Calcolo della matrice inversa

Un modo semplice per calcolare l'inversa si basa su una proprietà del prodotto matrice-vettore che abbiamo usato spesso, cioè che z = Bc si può interpretare come combinazione lineare delle colonne di B tramite i coeff. di c, cioè:

$$z = Bc = c_1 \underbrace{C_1(B)}_{\text{colonna 1 di } B} + \cdots + c_n \underbrace{C_n(B)}_{\text{colonna } n \text{ di } B}$$

Applicando l'osservazione con:

(cioè con $c_i = 1$, $c_j = 0$ e $j \neq i$)

$$c = e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $c_i = 1$ e $c_j = 0$, $j \neq i$, otteniamo

$$Be^{(i)} = C_i(B)$$

Allora per $B = A^{-1}$

$$C_i(A^{-1}) = A^{-1}e^{(i)} \Leftrightarrow AC_i(A^{-1}) = e^{(i)}$$

cioè $C_i(A^{-1})$ è la soluzione di

$$Ax^{(i)} = e^{(i)}, \ 1 \leq i \leq n$$

Possiamo quindi calcolare l'inversa "per colonne" risolvendo M = n sistemi lineari, tutti con matrice A, in cui il termine noto varia tra gli n vettori coordinati della base canonica.

Se usassimo n volte il metodo standard avremmo un costo $2/3n^4$.

Invece calcolando una volta col meg la fattorizzazione LU e risolvendo le M = n coppie di sistemi triangolari come segue, si ha il calcolo dell'inversa a costo cubico:

$$\begin{cases} Ly^{(i)} = \underline{P}e^{(i)} \\ Ux^{(i)} = y^{(i)} \end{cases}$$

si ha un costo

$$c_n^{(2)} \sim \frac{2}{3}n^3 + 2n^2n = \frac{8}{3}n^3 \ flops$$