Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
22 Marzo 2013

Esercizio 1

Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $half : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $half(x) = x/2$.

Soluzione: L'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive è il minimo insieme di funzioni che contiene le funzioni di base:

1. $\mathbf{0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{0}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$;
2. $\mathbf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{s}(x) = x + 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$;
3. $\mathbf{U}_j^K : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{U}_j^K(x_1, \ldots, x_k) = x_j$ per ogni $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$.

e chiuso rispetto a composizione generalizzata e ricorsione primitiva, definite come segue. Date le funzioni $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ la loro composizione generalizzata è la funzione $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definita da:

$$h(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})).$$

Date le funzioni $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ la funzione definita per ricorsione primitiva è $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y + 1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Occorre dimostrare che la funzione $half$ può essere ottenuta dalle funzioni di base (1), (2) e (3), utilizzando ricorsione primitiva e composizione generalizzata. Si può procedere come segue.

Si definisce in primo luogo la funzione $\overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\overline{sg}(x) = 1$ se $x = 0$ e $\overline{sg}(x) = 0$ altrimenti:

$$\begin{cases} \overline{sg}(0) & = & 1 \\ \overline{sg}(x+1) & = & 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione $rm_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che restituisce il resto della divisione di x per 2:

$$\begin{cases} rm_2(0) & = & 0 \\ rm_2(x+1) & = & \overline{sg}(rm2(x)) \end{cases}$$

Infine la funzione $half : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ può essere definita come:

$$\begin{cases} half(0) & = & 0 \\ half(x+1) & = & half(x) + rm_2(x) \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 2

Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *totale crescente* quando è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Dimostrare che l'insieme delle funzioni totali crescenti non è numerabile.

Soluzione: Data una qualsiasi enumerazione delle funzioni totali crescenti $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si può definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = 1 + \Sigma_{n=0}^{x} f_n(n),$$

che è totale crescente e diversa da tutte le f_n. Infatti,

- f è chiaramente totale per definizione.
- f è crescente, dato che $f(x+1) = f(x) + \varphi_{x+1}(x+1) > f(x)$. L'ultima disuguaglianza segue dal fatto che, essendo φ_{x+1} crescente, $\varphi_{x+1}(x+1) > \varphi_{x+1}(x) \geq 0$.
- f è diversa da tutte le f_x dato che per ogni $x \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = 1 + \Sigma_{n=0}^{x} \varphi_n(n) \geq 1 + \varphi_x(x) > \varphi_x(x).$$

Ne consegue che nessuna enumerazione può contenere tutte le funzioni totali crescenti. $\square$

Esercizio 3

Dato un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $F(X) = \{0\} \cup \{y, y+1 \mid y \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = F(E_x)\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) = F(cod(f))\}\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova A e $\overline{A}$ sono entrambi non r.e.:

- A non r.e.
  Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1, 2 \\ \uparrow \quad = & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Si ha che $f \notin \mathcal{A}$, in quanto $dom(f) = \{0, 1, 2\}$ e $cod(f) = \{0\}$. Dunque $F(cod(f)) = \{0, 1\} \neq dom(f)$. Inoltre se consideriamo

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1 \\ \uparrow & = \text{ altrimenti} \end{cases}$$

chiaramente $\theta \subseteq f$. Inoltre $dom(\theta) = \{0, 1\}$ e $cod(\theta) = \{0\}$. Dunque $F(cod(\theta)) = \{0, 1\} = dom(\theta)$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che A non è r.e.

- $\overline{A}$ non r.e.
  Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$, dato che $dom(\emptyset) = cod(\emptyset) = \emptyset$ e pertanto $F(cod(\emptyset)) = \{0\} \neq dom(\emptyset)$. Quindi, riassumendo $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma ammette una parte finita, ovvero la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che $\bar{A}$ non è r.e.

$\square$

Esercizio 4
Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *crescente* quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Indicato con $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ crescente}\}$, dimostrare che $\overline{K} \leq_m B$.

Soluzione: Si può procedere in modo simile alla prova del teorema di Rice-Shapiro e definire

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo, se $x \in \bar{K}$ allora g, vista come funzione di y sarà l'identità, che è crescente. Altrimenti esisterà un numero di passi per cui $H(x, x, y)$ e quindi da quel punto in poi $g(x, y)$ è costantemente uguale a 0 e quindi non crescente

Più precisamente, si osserva che la funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x, y) = y \cdot \chi_{\neg H}(x, x, y)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di $\bar{K}$ a B. Infatti

- Se $x \in \bar{K}$ allora per ogni $y \in \mathbb{N}$ è falso $H(x, x, y)$. Pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $\varphi_{s(x)}$ è crescente e pertanto $s(x) \in B$.

- Se $x \notin \bar{K}$ allora esiste un $y \in \mathbb{N}$ tale che vale $H(x, x, y)$, e quindi vale anche $H(x, x, y+1)$. Pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = 0 = \varphi_{s(x)}(y + 1)$. Quindi $\varphi_{s(x)}$ non è crescente e pertanto $s(x) \notin B$.

Alternativamente, in modo più semplice, si può osservare che la funzione sempre indefinita è crescente e la costante 0 non lo è. Pertanto basta definire $g(x, y) = sc_K(x)$ (funzione semi-caratteristica dell'insieme K, che è nota essere calcolabile dato che K è r.e.) e si procede poi come sopra. $\square$

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che se C è un insieme tale che $C \leq_m \overline{C}$, allora C non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, sia $C \leq_m \bar{C}$ e sia f la funzione di riduzione, ovvero $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è calcolabile e totale, e soddisfa:

$$x \in C \quad \text{iff} f(x) \notin C \tag{1}$$

Siccome f è calcolabile totale, per il Secondo Teorema di Ricorsione, esiste e tale che

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}. \tag{2}$$

Ora se $e \in C$, essendo C saturato, da (2) segue che $f(e) \in C$ e questo contraddice (1). Analogamente se $e \notin C$, si arriva ad una contraddizione. Quindi se ne conclude che la funzione di riduzione non può esistere e quindi C non è saturato. $\square$

9.8 Appello 2014-07-21

9.8.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice

Soluzione

Il teorema di Rice asserisce che le proprietà non banali di un programma non sono ricorsive.

Ovvero dato $A \subseteq \mathbb{N}$ saturo e tale che $A \neq \mathbb{N}$ e $\neq \emptyset$, A è ricorsivo.

Questo si dimostra per riduzione $K \leq_m A$.

Sia e_0 un programma che calcola la funzione sempre indefinita ($\phi_{e_0} = \emptyset$). Questo programma può essere in A o in $\overline{A}$. Assumiamo che sia in $\overline{A}$.

Sia e_1 un programma in A, ed esiste perché $A \neq \emptyset$.

Serve quindi una funzione tale che $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A$.

Possiamo definire

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & x \in K \\ \phi_{e_0}(y) = \uparrow \forall y & x \notin K \end{cases} = \phi_{e_1} \cdot \nVdash\big(SC_K(x)\big)$$

g è calcolabile e totale, quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$.

f è funzione di riduzione perché

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \phi_{e_1}(y)\ \forall y$ e quindi dal momento che A è saturo e che $e_1 \in A$, anche $f(x) \in A$.
- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow = \phi_{e_0}(y)\ \forall y$ e quindi, dato che $e_0 \notin A$, anche $f(x) \notin A$, perché se $f(x) \in A$, anche e_0 dovrebbe essere in A dato che calcolano la stessa funzione.

Segue quindi che A non è ricorsivo, se $e_0 \notin A$. Assumendo invece che $e_0 \in A$, si può osservare che il complementare di un insieme saturo è anch'esso saturo e che se $B = \overline{A}$, $\overline{B} = A$ e $e_0 \in \overline{B}$ e quindi vale la dimostrazione precedente.

9.8.2 Esercizio 2

Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita per ogni $x \in \mathbb{N}$, da $g(x) = f(x) \dot{-} x$ sia calcolabile? Fornire un esempio di f oppure dimostrare che tale funzione non esiste.

Soluzione

Si esiste:

$$f(x) = \mathcal{X}_K(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$$

(funzione caratteristica dell'insieme K, è noto che non è calcolabile).

Con questa funzione si ha che:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x = 0 \text{ e } f(x) = 1 \\ 0 & x = 0 \text{ e } f(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x = 0 \text{ e } x \in K \\ 0 & x = 0 \text{ e } x \notin K \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x = 0 \text{ e } \phi_x(x) \downarrow \\ 0 & x = 0 \text{ e } \phi_x(x) \uparrow \end{cases}$$

g risulta quindi essere calcolabile in quanto viene definita per casi e utilizzando solamente funzioni calcolabili. $\phi_x(x)$ può essere calcolato utilizzando la funzione universale.

verificare il caso in cui f(x) vale 0

9.8.3 Esercizio 3

Una funzione parziale è iniettiva quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $f(x) = f(y)$, allora $x = y$. Studiare la ricorsività di $A = \{x | \phi_x \text{è iniettiva}\}$.

Soluzione

L'insieme è saturo perché descrive una proprietà non banale delle funzioni calcolate dai programmi che appartengono all'insieme

Probabilmente A non è RE, perché per provare se una funzione è iniettiva è necessario verificare tutti i valori del dominio.

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è iniettiva e quindi non appartiene ad $\mathcal{A}$, ma ammette una parte finita $\vartheta \in \mathcal{A}$:

$$\vartheta = \begin{cases} x & x \leq 3 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi per il teorema di Rice Shapiro, A non è RE.

Per quanto riguarda $\overline{A}$ non si può fare lo stesso ragionamento perché una funzione iniettiva ha tutte le parti finite iniettive, e sembra valere anche il viceversa.

Per vedere se una funzione non è iniettiva, basta trovare x, y tali che $x \neq y$ e $f(x) = f(y)$ e quindi stabilire l'appartenenza ad $\overline{A}$ sembra essere semi-decidibile.

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.\left(\underbrace{S\Big(x, (w)_1, (w)_2, (w)_3\Big)}_{a=(w)_1 \in W_x} \wedge \underbrace{S\Big(x, (w)_4, (w)_5, (w)_6\Big)}_{b=(w_4) \in W_x} \wedge \Big(\underbrace{(w)_1 \neq (w)_4}_{a \neq b}\Big) \wedge \Big(\underbrace{(w)_2 = (w)_5}_{\phi_x(a)=\phi_x(b)}\Big)\right)\right)$$

$SC_{\overline{A}}$ è calcolabile per composizione di funzioni calcolabili (quasi, l'uguaglianza e la disuguaglianza sono predicati, ma la loro funzione caratteristica è calcolabile) e quindi $\overline{A}$ è RE.

9.8.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività di $B = \{x | x \in W_x \setminus \{0\}\}$

Soluzione

B sembra essere RE, perché molto simile a K.

$$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \wedge x \neq 0 \\ \uparrow & x = 0 \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \mathbb{1}\big(\mu w.\overline{sg}(x)\big) \cdot SC_K(x)$$

SC_B è calcolabile per composizione di funzioni calcolabili e quindi B è RE.

$\overline{B} = \{x | \phi_x(x) \uparrow\} \cup \{0\} = \overline{K} \cup \{0\}$ e quindi $\overline{K} \cup \{0\} \subseteq \overline{B}$. Essendo $\overline{K}$ non RE si può effettuare la riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{B}$ utilizzando come funzione la funzione identità e quindi anche $\overline{B}$ non è RE.

9.8.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione e dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N}\}$

Soluzione

Il teorema asserisce che data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

Definisco

$$g(x, y) = \begin{cases} x \cdot y & \text{se } x \text{ è multiplo di } y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = xy \cdot \mathbb{1}\big(\mu z.|zx - y|\big)$$

ed è calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili, quindi per SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y) \forall y$ e tale che $W_{f(x)} = E_{f(x)} = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_x = \phi_{f(x)}$ e quindi tale che $W_x = E_x = W_{f(x)} = E_{f(x)} = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$

9.7 Appello 2014-08-25

9.7.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

Soluzione

Ogni proprietà non banale relativa al comportamento dei programmi non è decidibile.

Ovvero sia $A \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dei programmi che hanno una qualche proprietà e quindi A è un insieme saturo, se $A \neq \mathbb{N}$ e $\neq \emptyset$, allora A non è ricorsivo.

Questo può essere dimostrato per riduzione $K \leq_m A$.

Sia e_0 un programma che calcola la funzione sempre indefinita ($\phi_{e_0} = \emptyset$). Questo programma può essere in A o in $\overline{A}$. Assumiamo che sia in $\overline{A}$.

Possiamo quindi scegliere un qualsiasi programma $e_1 \in A$ e almeno uno deve esserci perché $A \neq \emptyset$.

Questi due programmi possono essere utilizzati per definire la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \phi_{e_0}(y) & \text{se } x \notin K \end{cases} = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = \phi_{e_1}(y) \cdot \mathbb{1}\big(\phi_x(x)\big)$$

la quale è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g(x,y) = \phi_{f(x)}(y)$ e che può essere usata come funzione di riduzione, perché:

- Se $x \in K$: $\phi_{f(x)} = \phi_{e_1}$ e quindi dal momento che A è saturo e che $e_1 \in A$, allora anche $f(x) \in A$.

- Se $x \notin K$: $\phi_{f(x)} = \phi_{e_0}$ e quindi dal momento che $e_0 \notin A$, anche $f(x) \notin A$, perché se $f(x)$ fosse in A, anche e_0 dovrebbe esserci, perché A è saturo e i due programmi calcolano la stessa funzione.

Se invece $e_0 \in A$, basta osservare che il complementare di un insieme saturo è saturo e, indicando con $B = \overline{A}$, $\overline{B} = A$, si ha che $e_0 \in \overline{B}$ e quindi vale la dimostrazione precedente.

9.7.2 Esercizio 2

Può esistere una funzione **non calcolabile** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che **per ogni** funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la funzione h definita come $h(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare la risposta, fornendo un'esempio di f oppure dimostrando che non può esistere.

Soluzione

Supponiamo che f esista e che quindi $h(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile. Dal momento che h è calcolabile per tutte le g non calcolabili, si ha anche che $h(x) = f(x) + f(x) = 2 \cdot f(x)$ deve essere calcolabile.

Si ha quindi che f può essere definita come

$$f(x) = qt\big(h(x), 2\big)$$

f risulta quindi essere calcolabile per composizione di funzioni calcolabili il che va contro l'ipotesi della non calcolabilità di f e pertanto f non può esistere.

9.7.3 Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \phi_x(y+x) \downarrow \text{ per qualche } y \geq 0\}$

Soluzione

A sembra essere RE, perché per determinare l'appartenenza è necessario determinare se il programma x termina ricevendo in input se stesso più una qualche costante.

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A\, \exists y \geq 0 \mid \phi_x(x+y) \downarrow \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}\Big(S\big(x, x+(w)_1, (w)_2, (w)_3\big)\Big)\Big)$$

La funzione semi-caratteristica è calcolabile per composizione di funzioni calcolabili e quindi A è RE.

Per provare che A non è ricorsivo, si può effettuare la riduzione $K \leq_m A$.

Ovvero bisogna trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che dato $x \in K$, $f(x) \in A$ e se $x \notin K$, $f(x) \notin A$.

Si può osservare che se $x \in K$, $\phi_x(x) \downarrow$ e quindi anche $\phi_x(x+0) \downarrow$ e pertanto x è anche in A.

Si può quindi definire la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \phi_x(x) & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \phi_x(x) = \Phi_U(x,x)$$

la quale è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile, totale e tale che $g(x,y) = \phi_{f(x)}(y)$.

f è funzione di riduzione perché:

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(z) = g(x,z) = \phi_x(x) =\downarrow\ \forall z$ e quindi anche $\phi_{f(x)}(f(x)+0) \downarrow$ e quindi $f(x) \in A$ per $y = 0$.

- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(z) = g(x,z) =\uparrow\ \forall z$ e quindi non esiste $y \geq 0$ tale che $\phi_{f(x)}(f(x)+y) \downarrow$ e quindi $f(x) \notin A$.

In alternativa potevo usare

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = SC_K(x)$$

Essendo A non ricorsivo e RE, $\overline{A}$ non è RE.

9.7.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \mid Pr \subseteq W_x\}$, dove $Pr \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi.

Soluzione

Si può osservare che l'insieme B è saturo perché riguarda una proprietà della funzione calcolata dai programmi:

$$B = \{x \mid \phi_x \in \beta\}$$
$$\beta = \{f \mid Pr \subseteq dom(f)\}$$

Inoltre si può osservare che B probabilmente non è RE perché per determinare l'appartenenza bisogna verificare infiniti valori del dominio.

La funzione id appartiene a β in quanto è definita su tutto $\mathbb{N}$ e quindi anche su tutti i numeri primi, mentre tutte le sue parte finite non appartengono a β perché hanno un dominio finito, il quale non può contenere tutti gli infiniti numeri primi.

Si ha quindi una funzione che appartiene all'insieme e tutte le sue parti finite che non ci appartengono, quindi per Rice-Shapiro B non è RE.

Per quanto riguarda $\overline{B}$, si ha che contiene tutti i programmi che calcolano funzioni definite su qualche numero primo, anche nessuno (ma non tutti) ed è sempre un insieme saturo.

Analogamente a prima, la funzione id non appartiene a $\overline{\beta}$ e la funzione

$$\vartheta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 5 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una parte finita di id e appartiene a $\overline{\beta}$. Si ha quindi che per il teorema di Rice-Shapiro anche $\overline{B}$ non è RE.

9.7.5 Esercizio 5

Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_n = \phi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_m \neq \phi_{m+1}$.

Soluzione

Il programma composto dalla sola istruzione `Z(1)` viene codificato con $2^{4\cdot(1-1)+1} - 2 = 0$ mentre il programma `Z(1)Z(1)` viene codificato con $2^0 \cdot 3^1 - 2 = 1$, entrambi i programmi calcolano la funzione $f(x) = 0$ e quindi il primo caso è dimostrato.

Il programma composto dall'istruzione `S(1)` viene codificato con $2^{(4(1-1)+1)+1} - 2 = 2$ e calcola la funzione $f(x) = x + 1$ che è diversa dalla funzione calcolata dal programma di indice 1.

Ricapitolando:

- $\phi_0(x) = 0$
- $\phi_1(x) = 1$
- $\phi_2(x) = x + 1$

Segue quindi che esistono $n = 0$ e $m = 1$ che soddisfano quanto richiesto.

Soluzione decisamente migliore

La funzione *succ* è una funzione calcolabile e totale, quindi per il secondo teorema di ricorsione $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{succ(e)} = \phi_{e+1}$.

Tuttavia deve esistere almeno un e tale che $\phi_e \neq \phi_{e+1}$ perché se così non fosse, tutti i programmi calcolerebbero la stessa funzione e quindi solamente una funzione sarebbe calcolabile, ma è noto che ci sono più di due funzioni calcolabili.

9.10 Appello 2014-03-21

9.10.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice

Soluzione

Il teorema di Rice asserisce che qualsiasi proprietà non banale delle funzioni calcolate dai programmi non è decidibile. In altre parole, sia $A \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme che contiene tutti i programmi la cui funzione calcolata gode di una determinata proprietà (ovvero A è un insieme saturo), se la proprietà non è banale ($A \neq \emptyset, \neq \mathbb{N}$) allora A non è ricorsivo.

La non ricorsività si dimostra per riduzione $K \leq_m A$.

Sia e_0 un programma tale che $\phi_{e_0} = \emptyset$. Questo programma può trovarsi in A oppure in $\overline{A}$. Assumiamo che $e_0 \in \overline{A}$.

Essendo A non vuoto, ci sarà almeno un programma $e_1 \in A$ che calcola una qualche funzione.

Si può quindi definire la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & x \in K \\ \phi_{e_0}(y) = \uparrow & x \notin K \end{cases} = SC_K(x)$$

Tale funzione è calcolabile, perché la funzione semi-caratteristica di K è noto che è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y)$.

f è funzione di riduzione perché

- $x \in K$, $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \phi_{e_1}(y) \forall y$ e dal momento che A è saturo e che $\phi_{f(x)} = \phi_{e_1}$, $f(x) \in A$.
- $x \notin K$, $\phi_{f(x)} = \emptyset(y) = \phi_{e_0}(y) \forall y$ e dal momento che anche $\overline{A}$ è saturo e che $\phi_{f(x)} = \phi_{e_0}$, $f(x) \in \overline{A}$ e quindi $f(x) \notin A$.

Dal momento che K si riduce ad A, A è non ricorsivo.

Se invece $e_0 \in A$ si può effettuare lo stesso ragionamento, indicando con $\overline{B} = A$ e $B = \overline{A}$. $e_0 \in \overline{B}$ e quindi la dimostrazione è la stessa.

9.10.2 Esercizio 2

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è RE allora $f(A) = \{y \in \mathbb{N} | \exists x \in A. y = f(x)\}$ è RE. Vale anche il contrario?

Soluzione

Se A è RE, la sua funzione semi-caratteristica è calcolabile e quindi esiste un programma e_0 che la calcola e che può essere utilizzato per calcolare la funzione semi-caratteristica di $f(A)$:

$$SC_{f(A)}(x) = \mathbb{1}\left(\mu w. \overline{sg}\left(\underbrace{H\left(e_0, (w)_1, (w)_2\right)}_{(w)_1 \in A} \wedge \underbrace{S\left(e_1, (w)_1, x, (w)_3\right)}_{f\left((w)_1\right) = x}\right)\right)$$

dove e_1 è un programma che calcola f. Devo utilizzare la minimalizzazione illimitata perché f può essere indefinita su qualche punto. Il segno negato serve per azzerare l'espressione quando entrambe le condizioni sono soddisfatte.

Se $f(A)$ è RE la sua funzione semi-caratteristica è calcolabile e può essere utilizzata per definire SC_A:

$$SC_A(x) = SC_{f(A)}(f(x))$$

Perché questo funzioni è necessario che f sia iniettiva e totale, perché sennò possono verificarsi dei casi in cui o $x \in A, x \notin dom(f)$, oppure $fy \in f(A)$ perché $\exists z \in A. f(z) = y, z \neq x$.

Quindi, se f è iniettiva e totale, allora anche A è RE. Altrimenti non è detto che A sia RE.

9.10.3 Esercizio 3

Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ un insieme finito, $X \neq \emptyset$ e si definisca $A_X = \{x \in \mathbb{N} : W_x = E_x \cup X\}$. Studiare la ricorsività di A_X.

Soluzione

L'insieme è saturo perché può essere visto come

$$\mathcal{A}_X = \{f \in \mathcal{C} | dom(f) = cod(f) \cup X\}$$

Inoltre, $id \in \mathcal{A}_X$ e $\emptyset \notin \mathcal{A}_X$, ovvero A_X non è banale e quindi per Rice A_X non è ricorsivo.

L'insieme A_X sembra anche essere non-RE, perché per valutare l'appartenenza è necessario esaminare tutti gli elementi del dominio e del codominio.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in X \\ x_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $x_0 \in X$. Questa funzione non appartiene a $\mathcal{A}_X$ perché $dom(f) = \mathbb{N} \neq cod(f) \cup X = X$, mentre la sua parte finita

$$\vartheta(x) = \begin{cases} x & x \in X \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene ad A_X perché $dom(\vartheta) = cod(\vartheta) = X$. Quindi per Rice-Shapiro A_X è non RE.

Per quanto riguarda il complementare, il ragionamento è simile. $id \notin \overline{\mathcal{A}_X}$ ($dom(id) = cod(id) = \mathbb{N}$), $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}_X}$ perché $dom(\emptyset) = \emptyset \neq cod(\emptyset) \cup X$, $\emptyset$ è parte finita di id e quindi per Rice-Shapiro $\overline{\mathcal{A}_X}$ è non RE.

9.10.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.k \cdot x \in W_x\}$.

Soluzione

B sembra essere RE:

$$SC_B(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.S\Big(x, (w)_1 \cdot x, (w)_2, (w)_3\Big)\right)$$

La funzione semi-caratteristica è calcolabile e quindi B è RE.

Probabilmente B non è ricorsivo, $K \leq_m B$.

Se $x \in K$, $f(x) \in B$ e questo è banale dato che B contiene anche le funzioni che sono totali. Se $x \notin K$, $f(x)$ non deve essere in B e quindi non deve esserci un multiplo dell'indice del programma nel dominio della funzione, quindi gli indici dei programmi che calcolano la funzione sempre indefinita non sono in B.

Posso quindi definire

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = SC_K(x)$$

g è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste f calcolabile, totale, tale che $\phi_{f(x)} = g(x,y)$ e che può essere utilizzata come funzione di riduzione perché

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = 1 \forall y$, ovvero $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi di sicuro $\exists k \in \mathbb{N}.k \cdot f(x) \in W_{f(x)}$
- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \forall y$ ovvero $W_{f(x)} = \emptyset$ e quindi di sicuro $\nexists k \in \mathbb{N}.k \cdot f(x) \in W_{f(x)}$.

Quindi B non è ricorsivo ed è RE. $\overline{B}$ è per forza non RE.

9.10.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Dimostrare che $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}. k \cdot x \in W_x\}$ non è saturo.

Soluzione

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, allora $\exists e. \phi_e = \phi_{f(e)}$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \nVdash\Big(\mu k. |x - y|\Big)$$

Essendo g calcolabile, posso applicare SMN per trovare $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$ e per il secondo teorema di ricorsione si ha che:

$$\exists e \text{ tale che} \phi_e(y) = \phi_{f(e)}(y) = g(e, y) = \begin{cases} 1 & y = e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi tale che $W_e = W_{f(e)} = \{e\}$ e quindi $e \in B$ per $k = 1$.

Dal momento che ϕ_e è calcolabile, ci sono infiniti indici che la calcolano e di sicuro ci sono degli indici $e' > e$. Ovvero tali che $W_{e'} = W_e = e$.

Essendo $e' > e$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \cdot e' \notin W_{e'} = W_e$ e quindi e' non è in B, ovvero B non è saturo.

C'è un caso particolare se $e = 0$, perché in quel caso tutti gli e' sono multipli per $k = 0$.

Per gestire ciò si può forzare il fatto che il punto fisso sia $\neq 0$, ovvero si sceglie un e_0 tale che $\phi_{e_0} = \phi_0$ e si riapplica il secondo teorema di ricorsione utilizzando come funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) = e & f(x) \neq 0 \\ e_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

9.11 Appello 2014-04-03

9.11.1 Esercizio 1

Dimostrare il teorema di struttura dei predicati semidecidibili.

Soluzione

Se $Q(x, y)$ è decidibile, allora la sua funzione caratteristica $\mathcal{X}_Q$ è calcolabile e può essere utilizzata per definire quella semi-caratteristica di P.

$$SC_P(x) = \begin{cases} 1 & \exists y.Q(x, y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \nVdash\left(\mu w.\overline{sg}\Big(\mathcal{X}_Q(x, w)\Big)\right)$$

Se invece P è semi-decidibile, allora esiste un programma e che calcola la sua funzione semi-caratteristica. Inoltre, se P è vero, esiste un numero di passi che fanno terminare il programma e:

$$P(x) \equiv \mu y.H(e, x, y)$$

Indicando con $Q(x, y)$ il predicato $H(e, x, y)$ si ottiene il predicato decidibile desiderato.

9.11.2 Esercizio 2

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} | f(x) \in A\}$ è RE. L'insieme $f^{-1}(A)$ è anche ricorsivo?

Soluzione

Sia e un programma che calcola f. Questo programma può essere utilizzato per definire la funzione semi-caratteristica di $f^{-1}(A)$:

$$SC_{f^{-1}(A)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in f^{-1}(A) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & f(x) \in A \\ \uparrow & f(x) \notin A \end{cases} = \nVdash\left(\mu w.\overline{sg}\Big(S\big(e, x, (w)_1, (w)_2\big) \wedge \mathcal{X}_A\big((w)_1\big)\Big)\right)$$

Questa funzione è calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili, e quindi $f^{-1}(A)$ è RE.

Dal momento che non è garantito che f è totale, l'insieme $f^{-1}(A)$ non è ricorsivo, perché può esistere un x per il quale $f(x)$ non è definita e quindi non può essere determinato se $f(x)$ è in A o meno.

9.11.3 Esercizio 3

$$A = \{x : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$$

Soluzione

L'insieme è saturo, perché contiene tutti i programmi le cui funzioni calcolate hanno $dom(f) \cap cod(f) \neq \emptyset$.

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \cap cod(f) \neq \emptyset\}$$

Quindi per il teorema di Rice A non è ricorsivo.

A sembra essere ricorsivo, perché una volta trovato un punto in comune tra il dominio e il codominio, il test di appartenenza può terminare.

$$SC_A(x) = ⊮\Big(\mu w.\overline{sg}\Big(S\big(x, (w)_1, (w)_1, (w)_2\big)\Big)\Big)$$

Essendo la funzione semi-caratteristica calcolabile, A è RE e non ricorsivo per quanto detto prima. $\overline{A}$ deve quindi essere non RE.

Dimostrazione che $\overline{A}$ è non RE $\overline{\mathcal{A}}$ probabilmente è non RE, perché per determinare l'appartenenza è necessario valutare tutto il dominio e il codominio per determinare se l'intersezione è vuota.

La funzione $f(x) = 1$ è in $\overline{A}$ perché $dom(f) \cap cod(f) = \{1\}$ e quindi $f \notin \overline{\mathcal{A}}$.

La sua parte finita:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è in $\overline{\mathcal{A}}$ perché $dom(\vartheta) \cap cod(\vartheta) = \emptyset$. Quindi per Rice-Shapiro $\overline{\mathcal{A}}$ è non RE.

9.11.4 Esercizio 4

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}.k + x \in W_x\}$$

Soluzione

B sembra essere non-RE perché per decidere l'appartenenza bisogna controllare infiniti valori.

Si va quindi di riduzione $\overline{K} \leq_m B$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & H(x, x, y) \end{cases} = ⊮\Big(\mu w.H(x, x, y)\Big)$$

È calcolabile, quindi per SMN esiste f che fa da funzione di riduzione:

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$. $\phi_{f(x)}(y)$ è quindi sempre definita ed in particolare $\forall k \in \mathbb{N}, f(x) + k \in W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\exists y_0 \in \mathbb{N}.\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y > y_0$. Quindi $\exists k \in \mathbb{N}.f(x) + k \notin W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \notin B$.

Si ha quindi che B è non-RE.

$\overline{B} = \{x : \exists k \in \mathbb{N}.x + k \notin W_x\}$ sembra essere non-RE perché per trovare un k che soddisfa la condizione di appartenenza è necessario aspettare la terminazione del programma su un input in cui non termina.

$$g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \end{cases} = SC_K(x)$$

Per SMN esiste f:

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y$ e quindi $f(x) \in \overline{B}$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$, in particolare $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi $f(x) \in B$.

$\overline{B}$ quindi è non-RE.

9.11.5 Esercizio 5

Dimostrare che l'insieme non è saturo:

$$C = \{x : \phi_x(x) = x^2\}$$

Soluzione

Il secondo teorema dice che data f calcolabile e totale, esiste e tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

$$g(x, y) = \begin{cases} y^2 & y = x \\ \uparrow & \text{altrimeniti} \end{cases} = y^2 \cdot \nVdash\Big(\mu w.|y - x|\Big)$$

Per SMN esiste f. $\phi_{f(x)}(x) = g(x, x) = x^2 \to f(x) \in C$.
Per il secondo teorema $\exists e.\phi_e(e) = \phi_{f(e)}(e) = g(e, e) = e^2 \to e \in C, W_e = \{e^2\}$.
Sia $e' \in \mathbb{N} : \phi_{e'} = \phi_e, e' \neq e \to \phi_{e'}(e') = \uparrow \neq e'^2 \to e' \notin C$.
Ma dato che $\phi_e = \phi_{e'}$ si ha che l'insieme C non è saturo.

9.9 Appello 2014-07-02

9.9.1 Esercizio 1

Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo solo se $A, \overline{A}$ sono RE.

Soluzione

A ricorsivo $\Rightarrow$ $A, \overline{A}$ sono RE.

Essendo A ricorsivo, la sua funzione caratteristica $\mathcal{X}_A$ è calcolabile e può essere utilizzata per definire la funzione semi-caratteristica di A:

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}(\mathcal{X}_A(x))\Big)$$

La funzione semi-caratteristica di $\overline{A}$ può essere definita in modo analogo

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\mathcal{X}_A(x)\Big)$$

$A, \overline{A}$ sono RE $\Rightarrow$ A ricorsivo

Entrambe le funzioni semi-caratteristiche sono calcolabili e possono essere combinate per definire la funzione caratteristica.

Sia e_1 un programma tale che $\phi_{e_1} = SC_A$ e e_2 tale che $\phi_{e_2} = \overline{sg}(SC_{\overline{A}})$, entrambi esistono perché le loro funzioni sono calcolabili.

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_A(x) &= \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} SC_A(x) & x \in A \\ \overline{sg}(SC_{\overline{A}}(x)) & x \notin A \end{cases} \\ &= \Bigg(\mu w.\Big(S\big(e_1, x, (w)_1, (w)_2\big) \wedge S\big(e_2, x, (w)_1, (w)_2\big)\Big)\Bigg)_1\end{aligned}$$

9.9.2 Esercizio 2

Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale, non calcolabile tale che $f(x) = x/2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ e pari, oppure dimostrare che tale funzione non esiste.

Soluzione

La funzione deve essere totale e non viene specificato nulla per quanto riguarda il valore della funzione sui numeri dispari.

Sia $\{\phi_n\}$ una qualsiasi enumerazione delle funzioni calcolabili.

La funzione f può essere definita come

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x \text{ è pari} \\ \phi_x(x) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi che la funzione f:

- è totale, perché definita su tutto $\mathbb{N}$
- vale $x/$ se x è pari
- è diversa da tutte le funzioni calcolabili se x è dispari e quindi negli infiniti punti dispari non è calcolabile

9.9.3 Esercizio 3

$$A = \{x|\forall k \in \mathbb{N}.x + k \in W_x\}$$

Soluzione

A sembra non essere RE, perché per provare l'appartenenza è necessario andare a provare infiniti valori di k.

Si può quindi provare la riduzione $\overline{K} \leq_m A$.

Serve quindi una funzione tale che se $x \in \overline{K}$, $f(x)$ sia definita $\forall x' \geq x$ ed una funzione definita su tutto $\mathbb{N}$ soddisfa questa condizione, mentre se $x \in K$, $f(x)$ non deve essere definita in almeno un punto $x' \geq x$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & H(x, x, y) \end{cases}$$

Non posso usare $x \in \overline{K}$ perché la funzione semi-caratteristica non è calcolabile, devo ragionare sul numero di passi y impiegati dal programma per terminare.

Essendo calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, che funziona da funzione di riduzione, perché:

- $x \in \overline{K}$: $\forall y \, \neg H(x, x, y)$ è vero e quindi $\forall y \, \phi_{f(x)}(y) = 1$ ed in particolare $\phi_{f(x)}(f(x) + k) = 1 \, \forall k$, ovvero $f(x) \in A$.
- $x \in K$: $\exists y_0$ tale che $\forall y > y_0$, $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) =\uparrow$, è quindi possibile trovare almeno un valore $y' > y_0$ tale che $y' > x + 0$, pertanto $f(x) \notin A$.

Si ha quindi che A non è RE.

$\overline{A} = \{x|\exists k \in \mathbb{N}.x + k \notin W_x\}$, anche in questo caso sembra non essere RE, perché per verificare l'appartenenza è necessario che il programma x non termini quando riceve in input $x + k$.

Si può quindi provare la riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{A}$.

Serve quindi una funzione tale che se $x \in \overline{K}$, $f(x)$ non termini quanto riceve in input $x + k$ e si può osservare che i programmi che calcolano $\emptyset$ sono in $\overline{A}$. Se invece $x \in K$, $f(x)$ deve essere definita su tutti gli input $> x$.

$$g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \end{cases} = SC_K(x)$$

Essendo calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, che funziona da funzione di riduzione, perché:

- $x \in \overline{K}$: il predicato $\neg H(x, x, y)$ vale $\forall y$ e quindi $\phi_{f(x)}(y) =\uparrow \forall y$, pertanto $f(x) \in \overline{A}$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$ ed in particolare $\phi_{f(x)}(y) \downarrow \forall y > x$ e quindi $f(x) \in A$

Segue quindi che anche $\overline{A}$ non è RE.

9.9.4 Esercizio 4

$$V = \{x | E_x \text{ infinito}\}$$

Soluzione

V è saturo, perché $\mathcal{V} = \{f | \, |cod(f)| = \infty\}$.

Banalmente la funzione $id \in \mathcal{V}$ e tutte le sue parti finite non appartengono per definizione a $\mathcal{V}$, quindi per Rice Shapiro V è non RE.

Analogamente $id \notin \overline{\mathcal{V}}$ e la funzione $\emptyset$ appartiene a $\overline{\mathcal{V}}$ ed è parte finita di id, quindi per Rice Shapiro, $\overline{V}$ è non RE.

9.9.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione e dimostrare che $\exists k | W_k = \{k * i | i \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione

Il teorema dice che, data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, $\exists e.\phi_e = \phi_{f(e)}$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ è multiplo di } y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \nVdash\Big(\mu z.|xz - y|\Big)$$

Essendo g calcolabile, per SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y) \forall y$ e quindi si ha che

$$W_{f(x)} = \{x * i | i \in \mathbb{N}\}$$

e per il secondo teorema di ricorsione, esiste x tale che $\phi_x = \phi_{f(x)}$, ovvero $\exists x$ tale che:

$$W_x = W_{f(x)} = \{x * i | i \in \mathbb{N}\}$$

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
1 Settembre 2016
(con bozza di soluzione)

Esercizio 1
Enunciare e dimostrare il secondo teorema di ricorsione.

Esercizio 2
Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ 2x \dot{-} 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: La funzione non è calcolabile, dato che possiamo scrivere

$$\chi_K(x) = sg(f(x) \dot{-} 2x).$$

Se f fosse calcolabile, dedurremmo che anche χ_K lo è, mentre sappiamo che K non è ricorsivo, ovvero χ_K non è calcolabile. □

Esercizio 3
Sia f una funzione calcolabile totale tale che $img(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$ sia infinito. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \ : \ \exists y \in W_x.\ x < f(y)\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A non è ricorsivo dato che $K \leq_m A$. Infatti, si consideri la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

è calcolabile. Dunque per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, calcolabile totale, tale che $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$, e la funzione s è funzione di riduzione.

Infatti, se $x \in K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = 1$ per ogni y. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$, e pertanto $f(W_{s(x)}) = f(\mathbb{N}) = img(f)$, che è infinita per ipotesi. Pertanto certamente esiste $z \in f(W_{s(x)})$ tale che $x < z$, ovvero esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \in A$.

Se invece $x \notin K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ per ogni y. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$, e pertanto, certamente non esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \notin A$.

L'insieme A è r.e., infatti

$sc_A(x) = \mu w.(H(x,(w)_1,(w)_2) \ \wedge \ x < f((w)_1))$

Pertanto, $\bar{A}$ non r.e.

$\square$

Esercizio 4
Detto $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è totale}\}$, dimostrare che $\bar{K} \leq_m A$.

Soluzione: Si definisce

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che s può essere la funzione di riduzione. $\square$

Esercizio 5
Esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile tale che $dom(f) = K$ e $cod(f) = \mathbb{N}$? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: Si esiste, ad esempio si puó considerare $f(x) = \varphi_x(x)$. Chiaramente $dom(f) = K$. Inoltre, per ogni $k \in N$, se si considera un indice e della funzione costante k si ha che $f(e) = \varphi_e(e) = k$. Quindi $cod(f) = \mathbb{N}$.

Alternativamente si può definire

$$f(x) = (\mu t.H(x,x,t)) - 1$$

Chiaramente $dom(f) = K$ poiché $f(x) \downarrow$ sse esiste t tale che $H(x,x,t)$, i.e., sse $x \in K$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{N}$ basta prendere il programma Z_k che consiste di $Z(1)$ ripetuto x volte. Sull'indice corrispondente $y = \gamma(Z_k)$ avremo $f(y) = k-1$, che mostra che $cod(f) = \mathbb{N}$.

$\square$

Nota: Correzione, risultati e visione dei compiti: *Mercoledì 7 Settembre, ore 9:30, 1BC/45*

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
Prova Intermedia - 29 Novembre 2016

Esercizio 1

Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $p_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $p_2(y) = |y - 2|$.

Soluzione: Per la definizione di $\mathcal{PR}$ si veda il libro. Per la seconda parte, si osserva che se definiamo $p_1(y) = |y - 1|$ allora

$$\begin{cases} p_1(0) = 1 \\ p_1(y+1) = |y+1-1| = |y| = y \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} p_2(0) = 2 \\ p_2(y+1) = |y+1-2| = |y-1| = p_1(y) \end{cases}$$

Quindi p_2 definita per ricorsione primitiva a partire dalle funzioni di base è in $\mathcal{PR}$. $\square$

Esercizio 2

Dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $W_{k(n)} = \mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari}\}$ e $E_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} x/2 + n & \text{se } x \text{ pari} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = qt(2,x) + n + \mu z.rm(2,x)$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto:

- $W_{k(x)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid x \text{ pari}\}$
- $E_{k(x)} = \{f(n,x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{n + x/2 \mid x \text{ pari}\} = \{n + x \mid x \geqslant 0\} = \{y \mid y \geqslant \mathbb{N}\}$

come desiderato. $\square$

Esercizio 3

Può esistere una funzione totale, non calcolabile, tale che $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ sia l'insieme Pr dei numeri primi? Motivare la risposta.

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{se } x \in W_x \text{ e } p = \min\{p' \in Pr \mid p' > \varphi_x(x)\} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora la funzione f

- è totale;
- non è calcolabile in quanto per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha che $f(x) \neq \varphi_x(x)$; infatti, se $\varphi_x(x) \downarrow$ si ha che $f(x)$ è un primo maggiore di $\varphi_x(x)$, e se invece $\varphi_x(x) \uparrow$ allora $f(x) = 2$;
- chiaramente $img(f) \subseteq Pr$. Per l'inclusione inversa si consideri un qualunque numero primo $p \in Pr$ e la funzione costante $g(x) = p - 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. La funzione g è calcolabile, quindi $g = \varphi_n$ per un opportuno indice n. Si conclude notando che $f(n) = \min\{p' \in Pr \mid p' > \varphi_n(n)\} = \min\{p' \in Pr \mid p > p - 1\} = \min\{p' \in Pr \mid p' \geqslant p\} = p$ e quindi $p \in img(f)$.

$\square$

9.3 Appello 2016-01-25

9.3.1 Esercizio 1

Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e $\overline{A}$ sono RE.

Soluzione

Se A è ricorsivo posso definire

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}(\mathcal{X}_A(x))\Big)$$

che risulta calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili e quindi A è anche RE. Per ottenere $SC_{\overline{A}}$ basta togliere il segno negato, oppure utilizzare $\mathcal{X}_{\overline{A}}$.

Se invece sono entrambi RE, posso definire

$$\mathcal{X}_A(x) = \Big(\mu w.S\Big(e_1, x, (w)_1, (w)_2\Big) \vee S\Big(e_2, x, (w)_1, (w)_2\Big)\Big)_1$$

dove e_1 e e_2 sono i programmi che calcolano le due funzioni semi-caratteristiche (quella di $\overline{A}$ deve essere composta con il segno negato).

9.3.2 Esercizio 2

Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e non calcolabile tale che $f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che questa funzione non esiste.

Soluzione

La funzione deve essere definita su tutto $\mathbb{N}$ e $f(x) = id(x) = x$.

Dato che le due funzioni sono uguali e sono definite sullo stesso dominio, un programma che calcola id calcola anche f ed essendo id calcolabile, esistono infiniti programmi che sono in grado di calcolarla e che quindi riescono a calcolare anche f.

Tuttavia, la funzione può essere non calcolabile:

$$f(x) = x \cdot \mathbb{1}\Big(\mathcal{X}_K(x)\Big)$$

Così definita, è totale, uguale all'identità e non calcolabile perché $\mathcal{X}_K$ è non calcolabile.

9.3.3 Esercizio 3

$$A = \{x | \phi_x \text{ strettamente crescente}\}$$

Soluzione

A probabilmente è non-RE perché per valutare l'appartenenza è necessario controllare infiniti punti del dominio.

A è saturo:

$$\mathcal{A} = \{f | \forall x, y \in dom(f) : x < y \to f(x) < f(y)\}$$

Una qualsiasi funzione gradino:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

non appartiene a $\mathcal{A}$, ma la parte finita

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ 1 & x = x_0 + 1 \\ \uparrow & \text{altriementi} \end{cases}$$

appartiene ad $\mathcal{A}$ e quindi per Rice-Shapiro, A è non-RE.

Per quanto riguarda $\overline{A}$, per decidere l'appartenenza basta trovare una coppia di punti sui quali la funzione è non crescente, quindi potrebbe essere RE.

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}\Big(S\Big(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3\Big) \wedge S\Big(x,(w)_4,(w)_5,(w)_6\Big) \wedge (w)_1 < (w)_4 \wedge (w)_2 \geq (w)_5\Big)\Big)$$

Essendo la funzione semi-caratteristica calcolabile, $\overline{A}$ è non-RE.

9.3.4 Esercizio 4

$$B = \{x : x > 0 \wedge x/2 \notin E_x\}$$

Soluzione

B probabilmente è non-RE, perché dovrei provare il programma x su infiniti input.

$$\overline{K} \leq_m B$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & x \notin K \\ y/2 & x \in K \end{cases} = y/2 \cdot SC_K(x)$$

Per SMN esiste la funzione di riduzione f:

- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \forall y \Rightarrow E_{f(x)} = \emptyset \Rightarrow f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = y/2 \forall y \Rightarrow \phi_{f(x)}(f(x)) = f(x)/2 \Rightarrow f(x)/2 \in E_{f(x)} \Rightarrow f(x) \notin B$

E quindi B è non RE.
$\overline{B}$ invece sembra essere ricorsivo, perché basta eseguire in parallelo il programma su tutti i possibili input fino a che non viene trovato in output il valore $x/2$.

$$SC_{\overline{B}}(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}\Big(S(x,(w)_1,x/2,(w)_2)\Big)\Big)$$

$\overline{B}$ è RE e non ricorsivo.

9.3.5 Esercizio 5

$$\exists x.\phi_x(y) = x + y$$

Soluzione

Definisco $g(x,y) = x + y$.
Per SMN:

$$\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = x + y$$

Per il secondo teorema di ricorsione

$$\exists x.\phi_x(y) = \phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = x + y$$

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
Prova Intermedia - 18 Aprile 2016

Esercizio 1

Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $pow2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $pow2(y) = 2^y$.

Esercizio 2

Si consideri una variante della macchina URM dove l'istruzione di salto e successore sono sostituite dall'istruzione $JI(m, n, t)$ che confronta il contenuto r_m e r_n dei registri R_m e R_n e quindi:

- se $r_m = r_n$ incrementa il registro R_m e salta all'indirizzo t (restando inteso che se t non cade nel programma, l'esecuzione termina).
- altrimenti continua con l'istruzione successiva.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Esercizio 3

Può esistere una funzione non calcolabile totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $cod(f)$ sia l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

9.2 Appello 2016-07-01

Correzione di Baldan.

9.2.1 Esercizio 1

Sia A un insieme ricorsivo e siano $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzioni calcolabili. Dimostrare che è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \notin A \end{cases}$$

Il risultato continua a valere se indeboliamo le ipotesi e assumiamo A RE? Spiegare come si adatta la dimostrazione, in caso positivo, o fornire un controesempio in caso negativo.

Soluzione

Siano e_1, e_2 i programmi che calcolano le due funzioni date.

La funzione f può essere calcolata con:

$$f(x) = \left(\mu w. \left(S\left(e_1, x, (w)_1, (w)_2\right) \land x \in A\right) \lor \left(S\left(e_2, x, (w)_1, (w)_2\right) \land x \notin A\right)\right)_1$$

questo perché l'appartenenza o meno ad A è decidibile in quanto A è ricorsivo.

Utilizzare

$$f(x) = f_1(x)\mathcal{X}_A(x) + f_2(x)\mathcal{X}_{\overline{A}}$$

è **sbagliato** perché una delle due funzioni può **non essere totale** e quindi verrebbe prodotto un risultato sbagliato, utilizzando una funzione sempre indefinita. Se ci fosse anche l'ipotesi della totalità il discorso sarebbe stato diverso.

Se invece A è ricorsivamente enumerabile, la non appartenenza ad A non è più decidibile.

Per dimostrare questo conviene trovare un contro esempio.

Posso prendere $A = K$, $f_1(x) = 1, f_2(x) = 0$, così facendo f risulta essere:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$$

ed essendo f_1, f_2 calcolabili, anche $f = \mathcal{X}_K$ è calcolabile, ma è noto che questa funzione non è calcolabile e quindi in generale f non è calcolabile.

9.2.2 Esercizio 2

Dimostrare che un insieme A è RE se e solo se esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile tale che $A = img(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione

Se A è RE, allora la sua funzione SC_A è calcolabile ed è definita solo su A.

Per fare in modo che A sia l'immagine di f, si può prendere

$$f(x) = x \cdot SC_A(x)$$

In questo modo, quando $x \in A$, $SC_A(x) = 1$ e quindi $f(x) = x$ e pertanto $f(x) \in A$. f è calcolabile in quanto è ottenuta componendo funzioni calcolabili.

Se $A = img(f)$ con f calcolabile. L'idea è quella di definire la funzione semi-caratteristica di A in modo che valga 1 solo quando viene calcolata su un valore x che viene fornito in output dalla funzione.

Sia e un programma che calcola f. La funzione semi-caratteristica di A può essere definita come:

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.S\Big(e, (w)_1, x, (w)_2,\Big)\Big)$$

È necessario effettuare la minimalizzazione perché f può non essere totale, ovvero **non** può essere definita come:

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.|f(w) - x)|\Big)$$

9.2.3 Esercizio 3

$$A = \{x | x \in W_x \wedge \phi_x(x) > x\}$$

Soluzione

L'insieme è molto simile a K, quindi probabilmente è RE:

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.x + 1 \dot{-} \phi_x(x)\Big) = \mathbb{1}\Big(\mu w.x + 1 \dot{-} \Phi_u(x, x)\Big)$$

La funzione è calcolabile, quindi A è RE e va bene anche se $x \notin W_x$ perché la funzione è correttamente indefinita.

Per dimostrare che A non è ricorsivo posso fare la riduzione $K \leq_m A$.

Serve quindi una funzione $g(x, y)$ tale che vista come funzione di y appartenga ad A solo se $x \in K$.

$$g(x, y) = \begin{cases} y + 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = (y + 1) \cdot SC_K(x)$$

Quando x in K, $g(x, x) = x + 1$ quindi la condizione di appartenenza ad A è soddisfatta.

Per SMN esiste f che funziona come funzione di riduzione e tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$:

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = y + 1 \forall y$ in particolare, $\phi_{f(x)}(f(x)) = f(x) + 1 \forall f(x)$ ed inoltre $f(x) \in W_{f(x)}$, quindi $f(x) \in A$.
- $x \notin K$: $\phi_{f(x)} = g(x, y) = \uparrow \forall y$, quindi $f(x) \notin W_{f(x)}$ e pertanto $f(x) \notin A$.

A non è ricorsivo ed è RE, quindi $\overline{A}$ è non RE.

9.2.4 Esercizio 4

$$B = \{x \in \mathbb{N} | \forall y \in W_x \exists z \in W_x \, (y < z) \wedge \phi_x(y) > \phi_x(z)\}$$

Soluzione

L'insieme contiene tutti gli indici, tali che per ogni valore del dominio, esiste un valore più grande tale che il valore della funzione calcolato in quel punto sia più basso.

L'insieme è saturo, perché

$$\beta = \{f \in \mathcal{C} : \forall y \in dom(f).\exists z \in dom(f).y < z \vee f(y) > f(z)\}$$

C'è una quantificazione universale, quindi è probabile che sia non RE.

Ad occhio c'è una sola funzione che appartiene a β è ed $\emptyset$ perché è sempre indefinita. Dato che $\emptyset$ è una parte finita di tutte le funzioni, basta trovarne una che non appartiene a β. Per non appartenere a β basta che una funzione non sia decrescente, quindi la funzione *id* non appartiene a β ma ammette parte finta che ci appartiene e quindi per Rice Shapiro, B è non RE.

$$\overline{\beta} = \{f \in \mathcal{C} : \exists y \in dom(f).\forall z \in dom(f).y > z \vee f(y) \leq f(z)\}$$

Osservando $\overline{\beta}$ a prima vista sembra essere non RE, però ragionando meglio sulle condizioni di appartenenza a $\overline{\beta}$ si può notare che viene richiesto che la funzione abbia un minimo e questo è sempre vero per le funzioni definite sui numeri naturali.

Quindi $f \in \overline{\beta} \Leftrightarrow f \neq \emptyset$, ovvero $\overline{\beta} = \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$, $\beta = \{\emptyset\}$.

Si può definire la funzione semi-caratteristica:

$$SC_{\overline{B}}(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.H\Big(x, (w)_1, (w)_2\Big)\Big)$$

Quindi $\overline{B}$ è RE e non ricorsivo, perché B è non-RE.

9.2.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $W_e = \{e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione

Il secondo teorema dice che, data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

Definisco quindi una funzione che vista come funzione di y abbia le caratteristiche desiderate:

$$g(x, y) = \begin{cases} \log_x y & \text{se } y = x^n \text{ per qualche } n \\ \uparrow \end{cases} = \mu n.|x^n - y|$$

Essendo g calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$.

Quindi $W_{f(x)} = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per il secondo teorema di ricorsione $\exists e$ tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
Prova Intermedia - 20 Novembre 2017

Esercizio 1

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $W_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$ e $E_{k(n)} = \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ pari}\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} 2 * (x \dot{-} n) & \text{se } x \geqslant n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 2 * (x \dot{-} n) + \mu z.(n \dot{-} x)$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid x \geqslant n\}$;
- $E_{k(n)} = \{f(n,x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2(x \dot{-} n) \mid x \geqslant n\} = \{2(n+z) \dot{-} n) \mid z \geqslant 0\} = \{2z \mid z \in \mathbb{N}\}$.

$\square$

Esercizio 2

Si consideri una variante della macchina URM, che comprende le istruzioni di salto, trasferimento e due nuove istruzioni

- *A(m,n)* che scrive nel registro m la somma dei registri m e n, ovvero $r_m \leftarrow r_m + r_n$;
- *C(n)* che scrive nel registro n il valore del suo segno, ovvero $r_n \leftarrow sg(r_n)$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Indichiamo con URM* la macchina modificata. Osserviamo che le istruzioni della macchina URM* sono codificabili nella macchina URM.

L'istruzione $I_j : A(m, n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine: detto q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

$$\begin{array}{lll} SUB & : & J(n, q, j + 1) \\ & & S(m) \\ & & S(q) \\ & & J(1, 1, SUB) \end{array}$$

Allo stesso modo, indicando ancora con q l'indice di un registro non utilizzato, un'istruzione $I_j : C(m)$ si può sostuire con un salto alla subroutine

$$\begin{array}{lll} SUB & : & J(n, q, ZERO) \\ & & Z(n) \\ & & J(1, 1, j + 1) \\ ZERO & : & S(n) \\ & & J(1, 1, j + 1) \end{array}$$

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k per ogni un programma P che utilizzi entrambi i set di istruzioni si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f_{P'}^{(k)} = f_P^{(k)}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni A e C nel programma. Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni A e C è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h+1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione A o una istruzione C. Supponiamo che sia l'istruzione di indice j e sia una istruzione A.

$$\begin{array}{lll} 1 & : & I_1 \\ & & \dots \\ j & & A(m,n) \\ & & \dots \\ \ell(P) & : & I_{\ell(P)} \end{array}$$

Costruiamo un programma P'', utilizzando un registro non riferito da P, $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

$$\begin{array}{lll} 1 & : & I_1 \\ & & \dots \\ j & & J(1,1,SUB) \\ & & \dots \\ \ell(P) & : & I_{\ell(P)} \\ & & J(1,1,END) \\ SUB & : & J(n,q,ZERO) \\ & & Z(n) \\ & & J(1,1,j+1) \\ ZERO & : & S(n) \\ & & J(1,1,j+1) \\ END & : & \end{array}$$

Il programma P'' è tale che $f_{P''}^{(k)} = f_P^{(k)}$ e contiene h istruzioni di tipo A o C. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f_{P'}^{(k)} = f_{P''}^{(k)}$ che quindi è il programma desiderato.

Se l'istruzione I_j è di tipo C si procede in modo completamente analogo, rimpiazzando l'istruzione con la sua codifica e usando l'ipotesi induttiva.

L'inclusione è stretta, ovvero $\mathcal{C} \nsubseteq \mathcal{C}^*$. Ad esempio si può facilmente vedere che la funzione successore non è URM* calcolabile. Infatti, si può dimostrare che partendo da una configurazione con i registri tutti a zero, un qualunque programma URM*, dopo un qualunque numero di passi, produrrà una configurazione con i registri ancora tutti a zero. Una prova completamente formale dimostra la tesi suddetta per induzione sul numero di passi. $\square$

Esercizio 3

Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che la sua immagine $cod(f) = \{y \mid \exists x \in \mathbb{N}.\ f(x) = y\}$ sia finito? Fornire un esempio o mostrare che una tale funzione non esiste.

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} \overline{sg}(\varphi_x(x)) & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{se } x \notin W_x \end{cases}$$

Allora la funzione f

- è totale;
- non è calcolabile in quanto per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha che $f(x) \neq \varphi_x(x)$; infatti, se $\varphi_x(x) \downarrow$ allora $f(x) = \overline{sg}(\varphi_x(x)) \neq \varphi_x(x)$, e se invece $\varphi_x(x) \uparrow$ allora $f(x) = 0 \neq \varphi_x(x)$;
- chiaramente $cod(f) \subseteq \{0, 1\}$.

$\square$

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
Prova Intermedia - 20 Novembre 2018

Esercizio 1
Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $W_{k(n)} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\}$ e $E_{k(n)}$ è l'insieme dei numeri dispari.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} 2z+1 & \text{se } x = z^n \text{ per qualche } z \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = 2 * (\mu z.|x \dot{-} z^n|) + 1$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid \exists z \in \mathbb{N}. x = z^n\} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\}$;
- $E_{k(n)} = \{f(n,x) \mid x \in W_{k(n)}\} = \{2\sqrt[n]{z^n} + 1 \mid z \in \mathbb{N}\} = \{2z + 1 \mid z \in \mathbb{N}\}$.

$\square$

Esercizio 2
Si consideri una variante della macchina URM, che comprende le istruzioni di salto, trasferimento e due nuove istruzioni

- *A(m,n)* che scrive nel registro m la somma dei registri m e n, ovvero $r_m \leftarrow r_m + r_n$;
- *C(n)* che scrive nel registro n il valore del suo segno negato, ovvero $r_n \leftarrow \overline{sg}(r_n)$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Indichiamo con URM* la macchina modificata. Osserviamo che le istruzioni della macchina URM* sono codificabili nella macchina URM.

L'istruzione $I_j : A(m, n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine: detto q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

$$\begin{array}{lll} SUB & : & J(n, q, j+1) \\ & & S(m) \\ & & S(q) \\ & & J(1, 1, SUB) \end{array}$$

Allo stesso modo, indicando ancora con q l'indice di un registro non utilizzato, un'istruzione $I_j : C(m)$ si può sostuire con un salto alla subroutine

$$\begin{array}{lll} SUB & : & J(n, q, ZERO) \\ & & Z(n) \\ & & J(1, 1, j+1) \\ ZERO & : & S(n) \\ & & J(1, 1, j+1) \end{array}$$

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k per ogni un programma P che utilizzi entrambi i set di istruzioni si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f_{P'}^{(k)} = f_P^{(k)}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni A e C nel programma. Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni A e C è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h+1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione A o una istruzione C. Supponiamo che sia l'istruzione di indice j e sia una istruzione A.

$$\begin{array}{lll} 1 & : & I_1 \\ & & \dots \\ j & & A(m,n) \\ & & \dots \\ \ell(P) & : & I_{\ell(P)} \end{array}$$

Costruiamo un programma P'', utilizzando un registro non riferito da P, $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

$$\begin{array}{lll} 1 & : & I_1 \\ & & \dots \\ j & & J(1,1,SUB) \\ & & \dots \\ \ell(P) & : & I_{\ell(P)} \\ & & J(1,1,END) \\ SUB & : & J(n,q,ZERO) \\ & & Z(n) \\ & & J(1,1,j+1) \\ ZERO & : & S(n) \\ & & J(1,1,j+1) \\ END & : & \end{array}$$

Il programma P'' è tale che $f_{P''}^{(k)} = f_P^{(k)}$ e contiene h istruzioni di tipo A o C. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f_{P'}^{(k)} = f_{P''}^{(k)}$ che quindi è il programma desiderato.

Se l'istruzione I_j è di tipo C si procede in modo completamente analogo, rimpiazzando l'istruzione con la sua codifica e usando l'ipotesi induttiva.

Per l'inclusione opposta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ si osserva, analogamente, che le istruzioni $Z(n)$ e $S(n)$ sono codificabili nella macchina modificata.

più precisamente, dato un programma P e detti q_1 e q_2 indici di registri non usati dal programma (quindi inizialmente a 0), si considera il programma

$C(q_1)$ `// fa in modo che` q_1 `contenga` 1
P'

dove P' è ottenuto da P sostituendo ogni istruzione $Z(m)$ con $T(q_2, m)$ e ogni istruzione $S(m)$ con $A(m, q_1)$. □

Esercizio 3

Esistono un indice $e \in \mathbb{N}$ e una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che indicati con $dom(f)$ e $cod(f)$ il dominio e codominio di f (ovvero $dom(f) = \{x \mid f(x) \downarrow\}$ e $cod(f) = \{y \mid \exists x.\ f(x) = y\}$), risulti $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$? Fornire un esempio o dimostrare la non esistenza.

Una funzione f tale che $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$ si può trovare per ogni $e \in \mathbb{N}$?

Soluzione: Per la prima parte, si consideri un indice $e \in \mathbb{N}$ della funzione identità, quindi $W_e = E_e = \mathbb{N}$. Quindi si definisca la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è totale, quindi $dom(f) = \mathbb{N} = W_e$. Inoltre $dom(f) = \mathbb{N} = E_e$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $n = 0$ allora, considerato un indice x della funzione sempre indefinita, si ha $f(x) = 0$. Se $n > 0$ allora basta considerare un qualunque indice x della funzione costante $n - 1$ e si ha $f(x) = (n - 1) + 1 = n$.

Per la seconda domanda, la risposta è chiaramente no. Ad esempio, se consideriamo $e \in \mathbb{N}$ tale che φ_e sia la funzione sempre indefinita, ogni f tale che $dom(f) = W_e = \varnothing$ coincide con φ_e e quindi è calcolabile.

$\square$

Computabilità e Algoritmi
9 Luglio 2019

Esercizio 1
Enunciare e dimostrare il teorema di struttura dei predicati semidecidibili, ovvero dimostrare che $P(\vec{y})$ è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile $Q(x, \vec{y})$ tale che $P(\vec{y}) \equiv \exists x.Q(x, \vec{y})$.

Soluzione: Si veda il libro. $\square$

Esercizio 2
Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni altra funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Non può esistere, altrimenti, dato che la quantificazione per g è universale, la proprietà dovrebbe valere anche per $g = f$. Quindi $f + f = 2f$ calcolabile, quindi f calcolabile. $\square$

Esercizio 3
Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari. Dimostrare che indicato con $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = \mathbb{P}\}$, si ha che $\bar{K} \leq_m A$.

Soluzione: Per ottenere la funzione di riduzione si può considerare

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa è calcolabile, dato che può essere scritta come $f(x, y) = 2\, y\, \bar{sg}(\chi_H(x, x, y)) + \chi_H(x, x, y)$.

Pertanto, per il teorema smn, esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, che può essere usata come funzione di riduzione per $\bar{K} \leq_m A$. Infatti:

- se $x \in \bar{K}$, allora $\chi_H(x, x, y) = 0$ per ogni y, e pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = 2y$ per ogni y. Quindi $E_{s(x)} = \mathbb{P}$, e pertanto $s(x) \in A$.

- se $x \notin \bar{K}$, ovvero $x \in K$ allora esiste y_0 tale che $\chi_H(x, x, y) = 1$ per ogni $y \geq y_0$. Quindi $\varphi_{s(x)}(y) = 1$ per $y \geq y_0$, dunque $1 \in E_{s(x)}$ e pertanto $E_{s(x)} \neq \mathbb{P}$, quindi $s(x) \notin A$.

$\square$

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \varphi_x(y) = y^2 \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Osserviamo che B è saturato, dato che $B = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \mid f(y) = y^2 \text{ per infiniti } y\}$. Si usa Rice-Shapiro per dedurre che entrambi gli insiemi non sono r.e.

- B non r.e. perchè $\mathcal{B}$ contiene y^2 e nessuna sua sottofunzione finita (dato che non contiene nessuna funzione finita).
- $\bar{B}$ non r.e. dato che $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ e $\emptyset$ ammette come estensione $y^2 \notin \bar{\mathcal{B}}$.

$\square$

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che, indicato con e_0 un indice della funzione sempre indefinita $\emptyset$ e con e_1 un indice della funzione identità, la funzione $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da

$$h(x) = \begin{cases} e_0 & \text{se } \varphi_x \text{ è totale} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile.

Soluzione: Si osservi che h è totale. Inoltre $\varphi_x \neq \varphi_{h(x)}$ per ogni x, dato che φ_x è totale sse $\varphi_{h(x)}$ non lo è. Quindi, per il secondo teorema di ricorsione, si deduce che h non può essere calcolabile. $\square$

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
Prova Intermedia - 18 Novembre 2019

Esercizio 1

Si consideri una variante della macchina URM, nella quale l'istruzione di azzeramento è sostituita dall'istruzione P(n) il cui effetto è quello di sostituire il contenuto del registro n con il suo predecessore, ovvero $r_n \leftarrow r_n \dot{-} 1$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Si ha che $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, dato che le istruzioni di ciascuna macchina sono codificabili nell'altra.

Per provare $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, si mostra che, dato un programma URM' P' e $k \in \mathbb{N}$, si può ottenere un programma URM P che calcola la stessa funzione, ovvero tale che $f_P^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$, come segue. Si osserva che ogni istruzione P(n), detto j il suo numero d'ordine e $m = \max\{\rho(P'), k\} + 1$ il primo registro non usato da P', può essere sostituita da un salto alla subroutine

```
SUB:   J(n,m,j+1)
       S(m)
LOOP:  J(n,m,END)
       S(m)
       S(m+1)
END    T(m+1,n)
       J(1,1,j+1)
```

Più formalmente, si dimostra che dato un qualunque programma P' della macchina URM', si può ottenere un programma equivalente P, ovvero tale che $f_P^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$, che non usa istruzioni $P(n)$, che è quindi un programma URM. La dimostrazione procede per induzione sul numero h di istruzioni P(n) in P'.

- ($h = 0$) In questo caso P' è già il programma desiderato.
- ($h \to h + 1$) Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h + 1$. Il programma P' contiene certamente almeno una istruzione $P(n)$. Sia j l'indice di una tale istruzione. Quindi P' ha la forma:

$$\begin{array}{lcl} 1 & : & I_1 \\ & & \dots \\ j & & P(n) \\ & & \dots \\ \ell(P') & : & I_{\ell(P')} \end{array}$$

  Costruiamo un programma P'', utilizzando un registro di indice $m = \max\{\rho(P'), k\} + 1$, non riferito da P'

```
1      :  I_1
          ...
j         J(1,1,SUB)
          ...
ℓ(P')  :  I_ℓ(P')
          J(1,1,END)
SUB    :  J(n,m,j+1)
          S(m)
LOOP   :  J(n,m,RES)
          S(m)
          S(m+1)
          J(1,1,LOOP)
RES    :  T(m+1,n)
          J(1,1,j+1)
END    :
```

Il programma P'' è tale che $f_{P''}^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$ e contiene h istruzioni di tipo `P(n)`. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P tale che $f_P^{(k)} = f_{P''}^{(k)}$ che quindi è il programma desiderato.

Per l'inclusione opposta $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, si procede in modo analogo, osservando che l'istruzione `Z(n)` si può codificare nella macchina URM' come segue, dove m è, come sopra, l'indice di un registro oltre l'area utilizzata dal programma (e quindi a 0)

```
SUB:  J(n,m,j+1)
      P(n)
      J(1,1,SUB)
```

Ancora più semplicemente, si può osservare che ogni istruzione `Z(n)` è sostituibile da una istruzione `T(m,n)`. □

Esercizio 2

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $\varphi_{k(n)}$ è totale e $E_{k(n)}$ è l'insieme dei divisori interi di n.

Soluzione: Per l'enunciato del teorema smn, si rimanda al libro.

Per la seconda parte, si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è un divisore di } n \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = n * \overline{sg}(rm(x,n)) + sg(rm(x,n))$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n,x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \mathbb{N}$;
- $E_{k(n)} = \{x \mid rm(x,n) = 0\} \cup \{1\}$,
  che è l'insieme dei divisori di n, dato che 1 è sempre un divisore di n.

□

Esercizio 3

Definire una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \subseteq \{0, 1\}$.

La funzione $\overline{sg} \circ f$ può essere calcolabile? Motivare la risposta.

Soluzione: Per la prima parte, si definisca $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per diagonalizzazione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \overline{sg}(\varphi_x(x)) & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è totale e non calcolabile dato che, per definizione, $f(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Per la seconda domanda, la risposta è chiaramente no. Per questo basta osservare che $f = \overline{sg} \circ (\overline{sg} \circ f)$, quindi se $\overline{sg} \circ f$ fosse calcolabile, lo sarebbe anche f per composizione. □

Computabilità
30 giugno 2021

Esercizio 1

Può esistere una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che la funzione $g(x) = \Sigma_{y<x} f(y)$ sia calcolabile? Motivare le risposta fornendo un esempio di tale funzione oppure dimostrando che non esiste.

Soluzione: Non può esistere. Infatti, si supponga che $g(x) = \Sigma_{y<x} f(y)$ sia calcolabile. Allora possiamo esprime f come $f(x) = g(x+1) - g(x)$, e pertanto f è calcolabile in quanto composizione di funzioni calcolabili.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P} \cap W_x = \varnothing\}$, dove $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri pari, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid |dom(f) \cap \mathbb{P} = \varnothing\}$.

Indicato con id la funzione identità, vale che $id \notin \mathcal{A}$, dato che $dom(id) \cap \mathbb{P} = \mathbb{P} \neq \varnothing$. Inoltre la funzione sempre indefinita, $\theta = \varnothing$ chiaramente soddisfa $dom(\theta) \cap \mathbb{P} = \varnothing \cap \mathbb{P} = \varnothing$, quindi $\theta \in \mathcal{A}$.

Quindi, dato che A è non banale e saturato, per il teorema di Rice si conclude che A e $\bar{a}$ non sono ricorsivi.

Inoltre $\bar{A}$ è r.e. Infatti, si ha che $x \in \bar{A}$ sse esiste y pari tale che $y \in W_x$. Dunque la funzione semicaratteristica di A si può scrivere come:

$$sc_A(x) = \mu w.H(x, 2 * (w)_1, (w)_2)$$

Dunque $\bar{A}$ r.e., e non ricorsivo, quindi A non r.e. (altrimenti sarebbe ricorsivo).

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y, z \in W_x.\ x = y * z\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = 1$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x)$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B. Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto $s(x) = s(x) * 1$, con $s(x), 1 \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \in B$.
- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \varnothing$ e pertanto certamente non possono esistere y, z tali che $s(x) = y * z$ e $y, z \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x, (w)_1, (w)_3) \wedge H(x, (w)_2, (w)_3) \wedge x = (w)_2 * (w)_3)$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare $\bar{B}$ non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi $\bar{B}$ non è neppure ricorsivo.

Computabilità
16 luglio 2021

Esercizio 1
Enunciare il teorema smn. Utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ vale $|W_{s(x,y)}| = x * y$.

Soluzione: Si definisca la funzione $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ come segue:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < x * y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione è calcolabile dato che $f(x, y, z) = \mu w.\, z + 1 \dot{-} x * y$ e quindi, per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tale che $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$. Pertanto $|W_{s(x,y)}| = |\{z \mid z < x*y\}| = x*y$ come desiderato.

Esercizio 2
Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid E_x \subseteq W_x \cup \{0\}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che l'insieme A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid cod(f) \subseteq dom(f) \cup \{0\}\}$.

Concludiamo che A e $\overline{A}$ sono non r.e. per Rice-Shapiro.

- Si consideri la funzione $f = sc_{\overline{\{0,1\}}}$, calcolabile in quanto $\{0, 1\}$ è finito e quindi ricorsivo, pertanto lo è anche $\overline{\{0, 1\}}$ che quindi è anche r.e.

  Vale che $f \notin \mathcal{A}$, dato che $cod(f) = \{1\} \nsubseteq dom(f) \cup \{0\} = \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Inoltre, la funzione sempre indefinita, $\theta = \emptyset$, è tale che $\theta \subseteq f$ e $cod(\theta) = \emptyset \subseteq dom(\theta) \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$, quindi $\theta \in \mathcal{A}$. Pertanto, per Rice-Shapiro, A non r.e.

- La funzione $\overline{sg}(x) = 1$ se $x = 0$ e $\overline{sg}(x) = 0$, altrimenti, è tale che $cod(\overline{sg}) = \{0, 1\} \subseteq dom(\overline{sg}) \cup \{0\} = \mathbb{N}$, quindi $\overline{sg} \notin \overline{\mathcal{A}}$. Se si considera $\theta(x) = 1$ se $x = 0$ e $\theta(x) \uparrow$ altrimenti, vale $\theta \subseteq \overline{sg}$ e $cod(\theta) = \{1\} \nsubseteq dom(\theta) \cup \{0\} = \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$, quindi $\theta \in \overline{\mathcal{A}}$. Pertanto, per Rice-Shapiro, $\bar{A}$ non r.e.

Esercizio 3
Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = 1$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x)$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B. Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto $s(x) + 1 \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \in B$.
- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto certamente non può essere $s(x) + 1 \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x + 1 \in W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbf{1}(\varphi_x(x)) = \mathbf{1}(\Psi_U(x, x + 1))$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare $\bar{B}$ non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi $\bar{B}$ non è neppure ricorsivo.

Computabilità
23 Novembre 2020 - prova intermedia

Esercizio 1
Si consideri una variante URM^p della macchina URM nella quale l'istruzione di azzeramento $Z(n)$ è sostituita dell'istruzione di predecessore $P(n)$ che decrementa il contenuto del registro n, ovvero $r_n \leftarrow r_n \dot{-} 1$. Indicato con $\mathcal{C}^p$ l'insieme delle funzioni calcolabili dalla macchina URM^p, stabilire la relazione tra $\mathcal{C}^P$ e l'insieme delle funzioni URM-calcolabili $\mathcal{C}$. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Dato che l'istruzione $P(n)$ è codificabile nella macchina URM, chiaramente $\mathcal{C}^P \subseteq \mathcal{C}$. Più precisamente l'istruzione $I_j : P(n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine. Si indichi con q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

$$
\begin{array}{lll}
SUB & : & J(n, q, RIS) \\
 & & S(q+1) \\
LOOP & : & J(n, q+1, RIS) \\
 & & S(q) \\
 & & S(q+1) \\
 & & J(1, 1, LOOP) \\
RIS & : & T(q, n) \\
 & & J(1, 1, j+1)
\end{array}
$$

La routine controlla se il registro n contiene 0. In caso affermativo non c'è niente da fare. Altrimenti, con R_q che parte da 0 e R_{q+1} da 1, continua ad incrementare i due registri. Qunando R_{q+1} eguaglia R_n, avremo che R_q contiene il predecessore.

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^p \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k per ogni programma URM^p P si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f^{(k)}_{P'} = f^{(k)}_{P}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni P nel programma P. Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni, è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h + 1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione P. Supponiamo che sia l'istruzione di indice j.

$$
\begin{array}{lll}
1 & : & I_1 \\
 & & \dots \\
j & & P(n) \\
 & & \dots \\
\ell(P) & : & I_{\ell(P)}
\end{array}
$$

Costruiamo un programma P'', utilizzando un registro non riferito da P, $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

$$
\begin{array}{lll}
1 & : & I_1 \\
 & & \dots \\
j & & J(1,1,SUB) \\
 & & \dots \\
\ell(P) & : & I_{\ell(P)} \\
 & & J(1,1,END) \\
SUB & : & J(n,q,RIS) \\
 & & S(q+1) \\
LOOP & : & J(n,q+1,RIS) \\
 & & S(q) \\
 & & S(q+1) \\
 & & J(1,1,LOOP) \\
RIS & : & T(q,n) \\
 & & J(1,1,j+1) \\
END & : &
\end{array}
$$

Il programma P'' è un programma URM^p tale che $f^{(k)}_{P''} = f^{(k)}_{P}$ e contiene h istruzioni di tipo P. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f^{(k)}_{P'} = f^{(k)}_{P''}$ che quindi è il programma desiderato.

Vale anche l'inclusione opposta e quindi l'uguaglianza. Infatti l'istruzione $Z(n)$ può essere sostituita semplicemente da un'istruzione $T(q,n)$, dove q è un qualunque registro non usato dal programma e quindi a 0. Più precisamente, dato un programma URM P e un numero di argomenti fissato $k \in \mathbb{N}$, detto $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$ l'indice del primo registro non usato e quindi inizialmente a 0, sostituendo in P ogni istruzione $Z(n)$ con l'istruzione $T(q,n)$, è un programma URM^p che calcola esattamente la stessa funzione.

Esercizio 2

Definire una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $img(f) = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (dove $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$).

Soluzione: Si procede per diagonalizzazione definendo:

$$
f(x) = \begin{cases} 2^{\varphi_x(x)} & \text{se } x \in W_x \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

La funzione f è chiaramente totale. Inoltre

- f non calcolabile dato che per ogni $x \in \mathbb{N}$ risulta $f \neq \varphi_x$, ovvero f è diversa da tutte le funzioni calcolabili. Infatti, se $x \in W_x$ allora $f(x) = 2^{\varphi_x(x)} > \varphi_x(x)$, e mentre se $x \notin W_x$ si ha $f(x) = 1 \neq \varphi_x(x)$, dato che $\varphi_x(x)\uparrow$.

- Vale $img(f) = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione $img(f) \subseteq \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dato che se $x \in W_x$ allora $f(x) = 2^{\varphi_x(x)}$ e se $x \notin W_x$ allora $f(x) = 1 = 2^0$. Vale anche l'inclusione inversa. Infatti, dato un qualunque $n \in \mathbb{N}$, la funzione costante n è chiaramente calcolabile. Indicato con x un qualunque indice per tale funzione, ovvero $\varphi_x(y) = n$ per ogni y, dato che $x \in W_x = \mathbb{N}$, vale $f(x) = 2^{\varphi_x(x)} = 2^n$.

Esercizio 3

Enunciare il teorema smn ed utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione totale calcolabile $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$ valga $|W_x| = 2^x$ e $|E_x| = x + 1$.

Soluzione: Si definisce una funzione $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ come segue:

$$g(x, y) = \begin{cases} \lfloor \log_2(y + 1) \rfloor & \text{se } y < 2^x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione g è calcolabile. Infatti, $g(x, y)$, quando definito, è il massimo z tale che $2^z \leqslant y + 1$ e quindi il minimo tale che $2^{z+1} > y + 1$, ovvero

$$g(x, y) = \mu z.\, \overline{sg}(2^{z+1} \dot{-} (y + 1)) + \mu w.(y + 1 \dot{-} 2^x)$$

Pertanto per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ risulta

$$g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$$

e si dimostra che s che è la funzione cercata. Infatti

- $W_x = \{y \mid g(x, y) \downarrow\} = [0, 2^x - 1]$ e quindi $|W_x| = |[0, 2^x - 1]| = 2^x$
- $E_x = \{g(x, y) \mid 0 \leqslant y < 2^x\} = \{\lfloor \log_2(y + 1) \mid 0 \leqslant y < 2^x\} = [0, x]$ e quindi $|E_x| = |[0, x]| = x$.

Computabilità
25 gennaio 2021

Esercizio 1

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. È vero che se A è r.e. allora anche $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$ è r.e.? E se l'insieme A è ricorsivo possiamo concludere che $f^{-1}(A)$ è ricorsivo? Motivare le risposte con prove o controesempi.

Soluzione: Per la prima parte, se A è r.e allora anche $f^{-1}(A)$ lo è. Infatti, per definizione vale $x \in f^{-1}(A)$ se e solo se $f(x) \downarrow$ e $f(x) \in A$ ovvero se e solo se $sc_A(f(x)) = 1$, dove sc_A è la funzione semi-caratteristica di A, calcolabile in quanto A r.e.. Quindi possiamo scrivere la funzione semi-caratteristica di $f^{-1}(A)$ come $sc_{f^{-1}(A)}(x) = sc_A(f(x))$, calcolabile in quanto composizione di funzioni calcolabili. Quindi $f^{-1}(A)$ è r.e.

Lo stesso risultato non vale per la ricorsività. Ad esempio, la funzione semicaratteristica di K, ovvero sc_k è calcolabile, ma ${sc_k}^{-1}(\mathbb{N}) = \{x \mid sc_K(x) \in \mathbb{N}\} = \{x \mid sc_K(x) \downarrow\} = K$ non ricorsivo, nonostante $\mathbb{N}$ sia ricorsivo.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x = \overline{E_x}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) \setminus cod(f) \text{ finito}\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e $\bar{A}$ sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.
  Si consideri la funzione
  $$f(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{se } x = 0 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  Si nota che $f \in \mathcal{A}$, dato che $dom(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \overline{cod(f)} = \overline{\{0\}}$. Inoltre nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq f$ può essere in $\bar{\mathcal{A}}$, dato che se θ è finita, $dom(\theta)$ e $cod(\theta)$ sono finiti, e quindi non possono essere l'uno il complementare dell'altro, poiché il complementare di un insieme finito è infinito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- $\bar{A}$ non r.e.
  Infatti $f \notin \bar{\mathcal{A}}$, ma la funzione sempre indefinita $\varnothing \subseteq f$ e $\varnothing \in \overline{\mathcal{A}}$, dato che $dom(f) = \varnothing \neq \overline{cod(f)} = \overline{\varnothing}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che $\bar{A}$ non è r.e.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \setminus E_x \text{ finito}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) = \overline{cod(f)}\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e $\bar{A}$ sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.
  Indicato con $\mathbf{1}$ la costante 1, bvale che $\mathbf{1} \notin \mathcal{A}$, dato che $dom(\mathbf{1}) \setminus cod(\mathbf{1}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ è infinito. Inoltre la funzione sempre indefinita $\emptyset \subseteq \mathbf{1}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$, dato che $dom(f) \setminus cod(f) = \emptyset$ finito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- $\bar{A}$ non r.e.
  Si osserva che $\mathbf{1} \in \bar{\mathcal{A}}$, ma nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq \mathbf{1}$ può essere in $\bar{\mathcal{A}}$, dato che se θ è finita, $dom(\theta)$ e $cod(\theta)$ sono finiti, e quindi anche $dom(\theta) \setminus cod(\theta)$ è finito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che $\bar{A}$ non è r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y.\, (x \leqslant y \leqslant 2x \ \wedge\ y \in W_x)\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = 1$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x)$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B. Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto esiste certamente y, con $s(x) \leqslant y \leqslant 2s(x)$ tale che $y \in W_{s(x)}$, ad esempio $y = s(x)$. Quindi $s(x) \in B$.

- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto non può esistere y, con $s(x) \leqslant y \leqslant 2s(x)$ tale che $y \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x, (w)_1, (w)_2) \ \wedge\ (x \leqslant (w)_1 \leqslant 2x)),$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare $\bar{B}$ non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi $\bar{B}$ non è neppure ricorsivo.

Computabilità
9 febbraio 2021

Esercizio 1

Può esistere una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che la funzione $g(x) = \Pi_{y<x} f(y)$ sia calcolabile? Motivare le risposta fornendo un esempio di tale funzione oppure dimostrando che non esiste.

Soluzione: Si consideri la funzione caratteristica di K, ovvero $\chi_K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è totale e non calcolabile. Sia $x_0 = \min\{x \mid \chi_K(x) = 0\} = \min\{x \mid x \in \bar{K}\}$. Si osservi che x_0 è ben definito, dato che $\bar{K} \neq \emptyset$.

A questo punto se $g(x) = \Pi_{y<x} f(y)$ è facile vedere che g è calcolabile, dato che

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < x_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = sg(x_0 \dot{-} x)$$

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x \cap E_x| = 2\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid |dom(f) \cap cod(f)| = 2\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e $\bar{A}$ sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.
  Indicato con id la funzione identità, vale che $id \notin \mathcal{A}$, dato che $dom(id) \cap cod(id) = \mathbb{N}$ non ha cardinalità 2. Inoltre la funzione

  $$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  è finita, $\theta \subseteq id$ e inoltre $dom(\theta) = cod(\theta) = \{0, 1\}$ quindi $|dom(\theta) \cap cod(\theta) = |\{0, 1\}| = 2$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- $\bar{A}$ non r.e.
  Si osserva che, se θ è la funzione del punto precedente, $\theta \notin \bar{\mathcal{A}}$, e la funzione sempre indefinita $\emptyset$ soddisfa $\emptyset] \subseteq \theta$ e $|dom(\emptyset) \cap cod(\emptyset)| = |\emptyset| = 0$, quindi $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che $\bar{A}$ non è r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x \in E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x,y) = y$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x,y) = sc_k(x) \cdot y$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B. Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $E_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto certamente $3 * s(x) \in E_{s(x)}$. Quindi $s(x) \in B$.

- Se $x \notin K$ allora $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $E_{s(x)} = \varnothing$ e pertanto certamente $3 * s(x) \notin E_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(S(x,(w)_1, 3x, (w)_2))),$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare $\bar{B}$ non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi $\bar{B}$ non è neppure ricorsivo.

Computabilità
7 settembre 2021

Esercizio 1

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Definire la nozione di riducibilità $A \leqslant_m B$. Si dimostri che $A \subseteq \mathbb{N}$ è r.e. se e solo se $A \leqslant_m K$.

Soluzione: Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Si scrive $A \leqslant_m B$ se esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$, $x \in A$ sse $f(x) \in B$.

L'insieme K è noto essere r.e. Quindi se $A \leqslant_m K$, per riduzione anche A è r.e. Esplicitamente, si può scrivere la funzione caratteristica di A come $sc_A = sc_K \circ f$. Quindi risulta calcolabile per composizione.

Viceversa, se A r.e., per definizione la funzione semi-caratteristica sc_A è calcolabile. Si consideri dunque la funzione $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definita da $g(x, y) = sc_A(x)$. Questa è chiaramente calcolabile e quindi per il teorema smn, esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = sc_A(x)$$

È facile vedere che s è funzione di riduzione per $A \leqslant_m K$. Infatti,

- se $x \in A$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = sc_A(x) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x) \in W_{s(x)} = \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \in K$.
- se $x \notin A$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = sc_A(x) = \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x) \notin W_{s(x)} = \emptyset$. Pertanto $s(x) \notin K$.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x + 1 \in E_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m A$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = y$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti, ovvero $g(x, y) = y * sc_K(x)$. Questa è chiaramente calcolabile e quindi per il teorema smn, esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

È facile vedere che s è funzione di riduzione per $K \leqslant_m A$. Infatti,

- se $x \in K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x) + 1 \in E_{s(x)} = \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \in A$.

- se $x \notin K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x)+1 \notin E_{s(x)} = \emptyset$. Pertanto $s(x) \notin A$.

L'insieme A è r.e., infatti

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.S(x,(w)_1, x+1,(w)_2))$$

quindi $\bar{A}$ non r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cup E_x = \mathbb{N}\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che B è saturato, dato che $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \mid dom(f) \cup cod(f) = \mathbb{N}\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude

- B non r.e.. Infatti $id \in \mathcal{B}$, visto che $dom(id) \cup cod(id) = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Inoltre, nessuna funzione finita $\theta \subseteq id$ può appartenere a $\mathcal{B}$, dato che $dom(\theta) \cup cod(\theta)$, unione di insiemi finiti, è finito e quindi certamente diverso da $\mathbb{N}$, qualunque sia θ. Pertanto, per Rice-Shapiro si conclude che B non è r.e.

- $\bar{B}$ non r.e., dato che, come visto sopra, $id \notin \bar{\mathcal{B}}$, ma $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ e $\emptyset \subseteq id$ è una parte finita di id. Pertanto, per Rice-Shapiro si conclude che $\bar{B}$ non è r.e.

Computability
Jan 19 2022

Exercise 1

a. Provide the definition of reducibility, i.e., given sets $A, B \subseteq \mathbb{N}$ define what it means that $A \leqslant_m B$.

b. Show that if A is not recursive and $A \leqslant_m B$ then B is not recursive.

c. Show that if A is recursive then $A \leqslant_m \{1\}$.

Solution:

1. Given sets $A, B \subseteq \mathbb{N}$, we say that $A \leqslant_m B$ if there exists a total computable function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $x \in \mathbb{N}$, it holds $x \in A$ iff $f(x) \in B$.

2. If A is not recursive and $A \leqslant_m B$ then B is not recursive. In fact, let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be the reduction function. The characteristic function of A can be written as $\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$. If B were recursive, i.e., χ_B computable, then $\chi_A = \chi_B \circ f$ would be computable, i.e., A would be recursive. Hence B is not recursive.

3. Let χ_A be the characteristic function of A, i.e.,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   If A is recursive, by definition such function is computable and it is total. It is immediate to see that it is a reduction function for $A \leqslant_m \{1\}$ since $x \in A$ iff $\chi_A(x) = 1$ iff $\chi_A(x) \in \{1\}$.

Exercise 2

Is there a non-computable total function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $f(x) = f(x+1)$ on infinitely many inputs x, i.e., such that the set $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = f(x+1)\}$ is infinite? Provide an example or show that such a function cannot exist.

Solution: Yes, such a function exists. For instance one can define $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is not a multiple of 3 or } x \notin W_x \\ \varphi_{x/3}(x) + 1 & \text{if } x \text{ is a multiple of 3 and } x \in W_x \end{cases}$$

Observe that

- The function f is total by construction.
- For all n, if we let $x = 3n + 1$, since neither x nor $x + 1$ are multiple of 3, $f(x) = f(x + 1) = 0$.
- The function is not computable, since for all $x \in \mathbb{N}$, $f \neq \varphi_x$. In fact if $\varphi_x(3x) \downarrow$ then $f(3x) = \varphi_x(3x) + 1 \neq \varphi_x(3x)$. If instead, $\varphi_x(3x) \uparrow$ then $f(3x) = 0 \neq \varphi_x(3x)$.

A more elegant, but less immediate solution is to take $f = \chi_K$, the characteristic function of the halting set K, which is total and not computable. It is true but not obvious that $\chi_k(x) = \chi_K(x + 1)$ for infinitely many x. Assume by contradiction that, instead, $D = \{x \mid \chi_K(x) = \chi_k(x + 1)\}$ is finite and let $d = \max D$. This means that for all $x > d$ it holds that $\chi_K(x) \neq \chi_K(x + 1)$ and since χ_K can assume only values 0 and 1, $\chi_K(x + 1) = \overline{sg}(\chi_K(x))$.

Now, let $v_x = \chi_K(x)$ for $x \in \{0, \dots, d\}$. Moreover, consider the function $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by primitive recursion

$$\begin{array}{ll} g(0) & = v_d \\ g(y + 1) & = \overline{sg}(g(y)) \end{array}$$

Then we have that

$$\chi_k(x) = \begin{cases} v_x & \text{if } x \leqslant d \\ f(x \dot{-} (d + 1)) & \text{otherwise} \end{cases} = \Pi_{i=1}^{k}(v_i \cdot sg(|x - i|) + sg(x \dot{-} d)f(x \dot{-} (d + 1))$$

Exercise 3

Say that a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is quasi-total if it is undefined on a finite number of inputs, i.e., $\overline{dom(f)}$ is finite. Classify the set $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ quasi-total}\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that A is saturated, since it can be expressed as $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid f \text{ quasi-total}\}$.

Hence, by Rice-Shapiro's theorem, we conclude that A and $\bar{A}$ are not r.e., and thus they are not recursive. More in detail:

- A is not r.e.
  The identity $id \in \mathcal{A}$ and for all $\theta \subseteq id$, θ finite, clearly $\theta \notin \mathcal{A}$. In fact, $dom(\theta)$ is finite and thus $\overline{dom(\theta)}$ is infinite and thus θ is not quasi-total. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that A is not r.e.

- $\bar{A}$ is not r.e.
  In fact, $id \notin \bar{\mathcal{A}}$, but the always undefined function $\theta = \varnothing \subseteq id$ and $\theta \in \overline{\mathcal{A}}$, since $dom(\theta) = \varnothing$ and thus $\overline{dom(\theta)} = \mathbb{N}$ is infinite. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that $\bar{A}$ is not r.e.

Exercise 4

Classify the set $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > 2x.\ y \in E_x\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set B is not recursive since $K \leqslant_m B$. In order to prove this fact, let us consider the function $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ defined, by

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

The function is computable since $g(x,y) = sc_k(x)$. Hence, by smn-theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. We next argue that s is a reduction function for $K \leqslant_m B$. In fact

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence, if we set $y = 2\,s(x) + 1 > 2\,s(x)$ we have $\varphi_{s(x)}(y) = y = 2\,s(x) + 1$. Hence $2\,s(x) + 1 \in E_{s(x)}$ and thus $s(x) \in B$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) =\uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $E_{s(x)} = \varnothing$ and therefore there cannot be $y > 2x$ such that $yE_{s(x)}$. Hence $s(x) \notin B$.

The set B is r.e., in fact its semi-characteristic function is

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(S(x, (w)_1, x + 1 + (w)_2, (w)_3)),$$

In fact the minimalisation search for a input $(w)_1$ for the machine x, such that in some number $(w)_3$ of steps, the machine stops providing as an output $x+1+(w)_2$ for some $(w)_2$. When $(w)_2$ ranges over the naturals, $x + 1 + (w)_2$ ranges over all values greater then x.

The semi-characteristic function is computable, since it is the minimalisation of computable functions, hence B is r.e.

Since B is r.e. and not recursive, its complement $\bar{B}$ is not r.e. (otherwise both B and $\overline{B}$ would be recursive). Thus $\bar{B}$ is not recursive.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
Feb 04 2022

Exercise 1

a. Provide the definition of recursive set.

b. Provide the definition of recursively enumerable set.

c. Show that if A and $\overline{A}$ are recursively enumerable then A is recursive.

Solution:

1. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is recursive if the characteristic function $\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is recursively enumerable if the semi-characteristic function $sc_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Let sc_A and $sc_{\bar{A}}$ be the semi-characteristic function of A and $\bar{A}$ respectively, which are computable by hypothesis.

Therefore also

$$1 \dot{-} sc_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable. Let $e_1, e_0 \in \mathbb{N}$ be such that $\varphi_{e_1} = sc_A$ and $\varphi_{e_0} = 1 \dot{-} sc_{\bar{A}}$. Then $\chi_A(x) = (\mu w.S(e_0, x, (w)_1, (w)_2) \vee S(e_1, x, (w)_1, (w)_2))_1$. This is computable and thus A is recursive.

Exercise 2

Is there a non-computable total function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $img(f) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$? (recall that $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$) Provide an example or show that such a function cannot exist.

Solution: Yes, such a function exists. For instance one can define $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{if } x \in W_x \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Observe that

- The function f is total by construction.
- The function is not computable, since for all $x \in \mathbb{N}$, $f \neq \varphi_x$. In fact if $\varphi_x(x) \downarrow$ then $f(x) = \varphi_x(x) + 1 \neq \varphi_x(x)$. If instead, $\varphi_x(x) \uparrow$ then $f(x) = 1 \neq \varphi_x(x)$.
- $img(f) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
  We prove separately the two inclusions. Clearly $img(f) \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0\}$. In fact, for all $x \in \mathbb{N}$, we have $f(x) = 1$ if $\varphi_x(x) \uparrow$ and $\varphi_x(x) + 1$ when $\varphi_x(x) \downarrow$. Thus $f(x) > 0$ i.e., $f(x) \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Conversely, also $\mathbb{N}\backslash\{0\} \subseteq img(f)$. In fact, for all $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, take any index e of the constant $n - 1$. Then $f(e) = \varphi_e(e) + 1 = n - 1 + 1 = n$. Thus $n \in img(f)$.

Exercise 3

Classify the set $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in W_x \cup E_x\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is not recursive since $K \leqslant_m A$. In order to prove this fact, let us consider the function $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ defined, by

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

The function is computable since $g(x, y) = sc_k(x)$. Hence, by smn-theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. We next argue that s is a reduction function for $K \leqslant_m A$. In fact

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \mathbb{N}$ and thus $s(x) \in W_{s(x)} \cup E_{s(x)} = \mathbb{N}$. Hence $s(x) \in A$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) =\uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \varnothing$ and therefore $s(x) \notin E_{s(x)} \cup E_{s(x)} = \varnothing$. Hence $s(x) \notin A$.

The set A is r.e., in fact its semi-characteristic function is

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x, x, (w)_1) \vee S(x, (w)_2, x, (w)_1)),$$

In fact the minimalisation succeeds when a number of steps is found such that the machine x over x stops, i.e., $x \in W_x$, or the machine x over some input stops and produces x as an output.

The semi-characteristic function is computable, since it is the minimalisation of computable functions, hence A is r.e.

Since A is r.e. and not recursive, its complement $\bar{A}$ is not r.e. (otherwise both A and $\overline{A}$ would be recursive). Thus $\bar{A}$ is not recursive.

Exercise 4

Classify from the point of view of recursiveness the set $B = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x = E_x \cap \mathbb{P}\}$ where $\mathbb{P}$ is the set of even numbers, i.e., establish whether B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that B is saturated, since it can be expressed as $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, where $\mathcal{B} = \{f \mid dom(f) = cod(f) \cap \mathbb{P}\}$.

Hence, by Rice-Shapiro's theorem, we conclude that B and $\bar{B}$ are not r.e., and thus they are not recursive. More in detail:

- B is not r.e.
  The identity $id \notin \mathcal{B}$, since $dom(id) = \mathbb{N} \neq cod(id) \cap \mathbb{P} = \mathbb{N} \cap \mathbb{P} = \mathbb{P}$. Moreover the always undefined function $\theta = \varnothing \subseteq id$ and $\theta \in \mathcal{B}$, since $dom(\theta) = \varnothing = cod(\theta) \cap \mathbb{P} = \varnothing \cap \mathbb{P}$. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that B is not r.e.

- $\bar{B}$ is not r.e.
  In fact, the function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, defined by

  $$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } x = 2 \\ 2 & \text{if } x = 4 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

  Then $f \in \mathcal{B}$ since $dom(f) = \{2, 4\} = cod(f) \cap \mathbb{P} = \{2, 4\} \cap \mathbb{P}$. Therefore $f \notin \overline{\mathcal{B}}$.

  We can consider $\theta \subseteq f$ finite

  $$\theta(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } x = 2 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

  We have $\theta \notin \mathcal{B}$, i.e., $\theta \in \overline{\mathcal{B}}$ since $dom(\theta) = \{2\} \neq cod(\theta) \cap \mathbb{P} = \{4\} \cap \mathbb{P} = \{4\}$. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that B is not r.e.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
June 17, 2022

Exercise 1

a. Provide the definition of a decidable predicate.

b. Provide the definition of a semi-decidable predicate.

c. Show that $P(\vec{x})$ is semi-decidable if and only if there exists a decidable predicate $Q(\vec{x}, y)$ such that $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$.

Solution:

1. A predicated $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A predicated $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Assume that $P(\vec{x})$ is semi-decidable. Then $\chi_P(\vec{x})$ is computable. Let $e \in \mathbb{N}$ be an index for such function, i.e., $\chi_P = \varphi_e^{(k)}$. Then we have that $P(\vec{x})$ holds iff $sc_P(\vec{x}) = 1$ iff $sc_P(\vec{x}) \downarrow$ iff $\exists y.\ H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$. Hence, if we let $Q(\vec{x}, y) = H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$, we have

$$P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$$

and $Q(\vec{x}, y)$ is decidable, since $H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$ is so.

Assume now that $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$ with $Q(\vec{x}, y)$ decidable. Let $\chi_Q : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ be its computable characteristic function.

Then $sc_A(\vec{x}) = \mu y. |\chi_Q(\vec{x}, y) - 1|$ is computable, i.e., $P(\vec{x})$ is semi-decidable.

$$1 \dot{-} sc_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable. Let $e_1, e_0 \in \mathbb{N}$ be such that $\varphi_{e_1} = sc_A$ and $\varphi_{e_0} = 1 \dot{-} sc_{\bar{A}}$. Then $\chi_A(x) = (\mu w.S(e_0, x, (w)_1, (w)_2) \vee S(e_1, x, (w)_1, (w)_2))_1$. This is computable and thus A is recursive.

Exercise 2

Define the class of primitive recursive functions. Using only the definition show that the function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined below is primitive recursive

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is even} \\ 0 & \text{if } x \text{ is odd} \end{cases}$$

Solution: The class of primitive recursive functions is the least class of functions $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_k (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N})$ containing the base functions (zero, successor, projections) and and closed under composition and primitive recursion.

In order to show that f is primitive recursive observe that it can be defined as

$$\begin{cases} f(0) & = 1 = succ(0) \\ f(y+1) & = \overline{sg}(y) \end{cases}$$

where $\overline{sg}$ is the complemented sign, which can be defined as

$$\begin{cases} \overline{sg}(0) & = 1 = succ(0) \\ \overline{sg}(y+1) & = 0 \end{cases}$$

Exercise 3

Study the recursiveness of the set $A = \{x \mid \varphi_x(y+x)\downarrow \text{ for some } y \geqslant 0\}$, i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set $A = \{x \mid \varphi_x(y+x)\downarrow \text{ for some } y \geqslant 0\}$ is not recursive because $K \leqslant A$. In order to prove this fact, let us consider the function $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ defined, by

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

The function is computable since $g(x,y) = sc_K(x)$. Hence, by the smn-theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. We next argue that s is a reduction function for $K \leqslant_m A$. In fact

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = 1$ for all $y \in \mathbb{N}$. In particular, $\varphi_{s(x)}(0 + s(x)) \downarrow$. Hence $s(x) \in A$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $\varphi_{s(x)}(y + s(x)) \uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $s(x) \notin A$.

The set A is r.e., since it semi-characteristic function

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu(y,t).H(x, x+y, t))$$

is computable.

Therefore, $\bar{A}$ is not r.e.

Exercise 4

Let $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$. Study the recursiveness of A, i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is saturated, since $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : \mathit{dom}(f) \cap \mathit{cod}(f) \neq \emptyset\}$. It is not empty (since $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$) and it is not the entire $\mathbb{N}$ (since $\emptyset \notin \mathcal{A}$), thus by Rice's theorem A is not recursive. Furthermore,A is r.e. since

$$\begin{array}{rcl} sc_A(x) & = & \mathbf{1}(\mu(y,z,t).H(x,y,t) \wedge S(x,z,y,t)) \\ & = & \mathbf{1}(\mu w.H(x,(w)_1,(w)_3) \wedge S(x,(w)_2,(w)_1,(w)_3) \end{array}$$

Therefore $\bar{A}$ is not is r.e.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

COMPUTABILITY (19/12/2023)

A typical exam...

Computability
Jan 19 2022

Exercise 1

definitions
proofs
small variations

a. Provide the definition of reducibility, i.e., given sets $A, B \subseteq \mathbb{N}$ define what it means that $A \leqslant_m B$.

b. Show that if A is not recursive and $A \leqslant_m B$ then B is not recursive.

c. Show that if A is recursive then $A \leqslant_m \{1\}$.

constructions of PR / R
diagonalisation
smn

Exercise 2

Is there a non-computable total function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $f(x) = f(x+1)$ on infinitely many inputs x, i.e., such that the set $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = f(x+1)\}$ is infinite? Provide an example or show that such a function cannot exist.

classify sets (recursive, r.e.), saturatedness

Exercise 3

Say that a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is quasi-total if it is undefined on a finite number of inputs, i.e., $\overline{dom(f)}$ is finite. Classify the set $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ quasi-total}\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Exercise 4

Classify the set $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > 2x.\ y \in E_x\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

$\boxed{\text{ORAL EXAM}}$: optional, needed for distinction (lode)
focused on theory / proofs
range: +/- 4

Exercise 1

a. Provide the definition of reducibility, i.e., given sets $A, B \subseteq \mathbb{N}$ define what it means that $A \leqslant_m B$.

b. Show that if A is not recursive and $A \leqslant_m B$ then B is not recursive.

c. Show that if A is recursive then $A \leqslant_m \{1\}$.

(a) We say

$$A \leq_m B$$

if there exists a total computable function $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s.t. for all $x \in \mathbb{N}$

$$x \in A \quad \text{if and only if} \quad f(x) \in B$$

(b) We prove the counternominal, i.e. if $A \leq_m B$ and B recursive then A is recursive

Assume $A \leq_m B$ and let $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be the reduction function i.e.

$$\forall x \in \mathbb{N} \qquad x \in A \text{ iff } f(x) \in B \qquad (*)$$

assume B recursive, i.e.

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{is computable}$$

observe that

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \overset{(*)}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) \in B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \chi_B(f(x))$$

since χ_A is the composition of computable functions, it is computable

$\Rightarrow A$ is recursive.

(c) A is recursive $\Rightarrow$ $A \leq_m \{1\}$

if A is recursive, then

$$\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable and total

$$x \in A \quad \text{iff} \quad \chi_A(x) = 1 \quad \text{iff} \quad \chi_A(x) \in \{1\}$$

hence χ_A is the reduction function for $A \leq_m \{1\}$

Extra question: Does the converse hold?

$A \leq_m \{1\}$ then A is recursive

yes, since $\{1\}$ is finite, hence it is recursive.

(or, alternatively: let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be the reduction function for $A \leq_m \{1\}$

Then $\forall x$

$$x \in A \quad \text{iff} \quad f(x) \in \{1\} \quad \text{iff} \quad f(x) = 1$$

thus

$$\chi_A(x) = \overline{sg}(|f(x) - 1|) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

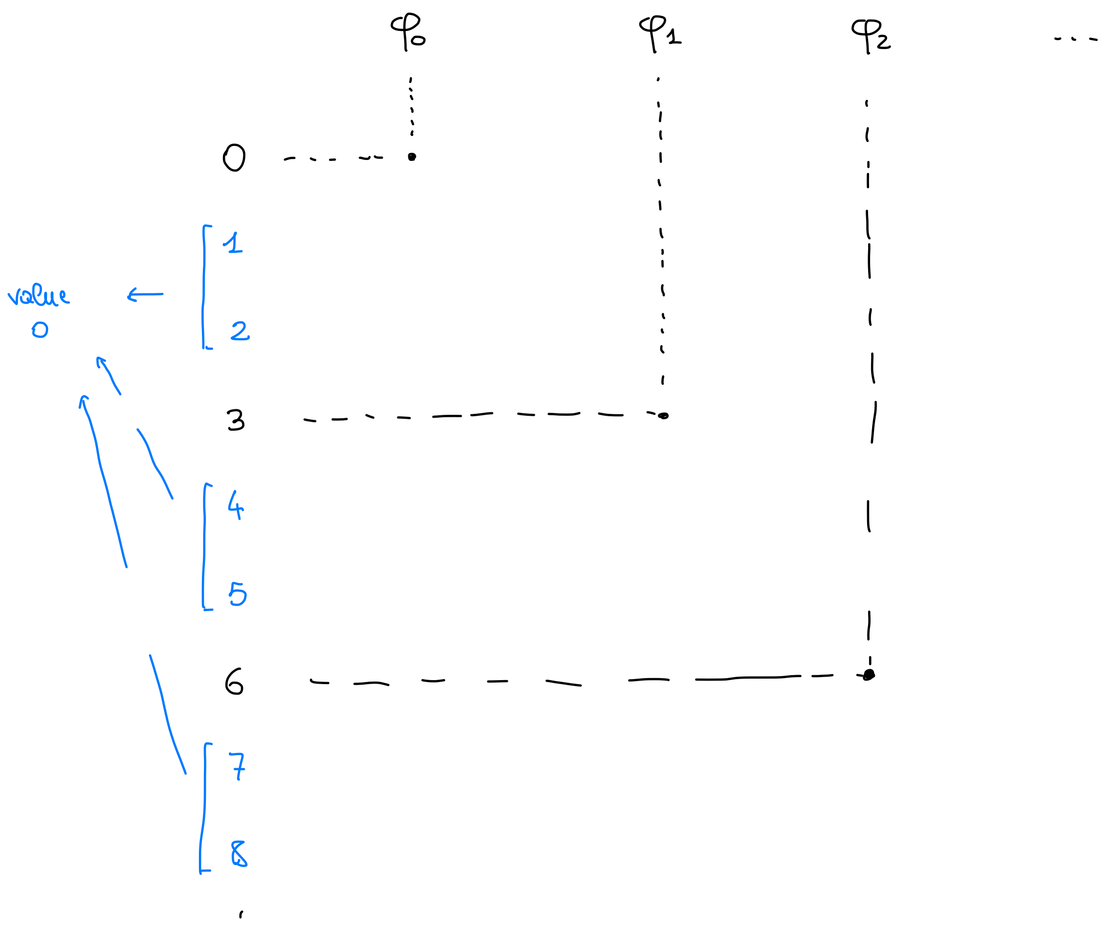
$$= \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Exercise 2

Is there a non-computable total function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $f(x) = f(x+1)$ on infinitely many inputs x, i.e., such that the set $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = f(x+1)\}$ is infinite? Provide an example or show that such a function cannot exist.

<u>idea</u> :

(1)



$$g(x) = \begin{cases} \varphi_{\underbrace{y}_{x/3}}(x) + 1 & \text{if } x = 3y \text{ for some } y \text{ and } \varphi_y(x)\downarrow \\ 0 & \text{if } (x = 3y \text{ for some } y \text{ and } \varphi_y(x)\uparrow) \\ & \text{or } x \neq 3y \ \forall y \end{cases}$$

note that g is

→ total

→ not computable since $\forall y \quad \varphi_y(3y) \neq g(3y)$

- if $\varphi_y(3y)\downarrow$ then $g(3y) = \varphi_y(3y) + 1$
- if $\varphi_y(3y)\uparrow$ then $g(3y) = 0$

→ there are infinitely many x s.t. $g(x) = g(x+1)$

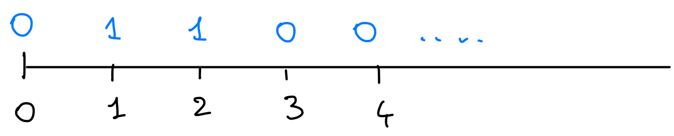
$\forall y$ if $x = 3y+1$

neither x nor $x+1$ are multiples of 3

hence $g(x) = g(x+1) = 0$

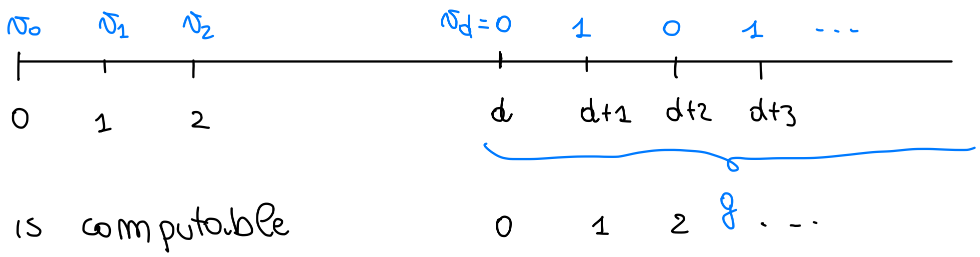
② alternative solution

Can I use χ_K ?



OBSERVATION : let $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a function s.t. $cod(f) = \{0,1\}$

and there is $d \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall x > d$ $f(x) \neq f(x+1)$



Then f is computable

In fact, let

$$f(x) = v_x \qquad x \leq d \qquad \text{and} \qquad v_d = 0$$

and define $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(y+1) = \overline{sg}(g(y)) \end{cases} \qquad \text{computable}$$

Then

$$f(x) = \prod_{i=0}^{d-1} \overline{sg}(|x-i|) \cdot v_i + g(x \dot{-} d)$$

computable !

Hence the desired function in the exercise can be $f = \chi_K$

- χ_K total
- χ_K non computable
- $\forall d \quad \exists x \geq d \quad$ s.t. $\chi_K(x) = \chi_K(x+1)$

  (otherwise it would be computable)

  $\Rightarrow \quad \{x \in \mathbb{N} \mid \chi_K(x) = \chi_K(x+1)\}$ is infinite

Exercise 3

Say that a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is quasi-total if it is undefined on a finite number of inputs, i.e., $\overline{dom(f)}$ is finite. Classify the set $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ quasi-total}\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

conjecture : A not r.e.

$\bar{A}$ not r.e.

A is saturated

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A} \}$$

$$\mathcal{A} = \{ f \mid f \text{ is quasi total} \} = \{ f \mid \overline{dom(f)} \text{ finite} \}$$

* A is not r.e.

observe that $id \in \mathcal{A}$ since $\overline{dom(id)} = \overline{\mathbb{N}} = \emptyset$ is finite

and for all $\vartheta \subseteq id$, ϑ finite $\vartheta \notin \mathcal{A}$ since $dom(\vartheta)$ is finite

$\Downarrow$

$\overline{dom(\vartheta)}$ infinite

hence A is not r.e., by Rice-Shapiro

* $\bar{A}$ is not r.e. ($\bar{\mathcal{A}} = \{ f \mid f \text{ not quasi-total} \}$
$= \{ f \mid \overline{dom(f)} \text{ infinite} \}$)

note that $id \notin \bar{\mathcal{A}}$

and $\vartheta = \emptyset \subseteq id$ finite and $\vartheta \in \bar{\mathcal{A}}$

since $\overline{dom(\vartheta)} = \bar{\emptyset} = \mathbb{N}$ infinite

hence, by Rice-Shapiro, $\bar{A}$ is not r.e.

Exercise 4

Classify the set $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > 2x.\ y \in E_x\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

conjecture : $\boxed{B \text{ is r.e. , not recursive}}$

$\Downarrow$

$\bar{B}$ not r.e. (otherwise B recursive)

and thus $\bar{B}$ not recursive

* <u>B is r.e.</u>

in fact

$y = 2x+1+d$

$$sc_B(x) = 1\!\!1\left(\mu(z,y,t).\ \left(S(x,z,y,t) \wedge y > 2x\right)\right)$$

$$= 1\!\!1\left(\mu(z,d,t).\ S(x,z,2x+1+d,t)\right)$$

$$= 1\!\!1\left(\mu w.\ S(x,(w)_1,2x+1+(w)_2,(w)_3)\right)$$

$$= 1\!\!1\left(\mu w.\ |\chi_S(x,(w)_1,2x+1+(w)_2,(w)_3) - 1|\right)$$

computable, hence B is r.e.

* <u>B is not recursive</u>

We show that $K \leq_m B$

we need a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s.t.

$$x \in K \quad \text{iff} \quad s(x) \in B$$

$\exists z.\ \varphi_{s(x)}(z) > 2s(x)$

define

$$g(x,z) = \begin{cases} z & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= z \cdot sc_K(x)$$

hence g is computable

By the smn theorem there is $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total and computable s.t. $\forall x, z$

$$\varphi_{s(x)}(z) = g(x, z) = \begin{cases} z & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

We claim that s is the reduction function $K \leq_m B$

* if $x \in K$ then $s(x) \in B$

  let $x \in K$. Then $\varphi_{s(x)}(z) = z \quad \forall z$

  hence $\varphi_{s(x)}(2s(x)+1) = 2s(x)+1 > 2s(x)$

  thus $s(x) \in B$

* if $x \notin K$ then $s(x) \notin B$

  let $x \notin K$. Hence

  $\varphi_{s(x)}(z) \uparrow \quad \forall z$

  Thus we have $E_{s(x)} = \emptyset$, hence there is no $y \in E_{s(x)}$ s.t. $y > 2s(x)$

  hence $s(x) \notin B$

Hence B is not recursive.

Since B is r.e. and not recursive, then $\overline{B}$ not r.e.

(otherwise if $B, \overline{B}$ r.e. we would have B recursive)

In turn, this implies that $\overline{B}$ not recursive.

* EXTRA QUESTION : Is $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > 2x.\ y \in E_x\}$ saturated ?

Apparently it is not since it "refers to x in the property"

Let's prove it by showing that there are

$$e \in B \qquad e' \notin B \qquad \text{with } \varphi_e = \varphi_{e'}$$

We show that there is $e \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\varphi_e(x) = 2e + 1$$

Define

$$g(m, x) = 2m + 1$$

computable, hence by smn theorem there is $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total and computable s.t. $\forall m, x$

$$\varphi_{s(m)}(x) = g(m, x) = 2m + 1$$

Since s is total and computable, there is $e \in \mathbb{N}$ st.

$$\varphi_{s(e)} = \varphi_e$$

Thus

$$\varphi_e(x) = \varphi_{s(e)}(x) = 2e + 1$$

Hence

$$e \in B \qquad \text{since } \underset{\substack{\vee \\ 2e}}{2e+1} \in E_e$$

Now, there are infinitely many indexes for φ_e, thus we can take $e' \in \mathbb{N}$ $e' > e$ s.t. $\varphi_e = \varphi_{e'}$

Note that $E_{e'} = E_e = \{2e + 1\}$ and $2e + 1 < 2e'$

thus $e' \notin B$

Summing up $e, e' \in \mathbb{N}$ $e \in B$, $e' \notin B$ $\varphi_e = \varphi_{e'}$

$\Rightarrow$ B is not saturated

Computability
July 21, 2023

Exercise 1

a. Provide the definition of a recursive set.

b. Provide the definition of a recursively enumerable (r.e.) set.

c. Show that given $A, B \subseteq \mathbb{N}$, if A is recursive and $B = \{z^2 : z \in A\}$ then B is recursive. Does this generalise to r.e. sets? I.e., is it the case that if A r.e. then $B = \{z^2 : z \in A\}$ is r.e.?

Solution:

1. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is recursive if the characteristic function $\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   is computable.

2. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is r.e. if the semi-characteristic function $sc_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

   is computable.

3. Let $A, B \subseteq \mathbb{N}$ with A recursive and let $B = \{z^2 : z \in A\}$. Just observe that if $x = z^2$ then $z \leqslant x$ in a way that we can search for z using x as a bound. Formally the characteristic function of B is

$$\chi_B(x) = \overline{sg}(\Pi_{z \leqslant x} |z^2 - x|).$$

   and it is clearly computable.

   The above generalises to r.e. sets. In fact, assume A r.e. and let $sc_A = \varphi_e$ for some index $e \in \mathbb{N}$. Then if $B = \{z^2 : z \in A\}$, in order to establish that $x \in B$ we have to find $z \in A$ such that $z^2 = x$. The fact that $z \in A$ is witnessed by the existence of a number of steps t such that $H(e, z, t)$. Formally, the semicharacteristic function of B can be

$$
\begin{aligned}
sc_B(x) &= \mathbf{1}(\mu(z,t).H(e,z,t) \wedge (z^2 = x)) = \\
&= \mathbf{1}(\mu w.H(e,(w)_1,(w)_2) \wedge (((w)_1)^2 = x))
\end{aligned}
$$

and it is clearly computable.

Exercise 2

State the s-m-n theorem and use it to prove that there exists a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $|W_{s(x)} \setminus E_{s(x)}| = 2x$.

Solution: We can define, for instance,

$$f(x,y) = y + 2x$$

which is computable. Seen as a function of y, it has domain $\mathbb{N}$ and as codomain $\{y \mid y \geqslant 2x\}$, hence the set diffence is $\{y \mid y < 2x\}$, which has cardinality $2x$. Then one can use the smn theorem to get function $s(x)$.

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \mid E_x = W_x \setminus \{0\}\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is saturated since it can be expressed as $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ with $\mathcal{A} = \{f \mid cod(f) = dom(f) \setminus \{0\}\}$.

By Rice-Shapiro's theorem:

- A is not r.e.
  In fact the identity $id \notin \mathcal{A}$, since $cod(id) = \mathbb{N} \neq dom(id) \setminus \{0\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. If instead, we consider the function which is always undefined, $\theta = \emptyset$, then $\theta \subseteq id$, θ finite and $cod(\theta) = \emptyset = dom(\theta) \setminus \{0\}$, thus $\theta \in \mathcal{A}$.

- $\bar{A}$ is not r.e.
  In fact $\mathbf{1} \notin \overline{\mathcal{A}}$, since $cod(\mathbf{1}) = \{1\} \neq dom(\mathbf{1}) \setminus \{0\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. If instead, we consider θ

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leqslant 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then $\theta \subseteq \mathbf{1}$, θ finite and $cod(\theta) = \{1\} = dom(\theta) \setminus \{0\}$, thus $\theta \in \overline{\mathcal{A}}$.

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ kx \in W_x\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set B is not recursive since $K \leqslant_m B$. To show this one can consider the function

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

This function is computable, given that $g(x,y) = sc_k(x)$. So by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. It is easy to show that s is a reduction function of K to B. Indeed

- If $x \in K$ then $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ for each $y \in \mathbb{N}$. So $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ and therefore certainly, for $k = 0$, it holds $k * s(x) = 0 \in W_{s(x)}$. Thus $s(x) \in B$.
- If $x \notin K$ then $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ for every $y \in \mathbb{N}$. So $W_{s(x)} = \varnothing$ and therefore certainly $k * s(x) \notin W_{s(x)}$ for all k. Thus $s(x) \notin B$.

Moreover B is r.e., since its characteristic function is computable. In fact it can be expressed as:

$$\begin{aligned} sc_B(x) &= \mathbf{1}(\mu(k,t).H(x, k \cdot x, t)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.H(x, (w)_1 \cdot x, (w)_2)) \end{aligned}$$

Since B is r.e. and not recursive, necessarily $\bar{B}$ is not r.e. (and hence not recursive).

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
September 11, 2023

Exercise 1

a. Provide the definition of reduction between sets, i.e., given $A, B \subseteq \mathbb{N}$ define $A \leqslant_m B$.

b. Show that if B is r.e. and $A \leqslant B$ then A is r.e.

c. Is it possible to have $A, B \subseteq \mathbb{N}$ with A infinite and B finite such that $A \leqslant_m B$. Give an example or prove that it is not possible.

Solution:

1. Given $A, B \subseteq \mathbb{N}$ we write $A \leqslant_m B$ if there is a reduction function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, total and computable and such that for all $x \in \mathbb{N}$, $x \in A$ iff $f(x) \in B$.

2. Given $A, B \subseteq \mathbb{N}$ with $A \leqslant_m B$, let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be the reduction function. Assume that B is r.e., i.e., its semi-characteristic function $sc_B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

   is computable.

   Then we simply observe that the semi-characteristic function of A can be defined as $sc_A(x) = sc_B(f(x))$. Since it is the composition of computable functions, it is computable. This shows that A is r.e.

3. There can be $A, B \subseteq \mathbb{N}$ with A infinite and B finite such that $A \leqslant_m B$. Just take $A = \mathbb{N}$ and $B = \{0\}$. It is immediate to see that the constant 0 is a reduction function for $A \leqslant_m B$.

Exercise 2

Define the class of primitive recursive functions. Using only the definition show that the function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined below is primitive recursive

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leqslant y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Solution: The class of primitive recursive functions is the least class of functions $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_k (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N})$ containing the base functions (zero, successor, projections) and and closed under composition and primitive recursion.

In order to show that f is primitive recursive, first observe that the following functions are so:

- $y \dot{-} 1$
  It can be defined as
  $$\begin{cases} 0 \dot{-} 1 & = 0 \\ (y+1) \dot{-} 1 & = y \end{cases}$$
- $x \dot{-} y$
  It can be defined as
  $$\begin{cases} x \dot{-} 0 & = x \\ x \dot{-} (y+1) & = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 \end{cases}$$
- $\overline{sg}(y) = 1$ if $y = 0$ and 0 otherwise
  It can be defined as
  $$\begin{cases} \overline{sg}(0) & = 1 = succ(0) \\ \overline{sg}(y+1) & = 0 \end{cases}$$

Finally we conclude by observing that

$$f(x,y) = \overline{sg}(x \dot{-} y)$$

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \in E_x\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is not recursive since $K \leqslant_m A$. To show this one can consider the function

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

This function is computable, given that $g(x,y) = y \cdot sc_k(x)$. So by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. It is easy to show that s is a reduction function of K to A. Indeed

- If $x \in K$ then $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = y$ for each $y \in \mathbb{N}$. So $E_{s(x)} = \mathbb{N}$ and therefore certainly $s(x)^2 \in E_{s(x)}$. Thus $s(x) \in A$.

- If $x \notin K$ then $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ for every $y \in \mathbb{N}$. So $E_{s(x)} = \varnothing$ and therefore certainly $s(x)^2 \notin E_{s(x)}$. Thus $s(x) \notin A$.

Moreover A is r.e., since its characteristic function is computable. In fact it can be expressed as:

$$\begin{aligned} sc_A(x) &= \mathbf{1}(\mu(z,t).S(x,z,x^2,t)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.S(x,(w)_1,x^2,(w)_2)) \end{aligned}$$

Since A is r.e. and not recursive, necessarily $\bar{A}$ is not r.e. (and hence not recursive).

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \mid W_x \neq E_x \cup \{0\}\},$$

i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set B is saturated since it can be expressed as $B = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ with $\mathcal{B} = \{f \mid dom(f) \neq cod(f) \cup \{0\}\}$.

By Rice-Shapiro's theorem:

- B is not r.e.
  In fact $id \notin \mathcal{B}$, since $dom(id) = \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\} = cod(id) \cup \{0\}$. However, consider $\theta = \varnothing$, the function which is always undefined. Then $\theta \subseteq id$ and $\theta \in \mathcal{B}$ since $dom(\theta) = \varnothing \neq \{0\} = cod(\theta) \cup \{0\}$.

- $\bar{B}$ is not r.e.
  In fact the successor

  $$succ \in \overline{\mathcal{B}} = \{f \mid dom(f) = cod(f) \cup \{0\}\},$$

  since $dom(succ) = \mathbb{N} = cod(succ) \cup \{0\} = (\mathbb{N} \backslash \{0\}) \cup \{0\}$. However, for all finite subfunctions $\theta \subseteq succ$, we have $\theta \notin \overline{\mathcal{B}}$, i.e., $dom(\theta) \neq cod(\theta) \cup \{0\}$. In fact if $k = \max(dom(\theta))$ then $k+1 \in cod(\theta)$ but $k+1 \notin dom(\theta)$. Thus

---

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
February 1, 2023

Exercise 1

a. Provide the definition of decidable predicate.

b. Provide the definition of semi-decidable predicate.

c. Show that if predicate $Q(\vec{x}, y) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ is semi-decidable then also $P(\vec{x}) = \exists y.Q(\vec{x}, y)$ is semi-decidable (do not assume structure and projection theorems). Does the converse hold, i.e., is it the case that if $P(\vec{x}) = \exists y.Q(\vec{x}, y)$ is semi-decidable then $Q(\vec{x}, y)$ is semi-decidable? Provide a proof or a counterexample.

Solution:

1. A predicate $Q(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_Q : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_Q(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } Q(\vec{x}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A predicate $Q(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is semi-decidable if the semi-characteristic function $sc_Q : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_Q(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } Q(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Let $Q(\vec{x}, y) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ be semi-decidable. Then the semi-characteristic function $sc_Q : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ is computable. Let $e \in \mathbb{N}$ be such that $sc_Q = \varphi_e^{(k+1)}$.

Then $Q(\vec{x}, y)$ holds iff $\varphi_e^{(k+1)}(\vec{x}, y) = 1$ iff $\varphi_e^{(k+1)}(\vec{x}, y) \downarrow$ iff $\exists t. H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, y), t)$.

Therefore $Q(\vec{x}, y) \equiv \exists t.\, H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, y), t)$ and thus

$$P(\vec{x}) \equiv \exists y.\, Q(\vec{x}, y) \equiv \exists y.\exists t.\, H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, y), t) \equiv \exists w.\, H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, (w)_1), (w)_2)$$

Therefore $sc_P(\vec{x}) = \mathbf{1}(\mu w.\ |\chi_{H^{(k+1)}}(e, (\vec{x}, (w)_1)), (w)_2) - 1|)$ is computable, and thus $P(\vec{x})$ is semi-decidable.

The converse implication does not hold. For instance, consider the predicate $Q(x, y) \equiv$ "$\phi_y(x) \uparrow$". Then $P(x) \equiv \exists y.Q(x, y) \equiv \exists y.\phi_y(x) \uparrow$ is always true, hence decidable. In fact, if e_0 is an index for the always undefined function, for $y = e_0$ clearly $Q(x, y)$ for every $x \in \mathbb{N}$. Instead $Q(x, y) = \phi_y(x) \uparrow$ is not semi-decidable (it is negation of the halting predicate, which is semi-decidable but not decidable).

Exercise 2

Give the definition of the class $\mathcal{PR}$ of primitive recursive functions. Show that the following functions are in $\mathcal{PR}$

1. $isqrt : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $isqrt(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$;
2. $lp : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $lp(x)$ is the largest prime divisor of x (Conventionally, $lp(0) = lp(1) = 1$.)

You can assume primitive recursiveness of the basic arithmetic functions seen in the course.

Solution:

1. The basic observation is that $isqrt(x)$ is largest y such that $y^2 \leqslant x$ and in turn this is the smallest y such that $y^2 > x$. In addition, it is immediate to realise that such a y is bounded by x, hence we get

$$isqrt(x) = \mu y < x + 1.\, ((y + 1)^2 > x) = \mu y < x + 1.\, \overline{sg}(((y + 1)^2 \dot{-} x))$$

2. Observe that, for $x > 1$, $lp(x)$ is surely smaller or equal to p_x. Hence one can count the prime divisors of x, restricting the search to $p_1, \ldots, p_x$:

$$count(x) = \Sigma_{i=1}^{x} div(p_i, x)$$

and then $lp(x) = p_{count(x)}$. The function needs to be adjusted for $x = 0$ and $x = 1$, where $count(x) = 0$ and thus $p_{count(x)} = 0$ while $lp(x) = 1$. This is easily done as follows:

$$lp(x) = p_{count(x)} + \overline{sg}(x \dot{-} 1).$$

Since we use only known primitive recursive functions, bounded sum and composition we conclude that lp is primitive recursive.

Alternatively, the idea can be to check explicitly the prime divisors of x, starting from p_x, then p_{x-1} and so on, stopping at the first. In detail, look for the smaller y, call it $i(x)$, such that p_{x-y} is a divisor of x.

$$i(x) = \mu y \leqslant x.\overline{sg}(div(p_{x-y}, x))$$

Then, whenever $x > 1$, $lp(x)$ $p_{x-i(x)}$ and the cases $x \leqslant 1$ must be treated separately as before:

$$lp(x) = p_{x-i(x)} \cdot sg(x \dot{-} 1) + \overline{sg}(x \dot{-} 1).$$

Exercise 3

Classify from the point of view of recursiveness the set $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \neq \varnothing \wedge W_x \subseteq E_x\}$, i.e., establish whether A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that A is saturated, since it can be expressed as $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) \neq \varnothing \;\wedge\; dom(f) \subseteq dom(f)\}$.

Hence, by Rice-Shapiro's theorem, we conclude that A and $\bar{A}$ are not r.e., and thus they are not recursive. More in detail:

- A is not r.e.
  Consider the predecessor function $pred(x) = x \dot{-} 1$. Then $pred \in \mathcal{A}$ since $dom(pred) = \mathbb{N} = cod(pred)$, hence $dom(pred) \neq \varnothing$ and $dom(pred) \subseteq cod(pred)$. Moreover, consider a generic finite $\theta \subseteq pred$. If $\theta \neq \varnothing$, i.e., θ is not the always undefined function, then it is easy to realise that $dom(\theta) \nsubseteq cod(\theta)$. In fact, if $k = \max(dom(\theta))$ necessarily $k \notin cod(\theta)$ (since $\max(cod(\theta)) = k - 1$). Hence no finite subfunction of $pred$ is in $\mathcal{A}$ and therefore, by Rice-Shapiro, A is not r.e.

- $\bar{A}$ is not r.e.
  In fact, $pred \notin \overline{\mathcal{A}}$ and $\theta = \varnothing \subseteq pred$, $\theta \in \overline{\mathcal{A}}$. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that A is not r.e.

Exercise 4

Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be some fixed total computable function and for $X \subseteq \mathbb{N}$ define $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Study the recursiveness of the set $B = \{x \mid x \in f(W_x) \cup E_x\}$, i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set B is not recursive because $K \leqslant B$. In order to prove this fact, let us consider the function $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ defined, by

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

The function is computable since $g(x, y) = y \cdot sc_K(x)$. Hence, by the smn-theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. We next argue that s is a reduction function for $K \leqslant_m B$. In fact

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \mathbb{N}$ and thus $s(x) \in f(W_{s(x)}) \cup E_{s(x)} = f(\mathbb{N}) \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \emptyset$ and thus $s(x) \notin f(W_{s(x)}) \cup E_{s(x)} = f(\emptyset) \cup \emptyset = \emptyset$.

The set B is r.e. In fact $x \in B$ if and only if one of the following conditions hold

- $x \in f(W_x)$, i.e.. there is $z \in W_x$ such that $f(z) = x$ or
- $x \in E_x$, i.e.. there is $z \in W_x$ such that $\varphi_x(z) = x$

Hence the semi-characteristic function of B can be written:

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x,(w)_1,(w)_2) \wedge (f((w)_1) = x) \ \vee \ (S(x,(w)_1,x,(w)_2)))$$

and this shows that it is computable.

Therefore, $\bar{B}$ is not r.e. (hence not recursive).

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
February 20, 2023

Exercise 1

a. Provide the definition of a saturated (or extensional) set $A \subseteq \mathbb{N}$.

b. State the Second Recursion Theorem.

c. Show that K is not saturated.

Solution:

1. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is saturated whenever, if it includes the index (program) for a computable function, it includes also all the other indexes (programs) for the same function. Formally, for all $x, y \in \mathbb{N}$ if $x \in A$ and $\varphi_x = \varphi_y$ then $y \in A$.

2. The Second Recursion Theorem says that: for all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, if f is total and computable then there is $e \in \mathbb{N}$ such that $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

3. In order to show that K is not saturated, let us first prove that there is an index e such that

$$\varphi_e(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = e \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

In fact, first define $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} = \mu z.|y - x|$$

The function is computable, hence by smn-theorem, there exists $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

By the Second Recursion Theorem there exists e such that $\varphi_e = \varphi_{s(e)}$ and thus:

$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = e \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

as desired.

Clearly $e \in K$ since $\varphi_e(e) = 0$. Now, just take $e' \neq e$ such that $\varphi_{e'} = \varphi_e$ (which exists since there are infinitely many indices for the same computable function). We have $\varphi_{e'}(e') = \varphi_e(e') \uparrow$ and thus $e' \notin K$.

Summing up, $e \in K$, $\varphi_{e'} = \varphi_e$ and $e' \notin K$. Hence K not saturated.

Exercise 2

State the smn-theorem. Show that there exists a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $x \in \mathbb{N}$, $x > 0$ we have $W_{s(x)} = \mathbb{P}$ and $|E_{s(x)}| = 2x$.

Solution:

1. The smn-theorem says that: Given $m, n \geqslant 1$ there is a computable total function $s_{m,n} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ such that $\forall e \in \mathbb{N},\ \vec{x} \in \mathbb{N}^m, \vec{y} \in \mathbb{N}^n$

$$\varphi_e^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi^{(n)}_{s_{m,n}(e,\vec{x})}(\vec{y})$$

2. We define $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ by

$$g(x, y) = \begin{cases} (y/2) \mod 2x & \text{if } y \in \mathbb{P} \text{ and } x > 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Observe that for a fixed $x > 0$, seen as a function of y, the function g has domain $\mathbb{P}$ and codomain $\{0, 1, \ldots, 2x - 1\}$.

Clearly g is computable since

$$g(x, y) = rm(2x, qt(2, y)) + \mu z. (rm(2, y) + \overline{sg}(x))$$

(observe that the term $rm(2, y) + \overline{sg}(x) \neq 0$ and thus its minimalisation is undefined, if and only if y is odd or $x = 0$).

By the smn theorem there is $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = \begin{cases} (y/2) \mod 2x & \text{if } y \in \mathbb{P} \text{ and } x > 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hence, as observed above:

- $W_{s(x)} = \mathbb{P}$
- $|E_{s(x)}| = |\{y \mid y < 2x\}| = 2x$

as desired.

Exercise 3

Let $X \subseteq \mathbb{N}$ be a fixed non-empty finite set. Classify from the point of view of recursiveness the set

$$A = \{x \mid E_x \cap X \neq \varnothing\},$$

i.e., establish whether A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that A is saturated, since it can be expressed as $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid cod(f) \cap A \neq \varnothing\}$.

Moreover $A \neq \varnothing, \mathbb{N}$. In fact

- if $e \in \mathbb{N}$ is such $\varphi_e = id$ then $e \in A$, since $X \cap E_e = X \cap \mathbb{N} = X \neq \varnothing$;
- if $e' \in \mathbb{N}$ is such $\varphi_{e'} = \varnothing$ then $e' \notin A$, since $X \cap E_{e'} = X \cap \varnothing = \varnothing$.

Hence by Rice's theorem A is not recursive.

The set A is r.e. In fact $x \in A$ if and only if there is exists an input $y \in \mathbb{N}$ such that $\varphi_x(y) \downarrow$ and $\varphi_x(y) \in X$. The latter condition can be easily checked since X is finite and thus recursive. Hence we can just search for such an input.

Formally the semi-characteristic function of A can be written as:

$$\begin{aligned} sc_A(x) &= \mathbf{1}(\mu w.(S(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3) \wedge (w)_2 \in Y)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.(|\chi_S(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3) * \chi_Y((w)_2) - 1|)) \end{aligned}$$

and, since S is decidable and X is recursive (since it is finite), this shows that sc_A is computable.

Therefore, $\bar{A}$ is not r.e. (hence not recursive).

Exercise 4

Classify from the point of view of recursiveness the set

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \neq \varnothing \wedge \min(W_x) > 0\},$$

i.e., establish whether B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that B is saturated, since it can be expressed as $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, where $\mathcal{B} = \{f \mid dom(f) \neq \varnothing \ \wedge \ \min(dom(f)) > 0\}$.

Hence, by Rice-Shapiro's theorem, we conclude that B and $\bar{B}$ are not r.e., and thus they are not recursive. More in detail:

- B is not r.e.
  Consider the identity function $id(x) = x$. Then $id \notin \mathcal{B}$ since $dom(id) = \mathbb{N}$, hence $\min(dom(id)) = 0$. Moreover, consider the finite function $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Clearly $\theta \subseteq id$ and $\min(dom(\theta)) = \min(\{1\}) = 1 > 0$ hence $\theta \in \mathcal{B}$. Therefore, by Rice-Shapiro, B is not r.e.

- $\bar{B}$ is not r.e.
  In fact, if θ is the function defined above, $\theta \notin \overline{\mathcal{B}}$. Moreover $\theta' = \emptyset \subseteq \theta$, $\theta' \in \overline{\mathcal{B}}$. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that B is not r.e.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

COMPUTABILITY (18/12/2024)

A typical exam ...

Computability
February 2, 2024

definitions
proofs
small variations

Exercise 1

a. Provide the definition of a recursive set.

b. Provide the definition of a recursively enumerable (r.e.) set.

c. Show that given $A, B \subseteq \mathbb{N}$, if A is recursive and $B = A \cap \mathbb{P}$ then B is recursive (here $\mathbb{P}$ denotes the set of even numbers). Does the converse hold? I.e., is it the case that if $B = A \cap \mathbb{P}$ is recursive then A is recursive?

constructions of PR / R
diagonalisation
smn

Exercise 2

State the s-m-n theorem and use it to prove that there exists a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $W_{s(x)} = \mathbb{P}$ and $E_{s(x)} = \{z \in \mathbb{N} \mid z \geqslant x\}$ (where again $\mathbb{P}$ is the set of even numbers).

classify sets (recursive, r.e.), saturatedness

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \mid W_x = E_x\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z.\ \varphi_x(z) > x\},$$

i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable. Also establish if B is saturated.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

$\boxed{\text{ORAL EXAM}}$: optional, needed for distinction (lode)
focused on theory/proofs
range: +/- 4

Exercise 1

a. Provide the definition of a recursive set.

b. Provide the definition of a recursively enumerable (r.e.) set.

c. Show that given $A, B \subseteq \mathbb{N}$, if A is recursive and $B = A \cap \mathbb{P}$ then B is recursive (here $\mathbb{P}$ denotes the set of even numbers). Does the converse hold? I.e., is it the case that if $B = A \cap \mathbb{P}$ is recursive then A is recursive?

(a) A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is <u>recursive</u> if the characteristic function

$$\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases} \quad \text{is computable}$$

(b) A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is. r.e. if semi-characteristic function

$$SC_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{computable}$$

(c) Let $A \subseteq \mathbb{N}$ be recursive set, $\mathbb{P} = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is even} \}$

Then we want show that $B = A \cap \mathbb{P}$ is recursive

In fact

$\mathbb{P}$ is recursive in fact $\chi_{\mathbb{P}}(x) = \overline{sg}(rm(2, x))$

is computable

and thus $B = A \cap \mathbb{P}$ intersection of two recursive sets

is recursive

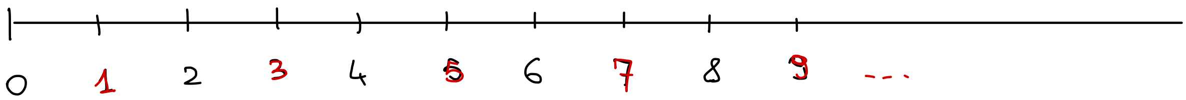
explicitly, $\chi_B(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_{\mathbb{P}}(x)$

computable since it is the

composition of computable functions

* Does the converse hold? I.e. is it the case that

$A \cap \mathbb{P}$ recursive $\Rightarrow$ A recursive ? NO



$A = \{ 2x+1 \mid x \in K \}$ is intuitively "equivalent" to K

more precisely $K \leq_m A$

the reduction function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total computable s.t

$\forall x$ $x \in K$ iff $f(x) \in A$

can be $f(x) = 2x+1$

Since K is not recursive, A is not recursive

However

$A \cap \mathbb{P} = \emptyset$ is recursive

Exercise 2

(a) State the s-m-n theorem (b) and use it to prove that there exists a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $W_{s(x)} = \mathbb{P}$ and $E_{s(x)} = \{z \in \mathbb{N} \mid z \geqslant x\}$ (where again $\mathbb{P}$ is the set of even numbers).

(a) smn theorem: For $m, n \geq 1$ there is $s_{m,n} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ total and computable such that $\forall e \in \mathbb{N}$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^m$ $\forall \vec{y} \in \mathbb{N}^n$

$$\varphi_e^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi^{(n)}_{s_{m,n}(e,\vec{x})}(\vec{y})$$

(b) Define $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y/2 & \text{if } y \text{ is even} \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= x + qt(2,y) + \underbrace{\mu z . \underbrace{rm(2,y)}_{\substack{0 \text{ if } y \text{ even} \\ 1 \text{ if } y \text{ odd}}}}_{\substack{0 \text{ if } y \text{ even} \\ \uparrow \text{ if } y \text{ odd}}}$$

g is computable (composition and minimalisation of computable functions)

Hence, by (the corollary of) the smn theorem there is $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total and computable such that $\forall x, y$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = \begin{cases} x + y/2 & \text{if } y \text{ is even} \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Now we argue that s is the desired function

→ total and computable

$\rightarrow \quad W_{s(x)} = \mathbb{P}$ by construction

$$\rightarrow \quad E_{s(x)} = \{ \varphi_{s(x)}(y) \mid y \in \underbrace{W_{s(x)}}_{= \mathbb{P}} \}$$

$$= \{ x + \tfrac{y}{2} \mid y \in \mathbb{P} \}$$

$$= \{ x + \tfrac{2z}{2} \mid z \in \mathbb{N} \}$$

$$= \{ x + z \mid z \in \mathbb{N} \}$$

$$= \{ z' \mid z' \geq x \}$$

as desired.

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \mid W_x = E_x\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Conjecture : A not r.e. W_x, E_x infinite

$\subseteq$ $\forall y$ $\boxed{\text{if } \varphi_x(y)\downarrow \text{ the } \exists z \ \varphi_x(z) = y}$

$\bar{A}$ not r.e.

We observe that A is saturated

$A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$

with $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) = cod(f)\}$

We use Rice-Shapiro for showing that A and $\bar{A}$ are not r.e.

- A not r.e.

$\mathbb{1}$ $\begin{pmatrix} \text{constant one} \\ \mathbb{1}(x) = 1 \\ \forall x \end{pmatrix}$ then $dom(\mathbb{1}) = \mathbb{N} \neq \{1\} = cod(\mathbb{1})$

hence $\mathbb{1} \notin \mathcal{A}$

and $\vartheta = \emptyset$ finite, $\vartheta \subseteq \mathbb{1}$, $\vartheta \in \mathcal{A}$

↑ always undefined

in fact $dom(\vartheta) = \emptyset = cod(\vartheta)$

hence by Rice-Shapiro A not r.e.

- $\bar{A}$ is not r.e.

$\bar{\mathcal{A}} = \{ f \mid dom(f) \neq cod(f) \}$

we look for a function $f \notin \bar{\mathcal{A}}$ with $\vartheta \subseteq f$, ϑ finite, $\vartheta \in \bar{\mathcal{A}}$

consider $pred : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad pred(x) = x \dot{-} 1$

- $pred \notin \bar{\mathcal{A}}$ (i.e. $pred \in \mathcal{A}$)

  since $dom(pred) = \mathbb{N} = cod(\mathbb{N})$

- define

$$\vartheta(x) = \begin{cases} pred(x) & x \leq 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\vartheta \subseteq pred$, finite

$\vartheta \in \bar{\mathcal{A}}$ $\quad dom(\vartheta) = \{0, 1\} \neq \{0\} = cod(\vartheta)$

hence by Rice - Shapiro $\bar{A}$ not r.e.

Since $A, \bar{A}$ not r.e. they are neither recursive.

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z.\ \varphi_x(z) > x\},$$

i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable. Also establish if B is saturated.

Conjecture :
- B r.e. , not recursive
  ↳ $\bar{B}$ not r.e. ⇒ $\bar{B}$ not recursive
- B not saturated

(a) B is r.e.

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z.\ \varphi_x(z) > x\},$$

The semi-characteristic function

$$sc_B(x) = \text{“}\mathbb{1}\left(\mu(z,\underset{\substack{\uparrow \\ y = x+1+y'}}{y},t).\ S(x,z,y,t)\ \&\ (y > x)\right)\text{”}$$

$$= \mathbb{1}\left(\mu\underbrace{(\overset{(\omega)_1}{z},\overset{(\omega)_2}{y'},\overset{(\omega)_3}{t})}_{\omega}.\ S(x,z,x+1+y',t)\right)$$

$$= \mathbb{1}\left(\mu\omega.\ \underbrace{S(x,(\omega)_1,x+1+(\omega)_2,(\omega)_3)}_{\text{decidable}}\right)$$

$$= \mathbb{1}\left(\mu\omega.\ \underbrace{|\chi_S(x,(\omega)_1,x+1+(\omega)_2,(\omega)_3) - 1|}_{\text{computable}}\right)$$

computable by composition and minimalisation.

(show $B \le_m K$ is an alternative, typically not convenient)

(b) <u>B is not recursive</u>

we show the above by arguing that $\boxed{K \leq_m B}$

and since K is not recursive, B is not recursive.

Define
$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{if } x \notin K \end{cases}$$
$$= y * sc_K(x)$$

computable, hence by smn theorem, there is $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total and computable such that $\forall x, y$
$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

We claim that s is the reduction function for $K \leq_m B$

* $x \in K \rightsquigarrow s(x) \in B$

if $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y \quad \forall y$

in particular for all $z > s(x)$ e.g. $z = s(x)+1$

$\varphi_{s(x)}(z) = z > s(x)$ hence $s(x) \in B$

* $x \notin K \rightsquigarrow s(x) \notin B$

if $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow \quad \forall y$ hence

$\nexists z$ s.t. $\varphi_{s(x)}(z) > s(x)$. Thus $s(x) \notin B$

Thus $K \leq_m B$, hence B is not recursive

Since B is r.e. and not recursive, $\overline{B}$ is not r.e.

(otherwise if $B, \overline{B}$ were r.e. B would be recursive).

Since $\overline{B}$ is not r.e. then it is not recursive.

(c) Is B saturated? NO $\quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z.\ \varphi_x(z) > x\}$,

!

We show that there is $e \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\boxed{\varphi_e(x) = e+1 \qquad \forall x} \qquad (*)$$

This is sufficient to conclude that B is not saturated

* $e \in B$ $\qquad \varphi_e(0) = e+1 > e$
* there are infinitely many e' s.t. $\varphi_{e'} = \varphi_e$.

  Take $e' > e$ s.t. $\varphi_{e'} = \varphi_e$
* $e' \notin B$ $\qquad \varphi_{e'}(x) = \varphi_e(x) = e \not> e' \quad \forall x$

We show $(*)$. Define

$$g(x,y) = x+1 \qquad \text{computable}$$

By smn theorem there is $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total computable s.t. $\forall x, y$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = x+1$$

Since s is total computable, by 2nd recursion theorem

there is $e \in \mathbb{N}$ s.t. $\varphi_e = \varphi_{s(e)}$. Thus

$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e,y) = e+1 \qquad \forall y$$

Hence B not saturated.

Computability
February 2, 2024

Exercise 1

a. Provide the definition of a recursive set.

b. Provide the definition of a recursively enumerable (r.e.) set.

c. Show that given $A, B \subseteq \mathbb{N}$, if A is recursive and $B = A \cap \mathbb{P}$ then B is recursive (here $\mathbb{P}$ denotes the set of even numbers). Does the converse hold? I.e., is it the case that if $B = A \cap \mathbb{P}$ is recursive then A is recursive?

Solution:

1. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is recursive if the characteristic function $\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is r.e. if the semi-characteristic function $sc_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Let $A, B \subseteq \mathbb{N}$ with A recursive and let $B = A \cap \mathbb{P}$. Just observe that $\mathbb{P}$ is recursive (in fact $\chi_{\mathbb{P}}(y) = \overline{sg}(rm(2, y))$). Hence B is the intersection of recursive sets which is known to be recursive.

   The converse is false. In fact, consider the set $A = \{2x + 1 \mid x \in K\}$. We have that $B = A \cap \mathbb{P} = \varnothing$ is recursive. However, A is not recursive since $K \leqslant_m A$. The reduction function can simply be $f(x) = 2x + 1$. Clearly it is total and computable and $x \in K$ iff $f(x) \in A$.

Exercise 2

State the s-m-n theorem and use it to prove that there exists a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $W_{s(x)} = \mathbb{P}$ and $E_{s(x)} = \{z \in \mathbb{N} \mid z \geqslant x\}$ (where again $\mathbb{P}$ is the set of even numbers).

Solution: We can define, for instance,

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y/2 & \text{if } y \in \mathbb{P} \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

which is clearly computable. In fact

$$f(x,y) = x + qt(2,y) + \mu w.rm(2,y)$$

Seen as a function of y, it has as domain $\mathbb{P}$ and as codomain $\{z \mid z \geqslant x\}$. Then one can use the smn theorem to get a function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = \begin{cases} x + y/2 & \text{if } y \in \mathbb{P} \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then s is the desired function, in fact:

- $W_{s(x)} = \mathbb{P}$, by construction;
- $E_{s(x)} = \{\varphi_{s(x)}(y) \mid y \in W_{s(x)}\} = \{\varphi_{s(x)}(y) \mid y \in \mathbb{P}\} = \{x + y/2 \mid y \in \mathbb{P}\} = \{x + y' \mid y' \in \mathbb{N}\} = \{z \mid z \geqslant x\}$, as desired.

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \mid W_x = E_x\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is saturated since it can be expressed as $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ with $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) = cod(f)\}$.

By Rice-Shapiro's theorem:

- A is not r.e.

  In fact the constant 1 function $\mathbf{1} \notin \mathcal{A}$, since $dom(\mathbf{1}) = \mathbb{N} \neq \{1\} = cod(\mathbf{1})$.

  However, consider $\theta = \varnothing$, the function which is always undefined. Then $\theta \subseteq \mathbf{1}$ and $\theta \in \mathcal{A}$ since $dom(\theta) = \varnothing \neq \{0\} = cod(\theta)$.

- $\bar{A}$ is not r.e.
  In fact if we consider the predecessor $pred(x) = x \dot{-} 1$
  $$pred \notin \overline{\mathcal{A}} = \{f \mid dom(f) \neq cod(f)\},$$
  since $dom(pred) = \mathbb{N} = cod(pred)$. However, if we consider the finite subfunction $\theta \subseteq pred$,
  $$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leqslant 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$
  we have $\theta \in \overline{\mathcal{A}}$. In fact $dom(\theta) = \{0,1\} \neq cod(\theta) = \{0\}$.

Exercise 4
Classify the following set from the point of view of recursiveness
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z.\ \varphi_x(z) > x\},$$
i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable. Also establish if B is saturated.

Solution: The set B is not recursive since $K \leqslant_m B$. To show this one can consider the function
$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$
This function is computable, given that $g(x,y) = y \cdot sc_k(x)$. So by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. It is easy to show that s is a reduction function of K to B. Indeed

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y$ for each $y \in \mathbb{N}$. Hence $E_{s(x)} = \mathbb{N}$ and thus $z = s(x) + 1 \in E_{s(x)}$, with $z > s(x)$. Thus $s(x) \in B$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ for every $y \in \mathbb{N}$. Thus $E_{s(x)} = \varnothing$ and therefore certainly there is no $z > s(x)$ such that $z \in E_{s(x)}$. Thus $s(x) \notin B$.

Moreover B is r.e., since its characteristic function is computable. In fact it can be expressed as:
$$\begin{aligned} sc_B(x) &= \mathbf{1}(\mu(y,z,t).S(x,y,z,t) \wedge z > x) \\ &= \mathbf{1}(\mu(y,z',t).S(x,y,x+1+z',t)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.S(x,(w)_1, x+1+(w)_2,(w)_3)) \end{aligned}$$
Since B is r.e. and not recursive, necessarily $\bar{B}$ is not r.e. (and hence not recursive).

Concerning the second point, B is not saturated. we first observe that there is $e \in \mathbb{N}$ such that for all $y \in \mathbb{N}$.

$$\varphi_e(y) = e + 1$$

To this aim define $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ as

$$g(x, y) = x + 1$$

This is clearly computable and thus, by smn theorem, there exists $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $x, y \in \mathbb{N}$ we have

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = x + 1$$

By the second recursion theorem there is $e \in \mathbb{N}$ such $\varphi_{e)}(y) = \varphi_{s(e)}(y)$ and thus for all $y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = e + 1$$

Thus $e \in B$.

Now, there are infinitely many indexes for the function φ_e, hence there is $e' \in \mathbb{N}$, $e' > e$ such that $\varphi_e = \varphi_{e'}$ and thus for all $y \in \mathbb{N}$ $\varphi_{e'}(y) = \varphi_e(y) = e + 1 \leqslant e'$. Hence $e' \notin B$.

Summing up, $e \in B$, $e' \notin B$ and $\varphi_e = \varphi_{e'}$. Hence B is not saturated.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
February 16, 2024

Exercise 1

a. Provide the definition of a decidable predicate.

b. Provide the definition of a semi-decidable predicate.

c. Given a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, consider the predicate $Q_f(x, y) \subseteq \mathbb{N}^2$ defined by $Q_f(x, y) \equiv$ "$f(x) = y$", where it is intended that if $f(x) \uparrow$ then $Q_f(x, y)$ is false. Show that f is computable if and only if Q_f is semi-decidable.

Solution:

1. A predicate $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A predicated $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is semi-decidable if the semi-characteristic function $amthitsc_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Assume that $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is computable. If e is an index for f, i.e., $f = \varphi_e$ then $Q_f(x, y) \equiv \exists t.\, S(e, x, y, t)$. Since S is decidable, by the Structure Theorem, Q_f is semidecidable.

   Conversely, assume that $Q_f(x, y)$ is semidecidable, i.e., $sc_{Q_f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ is computable. Then to compute $f(x)$ we just need to search y such that $Q_f(x, y)$ holds, i.e., $sc_{Q_f}(x, y) = 1$. Since sc_{Q_f} is partial we need to use the step predicates. Let e be an index for sc_{Q_f}, i.e., $sc_{Q_f} = \varphi_e^{(2)}$. Then

$$f(x) = (\mu w.\, S(e, x, (w)_1, (w)_2)_1$$

Hence f is computable.

Exercise 2

Define the class of primitive recursive functions. Using only the definition show that the function $a : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ defined below is primitive recursive

$$a(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \text{ and } y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Solution: The class of primitive recursive functions is the least class of functions $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_k (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N})$ containing the base functions (zero, successor, projections) and and closed under composition and primitive recursion.

In order to show that f is primitive recursive observe that it can be defined as

$$\begin{cases} a(x, 0) & = 0 \\ a(x, y+1) & = sg(x) \end{cases}$$

where $sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, is the sign function, which can be defined by primitive recursion as

$$\begin{cases} sg(0) & = 0 \\ sg(y+1) & = 1 \end{cases}$$

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \mid W_x \cap E_x \neq \emptyset\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is saturated since it can be expressed as $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ with $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) \cap cod(f) \neq \emptyset\}$.

By Rice's theorem A is not recursive. In fact,

- $A \neq \emptyset$, e.g., if e_1 is an index for the identity function, then $e_1 \in A$ (since $W_{e_1} \cap E_{e_1} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \neq \emptyset$)
- $A \neq \mathbb{N}$, e.g., if e_0 is an index for the function which is always undefined then $e_0 \notin A$ (since $W_{e_0} \cap E_{e_0} = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$).

Moreover is r.e., since its characteristic function is computable. In fact it can be expressed as

$$\begin{aligned} sc_A(x) &= \mathbf{1}(\mu(y,z,t).(H(x,y,t) \wedge S(x,z,y,t))) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.(H(x,(w)_1,(w)_3) \wedge S(x,(w)_2,(w)_1,(w)_3))) \end{aligned}$$

Therefore $\bar{A}$ is not r.e. (otherwise, A, $\bar{A}$ r.e. would imply A recursive) and thus it is not recursive.

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \geqslant x.\, \varphi_x(y) > y\},$$

i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable. Also establish if B is saturated.

Solution: The set B is r.e., since its characteristic function is computable. In fact it can be expressed as:

$$\begin{aligned} sc_B(x) &= \mathbf{1}(\mu(y,z,t).S(x,y,z,t) \wedge y \geqslant x \ \wedge \ z > y) \\ &= \mathbf{1}(\mu(y',z',t).S(x,x+y',x+y'+z'+1,t)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.S(x,x+(w)_1,x+(w)_1+(w)_2+1,(w)_3)) \end{aligned}$$

Moreover B is not recursive since $K \leqslant_m B$. To show this one can consider the function

$$g(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

This function is computable, given that $g(x,y) = (y+1) \cdot sc_k(x)$. So by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. It is easy to show that s is a reduction function of K to B. Indeed

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y+1$ for each $y \in \mathbb{N}$. Hence if we take $y = s(x) \geqslant s(x)$, we have $\varphi_{s(x)}(y) = y+1 = s(x)+1 > s(x)$. Thus $s(x) \in B$.

- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ for every $y \in \mathbb{N}$. Therefore certainly there is no $y \geqslant s(x)$ such that $\varphi_{s(x)}(y) > y$. Thus $s(x) \notin B$.

Since B is r.e. and not recursive, necessarily $\bar{B}$ is not r.e. (and hence not recursive).

Concerning the second point, B is not saturated. We first observe that there is $e \in \mathbb{N}$ such that for all $y \in \mathbb{N}$.

$$\varphi_e(y) = \begin{cases} e+1 & \text{if } y = e \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

To this aim define $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ as

$$g(x,y) = \begin{cases} x+1 & \text{if } y = x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} = x + 1 + \mu z.|x - z|$$

This is clearly computable and thus, by smn theorem, there exists $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $x, y \in \mathbb{N}$ we have

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

By the second recursion theorem there is $e \in \mathbb{N}$ such $\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y)$ and thus for all $y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = \begin{cases} e+1 & \text{if } y = e \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Thus there is $y = e$ such that $\varphi_e(y) = e + 1 > e$, hence $e \in B$.

Now, there are infinitely many indexes for the function φ_e, hence there is $e' \in \mathbb{N}$, $e' > e$ such that $\varphi_e = \varphi_{e'}$ and thus for all $y \in \mathbb{N}$, $y \geqslant e' > e$ it holds that $\varphi_{e'}(y) = \varphi_e(y) \uparrow$. Hence $e' \notin B$.

Summing up, $e \in B$, $e' \notin B$ and $\varphi_e = \varphi_{e'}$. Hence B is not saturated.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
June 20, 2024

Exercise 1

a. Provide the definition of a decidable predicate.

b. Provide the definition of a semi-decidable predicate.

c. Is it true that if the predicates $P(\vec{x}), Q(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ are decidable then also their logical implication $R(\vec{x}) \equiv P(\vec{x}) \Rightarrow Q(\vec{x})$ is decidable? Does the same result hold for semi-decidability, i.e., if $P(\vec{x}), Q(\vec{x})$ are semi-decidable then $R(\vec{x}) \equiv P(\vec{x}) \Rightarrow Q(\vec{x})$ is semi-decidable?

Solution:

1. A predicate $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A predicate $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is semi-decidable if the semi-characteristic function sc_P : $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Assume that $P(\vec{x}), Q(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ are decidable. Then also their logical implication $R(\vec{x}) \equiv P(\vec{x}) \Rightarrow Q(\vec{x})$ is decidable. In fact, $P(\vec{x}) \Rightarrow Q(\vec{x})$ is logically equivalent to $\neg P(\vec{x}) \vee Q(\vec{x})$ and we know that decidable predicates are closed by negation and disjunction.

   For the second part of the question, since in particular, if we take $Q(\vec{x}) \equiv \textit{false}$ and $P(\vec{x})$, semi-decidable then $R(\vec{x}) \equiv P(\vec{x}) \Rightarrow \textit{false} \equiv \neg P(\vec{x})$. Hence, since semi-decidable predicates are not closed by negation, the property does not generalise to semi-decidability (for an example, take $P(x)$ = "$x \in K$" which is decidable, but $Q(x) \equiv \textit{false}$ and $P(x) \equiv$ "$x \notin K''$ is not semi-decidable).

Exercise 2

Is there a total non-computable function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ with the property that $f(x) = x+1$ for all $x \in \mathbb{N}$ such that $\varphi_x(x)\downarrow$? Justify your answer by providing an example of such function, if it exists, or by proving that it does not exist, otherwise.

Solution: Yes, the function exists and it can be defined as:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if } \varphi_x(x)\downarrow \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

It is clearly total and by definition $f(x) = x+1$ for all $x \in \mathbb{N}$ such that $\varphi_x(x)\downarrow$. Morever f not computable since $\chi_K(x) = sg(f(x)) \dot{-} x$. Hence if f were computable also χ_K woulkd be so, while we know that χ_K is not computable (K is not recursive).

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \mid W_x \cap E_x = \{0\}\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is saturated since it can be expressed as $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ with $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) \cap cod(f) = \{0\}\}$.

We can use Rice-Shapiro to show that

- A is not r.e .
  In fact $id \notin \mathcal{A}$ since $dom(id) \cap cod(id) = \mathbb{N} \neq \{0\}$. Moreover, if we let

  $$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

  then $\theta \in \mathcal{A}$ since $dom(\theta) \cap cod(\theta) = \{0\}$. Moreover, $\theta \subseteq id$. Hence by Rice-Shapiro we conclude that A is not r.e.

- $\overline{A}$ not r.e .
  In fact, if θ is the function defined above, $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$. Moreover $\emptyset \subseteq \theta$ and $dom(\emptyset) \cap cod(\emptyset) = \emptyset \neq \{0\}$. Thus $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Hence by Rice-Shapiro we conclude that $\bar{A}$ is not r.e.

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in W_x \;\; \varphi_x(y) > x\},$$

i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: Consider the set $\bar{B} = \{x \mid \exists y \in W_x\ \varphi_x(y) \leqslant x\}$. This is is r.e., since its characteristic function is computable. In fact it can be expressed as:

$$\begin{aligned} sc_B(x) &= \mathbf{1}(\mu(y,z,t).S(x,y,z,t) \wedge z \leqslant x) \\ &= \mathbf{1}(\mu(y,z',t).S(x,y,x \dot{-} z',t)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.S(x,(w)_1,x \dot{-} (w)_2,(w)_3)) \end{aligned}$$

Moreover $\bar{B}$ is not recursive since $K \leqslant_m \bar{B}$. To show this one can consider the function

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

This function is computable, given that $g(x,y) = y \cdot sc_k(x)$. So by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. It is easy to show that s is a reduction function of K to $\bar{B}$. Indeed

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y$ for each $y \in \mathbb{N}$. Hence if we take $y = s(x) \leqslant s(x)$, we have $\varphi_{s(x)}(y) = y = s(x) \leqslant s(x)$. Thus $s(x) \in \bar{B}$.

- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ for every $y \in \mathbb{N}$. Therefore certainly there is no $y \in W_{s(x)}$ with $y \leqslant s(x)$ such that $\varphi_{s(x)}(y) \leqslant s(x)$. Thus $s(x) \notin B$.

Since $\bar{B}$ is r.e. and not recursive, necessarily B is not r.e. (and hence not recursive).

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
January 28, 2025

Exercise 1

a. Provide the definition of a semi-decidable predicate.

b. Show that if $P(\vec{x})$ is semi-decidable then there exists a decidable predicate $Q(\vec{x}, y)$ such that $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$.

c. Let $P(\vec{x}, y)$ be a predicate. Is it the case that if the predicate $Q(\vec{x}) \equiv \forall y. P(\vec{x}, y)$ is decidable then $P(\vec{x}, y)$ is semi-decidable? Prove it or provide a counterexample.

Solution:

1. A predicate $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is semi-decidable if the semi-characteristic function $sc_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ defined by

$$sc_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

   is computable.

2. Assume that $P(\vec{x})$ is called semi-decidable. Then $\chi_P(\vec{x})$ is computable. Let $e \in \mathbb{N}$ be an index for such function, i.e., $\chi_P = \varphi_e^{(k)}$. Then we have that $P(\vec{x})$ holds iff $sc_P(\vec{x}) = 1$ iff $sc_P(\vec{x}) \downarrow$ iff $\exists y.\ H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$. Hence, if we let $Q(\vec{x}, y) = H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$, we have

$$P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$$

   and $Q(\vec{x}, y)$ is decidable, since $H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$ is so.

3. The implication is false. For a counterexample, consider for instance

$$P(x, y) \equiv x \in \overline{K} \ \wedge \ y = 0.$$

   - The predicate $P(x, y)$ is not semi-decidable since $P(x, 0) \equiv x \in \overline{K}$ which is not semi-decidable. More precisely, since $sc_{\overline{K}}(x) = sc_P(x, 0) = sc_P(x, \mathbf{0}(x))$, if P were decidable and thus sc_P computable, we would derive that $sc_{\overline{K}}(x)$ would be the composition of computable functions, and thus it would be computable. This is not the case since $\overline{K}$ is not r.e.

- The predicate $Q(x) \equiv \forall y. P(x,y)$ is always false and thus it is decidable.

Exercise 2

Is there a non-computable function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ with the property that $f(x) = \varphi_x(x)$ for infinitely many inputs, i.e., such that the set $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = \varphi_x(x)\}$ is infinite? Justify your answer by providing an example of such function, if it exists, or by proving that it does not exist, otherwise.

Solution: Yes, the function exists and it can be defined by diagonalisation as:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{if } x \text{ is odd} \\ \varphi_{x/2}(x) + 1 & \text{if } x \text{ is even and } \varphi_{x/2}(x) \downarrow \\ 0 & \text{if } x \text{ is even and } \varphi_{x/2}(x) \uparrow \end{cases}$$

The function f satisfies

- f is not computable since it differs from all computable functions. In fact, for each $x \in \mathbb{N}$, one has that $f(2x) \neq \varphi_x(2x)$; in fact, if $\varphi_x(2x) \downarrow$ then $f(2x) = \varphi_x(2x) + 1 \neq \varphi_x(2x)$, and if $\varphi_x(2x) \uparrow$ then $f(2x) = 0 \neq \varphi_x(2x)$;
- the set $\{x \mid f(x) = \varphi_x(x)\}$ is the set of odd numbers, hence it is infinite.

For a simpler solution one could consider

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{if } x \in K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Observe that

- The function f is not computable. In fact

  $$g(x) = f(x) + 1 = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{if } x \in K \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  is clearly not computable, as it is total and different from all total computable functions. In fact, for all $x \in \mathbb{N}$, if φ_x is total then $x \in K$ and thus $g(x) = \varphi_x(x) + 1 \neq \varphi_x(x)$. Hence f cannot be computable otherwise also g would be so
- The set $\{x \mid f(x) = \varphi_x(x)\} \supseteq K$ by construction and K is clearly infinite, otherwise it would be recursive.

Exercise 3

Say that a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is monotone when $\forall x, y \in dom(f)$ if $x \leqslant y$ then $f(x) \leqslant f(y)$. Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ monotone}\},$$

i.e., establish if A and $\bar{A}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is saturated by definition since it is defined as $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ with $\mathcal{A} = \{f \mid f \text{ monotone}\}$.

We can use Rice to show that A and thus $\bar{A}$ are not recursive. It is sufficient to note that $A \neq \emptyset$ since the identity function $id \in \mathcal{A}$ (in fact, for all $x, y \in \mathbb{N}$ if $x \leqslant y$ then $id(x) = x \leqslant y = id(y)$). Moreover $A \neq \mathbb{N}$ since the negated sign $\overline{sg}$ is not in $\mathcal{A}$ (in fact $0 \leqslant 1$ but $\overline{sg}(0) = 1 \nleqslant 0 = \overline{sg}(1)$).

Note also that $\bar{A}$ is recursively enumerable, since its semi-characteristic function is computable. In fact we can just search for two inputs $y \leqslant z$ such the function is defined and produces outputs in reverse order

$$\begin{aligned}
sc_{\bar{A}}(x) &= \mathbf{1}(\mu(y, z, y', z', t).S(x, y, y', t) \wedge S(x, z, z', t) \wedge y \leqslant z \ \wedge z' < y') \\
&\quad [\text{observe that } y \leqslant z \text{ and } z' < y' \text{ are equivalent to } z = y + k \text{ and } y' = z' + h + 1] \\
&= \mathbf{1}(\mu(y, z', h, k, t).S(x, y, z' + h + 1, t) \wedge S(x, y + k, z', t)) \\
&= \mathbf{1}(\mu w.S(x, (w)_1, (w)_2 + (w)_3 + 1, (w)_5) \wedge S(x, (w)_1 + (w)_4, (w)_2, (w)_5))
\end{aligned}$$

Since $\bar{A}$ is r.e. and not recursive, necessarily A is not r.e. (and hence not recursive).

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in W_x.\, x + y \in E_x\},$$

i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable. Also establish if B is saturated.

Solution: The set B is r.e., since its characteristic function is computable. In fact it can be expressed as:

$$\begin{aligned}
sc_B(x) &= \mathbf{1}(\mu(z, y, t).\, H(x, y, t) \wedge S(x, z, x + y, t)) \\
&= \mathbf{1}(\mu w.\, H(x, (w)_1, (w)_3) \wedge S(x, (w)_2, x + (w)_1, (w)_3))
\end{aligned}$$

Moreover B is not recursive since $K \leqslant_m B$. To show this, one can consider the function

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

This function is computable, given that $g(x, y) = y \cdot sc_K(x)$. So by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. It is easy to show that s is a reduction function of K to B. Indeed

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y$ for each $y \in \mathbb{N}$. Hence $0 \in W_{s(x)} = \mathbb{N}$ and $s(x) + 0 \in E_{s(x)} = \mathbb{N}$. Thus $s(x) \in B$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ for every $y \in \mathbb{N}$. Therefore $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \emptyset$ and thus certainly there is no $y \in W_{s(x)}$ such that $s(x) + y \in E_{s(x)}$. Thus $s(x) \notin B$.

Since B is r.e. and not recursive, necessarily $\bar{B}$ is not r.e. (and hence not recursive).

Concerning the second point, B is not saturated. We first observe that there is $e \in \mathbb{N}$ such that

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} e & \text{if } y = 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

To this aim define $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ as

$$g(x,y) = \begin{cases} x & \text{if } y = 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} = x + \mu z.\, y$$

This is clearly computable and thus, by smn theorem, there exists $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $x, y \in \mathbb{N}$ we have

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

By the second recursion theorem there is $e \in \mathbb{N}$ such $\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y)$ and thus for all $y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e,y) = \begin{cases} e & \text{if } y = 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

as desired.

Now $e \in B$, since $W_e = \{0\}$ and $E_e = \{e\}$. Thus we can take $0 \in W_e$ such that $e + 0 = e \in E_e$.

Moreover, there are infinitely many indexes for the function φ_e. Thus there is $e' \neq e$ such that $\varphi_e = \varphi_{e'}$. Now, given $y \in W_{e'} = W_e = \{0\}$, hence $y = 0$ we have that $e' + y = e' + 0 = e' \notin E_{e'} = E_e = \{e\}$. Hence $e' \notin B$.

Summing up, $e \in B$, $e' \notin B$ and $\varphi_e = \varphi_{e'}$. Hence B is not saturated.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability
February 12, 2025

Exercise 1

a. Provide the definition of the class $\mathcal{PR}$ of primitive recursive functions.

b. Show, using only the definition, that the function $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by $t(x) = \sum_{y=0}^{x} y = 0 + 1 + 2 + \ldots + x$ is in $\mathcal{PR}$.

c. Let $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be functions and consider $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by $h(x) = f(x) + g(x)$. Is it the case that if $h \in \mathcal{PR}$ then $f, g \in \mathcal{PR}$? Prove it or provide a counterexample.

Solution:

1. The class of primitive recursive functions is the least class of functions $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_k (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N})$ containing the base functions (zero, successor, projections) and closed under composition and primitive recursion.

2. In order to show that t is primitive recursive, observe that it can be defined as

$$\begin{cases} t(0) & = 0 \\ t(y+1) & = t(y) + y + 1 = sum(t(y), y+1) \end{cases}$$

and the sum is primitive recursive since it can be defined as

$$\begin{cases} sum(x, 0) & = x \\ sum(x, y+1) & = sum(x, y) + 1 \end{cases}$$

3. The implication is false. For a counterexample, consider for instance the characteristic functions of K and of its complement: if we let $f = \chi_K$ and $g = \chi_{\bar{K}}$ then $h(x) = f(x) + g(x) = 1$ for all $x \in \mathbb{N}$. Hence h is the constant 1 which is primitive recursive ($h = succ \circ zero$) while f and g are not even computable (hence surely not in $\mathcal{PR}$).

Exercise 2

State the second recursion theorem. Show that there is an index $e \in \mathbb{N}$ such that $W_e = \{k \cdot e \mid k \in \mathbb{N}\}$ and $E_e = [0, e] = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant e\}$.

Solution: Define $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ as

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \begin{cases} \min(x, k) & \text{if } y = k \cdot x \text{ for some } k \in \mathbb{N} \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \min(x, \mu k.|y - k \cdot x|) \end{aligned}$$

Clearly g is computable, hence, by the smn theorem there is $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total and computable such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. By construction we have that $W_{s(x)} = \{k \cdot x \mid k \in \mathbb{N}\}$ and $E_{s(x)} = \{\min(x, k) \mid k \in \mathbb{N}\} = [0, x]$.

Since s is total and computable, by the second recursion theorem, there is $e \in \mathbb{N}$ such that $\varphi_e = \varphi_{s(e)}$ and thus $W_e = W_{s(e)} = \{k \cdot e \mid k \in \mathbb{N}\}$ and $E_e = E_{s(e)} = [0, e]$ as desired.

Exercise 3

Classify the following set from the point of view of recursiveness, where $k \in \mathbb{N}$ is some fixed number:

$$A_k = \{x \in \mathbb{N} \mid E_x = \{k\}\},$$

i.e., establish if A_k and $\bar{A}_k$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A_k is saturated it can be defined as $A_k = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}_k\}$ with $\mathcal{A}_k = \{f \mid cod(f) = \{k\}\}$.

We can use Rice-Shapiro to show that A_k and $\bar{A}_k$ are not r.e. (and thus not recursive).

- A is not r.e.
  Observe that $id \notin \mathcal{A}_k$ since $cod(id) = \mathbb{N} \neq \{k\}$, but the finite function θ defined by

  $$\theta(x) = \begin{cases} k & \text{if } x = k \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

  is such that $\theta \subseteq id$ and $\theta \in \mathcal{A}_k$. Hence, by Rice-Shapiro A_k not r.e.

- $\bar{A}$ is not r.e.
  Observe that constant k function $\mathbf{k} \notin \overline{\mathcal{A}}_k$, since, as observed above, it is in $\mathcal{A}_k$. Moreover $\theta = \varnothing \subseteq \mathbf{k}$ is finite and $\theta \in \overline{\mathcal{A}}_k$ since $cod(\theta) = \varnothing \neq \{k\}$. Hence, by Rice-Shapiro $\bar{A}_k$ not r.e.

Exercise 4

Classify the following set from the point of view of recursiveness

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > x \text{ such that } y \notin W_x\},$$

i.e., establish if B and $\bar{B}$ are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set B is not r.e.. We can prove it by showing that $\bar{K} \leqslant_m B$. To show this, one can consider the function

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

This function is computable, given that $g(x, y) = sc_K(x)$. So by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. It is easy to show that s is a reduction function of $\bar{K}$ to B. Indeed

- If $x \in \bar{K}$, i.e., $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ for every $y \in \mathbb{N}$. Therefore $W_{s(x)} = \emptyset$ and thus certainly there is $y > s(x)$ such that $y \notin W_{s(x)}$, for instance $y = s(x) + 1$. Thus $s(x) \in B$.

- If $x \notin \bar{K}$, i.e., $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = 1$ for each $y \in \mathbb{N}$. Hence $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ and thus there cannot be $y > s(x)$ such that $y \notin W_{s(x)}$. Thus $s(x) \notin B$.

The complement $\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y > x.\ x \in W_x\}$ is also not r.e. We can prove it again reduction to $\bar{K}$. In order to show that $\bar{K} \leqslant_m \bar{B}$, consider the function

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} = \mu z.\, \chi_H(x, x, y)$$

Since g is computable by the smn theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for each $x, y \in \mathbb{N}$. We show that s is a reduction function of $\bar{K}$ to $\bar{B}$. Indeed

- If $x \in \bar{K}$, i.e., $\varphi_x(x) \uparrow$ then for all $y \in \mathbb{N}$ it holds that $\neg H(x, x, y)$ and thus $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = 0$. Thus $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ and thus for all $y > s(x)$ clearly $y \in W_{s(x)}$. Whence $s(x) \in \bar{B}$.

- If $x \notin \bar{K}$, i.e., $x \in K$ then $\varphi_x(x) \downarrow$. Let y_0 be the least y such that $H(x, x, y)$. Then $\neg H(x, x, y)$ for all $y < y_0$ and $H(x, x, y_0)$ for all $y \geqslant y_0$. This means that

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = \begin{cases} 0 & y < y_0 \\ \uparrow & y \geqslant y_0 \end{cases}$$

hence there is surely $y > s(x)$ (e.g., $y = s(x) + y_0$) such that $\varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ and thus $s(x) \notin \bar{B}$.

Note: Exercise 1 contributes with 10 points, while exercises 2,3,4 contribute with 8 points each to the final grade.