Sistemi sovradeterminati

Essi sono sistemi Ax=b su A in $R^{m\times n}$ e b in R^m con m > n (più equazioni che incognite):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Essi hanno soluzione se e solo se b sta nel sottospazio di R^m generato dalle colonne di A:

$$b \in \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle \subset \mathbb{R}^m$$

Vogliamo quindi fare in modo che esista una soluzione x tale che $dist_2(b, Ax) = ||b - Ax||_2 = 0$
Nuovamente abbiamo un problema di minimo ϕ(x) se e solo se ϕ(x+z) >= ϕ(x).

Ora

$$\begin{aligned} \phi(x+z) &= \|b - A(x+z)\|_2^2 \\ &= (b - A(x+z), b - A(x+z)) \quad \longleftarrow \text{prod. scalare in } \mathbb{R}^m \\ &= (b - Ax - Az, b - Ax - Az) \\ &= (b - Ax, b - Ax) - 2(Az, b - Ax) + (Az, Az) \\ &= \phi(x) + 2(z, A^t(Ax - b)) + \|Az\|_2^2 \end{aligned}$$

- "⇑" Se $A^tAx = A^tb$ allora

$$\phi(x+z) = \phi(x) + \overbrace{\|Az\|_2^2}^{\geq 0} \geq \phi(x) \ \forall z$$

  cioè $\phi(x)$ è minimo

- "⇓" Se $\phi(x)$ è un minimo allora $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$

$$\phi(x + \varepsilon v) = \phi(x) + 2(\varepsilon v, A^t(Ax - b)) + \|\varepsilon v\|_2^2 \geq \phi(x)$$

cioè

$$2\varepsilon(v, A^t(Ax - b)) + \varepsilon^2 \geq 0$$

e dividendo per ε

$$2(v, A^t(Ax - b)) + \varepsilon \geq 0 \ \forall \varepsilon, v$$

da cui per $\varepsilon \to 0$

$$(v, A^t(Ax - b)) \geq 0 \ \forall v$$

Ma allora prendendo $-v$

$$(-v, A^t(Ax - b)) \geq 0 \ \forall v$$

cioè

$$(v, A^t(Ax - b)) \leq 0 \ \forall v$$

e quindi

$$(v, A^t(Ax - b)) = 0 \ \forall v$$

da cui $A^t(Ax - b) = 0$ perché l'unico vettore ortogonale a tutti i versori è il vettore nullo,
cioè $A^tAx = A^tb$

In conclusione se A ha rango max = n la soluzione ai minimi quadrati del sistema sovradeterminato è unica.