Computabilità e Algoritmi - 16 Luglio 2015

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Dimostrare che se un predicato $P(x,\bar{y})$ è semidecidibile allora $\exists x.P(x,\bar{y})$ è semidecidibile. Vale anche il contrario? Dimostrarlo o portare un controesempio.

Dimostrazione (Teorema di Proiezione):

(⇒) Se $P(x,\bar{y})$ è semidecidibile, allora $\exists x.P(x,\bar{y})$ è semidecidibile:

Poiché $P(x,\bar{y}) \subseteq \mathbb{N}^{(k+1)}$ è semidecidibile, per il teorema di struttura esiste $Q(t,x,\bar{y}) \subseteq \mathbb{N}^{(k+2)}$ decidibile tale che:
$P(x,\bar{y}) \equiv \exists t.Q(t,x,\bar{y})$

Ora consideriamo:
$R(\bar{y}) \equiv \exists x.P(x,\bar{y}) \equiv \exists x.\exists t.Q(t,x,\bar{y}) \equiv \exists w.Q((w)_1,(w)_2,\bar{y})$

Poiché Q è decidibile e la funzione di codifica è computabile, R è l'esistenziale di un predicato decidibile, quindi per il teorema di struttura R è semidecidibile.

(⇐) Il contrario NON vale:

Controesempio 1: Consideriamo $P(x,y) \equiv x \in W_x$ (il predicato di halting).

- $P(x,y)$ non è semidecidibile (altrimenti $\bar{K}$ sarebbe semidecidibile)
- Tuttavia $Q(y) \equiv \exists x.P(x,y) \equiv \exists x.(x \in W_x)$ è costantemente vero poiché $K \neq \emptyset$, quindi Q è decidibile.

Controesempio 2 (meno degenere): Consideriamo $P(x,y) \equiv (y > x) \land (y \notin W_x)$ e $Q(y) \equiv \exists x.P(x,y)$.

Con e_0 indice della funzione sempre indefinita, per ogni $y > e_0$ abbiamo $y \notin W_{e0}$, quindi $Q(y)$ è vero per $y > e_0$. Questo rende Q decidibile.

Tuttavia $P(x,y)$ non è semidecidibile: se lo fosse, potremmo semidecidere $y \notin W_x$ per $y > x$, il che contraddice il fatto che $\bar{K}$ non è semidecidibile. □

Esercizio 2

Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se $A \leq_m K$.

Dimostrazione:

(⇒) Se A è r.e., allora $A \leq_m K$:

Se $A = \emptyset$, allora $A \leq_m K$ tramite qualsiasi funzione costante.

Se $A \neq \emptyset$, sia $a_0 \in A$ fissato. Poiché A è r.e., esiste sc_a computabile:

$sc_a(x) = \{1$ se $x \in A$

$\{\uparrow$ altrimenti

Definiamo la funzione di riduzione:

$f(x) = \{x$ se $x \in A$

$\{a_0$ altrimenti

Per il teorema SMN, possiamo costruire f computabile. Verifichiamo:

- Se $x \in A$: $f(x) = x$ e $x \in A \Longrightarrow sc_a(x) \downarrow \Longrightarrow x \in W_x$ (usando l'indice che calcola sc_a)
- Se $x \notin A$: $f(x) = a_0$ e $a_0 \in A \Longrightarrow sc_a(a_0) \downarrow \Longrightarrow a_0 \in W_{a0}$

(⇐) Se $A \leq_m K$, allora A è r.e.:

Esiste $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale computabile tale che:

$\forall x \in \mathbb{N}: x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in K$

Poiché K è r.e., esiste sc_k computabile:

$sc_k(y) = \{1$ se $y \in K$

$\{\uparrow$ altrimenti

Definiamo:

$sc_a(x) = sc_k(f(x))$

Questa è computabile per composizione e:

$x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in K \Longleftrightarrow sc_k(f(x)) \downarrow \Longleftrightarrow sc_a(x) \downarrow$

Quindi A è r.e. □

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in E_x. \exists z \in W_x.\ x = y * z\}$.

Analisi: $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in E_x. \exists z \in W_x.\ x = y * z\}$

L'insieme A contiene gli indici x tali che x può essere espresso come prodotto di un elemento del codominio di φ_x e un elemento del dominio di φ_x.

Semidecidibilità di A: A è semidecidibile. Infatti:

$sc_a(x) = 1(\mu w. \exists y,z,t_1,t_2.\ y * z = x \wedge S(x,(w)_1,y,t_1) \wedge H(x,z,t_2))$

dove $S(x,u,v,t)$ verifica se $\varphi_x(u) = v$ in t passi e $H(x,z,t)$ verifica se $\varphi_x(z) \downarrow$ in t passi.

Non ricorsività di A: Dimostriamo $K \leq_m A$. Definiamo $g(u,v)$ tramite SMN:

$g(u,v) = \{u \cdot v$ se $u \in K$ e $v = u$

$\{\uparrow$ altrimenti

Per SMN, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(u)}(v) = g(u,v)$.

Verifichiamo la riduzione s: ℕ → ℕ:

- Se $u \in K$: $\varphi_{s(u)}(u) = u \cdot u$, quindi $u \in E_{s(u)}$, $u \in W_{s(u)}$, e $s(u) = u \cdot u$, quindi $s(u) \in A$
- Se $u \notin K$: $\varphi_{s(u)}$ è sempre indefinita, quindi $E_{s(u)} = W_{s(u)} = \emptyset$, quindi $s(u) \notin A$

Complemento $\bar{A}$: $\bar{A}$ non è semidecidibile, altrimenti A sarebbe ricorsivo.

Conclusione:

- A è semidecidabile ma non ricorsivo
- $\bar{A}$ non è semidecidibile □

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : |W_x \setminus E_x| \geq 2\}$.

Analisi: $B = \{x \in \mathbb{N} : |W_x \setminus E_x| \geq 2\}$ contiene gli indici per cui il dominio contiene almeno 2 elementi che non sono nell'immagine.

Saturazione: B è saturato: $B = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ dove $\mathcal{B} = \{f \in C : |dom(f) \setminus cod(f)| \geq 2\}$.

Non ricorsività per Rice:

- $B \neq \emptyset$: la funzione $f(x) = 0$ ha $dom(f) = \mathbb{N}$, $cod(f) = \{0\}$, quindi $|dom(f) \setminus cod(f)| = \infty \geq 2$
- $B \neq \mathbb{N}$: la funzione identità ha $dom(f) = cod(f) = \mathbb{N}$, quindi $|dom(f) \setminus cod(f)| = 0$

Per Rice, B non è ricorsivo.

Semidecidibilità di B: B è semidecidibile. Per verificare $x \in B$, cerchiamo due elementi nel dominio che non sono nell'immagine:

$sc_\beta(x) = 1(\mu w. \exists a,b,t_1,t_2.\ a \neq b \wedge H(x,a,t_1) \wedge H(x,b,t_2) \wedge$
$\forall c,v,t_3 \leq (w)_3.\ S(x,c,a,t_3) \vee S(x,c,b,t_3) \rightarrow \text{False})$

Complemento $\bar{B}$: $\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : |W_x \setminus E_x| \leq 1\}$

$\bar{B}$ non è semidecidibile (altrimenti B sarebbe ricorsivo).

Conclusione:

- B è semidecidibile ma non ricorsivo
- $\bar{B}$ non è semidecidibile □

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice x tale che $W_x = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Secondo Teorema di Ricorsione (Kleene): Per ogni funzione f: ℕ → ℕ totale e computabile, esiste $e_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{e_0} = \varphi f(e_0)$.

Dimostrazione dell'esistenza dell'indice:

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

$g(x,y) = \{kx$ se $y = kx$ per qualche $k \in \mathbb{N}$

$\{\uparrow$ altrimenti

Più precisamente:

$g(x,y) = \{\mu k.|y - k \cdot x|$ se $\mu k.|y - k \cdot x| \cdot x = y$

$\{\uparrow$ altrimenti

Per il teorema SMN, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale computabile tale che:

$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$

Per costruzione:

- $W_{s(x)} = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$
- $E_{s(x)} = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$ (assumendo che g sia definita appropriatamente)

Applicando il secondo teorema di ricorsione alla funzione s, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:

$\varphi_e = \varphi_{s(e)}$

Quindi:

$W_e = W_{s(e)} = \{ke \mid k \in \mathbb{N}\}$

L'indice e soddisfa la proprietà richiesta. □