4 Stima dell'errore con residuo pesato (metodo bisezione)

Vogliamo stimare l'errore di bisezione, applicato nelle seguenti ipotesi:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^1[a,b] \\ \{x_n\} \in [c,d] \subseteq [a,b] \\ f'(x) \neq 0\,,\ \forall x \in [c,d] \end{array}\right\} \Rightarrow e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}\,,\ \ n \geq n_0\,,\ \ z_n \in \begin{cases} (x_n, \xi) \\ (\xi, x_n) \end{cases}$$

$$C^1\ indica\ derivabile\ 1\ volta\ con\ derivata\ continua.$$

Dimostriamolo utilizzando il teorema del valor medio

$$\text{Sia } f \in C[a,b] \text{ derivabile in } [a.b] \Rightarrow \exists z \in [a,b] : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z)$$

Consideriamo il caso $\xi < x_n$ (se $x_n < \xi$ la dimostrazione è analoga)

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(z_n)(x_n - \xi),\ \ z_n \in (\xi, x_n)$$

con $f(\xi) = 0$, cioè

$$|f(x_n)| = |f'(z_n)||x_n - \xi|$$

che si può riscrivere come

$$e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

Osserviamo che:

Rif. residuo pesato:
w = (f(b) - f(a) / b-a))^-1

- e_n è un "residuo pesato"
- $f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ zero è semplice
- e_n è una stima a posteriori (serve aver calcolato x_n)

Siccome non conosciamo z_n, diamo delle stime pratiche dell'errore:

- Se è noto che $|f'(x)| \geq k > 0 \Rightarrow e_n = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{k}$
- Se f' è nota, per n abbastanza grande si ha

$$\underbrace{f'(x_n) \approx f'(z_n)}_{\approx f'(\xi)} \Longrightarrow e_n \approx \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|}$$

- Se f' non è nota, si può approssimare con

$$f'(z_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\,,\ \ \text{per } n \text{ abbastanza grande}$$