ESAME CALCOLO NUMERICO PROVA DI LABORATORIO
LAUREA IN INFORMATICA
QUARTO APPELLO 08/09/2021

Consegna Compito: saranno visibili solo i files consegnati in tempo tramite moodle.

Tempo di svolgimento: 90 minuti.

Richiamo teorico 1. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Quando il rango di A è pieno (i.e., $\mathrm{rank}(A) = n$) esiste un unica *soluzione ai minimi quadrati* del sistema $Ax = b$, definita come l'unico $x_{LS} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\|Ax^*_{LS} - b\|^2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2.$$

Tale problema si può affrontare risolvendo le *equazioni normali* $A^tAx = A^tb$.

Quando il rango di A **non** è pieno le equazioni normali non hanno soluzione unica, si può allora decidere di trovare la *soluzione di minima norma* $x^*_{MN} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\|x^*_{MN}\|^2 = \min\{\|x\|^2 : \ A^tAx = A^tb\}.$$

Richiamo teorico 2. Sia $r < n$ il rango di A. Assumiamo di calcolare la fattorizzazione QR di A^t ($A^t = QR$ con Q ortogonale ed R triangolare superiore). Allora (**in aritmetica esatta**) R ha le righe $r+1, r+2, \ldots, n$ nulle. Definiamo R_0 come la matrice $r\times n$ con le prime r righe di R, Q_0 matrice $n\times r$ con le prime r colonne di Q ed $S := R_0R_0^t$. Si può dimostrare che, detta y la soluzione di $Sy = R_0b$, abbiamo

$$x^*_{MN} := Q_0y.$$

Esercizio 1 (22 punti)**.** Si crei una function `[x,r,res]=MinNormLS(A,b,toll)` che, presi in ingresso la matrice quadrata `A`, il vettore colonna `b` (di dimensioni compatibili), e lo scalare non-negativo `toll`, restituisca

- la soluzione di minima norma `x` (vettore colonna) delle equazioni normali
- il rango `r` della matrice `A`
- la norma del residuo `res` delle equazioni normali,

calcolati tramite il seguente algoritmo:

(1) calcolare `Q` ed `R` con la `qr` (completa) di matlab
(2) approssimare il rango con `r`:=*numero di elementi della diagonale di* `R` *aventi valore assoluto maggiore od uguale a* `n*toll` (n è il numero di colonne di A). **Suggerimento:** *se non si sa come contare tali elementi provare su command window il comando* `sum(randn(1,10)>0.2)` *e modificarlo opportunamente*
(3) definire `R0`, `Q0` ed `S` come sopra
(4) calcolare la soluzione `y` di $Sy = R_0b$ **con il metodo LU**
(5) calcolare `x=Q0*y` e la norma del residuo $\|A^tAx - A^tb\|$.

Suggerimento: fare prima una versione di prova in cui si usa backslash invece che LU e `rank` invece che il calcolo di `r` proposto, testarla tramite lo script `testMinNormLS.m` fornito dal docente e poi inserire il calcolo di `r` come richiesto e l'uso di LU e ri-testare la function.

Esercizio 2 (9 punti)**.** Si crei uno script `Esercizio2.m` in cui, in un ciclo `for` per $n = 3, 4, \dots, 30$,

(1) si definisca `A0=hilb(n)` e si calcoli `A` definita come la matrice con le prime $n-1$ righe di `A0` e, come ultima riga, la somma (in colonna) delle precedenti $n-1$ righe (*sugg.*: usare `sum` e `[...;...]`). Si crei il vettore $b = A * \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^t$.

(2) Si memorizzi in un vettore il reciproco del condizionamento della matrice `A` (usare `rcond`).

(3) Si risolvano le equazioni normali con due metodi:
- con la function `[x,r,res]=MinNormLS(A,b,toll)` con `toll=1e-9`
- col la built-in function `lsqminnorm(C,d)` che trova la soluzione di minima norma del sistema $Cx = d$. **Porre attenzione** a quale matrice e vettore passare a `lsqminnorm`.

(4) Si memorizzino i residui e le norme delle soluzioni calcolate con i due metodi in quattro vettori.

Si creino poi due figure (scegliere per ciascuna se usare `plot` o `semilogy`), una contenente le norme, l'altra con i residui e il reciproco del numero di condizionamento.

- **Extra credit:** il metodo implementato è paragonabile a quello matlab? E' stabile? (stampare risposta a video con `fprintf`)