Usando Taylor da destra e da sinistra:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(\eta)$$

Otteniamo: $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + O(h^3)$

e: $$\delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$$

con:
$$\begin{aligned} |f'(x) - \delta(h)| &= \frac{1}{12} \cdot |f'''(\xi) + f'''(\eta)| \cdot h^2 \\ &\leq \frac{1}{12}(|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|) \cdot h^2 \\ &\leq d \cdot h^2 \end{aligned}$$

Dunque, l'errore di approssimazione della derivata con il rapporto incrementale simmetrico è $O(h^2)$.
Vogliamo dare da la stima:

$$\begin{aligned} |f'(x) - \tilde{\delta}(h)| &= |f'(x) - \delta(h) + \delta(h) - \tilde{\delta}(h)| \\ &\leq \underbrace{|f'(x) - \delta(h)|}_{\text{convergenza}} + \underbrace{|\delta(h) - \tilde{\delta}(h)|}_{\text{stabilità}} \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} |\delta(h) - \tilde{\delta}(h)| &= \frac{1}{2h}|f(x+h) - f(x-h)| - |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)| \\ &= \frac{1}{2h}|(f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) + (\tilde{f}(x-h) - f(x-h))| \\ &\leq \frac{1}{2h}(|f(x+h) - \tilde{f}(x+h)| + |\tilde{f}(x-h) - f(x-h)|) \\ &\leq \frac{1}{2h}(\varepsilon + \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h} \end{aligned}$$

Ottenendo: $$|f'(x) - \tilde{\delta}(h)| \leq dh^2 + \frac{\varepsilon}{h} = E(h)$$