UNICITÀ

Supponiamo $\exists\, p, q \in \mathbb{P}_n$ t.c. $p(x_i) = y_i = q(x_i)$ con $0 \le i \le n$.

Allora il polinomio $p - q \in \mathbb{P}_n$ e si ha:

$(p-q)(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0, \quad 0 \le i \le n$ cioè $p-q$ avrebbe $n+1$ zeri dist.

Ma $p-q$ può avere al massimo n zeri distinti, a meno che non sia un p. nullo. Quindi $(p-q)(x) = 0 \;\forall x \Rightarrow p(x) = q(x) \;\forall x$

Es.:

Un esempio di polinomio di grado $< n$ che interpola $n+1$ punti si ha con $f(x) = x^2$ dove, prendendo $n \ge 3$ punti, si avrà sempre il polinomio interpolatore uguale a $f(x)$ e, quindi, di grado 2 che è quindi $< n$.

ESISTENZA

Dati $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}_{0 \le i \le n}$ considero per ogni nodo fissato il polinomio elementare di Lagrange:

$\ell_i(x) = \dfrac{N_i(x)}{N_i(x_i)}$ con $N_i(x_i) = \prod_{j=0,\, j \ne i}^{n} (x - x_j) \ne 0$ e $N_i(x)$ polinomio grado n

Quindi $\ell_i(x)$ ha grado n e $\ell_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \ne k \\ 1 & i = k \end{cases}$ (delta di Kronecker)

Possiamo quindi definire il polinomio interpolatore di Lagrange:

$f_n(x) = \Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$ con $\Pi_n(x) \in \mathbb{P}_n$

Verifica dell'interpolazione:

$\Pi_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ik} = y_k \delta_{kk} = y_k, \quad 0 \le k \le n \quad (\delta_{ik} = 0)$