Computabilità e Algoritmi - 5 Aprile 2013

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Dati due insiemi A, B ⊆ ℕ definire il significato di A ≤_m B. Dimostrare che, dato comunque A ⊆ ℕ, vale A r.e. sse A ≤_m K.

Soluzione:

Definizione di riduzione many-one: Dati A, B ⊆ ℕ, diciamo che A è many-one riducibile a B (A ≤_m B) se esiste una funzione f: ℕ → ℕ totale e calcolabile tale che: ∀x ∈ ℕ: x ∈ A ⟺ f(x) ∈ B

Teorema: A è r.e. ⟺ A ≤_m K

Dimostrazione:

Direzione (⇒): Se A è r.e., allora A ≤_m K

Supponiamo A r.e. Distinguiamo due casi:

Caso 1: A = ∅ Definiamo f(x) = e_0 per ogni x ∈ ℕ, dove e_0 ∉ K (ad esempio, l'indice di un programma che termina immediatamente). Allora ∀x: x ∈ ∅ ⟺ falso ⟺ f(x) = e_0 ∉ K. Quindi ∅ ≤_m K.

Caso 2: A ≠ ∅ Poiché A è r.e., esiste e ∈ ℕ tale che A = W_e = dom(φ_e).

Definiamo la funzione di riduzione f: ℕ → ℕ come segue:
Per ogni x ∈ ℕ, definiamo f(x) come l'indice del programma P_x:

```
P_x:
1. Simula ϕ_e(x)
2. Se ϕ_e(x) ↓, allora simula ϕ_x(x)
3. Restituisci il risultato di ϕ_x(x)
```

Formalmente, usando il teorema smn:
Definiamo g: ℕ² → ℕ:

```
g(x,y) = {
    ϕ_x(x)    se x ∈ A
    ↑         se x ∉ A
}
```

La funzione g è calcolabile: g(x,y) = φ_x(x) · 1(φ_e(x))

Per il teorema smn, esiste f: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che φ_{f(x)}(y) = g(x,y).

Verifica della riduzione:

- Se $x \in A$, allora $\varphi_e(x) \downarrow$, quindi $\varphi_{f(x)}(f(x)) = \varphi_x(x) \downarrow$, dunque $f(x) \in K$
- Se $x \notin A$, allora $\varphi_e(x) \uparrow$, quindi $\varphi_{f(x)}(f(x)) \uparrow$, dunque $f(x) \notin K$

Pertanto $A \leq_m K$.

Direzione (⇐): Se $A \leq_m K$, allora A è r.e.

Supponiamo $A \leq_m K$. Allora esiste $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che:
$\forall x \in \mathbb{N}: x \in A \iff f(x) \in K$

Poiché K è r.e., esiste una funzione semicaratteristica sc_K calcolabile.

Definiamo la funzione semicaratteristica di A:

```
sc_A(x) = sc_K(f(x))
```

Verifica:

- Se $x \in A$, allora $f(x) \in K$, quindi $sc_K(f(x)) = 1$, dunque $sc_A(x) = 1$
- Se $x \notin A$, allora $f(x) \notin K$, quindi $sc_K(f(x)) \uparrow$, dunque $sc_A(x) \uparrow$

Poiché f è calcolabile e sc_K è calcolabile, per composizione sc_A è calcolabile.
Quindi A è r.e.

Conclusione: A è r.e. $\iff A \leq_m K$. ∎

Esercizio 2

Problema: Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice totale crescente quando è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ allora $f(x) \leq f(y)$. La funzione f si dice binaria se $cod(f) \subseteq \{0, 1\}$. L'insieme delle funzioni totali crescenti binarie è numerabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione:

Risposta: Sì, l'insieme delle funzioni totali crescenti binarie è numerabile.

Dimostrazione:

Caratterizzazione delle funzioni totali crescenti binarie: Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale crescente binaria. Allora $cod(f) \subseteq \{0,1\}$ e f è non-decrescente.

Questo significa che f può assumere solo i valori 0 e 1, e una volta che f assume il valore 1, deve rimanere 1 per tutti gli argomenti successivi.

Forma generale: Ogni funzione f totale crescente binaria ha una delle seguenti forme:

1. $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ (funzione costante 0)
2. $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ (funzione costante 1)
3. Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che:

```
f(x) = {
    0  se x < k
    1  se x ≥ k
}
```

Biiezione con ℕ: Definiamo una funzione h che mappa ogni funzione totale crescente binaria a un numero naturale:

```
h(f) = {
    0          se f(x) = 0 ∀x ∈ ℕ
    1          se f(x) = 1 ∀x ∈ ℕ
    k + 2      se f(x) = 0 per x < k e f(x) = 1 per x ≥ k
}
```

Verifica che h è biettiva:

Iniettività: Se $f_1 \neq f_2$, allora:

- Se una è costante 0 e l'altra no, $h(f_1) \neq h(f_2)$
- Se una è costante 1 e l'altra no, $h(f_1) \neq h_2)$
- Se entrambe sono del tipo 3 con soglie $k_1 \neq k_2$, allora $h(f_1) = k_1 + 2 \neq k_2 + 2 = h(f_2)$

Suriettività: Per ogni $n \in \mathbb{N}$:

- $n = 0$: corrisponde alla funzione costante 0
- $n = 1$: corrisponde alla funzione costante 1
- $n \geq 2$: corrisponde alla funzione con soglia $k = n - 2$

Costruzione esplicita della biiezione: L'insieme delle funzioni totali crescenti binarie è in biiezione con ℕ tramite la corrispondenza:

- Funzione costante 0 ↔ 0
- Funzione costante 1 ↔ 1
- Funzione con soglia k ↔ k + 2

Enumerazione alternativa: Possiamo anche pensare a ogni funzione f come determinata dal più piccolo valore k tale che $f(k) = 1$, con la convenzione che $k = \infty$ se f è costante 0.

Conclusione: L'insieme delle funzioni totali crescenti binarie è numerabile perché è in biiezione con ℕ. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \mid k \cdot (x + 1) \in W_x \cap E_x$ per ogni $k \in \mathbb{N}\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene gli indici x tali che tutti i multipli di (x+1) appartengono sia al dominio che al codominio di φ_x.

Analisi della condizione: Per $x \in B$, deve valere che per ogni $k \in \mathbb{N}$: $k \cdot (x + 1) \in W_x \cap E_x$

Questo significa:

1. $\varphi_x(k \cdot (x + 1))$ è definita per ogni $k \in \mathbb{N}$
2. Esiste input che produce $k \cdot (x + 1)$ come output per ogni $k \in \mathbb{N}$

Analisi per x = 0: Se $x = 0$, la condizione diventa: $k \in W_0 \cap E_0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Questo richiede $W_0 = E_0 = \mathbb{N}$, cioè φ_0 deve essere una biiezione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

Ricorsività:

B non è ricorsivo. La condizione richiede di verificare proprietà infinite di φ_x.

Enumerabilità ricorsiva di B:

B non è r.e. La condizione "per ogni $k \in \mathbb{N}$" introduce una quantificazione universale che non può essere semidecisa.

Dimostrazione che B non è r.e.: Supponiamo per assurdo che B sia r.e. Allora potremmo semi-decidere se φ_x ha la proprietà che tutti i multipli di (x+1) sono sia nel dominio che nel codominio.

Consideriamo la seguente riduzione da $\bar{K}$:
Per $y \in \mathbb{N}$, costruiamo x_y tale che:

- Se $y \notin K$, allora φ_{x_y} soddisfa la condizione di B
- Se $y \in K$, allora φ_{x_y} non soddisfa la condizione di B

Questa costruzione, se possibile, darebbe $\bar{K} \leq_m B$, contraddicendo il fatto che $\bar{K}$ non è r.e.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ k \cdot (x + 1) \notin W_x \lor k \cdot (x + 1) \notin E_x\}$

$\bar{B}$ è r.e. Possiamo scrivere:

```
sc_B̄(x) = 1(μt. ∃k ≤ t. [¬H(x, k·(x+1), t) ∨ ∀y ≤ t. ¬S(x, y, k·(x+1), t)])
```

Questa funzione cerca un k e un tempo t tali che k·(x+1) non è nel dominio di φ_x o non è nel codominio di φ_x.

Osservazione importante: In realtà, B è molto probabilmente vuoto o quasi vuoto, perché la condizione è estremamente restrittiva. Richiedere che tutti i multipli di (x+1) siano sia nel dominio che nel codominio è molto difficile da soddisfare.

Analisi più dettagliata di B: Se $x \in B$, allora φ_x deve essere definita su tutti i multipli di $(x+1)$ e deve produrre tutti i multipli di $(x+1)$ come output. Per $x \geq 1$, questo richiede che φ_x produca infiniti valori specifici, il che è molto restrittivo.

Conclusione: B non è ricorsivo, B non è r.e., $\bar{B}$ è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è k-bounded se $\forall x \in dom(f)$ vale $f(x) < k$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, studiare la ricorsività dell'insieme $A_k = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ k-bounded}\}$, ovvero dire se A_k e $\bar{A}_k$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A_k contiene gli indici x tali che φ_x è k-bounded, cioè $\varphi_x(y) < k$ per ogni $y \in dom(\varphi_x)$.

Analisi della struttura:

A_k è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $A_k = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}_k\}$, dove $\mathcal{A}_k = \{f \in \mathcal{C} : \forall y \in dom(f).\ f(y) < k\}$.

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché A_k è saturo, dobbiamo verificare se $A_k = \emptyset$, $\mathbb{N}$ o né l'uno né l'altro.

Caso k = 0: $A_0 = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in dom(\varphi_x).\ \varphi_x(y) < 0\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x = 0\}$

Questo è l'insieme degli indici della funzione sempre indefinita, che non è ricorsivo (come dimostrato nell'Esercizio 3 dell'esame del 20 Giugno 2013).

Caso k > 0:

- $A_k \neq \emptyset$: La funzione costante $f(x) = 0$ è 0-bounded, quindi a fortiori k-bounded per $k > 0$
- $A_k \neq \mathbb{N}$: La funzione $f(x) = k$ ha codominio $\{k\}$, quindi non è k-bounded

Per il teorema di Rice, A_k non è ricorsivo per $k > 0$.

Enumerabilità ricorsiva di A_k:

A_k non è r.e. per $k \geq 0$. Utilizziamo il teorema di Rice-Shapiro.

Per k > 0: Consideriamo la funzione identità $id(x) = x$. Abbiamo $id \notin \mathcal{A}_k$ perché $id(k) = k \not< k$.

Consideriamo la funzione finita $\theta(0) = 0$, ↑ altrimenti. Abbiamo $\theta \subseteq id$ e $0 < k$, quindi $\theta \in \mathcal{A}_k$.

Per Rice-Shapiro, esiste $f \notin \mathcal{A}_k$ tale che $\exists \theta \subseteq f$ finita con $\theta \in \mathcal{A}_k$, quindi A_k non è r.e.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{A}_k$:

$\bar{A}_k = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in dom(\varphi_x). \varphi_x(y) \geq k\}$

$\bar{A}_k$ è r.e. Possiamo scrivere:

```
sc_Ā_k(x) = 1(μt. ∃y ≤ t. [S(x, y, v, t) ∧ v ≥ k] per qualche v ≤ t)
```

Più precisamente:

```
sc_Ā_k(x) = 1(μt. ∃y ≤ t. ∃v ≥ k. S(x, y, v, t))
```

Questa funzione cerca un input y e un tempo t tali che $\varphi_x(y)$ converge a un valore $\geq k$.

Caso speciale k = 0: $\bar{A}_0 = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in dom(\varphi_x). \varphi_x(y) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{N} : dom(\varphi_x) \neq \emptyset\}$

Questo è r.e. con semicaratteristica:

```
sc_Ā₀(x) = 1(μt. ∃y ≤ t. H(x, y, t))
```

Conclusione:

- Per k = 0: A_0 non è ricorsivo, A_0 non è r.e., $\bar{A}_0$ è r.e.
- Per k > 0: A_k non è ricorsivo, A_k non è r.e., $\bar{A}_k$ è r.e. ∎

Esercizio 5

Problema: Si enunci il Secondo Teorema di Ricorsione e lo si utilizzi per dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e(y) = y + e$ se y multiplo di e, ↑ altrimenti.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Dimostrazione dell'esistenza dell'indice e:

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(n,y) = {
    y + n    se n > 0 ∧ y è multiplo di n
    ↑        altrimenti
}
```

Verifica che g è calcolabile:

```
g(n,y) = (y + n) · sg(n) · sg(μz ≤ y. |y - z·n|)
```

Dove:

- sg(n) verifica che n > 0
- μz ≤ y. |y - z·n| trova se y è multiplo di n (z tale che z·n = y)
- Se y è multiplo di n, esiste z ≤ y tale che z·n = y

Più precisamente:

```
g(n,y) = {
    (y + n) · 1(μz ≤ y. |y - z·n|)    se n > 0
    ↑                                   se n = 0
}
```

La funzione g è calcolabile perché combina operazioni primitive ricorsive e minimalizzazione limitata.

Applicazione del teorema smn: Per il teorema smn, esiste s: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che: φ_{s(n)}(y) = g(n,y)

Applicazione del Secondo Teorema di Ricorsione: Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione s, esiste e ∈ ℕ tale che: φ_e = φ_{s(e)}

Verifica della proprietà richiesta: Da φ_e = φ_{s(e)}, abbiamo: φ_e(y) = φ_{s(e)}(y) = g(e,y)

Quindi:

```
φ_e(y) = {
    y + e    se e > 0 ∧ y è multiplo di e
    ↑        altrimenti
}
```

Caso e = 0: Se e = 0, allora $\varphi_0(y)$ = g(0,y) ↑ per ogni y, il che soddisfa la condizione "↑ altrimenti" poiché non esistono multipli di 0 diversi da 0.

Caso e > 0: Se e > 0, allora:

- Per y multiplo di e: φ_e(y) = y + e
- Per y non multiplo di e: φ_e(y) ↑

Conclusione: Esiste e ∈ ℕ tale che φ_e(y) = y + e se y è multiplo di e, ↑ altrimenti. ∎