- **Si mostri qual'e' l'idea del metodo di estrapolazione e si faccia un esempio di applicazione.**

Ripartiamo dalla struttura asintotica:

$$\delta_+(h) = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + O(h^2)$$
$$\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\frac{h}{2} + O(h^2)$$

Adesso sfruttiamo di nuovo la struttura asintotica, stavolta per eliminare la parte principale dell'errore e arrivare ad una formula con errore di ordine superiore come infinitesimo in h

$$\delta_+(h) = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + O(h^2)$$
$$2\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) = 2f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\cancel{2}\frac{h}{\cancel{2}} + O(h^2)$$

quindi

$$\begin{aligned} 2\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) - \delta_+(h) &= 2f'(x) + \cancel{\frac{f''(x)}{2}h} + O(h^2) - \left(f'(x) + \cancel{\frac{f''(x)}{2}h} + O(h^2)\right) \\ &= 2f'(x) - f'(x) + O(h^2) - O(h^2) \\ &= f'(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

(si noti che abbiamo usato il fatto che $2O(h^2) = O(h^2) : |u(h)| \leq \gamma h^2 \Rightarrow |k \cdot u(h)| \leq k \cdot \gamma h^2$ se k è una costante).
In definitiva:

$$\phi_1(h) = 2\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) - \delta_+(h) = f'(x) + O(h^2)$$

cioè con una semplice speciale combinazione lineare delle formule con passo h e $\frac{h}{2}$ abbiamo ricavato una nuova formula con errore $O(h^2)$ invece di $O(h)$.

Grazie a questa struttura asintotica si ha la tecnica della *estrapolazione*, poco generalizzabile a tutte le formule in cui l'errore è dotato di struttura asintotica.

Come primo esempio, pensiamo di calcolare la derivata di $f(x) = e^x$ in $x = 0$, $f'(0) = e^0 = 1$ utilizzando $\delta_+(h)$, $\delta_+\left(\frac{h}{2}\right)$ e $\phi_1(h)$ con $h = \frac{1}{10}$

$$\delta_+(h) = \frac{e^h - e^0}{h} = \frac{e^{1/10} - 1}{1/10} = 1.0517\ldots7$$
$$\delta_+\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{e^{1/20} - 1}{1/20} = 1.0254\ldots2$$
$$\phi_1(h) = 2 \cdot \delta_+(h/2) - \delta_+(h) = 0.99913\ldots5$$

Guardando gli errori (arrotondati alla seconda cifra)

$$|\delta_+(h) - f'(0)| \approx 0.5 \cdot 10^{-1}$$
$$|\delta_+(h/2) - f'(0)| \approx 0.25 \cdot 10^{-1}$$
$$|\phi_1(h) - f'(0)| \approx 0.87 \cdot 10^{-3}$$

Si noti il miglioramento ottenuto con $\phi_1(h)$, che ha un errore paragonabile a quello ottenibile con $\delta(h) = f'(0) + O(h^2)$

$$|\delta(h) - f'(0)| = \left|\frac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1\right| \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$$

Si noti anche che la stima a posteriori dell'errore commesso con $\delta_+(h/2)$

$$\left|\delta_+(h) - \delta_+\left(\frac{h}{2}\right)\right| \approx 0.26 \cdot 10^{-1}$$