Computabilità - 15 Luglio 2020

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Siano A, B ⊆ ℕ. Definire la nozione di riducibilità A ≤_m B. È vero che se A è ricorsivo e B è finito, non vuoto allora A ≤_m B? Dimostrarlo o fornire un controesempio. E senza l'ipotesi di finitezza per B? In caso non valga in generale con B infinito, portare un controesempio e proporre una condizione che permetta di ristabilire la proprietà.

Soluzione:

Definizione di riduzione: Dati A, B ⊆ ℕ, diciamo che A è many-one riducibile a B (A ≤_m B) se esiste una funzione f: ℕ → ℕ totale e calcolabile tale che: ∀x ∈ ℕ: x ∈ A ⟺ f(x) ∈ B

Caso 1: A ricorsivo, B finito non vuoto

Risposta: Sì, è vero.

Dimostrazione: Sia A ricorsivo e B finito non vuoto. Poiché B è finito, B è ricorsivo. Poiché B ≠ ∅, esiste b_0 ∈ B. Poiché B è finito e B ⊆ ℕ, esiste b_1 ∉ B.

Definiamo f: ℕ → ℕ:

```
f(x) = {
    b₀  se x ∈ A
    b₁  se x ∉ A
}
```

Poiché A è ricorsivo, χ_A è calcolabile, quindi f(x) = b_0 · χ_A(x) + b_1 · χ_Ā(x) è calcolabile.

La verifica della riduzione è immediata:

- x ∈ A ⟹ f(x) = b_0 ∈ B
- x ∉ A ⟹ f(x) = b_1 ∉ B

Quindi A ≤_m B. ∎

Caso 2: A ricorsivo, B infinito

Risposta: Non vale in generale.

Controesempio:

- Sia A = {0} (ricorsivo)
- Sia B = {x ∈ ℕ : x è primo} (infinito, ricorsivo)

Supponiamo per assurdo che esista $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $A \leq_m B$.
Allora:

- $0 \in A \implies f(0) \in B$ ($f(0)$ è primo)
- $\forall x \neq 0: x \notin A \implies f(x) \notin B$ ($f(x)$ non è primo)

Ma questo significa che f può assumere al più un valore primo ($f(0)$), mentre deve mappare infiniti valori (tutti gli $x \neq 0$) in numeri non primi. Questo è possibile, quindi il controesempio non è corretto.

Controesempio corretto:

- Sia $A = \mathbb{N}$ (ricorsivo)
- Sia $B = \{2\}$ (finito ma considerato come sottoinsieme proprio)

Non può esistere $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\forall x: x \in \mathbb{N} \iff f(x) \in \{2\}$, perché richiederebbe $f(x) = 2$ per tutti gli x, ma allora avremmo anche $f(x) \in \{2\}$ per elementi che dovrebbero essere mappati fuori da B.

Condizione per ristabilire la proprietà: Se B è ricorsivo e $A, B \neq \emptyset, \mathbb{N}$, allora $A \leq_m B$ se A è ricorsivo.

Esercizio 2

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y > x.\ y \in W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che esiste almeno un elemento $y > x$ nel dominio di φ_x.

Ricorsività:

A non è ricorsivo. Dimostriamo $K \leq_m A$.

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(x,y) = {
    y      se x ∈ K ∧ y = x+1
    ↑      altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile. Per il teorema smn, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifica della riduzione:

- Se $x \in K$, allora $\varphi_{s(x)}(x+1) = x+1$, quindi $x+1 \in W_{s(x)}$ e $x+1 > x$, dunque $s(x) \in A$
- Se $x \notin K$, allora $W_{s(x)} = \emptyset$, quindi $\nexists y > x$ tale che $y \in W_{s(x)}$, dunque $s(x) \notin A$

Pertanto $K \leq_m A$, e poiché K non è ricorsivo, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_A(x) = 1(μw. H(x, π₁(w), π₂(w)) ∧ π₁(w) > x)
```

dove π_1, π_2 sono le funzioni di proiezione per l'encoding di coppie.

Questa funzione è calcolabile: cerchiamo un testimone $y > x$ tale che $\varphi_x(y)$ converge in un numero finito di passi.

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \forall y > x.\ y \notin W_x\} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq \{0,1,\ldots,x\}\}$

Ā non è r.e. Dimostriamo K̄ ≤_m Ā.

Definiamo $h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(x,y) = {
    y      se x ∉ K ∧ y ≤ x
    ↑      altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che φ_{t(x)}(y) = h(x,y).

- Se $x \notin K$, allora W_{t(x)} ⊆ {0,1,...,x}, quindi $t(x) \in \bar{A}$
- Se $x \in K$, allora W_{t(x)} = ∅ ⊆ {0,1,...,x}, quindi $t(x) \in \bar{A}$

Questa riduzione non funziona. Utilizziamo un approccio diverso:

Ā non è r.e. perché se lo fosse, insieme ad A essendo r.e., avremmo che A sarebbe ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione: A non è ricorsivo, A è r.e., Ā non è r.e. ∎

Esercizio 3

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che per ogni $k \geq 0$ esistono due indici $x, y \in \mathbb{N}$ tali che $x - y = k$ e $\varphi_x = \varphi_y$.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che φ_e = φ_{f(e)}.

Dimostrazione dell'esistenza degli indici:

Vogliamo dimostrare che $\forall k \geq 0, \exists x, y \in \mathbb{N}$ tali che $x - y = k$ e $\varphi_x = \varphi_y$.

Caso k = 0: Triviale: prendi $x = y$ qualsiasi.

Caso k > 0: Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(z,w) = ϕ_{z+k}(w)
```

Questa funzione è calcolabile: $g(z,w) = \Psi_U(z+k, w)$.

Per il teorema smn, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che:
$\varphi_{s(z)}(w) = g(z,w) = \varphi_{z+k}(w)$

Quindi $\varphi_{s(z)} = \varphi_{z+k}$.

Consideriamo la funzione $f(z) = s(z)$. Per il Secondo Teorema di Ricorsione, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:
$\varphi_e = \varphi_{f(e)} = \varphi_{s(e)}$

Ma abbiamo $\varphi_{s(e)} = \varphi_{e+k}$, quindi:
$\varphi_e = \varphi_{e+k}$

Ponendo $y = e$ e $x = e + k$, otteniamo:

- $x - y = (e + k) - e = k$
- $\varphi_x = \varphi_{e+k} = \varphi_e = \varphi_y$

Conclusione: Per ogni $k \geq 0$, esistono $x, y \in \mathbb{N}$ tali che $x - y = k$ e $\varphi_x = \varphi_y$. ∎