Dati $x, y \in \mathbb{R}$ e $*$ operazione binaria fondamentale, si ha che in $F(b,t,L,U)$ l'operazione risulta: $x \circledast y = fl^+(fl^+(x) * fl^+(y))$

Dati $x, y \neq 0$, gli errori relativi su tali quantità saranno rispettivamente $\varepsilon_x = \frac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$ e $\varepsilon_y = \frac{|y-\tilde{y}|}{|y|}$ mentre quello sul risultato dell'operazione sarà: $\varepsilon_{x*y} = \frac{|x*y - \tilde{x}*\tilde{y}|}{|x*y|}$

Un'operazione è stabile se l'ordine di grandezza di ε_{x*y} è vicino a quello di ε_x e ε_y

MOLTIPLICAZIONE

$$\varepsilon_{xy} = \frac{|xy - \tilde{x}\tilde{y}|}{|xy|} = \frac{|xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y}|}{|xy|} = \frac{|(x-\tilde{x})y + (y-\tilde{y})\tilde{x}|}{|xy|} \leq \frac{|(x-\tilde{x})y| + |(y-\tilde{y})\tilde{x}|}{|xy|} =$$

$$= \frac{|x-\tilde{x}||y|}{|x||y|} + \frac{|y-\tilde{y}||\tilde{x}|}{|x||y|} = \varepsilon_x \frac{\cancel{|y|}}{\cancel{|y|}} + \varepsilon_y \frac{|\tilde{x}|}{|x|} \Longrightarrow \varepsilon_{xy} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad \underline{\text{STABILE}}$$

DIVISIONE

Considero come $x \cdot \frac{1}{y}$

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} = \frac{\left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{y} + \frac{\tilde{x}}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\left|(x-\tilde{x})\frac{1}{y} + \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\left(\frac{\tilde{y}-y}{y}\right)\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} \leq \frac{\left|(x-\tilde{x})\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\left(\frac{\tilde{y}-y}{y}\right)\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} =$$

$$= |x-\tilde{x}|\left|\frac{1}{\cancel{y}}\right|\left|\frac{\cancel{y}}{x}\right| + \left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\left|\frac{\tilde{y}-y}{y}\right|\left|\frac{y}{x}\right| = \varepsilon_x + \varepsilon_y\left|\frac{\tilde{x}}{x}\right|\left|\frac{y}{\tilde{y}}\right| \Longrightarrow \varepsilon_{\frac{x}{y}} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad \text{STABILE}$$

ADDIZIONE

$$\varepsilon_{x+y} = \frac{|(x+y) - (\tilde{x}+\tilde{y})|}{|x+y|} = \frac{|x-\tilde{x}+y-\tilde{y}|}{|x+y|} \leq \frac{|x-\tilde{x}|}{|x+y|} + \frac{|y-\tilde{y}|}{|x+y|} = \frac{|x|}{|x+y|}\varepsilon_x + \frac{|y|}{|x+y|}\varepsilon_y = w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y$$

$w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y \geq \varepsilon_{x+y}$ ma $w_1, w_2 \leq 1$ quindi STABILE

▶ SOTTRAZIONE

$$\mathcal{E}_{x+y} = \frac{|(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})|}{|x \; y|} = \frac{|x-\tilde{x}+\tilde{y}-y|}{|x \; y|} \leq \frac{|x-\tilde{x}|}{|x \; y|} + \frac{|\tilde{y}-y|}{|x \; y|} = \frac{|x|}{|x \; y|}\mathcal{E}_x + \frac{|y|}{|x \; y|}\mathcal{E}_y = w_1\mathcal{E}_x + w_2\mathcal{E}_y$$

$w_1\mathcal{E}_x + w_2\mathcal{E}_y \geq \mathcal{E}_{x-y}$ ma $w_1, w_2 > 1$ quindi INSTABILE

Es.:

Con $x = 0{,}100017$, $y = -0{,}100014$, $\bar{x} = Fl^5(x) = 0{,}10002$, $\bar{y} = Fl^5(y) = -0{,}10001$, si ha:

$$\mathcal{E}_{x+y} = \frac{|(x+y)-(\bar{x}+\bar{y})|}{|x+y|} = \frac{|0{,}000003 - 0{,}00001|}{|0{,}000003|} = \frac{0{,}000007}{0{,}000003} = 2{,}\bar{3}$$

Quindi l'errore relativo sarebbe del $233{,}\bar{3}\,\%$.