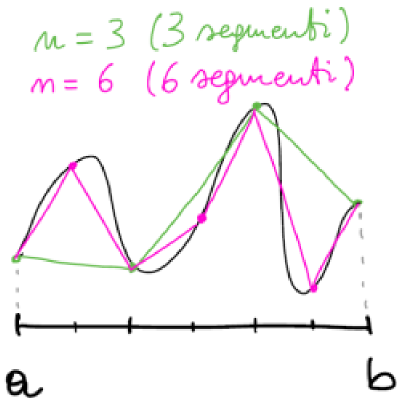
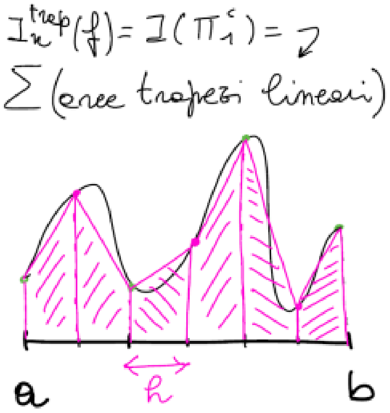
Perché l'errore della formula dei trapezi è O(h^2) per $f \in C^2[a, b]$?
(si scriva esplicitamente la formula, si dia un'interpretazione geometrica con un disegno e si ricavi una stima dell'errore)

La formula dei trapezi utilizza l'interpolazione lineare a tratti imponendo s=1 e l'integrale viene approssimato con la somma delle aree dei trapezi lineari. Geometricamente parlando ci riconduciamo a:





Per $s = 1$ l'integrale $I(f)$ (cioè l'area che sta "sotto" la curva grafico di f) viene approssimata dalla somma delle aree dei trapezi lineari corrispondenti all'interpolante lineare a tratti.
Osservando che l'i-esimo trapezio ha altezza $h = (b-a)/n$ e basi $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, $1 \le i \le n$, si ha area trapezio i-esimo $= \frac{h}{2} \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i))$ e quindi

$$
\begin{aligned}
I_n^{trap}(f) &= I(\textstyle\prod_1^c) \\
&= \int_a^b \textstyle\prod_1^c(x)dx \\
&= \sum (\text{aree trapezi}) \\
&= \overbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_1))}^{\text{area trapezio 1}} + \overbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2))}^{\text{area trapezio 2}} + \ldots + \\
&+ \underbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}))}_{\text{area trapezio (n-1)-esimo}} + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot (f(x_{n-1}) + f(x_n))}_{\text{area trapezio n-esimo}} \\
&= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} h \cdot f(x_i)
\end{aligned}
$$

(perché ogni nodo interno x_i, $1 \le i \le n-1$, compare in 2 trapezi consecutivi, cioè la FORMULA DEI TRAPEZI)

$$
I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, n \\ h, & 1 \le i \le n-1 \end{cases}
$$

La convergenza è ricavabile con:

$$
\begin{aligned}
|I(f) - I_n(f)| &= |I(f) - I(f_n)| \\
&= |I(f - f_n)| \\
&\le I(|f - f_n|) \\
&\le (b-a) \cdot dist(f, f_n)
\end{aligned}
$$

e per le formule composte, ottenute come $In(f) \; = \; I(\Pi_s^c)$, con n multiplo di s.

$$|I(f) - I_n(f)| \leq (b-a) \cdot dist(f, \prod_s^c) \leq (b-a)k_s \cdot h^{s+1} \qquad \text{se } f \in C^{s+1}[a,b]$$

e, dunque, la formula per s=1 presenta un ordine di errore $O(h^2)$