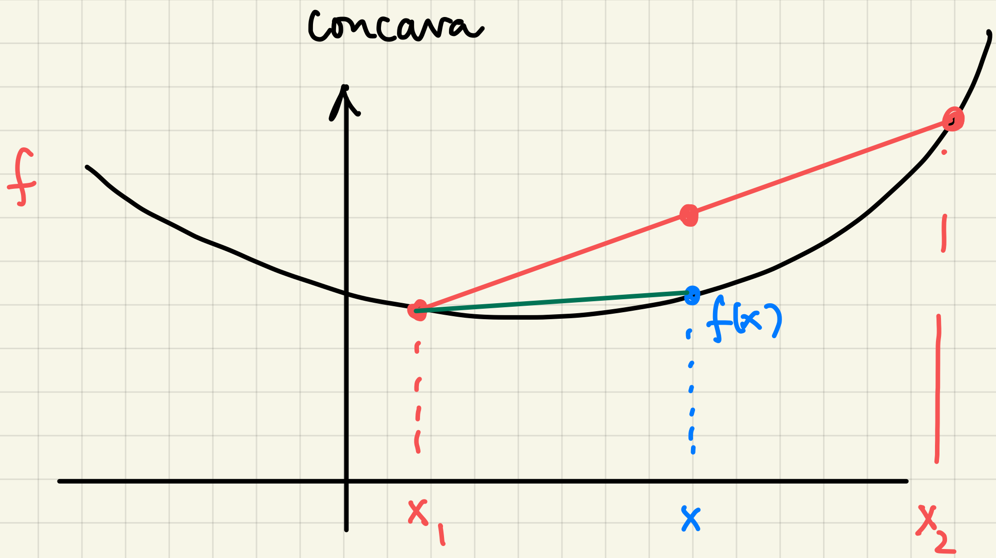
Allora

(a) se n dispari x_0 né max né min

(b) se n pari $f^{(n)}(x_0)>0$ x_0 min.

$f^{(n)}(x_0)<0$ x_0 max

Funzioni convesse e derivata seconda



convessa / concava

$\Updownarrow$

presi due punti il grafico sta sotto al segmento / sopra.

CONVESSA

$$\boxed{f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)} \quad \forall\, x \in [x_1, x_2]$$

il grafico di f sta sotto!

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

coeff angolare $(x, f(x))$ $(x_1, f(x_1))$ $\le$ coeff angolare $(x_2, f(x_2))$ $(x_1, f(x_1))$

La definizione di concava è con $\ge$

Noto che f convessa $\iff$ $-f$ concava

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile due volte.

Allora f convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

f concava $\iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

Esempio Studiare il grafico della funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x e^{-x}$$

Studio i limiti all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = -\infty \qquad (\text{perché } x \to -\infty \quad e^{-x} \to +\infty)$$

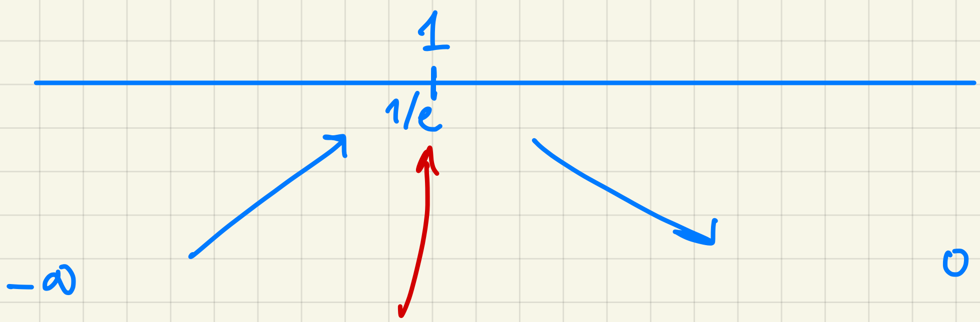
Calcolo $f'(x) = e^{-x} + x \cdot D(e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$.

$(e^{-x} > 0)$

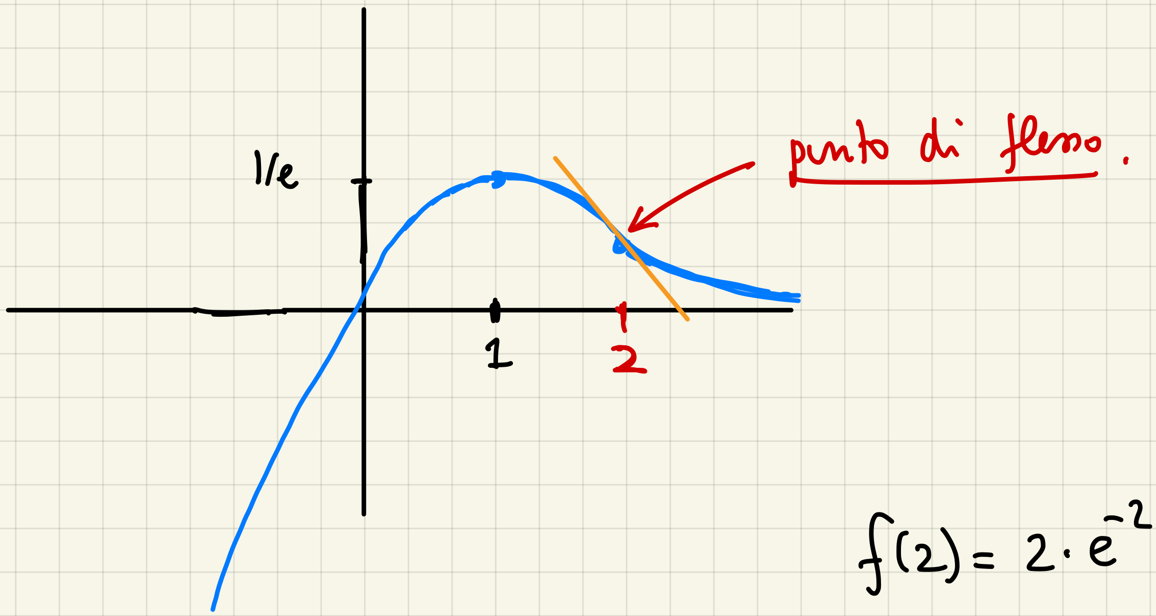
allora $f'(x) > 0$ per $x < 1$

$f'(x) = 0$ per $x = 1$

$f'(x) < 0$ per $x > 1$



1 è il massimo globale $\quad f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

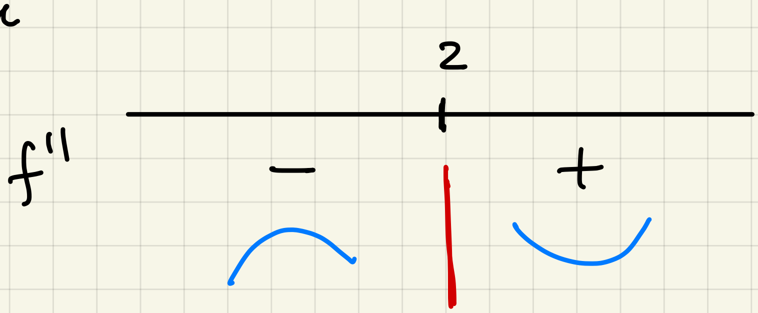


$f(2) = 2 \cdot e^{-2}$

$f(2) = \dfrac{2}{e^2}$

Calcolo la derivata seconda

$$f''(x) = D\, f'(x) = D\left((1-x)\, e^{-x}\right)$$
$$= -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x})$$
$$= (x-2)\, e^{-x}$$



In $x=2$

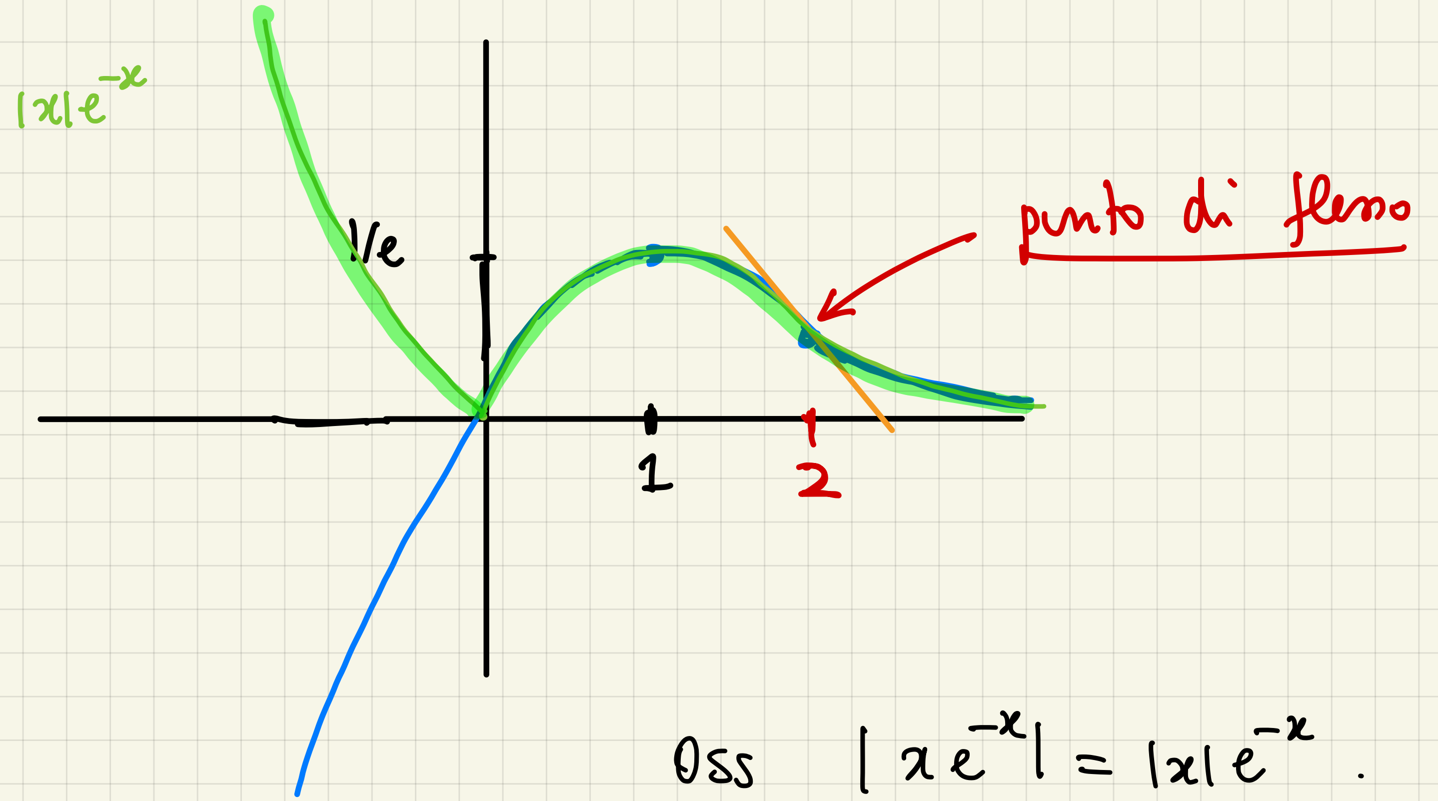
$f''(2) = 0$

cambia la concavita'

PUNTO DI FLESSO

<u>OSS</u>| Se devo studiare

$$f(x) = |x|\, e^{-x}$$



Oss $\quad |x e^{-x}| = |x| e^{-x}$.

<u>Oss</u> Dato il grafico di $f(x)$ posso dedurre quello di $|f(x)|$

$$|x|e^{-x} = \begin{cases} x e^{-x} & x > 0 \\ -x e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

<u>Esercizio</u> Studiare il grafico di

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = (4x+3)\, e^{\frac{1}{x}}$$

Dedurre il grafico di $\quad g(x) = |4x+3|\, e^{\frac{1}{x}}$.

Noto che $\quad g(x) = |f(x)|$.

Esercizio Mostrare che l'equazione

$$4x^2 - \log(1+x^2) - \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\, x = 0$$

ammette esattamente una soluzione in $[0,1]$.

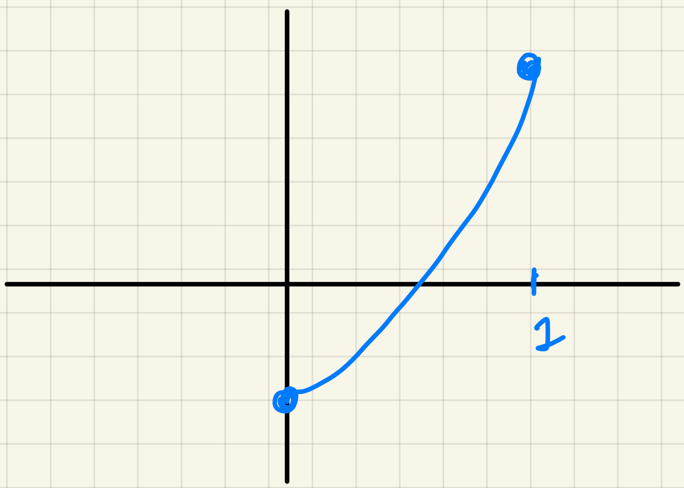
$$f(x) = 4x^2 - \log(1+x^2) - \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\, x$$

$$f(0) = 0 - \log(1) - \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\, 0 = -\frac{\pi}{2} < 0$$

$$f(1) = 4 - \log(2) - \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \mathrm{arctg}(1)$$

$$= 4 - \log(2) - \cancel{\frac{\pi}{2}} + \cancel{\frac{\pi}{2}} > 0 .$$

Siccome f continua su $[0,1]$, $f(0)<0$ $f(1)>0$ allora esiste almeno un $x_0 \in [0,1)$: $f(x_0) = 0$.



Mostrare che $f'(x) > 0$ $\forall x \in]0,1[$.