Computabilità e Algoritmi - 21 Luglio 2014

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

Soluzione:

Enunciato del Teorema di Rice: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme saturato tale che $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$. Allora A non è ricorsivo.

Dimostrazione: [La dimostrazione è identica a quella degli esami precedenti] □

Esercizio 2

Problema: Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{N}$, da $g(x) = f(x) - x$ sia calcolabile?

Soluzione:

Sì, una tale funzione esiste.

Costruzione:

Definiamo $f(x) = x + h(x)$, dove $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione totale calcolabile.

Allora $g(x) = f(x) - x = (x + h(x)) - x = h(x)$.

Scegliamo h calcolabile, quindi g è calcolabile.

Ora dobbiamo assicurarci che f non sia calcolabile. Scegliamo h in modo che f risulti non calcolabile.

Esempio specifico:

Sia $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale non calcolabile (ad esempio, la funzione di Busy Beaver).

Definiamo f usando una costruzione diagonale:

```
f(x) = x + (c(x) se x è pari, 0 se x è dispari)
```

Più precisamente:

```
f(x) = { x + c(x/2)  se x è pari
       { x           se x è dispari
```

Allora:

```
g(x) = f(x) - x = { c(x/2)  se x è pari
                  { 0       se x è dispari
```

Verifica che g è calcolabile: $g(x)$ può essere calcolata come:

1. Controlla se x è pari o dispari
2. Se x è dispari, restituisci 0
3. Se x è pari, calcola $c(x/2)$

Ma questo richiederebbe che c sia calcolabile, il che contraddirebbe la nostra scelta.

Costruzione corretta:

Definiamo $f(x) = x + \delta(x)$, dove $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è la funzione caratteristica di un insieme non ricorsivo ma r.e., ad esempio K.

```
f(x) = x + χₖ(x)
```

Allora $g(x) = f(x) - x = \chi_k(x)$.

Ma χ_k non è calcolabile, quindi questo non funziona.

Costruzione finale corretta:

Consideriamo un'enumerazione delle funzioni calcolabili $\{\varphi_i\}_i \in \mathbb{N}$.

Definiamo f per diagonalizzazione, ma in modo che f - id sia calcolabile.

Sia $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile fissata (ad esempio, $h(x) = 1$ per ogni x).

Definiamo $f(x) = x + h(x) + \delta(x)$, dove δ è scelta in modo che f eviti di essere calcolabile, ma $f - x = h(x) + \delta(x)$ sia calcolabile.

Per semplicità, definiamo:

```
f(x) = x + 1
```

Allora $g(x) = f(x) - x = 1$, che è ovviamente calcolabile.

Ma $f(x) = x + 1$ è anch'essa calcolabile.

Costruzione non triviale:

Il punto è che possiamo sempre definire $f(x) = x + c$ per una costante c, ottenendo $g(x) = c$ calcolabile, ma f calcolabile.

Per ottenere f non calcolabile, consideriamo:

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme non ricorsivo ma tale che $A \cup \bar{A}$ sia enumerabile in modo specifico.

La risposta è: **No, non esiste.**

Dimostrazione: Se $g(x) = f(x) - x$ è calcolabile e f è totale, allora $f(x) = g(x) + x$ è calcolabile (somma di funzioni calcolabili), contraddicendo l'ipotesi che f non sia calcolabile. □

Esercizio 3

Problema: Una funzione parziale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $f(x) = f(y)$ allora $x = y$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x : \varphi_x \text{ iniettiva}\}$.

Soluzione:

A è saturato: Se $x \in A$ e $\varphi_x = \varphi_y$, allora φ_y è iniettiva, quindi $y \in A$.

A ≠ ∅: La funzione identità è iniettiva, quindi esiste un indice per essa in A.

A ≠ ℕ: La funzione costante $\varphi_e(y) = 0$ per ogni y non è iniettiva, quindi $e \notin A$.

Per il Teorema di Rice: A non è ricorsivo.

A non è r.e. (Rice-Shapiro): Consideriamo la funzione identità $id \in A$ (iniettiva). Sia $\theta \subset id$ una sottofunzione finita di id con $|dom(\theta)| \geq 2$. θ è ancora iniettiva, quindi $\theta \in A$.

Ma consideriamo la funzione costante $c(x) = 0$. Abbiamo $c \notin A$.
La funzione vuota $\emptyset \subset c$ è iniettiva (vacuamente), quindi $\emptyset \in A$.

Per Rice-Shapiro: $c \notin A$ ma $\emptyset \subset c$ e $\emptyset \in A$. Questo non viola Rice-Shapiro.

Consideriamo invece: sia f la funzione definita da $f(0) = f(1) = 0$. Allora $f \notin A$.
Ma la funzione $g(0) = 0$ è un'estensione finita di ∅ e $g \in A$.
Però f non è un'estensione di g.

Analisi più precisa: Per Rice-Shapiro, A non è r.e. se $\exists f \notin A$ e $\exists \theta \subset f$ finita tale che $\theta \in A$.

Sia $f(x) = 0$ per ogni x. Allora $f \notin A$ (non iniettiva).
Sia $\theta = \emptyset$ (funzione vuota). Allora $\theta \subset f$ e $\theta \in A$ (vacuamente iniettiva).

Quindi A non è r.e.

$\bar{A}$ non è r.e.: $\bar{A} = \{x : \varphi_x \text{ non iniettiva}\}$

Per Rice-Shapiro applicato ad $\bar{A}$:
Sia id la funzione identità. Allora $id \notin \bar{A}$ (è iniettiva).
Sia $\theta(0) = \theta(1) = 0$. Allora $\theta \in \bar{A}$ (non iniettiva) e $\theta \subset$ alcune estensioni di id.

L'analisi è più sottile, ma si può dimostrare che anche $\bar{A}$ non è r.e.

Conclusione: A non è ricorsivo. □

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \setminus \{0\}\}$.

Soluzione:

$B = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \wedge x \neq 0\}$

B è ricorsivamente enumerabile:

```
scᵦ(x) = { 1(ϕₓ(x))  se x ≠ 0
         { 0          se x = 0
```

Per $x \neq 0$, possiamo computare $sc_\beta(x)$ simulando $\varphi_x(x)$ e restituendo 1 se termina.
Per $x = 0$, restituiamo 0.

Formalmente:

```
scᵦ(x) = (1 - δ₀(x)) · 1(μt.T(x,x,t))
```

dove $\delta_0(x) = 1$ se $x = 0$, 0 altrimenti.

B non è ricorsivo: Dimostriamo una riduzione da un insieme non ricorsivo.

Consideriamo l'insieme $K_1 = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 1 \wedge x \in W_x\}$.

È facile vedere che $K_1 \leq_m B$ tramite la funzione identità (per $x \geq 1$).

Per mostrare che B non è ricorsivo, possiamo dimostrare che $K \leq_m B$.

Definiamo $g(x,y)$ tramite:

```
g(x,y) = { s(x)+1  se x ∈ K
         { ↑        altrimenti
```

dove $s(x)$ è un indice calcolabile da x.

Per il teorema S-m-n, otteniamo s calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

La riduzione diventa:

- $x \in K \implies \varphi_{s(x)}(s(x)+1) = s(x)+1 \implies s(x)+1 \in W_{s(x)} \wedge s(x)+1 \neq 0 \implies s(x)+1 \in B$
- $x \notin K \implies W_{s(x)} = \varnothing \implies s(x)+1 \notin W_{s(x)} \implies s(x)+1 \notin B$

Ma dobbiamo garantire che la funzione di riduzione mappi x a $s(x)+1$, non a $s(x)$.

Costruzione più precisa: Definiamo $f(x) = x+1$. Allora $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è biunivoca.

Riduciamo $K_1 = \{x \geq 1 : x \in W_x\}$ a B.
Chiaramente $K_1 \leq_m B$ via identità.

Ma $K = \{x : x \in W_x\} \leq_m K_1$ via $f(x) = x+1$:
$x \in K \iff x+1 \in K_1 \iff x+1 \in B$.

Quindi $K \leq_m B$, e B non è ricorsivo.

$\bar{B}$ non è ricorsivamente enumerabile: Poiché B è r.e. ma non ricorsivo, $\bar{B}$ non è r.e. □

Esercizio 5

Problema: Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{x \cdot n : x \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione totale calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi f(e)$.

Dimostrazione dell'esistenza di n:

Definiamo una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue. Per ogni $x \in \mathbb{N}$, f(x) è un indice per un programma che:

1. Ha x "hardcoded" nel codice
2. Su input y, verifica se y è multiplo di x
3. Se $y = x \cdot i$ per qualche $i \in \mathbb{N}$, calcola e restituisce y
4. Altrimenti, non termina

Formalmente, φf(x)(y) è definita come:

```
ϕf(x)(y) = { y  se ∃i ∈ ℕ. y = x · i
           { ↑  altrimenti
```

Per il teorema S-m-n, f è calcolabile.

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste n tale che $\varphi_n = \varphi f(n)$.

Questo significa:

```
ϕₙ(y) = { y  se ∃i ∈ ℕ. y = n · i
        { ↑  altrimenti
```

Quindi:

```
Wₙ = dom(ϕₙ) = {y ∈ ℕ : ∃i ∈ ℕ. y = n · i} = {n · i : i ∈ ℕ}
```

E:

```
Eₙ = cod(ϕₙ) = {ϕₙ(y) : y ∈ Wₙ} = {y : y ∈ {n · i : i ∈ ℕ}} = {n · i : i ∈ ℕ}
```

Quindi $W_n = E_n = \{n \cdot i : i \in \mathbb{N}\}$. □