Applicazione del MEG nel calcolo del determinante.

Innanzitutto diciamo che il MEG è basato su due proprietà fondamentali in merito a trasformazioni della matrice. Esse sono:

- la sostituzione alla riga k della somma della riga k con la riga i moltiplicata per uno scalare
- lo scambio di due righe porta il determinante a cambiare segno

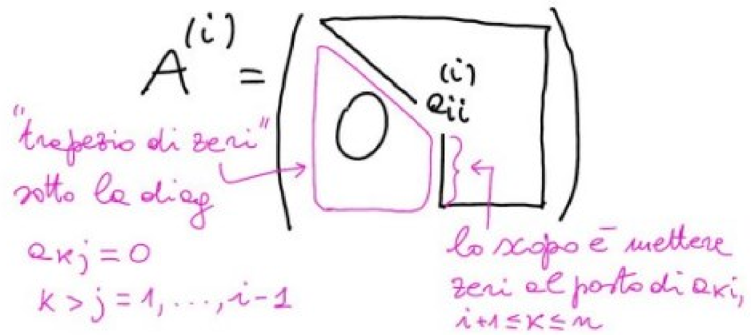
Esso si applica ripetutamente per mettere zeri in ogni colonna sotto la diagonale principale, in maniera tale da ottenere una matrice triangolare superiore.
Partendo ad esempio da una matrice A 3x3 (a destra) si arriva facilmente alla matrice U (a sinistra):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Questo afferma che il MEG consiste in una sequenza di n-1 trasformazioni:

$$A^{(1)} = A \to A^{(2)} \to A^{(3)} \to \ldots \to A^{(n)} = U$$

ottenendo una matrice U finale che è triangolare superiore con la seguente struttura schematica:




Se $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ (cioè se l'elemento diagonale di $A^{(i)}$ è non nullo) si può propagare a destra la struttura del trapezio di zeri con le trasformazioni

$$\mathcal{R}_k^{(i+1)} := \mathcal{R}_k^{(i)} + \left(-\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}\right) \cdot \mathcal{R}_i^{(i)}, \; i+1 \leq k \leq n$$

che mettono lo zero al posto $k, i$ visto che

$$a_{ki}^{(i+1)} = a_{ki}^{(i)} + \left(-\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}\right) \cdot a_{ii}^{(i)} = 0$$