Fattorizzazione QR per la soluzione di sistemi lineari sovradeterminati

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ tale che $rango(A) = n$
Allora $\exists Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortogonale (cioè $Q^tQ = I$) e $\exists R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tringolare superiore con $det(R) \neq 0$ tali che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = QR = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ q_{m1} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Q^t è ortogonale, cioè $Q^tQ = I$, in particolare Q^t ha per righe le colonne di Q, quindi:
Il prodotto riga-i x colonna-j = prodotto scalare = delta di Kronecker
Ciò implica che le colonne di Q, quindi sono vettori *ortonormali* di R^m.
Siccome R è invertibile → $QRR^{-1} = Q = AR^{-1}$ e l'inversa di una matrice triangolare è triangolare dello stesso tipo.

Il prodotto di A per le colonne di R^{-1} permette di ottenere come combinazione lineare delle prime *j* colonne di A e, grazie a Q ortogonale, le colonne si ortonormalizzano → Algoritmo di Gram-Schimdt.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $rango(A) = n$. Fattorizzando $A = QR$, si ha che

$$A^tA = (QR)^tQR = R^tQ^tQR = R^tIR = R^tR$$

e

$$A^tb = R^tQ^tb$$

quindi il sistema $A^tAx = A^tb$ diventa

$$R^tRx = R^tQ^tb$$

ma essendo R (e quindi R^t) invertibile

$$(R^t)^{-1}R^tRx = Rx = (R^t)^{-1}R^tQ^tb = Q^tb$$

cioè il sistema $A^tAx = A^tb$ equivale al sistema triang. sup.

$$Rx = d = Q^tb$$

che si può facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro.

Computazionalmente parlando, è leggermente migliore LU; tuttavia, dal punto di vista della stabilità, QR è decisamente migliore.