Computabilità e Algoritmi - 24 Gennaio 2017

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Dimostrare il teorema di proiezione ovvero provare che se il predicato $P(x,\bar{y})$ è semidecidibile allora anche $\exists x\, P(x,\bar{y})$ è semidecidibile. È vero $P(x,\bar{y})$ è decidibile si può concludere che $\exists x\, P(x,\bar{y})$ è decidibile? Dimostrare l'asserzione o portare un controesempio.

Soluzione:

Parte 1: Teorema di Proiezione

Enunciato: Se $P(x,\bar{y}) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ è semidecidibile, allora $R(\bar{y}) \equiv \exists x\, P(x,\bar{y})$ è semidecidibile.

Dimostrazione: Sia $P(x,\bar{y})$ semidecidibile. Per il teorema di struttura, esiste un predicato decidibile $Q(t,x,\bar{y}) \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$ tale che: $P(x,\bar{y}) \equiv \exists t.\, Q(t,x,\bar{y})$

Ora consideriamo:

```
R(ȳ) ≡ ∃x P(x,ȳ)
     ≡ ∃x. ∃t. Q(t,x,ȳ)
     ≡ ∃w. Q((w)₁, (w)₂, ȳ)
```

dove $(w)_1$ e $(w)_2$ sono le funzioni di proiezione per l'encoding delle coppie.

Poiché $Q((w)_1, (w)_2, \bar{y})$ è decidibile (composizione di funzioni decidibili), per il teorema di struttura $R(\bar{y})$ è semidecidibile. ∎

Parte 2: Il converso non vale

Controesempio: Consideriamo il predicato $P(x,y) \equiv$ "$x \notin W_x$" $\equiv$ "$x \notin K$".

Verifica che P non è semidecidibile: Se P fosse semidecidibile, allora $\bar{K}$ sarebbe r.e. Ma sappiamo che $\bar{K}$ non è r.e., quindi P non è semidecidibile.

Verifica che $\exists x\, P(x,y)$ è decidibile:

```
∃x P(x,y) ≡ ∃x. (x ∉ K) ≡ "K̄ ≠ ∅"
```

Poiché sappiamo che $\bar{K} \neq \emptyset$ (ad esempio, la funzione sempre indefinita ha infiniti indici, tutti in $\bar{K}$), il predicato $\exists x\, P(x,y)$ è costantemente vero, quindi decidibile.

Controesempio alternativo più naturale: $P(x,y) \equiv (y = 2x) \land (x \notin K)$

- P non è semidecidibile (perché coinvolge $x \notin K$)
- $\exists x\, P(x,y) \equiv$ "y è pari e $y/2 \notin K$", che è decidibile quando y è dispari (falso) e semidecidibile quando y è pari

Conclusione: Il teorema di proiezione vale, ma il converso non vale. ∎

Esercizio 2

Problema: Dire se esistono funzioni f,g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totali calcolabili tali che $f(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \in K$ e $g(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \notin K$. Motivare adeguatamente la risposta, fornendo un esempio o dimostrando la non esistenza per ciascuna funzione.

Soluzione:

Analisi del problema: Cerchiamo f,g totali calcolabili tali che:

- $f(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \in K$
- $g(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \notin K$

Funzione f:

Risposta: Sì, esiste una tale funzione f.

Costruzione: Definiamo $f(x) = \varphi_x(x) + 1$ se $\varphi_x(x) \downarrow$, altrimenti $f(x) = 0$.

Formalmente:

```
f(x) = {
    ϕₓ(x) + 1    se x ∈ K
    0            se x ∉ K
}
```

Verifica che f è totale calcolabile:

```
f(x) = sc_K(x) · (Ψ_U(x,x) + 1) + sc_K̄(x) · 0
```

Ma questa definizione non è corretta perché sc_K̄ non è calcolabile.

Costruzione corretta: Definiamo $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Verifica: Per ogni $x \in K$, abbiamo $\varphi_x(x) \downarrow$. Poiché $\varphi_x(x) \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 0$, se $\varphi_x(x) \neq 0$ allora $f(x) \neq \varphi_x(x)$. Se $\varphi_x(x) = 0$, scegliamo $f(x) = 1$.

Costruzione definitiva: $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Per ogni $x \in K$, se $\varphi_x(x) = 1$, questo è un problema. Ridefiniamo:

Sia d: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione diagonale definita da:

```
d(x) = {
    ϕₓ(x) + 1    se ϕₓ(x) ↓
    0            se ϕₓ(x) ↑
}
```

Questa funzione non è calcolabile per il teorema di diagonalizzazione.

Soluzione corretta: $f(x) = x + 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Per ogni $x \in K$, $\varphi_x(x) \downarrow \in \mathbb{N}$. Se $\varphi_x(x) = x + 1$, dobbiamo cambiare f.

Consideriamo l'insieme $A = \{x \in K : \varphi_x(x) = x + 1\}$. Se A è finito, possiamo definire f modificando f solo su A. Se A è infinito, il problema è più complesso.

Costruzione finale: $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Per ogni $x \in K$, se $\varphi_x(x) = 0$, allora non abbiamo $f(x) \neq \varphi_x(x)$. Tuttavia, per la maggior parte degli $x \in K$, $\varphi_x(x) \neq 0$.

Risultato: Non esiste sempre tale funzione f.

Funzione g:

Per g, cerchiamo $g(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \notin K$.

Costruzione: $g(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Per $x \notin K$, $\varphi_x(x) \uparrow$, quindi $\varphi_x(x)$ non è definito. La condizione $g(x) \neq \varphi_x(x)$ è automaticamente soddisfatta.

Conclusione: $g(x) = 0$ funziona sempre. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid W_x \cup E_x = \mathbb{N}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che l'unione del dominio e del codominio di φ_x copre tutti i numeri naturali.

Analisi della struttura:

A è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \cup cod(f) = \mathbb{N}\}$.

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché A è saturo, dobbiamo verificare se $A = \emptyset$, $\mathbb{N}$ o né l'uno né l'altro.

- $A \neq \emptyset$: La funzione identità $id(x) = x$ ha $dom(id) \cup cod(id) = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, quindi un suo indice appartiene ad A
- $A \neq \mathbb{N}$: La funzione sempre indefinita H ha $dom(H) \cup cod(H) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \neq \mathbb{N}$, quindi un suo indice non appartiene ad A

Per il teorema di Rice, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A non è r.e. Utilizziamo il teorema di Rice-Shapiro.

Consideriamo la funzione identità $id \in \mathcal{A}$. Qualsiasi funzione finita $\theta \subseteq id$ ha $dom(\theta) \cup cod(\theta)$ finito $\neq \mathbb{N}$, quindi $\theta \notin \mathcal{A}$.

Per Rice-Shapiro, esiste $f \in \mathcal{A}$ tale che $\forall\theta \subseteq f$ finita, $\theta \notin \mathcal{A}$, quindi A non è r.e.

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

Ā non è r.e. Consideriamo la funzione sempre indefinita $H \in \bar{\bar{A}}$.

Per qualsiasi estensione finita $\theta \supseteq H$, abbiamo $dom(\theta) \cup cod(\theta)$ finito $\neq \mathbb{N}$, quindi $\theta \in \bar{\bar{A}}$.

Ma questo non si applica direttamente a Rice-Shapiro perché consideriamo sottofunzioni, non estensioni.

Approccio alternativo: Se entrambi A e Ā fossero r.e., allora A sarebbe ricorsivo, contraddicendo il teorema di Rice.

Poiché abbiamo dimostrato che A non è r.e., per completezza Ā non può essere r.e.

Conclusione: A non è ricorsivo, A non è r.e., Ā non è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ kx \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene gli indici x tali che esiste un multiplo di x nel dominio di φ_x.

Ricorsività:

B non è ricorsivo. Dimostriamo $K \leq_m B$.

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    z + 1    se y ∈ K ∧ z = 2y
    ↑        altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(y)}(z) = g(y,z)$.

Verifica della riduzione:

- Se $y \in K$, allora $W_{s(y)} = \{2y\}$, quindi $2y = 2 \cdot y \in W_{s(y)}$, dunque $s(y) \in B$
- Se $y \notin K$, allora $W_{s(y)} = \emptyset$, quindi $\nexists k$ tale che $k \cdot s(y) \in W_{s(y)}$, dunque $s(y) \notin B$

Pertanto $K \leq_m B$, e poiché K non è ricorsivo, B non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di B:

B è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_B(x) = 1(μt. ∃u ≤ t. ∃k ≤ t. [H(x,u,t) ∧ u = kx ∧ k > 0])
```

Questa funzione cerca un tempo t entro il quale esiste $u \in W_x$ tale che u è un multiplo positivo di x.

Caso speciale x = 0: Per x = 0, la condizione kx = 0 è soddisfatta solo per k = 0 o per ogni k se x = 0. Dobbiamo essere più precisi:

```
sc_B(x) = {
    1(μt. 0 ∈ Wₓ)                                   se x = 0
    1(μt. ∃u ≤ t. ∃k ≤ t. [H(x,u,t) ∧ u = kx ∧ k > 0])    se x > 0
}
```

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B} = \{x \mid \forall k > 0.\ kx \notin W_x\}$

$\bar{B}$ non è r.e. Se lo fosse, insieme a B essendo r.e., avremmo che B sarebbe ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione: B non è ricorsivo, B è r.e., $\bar{B}$ non è r.e. ∎

Esercizio 5

Problema: Utilizzare il secondo teorema di ricorsione per dimostrare che non è saturato l'insieme $C = \{x \mid W_x = \mathbb{N} \wedge \varphi_x(0) = x\}$.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Dimostrazione che C non è saturato:

Per dimostrare che C non è saturato, dobbiamo trovare indici e, e' tali che:

- $\varphi_e = \varphi_{e'}$
- $e \in C$ ma $e' \notin C$ (oppure viceversa)

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(n,y) = {
    n       se y = 0
    y + 1   se y > 0
}
```

La funzione g è calcolabile (definita per casi con predicati decidibili).

Per il teorema smn, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(n)}(y) = g(n,y)$.

Osserviamo che:

- $W_{s(n)} = \mathbb{N}$ ($\varphi_{s(n)}$ è totale)
- $\varphi_{s(n)}(0) = n$

Quindi $s(n) \in C$ se e solo se $n = s(n)$.

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione s, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:
$\varphi_e = \varphi_{s(e)}$

Da questa uguaglianza:

- $W_e = W_{s(e)} = \mathbb{N}$
- $\varphi_e(0) = \varphi_{s(e)}(0) = e$

Quindi $e \in C$.

Ora, sia $e' \neq e$ un qualsiasi altro indice tale che $\varphi_{e'} = \varphi_e$ (tale indice esiste perché ci sono infiniti indici per ogni funzione calcolabile).

Allora:

- $W_{e'} = W_e = \mathbb{N}$
- $\varphi_{e'}(0) = \varphi_e(0) = e \neq e'$

Quindi $e' \notin C$.

Abbiamo dimostrato che $e \in C$, $e' \notin C$, ma $\varphi_e = \varphi_{e'}$, il che prova che C non è saturato.

Conclusione: L'insieme $C = \{x \mid W_x = \mathbb{N} \land \varphi_x(0) = x\}$ non è saturato. ∎