ESAME CALCOLO NUMERICO PROVA DI LABORATORIO
LAUREA IN INFORMATICA
TERZO APPELLO 25/08/2021

Consegna Compito: saranno visibili solo i files consegnati in tempo tramite moodle.

Tempo di svolgimento: 90 minuti.

Esercizio 1. Per ogni $m > l \geq 1$ interi e $t \in [-1/2, 1/2]$ sia $A(t)$ una matrice tridiagonale (i.e., tutti gli elementi tranne quelli diagonali, sulla prima sopra o sotto diagonale sono nulli) di ordine m con la prima sopradiagonale e la prima sottodiagonale costantemente pari ad 1, ed elementi diagonali $A_{i,i}(t)$ pari a t se $i = 1, 2, \dots, l$ e pari a 1 se $i = l+1, \dots, m$. Sia $b \in \mathbb{R}^m$ con

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \\ 2 & \text{se } i \in \{2, 3, \dots, l\} \cup \{m\} \\ 3 & \text{se } i \in \{l+1, \dots, m-1\} \end{cases} .$$

Sia $x(t) \in \mathbb{R}^m$ la soluzione di $A(t)x(t) = b$ per ogni $t \in [-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$, si noti che tale soluzione è ben definita perchè $A(t)$ è sempre di rango massimo (dunque invertibile) per $t \in [-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$. Vogliamo provare a *prolungare per continuità*[1] in 0 tale soluzione utilizzando l'interpolazione polinomiale.

A tal fine si scriva uno script `Esercizio1.m` che implementi le seguenti operazioni:

(i) (5 pt.) definisca i parametri $m = 18$, $l = 3$ ed un anonymous function `A=@(t)...` definita come sopra (**suggerimento:** usare `diag` con il secondo parametro d'ingresso opzionale).

(ii) (5 pt.) Verifichi che la matrice $A(0)$ non è invertibile e stampi a video un messaggio, **obbligatorio:** usare la fattorizzazione LU.

(iii) All'interno di un ciclo for per i valori del grado di interpolazione polinomiale $n = 1, 3, 5, \dots, 29$
- (6 pt.) crei punti di interpolazione $t_1, \dots, t_{n+1}$ di Chebyshev-Lobatto di grado n in $[-1/2, 1/2]$ e valuti, il vettore soluzione $x(t_i)$ per ciascuna i, **obbligatorio:** si usi a tal fine la fattorizzazione LU, e si risolvano i sistemi triangolari con il backslash,
- (7 pt.) per ogni componente $x_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, del vettore soluzione calcoli il polinomio $\hat{x}_k^{(n)}(\cdot)$ di grado al più n interpolante le coppie $(t_i, x_k(t_i))$ $i = 1, 2, \dots, n+1$, lo valuti su una griglia equispaziata di 100 punti in $[-1/2, 1/2]$ e produca una figura con il grafico di tutti gli $\hat{x}_k^{(n)}(\cdot)$, la figura deve contenere i polinomi dello stesso grado ed essere sovrascritta ad ogni iterazione del ciclo `for` dopo una pausa di 1 secondo,
- (4 pt.) calcoli $\hat{x}^{(n)} := (\hat{x}_1^{(n)}(0), \dots, \hat{x}_m^{(n)}(0))^T$, e la norma del residuo $r^{(n)} := \|A(0)\hat{x}^{(n)} - b\|_2$.

(iv) (3 pt.) Crei un grafico semilogaritmico del residuo al variare del grado di interpolazione polinomiale.

(Punti extra) Perchè questo approccio funziona? Che relazione c'è tra b ed $A(0)$? Stampare a video le risposte.

---

[1] Trovare cioè un valore $\hat{x}$ tale per cui la funzione $\tilde{x}(t)$ che vale $x(t)$ per $t \neq 0$ e vale $\hat{x}$ per $t = 0$ risulti continua