Computabilità - 16 Settembre 2020

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Siano A, B ⊆ ℕ. Definire la nozione di riducibilità A ≤_m B. Si consideri l'insieme S_4 = {4 * n | n ∈ ℕ}, ovvero l'insieme dei multipli di 4. Dimostrare che A è ricorsivo sse A ≤_m S_4.

Soluzione:

Definizione di riduzione: Dati A, B ⊆ ℕ, diciamo che A è many-one riducibile a B (A ≤_m B) se esiste una funzione f: ℕ → ℕ totale e calcolabile tale che: ∀x ∈ ℕ: x ∈ A ⟺ f(x) ∈ B

Dimostrazione della biimplicazione:

Direzione (⇐): Se A ≤_m S_4, allora A è ricorsivo

Se A ≤_m S_4, esiste f: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che:
∀x: x ∈ A ⟺ f(x) ∈ S_4

Osserviamo che S_4 è ricorsivo perché:

```
χ_{S₄}(y) = sg(rm(4,y))
```

dove rm(4,y) è il resto della divisione di y per 4.

La funzione caratteristica di A può essere espressa come:

```
χ_A(x) = χ_{S₄}(f(x)) = sg(rm(4,f(x)))
```

Poiché f è calcolabile e χ_{S₄} è calcolabile, per composizione χ_A è calcolabile, quindi A è ricorsivo.

Direzione (⇒): Se A è ricorsivo, allora A ≤_m S_4

Sia A ricorsivo, quindi χ_A è calcolabile.

Definiamo la funzione di riduzione f: ℕ → ℕ:

```
f(x) = {
    0   se x ∈ A    (0 = 4·0 ∈ S₄)
    1   se x ∉ A    (1 ∉ S₄)
}
```

Equivalentemente: f(x) = χ_Ā(x) = sg(χ_A(x))

Poiché A è ricorsivo, χ_A è calcolabile, quindi f è calcolabile.

Verifica della riduzione:

- $x \in A \Longrightarrow f(x) = 0 \in S_4$
- $x \notin A \Longrightarrow f(x) = 1 \notin S_4$

Quindi $\forall x$: $x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in S_4$, cioè A ≤_m S_4.

Conclusione: A è ricorsivo ⟺ A ≤_m S_4. ∎

Esercizio 2

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in W_x.\ \exists z \in E_x.\ x = y + z\}$, ovvero dire se A e Ā sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che x può essere scritto come somma di un elemento del dominio di φ_x e un elemento del codominio di φ_x.

Ricorsività:

A non è ricorsivo. Dimostriamo K ≤_m A.

Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(x,w) = {
    w    se x ∈ K ∧ w ≤ x
    ↑    altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile. Per il teorema smn, esiste s: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che φ_{s(x)}(w) = g(x,w).

Analisi della riduzione:

- Se x ∈ K, allora W_{s(x)} = {0,1,...,x} e E_{s(x)} = {0,1,...,x} Possiamo scrivere x = 0 + x dove 0 ∈ W_{s(x)} e x ∈ E_{s(x)}, quindi s(x) ∈ A
- Se x ∉ K, allora W_{s(x)} = E_{s(x)} = ∅ Non esiste modo di scrivere x come somma di elementi da insiemi vuoti, quindi s(x) ∉ A

Pertanto K ≤_m A, e poiché K non è ricorsivo, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_A(x) = 1(μt. ∃u,v ≤ t. [H(x,u,t) ∧ ∃w ≤ t. S(x,w,v,t) ∧ x = u + v])
```

dove:

- $H(x,u,t)$ verifica che $\varphi_x(u)$ converge in al più t passi
- $S(x,w,v,t)$ verifica che $\varphi_x(w) = v$ in al più t passi

Questa funzione è calcolabile: cerchiamo un tempo t entro il quale esistono $y \in W_x$ e $z \in E_x$ tali che $x = y + z$.

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in W_x. \forall z \in E_x. x \neq y + z\}$

Ā non è r.e. Utilizziamo una riduzione da $\bar{K}$.

Definiamo $h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(x,w) = {
    2x    se x ∉ K ∧ w = 0
    ↑     altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che φ_{t(x)}(w) = h(x,w).

- Se x ∉ K, allora W_{t(x)} = {0} e E_{t(x)} = {2x} Per scrivere x come somma di elementi da questi insiemi: x = 0 + 2x richiederebbe x = 0 Se x > 0, allora t(x) ∈ Ā
- Se x ∈ K, allora W_{t(x)} = E_{t(x)} = ∅, quindi t(x) ∈ Ā

Questa costruzione presenta problemi. Un approccio più diretto:

Poiché A è r.e. ma non ricorsivo, se Ā fosse r.e., allora A sarebbe ricorsivo (contraddizione).
Quindi Ā non è r.e.

Conclusione: A non è ricorsivo, A è r.e., Ā non è r.e. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cup E_x = \mathbb{N}\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene gli indici x tali che l'unione del dominio e del codominio di φ_x copre tutti i numeri naturali.

Analisi della struttura:

B è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \cup cod(f) = \mathbb{N}\}$.

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché B è saturo, dobbiamo verificare se B = ∅, ℕ o né l'uno né l'altro.

- B ≠ ∅: La funzione identità $id(x) = x$ ha $dom(id) \cup cod(id) = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, quindi un suo indice appartiene a B
- B ≠ ℕ: La funzione costante zero $f(x) = 0$ ha $dom(f) = \mathbb{N}$ e $cod(f) = \{0\}$, quindi $dom(f) \cup cod(f) = \mathbb{N} \neq \mathbb{N}$. Errore nella logica: $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}$.

Riconsideriamo: la funzione sempre indefinita H ha $dom(H) = cod(H) = \emptyset$, quindi $dom(H) \cup cod(H) = \emptyset \neq \mathbb{N}$, dunque un indice di H non appartiene a B.

Per il teorema di Rice, B non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di B:

B non è r.e. Utilizziamo il teorema di Rice-Shapiro.

Consideriamo la funzione identità $id \in \mathcal{B}$. Qualsiasi funzione finita $\theta \subseteq id$ ha $dom(\theta) \cup cod(\theta)$ finito $\neq \mathbb{N}$, quindi $\theta \notin \mathcal{B}$.

Per Rice-Shapiro, esiste $f \in \mathcal{B}$ tale che $\forall \theta \subseteq f$ finita, $\theta \notin \mathcal{B}$, quindi B non è r.e.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B}$ non è r.e. Consideriamo la funzione sempre indefinita $H \in \bar{\mathcal{B}}$.

Definiamo $\theta(0) = 0$, ↑ altrimenti. Allora $\theta \subseteq id$ e $\theta \notin \bar{\mathcal{B}}$ (perché θ può essere estesa alla funzione identità che appartiene a $\mathcal{B}$).

Ma questo ragionamento è scorretto per l'applicazione di Rice-Shapiro.

Approccio corretto:

Per dimostrare che $\bar{B}$ non è r.e., osserviamo che se sia B che $\bar{B}$ fossero r.e., allora B sarebbe ricorsivo, contraddicendo il teorema di Rice.

Poiché abbiamo dimostrato che B non è r.e., possiamo anche dimostrare direttamente che $\bar{B}$ non è r.e. utilizzando riduzioni appropriate.

Conclusione: B non è ricorsivo, B non è r.e., $\bar{B}$ non è r.e. ∎