Computabilità e Algoritmi - 2 Luglio 2014

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Dimostrare che un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e $\bar{A}$ sono r.e.

Soluzione:

Teorema Fondamentale: Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e $\bar{A}$ sono entrambi r.e.

Dimostrazione:

(⟹) Se A è ricorsivo, allora A e Ā sono r.e.

Se A è ricorsivo, allora χ_a è calcolabile. Quindi:

```
χₐ(x) = { 1  se x ∈ A
        { 0  se x ∉ A
```

Definiamo la funzione semi-caratteristica di A:

```
scₐ(x) = 1(μz.|χₐ(x) - 1|)
```

Questa è calcolabile perché:

- Se $x \in A$, allora $\chi_a(x) = 1$, quindi $|\chi_a(x) - 1| = 0$, e $\mu z.|\chi_a(x) - 1| = 0$
- Se $x \notin A$, allora $\chi_a(x) = 0$, quindi $|\chi_a(x) - 1| = 1 \neq 0$, e $\mu z.|\chi_a(x) - 1|$ è indefinito

Quindi A è r.e.

Similmente per Ā: poiché A è ricorsivo, anche Ā è ricorsivo, quindi Ā è r.e.

(⟸) Se A e Ā sono r.e., allora A è ricorsivo

Siano A e Ā entrambi r.e. Allora esistono funzioni calcolabili g_1 e g_2 tali che:

- $A = dom(g_1)$, quindi $sc_a(x) \simeq 1(g_1(x))$
- $\bar{A} = dom(g_2)$, quindi $sc\bar{A}(x) \simeq 1(g_2(x))$

Poiché $A \cup \bar{A} = \mathbb{N}$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$, per ogni $x \in \mathbb{N}$ abbiamo esattamente una delle due condizioni:

- $x \in A \Longrightarrow g_1(x) \downarrow$ e $g_2(x) \uparrow$
- $x \in \bar{A} \Longrightarrow g_1(x) \uparrow$ e $g_2(x) \downarrow$

Possiamo quindi costruire la funzione caratteristica di A come:

```
χₐ(x) = (μω.|S(e₁, x, ⟨ω⟩₁, ⟨ω⟩₂) ∨ S(e₂, x, ⟨ω⟩₁, ⟨ω⟩₂)|) - 1)₁
        · 1(χ_{S(e₁,x,⟨μω.|S(e₁,x,⟨ω⟩₁,⟨ω⟩₂)∨S(e₂,x,⟨ω⟩₁,⟨ω⟩₂)|⟩₁,⟨μω.|S(e₁,x,⟨ω⟩₁,⟨ω⟩
₂)∨S(e₂,x,⟨ω⟩₁,⟨ω⟩₂)|⟩₂)})
```

In termini più intuitivi, simuliamo entrambi i programmi e_1 ed e_2 in parallelo fino a quando uno dei due termina, poi restituiamo 1 se è terminato e_1 ($x \in A$) o 0 se è terminato e_2 ($x \in \bar{A}$).

Questa funzione è calcolabile, quindi A è ricorsivo. □

Esercizio 2

Problema: Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che $f(x) = x/2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ pari oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Soluzione:

Una tale funzione esiste.

Costruzione:

Definiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come:

```
f(x) = { x/2        se x è pari
       { h(x)       se x è dispari
```

dove $h : \mathbb{N}\_dispari \to \mathbb{N}$ è una funzione totale non calcolabile sui numeri dispari.

Costruzione di h:

Poiché l'insieme dei numeri dispari è infinito e in bijection con $\mathbb{N}$ tramite la funzione $g(n) = 2n+1$, possiamo trasferire qualsiasi funzione non calcolabile $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sui numeri dispari.

Sia f_0 una funzione totale non calcolabile (ad esempio, la funzione di Busy Beaver). Definiamo:

```
h(2n+1) = f₀(n)
```

Verifica che f è totale: f è definita su tutti i numeri naturali per costruzione.

Verifica che f non è calcolabile: Supponiamo per assurdo che f sia calcolabile. Allora la funzione:

```
f₀(n) = f(2n+1)
```

sarebbe calcolabile (composizione di funzioni calcolabili), contraddicendo il fatto che f_0 non è calcolabile.

Verifica che f(x) = x/2 per x pari: Per costruzione, $f(x) = x/2$ per ogni x pari. □

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}.\ x + k \in W_x\}$.

Soluzione:

A non è ricorsivamente enumerabile: Dimostriamo che $\bar{K} \leq_m A$.

Definiamo g(x,y) tramite:

```
g(x,y) = { ↑     se x ∈ K
         { 1     se x ∉ K
```

Per il teorema S-m-n, esiste s calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifichiamo la riduzione:

- $x \in K \implies W_{s(x)} = \emptyset \implies \exists k.\ s(x) + k \notin W_{s(x)} \implies s(x) \notin A$
- $x \notin K \implies W_{s(x)} = \mathbb{N} \implies \forall k.\ s(x) + k \in \mathbb{N} = W_{s(x)} \implies s(x) \in A$

Quindi $\bar{K} \leq_m A$, e poiché $\bar{K}$ non è r.e., A non è r.e.

Ā è ricorsivamente enumerabile: $\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ x + k \notin W_x\}$

La funzione semi-caratteristica di Ā è:

```
scĀ(x) = 1(μt.∃k≤t. ¬S(x, x+k, t))
```

Questa enumera W_x e verifica se esiste qualche k tale che x+k non appare nell'enumerazione entro t passi.

Conclusione: A non è ricorsivo. □

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : E_x \text{ infinito}\}$.

Soluzione:

V non è ricorsivamente enumerabile:

V è un insieme saturato (se $\varphi_x = \varphi_y$ allora $E_x = E_y$), con $V \neq \emptyset$ e $V \neq \mathbb{N}$.

Per il Teorema di Rice, V non è ricorsivo.

Per Rice-Shapiro, V non è r.e.: consideriamo la funzione identità $id \in V$ (ha codominio infinito), ma ogni sua restrizione finita non è in V.

$\bar{V}$ non è ricorsivamente enumerabile:

$\bar{V} = \{x \in \mathbb{N} : E_x \text{ finito}\}$

Similmente, $\bar{V}$ è saturato. Consideriamo la funzione costante $c(x) = 0 \in \bar{V}$ (ha codominio finito {0}), ma possiamo estenderla a funzioni con codominio infinito che non sono in $\bar{V}$.

Per Rice-Shapiro, $\bar{V}$ non è r.e.

Conclusione: V non è ricorsivo. □

Esercizio 5

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione e utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice k tale che $W_k = \{k \cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione totale calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi f(e)$.

Dimostrazione dell'esistenza di k:

Definiamo una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue. Per ogni $x \in \mathbb{N}$, f(x) è un indice di un programma che:

1. Ha x "hardcoded" al suo interno
2. Su input y, calcola e restituisce $x \cdot y$
3. Quindi la funzione computata da f(x) è $\varphi f(x)(y) = x \cdot y$

Per il teorema S-m-n, tale f è calcolabile.

Per il secondo teorema di ricorsione applicato a f, esiste k tale che:

```
ϕₖ = ϕf(k)
```

Questo significa che $\varphi_k(y) = k \cdot y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$.

Quindi:

```
Wₖ = dom(ϕₖ) = {y ∈ ℕ : ϕₖ(y) ↓} = ℕ
```

e

```
Eₖ = cod(ϕₖ) = {ϕₖ(y) : y ∈ ℕ} = {k · y : y ∈ ℕ} = {k · i : i ∈ ℕ}
```

Però il problema chiede $W_k = \{k \cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$, non E_k.

Correzione:

Definiamo f diversamente. Per ogni x, f(x) è un indice per una funzione che:

```
ϕf(x)(y) = { 1    se y è multiplo di x (y = x · i per qualche i)
           { ↑    altrimenti
```

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste k tale che $\varphi_k = \varphi f(k)$.

Quindi:

$$W_k = \{y \in \mathbb{N} : \phi_k(y) \downarrow\} = \{y \in \mathbb{N} : y \text{ è multiplo di } k\} = \{k \cdot i : i \in \mathbb{N}\}$$

dove abbiamo incluso $k \cdot 0 = 0$. □