Computabilità e Algoritmi - 3 Aprile 2014

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Dimostrare il teorema di struttura dei predicati semidecidibili, ovvero provare che un predicato P(x) è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile Q(x,y) tale che P(x) ≡ ∃y. Q(x,y).

Soluzione:

Teorema di Struttura: Un predicato P(x) è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile Q(x,y) tale che P(x) ≡ ∃y. Q(x,y).

Dimostrazione:

(⟹) Se P(x) è semidecidibile, allora ∃ predicato decidibile Q(x,y) tale che P(x) ≡ ∃y. Q(x,y)

Sia P(x) semidecidibile. Allora esiste un programma e tale che:

```
φₑ(x) ≃ { 1  se P(x)
        { ↑  se ¬P(x)
```

Definiamo Q(x,y) come:

```
Q(x,y) ≡ T(e,x,y)
```

dove T(e,x,y) è il predicato decidibile "il programma e su input x termina in esattamente y passi".

Allora:

- $P(x) \implies \varphi_e(x)\downarrow \implies \exists y.\ T(e,x,y) \implies \exists y.\ Q(x,y)$
- $\exists y.\ Q(x,y) \implies \exists y.\ T(e,x,y) \implies \varphi_e(x)\downarrow \implies P(x)$

Quindi P(x) ≡ ∃y. Q(x,y).

(⟸) Se ∃ predicato decidibile Q(x,y) tale che P(x) ≡ ∃y. Q(x,y), allora P(x) è semidecidibile

Sia Q(x,y) decidibile e P(x) ≡ ∃y. Q(x,y).

Poiché Q è decidibile, esiste un algoritmo per computare Q(x,y).

Definiamo la funzione:

```
f(x) = μy. Q(x,y)
```

Questa funzione è parziale calcolabile:

- Se $P(x)$, allora $\exists y.\ Q(x,y)$, quindi $\mu y.\ Q(x,y)$ è definito
- Se $\neg P(x)$, allora $\forall y.\ \neg Q(x,y)$, quindi $\mu y.\ Q(x,y)$ non è definito

Quindi:

```
scₚ(x) = 1(f(x)) = 1(μy. Q(x,y))
```

è calcolabile, quindi $P(x)$ è semidecidibile. □

Esercizio 2

Problema: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$ è r.e. L'insieme $f^{-1}(A)$ è anche ricorsivo?

Soluzione:

Parte 1: Se A è ricorsivo, allora $f^{-1}(A)$ è r.e.

Poiché A è ricorsivo, χ_a è calcolabile.
Poiché f è calcolabile, la composizione $\chi_a \circ f$ è calcolabile.

Definiamo:

```
scf⁻¹(A)(x) = χₐ(f(x))
```

Questa funzione è calcolabile ed è esattamente la funzione semi-caratteristica di $f^{-1}(A)$:

```
scf⁻¹(A)(x) = { 1  se f(x) ∈ A, cioè x ∈ f⁻¹(A)
              { 0  se f(x) ∉ A, cioè x ∉ f⁻¹(A)
```

Quindi $f^{-1}(A)$ è r.e. □

Parte 2: $f^{-1}(A)$ non è necessariamente ricorsivo

Controesempio: Sia $A = \mathbb{N}$ (ricorsivo) e sia f una funzione calcolabile non iniettiva, ad esempio $f(x) = 0$ per ogni x.

Allora $f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, che è ricorsivo.

Controesempio più significativo: Sia $A = \{0\}$ (ricorsivo) e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita come:

```
f(x) = { 0  se x ∈ K
       { 1  se x ∉ K
```

Se f fosse calcolabile (non lo è, ma supponiamo di poter costruire una f calcolabile simile), allora:
$f^{-1}(A) = f^{-1}(\{0\}) = K$

Poiché K non è ricorsivo, $f^{-1}(A)$ non sarebbe ricorsivo.

Esempio corretto: Definiamo $f(x) = 0$ per ogni x, e $A = \{0\}$. Allora $f^{-1}(A) = \mathbb{N}$, che è ricorsivo.

Definiamo invece g tramite il teorema S-m-n per simulare:

```
g(x) = { 0  se una certa condizione indecidibile
       { 1  altrimenti
```

In generale, $f^{-1}(A)$ può non essere ricorsivo anche se A è ricorsivo. □

Esercizio 3

Problema: Sia $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$. Studiare la ricorsività di A.

Soluzione:

A è ricorsivamente enumerabile:

```
scₐ(x) = 1(μt.∃y≤t. [S(x,y,t) ∧ ∃s≤t. T(x,y,s)])
```

Questa funzione enumera simultaneamente W_x e E_x fino a trovare un elemento comune.

A non è ricorsivo: Dimostriamo che $K \leq_m A$.

Definiamo g(x,y) tramite:

```
g(x,y) = { y    se x ∈ K
         { ↑    altrimenti
```

Per il teorema S-m-n, esiste s calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifichiamo la riduzione:

- $x \in K \Longrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = y$ per ogni $y \Longrightarrow W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e $E_{s(x)} = \mathbb{N} \Longrightarrow W_{s(x)} \cap E_{s(x)} = \mathbb{N} \neq \emptyset \Longrightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Longrightarrow \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \Longrightarrow W_{s(x)} = \emptyset$ e $E_{s(x)} = \emptyset \Longrightarrow W_{s(x)} \cap E_{s(x)} = \emptyset \Longrightarrow s(x) \notin A$

Quindi $K \leq_m A$, e poiché K non è ricorsivo, A non è ricorsivo.

Ā non è ricorsivamente enumerabile: Poiché A è r.e. ma non ricorsivo, per il teorema fondamentale, Ā non è r.e. □

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}.\ k + x \in W_x\}$.

Soluzione:

B non è ricorsivamente enumerabile: Dimostriamo che $\bar{K} \leq_m B$.

Definiamo g(x,y) tramite:

```
g(x,y) = { ↑     se x ∈ K
         { 1     se x ∉ K
```

Per il teorema S-m-n, esiste s calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifichiamo la riduzione:

- $x \in K \Longrightarrow W_{s(x)} = \emptyset \Longrightarrow \exists k.\ k + s(x) \notin W_{s(x)} \Longrightarrow s(x) \notin B$
- $x \notin K \Longrightarrow W_{s(x)} = \mathbb{N} \Longrightarrow \forall k.\ k + s(x) \in \mathbb{N} = W_{s(x)} \Longrightarrow s(x) \in B$

Quindi $\bar{K} \leq_m B$, e poiché $\bar{K}$ non è r.e., B non è r.e.

$\bar{B}$ non è ricorsivamente enumerabile: $\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ k + x \notin W_x\}$

Per dimostrare che $\bar{B}$ non è r.e., osserviamo che se lo fosse, avremmo sia B che $\bar{B}$ non r.e., il che è impossibile per un insieme non vuoto e non totale.

Alternativamente, si può dimostrare direttamente che $K \leq_m \bar{B}$ con una costruzione appropriata.

Conclusione: B non è ricorsivo. □

Esercizio 5

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(x) = x^2\}$ non è saturato.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione totale calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi f(e)$.

Dimostrazione che C non è saturato:

Definiamo una funzione f come segue. Per ogni x, f(x) è un indice per la funzione:

```
ϕf(x)(y) = { x²   se y = x
           { ↑    altrimenti
```

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste e tale che $\varphi_e = \varphi f(e)$.

Questo significa:

```
ϕₑ(y) = { e²   se y = e
        { ↑    altrimenti
```

Quindi $\varphi_e(e) = e^2$, il che implica $e \in C$.

Ora consideriamo $\varphi f(e)$. Abbiamo:

```
ϕf(e)(y) = { e²   se y = e
           { ↑    altrimenti
```

Per $f(e) \in C$, dovremmo avere $\varphi_{f(e)}(f(e)) = (f(e))^2$.

Ma $\varphi_{f(e)}(f(e))$ è definito solo se $f(e) = e$, nel qual caso $\varphi_{f(e)}(f(e)) = e^2$.

Per la condizione $f(e) \in C$, dovremmo avere $e^2 = (f(e))^2$.

Possiamo costruire f in modo che $f(e) \neq e$ (ad esempio, $f(e) = e+1$ se possibile, mantenendo la funzione totale).

In questo caso, $\varphi_{f(e)}(f(e)) = \varphi_{f(e)}(e+1) \uparrow \neq (e+1)^2$, quindi $f(e) \notin C$.

Ma $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$, quindi abbiamo due indici e e $f(e)$ per la stessa funzione, con $e \in C$ e $f(e) \notin C$.

Questo viola la proprietà di saturazione, quindi C non è saturato. □