Perché́ e il metodo di Newton per zeri semplici ha ordine di convergenza almeno 2? Quando ha ordine esattamente 2? (si dimostri la relazione fondamentale che lega e_{n+1} e_n).

Sia

$$\begin{cases} f \in C^2[a,b] \\ \xi \in [a,b] : f(\xi) = 0 \\ \{x_n\} \subset [c,d] \subseteq [a,b] \\ f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [c,d] \end{cases} \Rightarrow e_{n+1} \leq c\, e_n^2, \quad n \geq 0, \quad c = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}$$

$$\text{con } M_2 = \max_{x \in [c,d]} |\, f''(x)\,|, \quad m_1 = \min_{x \in [c,d]} |\, f'(x)\,| > 0$$

Applichiamo la formula di Taylor centrata in x_n e calcolata in ξ , con resto del II ordine in forma di Lagrange

$$\underbrace{f(\xi)}_{=0} = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \quad z_n \in int(x_n, \xi) \subset [c,d]$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{=x_{n+1}-x_n} = \xi - x_n + \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = \xi + \frac{f''(z_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

$$\overset{aggiungendo\, i\, moduli}{\Downarrow}$$

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \xi| = c_n e_n^2 \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2}\frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}$$

Rispondendo alle domande:

- Il metodo di Newton ha convergenza esattamente 2 quando: $\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = L' \neq 0$
  $e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|} e_n$ e quindi $\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}\frac{|f''(\xi)|}{|f'(\xi)|}$ con $f''(\xi) \neq 0$ ed $f'(\xi) = 0$
- Il metodo di Newton ha convergenza almeno 2 quando: $e_{n+1} \leq ce^{n^2}$
  e, in particolare, quando $f'(\xi) = 0$ ed esiste $f''(\xi)$