

Si dimostri la convergenza del metodo di Newton nel caso strettamente convesso o concavo

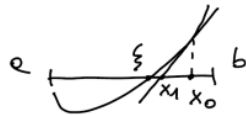
Metodo di Newton: Linearizzare iterativamente la funzione con la tangente nel punto

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \end{cases} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Convergenza metodo di Newton:

$$\begin{cases} f \in C^2[a, b] \\ f(a)f(b) < 0 \\ f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \\ x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Il metodo di Newton è ben definito (cioè } f'(x_n) \neq 0 \text{)} \\ \text{e converge all'unico zero } \xi \text{ di } f \text{ in } [a, b]$$

Si considera il caso:



Dimostriamo come prima cosa: $x_n \in (\xi, b] \Rightarrow x_{n+1} \in (\xi, b]$

f è esattamente convessa \Rightarrow La tangente sta "sotto al grafico" $\forall x \in [a, b]$
 \Rightarrow La tangente in un punto $\in (\xi, b]$ interseca l'asse x "a destra" di ξ

Dimostriamo quindi: $x_{n+1} < x_n$ (cioè $\{x_n\}$ è decrescente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$$

Poiché per $x_n \in (\xi, b]$ si ha $f(x_n) > 0$. Inoltre $f'(x_n) > 0$ in $(\xi, b]$ altrimenti per avere uno zero f'' in $(\xi, b]$ dovrebbe cambiare segno.

- $f(a) < 0, f(b) > 0$
- $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- $x_0 \in [a, b]$

Dimostriamo quindi: $x_{n+1} < x_n$ (cioè $\{x_n\}$ è decrescente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$$

Poiché per $x_n \in (\xi, b]$ si ha $f(x_n) > 0$. Inoltre $f'(x_n) > 0$ in $(\xi, b]$ altrimenti per avere uno zero f'' in $(\xi, b]$ dovrebbe cambiare segno.

Abbiamo quindi che $\{x_n\}$ è una successione decrescente, con $x_n > \xi \quad \forall n$.

Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\} = \eta \quad \text{con} \quad \eta \geq \xi$$

Infine

$$\begin{aligned} \eta &= \lim x_{n+1} = \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\ &= \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \lim x_n - \frac{\lim f(x_n)}{\lim f'(x_n)} \\ &= \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \leftarrow \lim x_n = \eta \\ &= \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \end{aligned}$$

Quindi

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \quad \text{con} \quad f'(\eta) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0 \Rightarrow \eta = \xi$$