Computabilità e Algoritmi - 30 Marzo 2015

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Dimostrare che un predicato $P(\bar{x})$ è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile $Q(\bar{x},y)$ tale che $P(\bar{x}) \equiv \exists y.Q(\bar{x},y)$.

Dimostrazione:

(⇒) Direzione diretta: Assumiamo che $P(\bar{x})$ sia semidecidibile. Per definizione, esiste una funzione semicaratteristica sc_p computabile tale che:

$sc_p(\bar{x}) = \{1$ se $P(\bar{x})$
$\{\uparrow$ altrimenti

Poiché sc_p è computabile, esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $sc_p = \varphi_e$^(k).

Osserviamo che:

- $P(\bar{x}) \iff sc_p(\bar{x}) = 1$
- $P(\bar{x}) \iff sc_p(\bar{x}) \downarrow$
- $P(\bar{x}) \iff \varphi_e$^(k)$(\bar{x}) \downarrow$
- $P(\bar{x}) \iff \exists t.$ H^(k)$(e, \bar{x}, t)$

dove H^(k) è il predicato di halting decidibile.

Definiamo $Q(\bar{x},t) \equiv$ H^(k)$(e, \bar{x}, t)$. Chiaramente Q è decidibile e $P(\bar{x}) \equiv \exists t.Q(\bar{x},t)$.

(⇐) Direzione inversa: Assumiamo che $P(\bar{x}) \equiv \exists y.Q(\bar{x},y)$ con $Q(\bar{x},y)$ decidibile.

Poiché Q è decidibile, la sua funzione caratteristica χQ è computabile.

Definiamo la funzione semicaratteristica:
$sc_p(\bar{x}) = 1(\mu y.|\chi Q(\bar{x},y) - 1|)$

Questa funzione è computabile poiché:

- $sc_p(\bar{x}) = 1$ se e solo se $\exists y.\chi Q(\bar{x},y) = 1$
- $sc_p(\bar{x}) = 1$ se e solo se $\exists y.Q(\bar{x},y)$
- $sc_p(\bar{x}) = 1$ se e solo se $P(\bar{x})$

Quindi P è semidecidibile. □

Esercizio 2

Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leq_m B$. È vero che per ogni insieme A vale $A \leq_m A \cup \{0\}$? In caso negativo, proporre una condizione che renda vero $A \leq_m A \cup \{0\}$.

Definizione di Riducibilità Many-One: $A \leq_m B$ se e solo se esiste una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e computabile tale che: $\forall x \in \mathbb{N}: x \in A \iff f(x) \in B$

Risposta alla domanda: No, non è vero in generale che $A \leq_m A \cup \{0\}$.

Controesempio: Sia $A = \varnothing$ e consideriamo $A \cup \{0\} = \{0\}$.

Per avere $A \leq_t A \cup \{0\}$, dovrebbe esistere $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale computabile tale che:
$\forall x \in \mathbb{N}: x \in \varnothing \iff f(x) \in \{0\}$

Questo significa:
$\forall x \in \mathbb{N}: \text{False} \iff f(x) = 0$

Quindi $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Ma allora f non è una funzione a valori in $\mathbb{N}$ che può servire come riduzione verso $\{0\}$.

Condizione sufficiente: $A \leq_m A \cup \{0\}$ è vero quando $0 \notin A$.

Dimostrazione: Se $0 \notin A$, definiamo: $f(x) = \{0 \text{ se } x \notin A \ \{x \text{ se } x \in A$

Allora f è computabile (assumendo A ricorsivo) e:
$x \in A \iff f(x) \in A \cup \{0\}$ (poiché se $x \in A$ allora $f(x) = x \in A \subseteq A \cup \{0\}$, e se $x \notin A$ allora $f(x) = 0 \in A \cup \{0\}$ ma $0 \notin A$). □

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \cup W_x\}$.

Analisi: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \cup W_x\} = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \vee x \in W_x\}$

Semidecidibilità di A: A è semidecidibile. Infatti, $x \in A$ se e solo se $x \in E_x \vee x \in W_x$.

$sc_a(x) = 1(\mu w.S(x,x,(w)_1,(w)_2) \vee H(x,x,(w)_3))$

dove S è il predicato che verifica se $\varphi_x((w)_1) = (w)_2$ in $(w)_3$ passi.

Non ricorsività di A: Dimostriamo che $K \leq_m A$ tramite la riduzione:

Definiamo $g(y,z) = \{z \ \text{ se } y \in K$
$\{\uparrow \ \text{ altrimenti}$

Per il teorema SMN, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale computabile tale che $\varphi_{s(y)}(z) = g(y,z)$.

Verifichiamo la riduzione:

- Se $y \in K$: $\varphi_{s(y)}(z) = z$ per ogni z, quindi $E_{s(y)} = \mathbb{N}$ e $W_{s(y)} = \mathbb{N}$, così $s(y) \in s(y) \in E_{s(y)} \cup W_{s(y)}$
- Se $y \notin K$: $\varphi_{s(y)}(z) = \uparrow$ per ogni z, quindi $E_{s(y)} = W_{s(y)} = \varnothing$, così $s(y) \notin E_{s(y)} \cup W_{s(y)}$

Quindi A non è ricorsivo.

Complemento $\bar{A}$: $\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \notin E_x \wedge x \notin W_x\}$

$\bar{A}$ non è semidecidibile. Se lo fosse, insieme ad A semidecidibile, avremmo A ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione:

- A è semidecidibile ma non ricorsivo
- $\bar{A}$ non è semidecidibile (quindi non ricorsivo) □

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme B = {x ∈ ℕ : 1 ≤ $|E_x|$ ≤ 2}.

Analisi: B = {x ∈ ℕ : 1 ≤ $|E_x|$ ≤ 2} rappresenta i programmi la cui immagine ha cardinalità tra 1 e 2.

Saturazione: B è saturato poiché B = {x | $\varphi_x \in \mathcal{B}$} dove $\mathcal{B}$ = {f ∈ C : 1 ≤ |cod(f)| ≤ 2}.

Non ricorsività per Rice: Poiché B è saturato, B ≠ ∅ (esiste una funzione costante), B ≠ ℕ (la funzione identità ha immagine infinita), per il teorema di Rice B non è ricorsivo.

Semidecidibilità di B: B è semidecidibile. Per verificare x ∈ B, cerchiamo due valori distinti nell'immagine:

$sc_\beta(x) = 1(\mu w.\exists a,b,t_1,t_2.\ a \neq b \wedge S(x,a,b,t_1) \wedge S(x,b,b,t_2) \wedge$
$\forall c,t_3 \leq (w)_4.\ S(x,c,(w)_5,t_3) \rightarrow ((w)_5 = a \vee (w)_5 = b))$

Complemento $\bar{B}$: $\bar{B}$ = {x ∈ ℕ : $|E_x|$ = 0 ∨ $|E_x|$ ≥ 3}

$\bar{B}$ non è semidecidibile. Se lo fosse, con B semidecidibile, avremmo B ricorsivo.

Conclusione:

- B è semidecidibile ma non ricorsivo
- $\bar{B}$ non è semidecidibile (quindi non ricorsivo) □

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme C = {x ∈ ℕ : [0,x] ⊆ W_x} non è saturato.

Secondo Teorema di Ricorsione (Kleene): Per ogni funzione f: ℕ → ℕ totale e computabile, esiste e_0 ∈ ℕ tale che $\varphi_{e0} = \varphi f(e_0)$.

Dimostrazione che C non è saturato:

Definiamo la funzione h: ℕ → ℕ usando il teorema SMN.

Consideriamo g(e,x) = {e se x ≤ e
{↑ altrimenti

Per SMN, esiste s: ℕ → ℕ totale computabile tale che $\varphi_{s(e)}(x) = g(e,x)$.

Applicando il secondo teorema di ricorsione a s, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:

$\varphi_e = \varphi_{s(e)}$

Quindi:

$\varphi_e(x) = \{e$ se $x \leq e$

$\{\uparrow$ altrimenti

Questo implica $W_e = [0,e]$ e quindi $e \in C$ poiché $[0,e] \subseteq W_e$.

Ora, esiste $e' > e$ tale che $\varphi_e = \varphi_e'$ (infiniti indici per la stessa funzione).

Per questo e':

- $\varphi_e' = \varphi_e$, quindi computano la stessa funzione
- $W_e' = W_e = [0,e]$
- Ma $[0,e'] \nsubseteq [0,e]$ poiché $e' > e$
- Quindi $e' \notin C$

Abbiamo trovato $e \in C$ e $e' \notin C$ con $\varphi_e = \varphi_e'$, quindi C non è saturato. □