

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ ,  $\text{rango}(A) = n$ . Fattorizzando  $A = QR$ , si ha che

$$A^t A = (QR)^t QR = R^t Q^t QR = R^t I R = R^t R$$

e

$$A^t b = R^t Q^t b$$

quindi il sistema  $A^t A x = A^t b$  diventa

$$R^t R x = R^t Q^t b$$

ma essendo  $R$  (e quindi  $R^t$ ) invertibile

$$(R^t)^{-1} R^t R x = R x = (R^t)^{-1} R^t Q^t b = Q^t b$$

cioè il sistema  $A^t A x = A^t b$  equivale al sistema triang. sup.

$$R x = d = Q^t b$$

che si può facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro.

Nella pratica andiamo a risolvere un sistema perturbato del tipo  $\tilde{R} \tilde{x} = \tilde{d}$ , con  $R$  molto meglio condizionata di  $A^t A$ .