Derivazione numerica rapporto incrementale “classico” / Rapporto incrementale standard

Consideriamo il calcolo di f’ in un intorno di valori campionati $I_r = I_r(x) = [x-r, x+r]$ assumendo $f \in C^2(I_r)$ e usando il rapporto incrementale destro:

$$\delta_+(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad 0 < h \le r$$

Dalla definizione di derivabilità in *x*, è convergente:

$$\lim_{h\to 0} \delta_+(h) = f'(x)$$

La stima dell’errore, dunque, è data usando la formula di Taylor centrata in *x* e con incremento *h*:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(z) \qquad \text{dove } z \in (x, x+h). \text{ Allora}$$

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(z)$$

cioè

$$\delta_+(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + O(h)$$

nel senso che $\exists c > 0$ tale che

$$|\delta_+(h) - f'(x)| \le ch, \qquad c = \frac{1}{2}\max_{t\in I_r}|f''(t)| \ge \frac{|f''(z)|}{2}$$

La convergenza del rapporto incrementale δ+(h) è lenta ma, per presenza di errori, vogliamo solo saper stimare i valori approssimati ~f(t) come segue:

$$|f(t) - \tilde{f}(t)| \le \varepsilon \ \forall t \in I_r$$

Chiamiamo allora $\tilde{\delta}_+(h)$ il rapporto incrementale “perturbato”

$$\tilde{\delta}_+(h) = \frac{\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)}{h}$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}_+(h)| &= |f'(x) - \delta_+(h) + \delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)| \\ &\le \underbrace{|f'(x) - \delta_+(h)|}_{\text{convergenza}} + \underbrace{|\delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)|}_{\text{stabilità}} \quad \longleftarrow \text{diseg. triangolare} \end{aligned}$$

Per l’analisi della stabilità:

$$\begin{aligned} |\delta_+(h) - \tilde{\delta}_+(h)| &= \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)}{h} \right| \\ &= \left| \frac{f(x+h)-\tilde{f}(x+h)}{h} + \frac{\tilde{f}(x)-f(x)}{h} \right| \\ &\le \frac{1}{h}\left|f(x+h)-\tilde{f}(x+h)\right| + \frac{1}{h}\left|\tilde{f}(x)-f(x)\right| \quad \longleftarrow \text{diseg. triangolare} \\ &\le \frac{1}{h}\varepsilon + \frac{1}{h}\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{h} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\left|f'(x) - \tilde{\delta}_+(h)\right| \le ch + \frac{2\varepsilon}{h} = E_+(h)$$

Si conclude che si hanno due esigenze contrastanti:

- Serve *h* piccolo per la convergenza teorica
- Per ε fissato, prendere h → 0 *amplifica l’errore su f*

Questa, dunque, l’instabilità che si eredita dalla derivazione.