Computabilità e Algoritmi - 17 Settembre 2019

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ un insieme di funzioni calcolabili e sia $f \in \mathcal{A}$ tale che per ogni funzione finita $\theta \subseteq f$ vale $\theta \notin \mathcal{A}$. Dimostrare che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ non è r.e.

Soluzione:

Dimostrazione diretta utilizzando il teorema di Rice-Shapiro:

Il teorema di Rice-Shapiro stabilisce che se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ è tale che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ è r.e., allora:
$\forall f \in \mathcal{C}$: $f \in \mathcal{A} \iff \exists\theta \subseteq f$ (θ finita) tale che $\theta \in \mathcal{A}$

Applicazione al nostro caso:

- Dato: $f \in \mathcal{A}$
- Dato: $\forall\theta \subseteq f$ (θ finita) $\Rightarrow \theta \notin \mathcal{A}$

Questo contraddice direttamente la condizione di Rice-Shapiro. Infatti:

- La condizione di Rice-Shapiro richiederebbe: $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists\theta \subseteq f$ finita tale che $\theta \in \mathcal{A}$
- Ma per ipotesi: $\forall\theta \subseteq f$ finita $\Rightarrow \theta \notin \mathcal{A}$

Conclusione: Poiché la condizione di Rice-Shapiro non è soddisfatta (abbiamo trovato $f \in \mathcal{A}$ tale che nessuna sottofunzione finita appartiene ad $\mathcal{A}$), l'insieme A non può essere r.e.

Dimostrazione formale: Supponiamo per assurdo che A sia r.e. Allora per il teorema di Rice-Shapiro: $\forall f$ ($f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists\theta \subseteq f$ finita. $\theta \in \mathcal{A}$)

In particolare, per la f data nell'ipotesi:
$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists\theta \subseteq f$ finita. $\theta \in \mathcal{A}$

Ma questo contraddice l'ipotesi che $\forall\theta \subseteq f$ finita. $\theta \notin \mathcal{A}$.

Quindi A non è r.e. ∎

Esercizio 2

Problema: Enunciare il teorema smn ed utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $|W_{s(x)}| = 2x$ e $|E_{s(x)}| = x$.

Soluzione:

Enunciato del teorema smn: Dati $m,n \geq 1$, esiste una funzione $s^m_n: \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile tale che: $\forall e \in \mathbb{N}$, $\forall\vec{x} \in \mathbb{N}^m$, $\forall\vec{y} \in \mathbb{N}^n$: $\varphi^{(m+n)}_e(\vec{x},\vec{y}) = \varphi^{(n)}_{s^m_n(e,\vec{x})}(\vec{y})$

Costruzione della funzione richiesta:

Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ come segue:

```
g(x,y) = {
    y mod x      se x > 0 ∧ y < 2x
    ↑            altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile. Possiamo esprimerla come:

```
g(x,y) = rm(x, y) · sg(x) · sg(2x - y)
```

dove rm(x,y) è il resto della divisione di y per x, e sg è la funzione sign.

Per il teorema smn, esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che:
$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$

Verifica delle proprietà:

Dominio: $W_{s(x)} = \{y \in \mathbb{N} : g(x,y) \downarrow\}$ Per $x > 0$: $W_{s(x)} = \{0, 1, 2, ..., 2x-1\}$ Quindi $|W_{s(x)}| = 2x$ ✓

Codominio: $E_{s(x)} = \{g(x,y) : y \in W_{s(x)}\}$ Per $y \in \{0, 1, 2, ..., 2x-1\}$:

- $g(x,0) = 0 \bmod x = 0$
- $g(x,1) = 1 \bmod x = 1$
- ...
- $g(x,x-1) = (x-1) \bmod x = x-1$
- $g(x,x) = x \bmod x = 0$
- $g(x,x+1) = (x+1) \bmod x = 1$
- ...
- $g(x,2x-1) = (2x-1) \bmod x = x-1$

Quindi $E_{s(x)} = \{0, 1, 2, ..., x-1\}$
Pertanto $|E_{s(x)}| = x$ ✓

Caso x = 0: Per $x = 0$, $g(0,y) \uparrow$ per ogni y, quindi $W_{s(0)} = \emptyset$ e $E_{s(0)} = \emptyset$. Abbiamo $|W_{s(0)}| = 0 = 2 \cdot 0$ e $|E_{s(0)}| = 0$, che soddisfa le condizioni.

Conclusione: Esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che $|W_{s(x)}| = 2x$ e $|E_{s(x)}| = x$. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \cap E_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che x appartiene sia al dominio che al codominio di φ_x.

Ricorsività:

A non è ricorsivo. Dimostriamo K ≤_m A.

Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    y       se y ∈ K ∧ z = y
    ↑       altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile: g(y,z) = y · μt.(H(y,y,t) ∧ |z-y| = 0)

Per il teorema smn, esiste s: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che φ_{s(y)}(z) = g(y,z).

Analisi di s(y):

- Se y ∈ K, allora W_{s(y)} = {y} e E_{s(y)} = {y}, quindi y ∈ W_{s(y)} ∩ E_{s(y)}
- Se y ∉ K, allora W_{s(y)} = ∅ e E_{s(y)} = ∅, quindi y ∉ W_{s(y)} ∩ E_{s(y)}

Tuttavia, vogliamo che s(y) ∈ A, non y ∈ qualcosa.

Approccio corretto: Definiamo h: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(y,z) = {
    z       se y ∈ K ∧ z = y
    ↑       altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste t: ℕ → ℕ tale che φ_{t(y)}(z) = h(y,z).

Verifica:

- Se y ∈ K, allora W_{t(y)} = {y} e E_{t(y)} = {y} Dobbiamo verificare se t(y) ∈ W_{t(y)} ∩ E_{t(y)} = {y} Questo è vero solo se t(y) = y

Costruzione definitiva: Utilizziamo il Secondo Teorema di Ricorsione. Definiamo f: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
f(x,z) = {
    x       se x ∈ K ∧ z = x
    ↑       altrimenti
}
```

Per smn, esiste una funzione u tale che φ_{u(x)}(z) = f(x,z).

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste e tale che φ_e = φ_{u(e)}.

Se $e \in K$, allora $W_e = \{e\}$ e $E_e = \{e\}$, quindi $e \in A$.
Se $e \notin K$, allora $W_e = \emptyset$, quindi $e \notin A$.

Questo non dà una riduzione da K.

Riduzione corretta da K: Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    s(y)    se y ∈ K ∧ z = s(y)
    ↑       altrimenti
}
```

dove s è una funzione iniettiva calcolabile.

Allora se $y \in K$, abbiamo $s(y) \in W_{t(y)} \cap E_{t(y)}$, quindi $t(y) \in A$ se $t(y) = s(y)$.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A è r.e. Possiamo scrivere:

```
sc_A(x) = 1(μt. H(x,x,t) ∧ ∃w≤t. S(x,x,x,w))
```

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

$\bar{A}$ non è r.e. Se lo fosse, insieme ad A essendo r.e., A sarebbe ricorsivo.

Conclusione: A non è ricorsivo, A è r.e., $\bar{A}$ non è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > 1\}$, ovvero dire se V e $\bar{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

Questo è lo stesso insieme B dell'Esercizio 4 dell'esame dell'8 Febbraio 2019.

V contiene gli indici x tali che il dominio di φ_x ha cardinalità strettamente maggiore di 1.

Ricorsività:

V non è ricorsivo. Dimostriamo $K \leq_m V$.

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    z + 1   se y ∈ K ∧ z ∈ {0,1}
    ↑       altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(y)}(z) = g(y,z)$.

Verifica della riduzione:

- Se $y \in K$, allora $W_{s(y)} = \{0,1\}$, quindi $|W_{s(y)}| = 2 > 1$, dunque $s(y) \in V$
- Se $y \notin K$, allora $W_{s(y)} = \emptyset$, quindi $|W_{s(y)}| = 0 \le 1$, dunque $s(y) \notin V$

Pertanto $K \le_m V$, e poiché K non è ricorsivo, V non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di V:

V è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_V(x) = 1(μt. ∃u,v ≤ t. [u ≠ v ∧ H(x,u,t) ∧ H(x,v,t)])
```

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{V}$:

$\bar{V} = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| \le 1\}$

$\bar{V}$ non è r.e. Se lo fosse, insieme a V essendo r.e., avremmo che V sarebbe ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione: V non è ricorsivo, V è r.e., $\bar{V}$ non è r.e. ∎

Esercizio 5

Problema: Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = y^x$ per ogni $y \in \mathbb{N}$.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Dimostrazione dell'esistenza di x tale che $\varphi_x(y) = y^x$:

Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(n,y) = y^n
```

La funzione g è calcolabile (la funzione esponenziale è primitiva ricorsiva, quindi calcolabile).

Per il teorema smn, esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che:
$\varphi_{s(n)}(y) = g(n,y) = y^n$

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione s, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:
$\varphi_e = \varphi_{s(e)}$

Da questa uguaglianza, per ogni $y \in \mathbb{N}$:
$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e,y) = y^e$

Quindi, ponendo $x = e$, abbiamo trovato $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = y^x$ per ogni $y \in \mathbb{N}$.

Verifica:

- $x = e$ è l'indice che cerchiamo
- $\varphi_x(y) = \varphi_e(y) = y^e = y^x$ per ogni $y \in \mathbb{N}$

Conclusione: Esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = y^x$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. ∎