# 9 Convergenza uniforme dell'interpolazione lineare a tratti

**Teorema**
Convergenza uniforme dell'interpolazione polinomiale a tratti.
Siano $f \in C^{s+1}[a,b]$, $s \geq 0$ e $\{x_i\} \subset [a,b]$ $n+1$ nodi distinti con $n$ multiplo di $s$.
Allora

$$\exists k_s > 0 : \; dist(f, \prod_s^c) \leq k_s \cdot h^{s+1}, \; h = max \; \Delta x_i$$

**Dimostrazione** per $s = 1$.
Si ha che:

$$\begin{aligned} dist(f, \textstyle\prod_1^c) &= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \textstyle\prod_1^c(x)| \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \textstyle\prod_1^c(x)| \end{aligned}$$

Ricordiamo la stima dell'errore di interpolazione polinomiale a grado $s$:

$$\max_{x \in [\alpha,\beta]} |f(x) - \textstyle\prod_s(x)| \leq \max_{x \in [\alpha,\beta]} |f^{(s+1)}(x)| \cdot \dfrac{h^{s+1}}{4(s+1)} \quad con \;\; h = \dfrac{\beta - \alpha}{s}$$

Applichiamo al nostro caso: $s = 1$, $\quad [\alpha, \beta] = [x_{i-1}, x_i]$

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - \textstyle\prod_{1,i}(x)| \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \cdot \dfrac{h^2}{8} = M_{2,i} \dfrac{h^2}{8}$$

con $M_2 = \max_{x \in [x_{x_i}-1, x_i]} |f''(x)|$ e $h = \Delta x_i$.
Da cui:

$$dist(f, \textstyle\prod_1^c) \leq \dfrac{M_2}{8} h^2$$

con $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$