Formule di quadratura composte

Per $f_n(x) = \prod_s^c(x)$ cioè, la funzione polinomiale composta a tratti di grado locale *s* (con *n* multiplo di *s*,

si ottengono le *formule composte*. Nel caso delle formule, i nodi *n = k * s* sono a pacchetti di s+1 con nodo di raccordo. Ciascun valore di interpolazione locale y_i compare una volta tranne per i nodi di raccordo (dove compare due volte e i 2 pesi vanno sommati), quindi ottenendo:

$$I_n(f) = I(\textstyle\prod_s^c) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i \cdot y_i$$

sommando a coppie i nodi:

$$w_i = w_{i,j} + w_{i,(j+1)}$$

Per le formule di quadratura composte ci riconduciamo a due casi, facendo riferimento nel caso di calcolo di nodi equispaziati:

- Per s = 1 alla formula dei trapezi, in cui l'integrale viene approssimato alla somma delle aree dei trapezi lineari corrispondenti all'interpolazione lineare a tratti.

$$\begin{aligned}
I_n^{trap}(f) &= I(\textstyle\prod_1^c) \\
&= \int_a^b \textstyle\prod_1^c(x)dx \\
&= \sum(\text{aree trapezi}) \\
&= \overbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_0)+f(x_1))}^{\text{area trapezio 1}} + \overbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_1)+f(x_2))}^{\text{area trapezio 2}} + \ldots + \\
&+ \underbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_{n-2})+f(x_{n-1}))}_{\text{area trapezio (n-1)-esimo}} + \underbrace{\frac{h}{2}\cdot(f(x_{n-1})+f(x_n))}_{\text{area trapezio n-esimo}} \\
&= \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} h\cdot f(x_i)
\end{aligned}$$

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, n \\ h, & 1 \le i \le n-1 \end{cases}$$

- Per s = 2, integrando la funzione quadratica a tratti, si ottiene la formula delle parabole:

$$I_n^{parab}(f) = I\left(\textstyle\prod_2^c\right) = \sum(\text{aree trapezi parabolici}) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i), \text{ con } w_i = \begin{cases} h/3, & i = 0,\ n \text{ pari} \\ 4h/3, & i \text{ dispari} \\ 2h/3, & i \text{ pari } 2 \le i \le n-2 \end{cases}$$

$$\int_\alpha^\beta \textstyle\prod_2(x)dx = \frac{h}{3}\cdot f(\alpha) + \frac{4}{3}\cdot h \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{h}{3}\cdot f(\beta)$$

Da aggiungere che, per le formule composte, ottenute come In(f) = (Π_s^c) con *n* multiplo di *s*, abbiamo:

$$|I(f) - I_n(f)| \le (b-a)\cdot dist(f, \textstyle\prod_s^c) \le (b-a)k_s \cdot h^{s+1} \quad \text{se } f \in C^{s+1}[a,b] \qquad \text{con } h = max\ \Delta x_i.$$

Essendo le formule sempre convergenti per qualsiasi distribuzione di nodi per cui *h* → 0, avremo che:

- la formula dei trapezi, per s=1, presenta un errore $O(h^2)$
- la formula delle parabole, per s=2, presenta un errore $O(h^3)$ (può anche valere, nel caso di nodi equispaziati per simmetria, $O(h^4)$)