Meg e relazione con la fattorizzazione LU

Per alcune classi di matrici, come quelle a diagonale strettamente dominante e le simmetriche definite positive, ciò già vale. Partendo dall'esempio di matrici 3 x 3, definiamo U (ottenuta alla fine del MEG):

$$U = A^{(3)} = T_{3,2}(-m_{3,2})\ T_{3,1}(-m_{3,1})\ T_{2,1}(-m_{2,1})\ A$$

Posto $\mathcal{L} = T_{3,2}(-m_{3,2})\ T_{3,1}(-m_{3,1})\ T_{2,1}(-m_{2,1})$ abbiamo

$$U = \mathcal{L}A \Rightarrow A = LU \text{ con } L = \mathcal{L}^{-1}$$

Avendo L che ha ordine invertito:

$$\begin{aligned} L = \mathcal{L}^{-1} &= \overbrace{(T_{2,1}(-m_{2,1}))^{-1}\ (T_{3,1}(-m_{3,1}))^{-1}\ (T_{3,2}(-m_{3,2}))^{-1}}^{\text{ordine invertito}} \qquad \text{ricordando che } (T_{k,i}(\alpha))^{-1} = T_{k,i}(-\alpha) \\ &= T_{2,1}(m_{2,1})\ T_{3,1}(m_{3,1})\ T_{3,2}(m_{3,2}) \end{aligned}$$

ed L è matrice triangolare inferiore (Lower Triangular): $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$

Otteniamo quindi una fattorizzazione PA = LU con:

- U matrice triangolare superiore
- P matrice di permutazione ottenuta come prodotto di matrici di scambio
- L matrice triangolare inferiore e con i moltiplicare rimescolati nel triangolo inferiore sotto la diagonale.

In sintesi grafica, si ha una fattorizzazione di costo dato dagli scambi e dai moltiplicatori usati, che sarà $2/3 * n^3$: