2.1 Moltiplicazione

$$\varepsilon_{xy} = \frac{|\,xy - \tilde{x}\tilde{y}\,|}{|\,xy\,|}, \quad x, y \neq 0$$

Usiamo la stessa tecnica che si usa per dimostrare che il limite del prodotto di due successioni o funzioni è il prodotto dei limiti, aggiungendo e togliendo a numeratore ad esempio $\tilde{x}y$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{|\,xy - \tilde{x}y + \tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y}\,|}{|\,y\,|} \\ &= \frac{|\,\overbrace{y(x-\tilde{x})}^{=a} + \overbrace{\tilde{x}(y-\tilde{y})}^{=b}\,|}{|\,xy\,|} \\ &\leq \frac{|\,y(x-\tilde{x})| + |\tilde{x}(y-\tilde{y})\,|}{|\,xy\,|} \quad (*)\end{aligned}$$

$(*)$ Disugliaglianza triangolare: $||\,a\,| - |\,b\,|| \leq |\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$

Quindi otteniamo

$$\varepsilon_{xy} \leq \frac{|\,y\,||\,x - \tilde{x}\,|}{|\,xy\,|} + \frac{|\,\tilde{x}\,||\,y - \tilde{y}\,|}{|\,xy\,|} = \varepsilon_x + \frac{|\,\tilde{x}\,|}{|\,x\,|}\varepsilon_y$$

Questo perché $\frac{|\,x-\tilde{x}\,|}{|\,x\,|} = \varepsilon_x$ e $\frac{|\,y-\tilde{y}\,|}{|\,y\,|} = \varepsilon_y$.
Poiché $\tilde{x} \approx x \Rightarrow \frac{|\,\tilde{x}\,|}{|\,x\,|} \approx 1$ e possiamo quindi dire che la moltiplicazione è STABILE.

$$\varepsilon_{xy} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|\,\tilde{x}\,|}{|\,x\,|}$

$$\frac{|\,\tilde{x}\,|}{|\,x\,|} = \underbrace{\frac{|\,\overbrace{x}^{=a} + \overbrace{\tilde{x} - x}^{=b}\,|}{|\,x\,|} \leq \frac{|\,x\,| + |\,\tilde{x} - x\,|}{|\,x\,|}}_{\text{Disuguaglianza Triangolare}} = 1 + \varepsilon_x$$

e quindi

$$\varepsilon_{xy} \leq \varepsilon_x + (1 + \varepsilon_x)\,\varepsilon_y$$

Solitamente $\varepsilon_x \leq \varepsilon_M \approx 10^{-16} \Rightarrow 1 + \varepsilon_x$ è vicinissimo ad 1. Ma anche se $\varepsilon_x = 1$ (errore del 100%, molto grande) $\Rightarrow (1 + \varepsilon_x) = 2$ e la stabilità della moltiplicazione non cambia.

2.2 Divisione

La divisione è la moltiplicazione per il reciproco $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.
Analizzando quindi l'operazione di reciproco

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \frac{\left|\,\frac{1}{y} - \frac{1}{\tilde{y}}\,\right|}{\left|\,\frac{1}{y}\,\right|} = \frac{\frac{|\,\tilde{y}-y\,|}{|\,\tilde{y}y\,|}}{\left|\,\frac{1}{y}\,\right|} = \frac{|\,\tilde{y} - y\,|}{|\,y\,|} \cdot \frac{|\,y\,|}{|\,\tilde{y}\,|} \approx \varepsilon_y \qquad \left(\text{questo perchè } \frac{|\,\tilde{y} - y\,|}{|\,y\,|} = \varepsilon_y.\right)$$

Poiché $\frac{|y|}{|\tilde{y}|} \approx 1$ possiamo dedurre che il reciproco, e possiamo quindi la divisione, è STABILE.
Però possiamo dare una stima più precisa di $\frac{|y|}{|\tilde{y}|}$

$$|\tilde{y}| = |y + \tilde{y} - y| = |y| \left| 1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y} \right|$$

usando la stima da sotto nella disuguaglianza triangolare

$$|a + b| \geq ||a| - |b||$$

$a = 1$ e $b = \frac{(\tilde{y}-y)}{y}$

$$\left| 1 + \frac{(\tilde{y} - y)}{y} \right| \geq \left| 1 - \frac{|\tilde{y} - y|}{|y|} \right| = |1 - \varepsilon_y| = 1 - \varepsilon_y \qquad \left(\text{perchè } \varepsilon_y < 1\right)$$

da cui si ottiene

$$|\tilde{y}| \geq |y|(1 - \varepsilon_y)$$

e quindi

$$\frac{|y|}{|\tilde{y}|} \leq \frac{|y|}{|y|(1 - \varepsilon_y)} = \frac{1 + \varepsilon_y}{(1 + \varepsilon_y)(1 - \varepsilon_y)} = \underbrace{\frac{1 + \varepsilon_y}{1 - \varepsilon_y^2} \approx 1 + \varepsilon_y}_{\text{Poiché } \varepsilon_y^2 \ll \varepsilon_y < 1}$$

Quindi

$$\varepsilon_{\frac{1}{y}} = \varepsilon_y \frac{|y|}{|\tilde{y}|} \lesssim \varepsilon_y(1 + \varepsilon_y) \approx \varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_{\frac{1}{y}} \lesssim \varepsilon_y$$

Infine abbiamo che per la divisione vale (usando la stima della moltiplicazione)

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

2.3 Somma Algebrica

$$x + y = \begin{cases} ADDIZIONE & \text{se } sign(x) = sign(y) \\ SOTTRAZIONE & \text{se } sign(x) \neq sign(y) \end{cases}$$

Per la somma algebrica vale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x+y} &= \frac{|(x + y) - (\tilde{x} + \tilde{y})|}{|x + y|}, \quad x + y \neq 0 \\ &= \frac{|x - \tilde{x} + y - \tilde{y}|}{|x + y|}, \quad a = x - \tilde{x} \text{ e } b = y - \tilde{y} \\ &\leq \frac{|x - \tilde{x}|}{|x + y|} + \frac{|y - \tilde{y}|}{|x + y|}, \quad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \\ &= \frac{|x|}{|x + y|} \cdot \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} + \frac{|y|}{|x + y|} \cdot \frac{|y - \tilde{y}|}{|y|} \\ &= w_1\varepsilon_x + w_2\varepsilon_y \quad \text{con } w_1 = \frac{|x|}{|x + y|}, \, w_2 = \frac{|y|}{|x + y|} \end{aligned}$$

Addizione $sign(x) = sign(y)$
In questo caso $|x + y| \geq |x|, |y| \Rightarrow w_1, w_2 \leq 1$. Quindi l'addizione è stabile $\varepsilon_{x+y} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$

Sottrazione $sign(x) \neq sign(y)$
In questo caso $|\,x+y\,| \leq |\,x\,|$ e/o $|\,x+y\,| \leq |\,y\,| \Rightarrow max\{w_1\,, w_2\} > 1$. Quindi la sottrazione è potenzialmente instabile (se $w_1\,, w_2$ troppo grandi).
Nel caso in cui $|\,x\,|, |\,y\,|$ siano molto vicini in termini relativi, si ha

$$|\,x+y\,| \ll |\,x\,|, |\,y\,| \;\Rightarrow\; w_1\,, w_2 \gg 1$$

1.5.1 Esempio 1

Consideriamo $\mathbb{F}(10, 4, L, U)$ (con L, U sufficienti per rappresentare i numeri che ci interessano) e

$$x = 0,10016$$

$$y = -0,10012$$

allora

$$\tilde{x} = fl^4(x) = 0,1002$$
$$\tilde{y} = fl^4(y) = -0,1001$$

eseguendo l'operazione-macchina di somma algebrica (che è una sottrazione visto che x e y hanno segno opposto) si ottiene

$$\begin{aligned} x \oplus y &= fl^4(fl^4(x) + fl^4(y)) \\ &= fl^4(0,1002 - 0,1001) \\ &= 10^{-4} \end{aligned}$$

scriveremo spesso i numeri in notazione standard per comodità)
Invece

$$x + y = 4 \cdot 10^{-5}$$

quindi l'errore relativo nel risultato è

$$\frac{|\,(x+y) - (x+y)\,|}{|\,x+y\,|} = \frac{|\,4 \cdot 10^{-5} - 10^{-4}\,|}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{3}{2} = 150\%$$