TEST: [redacted] 1) A 2) B-C 3) D

DOMANDA 1: ESISTENZA POLINOMIO INTERPOLATORE DI GRADO $\leq n$ SU $n+1$ NODI DISTINTI

Per ogni nodo x_i $0 \leq i \leq n$ consideriamo il "polinomio elementare di Lagrange" così definito:

$$l_i(x) = \frac{N_i(x)}{N_i(x_i)} \quad \text{con} \quad N_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) \rightarrow \text{Produttoria di } (x-x_j) \text{ che salta il termine i-esimo: } (x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots$$

$N_i(x_i)$ Numero $\neq 0$

Ci accorgiamo che $N_i(x) \in P_n$ e ha grado esattamente n visto che $N_i(x) = x^n + \dots$

Allora anche $l_i(x) \in P_n$ e ha grado esattamente n, infatti $l_i(x) = \frac{1}{N_i(x_i)} \cdot x^n + \dots$

Possiamo allora definire $f_n(x) = \Pi_n = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$ come il POLINOMIO INTERPOLATORE DI LAGRANGE, $f_n \in P_n$

Il polinomio f_n interpola quando $f_n(x_i) = f(x_i) = y_i \; \forall i$, infatti lo scopo dell'interpolazione è quello di approssimare la funzione f fuori dal campionamento.

→ Verifico che f_n interpola, ovvero $f_n(x_k) = f(x_k) = y_k$ con $0 \leq k \leq n$

$$f_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_k) \qquad l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases} \Rightarrow \text{DELTA DI KRONECKER}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \delta_{ik}$$

$$= y_k \cdot \delta_{kk} = y_k$$

$(i=k)$

$$l_i(x_k) = \frac{N_i(x_k)}{N_i(x_i)} = \frac{N_i(x_i)}{N_i(x_i)} = 1$$

$(i \neq k)$

$$l_i(x_k) = \frac{N_i(x_k)}{N_i(x_i)} = \frac{(x_k - x_0) \dots \overbrace{(x_k - x_k)}^{=0} \dots}{N_i(x_i)} = 0$$

⇓

Il polinomio interpolatore di grado $\leq n$ su $n+1$ nodi (ascisse di interpolazione) distinti esiste ed interpola correttamente

→ Siccome è dimostrabile che il polinomio interpolatore è unico, se f è già un polinomio, $f_n = f$

DOMANDA 2: PERCHÉ NEWTON PER ZERI SEMPLICI HA ORD. DI CONV. ALMENO 2? QUANDO È ESATTAMENTE 2? (e_{n+1} e e_n)

TEOREMA VELOCITÀ DI CONVERGENZA DEL METODO DI NEWTON: ($f(a)\cdot f(b) < 0$, $f''(x) > 0$ o $f''(x) < 0 \; \forall x \in [a,b]$,

Sia $f \in C^2[a,b]$ e mettiamoci nelle ipotesi di convergenza del metodo $\{x_n\} \subset [c,d] \subseteq [a,b]$

x_0 tale che $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$), $\exists\, \varepsilon \in (a,b) : f(\varepsilon) = 0$ e inoltre

Allora $e_{n+1} \leq C \cdot e_n^2$ con $C = \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1}$ dove $M_2 = \max_{x \in [c,d]} |f''(x)| \geq 0$ $\quad m_1 = \min_{x \in [c,d]} |f'(x)| > 0$

DIM: Applicando la formula di Taylor centrata in x_n e calcolata in ε con resto del secondo ordine in forma di Lagrange:

$$\underset{0}{\overset{}{f(\varepsilon)}} = f(x_n) + f'(x_n)(\varepsilon - x_n) + \frac{f''(z_n)(\varepsilon - x_n)^2}{2} \quad \text{con } z_n \in \text{int}(\varepsilon, x_n)$$

| RICORDO che dalla definizione del metodo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

e quindi $-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \varepsilon - x_n + \frac{f''(z_n)}{2 f'(x_n)} (\varepsilon - x_n)^2$$

$$x_{n+1} - \cancel{x_n} = \varepsilon - \cancel{x_n} + \frac{f''(z_n)}{2 f'(x_n)} \overbrace{(\varepsilon - x_n)^2}^{e_n^2}$$

Passando ai moduli: $e_{n+1} = |x_{n+1} - \varepsilon| = \overbrace{\frac{1}{2} \frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|}}^{c_n} \cdot e_n^2 = c_n \cdot e_n^2$

$\{c_n\}$ è una successione limitata, infatti $0 \leq |f''(z_n)| \leq \max_{x \in [c,d]} |f''(x)| = M_2$ e $|f'(x_n)| \geq \min_{x \in [c,d]} |f'(x)| = m_1 > 0$

$$\Rightarrow e_{n+1} \leq C \cdot e_n^2 \quad \text{con } C = \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1}$$

DEFINIZIONE ORDINE DI CONVERGENZA:

Dato un metodo che produce una successione $\{x_n\}_{n \geq 0}$ se $\exists \lim_{n \to \infty} x_n = l$ con l finito, si ~~~~ dice che:

1) Se $\exists\, C > 0$ ($C \in (0,1)$ se $p=1$) tale che $e_{n+1} \leq C \cdot e_n^p$, allora il metodo ha ordine di convergenza almeno p

2) Se $\exists\, L > 0$ ($L \in (0,1)$ se $p=1$) tale che $\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = L$ (con L ~~~~ COSTANTE ASINTOTICA DEL METODO) allora il metodo ha ordine di convergenza esattamente p.

Siccome $e_{n+1} \leq C \cdot e_n^2 \Rightarrow$ Newton ha ordine di convergenza almeno $p=2$

Visto che: $e_{n+1} = c_n \cdot e_n^2$, $c_n = \frac{e_{n+1}}{e_n^2}$

$$\text{Quindi } \lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{|f''(z_n)|}{|f'(x_n)|} = \frac{1}{2} \frac{|f''(\lim_{n \to \infty} z_n)|}{|f'(\lim_{n \to \infty} x_n)|} = \frac{1}{2} \frac{|f''(\varepsilon)|}{|f'(\varepsilon)|}$$

⇒ Se $|f''(\varepsilon)| \neq 0$ Newton ha ordine di convergenza esattamente $p=2$