Computabilità e Algoritmi - 25 Gennaio 2016

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Dimostrare che un insieme A ⊆ ℕ è ricorsivo se e solo se A e Ā sono r.e.

Teorema: Un insieme A ⊆ ℕ è ricorsivo se e solo se sia A che Ā sono ricorsivamente enumerabili.

Dimostrazione:

(⇒) Se A è ricorsivo, allora A e Ā sono r.e.:

Se A è ricorsivo, allora la funzione caratteristica χ_a è computabile:
$\chi_a(x)$ = {1 se x ∈ A
{0 se x ∉ A

Definiamo le funzioni semicaratteristiche:

- $sc_a(x) = 1(\mu t.|\chi_a(x) - 1|)$ = {1 se x ∈ A; ↑ se x ∉ A
- $sc_{\bar{a}}(x) = 1(\mu t.|\chi_a(x) - 0|)$ = {1 se x ∉ A; ↑ se x ∈ A

Entrambe sono computabili poiché χ_a è computabile, quindi A e Ā sono r.e.

(⇐) Se A e Ā sono r.e., allora A è ricorsivo:

Poiché A è r.e., esiste sc_a computabile tale che:
$sc_a(x)$ = {1 se x ∈ A
{↑ se x ∉ A

Poiché Ā è r.e., esiste $sc_{\bar{a}}$ computabile tale che:
$sc_{\bar{a}}(x)$ = {1 se x ∉ A
{↑ se x ∈ A

Definiamo la funzione caratteristica χ_a tramite esecuzione parallela:

Algoritmo per $\chi_a(x)$:

1. Esegui in parallelo $sc_a(x)$ e $sc_{\bar{a}}(x)$
2. Se $sc_a(x)$ termina con output 1, restituisci 1
3. Se $sc_{\bar{a}}(x)$ termina con output 1, restituisci 0

Correttezza:

- Se x ∈ A: $sc_a(x) = 1$ (termina), $sc_{\bar{a}}(x) = \uparrow$, quindi $\chi_a(x) = 1$
- Se x ∉ A: $sc_a(x) = \uparrow$, $sc_{\bar{a}}(x) = 1$ (termina), quindi $\chi_a(x) = 0$

Terminazione: Per ogni x ∈ ℕ, esattamente una delle due semicaratteristiche termina, quindi χ_a è totale.

Pertanto χ_a è computabile e A è ricorsivo. □

Esercizio 2

Definire una funzione f : ℕ → ℕ totale non calcolabile tale che f(x) = x per infiniti argomenti x ∈ ℕ oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Risposta: Sì, esistono tali funzioni.

Costruzione esplicita:

Definiamo f : ℕ → ℕ come segue:
f(x) = {x   se x ∉ K ∨ x ∈ {0, 1, 2, 3, ...} ∧ x è pari
{x+1 se x ∈ K ∧ x è dispari

Verifica che f(x) = x per infiniti x: Poiché K è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo, $\bar{K}$ è infinito. Inoltre, tutti i numeri pari soddisfano f(x) = x. Quindi f(x) = x per infiniti valori.

Verifica che f è totale: f è definita per ogni x ∈ ℕ tramite casework completo.

Verifica che f non è calcolabile: Supponiamo f calcolabile. Allora possiamo decidere K come segue:

Algoritmo per decidere x ∈ K:

1. Calcola f(x)
2. Se x è pari:
   - f(x) = x sempre, non possiamo decidere
3. Se x è dispari:
   - Se f(x) = x, allora x ∉ K
   - Se f(x) = x+1, allora x ∈ K

Questo algoritmo decide K sui numeri dispari. Combinando con informazioni aggiuntive, questo porterebbe a decidere K completamente, contraddicendo l'indecidibilità di K.

Costruzione alternativa più rigorosa:

Definiamo f tramite diagonalizzazione:
f(x) = {x   se x ≠ e per ogni e ∈ S
{x+1   se x = e per qualche e ∈ S

dove S ⊆ $\bar{K}$ è un sottoinsieme infinito di $\bar{K}$ scelto in modo che decidere l'appartenenza a S sia equivalente a risolvere un problema indecidibile.

Teorema generale: Per ogni insieme infinito A ⊆ ℕ non ricorsivo, possiamo costruire f tale che:

- f(x) = x per x ∉ A
- f(x) ≠ x per x ∈ A
- f non è calcolabile

Quindi tali funzioni esistono. □

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme A = {x | φ_x strettamente crescente}.

Definizione: φ_x è strettamente crescente se $\forall y,z \in W_x$: $y < z \Longrightarrow \varphi_x(y) < \varphi_x(z)$.

Saturazione: A è saturato: $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ dove $\mathcal{A} = \{f \in C : f$ è strettamente crescente$\}$.

Non ricorsività per Rice:

- $A \neq \emptyset$: la funzione $f(x) = x$ è strettamente crescente
- $A \neq \mathbb{N}$: la funzione costante $f(x) = 0$ non è strettamente crescente

Per il teorema di Rice, A non è ricorsivo.

Analisi con Rice-Shapiro per A non r.e.:

Consideriamo $f(x) = x$ (funzione identità). Chiaramente $f \in \mathcal{A}$ (è strettamente crescente).

Consideriamo $\theta \subset f$ finita: $\theta = \{(0,0), (1,1), ..., (n,n)\}$ per qualche n.
Questa θ è strettamente crescente sui suoi punti di definizione, quindi $\theta \in \mathcal{A}$.

Per Rice-Shapiro: se $f \in \mathcal{A}$ e $\forall\theta \subseteq f$ finita: $\theta \in \mathcal{A}$, allora A dovrebbe essere r.e.

Controesempio per mostrare A non r.e.:

Consideriamo invece $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$. Questa funzione non è strettamente crescente ($g(0) = g(1) = 0$).

Ma consideriamo $\theta = \{(0,0)\} \subseteq g$. Su $dom(\theta) = \{0\}$, θ è "vacuamente" strettamente crescente.

Tuttavia, questo approccio richiede un'analisi più fine. Utilizziamo invece una riduzione diretta.

Dimostrazione che A non è r.e. tramite riduzione:

Dimostriamo $\bar{K} \leq_m A$. Definiamo g(u,v):

$g(u,v) = \{v$ se $u \notin K \wedge v \leq u$ $\{v+1$ se $u \notin K \wedge v > u$
$\{\uparrow$ se $u \in K$

Per SMN, esiste s tale che $\varphi_{s(u)}(v) = g(u,v)$.

- Se $u \notin K$: $\varphi_{s(u)}$ è strettamente crescente su $[0,u]$ e poi cresce di 1, quindi è strettamente crescente globalmente. Quindi $s(u) \in A$.
- Se $u \in K$: $\varphi_{s(u)}$ è sempre indefinita, quindi banalmente strettamente crescente. Quindi $s(u) \in A$.

Questa riduzione non funziona. Ricostruiamo:

$g(u,v) = \{v \quad$ se $u \notin K$
$\{0 \quad$ se $u \in K$

- Se $u \notin K$: $\varphi_{s(u)}(v) = v$ è strettamente crescente, quindi $s(u) \in A$
- Se $u \in K$: $\varphi_{s(u)}(v) = 0$ è costante, quindi non strettamente crescente, quindi $s(u) \notin A$

Quindi $\bar{K} \leq_m A$, e poiché $\bar{K}$ non è r.e., A non è r.e.

Complemento $\bar{A}$: $\bar{A}$ è semidecidibile. Per verificare che φ_x non è strettamente crescente, cerchiamo $y < z$ in W_x tali che $\varphi_x(y) \geq \varphi_x(z)$:

$sc\bar{A}(x) = 1(\mu w.\exists y,z,t_1,t_2.\ y < z \wedge S(x,y,v_y,t_1) \wedge S(x,z,v_u,t_2) \wedge v_y \geq v_u)$

Conclusione:

- A non è ricorsivo
- A non è r.e.
- $\bar{A}$ è r.e. ma non ricorsivo □

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme B = {x ∈ ℕ : x > 0 ∧ x/2 ∉ E_x}.

Analisi: $B = \{x \in \mathbb{N} : x > 0 \wedge \lfloor x/2 \rfloor \notin E_x\}$

L'insieme B contiene gli indici $x > 0$ tali che $\lfloor x/2 \rfloor$ non appartiene all'immagine di φ_x.

Non saturazione: B non è saturato. Consideriamo $x = 4$:

- Se φ_4 è tale che $2 \notin E_4$, allora $4 \in B$
- Ma possiamo avere $\varphi_4 = \varphi_{4'}$ con $4' \neq 4$ e $\lfloor 4'/2 \rfloor \neq 2$, quindi il comportamento può cambiare

Analisi diretta della ricorsività:

Semidecidibilità di $\bar{B}$: $\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : x = 0 \vee \lfloor x/2 \rfloor \in E_x\}$

Per $x > 0$, $x \in \bar{B} \iff \lfloor x/2 \rfloor \in E_x \iff \exists u,t.\ S(x,u,\lfloor x/2 \rfloor,t)$

$sc\bar{B}(x) = \{1$ se $x = 0$
$\{1(\mu w.\exists u,t.\ S(x,u,\lfloor x/2 \rfloor,t))$ se $x > 0$

Quindi $\bar{B}$ è r.e.

Non ricorsività di B: Dimostriamo $K \leq_m \bar{B}$ (quindi $\bar{B}$ non è ricorsivo, quindi B non è ricorsivo).

Definiamo g(u,v):
$g(u,v) = \{\lfloor 2u+1 \rfloor/2\rfloor = u$ se $u \in K \wedge v = 0$
$\{\uparrow$ altrimenti

Per SMN, esiste s tale che $\varphi_{s(u)}(v) = g(u,v)$.

Costruiamo la riduzione $h(u) = 2u+1$:

- Se $u \in K$: $\varphi_{s(u)}(0) = u$, quindi $u \in E_{s(u)}$, e $\lfloor h(u)/2 \rfloor = \lfloor (2u+1)/2 \rfloor = u \in E_{s(u)}$ Quindi $h(u) = 2u+1 \in \bar{B}$
- Se $u \notin K$: $E_{s(u)} = \emptyset$, quindi $u \notin E_{s(u)}$ Quindi $h(u) = 2u+1 \notin \bar{B}$ (cioè $h(u) \in B$)

Quindi $K \leq_m \bar{B}$, quindi $\bar{B}$ non è ricorsivo.

Non semidecidibilità di B: Se B fosse r.e., con $\bar{B}$ r.e., allora B sarebbe ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione:

- B non è ricorsivo
- B non è r.e.
- $\bar{B}$ è r.e. ma non ricorsivo □

Esercizio 5

Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = x + y$.

Secondo Teorema di Ricorsione (Kleene): Per ogni funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e computabile, esiste $e_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{e0} = \varphi f(e_0)$.

Dimostrazione dell'esistenza di x:

Vogliamo costruire x tale che $\varphi_x(y) = x + y$ per ogni y.

Costruzione della funzione ausiliaria: Definiamo $h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $h(e,y) = e + y$

Questa funzione è chiaramente computabile.

Applicazione del teorema SMN: Per il teorema SMN, esiste una funzione $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e computabile tale che: $\varphi_{s(e)}(y) = h(e,y) = e + y$

In particolare, per ogni $e \in \mathbb{N}$:
$\varphi_{s(e)}(y) = e + y$

Applicazione del Secondo Teorema di Ricorsione: La funzione $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è totale e computabile. Applicando il secondo teorema di ricorsione a s, esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che: $\varphi_x = \varphi_{s(x)}$

Verifica della proprietà richiesta: Da $\varphi_x = \varphi_{s(x)}$ e $\varphi_{s(x)}(y) = x + y$, otteniamo: $\varphi_x(y) = x + y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$

Interpretazione: Abbiamo dimostrato l'esistenza di un indice x che, quando interpretato come programma, calcola la funzione che aggiunge x al suo input. In altre parole, il programma con indice x "conosce" il proprio indice e lo utilizza nel calcolo.

Questo è un esempio classico di autoriflessione computazionale resa possibile dal secondo teorema di ricorsione. □