2.4.1 TEOREMA (esistenza e unicità del punto fisso e convergenza delle iterazioni di punto fisso per una contrazione)

Sia $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo chiuso $I \subseteq \mathbb{R}$, tale che:

1. $\phi(I) \subseteq I$ cioè l'immagine di I tramite ϕ, $\phi(I) = \{y : y = \phi(x),\ x \in I\}$, è contenuta in I
2. $\exists \theta \in (0,1) : |\phi'(x)| \leq \theta \ \ \forall x \in I$

allora

$$\exists!\, \xi \in I : \xi = \phi(\xi) \text{ (punto fisso) } \forall x_0 \in I,\ \xi = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$\text{dove } x_{n+1} = \phi(x_n),\ n \geq 0$$

Sapendo che per ipotesi:

- L'intervallo è assunto chiuso, ma può non essere limitato
- ϕ è una contrazione (di I in sè stesso), cioè contrae le distanze di un fattore θ < 1
- ϕ è continua in I, infatti per i ∀ x, x ∈ I, per il teorema dei 2 carabinieri: ϕ(x) → ϕ(~x), x → x

Esistenza

Siccome ϕ è continua, tale è

$$f(x) = x - \phi(x)$$

Se $a = \phi(a)$ oppure $b = \phi(b)$ allora a oppure b sono punto fisso.
Se invece $a \neq \phi(a)$ e $b \neq \phi(b)$ siccome $a \leq \phi(x) \leq b\ \forall x \in [a,b]$ si ha $a - \phi(a) < 0$ e $b - \phi(b) > 0$
cioè f è continua e cambia segno agli estremi

$$\Longrightarrow \exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$$

cioè

$$\exists \xi \in (a,b) : \xi = \phi(\xi)$$

Tuttavia, la continuità non basta a garantire l'unicità del punto fisso.

Unicità

Ma se ϕ è una contrazione, l'unicità è assicurata.
Infatti se $\exists \xi_1, \xi_2 \in I$ con $\xi_1 \neq \xi_2$ tali che $\xi_1 = \phi(\xi_1)$ e $\xi_2 = \phi(\xi_2)$ allora

$$|\xi_1 - \xi_2| = |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| \leq \theta|\xi_1 - \xi_2|$$

cioè $\theta \geq 1$ contro l'ipotesi che $\theta < 1$.
Resta da dimostrare che $\forall x_0 \in I$, definendo $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \geq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.
Ora

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \xi| = |\phi(x_n) - \phi(\xi)| \leq \theta|x_n - \xi| = \theta e_n$$

da cui

$$\begin{aligned} &e_1 \leq \theta e_0, \\ &e_2 \leq \theta e_1 \leq \theta^2 e_0, \\ &\quad\vdots \\ &e_n \leq \theta^n e_0 \to 0,\ n \to \infty \text{ perchè } \theta \in (0,1) \end{aligned}$$