Con $x_n \to \xi$, $n \to \infty$, $f(\xi)=0$ e $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [c,d] \subseteq [a,b]$ allora:

$$e_n = |x_n - \xi| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(z_n)} \right|, \quad n \geq n_0 \text{ e } z_n \in \text{int}(x_n, \xi)$$

Per dimostrarlo si considera il caso $x_n > \xi$

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(z_n)(x_n - \xi), \quad z_n \in (\xi, x_n)$$

$$|f(x_n)| = |f'(z_n)||x_n - \xi|$$

$$e_n = |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(z_n)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{K_n}$$

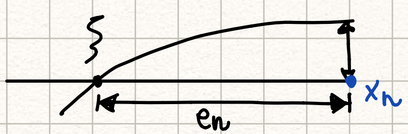
con $K_n = K$ se $f'(x) > K > 0$ $\forall x \in [c,d]$

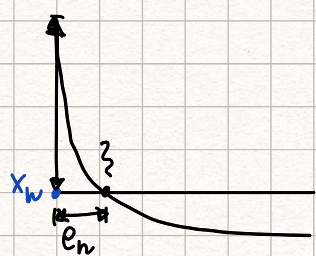
o $K_n = f'(x_n)$ se $f'$ è nota o calcolabile

o $K_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

## Perché il residuo non pesato può non essere una buona stima errore?

In generale, non è vero che $|f(x_n)| \leq \varepsilon \Rightarrow e_n \leq \varepsilon$. Per avere una buona stima dell'errore a posteriori bisogna pesare il residuo alla derivata. Per capire il motivo, si considerino i seguenti grafici con $|f(x)|$ = RESIDUO




Il primo è un caso di sottostima (residuo piccolo, errore grande)

Il secondo è un caso di sovrastima (residuo grande, errore piccolo)

In particolare, il caso più pericoloso dei due è la sottostima, dato che potrebbe portare allo stop delle iterazioni prima di trovare un valore che rispetti i limiti di tolleranza, mentre la sovrastima comporta solamente di effettuare più iterazioni del necessario, affinando il risultato al valore effettivamente cercato.