# 5 Convergenza globale del metodo di Newton ("delle tangenti") in ipotesi di convessità/concavità stretta

Metodo di Newton: Linearizzare iterativamente la funzione con la tangente nel punto

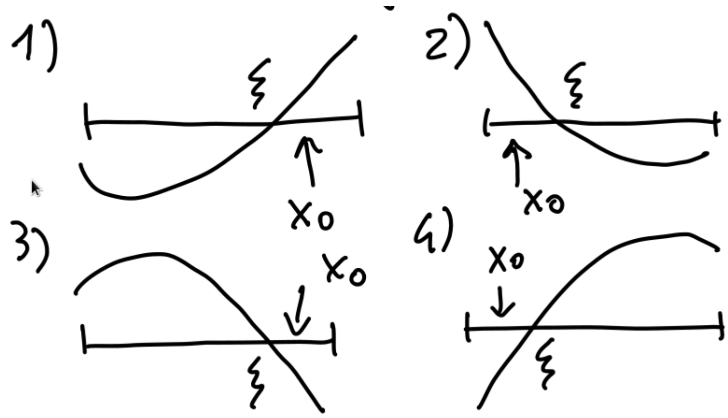
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Convergenza metodo di Newton:

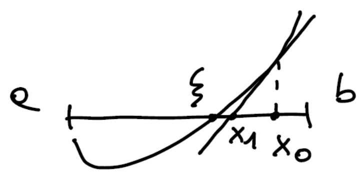
$$\begin{cases} f \in C^2[a,b] \\ f(a)f(b) < 0 \\ f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \\ x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Il metodo di Newton è ben defwinto (cioè } f'(x_n) \neq 0)$$

e converge all'unico zero $\xi$ di $f$ in $[a,b]$

**Dimostrazione**
ci sono 4 casi possibili in base al segno di $f''$ ovvero




In questa dimostrazione di concentriamo sul caso 1)




- $f(a) < 0\,,\ f(b) > 0$
- $f''(x) > 0\ \ \forall x \in [a,b]$
- $x_0 \in [a,b]$

Dimostriamo come prima cosa: $x_n \in (\xi, b] \Rightarrow x_{n+1} \in (\xi, b]$

$f$ è esattamente convessa $\Rightarrow$ La tangente sta "sotto al grafico" $\forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow$ La tangente in un punto $\in (\xi, b]$ interseca l'asse $x$ "a destra" di $\xi$

Dimostriamo quindi: $x_{n+1} < x_n$ (cioè $\{x_n\}$ è decrescente)

$$x_{n+1} = x_n - \left.\tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right\} > 0$$

Poiché per $x_n \in (\xi, b]$ si ha $f(x_n) > 0$. Inoltre $f'(x_n) > 0$ in $(\xi, b]$ altrimenti per avere uno zero $f''$ in $(\xi, b]$ dovrebbe cambiare segno.
Abbiamo quindi che $\{x_n\}$ è una successione decrescente, con $x_n > \xi \quad \forall n$.
Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\} = \eta \quad \text{con} \quad \eta \geq \xi$$

Infine

$$\begin{aligned}
\eta = \lim x_{n+1} &= \lim \left( x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\
&= \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= \lim x_n - \frac{\lim f(x_n)}{\lim f'(x_n)} \\
&= \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \leftarrow \ \lim x_n = \eta \\
&= \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \qquad \text{con } f'(\eta) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0 \Rightarrow \eta = \xi$$