Dalle dispense del

PROF. MARCO VIANELLO

Syllabus
Dimostrazioni Irrinunciabili

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Anno accademico 2020 - 2021

Autori:
MARKO
TOLDODM

Premessa

Questa raccolta di appunti non intende essere un sostituto allo studio completo degli argomenti di calcolo numerico. Gli appunti sono stati scritti secondo quanto studiato e capito, di conseguenza potrebbe contenere errori/non essere esaustivo nella risposta agli argomenti del syllabus.

La repository contenente i sorgenti di questo documento si puo' trovare qui: https://github.com/ToldoDM/SyllabusCalcolo

Indice

1 Precisione di macchina come max errore relativo di arrotondamento nel sistema floating-point

Definiamo arrotondamento a t cifre di un numero reale scritto in notazione floating-point

$$x = sign(x)(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

il numero

$$fl^t(x) = sign(x)(0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t) \cdot b^p$$

dove la mantissa è stata arrotondata alla t-esima cifra

$$\tilde{d}_t = \begin{cases} d_t & \text{se } d_{(t+1)} < \frac{b}{2} \\ d_t + 1 & \text{se } d_{(t+1)} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

Definiamo:

$$\text{Errore Relativo} \longleftarrow \frac{\overbrace{|\, x - fl^t(x) \,|}^{\text{Errore Assoluto}}}{|\, x \,|} \quad \text{per} \quad x \neq 0$$

Stimiamo il numeratore

$$\begin{aligned} |\, x - fl^t(x) \,| &= b^p \cdot \overbrace{|(0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) - (0, d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t)|}^{\text{Errore di arrotondamento a } t \text{ cifre dopo la virgola } \leq \frac{b^{-t}}{2}} \\ &\leq b^p \cdot \frac{b^{-t}}{2} = \frac{b^{p-t}}{2} \end{aligned}$$

Notiamo subito un aspetto: l'errore dipende da p, cioè dall'ordine di grandezza del numero (in base b).
Stimiamo da sopra $\frac{1}{|\, x \,|}$, ovvero da sotto $|\, x \,|$:

$$|\, x \,| = (0, d_1 d_2 \dots d_t \dots) \cdot b^p$$

Poiché $d_1 \neq 0$, p fissato, il minimo valore della mantissa è $0, 100 \dots = b^{-1}$. Quindi:

$$|\, x \,| \geq b^{-1} \cdot b^p = b^{p-1} \iff \frac{1}{|\, x \,|} \leq \frac{1}{b^{p-1}}$$

Otteniamo

$$\frac{|\, x - fl^t(x) \,|}{|\, x \,|} \leq \frac{\frac{b^{p-t}}{2}}{b^{p-1}} = \frac{b^{p-t+1-p}}{2} = \frac{b^{1-t}}{2} = \varepsilon_M$$

2 Analisi di stabilità di moltiplicazione, divisione, addizione e sottrazione con numeri approssimati

2.1 Moltiplicazione

$$\varepsilon_{xy} = \frac{|\, xy - \tilde{x}\tilde{y}\,|}{|\, xy\,|}, \quad x, y \neq 0$$

Usiamo la stessa tecnica che si usa per dimostrare che il limite del prodotto di due successioni o funzioni è il prodotto dei limiti, aggiungendo e togliendo a numeratore ad esempio $\tilde{x}y$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= \frac{|\, xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y}\,|}{|\, y\,|} \\
&= \frac{|\, \overbrace{y(x-\tilde{x})}^{=a} + \overbrace{\tilde{x}(y-\tilde{y})}^{=b}\,|}{|\, xy\,|} \\
&\leq \frac{|\, y(x-\tilde{x})| + |\tilde{x}(y-\tilde{y})\,|}{|\, xy\,|} \qquad (*)
\end{aligned}$$

$(*)$ Disugliaglianza triangolare: $||\, a\,| - |\, b\,|| \leq |\, a + b\,| \leq |\, a\,| + |\, b\,|$

Quindi otteniamo

$$\varepsilon_{xy} \leq \frac{|\, y\,||\, x - \tilde{x}\,|}{|\, xy\,|} + \frac{|\, \tilde{x}\,||\, y - \tilde{y}\,|}{|\, xy\,|} = \varepsilon_x + \frac{|\, \tilde{x}\,|}{|\, x\,|}\varepsilon_y$$

Questo perché $\frac{|\, x-\tilde{x}\,|}{|\, x\,|} = \varepsilon_x$ e $\frac{|\, y-\tilde{y}\,|}{|\, y\,|} = \varepsilon_y$.
Poiché $\tilde{x} \approx x \Rightarrow \frac{|\, \tilde{x}\,|}{|\, x\,|} \approx 1$ e possiamo quindi dire che la moltiplicazione è STABILE.

$$\varepsilon_{xy} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|\, \tilde{x}\,|}{|\, x\,|}$

$$\frac{|\, \tilde{x}\,|}{|\, x\,|} = \underbrace{\frac{|\, \overbrace{x}^{=a} + \overbrace{\tilde{x} - x}^{=b}\,|}{|\, x\,|} \leq \frac{|\, x\,| + |\, \tilde{x} - x\,|}{|\, x\,|}}_{\text{Disuguaglianza Triangolare}} = 1 + \varepsilon_x$$

e quindi

$$\varepsilon_{xy} \leq \varepsilon_x + (1 + \varepsilon_x)\,\varepsilon_y$$

Solitamente $\varepsilon_x \leq \varepsilon_M \approx 10^{-16} \Rightarrow 1 + \varepsilon_x$ è vicinissimo ad 1. Ma anche se $\varepsilon_x = 1$ (errore del 100%, molto grande) $\Rightarrow (1 + \varepsilon_x) = 2$ e la stabilità della moltiplicazione non cambia.

2.2 Divisione

La divisione è la moltiplicazione per il reciproco $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.
Analizzando quindi l'operazione di reciproco

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \frac{\left|\, \frac{1}{y} - \frac{1}{\tilde{y}}\,\right|}{\left|\, \frac{1}{y}\,\right|} = \frac{\frac{|\, \tilde{y}-y\,|}{|\, \tilde{y}y\,|}}{\left|\, \frac{1}{y}\,\right|} = \frac{|\, \tilde{y} - y\,|}{|\, y\,|} \cdot \frac{|\, y\,|}{|\, \tilde{y}\,|} \approx \varepsilon_y \qquad \left(\text{questo perchè } \frac{|\, \tilde{y} - y\,|}{|\, y\,|} = \varepsilon_y.\right)$$

Poiché $\frac{|\, y\,|}{|\, \tilde{y}\,|} \approx 1$ possiamo dedurre che il reciproco, e possiamo quindi la divisione, è STABILE.
Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|\, y\,|}{|\, \tilde{y}\,|}$

$$|\, \tilde{y}\,| = |\, y + \tilde{y} - y\,| = |y| \left| 1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y} \right|$$

usando la stima da sotto nella disuguaglianza triangolare

$$|\, a + b\,| \geq |\, |\, a\,| - |\, b\,|\, |$$

$a = 1$ e $b = \frac{(\tilde{y}-y)}{y}$

$$\left| 1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y} \right| \geq \left| 1 - \frac{|\, \tilde{y} - y\,|}{|\, y\,|} \right| = |\, 1 - \varepsilon_y\,| = 1 - \varepsilon_y \qquad \Big(\text{perchè } \varepsilon_y < 1\Big)$$

da cui si ottiene

$$|\, \tilde{y}\,| \geq |\, y\,|(1 - \varepsilon_y)$$

e quindi

$$\frac{|\, y\,|}{|\, \tilde{y}\,|} \leq \frac{|\, y\,|}{|\, y\,|(1 - \varepsilon_y)} = \frac{1 + \varepsilon_y}{(1 + \varepsilon_y)(1 - \varepsilon_y)} = \underbrace{\frac{1 + \varepsilon_y}{1 - \varepsilon_y^2} \approx 1 + \varepsilon_y}_{\text{Poiché } \varepsilon_y^2 \ll \varepsilon_y < 1}$$

Quindi

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \varepsilon_y \frac{|\, y\,|}{|\, \tilde{y}\,|} \lesssim \varepsilon_y(1 + \varepsilon_y) \approx \varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_{\frac{1}{y}} \lesssim \varepsilon_y$$

Infine abbiamo che per la divisione vale (usando la stima della moltiplicazione)

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

2.3 Somma Algebrica

$$x + y = \begin{cases} ADDIZIONE & \text{se } sign(x) = sign(y) \\ SOTTRAZIONE & \text{se } sign(x) \neq sign(y) \end{cases}$$

Per la somma algebrica vale:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x+y} &= \frac{|\, (x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})\,|}{|\, x + y\,|}, \quad x + y \neq 0 \\
&= \frac{|\, x - \tilde{x} + y - \tilde{y}\,|}{|\, x + y\,|}, \quad a = x - \tilde{x} \text{ e } b = y - \tilde{y} \\
&\leq \frac{|\, x - \tilde{x}\,|}{|\, x + y\,|} + \frac{|\, y - \tilde{y}\,|}{|\, x + y\,|}, \quad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \\
&= \frac{|\, x\,|}{|\, x + y\,|} \cdot \frac{|\, x - \tilde{x}\,|}{|\, x\,|} + \frac{|\, y\,|}{|\, x + y\,|} \cdot \frac{|\, y - \tilde{y}\,|}{|\, y\,|} \\
&= w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y \quad \text{con } w_1 = \frac{|\, x\,|}{|\, x + y\,|}, \, w_2 = \frac{|\, y\,|}{|\, x + y\,|}
\end{aligned}$$

Addizione $sign(x) = sign(y)$
In questo caso $|\, x + y\,| \geq |\, x\,|, |\, y\,| \Rightarrow w_1\,, w_2 \leq 1$. Quindi l'addizione è stabile $\varepsilon_{x+y} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$

Sottrazione $sign(x) \neq sign(y)$
In questo caso $|\,x+y\,| \leq |\,x\,|$ e/o $|\,x+y\,| \leq |\,y\,| \Rightarrow max\{w_1\,, w_2\} > 1$. Quindi la sottrazione è potenzialmente instabile (se $w_1\,, w_2$ troppo grandi).
Nel caso in cui $|\,x\,|\,, |\,y\,|$ siano molto vicini in termini relativi, si ha

$$|\,x+y\,| \ll |\,x\,|\,, |\,y\,| \;\Rightarrow\; w_1\,, w_2 \gg 1$$

3 Convergenza del metodo di bisezione

Il metodo di bisezione si basa sull'applicazione iterativa del Teorema degli zeri di funzioni continue:
Se $f(x) \in C[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$ (cioè f cambia segno) allora

$$\exists \xi : f(\xi) = 0,\ \xi \in (a,b)$$

Il procedimento consiste nel passare da $[a_n, b_n] \rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}]$ in cui uno degli estremi è diventato il punto medio

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

A meno che per qualche n non risulti $f(x_n) = 0$, si tratta di un processo infinito che ci permette di costruire tre successioni $\{a_n\}\,, \{b_n\}\,, \{x_n\}$ tali che:

- $|\xi - a_n|,\ |\xi - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $|\xi - x_n| < \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

È semplice dimostrare che tutte e tre le successioni convergono ad uno zero $\xi \in (a,b)$

- $0 \leq |\,\xi - a_n\,|,\ |\,\xi - b_n\,| < \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \underset{\text{Teor. Carabinieri}}{\Longrightarrow} |\,\xi - a_n\,|,\ |\,\xi - b_n\,| \longrightarrow 0,\ n \to \infty$
- $0 \leq |\,\xi - x_n\,| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \Longrightarrow |\,\xi - x_n\,| \longrightarrow 0,\ n \to \infty$

4 Stima dell'errore con residuo pesato (metodo bisezione)

Vogliamo stimare l'errore di bisezione, applicato nelle seguenti ipotesi:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^1[a,b] \\ \{x_n\} \in [c,d] \subseteq [a,b] \\ f'(x) \neq 0\,,\ \forall x \in [c,d] \end{array}\right\} \Rightarrow e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}\,,\ \ n \geq n_0\,,\ \ z_n \in \begin{cases} (x_n, \xi) \\ (\xi, x_n) \end{cases}$$

C^1 indica derivabile 1 volta con derivata continua.

Dimostriamolo utilizzando il teorema del valor medio

$$\text{Sia } \ f \in C[a,b] \ \text{ derivabile in } \ [a.b] \Rightarrow \exists z \in [a,b] : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(z)$$

Consideriamo il caso $\xi < x_n$ (se $x_n < \xi$ la dimostrazione è analoga)

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(z_n)(x_n - \xi),\ \ z_n \in (\xi, x_n)$$

con $f(\xi) = 0$, cioè

$$|f(x_n)| = |f'(z_n)||x_n - \xi|$$

che si può riscrivere come

$$e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

Osserviamo che:

- e_n è un "residuo pesato"
- $f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ zero è semplice
- e_n è una stima a posteriori (serve aver calcolato x_n)

Siccome non conosciamo z_n, diamo delle stime pratiche dell'errore:

- Se è noto che $|f'(x)| \geq k > 0 \Rightarrow e_n = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{k}$
- Se f' è nota, per n abbastanza grande si ha

$$\underbrace{f'(x_n) \approx f'(z_n)}_{\approx f'(\xi)} \Longrightarrow e_n \approx \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

- Se f' non è nota, si può approssimare con

$$f'(z_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\,,\ \ \text{per } n \text{ abbastanza grande}$$

5 Convergenza globale del metodo di Newton ("delle tangenti") in ipotesi di convessità/concavità stretta

Metodo di Newton: Linearizzare iterativamente la funzione con la tangente nel punto

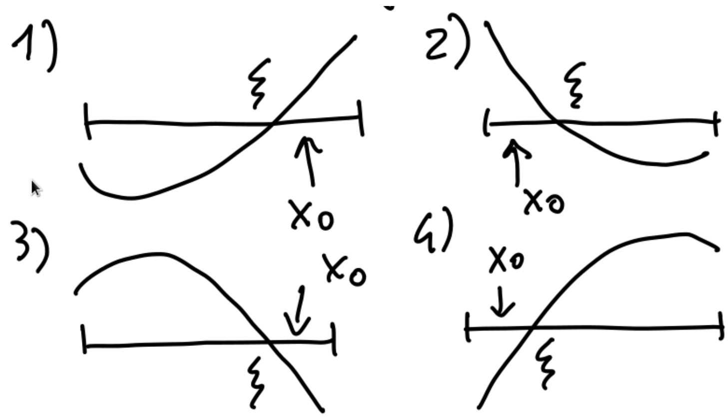
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Convergenza metodo di Newton:

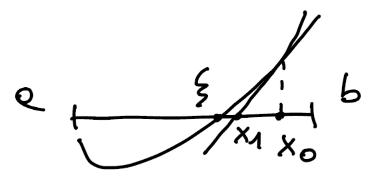
$$\begin{cases} f \in C^2[a,b] \\ f(a)f(b) < 0 \\ f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \\ x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Il metodo di Newton è ben defin} \text{to (cioè } f'(x_n) \neq 0)$$

e converge all'unico zero ξ di f in $[a,b]$

Dimostrazione
ci sono 4 casi possibili in base al segno di f'' ovvero



In questa dimostrazione di concentriamo sul caso 1)



- $f(a) < 0\,,\ f(b) > 0$
- $f''(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$
- $x_0 \in [a,b]$

Dimostriamo come prima cosa: $x_n \in (\xi, b] \Rightarrow x_{n+1} \in (\xi, b]$

f è esattamente convessa $\Rightarrow$ La tangente sta "sotto al grafico" $\forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow$ La tangente in un punto $\in (\xi, b]$ interseca l'asse x "a destra" di ξ

Dimostriamo quindi: $x_{n+1} < x_n$ (cioè $\{x_n\}$ è decrescente)

$$x_{n+1} = x_n - \left.\tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right\} > 0$$

Poiché per $x_n \in (\xi, b]$ si ha $f(x_n) > 0$. Inoltre $f'(x_n) > 0$ in $(\xi, b]$ altrimenti per avere uno zero f'' in $(\xi, b]$ dovrebbe cambiare segno.
Abbiamo quindi che $\{x_n\}$ è una successione decrescente, con $x_n > \xi \quad \forall n$.
Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\} = \eta \quad \text{con} \quad \eta \geq \xi$$

Infine

$$\begin{aligned}
\eta = \lim x_{n+1} &= \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\
&= \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= \lim x_n - \frac{\lim f(x_n)}{\lim f'(x_n)} \\
&= \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \leftarrow \ \lim x_n = \eta \\
&= \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \quad \text{con } f'(\eta) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0 \Rightarrow \eta = \xi$$

6 Velocità (ordine) di convergenza del metodo di Newton

Sia

$$\begin{cases} f \in C^2[a,b] \\ \xi \in [a,b] : f(\xi) = 0 \\ \{x_n\} \subset [c,d] \subseteq [a,b] \\ f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [c,d] \end{cases} \Rightarrow e_{n+1} \leq c\, e_n^2, \quad n \geq 0, \quad c = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}$$

$$\text{con } M_2 = \max_{x\in[c,d]} |\, f''(x)\,|, \quad m_1 = \min_{x\in[c,d]} |\, f'(x)\,| > 0$$

Dimostrazione
Applichiamo la formula di Taylor centrata in x_n e calcolata in ξ , con resto del II ordine in forma di Lagrange

$$\underbrace{f(\xi)}_{=0} = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \quad z_n \in int(x_n, \xi) \subset [c,d]$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{=x_{n+1}-x_n} = \xi - x_n + \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = \xi + \frac{f''(z_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

$$\overset{aggiungendo\, i\, moduli}{\Downarrow}$$

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \xi| = c_n e_n^2 \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2}\frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}$$

Applicando il teorema di Weierstrass ($\exists$ di max, min assoluti in un intervallo chiuso e limitato)

$$|f''(z_n)| \leq \max_{x\in[c,d]} |\, f''(x)\,| = M_2, \quad |f'(x_n)| = \min_{x\in[c,d]} |\, f'(x)\,| > m_1$$

7 Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

Sia ξ punto fisso di $\phi \in C(I)$ e I è un intervallo chiuso (non necessariamente limitato) di $\mathbb{R}$. Supponiamo di essere nelle ipotesi in cui:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad \text{converge a } \xi \;\; (\xi = \phi(\xi)) \quad \text{con} \quad x_0 \in I$$

Allora:

- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p = 1 \iff 0 < |\phi'(\xi)| < 1$
- $\{x_n\}$ ha ordine esattamente $p > 1 \iff \phi^{(j)}(\xi) = 0$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ con $1 \leq j \leq p-1$

Dimostrazione
1) si dimostra subito visto che

$$e_{n+1} = |\phi'(z_n)|e_n \quad \text{con } z_n \in (\xi, x_n)$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left|\phi'(\lim_{n\to\infty} z_n)\right| = |\phi'(\xi)|$$

per 2) utilizziamo la formula di Taylor di grado $p-1$ centrata in ξ e calcolata in x_n, con il resto p-esimo in forma di Lagrange.

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(\xi) + \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \cdots + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x_n - \xi)^{(p-1)} + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!} + \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$

con $u_n \in (\xi, x_n)$

- **Dimostriamo " $\Leftarrow$ " (condizione sufficiente)**
  Da Taylor resta solo
  $$x_{n+1} - \xi = \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$
  e passando ai moduli
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(u_n)|}{p!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|\phi^{(p)}(\xi)|}{p!} \neq 0$$
  e_n^p ovvero per p, $\{x_n\}$ ha ordine esattamente p.

- **Dimostriamo "$\Rightarrow$" (condizione necessaria)**
  Per ipotesi $\{x_n\}$ ha esattamente ordine $p > 1$.
  Abbiamo per assurdo che $\exists\, j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0$, prendiamo $k = \min\{j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$ e dal polinomio di Taylor iniziale si avrebbe:
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{|\phi^{(k)}(\xi)|}{k!} = L' \neq 0$$
  ma allora
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{e_{n+1}}{e_n^k} \cdot e_n^{k-p}$$
  $$\left(\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \rightarrow L' \text{ ed } e_n^{k-p} \rightarrow \infty \text{ perchè } k-p < 0 \text{ ed } e_n \rightarrow 0\right)$$
  cioè
  $$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$
  contraddicendo l'ipotesi che $\{x_n\}$ abbia ordine esattamente p.

8 Esistenza e unicità dell'interpolazione polinomiale

Unicità
Supponiamo che $\exists$ due polinomi $p, q \in \mathbb{P}_n$ (polinomi di grado $\leq n$), $p \neq q$, che interpolano $p(x_i) = y_i = q(x_i)$, con $0 \leq i \leq n \quad \rightarrow \quad n+1$ modi di interpolare.
Poiché $\mathbb{P}_n$ è uno spazio vettoriale $\quad \Rightarrow \quad p - q \in \mathbb{R}_n$.
Allora:

$$(p-q)(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0, \quad \forall \ 0 \leq i \leq n$$

$$\underset{p-q \text{ ha } n+1 \text{ zeri distinti}}{\Downarrow}$$

Ma per il teorema fondamentale dell'algebra, $p - q$ può avere al massimo n zeri distinti, a meno che non sia il polinomio nullo

$$(p-q)(x) = 0 \ \ \forall x \quad \Rightarrow \quad p(x) = q(x) \ \ \forall x$$

Esistenza
Definiamo il "polinomio di Lagrange":

$$l_i(x) = \frac{N_i(x)}{N_i(x_i)}$$

dove

$$N_i(x) = \prod_{j=0,\ j \neq i}^{n} (x - x_j) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$l_i(x) \in \mathbb{P}_n$ poiché $N_i(x) \in \mathbb{P}_n$ e $N_i(x_i)$ è un numero $\neq 0$.
Osserviamo che:

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

Definiamo il "polinomio interpolatore di Lagrange":

$$f_n(x) = \prod_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \quad \in \mathbb{P}_n$$

Verifichiamo che interpola

$$\begin{aligned} \prod_n(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x_k) \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ik} \\ &= y_k \ \delta_{kk} \quad \longleftarrow \quad \text{perchè } \delta_{ik} = 0, i \neq k \\ &= y_k, \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

9 Convergenza uniforme dell'interpolazione lineare a tratti

Teorema
Convergenza uniforme dell'interpolazione polinomiale a tratti.
Siano $f \in C^{s+1}[a,b]$, $s \geq 0$ e $\{x_i\} \subset [a,b]$ $n+1$ nodi distinti con n multiplo di s.
Allora

$$\exists k_s > 0 : \; dist(f, \prod_s^c) \leq k_s \cdot h^{s+1}, \; h = max \; \Delta x_i$$

Dimostrazione per $s = 1$.
Si ha che:

$$\begin{aligned} dist(f, \textstyle\prod_1^c) &= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \textstyle\prod_1^c(x)| \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \textstyle\prod_1^c(x)| \end{aligned}$$

Ricordiamo la stima dell'errore di interpolazione polinomiale a grado s:

$$\max_{x \in [\alpha,\beta]} |f(x) - \textstyle\prod_s(x)| \leq \max_{x \in [\alpha,\beta]} |f^{(s+1)}(x)| \cdot \frac{h^{s+1}}{4(s+1)} \quad con \;\; h = \frac{\beta - \alpha}{s}$$

Applichiamo al nostro caso: $s = 1, \quad [\alpha, \beta] = [x_{i-1}, x_i]$

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - \textstyle\prod_{1,i}(x)| \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \cdot \frac{h^2}{8} = M_{2,i} \frac{h^2}{8}$$

con $M_2 = \max_{x \in [x_{x_i - 1}, x_i]} |f''(x)|$ e $h = \Delta x_i$.
Da cui:

$$dist(f, \textstyle\prod_1^c) \leq \frac{M_2}{8} h^2$$

con $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

10 Stima delle equazioni normali per l'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati

Dati N punti $\{(x_i, y_i)\}\ :\ y_i = f(x_i),\ 1 \leq i \leq N$ e $m < N$, il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum\limits_{i=1}^{N}(y_i - \sum\limits_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j)^2 \iff$ risolve il sistema $V^tVa = V^ty$

Dimostrazione

Osserviamo le dimensioni degli elementi considerati

$$V \in \mathbb{R}^{N\times(m+1)}, \quad V^t \in \mathbb{R}^{(m+1)\times N}, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad a \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Quindi per $m = 1$ non importa quanti dati N ci siano, il sistema sarà sempre 2×2 poiché ci saranno 2 coefficienti.

Dire che $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ è di minimo (assoluto) per $\phi(a)$ significa:

$$\phi(a+b) \geq \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\phi(a+b) &= (y - V(a+b),\, y - V(a+b)) = (y - Va - Vb,\, y - Va - Vb) = \\ &= (y - Va,\, y - Va) + (y - Va,\, -Vb) + (-Vb,\, y - Va) + (-Vb,\, -Vb) = \\ &= \phi(a) + 2(Va - y,\, Vb) + (Vb,\, Vb) = \phi(a) + 2(V^t(Va - y),\, b) + (Vb,\, Vb)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le seguenti proprietà del prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$ (per chiarezza indicato con $(u, v)_n$; ricordiamo che $(u, v)_n = u^tv$ interpretando i vettori come vettori-colonna):

1. $(u, v)_n = (v, u)_n \quad u, v, w \in \mathbb{R}^n$
2. $(\alpha u, v)_n = \alpha(u, v)_n \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(u + v, w)_n = (u, w)_n + (v, w)_n$
4. $(u, Az)_n = (A^tu, z)_k \quad u \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^k,\ A \in \mathbb{R}^{n\times k}$

Dimostriamo "$\Leftarrow$":

Se $V^tVa = V^ty$ allora:

$$V^tVa - V^ty = 0 \quad \iff \quad V^t(Va - y) = 0$$

Ma allora

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \underbrace{(Vb,\, Vb)}_{\sum_{i=1}^{N}(Vb)_i^2 \geq 0} \geq \phi(a) \quad b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Dimostriamo "$\Rightarrow$":

Assumiamo che

$$\phi(a+b) \geq \phi(a) \quad \forall b \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Allora:

$$\phi(a+b) = \phi(a) + 2(V^t(Va - y),\, b) + (Vb, Vb) \geq \phi(a) \quad \forall b$$

Cioè:
$$2(V^t(Va-y),\, b)+(Vb,Vb)\geq 0 \quad \forall b$$
Prendiamo $b=\varepsilon v$, con v versore (cioè vettore di lunghezza 1, $(v,v)=1$). Si ha:

$$\begin{aligned} &2(V^t(Va-y),\, \varepsilon v)+(V(\varepsilon v),\, V(\varepsilon v)) \\ &= 2\varepsilon(V^t(Va-y),\, v)+\varepsilon^2(Vv,Vv)\geq 0 \quad \forall\varepsilon\geq 0 \text{ e } \forall v \end{aligned}$$

Dividendo per $\varepsilon>0$:
$$2(V^t(Va-y),\, v)+\varepsilon(Vv,Vv)\geq 0 \quad \forall\varepsilon \text{ e } \forall v$$
Per $\varepsilon\to 0$ si ha:

$$(V^t(Va-y),\, v)\geq 0 \quad \forall v$$

Ma se vale $\forall$ versore, possiamo prendere $-v$:

$$(V^t(Va-y),\, -v)=-(V^t(Va-y),\, v)\geq 0 \quad \forall v$$
$$\Downarrow$$
$$(V^t(Va-y),\, v)\leq 0 \quad \forall v$$

Ma abbiamo che

$$0\leq (V^t(Va-y),\, v)\leq 0 \iff (V^t(Va-y),\, v)=0 \quad \forall v$$

L'unico vettore ortogonale a tutti i vettori è il vettore nullo. Quindi

$$V^t(Va-y)=0 \iff V^tVa=V^tys$$

11 Stime di condizionamento per un sistema lineare

(i) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ (1° diseguaglianza fondamentale)

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (2° diseguaglianza fondamentale)

$\boxed{\textbf{Caso 1}}$ **perturbazione termine noto**
Sia

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare
- $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax = b$ con $b \neq 0$
- $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$ con $\tilde{b} = b + \delta b$

Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$, vale la seguente stima dell'errore relativo su x

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad \text{con} \quad k(A) \underset{\substack{indice\,di\\ condiz.}}{=} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Dimostrazione
Osserviamo che $x = A^{-1}b \neq 0$ quindi ha senso studiare l'errore relativo (dividere per $\|x\|$).
Si ha

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \delta x \\ \tilde{x} = A^{-1}\tilde{b} = A^{-1}(b+\delta b) = \underbrace{A^{-1}b}_{=x} + A^{-1}\delta b \end{cases} \Rightarrow \quad \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \underset{1^o dis.fond.}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Per stimare $\frac{1}{\|x\|}$ da sopra, cioè da sotto $\|x\|$.

$$\|b\| = \|Ax\| \underset{1^o dis.fond.}{\leq} \|A\| \cdot \|x\|$$

da cui

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

e

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

perciò

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$\boxed{\textbf{Caso 2}}$ **perturbazione matrice**
Siano fatte le stesse ipotesi del caso 1, ma con $\tilde{A}\tilde{x} = b$, $\tilde{A} = A + \delta A$.
Vale la stima dell' "errore relativo" su x

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = (A+\delta A)(x+\delta x) \\ \qquad = Ax + A\delta x + \delta A\tilde{x} \\ \qquad = b + A\delta x + \delta A\tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} = b \end{cases} \Rightarrow \quad A\delta x + \delta A\tilde{x} = 0 \iff \delta x = -A^{-1}(\delta A\tilde{x})$$

Quindi

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|$$

e perciò

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$\boxed{\textbf{Caso 3}}$ **perturbazione termine noto e matrice**

Stesse ipotesi degli altri casi ma con $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.
Si ha che se $k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < 1$ allora:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - k(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot (\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|})$$