Computabilità e Algoritmi - 24 Gennaio 2019

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Dati due insiemi A, B ⊆ ℕ definire la nozione di riduzione A ≤_m B e dimostrare che se A ≤_m B e A non è ricorsivo, allora B non è ricorsivo. Può esistere un insieme A ⊆ ℕ tale che A ≤_m A? Fornire un esempio o dimostrare la non esistenza di un tale insieme.

Soluzione:

Definizione di riduzione: Dati A, B ⊆ ℕ, diciamo che A è many-one riducibile a B (A ≤_m B) se esiste una funzione f: ℕ → ℕ totale e calcolabile tale che: ∀x ∈ ℕ: x ∈ A ⟺ f(x) ∈ B

Dimostrazione della proprietà: Se A ≤_m B e A non è ricorsivo, allora B non è ricorsivo.

Dimostrazione per contraposizione: Supponiamo che B sia ricorsivo. Allora χ_B è calcolabile. Poiché A ≤_m B, esiste f: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che ∀x: x ∈ A ⟺ f(x) ∈ B.

Definiamo la funzione caratteristica di A:

```
χ_A(x) = χ_B(f(x))
```

Poiché f è calcolabile e χ_B è calcolabile, per composizione χ_A è calcolabile.
Quindi A è ricorsivo, contraddicendo l'ipotesi che A non è ricorsivo.

Pertanto, se A non è ricorsivo, allora B non può essere ricorsivo. ∎

Esistenza di A tale che A ≤_m A:

Risposta: Sì, esistono tali insiemi.

Esempio 1: A = ℕ La funzione identità f(x) = x è totale calcolabile e: ∀x ∈ ℕ: x ∈ ℕ ⟺ f(x) = x ∈ ℕ
Quindi ℕ ≤_m ℕ.

Esempio 2: A = ∅ La funzione costante f(x) = 0 (o qualsiasi valore) è totale calcolabile e: ∀x ∈ ℕ: x ∈ ∅ ⟺ falso ⟺ f(x) ∈ ∅ Quindi ∅ ≤_m ∅.

Esempio 3: A = {x ∈ ℕ : x è pari} La funzione f(x) = 2x è totale calcolabile e:

- Se x è pari, allora f(x) = 2x è pari
- Se x è dispari, allora f(x) = 2x è pari, ma x ∉ A

Questo non funziona. Consideriamo invece f(x) = x:
∀x: x ∈ A ⟺ x ∈ A, quindi A ≤_m A.

Conclusione: Esistono insiemi A tali che A ≤_m A. ∎

Esercizio 2

Problema: Si dimostri che l'insieme $F = \{\theta \mid \theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \wedge dom(\theta) \text{ finito}\}$ delle funzioni unarie a dominio finito è numerabile.

Soluzione:

Strategia: Mostriamo che F è numerabile costruendo una biiezione con un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{N}$.

Codifica delle funzioni finite: Ogni funzione finita θ con $dom(\theta) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ e $\theta(x_i) = y_i$ può essere rappresentata come insieme finito di coppie: $\theta = \{(x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_k,y_k)\}$

Passo 1: Codifica di coppie Utilizziamo la funzione di accoppiamento di Cantor $\pi: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $\pi(x,y) = ((x+y)(x+y+1))/2 + y$

Questa funzione è biettiva e calcolabile.

Passo 2: Codifica di insiemi finiti di numeri Per un insieme finito $S = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$ con $n_1 < n_2 < ... < n_k$, definiamo: $code(S) = 2^{n_1} + 2^{n_2} + ... + 2^{n_k}$

Passo 3: Codifica completa Per una funzione finita $\theta = \{(x_1,y_1), ..., (x_k,y_k)\}$:

1. Calcoliamo $c_i = \pi(x_i,y_i)$ per ogni coppia
2. Ordiniamo: $c_1 < c_2 < ... < c_k$
3. Definiamo $encode(\theta) = 2^{c_1} + 2^{c_2} + ... + 2^{c_k}$

Verifica che è biiezione:

Iniettività: Se $\theta_1 \neq \theta_2$, allora esistono coppie diverse, quindi codifiche diverse in virtù dell'iniettività di π e della rappresentazione binaria univoca.

Suriettività su immagine: Ogni numero naturale della forma $2^{c_1} + ... + 2^{c_k}$ corrisponde a una funzione finita ottenibile decodificando.

Alternativa più diretta: Ogni funzione finita θ può essere vista come lista finita di coppie (x_i,y_i). Il numero di funzioni finite con dominio di cardinalità esattamente k è numerabile per ogni k fissato. Poiché $F = \bigcup_{k\geq 0} F_k$ dove F_k sono le funzioni con $|dom(\theta)| = k$, e l'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile, F è numerabile.

Conclusione: L'insieme F delle funzioni unarie a dominio finito è numerabile. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \subseteq E_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che il dominio di φ_x è contenuto nel codominio di φ_x.

Analisi della struttura:

A è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \subseteq cod(f)\}$.

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché A è saturo, dobbiamo verificare se $A = \emptyset$, $\mathbb{N}$ o né l'uno né l'altro.

- $A \neq \emptyset$: La funzione identità $id(x) = x$ ha $dom(id) = cod(id) = \mathbb{N}$, quindi un suo indice appartiene ad A
- $A \neq \mathbb{N}$: La funzione costante $f(x) = 0$ ha $dom(f) = \mathbb{N}$ e $cod(f) = \{0\}$, quindi $dom(f) \not\subseteq cod(f)$, dunque un suo indice non appartiene ad A

Per il teorema di Rice, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_A(x) = 1(μt. ∀u ≤ t. [H(x,u,t) → ∃v ≤ t. ∃w ≤ t. (S(x,v,u,w) ∧ w ≤ t)])
```

Questa verifica che per ogni u nel dominio di φ_x (entro tempo t), esiste v tale che $\varphi_x(v) = u$.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{A}$:

$\bar{A}$ non è r.e. Utilizziamo il teorema di Rice-Shapiro.

Consideriamo la funzione costante $f(x) = 0$. Abbiamo $f \notin \mathcal{A}$ perché $dom(f) = \mathbb{N} \not\subseteq \{0\} = cod(f)$.

Consideriamo la funzione finita $\theta(0) = 0$, $\uparrow$ altrimenti. Allora:

- $\theta \subseteq f$ (ogni coppia in θ è anche in f quando estesa)
- $dom(\theta) = \{0\} \subseteq \{0\} = cod(\theta)$, quindi $\theta \in \mathcal{A}$

Per Rice-Shapiro, esiste $f \notin \mathcal{A}$ tale che $\exists\theta \subseteq f$ finita con $\theta \in \mathcal{A}$, quindi $\bar{A}$ non è r.e.

Conclusione: A non è ricorsivo, A è r.e., $\bar{A}$ non è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow \wedge \varphi_x(x) \text{ dispari}\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene gli indici x tali che $\varphi_x(x)$ converge e restituisce un numero dispari.

Ricorsività:

B non è ricorsivo. Dimostriamo $K \leq_m B$.

Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    1       se y ∈ K ∧ z = y
    ↑       altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(y)}(z) = g(y,z)$.

Verifica della riduzione:

- Se $y \in K$, allora $\varphi_{s(y)}(s(y)) \uparrow$ (perché $g(y,s(y))$ richiede $z = y$, ma $s(y)$ potrebbe essere $\neq y$)

Modifichiamo l'approccio. Definiamo invece h: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(y,z) = {
    1       se y ∈ K
    ↑       altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste t: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{t(y)}(z) = h(y,z)$.

- Se $y \in K$, allora $\varphi_{t(y)}(t(y)) = 1$ (dispari), quindi $t(y) \in B$
- Se $y \notin K$, allora $\varphi_{t(y)}(t(y)) \uparrow$, quindi $t(y) \notin B$

Pertanto $K \leq_m B$, e poiché K non è ricorsivo, B non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di B:

B è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_B(x) = 1(μt. H(x,x,t) ∧ rm(2,U(μz≤t. S(x,x,Output(x,x,t),z))) = 1)
```

dove Output(x,x,t) rappresenta l'output di $\varphi_x(x)$ se converge entro t passi.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B} = \{x \mid \varphi_x(x) \uparrow \vee (\varphi_x(x) \downarrow \wedge \varphi_x(x) \text{ pari})\}$

$\bar{B}$ non è r.e. Se lo fosse, insieme a B essendo r.e., avremmo che B sarebbe ricorsivo, contraddicendo quanto dimostrato.

Conclusione: B non è ricorsivo, B è r.e., $\bar{B}$ non è r.e. ∎

Esercizio 5

Problema: Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $|W_x| = x$.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione f: ℕ → ℕ totale e calcolabile, esiste e ∈ ℕ tale che φ_e = φ_{f(e)}.

Dimostrazione dell'esistenza di x tale che |W_x| = x:

Definiamo g: $\mathbb{N}^2$ → ℕ:

```
g(n,y) = {
    y + 1   se y ∈ {0, 1, 2, ..., n-1}
    ↑       altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile:

```
g(n,y) = (y + 1) · sg(n - y)
```

dove sg è la funzione sign (sg(0) = 0, sg(x) = 1 per x > 0).

Per il teorema smn, esiste s: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che φ_{s(n)}(y) = g(n,y).

Osserviamo che:

- W_{s(n)} = {0, 1, 2, ..., n-1}
- |W_{s(n)}| = n

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione s, esiste e ∈ ℕ tale che:
φ_e = φ_{s(e)}

Da questa uguaglianza:

- W_e = W_{s(e)} = {0, 1, 2, ..., e-1}
- |W_e| = e

Quindi abbiamo trovato x = e tale che |W_x| = x.

Conclusione: Esiste x ∈ ℕ tale che |W_x| = x. ∎