Computabilità e Algoritmi - 21 Marzo 2014

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

Soluzione:

Enunciato del Teorema di Rice: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme saturato tale che $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$. Allora A non è ricorsivo.

Definizione: Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è saturato se per ogni $x, y \in \mathbb{N}$: se $x \in A$ e $\varphi_x = \varphi_y$, allora $y \in A$.

Dimostrazione: [La dimostrazione è identica a quella dell'Esercizio 1 dell'esame precedente] □

Esercizio 2

Problema: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è r.e. allora $f(A) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in A.\ y = f(x)\}$ è r.e. Vale anche il contrario?

Soluzione:

Parte 1: Se A è r.e., allora f(A) è r.e.

Poiché A è r.e., esiste una funzione calcolabile g tale che $A = dom(g)$.

Definiamo la funzione $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come:

```
h(z) = f(g(z))
```

h è calcolabile perché è composizione di funzioni calcolabili.

Ora osserviamo che:

```
f(A) = {f(x) : x ∈ A} = {f(x) : x ∈ dom(g)} = {h(z) : z ∈ dom(g)} = cod(h)
```

dove $cod(h) = \{h(z) : z \in dom(h)\}$ è l'insieme dei valori di output di h.

Per il Teorema di Proiezione, cod(h) è r.e., quindi f(A) è r.e. □

Parte 2: Il contrario non vale

Controesempio: Sia $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ (funzione costante calcolabile). Sia $A = \bar{K}$ (complemento dell'insieme di arresto).

Allora $f(A) = f(\bar{K}) = \{0\}$, che è ovviamente r.e. (anzi, ricorsivo).

Tuttavia, $A = \bar{K}$ non è r.e.

Quindi f(A) r.e. non implica A r.e. □

Esercizio 3

Problema: Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ finito, $X \neq \varnothing$ e si definisca $A_x = \{x \in \mathbb{N} : W_x = E_x \cup X\}$. Studiare la ricorsività di A_x.

Soluzione:

A_x è saturato: Se $x \in A_x$ e $\varphi_x = \varphi_y$, allora $W_x = W_y$ e $E_x = E_y$, quindi $W_y = E_y \cup X$, cioè $y \in A_x$.

$A_x \neq \varnothing$: Costruiamo esplicitamente un elemento di A_x. Poiché X è finito, possiamo costruire un programma che:

1. Su input y, calcola una funzione che ha codominio esattamente X
2. Ha dominio esattamente X

Sia e un indice per la funzione identità ristretta a X, cioè:

```
ϕₑ(y) = { y  se y ∈ X
        { ↑  altrimenti
```

Allora $W_e = X$ e $E_e = X$, quindi $W_e = E_e \cup X = X \cup X = X$, cioè $e \in A_x$.

$A_x \neq \mathbb{N}$: Sia e_0 un indice per la funzione totalmente indefinita. Allora $W_{e0} = \varnothing$ e $E_{e0} = \varnothing$. Poiché $X \neq \varnothing$, abbiamo $W_{e0} = \varnothing \neq X = \varnothing \cup X = E_{e0} \cup X$, quindi $e_0 \notin A_x$.

Conclusione: Per il Teorema di Rice, A_x non è ricorsivo.

A_x non è r.e.: Applicando il Teorema di Rice-Shapiro. Consideriamo la funzione totalmente indefinita $\varnothing \notin A_x$, ma ogni sua estensione finita che include elementi di X sarà in A_x. Questo viola le condizioni di Rice-Shapiro per la r.e.

$\bar{A}_x$ non è r.e.: Similmente, considerando funzioni che soddisfano parzialmente la condizione ma non completamente. □

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ k \cdot x \in W_x\}$.

Soluzione:

B è ricorsivamente enumerabile:

```
scᵦ(x) = 1(μt.∃k≤t. S(x, k·x, t))
```

Questa è calcolabile: per ogni x, enumeriamo W_x e verifichiamo se esiste qualche multiplo di x che appare nell'enumerazione.

B non è ricorsivo: Dimostriamo che $K \leq_m B$.

Definiamo g(x,y) tramite:

```
g(x,y) = { y    se x ∈ K
         { ↑    altrimenti
```

Per il teorema S-m-n, esiste s calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifichiamo la riduzione:

- $x \in K \implies W_{s(x)} = \mathbb{N} \implies s(x) \in W_{s(x)}$ (prendendo k=1) $\implies s(x) \in B$
- $x \notin K \implies W_{s(x)} = \emptyset \implies$ nessun multiplo di s(x) è in $W_{s(x)} \implies s(x) \notin B$

Quindi $K \leq_m B$, e poiché K non è ricorsivo, B non è ricorsivo.

$\bar{B}$ non è ricorsivamente enumerabile: Poiché B è r.e. ma non ricorsivo, per il teorema fondamentale, $\bar{B}$ non è r.e. □

Esercizio 5

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme B dell'esercizio precedente non è saturato.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione totale calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi f(e)$.

Dimostrazione che B non è saturato:

Utilizziamo il secondo teorema di ricorsione con una funzione opportuna.

Definiamo f(x) come un indice per la funzione che:

```
φf(x)(y) = { x    se y = 2x
           { ↑    altrimenti
```

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste e tale che $\varphi_e = \varphi f(e)$.

Questo significa:

```
φₑ(y) = { e    se y = 2e
        { ↑    altrimenti
```

Quindi $W_e = \{e\}$ e $2e \in W_e$.

Poiché $2e = 2 \cdot e$ e $2e \in W_e$, abbiamo $e \in B$.

Ora consideriamo $\varphi f(e)$. Abbiamo:

```
ϕf(e)(y) = { e    se y = 2e
           { ↑    altrimenti
```

Quindi $W_{f(e)} = \{e\}$, e per essere in B dovremmo avere $k \cdot f(e) \in W_{f(e)} = \{e\}$ per qualche k.

Questo significa $k \cdot f(e) = e$, cioè $f(e) = e/k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Ma possiamo scegliere f in modo che f(e) non sia un divisore di e (ad esempio, $f(e) = e+1$).

In questo caso, $f(e) \notin B$ mentre $e \in B$, ma $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Questo viola la proprietà di saturazione, quindi B non è saturato. □