1) Che cos’è la precisione di macchina in un sistema floating-point F(b, t, L, U) e come si calcola? (si ricavi il valore)
2) Perché moltiplicazione e addizione sono operazioni stabili?
3) Perché la sottrazione tra numeri approssimati può essere instabile?
4) Perché il metodo di Newton per zeri semplici ha ordine di convergenza almeno 2? Quando ha ordine esattamente 2? (si dimostri la relazione fondamentale che lega en+1 ed en)
5) Perché il residuo non pesato non può essere non essere una buona stima dell’errore nel metodo di bisezione? (si ricavi la stima del residuo pesato in modo rigoroso).
6) Convergenza bisezione
7) Si dimostri la convergenza del metodo di Newton nel caso strettamente convesso o concavo
8) Velocità (ordine) di convergenza del metodo di Newton
9) Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso
10) Esistenza del polinomio interpolatore di grado <= n su n+1 nodi distinti
11) Unicità del grado del polinomio interpolatore di grado <= n su n+1 nodi distinti (esempio con grado < n)

12) Perché l'interpolazione a tratti a passo costante converge uniformemente con errore $O(h2)$ se $f \in C 2 [a,b]$?
13) Sistema delle equazioni normali per approssimazione ai minimi quadrati
14) Derivazione numerica rapporto incrementale simmetrico
15) Rapporto incrementale standard
16) Formule di quadratura composte
17) Errore formula trapezi
18) Si ricavi una stima dell'errore relativo sulla soluzione di un sistema lineare non singolare in caso di vettore termine noto affetto da errore
19) Sistemi sovradeterminati
20) Sistema delle equazioni normali per approssimazione lineare
21) Costo computazionale MEG/Metodo di Gauss
22) Fattorizzazione QR per soluzioni di sistemi sovradeterminati
23) Applicazione del MEG nel calcolo del determinante
24) Meg e relazione con la fattorizzazione LU
25) Calcolo della matrice inversa

1 Precisione di macchina come max errore relativo di arrotondamento nel sistema floating-point

Definiamo arrotondamento a t cifre di un numero reale scritto in notazione floating-point

$$x = sign(x)(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

il numero

$$fl^t(x) = sign(x)(0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t) \cdot b^p$$

dove la mantissa è stata arrotondata alla t-esima cifra

$$\tilde{d}_t = \begin{cases} d_t & \text{se } d_{(t+1)} < \frac{b}{2} \\ d_t + 1 & \text{se } d_{(t+1)} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

Definiamo:

$$\text{Errore Relativo} \longleftarrow \frac{\overbrace{|\, x - fl^t(x)\,|}^{\text{Errore Assoluto}}}{|\, x\,|} \quad \text{per} \quad x \neq 0$$

Stimiamo il numeratore

$$\begin{aligned} |\, x - fl^t(x)\,| &= b^p \cdot \overbrace{|(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) - (0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t)|}^{\text{Errore di arrotondamento a } t \text{ cifre dopo la virgola} \leq \frac{b^{-t}}{2}} \\ &\leq b^p \cdot \frac{b^{-t}}{2} = \frac{b^{p-t}}{2} \end{aligned}$$

Notiamo subito un aspetto: l'errore dipende da p, cioè dall'ordine di grandezza del numero (in base b).
Stimiamo da sopra $\frac{1}{|\, x\,|}$, ovvero da sotto $|\, x\,|$:

$$|\, x\,| = (0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

Poiché $d_1 \neq 0$, p fissato, il minimo valore della mantissa è $0,100\dots = b^{-1}$. Quindi:

$$|\, x\,| \geq b^{-1} \cdot b^p = b^{p-1} \iff \frac{1}{|\, x\,|} \leq \frac{1}{b^{p-1}}$$

Otteniamo

$$\frac{|\, x - fl^t(x)\,|}{|\, x\,|} \leq \frac{\frac{b^{p-t}}{2}}{b^{p-1}} = \frac{b^{p-t+1-p}}{2} = \frac{b^{1-t}}{2} = \varepsilon_M$$

2 Analisi di stabilità di moltiplicazione, divisione, addizione e sottrazione con numeri approssimati

2.1 Moltiplicazione

$$\varepsilon_{xy} = \frac{|\, xy - \tilde{x}\tilde{y} \,|}{|\, xy \,|}, \quad x, y \neq 0$$

Usiamo la stessa tecnica che si usa per dimostrare che il limite del prodotto di due successioni o funzioni è il prodotto dei limiti, aggiungendo e togliendo a numeratore ad esempio $\tilde{x}y$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= \frac{|\, xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y} \,|}{|\, y \,|} \\
&= \frac{|\, \overbrace{y(x-\tilde{x})}^{=a} + \overbrace{\tilde{x}(y-\tilde{y})}^{=b} \,|}{|\, xy \,|} \\
&\leq \frac{|\, y(x-\tilde{x})| + |\tilde{x}(y-\tilde{y}) \,|}{|\, xy \,|} \quad (*)
\end{aligned}$$

$(*)$ Disugliaglianza triangolare: $||\, a\,| - |\, b\,|| \leq |\, a + b\,| \leq |\, a\,| + |\, b\,|$

Quindi otteniamo

$$\varepsilon_{xy} \leq \frac{|\, y\,||\, x - \tilde{x}\,|}{|\, xy\,|} + \frac{|\, \tilde{x}\,||\, y - \tilde{y}\,|}{|\, xy\,|} = \varepsilon_x + \frac{|\, \tilde{x}\,|}{|\, x\,|}\varepsilon_y$$

Questo perché $\frac{|\, x-\tilde{x}\,|}{|\, x\,|} = \varepsilon_x$ e $\frac{|\, y-\tilde{y}\,|}{|\, y\,|} = \varepsilon_y$.
Poiché $\tilde{x} \approx x \Rightarrow \frac{|\tilde{x}|}{|x|} \approx 1$ e possiamo quindi dire che la moltiplicazione è STABILE.

▶ MOLTIPLICAZIONE

$$\varepsilon_{xy} = \frac{|xy - \tilde{x}\tilde{y}|}{|xy|} = \frac{|xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y}|}{|xy|} = \frac{|(x-\tilde{x})y + (y-\tilde{y})\tilde{x}|}{|xy|} \le \frac{|(x-\tilde{x})y| + |(y-\tilde{y})\tilde{x}|}{|xy|} =$$

$$= \frac{|x-\tilde{x}||y|}{|x||y|} + \frac{|y-\tilde{y}||\tilde{x}|}{|x||y|} = \varepsilon_x \frac{\cancel{|y|}}{\cancel{|y|}} + \varepsilon_y \frac{|\tilde{x}|}{|x|} \Rightarrow \varepsilon_{xy} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad \text{STABILE}$$

▶ DIVISIONE

Considero come $x \cdot \frac{1}{y}$

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} = \frac{\left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{y} + \frac{\tilde{x}}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\left|(x-\tilde{x})\frac{1}{y} + \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\left(\frac{\tilde{y}-y}{y}\right)\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} \le \frac{\left|(x-\tilde{x})\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\left(\frac{\tilde{y}-y}{y}\right)\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} =$$

$$= |x-\tilde{x}|\left|\frac{1}{\cancel{y}}\right|\left|\frac{\cancel{y}}{x}\right| + \left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\left|\frac{\tilde{y}-y}{y}\right|\left|\frac{y}{x}\right| = \varepsilon_x + \varepsilon_y\left|\frac{\tilde{x}}{x}\right|\left|\frac{y}{\tilde{y}}\right| \Rightarrow \varepsilon_{\frac{x}{y}} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad \text{STABILE}$$

▶ ADDIZIONE

$$\varepsilon_{x+y} = \frac{|(x+y)-(\tilde{x}+\tilde{y})|}{|x+y|} = \frac{|x-\tilde{x}+y-\tilde{y}|}{|x+y|} \le \frac{|x-\tilde{x}|}{|x+y|} + \frac{|y-\tilde{y}|}{|x+y|} = \frac{|x|}{|x+y|}\varepsilon_x + \frac{|y|}{|x+y|}\varepsilon_y = w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y$$

$w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y \ge \varepsilon_{x+y}$ ma $w_1, w_2 \le 1$ quindi STABILE

▶ SOTTRAZIONE

$$\varepsilon_{x+y} = \frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x\ \ y|} = \frac{|x-\tilde{x}+\tilde{y}-y|}{|x\ \ y|} \le \frac{|x-\tilde{x}|}{|x\ \ y|} + \frac{|\tilde{y}-y|}{|x\ \ y|} = \frac{|x|}{|x\ \ y|}\varepsilon_x + \frac{|y|}{|x\ \ y|}\varepsilon_y = w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y$$

$w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y \ge \varepsilon_{x-y}$ ma $w_1, w_2 > 1$ quindi INSTABILE

Es.:

Con $x = 0,100017$, $y = -0,100014$, $\bar{x} = Fl^5(x) = 0,10002$, $\bar{y} = Fl^5(y) = -0,10001$, si ha:

$$\varepsilon_{x+y} = \frac{|(x+y)-(\bar{x}+\bar{y})|}{|x+y|} = \frac{|0,000003 - 0,00001|}{|0,000003|} = \frac{0,000007}{0,000003} = 2,\bar{3}$$

Quindi l'errore relativo sarebbe del $233,\bar{3}$ %.

- **Perché il residuo non pesato può non essere una buona stima dell'errore nel metodo di bisezione? (si ricavi la stima del residuo pesato in modo rigoroso).**

Volendo fare una stima del residuo: $f(x_n) \to f(\xi) = 0, \quad n \to \infty$

se e solo se:

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = l \text{ si ha } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(l)$$

che si esprime anche dicendo "f è continua se e solo se il limite si può trasportare 'dentro' la funzione".
Nel nostro caso $f(\xi) = 0$ quindi $f(x_n) \to 0$, $n \to \infty$ e anche $|f(x_n)| \to 0$, $n \to \infty$.
La quantità $|f(x_n)|$ si chiama "RESIDUO" perchè dice quanto "resta" ad f per annullarsi.
Viene allora spontanea questa domanda: siccome $f(x_n) \to 0$, $n \to \infty$, possiamo arrestare il processo di calcolo quando il residuo $|f(x_n)|$ è piccolo? In altre parole

$$|f(x_n)| \le \varepsilon \overset{?}{\Longrightarrow} e_n \le \varepsilon$$

La risposta è NO, in realtà

$$|f(x_n)| \le \varepsilon \not\Rightarrow e_n \le \varepsilon$$

e dunque usando il teorema del valor medio per "pesare" opportunamente la velocità di variazione nonché il teorema di permanenza del segno (sotto ipotesi che lo zero sia semplice, dunque che f'(ξ) ≠ 0.
Dunque volendo ricavare la stima pesata rigorosa:

DIMOSTRAZIONE della rappresentazione utilizzando il teorema del valor medio e supponendo che $x_n > \xi$ (l'altro caso è del tutto analogo), con $\alpha = \xi, \beta = x_n$

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(z_n)(x_n - \xi), \; z_n \in (\xi, x_n)$$

con $f(\xi) = 0$, cioè

$$|f(x_n)| = |f'(z_n)||x_n - \xi|$$

che si può riscrivere come

$$e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

■

che viene usato in varie stime pratiche.

CONVERGENZA METODO DI BISEZIONE

Scelgo a, b t.c. f è continua in $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b) < 0$.

Applicando l'algoritmo si ha, quindi:

$0 \le |\varepsilon - a_n|, |\varepsilon - b_n| \le \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$

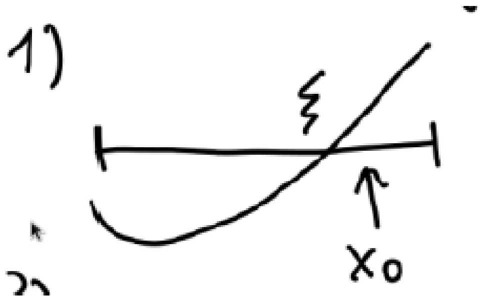
Per il Teorema dei due Carabinieri:

$|\varepsilon - a_n|, |\varepsilon - b_n| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$

analogamente $0 \le |\varepsilon - x_n| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}$ $\left(e_n = |\varepsilon - x_n| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} < \text{toll.}\right)$

- **Si dimostri la convergenza del metodo di Newton nel caso strettamente convesso o concavo**

Nel caso strettamente convesso, rappresentato graficamente da:



sapendo che f’ può cambiare di segno e similmente f’’ per il teorema degli zeri.
Si procede con una dimostrazione per induzione, partendo da:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ma se $x_n \in (\xi, b]$ allora $f'(x_n) > 0$ e $f(x_n) > 0$, quindi x_{n+1} si ottiene da x_n sottraendo una quantità > 0, cioè $x_{n+1} < x_n$.
D’altra parte f è strettamente convessa, il che è equivalente a dire che la tangente sta “sotto al grafico” $\forall x \in [a, b]$.

E quindi: $$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\} = \eta \quad \text{con} \quad \eta \geq \xi$$

Concludendo si passa al limite della formula che definisce il metodo:

$$\begin{aligned}\eta &= \lim x_{n+1} \\ &= \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\ &= \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \lim x_n - \frac{\lim f(x_n)}{\lim f'(x_n)} \\ &= \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \\ &= \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)}\end{aligned}$$

e quindi:

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \quad \text{con } f'(\eta) \neq 0 \Longrightarrow \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} = 0 \Longrightarrow f(\eta) = 0$$

VELOCITA CONVERGENZA METODO DI NEWTON

Applicando Taylor centrato in x_n e calcolato in ξ con il resto di Lagrange del secondo ordine:

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \quad \text{con } z_n \in \text{int}(x_n, \xi) \subset [c, d]$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \xi - x_n + \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2 \quad \text{ma} \quad -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$$

$$x_{n+1} - x_n = \xi - x_n + \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \xi| = c_n e_n^2 \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

ma c_n è succ. limitata:

$$c_n = \frac{\max|f''(x)|}{\min|f'(x)|} \cdot \frac{1}{2} = c \quad \forall x \in [c, d] \implies e_{n+1} \le c e_n^2 \quad \text{e} \quad \lim \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = c \quad \text{quindi}$$

il metodo converge con velocità quadratica

METODO DI NEWTON PER ZERI SEMPLICI CONVERGENZA ALMENO ESATTAMENTE

Usando Taylor:

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2$$

$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \xi - x_n + \frac{1}{2f'(x_n)} \cdot f''(z_n)(\xi - x_n)^2$ con $-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$ per def.

quindi:

$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2 \longrightarrow |x_{n-1} - \xi| = \frac{|f''(z_n)|}{|2f'(x_n)|}|\xi - x_n|^2$ che diventa:

$e_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}\right| \cdot e_n^2$ si ha quindi: $\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f(\xi)}\right|$ da cui si deriva

che se $f''(\xi) \neq 0$ e $f'(\xi) \neq 0$ l'ordine di convergenza è esattamente 2. Se $f''(\xi) = 0, f'(\xi) \neq 0$ e $\exists f'''(\xi)$ allora l'ordine è almeno 3.

Unicità e esistenza dell'interpolazione polinomiale

UNICITÀ

Supponiamo $\exists\ p,q \in \mathbb{P}_n$ t.c. $p(x_i) = y_i = q(x_i)$ con $0 \le i \le n$.

Allora il polinomio $p-q \in \mathbb{P}_n$ e si ha:

$(p-q)(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0,\quad 0 \le i \le n$ cioè $p-q$ avrebbe $n+1$ zeri dist.

Ma $p-q$ può avere al massimo n zeri distinti, a meno che non sia un p. nullo. Quindi $(p-q)(x) = 0\ \forall x \Rightarrow p(x) = q(x)\ \forall x$

Es.:

Un esempio di polinomio di grado $< n$ che interpola $n+1$ punti si ha con $f(x) = x^2$ dove, prendendo $n \ge 3$ punti, si avrà sempre il polinomio interpolatore uguale a $f(x)$ e, quindi, di grado 2 che è quindi $< n$.

ESISTENZA

Dati $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}_{0 \le i \le n}$ considero per ogni nodo fissato il polinomio elementare di Lagrange:

$\ell_i(x) = \dfrac{N_i(x)}{N_i(x_i)}$ con $N_i(x_i) = \prod_{j=0,\, j\ne i}^{n} (x - x_j) \ne 0$ e $N_i(x)$ polinomio grado n

Quindi $\ell_i(x)$ ha grado n e $\ell_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \ne k \\ 1 & i = k \end{cases}$ (delta di Kronecker)

Possiamo quindi definire il polinomio interpolatore di Lagrange:

$f_n(x) = \Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$ con $\Pi_n(x) \in \mathbb{P}_n$

Verifica dell'interpolazione:

$\Pi_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ik} = y_k \delta_{kk} = y_k,\quad 0 \le k \le n\ \ (\delta_{ik} = 0)$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE A TRATTI

9. Perché l'interpolazione lineare a tratti a passo costante converge uniformemente con errore $O(h^2)$ su $f \in C^2$?

Siano $f \in C^{s+1}[a,b]$, $s \geq 0$ e $\{x_i\} \subset [a,b]$ $n+1$ nodi distinti, con n multiplo di s. Allora $\exists K_s > 0 : dist(f, \Pi_s^c) \leq K_s h^{s+1}$, $h = \max \Delta x_i$

Dimostrazione per $s=1$ ($f \in C^2[a,b]$)

$$dist(f, \Pi_1^c) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_1^c(x)| = \max_{0 \leq i \leq n-1} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \Pi_1^c(x)| =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - \Pi_{1,i}(x)|$$

Si ricava quindi la stima dell'errore: $\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \cdot \frac{h^2}{8} = M_{2,i} \frac{h^2}{8}$ da cui

$$dist(f, \Pi_1^c) = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{i \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - \Pi_{1,i}(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{i \leq i \leq n} M_{2,i} = \frac{M_2}{8} h^2$$

con $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

CONDIZIONAMENTO DI UN SISTEMA LINEARE – STIMA ERRORE RELATIVO TERMINE NOTO SISTEMA NON SINGOLARE

Perturbazione del termine noto

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice non singolare, $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax = b$, $b \neq 0$ e $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema perturbato $A\tilde{x} = \tilde{b} = b + \delta b$

Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ vale la seguente stima dell'errore relativo su x: $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A)\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ dove $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Dim.

Dato che $x = A^{-1}b \neq 0$ calcoliamo l'errore relativo in norma.

$\tilde{x} = \cancel{x} + \delta x = \cancel{A^{-1}b} + A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$.

Stimiamo quindi da sopra $\frac{1}{\|x\|}$, cioè da sotto $\|x\|$.

Essendo x la soluzione: $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ da cui $\|x\| \geq \dfrac{\|b\|}{\|A\|}$ e $\dfrac{1}{\|x\|} \leq \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

perciò: $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \dfrac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A) \cdot \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

Perturbazione sulla matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice non singolare, $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax = b$, $b \neq 0$ e $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema perturbato $\hat{A}\tilde{x} = b$, $\hat{A} = A + \delta A$

Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ vale la seguente stima dell'errore relativo su x: $\dfrac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq k(A) \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ dove $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Dim.

Da $\hat{A}\tilde{x} = (A + \delta A)(x + \delta x) = b$ otteniamo:

$\cancel{Ax} + A\delta x + \delta A\tilde{x} = \cancel{b}$ cioè:

$\delta x = A^{-1}(-\delta A\tilde{x}) = -A^{-1}\delta A\tilde{x}$ quindi:

$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|$ perciò:

$\dfrac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|} = k(A) \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

- ## Sistema delle equazioni normali per l'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati

Si parte da una premessa:

Dati N punti $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq N$ e $m < N$, il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j)^2 \iff$ risolve il sistema $V^tVa = V^ty$. Dove V^t è la trasposta di V.

osservando che poi il sistema ha dimensione (m + 1) x (m + 1):

$$V \in \mathbb{R}^{N\times(m+1)}, \quad V^t \in \mathbb{R}^{(m+1)\times N}, \quad y \in \mathbb{R}^N$$

e quindi:

$$V^tV \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \text{ e } V^ty \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Ora per la dimostrazione si deve dimostrare che *a* è di minimo assoluto:

$$\phi(a+b) \geq \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

ma

$$\begin{aligned}
\phi(a+b) &= (y - V(a+b),\, y - V(a+b)) \\
&= (y - Va - Vb,\, y - Va - Vb) \\
&= (y - Va,\, y - Va) + (y - Va,\, -Vb) + (-Vb,\, y - Va) + (-Vb,\, -Vb) \\
&= \phi(a) + 2(Va - y,\, Vb) + (Vb,\, Vb) \\
&= \phi(a) + 2(V^t(Va - y),\, b) + (Vb,\, Vb)
\end{aligned}$$

usando le proprietà del prodotto scalare, in particolare:

4. $(u, Az)_n = (A^tu, z)_k \quad u \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^k,\ A \in \mathbb{R}^{n\times k}$

usata per scrivere:

$$\underset{(Va-y,Vb)_N}{\underset{\|}{(Va - y,\, Vb)}} = \underset{(V^t(Va-y),b)_{m+1}}{\underset{\|}{(V^t(Va - y),\, b)}}$$

A questo punto:

- Dimostriamo per prima l'implicazione "$\Leftarrow$": assumendo che $V^tVa = V^ty$ abbiamo che:

$$V^tVa - V^ty = V^t(Va-y) = 0 \quad \text{e} \quad (V^t(Va-y),\, b) = \underset{\text{vettore nullo in } \mathbb{R}^{m+1}}{\underset{\parallel}{(0,b)}} = 0$$

da cui:

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \underset{\sum_{i=1}^{N}(Vb)_i^2 \geq 0}{\underset{\parallel}{(Vb,\, Vb)}} \geq \phi(a) \quad b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

e poi:

$$\phi(a+b) \geq \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Allora:

$$\phi(a+b) = \phi(a) + 2(V^t(Va-y),\, b) + (Vb, Vb) \geq \phi(a) \quad \forall b$$

Cioè:

$$2(V^t(Va-y),\, b) + (Vb, Vb) \geq 0 \quad \forall b$$

Prendiamo $b = \varepsilon v$, con v versore (cioè vettore di lunghezza 1, $(v, v) = 1$). Si ha:

$$\begin{aligned} &2(V^t(Va-y),\, \varepsilon v) + (V(\varepsilon v),\, V(\varepsilon v)) = \\ &= 2\varepsilon(V^t(Va-y),\, v) + \varepsilon^2(Vv, Vv) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \text{ e } \forall v \end{aligned}$$

Dividendo per $\varepsilon > 0$:

$$2(V^t(Va-y),\, v) + \varepsilon(Vv, Vv) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \text{ e } \forall v$$

Per $\varepsilon \to 0$ la disuguaglianza viene mantenuta, ottenendo:

$$(V^t(Va-y),\, v) \geq 0 \quad \forall v$$

Ma se vale $\forall$ versore, possiamo prendere $-v$ al posto di v e otteniamo:

$$(V^t(Va-y),\, -v) = -(V^t(Va-y),\, v) \geq 0 \quad \forall v$$

avendo come unico vettore ortogonale il vettore nullo.

$$V^t(Va-y) = 0 \iff V^tVa = V^ty$$

Ovvero a è soluzione del sistema delle equazioni normali.

MEG E RELAZIONE CON LA FATTORIZZAZIONE LU

Per alcune classi di matrici, come quelle a diagonale strettamente dominante e le simmetriche definite positive, ciò già vale. Partendo dall'esempio di matrici 3 x 3, definiamo U (ottenuta alla fine del MEG):

$$U = A^{(3)} = T_{3,2}(-m_{3,2})\ T_{3,1}(-m_{3,1})\ T_{2,1}(-m_{2,1})\ A$$

Posto $\mathcal{L} = T_{3,2}(-m_{3,2})\ T_{3,1}(-m_{3,1})\ T_{2,1}(-m_{2,1})$ abbiamo

$$U = \mathcal{L}A \Rightarrow A = LU \text{ con } L = \mathcal{L}^{-1}$$

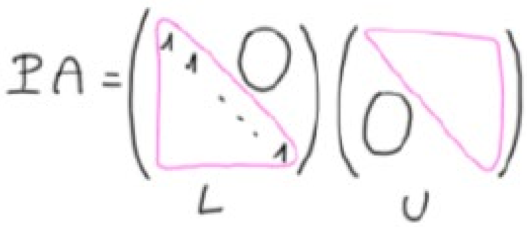
Avendo L che ha ordine invertito:

$$\begin{aligned} L = \mathcal{L}^{-1} &= \overbrace{(T_{2,1}(-m_{2,1}))^{-1}\ (T_{3,1}(-m_{3,1}))^{-1}\ (T_{3,2}(-m_{3,2}))^{-1}}^{\text{ordine invertito}} \\ &= T_{2,1}(m_{2,1})\ T_{3,1}(m_{3,1})\ T_{3,2}(m_{3,2}) \end{aligned} \qquad \text{ricordando che } (T_{k,i}(\alpha))^{-1} = T_{k,i}(-\alpha)$$

ed L è matrice triangolare inferiore (Lower Triangular): $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$

Otteniamo quindi una fattorizzazione PA = LU con:
- U matrice triangolare superiore
- P matrice di permutazione ottenuta come prodotto di matrici di scambio
- L matrice triangolare inferiore e con i moltiplicare rimescolati nel triangolo inferiore sotto la diagonale.

In sintesi grafica, si ha una fattorizzazione di costo dato dagli scambi e dai moltiplicatori usati, che sarà $2/3 * n^3$:



COSTO COMPUTAZIONALE MEG

Il costo computazione del meg è dato dall'analisi tra ciclo interno, composto da n moltiplicazioni ed n some, scritto come:

$$
\begin{aligned}
c_n^{meg} &\sim \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} 2n \\
&= 2n \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\
&\underset{j=n-i}{=} 2n \sum_{j=1}^{n-1} j \\
&= 2n \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= n^3 - n^2 \sim n^3, \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

Vedendo però che le operazioni vettoriali non ha senso farle sui vettori riga, le facciamo solo sul segmento di vettori con indici da i + 1 ad n, verificando che otteniamo:

$$
\begin{aligned}
c_n^{meg} &\sim \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} 2(n-i) \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \\
&\underset{j=n-i}{=} 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim \frac{2}{3} n^3
\end{aligned}
$$

Ottenendo infine:

$$
\frac{(n-1)^3}{3} < \sum_{j=1}^{n-1} j^2 < \frac{n^3}{3} - 1
$$

APPLICAZIONE DEL MEG NEL CALCOLO DEL DETERMINANTE

Innanzitutto diciamo che il MEG è basato su due proprietà fondamentali in merito a trasformazioni della matrice. Esse sono:

- la sostituzione alla riga k della somma della riga k con la riga i moltiplicata per uno scalare
- lo scambio di due righe porta il determinante a cambiare segno

Esso si applica ripetutamente per mettere zeri in ogni colonna sotto la diagonale principale, in maniera tal da ottenere una matrice triangolare superiore.

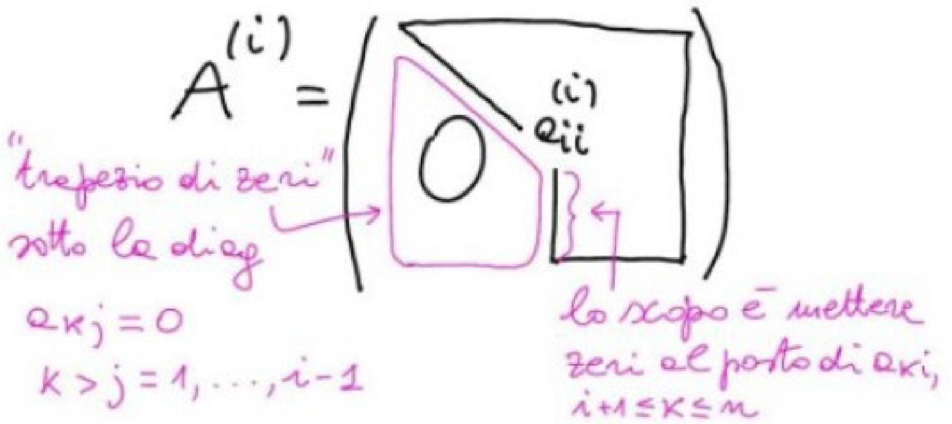
Partendo ad esempio da una matrice A 3x3 (a destra) si arriva facilmente alla matrice U (a sinistra):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Questo afferma che il MEG consiste in una sequenza di n-1 trasformazioni:

$$A^{(1)} = A \to A^{(2)} \to A^{(3)} \to \ldots \to A^{(n)} = U$$

ottenendo una matrice U finale che è triangolare superiore con la seguente struttura schematica:



Se $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ (cioè se l'elemento diagonale di $A^{(i)}$ è non nullo) si può propagare a destra la struttura del trapezio di zeri con le trasformazioni

$$\mathcal{R}_k^{(i+1)} := \mathcal{R}_k^{(i)} + \left(-\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}\right) \cdot \mathcal{R}_i^{(i)}, \; i+1 \leq k \leq n$$

che mettono lo zero al posto k, i visto che

$$a_{ki}^{(i+1)} = a_{ki}^{(i)} + \left(-\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}\right) \cdot a_{ii}^{(i)} = 0$$

DERIVAZIONE NUMERICA RAPPORTO INCREMENTALE *SIMMETRICO*

Assumendo che $f \in C^3(I_x)$, con I intervallo di derivazione,

Usiamo Taylor da destra e da sinistra centrata in x:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(\eta)$$

Otteniamo: $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + O(h^3)$

e: $$\delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$$

con:
$$\begin{aligned} |f'(x) - \delta(h)| &= \frac{1}{12} \cdot |f'''(\xi) + f'''(\eta)| \cdot h^2 \\ &\leq \frac{1}{12}(|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|) \cdot h^2 \\ &\leq d \cdot h^2 \end{aligned}$$

dove $d = \frac{1}{6} \max_{t \in I_x} |f'''(t)|$

Dunque, l'errore di approssimazione della derivata con il rapporto incrementale simmetrico è $O(h^2)$.
Vogliamo dare da la stima:

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}(h)| &= |f'(x) - \delta(h) + \delta(h) - \tilde{\delta}(h)| \\ &\leq \underbrace{|f'(x) - \delta(h)|}_{\text{convergenza}} + \underbrace{|\delta(h) - \tilde{\delta}(h)|}_{\text{stabilità}} \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} |\delta(h) - \tilde{\delta}(h)| &= \frac{1}{2h}|f(x+h) - f(x-h)| - |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)| \\ &= \frac{1}{2h}|(f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) + (\tilde{f}(x-h) - f(x-h))| \\ &\leq \frac{1}{2h}(|f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + |\tilde{f}(x-h) - f(x-h)|) \\ &\leq \frac{1}{2h}(\varepsilon + \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h} \end{aligned}$$

Ottenendo: $$|f'(x) - \tilde{\delta}(h)| \leq dh^2 + \frac{\varepsilon}{h} = E(h)$$

DERIVAZIONE NUMERICA RAPPORTO INCREMENTALE
STANDARD

derivazione numerica standard col rapporto incrementale

Supponendo $f \in C^2(I_x)$, con I intervallo di derivazione, f derivabile, dato il rapporto incrementale:

$$\delta_+(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h>0$$

si avrà che $\delta_+(h) = f'(x) + O(h)$ ed espandendo la formula di Taylor si ottiene:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)h^2}{2}, \quad \xi \in \text{int}(x, x+h)$$

quindi $\delta_+(h) = f'(x) + \frac{f''(\xi)h^2}{2}$

Se $\tilde{\delta}_+$ approssima δ_+, si ha la seguente stima dell'errore:

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_+(h)| \le |f'(x) - \delta_+(h)| + |\delta_+(h) - \tilde{\delta}(h)|$$

da cui

$$\begin{aligned} |\delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)| &= \frac{f(x+h) - f(x) - \tilde{f}(x+h) + \tilde{f}(x)}{h} \\ &\le \frac{1}{h}\left((f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) + (\tilde{f}(x) - f(x))\right) \\ &\le \frac{1}{h}\left(|f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + |\tilde{f}(x) - f(x)|\right) \\ &\le \frac{2}{h}\|f - \tilde{f}\|_\infty \end{aligned}$$

ponendo $\varepsilon \ge \|f - \tilde{f}\|_\infty$ si ottiene che

$$|f'(x) - \tilde{\delta}_+(h)| \le ch + \frac{2\varepsilon}{h} := E(h), \qquad c = \frac{f''(\xi)}{2}$$

se $h \to 0$, $E(h) \to \infty$ e poiché $E'(h) = c - \frac{2\varepsilon}{h^2}$ il suo punto minimo è $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{c}} = O(\sqrt{\varepsilon})$

Dunque l'errore minimo commesso dall'approssimazione della derivata utilizzando il rapporto incrementale $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ è $O(\sqrt{\varepsilon})$ per $f \in C^2$

FORMULA QUADRATURA COMPOSTA

Per le formule di quadratura composte ci riconduciamo a due casi, facendo riferimento nel caso di calcolo di nodi equispaziati:

- Per s = 1 alla formula dei trapezi, in cui l'integrale viene approssimato alla somma delle aree dei trapezi lineari corrispondenti all'interpolazione lineare a tratti.

$$
\begin{aligned}
I_n^{trap}(f) &= I(\textstyle\prod_1^c) \\
&= \int_a^b \textstyle\prod_1^c(x)dx \\
&= \sum(\text{aree trapezi}) \\
&= \overbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_0)+f(x_1))}^{\text{area trapezio 1}} + \overbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_1)+f(x_2))}^{\text{area trapezio 2}} + \ldots + \\
&+ \underbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_{n-2})+f(x_{n-1}))}_{\text{area trapezio (n-1)-esimo}} + \underbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_{n-1})+f(x_n))}_{\text{area trapezio n-esimo}} \\
&= \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} h\cdot f(x_i)
\end{aligned}
$$

$$
I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, n \\ h, & 1 \le i \le n-1 \end{cases}
$$

- Per s = 2, integrando la funzione quadratica a tratti, si ottiene la formula delle parabole:

$$
I_n^{parab}(f) = I\left(\textstyle\prod_2^c\right) = \sum(\text{aree trapezi parabolici}) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i =
$$

$$
\begin{cases} h/3, & i = 0,\ n \text{ pari} \\ 4h/3, & i \text{ dispari} \\ 2h/3, & i \text{ pari } 2 \le i \le n-2 \end{cases}
$$

$$
\int_\alpha^\beta \textstyle\prod_2(x)dx = \frac{h}{3}\cdot f(\alpha) + \frac{4}{3}\cdot h \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{h}{3}\cdot f(\beta)
$$

FATTORIZZAZIONE QR SOLUZIONE SISTEMI LINEARI SOVRADETERMINATI

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $rango(A) = n$. Fattorizzando $A = QR$, si ha che

$$A^tA = (QR)^tQR = R^tQ^tQR = R^tIR = R^tR$$

e

$$A^tb = R^tQ^tb$$

quindi il sistema $A^tAx = A^tb$ diventa

$$R^tRx = R^tQ^tb$$

ma essendo R (e quindi R^t) invertibile

$$(R^t)^{-1}R^tRx = Rx = (R^t)^{-1}R^tQ^tb = Q^tb$$

cioè il sistema $A^tAx = A^tb$ equivale al sistema triang. sup.

$$Rx = d = Q^tb$$

che si può facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro.

Nella pratica andiamo a risolvere un sistema perturbato del tipo ~R~x=~d, con R molto meglio condizionata di A^tA.

ORDINE DI CONVERGENZA PUNTO FISSO

Sia ξ punto fisso di $\phi \in C^p(I)$, $p \geq 1$ con intervallo I di $\mathbb{R}$, supponiamo di essere in ipotesi che garantiscano la convergenza a ξ di $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \geq 0$ con $x_n \in I$, allora $\{x_n\}$ ha:

1. ordine esattamente $p=1 \iff 0 < |\phi'(\xi)| < 1$
2. ordine esattamente $p>1 \iff \phi^{(j)}(\xi) = 0, \ 1 \leq j \leq p-1$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$

Dim ①: $e_{n+1} = |\phi'(z_n)| e_n$ con $z_n \in int(\xi, x_n)$ per il teorema del valor medio

risulta: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\lim z_n)| = |\phi'(\xi)|$

Dim ②: si utilizza la formula di Taylor di grado $p-1$ centrata in ξ con resto p-esimo in forma di Lagrange:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(\xi) + \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \frac{\phi''(\xi)}{2}(x_n - \xi)^2 + \dots + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x_n - \xi)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$

con $u_n \in int(\xi, x_n)$ e $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Per dimostrare la condizione sufficiente "$\Leftarrow$" si applicano le condizioni $\phi^{(j)}(\xi) = 0$ per $1 \leq j \leq p-1$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$. Inoltre $\phi(\xi) = \xi$. Risulta, quindi:

$x_{n+1} - \xi = \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$ che passando ai moduli diventa:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(u_n)|}{p!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|\phi^{(p)}(\xi)|}{p!} \neq 0$$ quindi $\{x_n\}$ ha ordine p

Per dimostrare la condizione necessaria "$\Rightarrow$" si suppone per assurdo che $\exists\, j < p$ t.c. $\phi^{(j)}(\xi) \neq 0$ e $\{x_n\}$ ha ordine p. Si avrebbe quindi, tramite Taylor:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \rightarrow \frac{|\phi^{(k)}(\xi)|}{k!} = L' \neq 0$$ con $k = \min\{j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$

ma $\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{e_{n+1}}{e_n^k} \cdot e_n^{k-p}$ e so che $\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \rightarrow L \neq 0$

quindi

$\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \cdot e_n^{k-p} \longrightarrow \infty$ perché $\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \longrightarrow L'$ e $e_n^{k-p} \rightarrow \infty$ perche $e_n \rightarrow 0$ e $k-p<0$

cioè $\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \longrightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ che contraddice l'ipotesi dell'ordine finito

SISTEMA DELLE EQUAZIONI NORMALI PER APPROSIMAZIONE *LINEARE*

Sapendo che dati N punti $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq N$ e $m < N$, sse il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j)^2$ allora risolve i sistema $V^t V a = V^t y$, si possono usare le proprietà di $V^t V$ per trovare il sistema relativo alla retta dei minimi quadrati. $V^t V$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Inoltre $(V_v, V_v) = 0 \Longleftrightarrow V_v = 0$ e $(V_v, V_v) = (V^t V_v, v)$ quindi $v = 0$ se V ha rango max cioè se ha almeno $m+1$ punti distinti tra i nodi di campionamento. Si ricava quindi una matrice V t.c.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{m+1} & x_{m+1}^2 & \cdots & x_{m+1}^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^m \end{pmatrix}$$

La sottomatrice $V \in \mathbb{R}^{(m+1)(m+1)}$ è matrice di Vandermonde per l'interpolazione di grado $\leq m$ su $m+1$ nodi distinti, quindi è non singolare.

Questo evidenzia che, quindi, il rango della sottomatrice è $m+1$ e che le intere colonne $m+1$ di V sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{R}^N$. Quindi si possono calcolare gli elementi della matrice $V^t V$ e del vettore noto $V^t y$, con $m = 1$

$$V^t V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$V^t y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

quindi il sistema è: $\begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$

SISTEMA DELLE EQUAZIONI NORMALI PER APPROSIMAZIONE *POLINOMIALE*

Dati N punti $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \le i \le N$ e $m < N$, il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j)^2 \iff$ risolve il sistema $V^t V a = V^t y$

Dire che $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ e' di minimo assoluto per $\phi(a)$ equivale a dire:
$\phi(a+b) \ge \phi(a)$ $\forall\, b \in \mathbb{R}^{m+1}$ ma $\phi(a+b) = \phi(a) + 2(V^t(Va - y), b) + (Vb, Vb)$

Dim "$\Leftarrow$": assumendo che $V^t V a = V^t y$ abbiamo:
$V^t Va - V^t y = V^t(Va - y) = 0$ e $(V^t(Vb - y), b) = (0, b)$ vettore nullo in $\mathbb{R}^{m+1} = 0$

Dim "$\Rightarrow$": assumendo che $\phi(a+b) \ge \phi(a)$ $\forall\, b \in \mathbb{R}^{m+1}$ allora:
$\phi(a+b) = \phi(a) + 2(V^t(Vb - y), b) + (Vb, Vb) \ge \phi(a)$ $\forall\, b$ cioè:
$2(V^t(Vb - y), b) + (Vb, Vb) \ge 0$ $\forall\, b$.

Ponendo $b = \varepsilon v$, con v vettore versore $((v, v) = 1)$. Dividendo per $\varepsilon > 0$ e considerando $\varepsilon \to$ otteniamo:

$(V^t(Va - y), v) \ge 0$ $\forall\, v$

Ma essendo la disuguaglianza valida per ogni v, allora possiamo sostituire $-v$ a v e otteniamo:

$(V^t(Va - y), -v) = -(V^t(Va - y), v) \ge 0$ $\forall\, v$ cioè

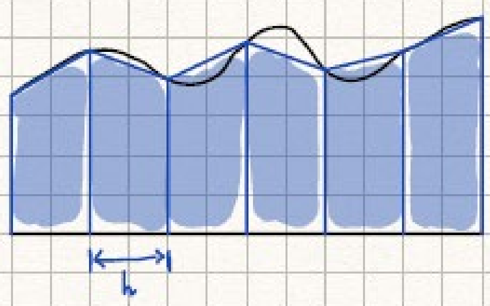
$0 \le (V^t(Va - y), v) \le 0 \Rightarrow (V^t(Va - y), v) = 0$ $\forall\, v$

Ma essendo il vettore nullo l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori:
$V^t(Va - y) = 0 \iff V^t V a = V^t y$ ovvero "a" soluzione del sistema

ERRORE FORMULA TRAPEZI

La formula dei trapezi utilizza l'interpolazione lineare a tratti, imponendo $s = 1$ l'integrale viene approssimato con la somma di aree di trapezi lineari. L'i-esimo trapezio ha altezza $h = \frac{b-a}{n}$ e basi $f(x_i - 1)$ e $f(x_i)$ con $1 \le i \le n$, si avrà quindi l'area $A = \frac{h}{2}(f(x_i - 1) + f(x_i))$ quindi:
$\frac{h}{2}(f(x_i - 1) + f(x_i)) + \sum_{i=1}^{n-1} h \cdot f(x_i)$, ottenendo così la formula dei trapezi:

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \quad \text{con} \quad w_i = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, n \\ h, & 1 \le i \le n-1 \end{cases}$$



$I_n^{trap}(f) = I(\Pi_1^c) = \sum$ (aree trapezi lineari)

Per ricavare una stima dell'errore possiamo usare la stima $|I(f) - I_n(f)| = |I(f) - I(f_n)| \le |I(f - f_n)| \le (b-a)\,dist(f, f_n)$. Se $dist \to 0$ allora ci sarà convergenza, altrimenti potrebbero presentarsi problemi di divergenza.
Per quanto riguarda le formule di quadrature composte ottenute come $I_n(f) = I(\Pi_s^c)$, con h multiplo di s: $|I(f) - I_n(f)| \le (b-a)\,dist(f, \Pi_s^c) \le$ $\le (b-a) K_s \cdot h^{s+1}$ se $f \in C^{s+1}[a,b]$ con $h = \max \Delta x_i$. Quindi per qualsiasi distribuzione dei nodi per cui $h \to 0$ se $f \in C^{s+1}[a,b]$ le formule sono sempre convergenti con un errore proporzionale a h^{s+1}, ma $s = 1$ per i trapezi quindi per $f \in C^2$ sarà convergente con un errore $O(h^2)$.

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

Un modo semplice per calcolare l'inversa si basa su una proprietà del prodotto matrice-vettore che abbiamo usato spesso, cioè che z = Bc si può interpretare come combinazione lineare delle colonne di B tramite i coeff. di c, cioè:

$$z = Bc = c_1 \underbrace{C_1(B)}_{\text{colonna 1 di } B} + \cdots + c_n \underbrace{C_n(B)}_{\text{colonna } n \text{ di } B}$$

Applicando l'osservazione con:

(cioè con $c_i = 1$, $c_j = 0$ e $j \neq i$)

$$c = e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $c_i = 1$ e $c_j = 0$, $j \neq i$, otteniamo

$$Be^{(i)} = C_i(B)$$

Allora per $B = A^{-1}$

$$C_i(A^{-1}) = A^{-1}e^{(i)} \Leftrightarrow AC_i(A^{-1}) = e^{(i)}$$

cioè $C_i(A^{-1})$ è la soluzione di

$$Ax^{(i)} = e^{(i)}, \ 1 \leq i \leq n$$

Possiamo quindi calcolare l'inversa "per colonne" risolvendo M = n sistemi lineari, tutti con matrice A, in cui il termine noto varia tra gli n vettori coordinati della base canonica.

Se usassimo n volte il metodo standard avremmo un costo $2/3n^4$.

Invece calcolando una volta col meg la fattorizzazione LU e risolvendo le M = n coppie di sistemi triangolari come segue, si ha il calcolo dell'inversa a costo cubico:

$$\begin{cases} Ly^{(i)} = \underline{P}e^{(i)} \\ Ux^{(i)} = y^{(i)} \end{cases}$$

si ha un costo

$$c_n^{(2)} \sim \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 n = \frac{8}{3}n^3 \ flops$$

ESTRAPOLAZIONE ED ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Ripartiamo dalla struttura asintotica:

$$\delta_+(h) = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + O(h^2)$$
$$\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\frac{h}{2} + O(h^2)$$

Adesso sfruttiamo di nuovo la struttura asintotica, stavolta per eliminare la parte principale dell'errore e arrivare ad una formula con errore di ordine superiore come infinitesimo in h

$$\delta_+(h) = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + O(h^2)$$
$$2\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) = 2f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\cancel{2}\frac{h}{\cancel{2}} + O(h^2)$$

quindi

$$\begin{aligned} 2\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) - \delta_+(h) &= 2f'(x) + \cancel{\frac{f''(x)}{2}}h + O(h^2) - \left(f'(x) + \cancel{\frac{f''(x)}{2}}h + O(h^2)\right) \\ &= 2f'(x) - f'(x) + O(h^2) - O(h^2) \\ &= f'(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

(si noti che abbiamo usato il fatto che $2O(h^2) = O(h^2)$: $|u(h)| \leq \gamma h^2 \Rightarrow |k \cdot u(h)| \leq k \cdot \gamma h^2$ se k è una costante).
In definitiva:

$$\phi_1(h) = 2\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) - \delta_+(h) = f'(x) + O(h^2)$$

cioè con una semplice speciale combinazione lineare delle formule con passo h e $\frac{h}{2}$ abbiamo ricavato una nuova formula con errore $O(h^2)$ invece di $O(h)$.

Grazie a questa struttura asintotica si ha la tecnica della *estrapolazione*, poco generalizzabile a tutte le formule in cui l'errore è dotato di struttura asintotica.

Come primo esempio, pensiamo di calcolare la derivata di $f(x) = e^x$ in $x = 0$, $f'(0) = e^0 = 1$ utilizzando $\delta_+(h)$, $\delta_+(\frac{h}{2})$ e $\phi_1(h)$ con $h = \frac{1}{10}$

$$\delta_+(h) = \frac{e^h - e^0}{h} = \frac{e^{1/10} - 1}{1/10} = 1.0517\ldots7$$
$$\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{e^{1/20} - 1}{1/20} = 1.0254\ldots2$$
$$\phi_1(h) = 2 \cdot \delta_+(h/2) - \delta_+(h) = 0.99913\ldots5$$

Guardando gli errori (arrotondati alla seconda cifra)

$$|\delta_+(h) - f'(0)| \approx 0.5 \cdot 10^{-1}$$
$$|\delta_+(h/2) - f'(0)| \approx 0.25 \cdot 10^{-1}$$
$$|\phi_1(h) - f'(0)| \approx 0.87 \cdot 10^{-3}$$

Si noti il miglioramento ottenuto con $\phi_1(h)$, che ha un errore paragonabile a quello ottenibile con $\delta(h) = f'(0) + O(h^2)$

$$|\delta(h) - f'(0)| = \left|\frac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1\right| \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$$

Si noti anche che la stima a posteriori dell'errore commesso con $\delta_+(h/2)$

$$\left|\delta_+(h) - \delta_+\left(\frac{h}{2}\right)\right| \approx 0.26 \cdot 10^{-1}$$

SISTEMI SOVRADETERMINATI

Essi sono sistemi Ax=b su A in $R^{m \times n}$ e b in R^m con m > n (più equazioni che incognite):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Essi hanno soluzione se e solo se b sta nel sottospazio di R^m generato dalle colonne di A:

$$b \in \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle \subset \mathbb{R}^m$$

Vogliamo quindi fare in modo che esista una soluzione x tale che $dist_2(b, Ax) = ||b - Ax||_2 = 0$
Nuovamente abbiamo un problema di minimo ϕ(x) se e solo se ϕ(x+z) >= ϕ(x).

Ora

$$\begin{aligned} \phi(x+z) &= \|b - A(x+z)\|_2^2 \\ &= (b - A(x+z), b - A(x+z)) \quad \longleftarrow \text{prod. scalare in } \mathbb{R}^m \\ &= (b - Ax - Az, b - Ax - Az) \\ &= (b - Ax, b - Ax) - 2(Az, b - Ax) + (Az, Az) \\ &= \phi(x) + 2(z, A^t(Ax - b)) + \|Az\|_2^2 \end{aligned}$$

- "⇑" Se $A^tAx = A^tb$ allora

$$\phi(x+z) = \phi(x) + \overbrace{\|Az\|_2^2}^{\geq 0} \geq \phi(x) \ \forall z$$

  cioè $\phi(x)$ è minimo

- "⇓" Se $\phi(x)$ è un minimo allora $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$

$$\phi(x + \varepsilon v) = \phi(x) + 2(\varepsilon v, A^t(Ax - b)) + \|\varepsilon v\|_2^2 \geq \phi(x)$$

cioè

$$2\varepsilon(v, A^t(Ax - b)) + \varepsilon^2 \geq 0$$

e dividendo per ε

$$2(v, A^t(Ax - b)) + \varepsilon \geq 0 \ \forall \varepsilon, v$$

da cui per $\varepsilon \to 0$

$$(v, A^t(Ax - b)) \geq 0 \ \forall v$$

Ma allora prendendo $-v$

$$(-v, A^t(Ax - b)) \geq 0 \ \forall v$$

cioè

$$(v, A^t(Ax - b)) \leq 0 \ \forall v$$

e quindi

$$(v, A^t(Ax - b)) = 0 \ \forall v$$

da cui $A^t(Ax - b) = 0$ perché l'unico vettore ortogonale a tutti i versori è il vettore nullo, cioè $A^tAx = A^tb$

In conclusione se A ha rango max = n la soluzione ai minimi quadrati del sistema sovradeterminato è unica.