Computabilità - 30 Giugno 2020

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Date due funzioni f, g : ℕ → ℕ, con f totale, si definisca il predicato Q_{f,g}(x) = "f(x) = g(x)". Mostrare che se f e g sono calcolabili allora Q_{f,g} è semidecidibile. Vale anche il contrario, ovvero se Q_{f,g} è semidecidibile si può dedurre che f e g sono calcolabili?

Soluzione:

Parte 1: Se f e g sono calcolabili, allora Q_{f,g} è semidecidibile

Dimostrazione: Supponiamo f e g calcolabili. Vogliamo mostrare che Q_{f,g}(x) ≡ "f(x) = g(x)" è semidecidibile.

Definiamo la funzione semicaratteristica:

```
sc_{Q_{f,g}}(x) = μt. (|f(x) - g(x)| = 0)
```

Alternativamente, possiamo utilizzare il fatto che l'uguaglianza è decidibile sui numeri naturali:

```
sc_{Q_{f,g}}(x) = {
    1    se f(x) = g(x)
    ↑    se f(x) ≠ g(x)
}
```

Questa funzione può essere implementata come:

```
sc_{Q_{f,g}}(x) = μt. sg(|f(x) - g(x)|)
```

Poiché f è totale e calcolabile, f(x) converge sempre. Se g è calcolabile:

- Se g(x) ↓, allora possiamo calcolare |f(x) - g(x)| e verificare se è zero
- Se g(x) ↑, allora la computazione di sc_{Q_{f,g}}(x) non termina

Questo rende Q_{f,g} semidecidibile. ∎

Parte 2: Il contrario non vale

Risposta: No, il contrario non vale.

Controesempio: Consideriamo:

- $f(x) = 0$ (funzione costante totale calcolabile)
- $g(x) = \chi_K(x)$ (funzione caratteristica del problema della fermata, non calcolabile)

Il predicato $Q_{\{f,g\}}(x) \equiv$ "$0 = \chi_K(x)$" $\equiv$ "$x \notin K$" $\equiv$ "$x \in \bar{K}$"

Il predicato "$x \in \bar{K}$" non è semidecidibile (poiché $\bar{K}$ non è r.e.).

Tuttavia, consideriamo un esempio diverso:

- $f(x) = 0$ (totale calcolabile)
- g sia una funzione non calcolabile ma tale che $Q_{\{f,g\}}$ risulti semidecidibile

Controesempio più preciso: Sia $f(x) = x$ e definiamo g come:

```
g(x) = {
    x       se x ∈ K
    x+1     se x ∉ K
}
```

Allora $Q_{\{f,g\}}(x) \equiv$ "$x = g(x)$" $\equiv$ "$x \in K$", che è semidecidibile.

Ma g non è calcolabile perché richiede di decidere l'appartenenza a K.

Quindi esistono f totale calcolabile e g non calcolabile tali che $Q_{\{f,g\}}$ è semidecidibile.

Conclusione: Se f e g sono calcolabili, allora $Q_{\{f,g\}}$ è semidecidibile. Il contrario non vale. ∎

Esercizio 2

Problema: Sia $P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei numeri pari. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : |W_x \cap P| \geq 2\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che il dominio di φ_x contiene almeno 2 numeri pari.

Analisi della struttura:

A è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : |dom(f) \cap P| \geq 2\}$.

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché A è saturo, dobbiamo verificare se $A = \emptyset$, $\mathbb{N}$ o né l'uno né l'altro.

- $A \neq \emptyset$: La funzione identità $id(x) = x$ ha $dom(id) = \mathbb{N}$, quindi $|dom(id) \cap P| = \infty \geq 2$, dunque un suo indice appartiene ad A
- $A \neq \mathbb{N}$: La funzione $f(1) = 1$, $\uparrow$ altrimenti ha $dom(f) = \{1\}$, quindi $|dom(f) \cap P| = |\{1\} \cap P| = 0 < 2$, dunque un suo indice non appartiene ad A

Per il teorema di Rice, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_A(x) = 1(μt. ∃u₁,u₂ ≤ t. [u₁ ≠ u₂ ∧ rm(2,u₁) = 0 ∧ rm(2,u₂) = 0 ∧ H(x,u₁,t) ∧ H(x,u₂,t)])
```

Questa funzione cerca un tempo t entro il quale esistono almeno due numeri pari distinti u_1, u_2 tali che $\varphi_x(u_1)$ e $\varphi_x(u_2)$ convergono.

La funzione è calcolabile, quindi A è r.e.

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : |W_x \cap P| \leq 1\}$

Ā non è r.e. Utilizziamo il teorema di Rice-Shapiro.

Consideriamo la funzione identità id $\in \mathcal{A}$ (quindi il suo indice non appartiene ad Ā).

Consideriamo la funzione finita $\theta(0) = 0$, ↑ altrimenti. Abbiamo:

- $\theta \subseteq id$
- $|dom(\theta) \cap P| = |\{0\} \cap P| = 1 \leq 1$, quindi $\theta \notin \mathcal{A}$ (quindi un suo indice appartiene ad Ā)

Per Rice-Shapiro, esiste $f \notin \bar{\bar{A}}$ (cioè $f \in \mathcal{A}$) tale che $\exists \theta \subseteq f$ finita con $\theta \in \bar{\bar{A}}$ (cioè $\theta \notin \mathcal{A}$), quindi Ā non è r.e.

Conclusione: A non è ricorsivo, A è r.e., Ā non è r.e. ∎

Esercizio 3

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| = x + 1\}$ non è saturato.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Dimostrazione che B non è saturato:

Per dimostrare che B non è saturato, dobbiamo trovare indici e, e' tali che:

- $\varphi_e = \varphi_{e'}$
- $e \in B$ ma $e' \notin B$ (oppure viceversa)

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(x,y) = {
    y + 1    se y ∈ {0, 1, ..., x}
    ↑        altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile:

```
g(x,y) = (y + 1) · sg(x ∸ y + 1)
```

Per il teorema smn, esiste s: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Quindi $W_{s(x)} = \{0, 1, ..., x\}$ e $|W_{s(x)}| = x + 1$.

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione s, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che:
$\varphi_e = \varphi_{s(e)}$

Da questa uguaglianza:

- $W_e = W_{s(e)} = \{0, 1, ..., e\}$
- $|W_e| = e + 1$

Quindi $e \in B$.

Ora, poiché $\varphi_e = \varphi_{s(e)}$, per definizione di s abbiamo:
$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e,y) = \{$
$y + 1 \quad$ se $y \leq e$
$\uparrow \quad$ se $y > e$
$\}$

Sia $e' > e$ un qualsiasi altro indice tale che $\varphi_{e'} = \varphi_e$ (tale indice esiste perché ci sono infiniti indici per ogni funzione calcolabile).

Allora:

- $W_{e'} = W_e = \{0, 1, ..., e\}$
- $|W_{e'}| = e + 1 \neq e' + 1$ (poiché $e' > e$)

Quindi $e' \notin B$.

Abbiamo dimostrato che $e \in B$, $e' \notin B$, ma $\varphi_e = \varphi_{e'}$, il che prova che B non è saturato.

Conclusione: L'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| = x + 1\}$ non è saturato. ■