Sia ξ punto fisso di $\phi \in C^p(I)$, $p \geq 1$ con intervallo I di $\mathbb{R}$, supponiamo di essere in ipotesi che garantiscano la convergenza a ξ di $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \geq 0$ con $x_n \in I$, allora $\{x_n\}$ ha:

① ordine esattamente $p = 1 \iff 0 < |\phi'(\xi)| < 1$

② ordine esattamente $p > 1 \iff \phi^{(j)}(\xi) = 0$, $1 \leq j \leq p-1$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$

Dim ①: $e_{n+1} = |\phi'(z_n)| e_n$ con $z_n \in \text{int}(\xi, x_n)$ per il teorema del valor medio

risulta: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\phi'(\lim z_n)| = |\phi'(\xi)|$

Dim ②: si utilizza la formula di Taylor di grado $p-1$ centrata in ξ con resto p-esimo in forma di Lagrange:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(\xi) + \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \frac{\phi''(\xi)}{2}(x_n - \xi)^2 + \ldots + \frac{\phi^{(p-1)}(\xi)}{(p-1)!}(x_n - \xi)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$$

con $u_n \in \text{int}(\xi, x_n)$ e $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

Per dimostrare la condizione sufficiente "$\Leftarrow$" si applicano le condizioni $\phi^{(j)}(\xi) = 0$ per $1 \leq j \leq p-1$ e $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$. Inoltre $\phi(\xi) = \xi$. Risulta, quindi:

$x_{n+1} - \xi = \frac{\phi^{(p)}(u_n)}{p!}(x_n - \xi)^p$ che passando ai moduli diventa:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{|\phi^{(p)}(u_n)|}{p!} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{|\phi^{(p)}(\xi)|}{p!} \neq 0$$ quindi $\{x_n\}$ ha ordine p

Per dimostrare la condizione necessaria "$\Rightarrow$" si suppone per assurdo che $\exists\, j < p$ t.c. $\phi^{(j)}(\xi) \neq 0$ e $\{x_n\}$ ha ordine p. Si avrebbe quindi, tramite Taylor:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^k} \to \frac{|\phi^{(k)}(\xi)|}{k!} = L' \neq 0$$ con $k = \min\{j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$

ma $\frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{e_{n+1}}{e_n^k} \cdot e_n^{k-p}$ e so che $\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \to L \neq 0$

quindi

$\dfrac{e_{n+1}}{e_n^{k}} \cdot e_n^{k-p} \longrightarrow \infty$ perché $\dfrac{e_{n+1}}{e_n^{k}} \to L'$ e $e_n^{k-p} \to \infty$ perche $e_n \to 0$ e $k-p<0$

cioè $\dfrac{e_{n+1}}{e_n^{p}} \longrightarrow \infty,\quad n \to \infty$ che contraddice l'ipotesi dell'ordine finita