Sapendo che dati N punti $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \le i \le N$ e $m < N$, sse il vettore $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimizza $\phi(a) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j\right)^2$ allora risolve i sistema $V^t V a = V^t y$, si possono usare le proprietà di $V^t V$ per trovare il sistema relativo alla retta dei minimi quadrati. $V^t V$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Inoltre $(Vv, Vv) = 0 \Longleftrightarrow Vv = 0$ e $(Vv, Vv) = (V^t V v, v)$ quindi $v = 0$ se V ha rango max cioè se ha almeno $m+1$ punti distinti tra i nodi di campionamento. Si ricava quindi una matrice V t.c.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{m+1} & x_{m+1}^2 & \dots & x_{m+1}^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^m \end{pmatrix}$$

La sottomatrice $V \in \mathbb{R}^{(m+1)(m+1)}$ è matrice di Vandermonde per l'interpolazione di grado $\le m$ su $m+1$ nodi distinti, quindi è non singolare.

Questo evidenzia che, quindi, il rango della sottomatrice è $m+1$ e che le intere colonne $m+1$ di V sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{R}^N$. Quindi si possono calcolare gli elementi della matrice $V^t V$ e del vettore noto $V^t y$, con $m = 1$

$$V^t V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$V^t y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

quindi il sistema è: $\begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$