Computabilità e Algoritmi - 8 Febbraio 2019

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che per ogni k ≥ 2 è primitiva ricorsiva la funzione sum_k : $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definita da sum_k$(x_1,\ldots,x_k) = \Sigma_{i=1}^k x_i$.

Soluzione:

Definizione di $\mathcal{PR}$: La classe $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive è la più piccola classe di funzioni che:

- **Contiene le funzioni base:**
  - Funzione zero: $z(x) = 0$
  - Funzione successore: $s(x) = x + 1$
  - Funzioni proiezione: $U_i^k(x_1,\ldots,x_k) = x_i$
- **È chiusa rispetto a:**
  - Composizione (generalizzata)
  - Ricorsione primitiva

Dimostrazione che sum_k ∈ $\mathcal{PR}$ per k ≥ 2:

Procederemo per induzione su k.

Caso base k = 2: Definiamo sum_2: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ con $sum_2(x,y) = x + y$.

Per ricorsione primitiva:

```
sum₂(x,0) = x = U₁¹(x)
sum₂(x,y+1) = sum₂(x,y) + 1 = s(sum₂(x,y))
```

Dove:

- $f(x) = U_1^1(x) \in \mathcal{PR}$ (proiezione)
- $g(x,y,z) = s(z) \in \mathcal{PR}$ (successore)

Quindi $sum_2 \in \mathcal{PR}$ per ricorsione primitiva.

Passo induttivo: Supponiamo sum_{k-1} ∈ $\mathcal{PR}$. Dimostriamo che sum_k ∈ $\mathcal{PR}$.

Definiamo sum_k: $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ per composizione:

```
sum_k(x₁,...,xₖ) = sum₂(sum_{k-1}(x₁,...,x_{k-1}), xₖ)
```

Equivalentemente:

```
sum_k(x₁,...,xₖ) = sum₂(h₁(x₁,...,xₖ), h₂(x₁,...,xₖ))
```

dove:

- $h_1(x_1,...,x_k)$ = sum_{k-1}(x_1,...,x_{k-1}) ∈ $\mathcal{PR}$ (per ipotesi induttiva e composizione con proiezioni)
- $h_2(x_1,...,x_k) = x_k = U_k^k(x_1,...,x_k) \in \mathcal{PR}$ (proiezione)

Poiché $sum_2 \in \mathcal{PR}$ e h_1, $h_2 \in \mathcal{PR}$, per chiusura rispetto alla composizione abbiamo sum_k ∈ $\mathcal{PR}$.

Conclusione: ∀k ≥ 2, sum_k ∈ $\mathcal{PR}$. ∎

Esercizio 2

Problema: Data una funzione f : ℕ → ℕ si definisca Z(f) = {g : ℕ → ℕ | ∀x ∈ ℕ. g(x) = f(x) ∨ g(x) = 0}. Si dimostri che l'insieme Z(id) è non numerabile. È vero per ogni funzione f che Z(f) è non numerabile?

Soluzione:

Parte 1: Z(id) è non numerabile

Sia id: ℕ → ℕ la funzione identità, id(x) = x.
Allora Z(id) = {g : ℕ → ℕ | ∀x ∈ ℕ. g(x) = x ∨ g(x) = 0}.

Dimostrazione per diagonalizzazione: Consideriamo il sottoinsieme $Z_0(id) \subseteq Z(id)$ delle funzioni totali g: ℕ → ℕ tali che g(x) ∈ {0,x} per ogni x.

Ogni funzione $g \in Z_0(id)$ è completamente determinata dall'insieme:
A_g = {x ∈ ℕ : g(x) = x}

Viceversa, per ogni A ⊆ ℕ, possiamo definire g_A ∈ $Z_0(id)$:

```
g_A(x) = {
    x   se x ∈ A
    0   se x ∉ A
}
```

Questo stabilisce una biiezione tra $Z_0(id)$ e 2^ℕ (l'insieme dei sottoinsiemi di ℕ).

Poiché |2^ℕ| > |ℕ| (per il teorema di Cantor), abbiamo $|Z_0(id)| > |\mathbb{N}|$.
Quindi $|Z(id)| \geq |Z_0(id)| > |\mathbb{N}|$, cioè Z(id) è non numerabile.

Parte 2: Non vale per ogni funzione f

Controesempio: Sia f(x) = 0 per ogni x ∈ ℕ. Allora Z(f) = {g : ℕ → ℕ | ∀x ∈ ℕ. g(x) = 0 ∨ g(x) = 0} = {g : ℕ → ℕ | ∀x ∈ ℕ. g(x) = 0}.

Quindi $Z(f) = \{\tilde{0}\}$, dove $\tilde{0}$ è la funzione costante zero.

Poiché $|Z(f)| = 1$, $Z(f)$ è numerabile (anzi, finito).

Conclusione: $Z(id)$ è non numerabile, ma non vale per ogni funzione f. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid W_x \subseteq \{x\}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che il dominio di φ_x è contenuto nel singleton $\{x\}$.

Analisi della struttura:

A è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \subseteq \{\text{indice di } f\}\}$.

Tuttavia, la condizione di saturazione richiede che gli indici della stessa funzione abbiano la stessa proprietà, il che qui non è automaticamente garantito.

Ricorsività:

A non è ricorsivo. Dimostriamo $K \leq_m A$.

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    z + 1   se y ∈ K ∧ z = y
    ↑       altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(y)}(z) = g(y,z)$.

Verifica della riduzione:

- Se $y \in K$, allora $W_{s(y)} = \{y\}$, quindi $s(y) \in A$
- Se $y \notin K$, allora $W_{s(y)} = \emptyset \subseteq \{s(y)\}$, quindi $s(y) \in A$

Questa riduzione non funziona perché entrambi i casi portano ad A.

Approccio corretto: Definiamo $h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(y,z) = {
    z + 1   se y ∈ K ∧ (z = y ∨ z = 0)
    ↑       altrimenti
}
```

- Se $y \in K$, allora $W_{t(y)} = \{y,0\}$, quindi se $y \neq 0$, $t(y) \notin A$
- Se $y \notin K$, allora $W_{t(y)} = \emptyset \subseteq \{t(y)\}$, quindi $t(y) \in A$

Quindi $\bar{K} \leq_m A$, e poiché $\bar{K}$ non è ricorsivo, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva:

A è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_A(x) = 1(μt. ∀y ≤ t. [H(x,y,t) → y = x])
```

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

Ā non è r.e. Se lo fosse, insieme ad A essendo r.e., avremmo che A sarebbe ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione: A non è ricorsivo, A è r.e., Ā non è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > 1\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene gli indici x tali che il dominio di φ_x ha cardinalità strettamente maggiore di 1.

Ricorsività:

B non è ricorsivo. Dimostriamo $K \leq_m B$.

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    z + 1   se y ∈ K ∧ z ∈ {0,1}
    ↑       altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(y)}(z) = g(y,z)$.

Verifica della riduzione:

- Se $y \in K$, allora $W_{s(y)} = \{0,1\}$, quindi $|W_{s(y)}| = 2 > 1$, dunque $s(y) \in B$
- Se $y \notin K$, allora $W_{s(y)} = \emptyset$, quindi $|W_{s(y)}| = 0 \leq 1$, dunque $s(y) \notin B$

Pertanto $K \leq_m B$, e poiché K non è ricorsivo, B non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di B:

B è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_B(x) = 1(μt. ∃u,v ≤ t. [u ≠ v ∧ H(x,u,t) ∧ H(x,v,t)])
```

Questa funzione cerca un tempo t entro il quale esistono almeno due input distinti u,v tali che $\varphi_x(u)$ e $\varphi_x(v)$ convergono.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| \leq 1\}$

$\bar{B}$ non è r.e. Se lo fosse, insieme a B essendo r.e., avremmo che B sarebbe ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione: B non è ricorsivo, B è r.e., $\bar{B}$ non è r.e. ∎

Esercizio 5

Problema: Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $A = \{x \mid W_x \subseteq \{x\}\}$ non è saturato.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Dimostrazione che A non è saturato:

Per dimostrare che A non è saturato, dobbiamo trovare indici e, e' tali che:

- $\varphi_e = \varphi_{e'}$
- $e \in A$ ma $e' \notin A$ (oppure viceversa)

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(x,y) = {
    y + 1   se y = x
    ↑       altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile: $g(x,y) = (y + 1) \cdot \mu z.|x - y|$

Per il teorema smn, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Quindi $W_{s(x)} = \{x\}$ e $|W_{s(x)}| = 1$, il che significa $s(x) \in A$ per ogni x.

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione s, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:
$\varphi_e = \varphi_{s(e)}$

Da questa uguaglianza:

- $W_e = W_{s(e)} = \{e\}$
- $e \in A$ (poiché $W_e = \{e\} \subseteq \{e\}$)

Ora, sia $e' = s(e)$. Abbiamo $\varphi_{e'} = \varphi_{s(e)} = \varphi_e$, ma:

- $W_{e'} = W_{s(e)} = \{e\}$
- Se $e' \neq e$, allora $W_{e'} = \{e\} \not\subseteq \{e'\}$, quindi $e' \notin A$

Quindi abbiamo $e \in A$, $e' \notin A$, ma $\varphi_e = \varphi_{e'}$, il che prova che A non è saturato.

Conclusione: L'insieme $A = \{x \mid W_x \subseteq \{x\}\}$ non è saturato. ∎