ESAME CALCOLO NUMERICO PROVA DI LABORATORIO
LAUREA IN INFORMATICA
SECONDO APPELLO 13/07/2021

Consegna Compito: saranno visibili solo i files consegnati in tempo tramite moodle. Inserire nella consegna **anche** i files .m e .mat forniti dal docente.
Nota Bene: ogni file prodotto (non quelli forniti) deve contenere **nome**, **cognome** e **matricola**.
Tempo di svolgimento: 90 minuti.

Esercizio 1 (9 punti)**.** I pesi w di quadratura di una formula di quadratura interpolatoria di esattezza polinomiale di grado n su $n+1$ punti equispaziati nell'intervallo $[a,b]$ sono determinati dal sistema lineare $Vw = c$, dove $V_{i,j} = x_{j-1}^{i-1}$, $c_i = (b^i - a^i)/i$, ovvero

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Si crei una function con l'intestazione `[x,w]=FormulaEquispaziata(a,b,n)` che, presi in ingresso gli estremi `a,b` e il grado `n`, restituisca in uscita il vettore riga `x` dei nodi di interpolazione e il vettore colonna `w` dei pesi.

La soluzione del sistema lineare $Aw = c$ **deve** essere implementata con il metodo di fattorizzazione LU di matlab (per la soluzione dei sistemi triangolari si usi il backslash).

Per il controllo della corretta implementazione è disponibile lo script `testMyFormulaEquispaziata`.

Esercizio 2 (13 punti)**.** Si crei una function con l'intestazione `[x,w]=FormulaEquispaziataComposta(a,b,N,n)` che, presi in ingresso gli estremi `a,b` dell'intervallo, il numero `N` di **sottointervalli**, e il grado `n` di precisione polinomiale, restituisca in uscita

- il vettore riga `x` contenente gli $Nn + 1$ nodi e
- il vettore colonna `w` contenente gli $Nn + 1$ pesi

della formula di quadratura composta con `N` sottointervalli in $[a,b]$ ottenuta componendo le N formule interpolatorie prodotte con `FormulaEquispaziata` su ciascuno degli N sottointervalli. L'algoritmo implementato dalla function si può riassumere nei seguenti passi:

(1) calcolo degli estremi $p_1, p_2, \dots, p_{N+1}$ dei sottointervalli
(2) ciclo `for` sui sottointervalli (es $[p_k, p_{k+1}]$) per il calcolo di nodi e pesi locali.
(3) all'interno dello stesso ciclo assemblaggio di nodi e pesi.

ATTENZIONE: nell'assemblaggio delle `x` **non vanno ripetuti i nodi** (l'ultimo nodo di un intervallo è il primo del seguente). Al contrario i **pesi dei nodi ripetuti vanno sommati**.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Creare uno script `esercizio3.m` che, per $s = 1, 2, \dots, 50$, approssimi $\int_0^1 x^{1/2}dx$ con

- $I(s)$ ottenuto con `FormulaEquispaziataComposta` con $N = 2$ e $n = s$
- $J(s)$ ottenuto con `FormulaEquispaziataComposta` con $N = s$ e $n = 2$

Si calcoli l'errore assoluto dei due metodi e si crei una figura con i grafici semilogaritmici dell'errore al variare di s.

Facoltativo. Si stampi a video un commento dei risultati eventualmente corredato da una figura esplicativa.