7 Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

Sia ξ punto fisso di $\phi \in C(I)$ e I è un intervallo chiuso (non necessariamente limitato) di $\mathbb{R}$. Supponiamo di essere nelle ipotesi in cui:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad \text{converge a } \xi \;\; (\xi = \phi(\xi)) \quad \text{con} \quad x_0 \in I$$

Allora:

- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p = 1 \iff 0 < |\phi'(\xi)| < 1$
- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p > 1 \iff \phi^{(j)}(\xi) = 0$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ con $1 \leq j \leq p-1$

Dimostrazione
1) si dimostra subito visto che

$$e_{n+1} = |\phi'(z_n)|e_n \quad \text{con } z_n \in (\xi, x_n)$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left|\phi'(\lim_{n\to\infty} z_n)\right| = |\phi'(\xi)|$$

per 2) utilizziamo la formula di Taylor di grado $p-1$ centrata in ξ e calcolata in x_n, con il resto p-esimo in forma di Lagrange.

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(\xi) + \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \cdots + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x_n - \xi)^{(p-1)} + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!} + \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$

con $u_n \in (\xi, x_n)$

- **Dimostriamo " $\Leftarrow$ " (condizione sufficiente)**
  Da Taylor resta solo
  $$x_{n+1} - \xi = \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$
  e passando ai moduli
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(u_n)|}{p!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|\phi^{(p)}(\xi)|}{p!} \neq 0$$
  e_n^p ovvero per p, $\{x_n\}$ ha ordine esattamente p.

- **Dimostriamo "$\Rightarrow$" (condizione necessaria)**
  Per ipotesi $\{x_n\}$ ha esattamente ordine $p > 1$.
  Abbiamo per assurdo che $\exists\, j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0$, prendiamo $k = \min\{j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$ e dal polinomio di Taylor iniziale si avrebbe:
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{|\phi^{(k)}(\xi)|}{k!} = L' \neq 0$$
  ma allora
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{e_{n+1}}{e_n^k} \cdot e_n^{k-p}$$
  $$\left(\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \to L' \text{ ed } e_n^{k-p} \to \infty \text{ perchè } k - p < 0 \text{ ed } e_n \to 0\right)$$
  cioè
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \to \infty, \quad n \to \infty$$
  contraddicendo l'ipotesi che $\{x_n\}$ abbia ordine esattamente p.