

ESAME CALCOLO NUMERICO PROVA DI LABORATORIO
LAUREA IN INFORMATICA
APPELLO STRAORDINARIO PER LAUREANDI 13/09/2021

Consegna Compito: saranno visibili solo i files consegnati in tempo tramite moodle. Inserire nella consegna **anche** i files .m e .mat forniti dal docente.

Nota Bene: ogni file prodotto (non quelli forniti) deve contenere **nome, cognome e matricola**.

Tempo di svolgimento: 90 minuti.

Richiamo. Sia f una funzione continua da $[a, b]$ in \mathbb{R} . Per ogni $n \geq 0$ esiste (ed è unico) il polinomio p di miglior approssimazione in norma 2 (di funzioni) di f con grado al più n , ovvero l'unico polinomio p di grado al più n per cui

$$\int_a^b |f(x) - p(x)|^2 dx = \min_{q \in \mathcal{P}_n} \int_a^b |f(x) - q(x)|^2 dx.$$

Come per i minimi quadrati standard, si può mostrare che il vettore c dei coefficienti di p (i.e., $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_{n+1}x^n$) risolve il sistema $Gc = b$ con

$$G_{i,j} := \int_a^b x^i \cdot x^j dx, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n+1, \quad b_i = \int_a^b f(x)x^i dx, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Data una formula di quadratura in $[a, b]$ avente nodi x_1, x_2, \dots, x_N e pesi w_1, w_2, \dots, w_N , possiamo approssimare G e b come

$$G \approx G^{(N)} := V^t \text{diag}(w) V, \quad b \approx b^{(N)} := V^t \text{diag}(w) (f(x_1), \dots, f(x_N))^t,$$

dove $V_{i,j} = x_i^{(j-1)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, è la matrice di Vandermonde della base canonica valutata nei nodi di quadratura.

Esercizio 1 (18 p.ti). Si crei una function `[cN,R0]=MyPolyfit(f,a,b,n,N)` che

- (1) calcoli N nodi e pesi di quadratura per l'intervallo $[a, b]$ tramite la formula dei trapezi composta (attenzione al numero di sottointervalli).
- (2) Calcoli la matrice di Vandermonde di grado n V e il termine noto bN definiti sopra e la matrice $S := \text{diag}(\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_N})V$.
- (3) Calcoli la fattorizzazione QR della matrice S e definisca $R0$ come la parte quadrata superiore (i.e., prime $n+1$ righe) del fattore R (si noti che $G^{(N)} = R_0^t R_0$).
- (4) Calcoli cN soluzione del sistema $R_0^t R_0 c^{(N)} = b^{(N)}$ **con gli algoritmi di sostituzione indietro e sostituzione avanti**.

Obbligatorio (2 p.ti): come si potrebbe migliorare la stabilità dell'algoritmo proposto? Rispondere con un commento all'interno della function.

Esercizio 2 (13 p.ti). Sia $f(x) := |x - 1/2|$, $[a, b] := [-1, 1]$, $N = 401$. Si crei uno script `Esercizio2.m` che, per $n = 2, 4, 6, \dots, 30$, all'interno di un ciclo `for`:

- (1) calcoli i coefficienti del polinomio p di miglior approssimazione di norma 2 usando la function `MyPolyfit`
- (2) valuti f e p su una griglia di 400 punti equispaziati in $[a, b]$. **ATTENZIONE:** non si usi a tal fine `polyval`.
- (3) crei una figura con il grafico di f e di p che rimanga in pausa per 1 secondo.