Perturbazione del termine noto

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice non singolare, $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax=b$, $b \neq 0$ e $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema perturbato $A\tilde{x} = \hat{b} = b + \delta b$

Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ vale la seguente stima dell'errore relativo su x: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le k(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ dove $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Dim.

Dato che $x = A^{-1}b \neq 0$ calcoliamo l'errore relativo in norma.

$\tilde{x} = \cancel{x} + \delta x = \cancel{A^{-1}b} + A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$.

Stimiamo quindi da sopra $\frac{1}{\|x\|}$, cioè da sotto $\|x\|$.

Essendo x la soluzione: $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ da cui $\|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|}$ e $\frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$

perciò: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

Perturbazione sulla matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice non singolare, $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax=b$, $b \neq 0$ e $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema perturbato $\hat{A}\tilde{x} = b$, $\hat{A} = A + \delta A$

Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ vale la seguente stima dell'errore relativo su x: $\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \le k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ dove $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Dim.

Da $\hat{A}\tilde{x} = (A + \delta A)(x + \delta x) = b$ otteniamo:

$\cancel{Ax} + A\delta x + \delta A \tilde{x} = \cancel{b}$ cioè:

$\delta x = A^{-1}(-\delta A \tilde{x}) = -A^{-1}\delta A \tilde{x}$ quindi:

$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A \tilde{x}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|$ perciò:

$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$