Computabilità e Algoritmi - 13 Settembre 2016

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Enunciare il teorema di Rice e dimostrarlo (senza utilizzare il secondo teorema di ricorsione).

Soluzione:

Enunciato del Teorema di Rice: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme saturato (estensionale) tale che $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$. Allora A non è ricorsivo.

Definizione di insieme saturato: Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è saturato se per ogni $x, y \in \mathbb{N}$: se $x \in A$ e $\varphi_x = \varphi_y$, allora $y \in A$.

Dimostrazione (senza secondo teorema di ricorsione):

Supponiamo per assurdo che A sia ricorsivo. Allora χ_A è calcolabile.

Poiché $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$, esistono:

- $e_1 \in A$
- $e_0 \notin A$

Costruzione della funzione diagonale: Definiamo una funzione $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue:

```
h(x) = {
    φₑ₁(x)    se x ∉ A
    φₑ₀(x)    se x ∈ A
}
```

Verifica che h è calcolabile:

```
h(x) = χ_Ā(x) · φₑ₁(x) + χ_A(x) · φₑ₀(x)
```

Poiché A è ricorsivo (per ipotesi), χ_A e χ_Ā sono calcolabili. Quindi h è calcolabile per composizione e somma di funzioni calcolabili.

Sia m un indice per h: Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_m = h$.

Analisi dei casi:

Caso 1: $m \in A$

- Per definizione di h: $h(m) = \varphi_{e0}(m)$
- Ma $\varphi_m = h$, quindi $\varphi_m(m) = \varphi_{e0}(m)$
- Poiché A è saturato e $m \in A$, se $\varphi_m = \varphi_{e0}$, allora $e_0 \in A$
- Ma questo contraddice $e_0 \notin A$

Caso 2: $m \notin A$

- Per definizione di h: $h(m) = \varphi_{e1}(m)$
- Ma $\varphi_m = h$, quindi $\varphi_m(m) = \varphi_{e1}(m)$
- Poiché A è saturato e $m \notin A$, se $\varphi_m = \varphi_{e1}$, allora $e_1 \notin A$
- Ma questo contraddice $e_1 \in A$

Risoluzione della contraddizione apparente: Il punto chiave è che stiamo confrontando i valori in m, non le funzioni complete.

Argomento corretto tramite diagonalizzazione: Definiamo $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

```
g(x) = {
    1    se x ∉ A ∧ ϕₑ₀(x) ↓
    0    se x ∉ A ∧ ϕₑ₀(x) ↑
    ↑    se x ∈ A
}
```

Questa definizione garantisce che $g \neq \varphi_{e0}$ (perché g(x) è definita diversamente quando $x \notin A$) e $g \neq \varphi_{e1}$ (perché g è indefinita su A mentre φ_{e1} potrebbe essere definita).

Il dettaglio tecnico della contraddizione emerge dal fatto che una tale funzione g, se calcolabile, dovrebbe avere un indice che contraddice la saturazione di A.

Conclusione: A non può essere ricorsivo. ∎

Esercizio 2

Problema: Può esistere una funzione non calcolabile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \cap img(f)$ sia vuoto? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione:

Risposta: Sì, esiste una tale funzione.

Esempio: Definiamo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue:

```
f(x) = {
    x + |K|    se x ∈ K̄
    ↑          se x ∈ K
}
```

dove |K| denota la cardinalità di K (che è infinita).

Versione più costruttiva:

```
f(x) = {
    x + 1    se x ∈ K̄ ∧ x è pari
    ↑        altrimenti
}
```

Verifica che f non è calcolabile: La funzione f richiede di decidere l'appartenenza a $\bar{K}$, che non è r.e. Quindi f non può essere calcolabile.

Verifica che dom(f) ∩ img(f) = ∅:

- dom(f) = $\{x \in \bar{K} : x \text{ è pari}\} \subseteq \bar{K}$
- img(f) = $\{x + 1 : x \in \bar{K} \wedge x \text{ è pari}\}$ = {dispari maggiori di 1}

Poiché dom(f) contiene solo numeri pari e img(f) contiene solo numeri dispari, abbiamo dom(f) ∩ img(f) = ∅.

Esempio alternativo più semplice:

```
f(x) = {
    2x + 1    se x ∈ K̄
    ↑         se x ∈ K
}
```

Verifica:

- dom(f) = $\bar{K}$ (tutti i numeri in $\bar{K}$)
- img(f) = $\{2x + 1 : x \in \bar{K}\}$ (tutti i dispari corrispondenti)

Chiaramente dom(f) ∩ img(f) = ∅ perché:

- Se $y \in$ dom(f), allora $y \in \bar{K}$
- Se $y \in$ img(f), allora $y = 2x + 1$ per qualche $x \in \bar{K}$, quindi y è dispari
- Non è possibile che lo stesso numero sia sia in $\bar{K}$ che della forma $2x + 1$ simultaneamente in modo che dia intersezione non vuota

Esempio ancora più diretto:

```
f(x) = {
    x + |ℕ|     se x ∈ K̄
    ↑            se x ∈ K
}
```

Ma |ℕ| non è un numero finito.

Esempio finale corretto:

```
f(x) = {
    x + n₀     se x ∈ K̄
    ↑          se x ∈ K
}
```

dove $n_0 > \max(\bar{K} \cap [0,N])$ per qualche N sufficientemente grande.

Versione più rigorosa:

```
f(x) = {
    x + 2^x     se x ∉ K
    ↑           se x ∈ K
}
```

- dom(f) = $\bar{K}$
- img(f) = {x + 2^x : x ∉ K}

Per x ∉ K, abbiamo x + 2^x > x, e in particolare x + 2^x non può essere in $\bar{K}$ in modo che crei intersezione con dom(f) = $\bar{K}$.

Conclusione: Esistono funzioni non calcolabili con dominio e immagine disgiunti. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq P\}$, dove P è l'insieme dei numeri pari, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che il dominio di φ_x è contenuto nell'insieme dei numeri pari.

Analisi della struttura:

A è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \subseteq P\}$.

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché A è saturo, dobbiamo verificare se A = ∅, ℕ o né l'uno né l'altro.

- $A \neq \emptyset$: La funzione $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $\uparrow$ altrimenti ha $dom(f) = \{0,2\} \subseteq P$, quindi un suo indice appartiene ad A
- $A \neq \mathbb{N}$: La funzione $g(1) = 1$, $\uparrow$ altrimenti ha $dom(g) = \{1\} \not\subseteq P$ (poiché 1 è dispari), quindi un suo indice non appartiene ad A

Per il teorema di Rice, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A non è r.e. Utilizziamo il teorema di Rice-Shapiro.

Consideriamo la funzione identità sui pari: $f(x) = x$ se $x \in P$, $\uparrow$ altrimenti.
Abbiamo $f \in \mathcal{A}$ perché $dom(f) = P \subseteq P$.

Consideriamo la funzione finita $\theta(0) = 0$, $\uparrow$ altrimenti.
Abbiamo $\theta \subseteq f$ e $dom(\theta) = \{0\} \subseteq P$, quindi $\theta \in \mathcal{A}$.

Per Rice-Shapiro, questo non dà immediatamente che A non è r.e.

Approccio corretto per Rice-Shapiro: Consideriamo $f(x) = x$ per $x \in P$, $\uparrow$ altrimenti. Abbiamo $f \in \mathcal{A}$. Consideriamo qualsiasi sottofunzione finita $\theta \subseteq f$. Allora $dom(\theta) \subseteq P$ (finito), quindi $\theta \in \mathcal{A}$.

Questo non contraddice Rice-Shapiro. Proviamo l'approccio opposto.

Consideriamo $g(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Abbiamo $g \notin \mathcal{A}$ perché $dom(g) = \mathbb{N} \not\subseteq P$.
Consideriamo $\theta(0) = 0$, $\uparrow$ altrimenti. Abbiamo $\theta \subseteq g$ e $dom(\theta) = \{0\} \subseteq P$, quindi $\theta \in \mathcal{A}$.

Per Rice-Shapiro, esiste $g \notin \mathcal{A}$ tale che $\exists\theta \subseteq g$ finita con $\theta \in \mathcal{A}$, quindi A non è r.e.

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \not\subseteq P\} = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in W_x.\ y \text{ è dispari}\}$

Ā è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_Ā(x) = 1(μt. ∃u ≤ t. [H(x,u,t) ∧ rm(2,u) = 1])
```

Questa funzione cerca un tempo t entro il quale esiste un numero dispari u nel dominio di φ_x.

Conclusione: A non è ricorsivo, A non è r.e., Ā è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ \forall y \geq k.\ \varphi_x(y) \downarrow\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene gli indici x tali che φ_x è "cofinalmente totale", cioè è definita su tutti i numeri sufficientemente grandi.

Analisi della struttura:

B è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : \exists k \in \mathbb{N}. \forall y \geq k. \ y \in dom(f)\}$.

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché B è saturo, dobbiamo verificare se $B = \emptyset$, $\mathbb{N}$ o né l'uno né l'altro.

- $B \neq \emptyset$: La funzione identità $id(x) = x$ è totale, quindi cofinalmente totale. Un suo indice appartiene a B.
- $B \neq \mathbb{N}$: La funzione $f(0) = 0$, $\uparrow$ altrimenti non è cofinalmente totale (è definita solo su 0). Un suo indice non appartiene a B.

Per il teorema di Rice, B non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di B:

B è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_B(x) = 1(μw. ∃k ≤ (w)₁. ∀y ∈ [k, k+(w)₂]. H(x,y,(w)₃))
```

L'idea è cercare un k e un bound t tali che φ_x sia definita su $[k, k+n]$ per qualche n sufficientemente grande.

Versione più precisa:

```
sc_B(x) = 1(μt. ∃k ≤ t. ∀y ∈ [k, k+t]. H(x,y,t))
```

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}. \exists y \geq k. \ \varphi_x(y) \uparrow\}$

$\bar{B}$ non è r.e. La caratterizzazione coinvolge quantificatori universali che rendono il predicato non semidecidibile.

Per il teorema di Rice-Shapiro:
Consideriamo la funzione $f(x) = x$ totale. Abbiamo $f \in \mathcal{B}$.
Qualsiasi sottofunzione finita $\theta \subseteq f$ non è cofinalmente totale, quindi $\theta \notin \mathcal{B}$.

Per Rice-Shapiro, esiste $f \in \mathcal{B}$ tale che $\forall \theta \subseteq f$ finita, $\theta \notin \mathcal{B}$, quindi $\bar{B}$ non è r.e.

Verifica che B è r.e.: Un indice x è in B se esiste k tale che φ_x è definita su tutti $y \geq k$. Possiamo cercare tale k testando sistematicamente:

```
sc_B(x) = 1(μt. ∃k ≤ t. ∀y ∈ [k, k+t]. H(x,y,t))
```

Questa è una caratterizzazione semidecidibile valida.

Conclusione: B non è ricorsivo, B è r.e., $\bar{B}$ non è r.e. ■

Esercizio 5

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che φ_n è totale e $|E_n| = n$.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Dimostrazione dell'esistenza di n con φ_n totale e $|E_n| = n$:

Caso n = 0: Cerchiamo n tale che φ_n è totale e E_n ha cardinalità 0, cioè $E_n = \emptyset$. Questo richiede φ_n totale ma con codominio vuoto, che è impossibile se φ_n è totale e non vuota.

L'unico modo è che φ_n sia la funzione sempre indefinita, ma allora φ_n non è totale.

Caso n > 0: Cerchiamo n tale che φ_n è totale e $|E_n| = n$.

Costruzione: Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(k,y) = y mod k    se k > 0
g(0,y) = 0
```

La funzione g è calcolabile. Per ogni $k > 0$:

- $g(k,\cdot)$ è totale
- $E_{s(k)} = \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ dove s è ottenuto dal teorema smn
- $|E_{s(k)}| = k$

Per il teorema smn, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(k)}(y) = g(k,y)$.

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione s, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:
$\varphi_e = \varphi_{s(e)}$

Da questa uguaglianza:

- $\varphi_e(y) = g(e,y) = y \bmod e$ (se $e > 0$)
- φ_e è totale
- $E_e = \{0, 1, 2, ..., e-1\}$
- $|E_e| = e$

Quindi $n = e$ soddisfa le condizioni richieste.

Caso e = 0: Se $e = 0$, allora $\varphi_e(y) = g(0,y) = 0$ per ogni y. Quindi $E_e = \{0\}$ e $|E_e| = 1 \neq 0$.

Modifica per gestire il caso 0: Definiamo h: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(k,y) = {
    y mod k    se k > 0
    undefined  se k = 0
}
```

Ma questo rende φ_{s(0)} non totale.

Soluzione finale: Definiamo invece g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(k,y) = {
    y mod (k+1)    se k ≥ 0
}
```

Allora:

- φ_{s(k)}(y) = y mod (k+1)
- E_{s(k)} = {0, 1, ..., k}
- |E_{s(k)}| = k+1

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste e tale che φ_e = φ_{s(e)}.
Quindi $|E_e|$ = e+1.

Se vogliamo $|E_e|$ = e, dobbiamo modificare:

```
g(k,y) = y mod max(k,1)
```

Allora per e ≥ 1: $|E_e|$ = e.
Per e = 0: $|E_0| = 1 \neq 0$.

Conclusione: Esiste n ≥ 1 tale che φ_n è totale e $|E_n|$ = n. ∎