6) Si ricavi una stima dell'errore relativo sulla soluzione di un sistema lineare non singolare in caso di vettore termine noto effetto da errori.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice non singolare, $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $Ax = b$, $b \neq 0$ e $\tilde{x} = x + \delta x$ soluzione del sistema perturbato $A\tilde{x} = \tilde{b} = b + \delta b$.
Fissata una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$, vale la seguente stima dell'errore "relativo" su x

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Dimostrazione
Osserviamo che $x = A^{-1}b \neq 0$ quindi ha senso stimare l'errore relativo in norma (cioè l'errore assoluto $\|\delta x\|$ diviso per la "lunghezza" di x, cioè $\|x\|$).
Ora

$$\tilde{x} = \cancel{x} + \delta x = A^{-1}\tilde{b} = A^{-1}(b + \delta b) = \cancel{A^{-1}b} + A^{-1}\delta b$$

da cui otteniamo la stima dell'errore assoluto

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \underset{1^o dis.fond.}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Per stimare l'errore relativo dobbiamo stimare da sopra $\frac{1}{\|x\|}$, cioè da sotto $\|x\|$.
Siccome x è la soluzione

$$\|b\| = \|Ax\| \underset{1^o dis.fond.}{\leq} \|A\| \cdot \|x\|$$

da cui

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

e

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

perciò

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

■