Theoretical definitions

Exercise 7.9. Given a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, define the predicate $P_f(x, y) \equiv$ "$f(x) = y$", i.e., $P_f(x, y)$ is true if $x \in dom(f)$ and $f(x) = y$. Prove that f is computable if and only if the predicate $P_f(x, y)$ is semi-decidable.

Solution: Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a computable function. Let $e \in \mathbb{N}$ such that $f = \varphi_e$. Then $sc_P(x, y) = \mathbf{1}(\mu w.|f(x) - y|$ is computable, hence P is semidecidable.

Vice versa, let $P(x, y)$ be semidecidable and let e be an index for the semi-characteristics function of P, namely $\varphi_e^{(2)} = sc_P$. Then we have $f(x) = (\mu w.H^{(2)}(e, (x, (w)_1), (w)_2))_1$. $\square$

Exercise 7.10. Let $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove that A is recursive and infinite if and only if it is the image of a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable, total and strictly increasing (i.e., such that for each $x, y \in \mathbb{N}$, if $x < y$ then $f(x) < f(y)$).

Solution: Let A be recursive and infinite. Define the function $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ as

$$g(x) = \Sigma_{y<x}\chi_A(y)$$

that is, $g(x)$ counts the number of elements of A below x, or, in other words, it assigns a increasing number to each element of A. The function is computable since χ_A is so. Furthermore, it is easy to see that g is monotone, that is, for each $x \in \mathbb{N}$, $g(x) \leqslant g(x + 1)$. Moreover, $x \in A$ if and only if $g(x + 1) = g(x) + 1$. Since A is infinite, this implies that $img(g) = \mathbb{N}$.

Now we can define $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ as

$$\begin{aligned} f(n) &= \mu x.\ (g(x + 1) = n + 1) \\ &= \mu x.\ |n + 1 - g(x + 1)| \end{aligned}$$

The function f is

- computable, since it arises as the minimization of a computable function;
- total, since $img(g) = \mathbb{N}$ and therefore, for all n, the condition $g(x + 1) = n + 1$ is certainly satisfied for some x;
- increasing, since if $n < m$ then $g(f(n) + 1) = n + 1 < m + 1 = g(f(m) + 1)$. Recalling that g is increasing, this implies $f(n) + 1 < g(m) + 1$ and therefore $f(n) < f(m)$.

Esercizio 2

Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leq_m B$. È vero che per ogni insieme A vale vale $A \leq_m A \cup \{0\}$? In caso affermativo dare una prova e in caso negativo un controesempio. Nel secondo caso, proporre una condizione (indicando se è solo suffciente o anche necessaria) che renda vero $A \leq_m A \cup \{0\}$.

Soluzione:

In generale non vale, in particolare non vale per $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Infatti, la relazione desiderata diviene $\mathbb{N} \setminus \{0\} \leq_m \mathbb{N}$ e si osserva che non può esistere una funzione totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sse $f(x) \in \mathbb{N}$: qualunque sia f la seconda parte è sempre vera, mentre la prima è falsa per $x = 0$.

Questo è l'unico controesempio all'asserto, ovvero per ogni $A \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale $A \leq_m A \cup \{0\}$. Infatti, distinguiamo due casi:

- se $0 \in A$, allora $A = A \cup \{0\}$ (la funzione di riduzione può essere l'identità).
- se $0 \notin A$, allora possiamo considerare certamente $x_0 \notin A$, $x_0 \neq 0$ (infatti sappiamo che $A \neq \mathbb{N}$ e $A \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$). E la funzione di riduzione può essere

$$f(x) = \begin{cases} x_0 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si conclude quindi che $A \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è condizione necessaria e sufficiente per la validità dell'asserto

Esercizio 2

Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se $A \leq_m K$.

Soluzione: Si consideri Se A è r.e., allora $g(x, y) = sc_A(x)$, con l'applicazione del teorema smn porta alla funzione di riduzione. Viceversa, se $A \leq_m K$, allora detta f la funzione di riduzione, si ha $sc_A(x) = sc_k(f(x))$ è calcolabile. □

Esercizio 1

Dimostrare che se un predicato $P(x, \vec{y})$ è semidecidibile allora $\exists x.P(x, \vec{y})$ è semidecidibile. Vale anche il contrario? Dimostrarlo o portare un controesempio.

Soluzione: Il primo asserto è parte della teoria. Si osservi invece che l'implicazione opposta è falsa. Si consideri, per esempio, il predicato $P(x, y) = x \notin W_x$, che non è semidecidibile. Il predicato ottenuto tramite la quantificazione esistenziale $Q(y) = \exists x.\ P(x, y)$ è costantemente vero o falso (anche se non rilevante per la prova, si osservi che essendo $\bar{K}$ non vuoto, il predicato $Q(y)$ è costantemente vero), quindi decidibile. Come esempio meno "degenere" si può considerare $P(x, y) = (y > x) \wedge (y \notin W_x)$ e la quantificazione $Q(y) = \exists x. (y > x) \wedge\ (y \notin W_x)$. In questo caso, si osservi che detto $e_0 \in \mathbb{N}$, un indice per la funzione sempre indefinita, si ha che $Q(y)$ è vero per ogni $y > e_0$, da cui discende facilmente la decidibilità di $Q(y)$. □

Recursiveness

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \setminus E_x \text{ finito}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) = \overline{cod(f)}\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e $\bar{A}$ sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.
  Indicato con $\mathbf{1}$ la costante 1, bvale che $\mathbf{1} \notin \mathcal{A}$, dato che $dom(\mathbf{1}) \setminus cod(\mathbf{1}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ è infinito. Inoltre la funzione sempre indefinita $\varnothing \subseteq \mathbf{1}$ e $\varnothing \in \mathcal{A}$, dato che $dom(f) \setminus cod(f) = \varnothing$ finito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- $\bar{A}$ non r.e.
  Si osserva che $\mathbf{1} \in \bar{\mathcal{A}}$, ma nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq \mathbf{1}$ può essere in $\bar{\mathcal{A}}$, dato che se θ è finita, $dom(\theta)$ e $cod(\theta)$ sono finiti, e quindi anche $dom(\theta) \setminus cod(\theta)$ è finito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che $\bar{A}$ non è r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y.\, (x \leqslant y \leqslant 2x \;\wedge\; y \in W_x)\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = 1$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x)$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B. Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto esiste certamente y, con $s(x) \leqslant y \leqslant 2s(x)$ tale che $y \in W_{s(x)}$, ad esempio $y = s(x)$. Quindi $s(x) \in B$.

- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \varnothing$ e pertanto non può esistere y, con $s(x) \leqslant y \leqslant 2s(x)$ tale che $y \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x, (w)_1, (w)_2) \;\wedge\; (x \leqslant (w)_1 \leqslant 2x)),$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare $\bar{B}$ non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi $\bar{B}$ non è neppure ricorsivo.

Esercizio 4
Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in N : 1 \le |E_x| \le 2\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $B = \{x : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : 1 \le |cod(f)| \le 2\}\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova B e $\bar{B}$ sono entrambi non r.e.:

- B non r.e.
  Si osservi che $id \notin \mathcal{B}$ ma vi è la funzione finita

  $$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  tale che $\theta \subseteq id$ e $\theta \in \mathcal{B}$ Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che B non è r.e.

- $\bar{B}$ non r.e.
  Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \overline{\mathcal{B}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che $\bar{B}$ non è r.e.

Esercizio 3
Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \cup W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Mostriamo che $K \le A$, quindi A non ricorsivo. Si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x, y) = \Psi_U(x, x)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a A. Infatti

- se $x \in K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = \varphi_x(x) \downarrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto $s(x) \in E_{s(x)} \cup W_{sx} = \mathbb{N}$. Quindi $s(x) \in A$.

- se $x \notin K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto $s(x) \notin E_{s(x)} \cup W_{sx} = \emptyset$. Quindi $s(x) \notin A$.

Inoltre A è r.e., dato che la sua funzione caratteristica

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.\ H(x, x(w)_1) \vee S(x, (w)_1, x, (w)_2))$$

è calcolabile. Pertanto $\bar{A}$ non r.e., e quindi non è neppure ricorsivo. $\square$

Esercizio 3

Dato un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $F(X) = \{0\} \cup \{y, y+1 \mid y \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = F(E_x)\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) = F(cod(f))\}\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova A e $\overline{A}$ sono entrambi non r.e.:

- A non r.e.
  Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1, 2 \\ \uparrow \quad = & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Si ha che $f \notin \mathcal{A}$, in quanto $dom(f) = \{0, 1, 2\}$ e $cod(f) = \{0\}$. Dunque $F(cod(f)) = \{0, 1\} \neq dom(f)$. Inoltre se consideriamo

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1 \\ \uparrow \quad = & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  chiaramente $\theta \subseteq f$. Inoltre $dom(\theta) = \{0, 1\}$ e $cod(\theta) = \{0\}$. Dunque $F(cod(\theta)) = \{0, 1\} = dom(\theta)$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che A non è r.e.

- $\overline{A}$ non r.e.
  Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$, dato che $dom(\emptyset) = cod(\emptyset) = \emptyset$ e pertanto $F(cod(\emptyset)) = \{0\} \neq dom(\emptyset)$. Quindi, riassumendo $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma ammette una parte finita, ovvero la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che $\bar{A}$ non è r.e.

$\square$

Non-computable functions

Esercizio 2

Definire una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $img(f) = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (dove $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$).

Soluzione: Si procede per diagonalizzazione definendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\varphi_x(x)} & \text{se } x \in W_x \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è chiaramente totale. Inoltre

- f non calcolabile dato che per ogni $x \in \mathbb{N}$ risulta $f \neq \varphi_x$, ovvero f è diversa da tutte le funzioni calcolabili. Infatti, se $x \in W_x$ allora $f(x) = 2^{\varphi_x(x)} > \varphi_x(x)$, e mentre se $x \notin W_x$ si ha $f(x) = 1 \neq \varphi_x(x)$, dato che $\varphi_x(x) \uparrow$.
- Vale $img(f) = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione $img(f) \subseteq \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dato che se $x \in W_x$ allora $f(x) = 2^{\varphi_x(x)}$ e se $x \notin W_x$ allora $f(x) = 1 = 2^0$. Vale anche l'inclusione inversa. Infatti, dato un qualunque $n \in \mathbb{N}$, la funzione costante n è chiaramente calcolabile. Indicato con x un qualunque indice per tale funzione, ovvero $\varphi_x(y) = n$ per ogni y, dato che $x \in W_x = \mathbb{N}$, vale $f(x) = 2^{\varphi_x(x)} = 2^n$.

Esercizio 3

Esistono un indice $e \in \mathbb{N}$ e una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che indicati con $dom(f)$ e $cod(f)$ il dominio e codominio di f (ovvero $dom(f) = \{x \mid f(x) \downarrow\}$ e $cod(f) = \{y \mid \exists x.\ f(x) = y\}$), risulti $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$? Fornire un esempio o dimostrare la non esistenza.

Una funzione f tale che $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$ si può trovare per ogni $e \in \mathbb{N}$?

Soluzione: Per la prima parte, si consideri un indice $e \in \mathbb{N}$ della funzione identità, quindi $W_e = E_e = \mathbb{N}$. Quindi si definisca la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è totale, quindi $dom(f) = \mathbb{N} = W_e$. Inoltre $dom(f) = \mathbb{N} = E_e$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $n = 0$ allora, considerato un indice x della funzione sempre indefinita, si ha $f(x) = 0$. Se $n > 0$ allora basta considerare un qualunque indice x della funzione costante $n - 1$ e si ha $f(x) = (n - 1) + 1 = n$.

Per la seconda domanda, la risposta è chiaramente no. Ad esempio, se consideriamo $e \in \mathbb{N}$ tale che φ_e sia la funzione sempre indefinita, ogni f tale che $dom(f) = W_e = \varnothing$ coincide con φ_e e quindi è calcolabile.

$\square$

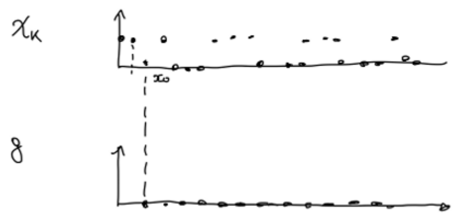
Exercise (latest lessons 2021-2022)

Is there a total computable function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\ s.t.\ g(x) = \prod_{y<x} f(y)$ is computable?

Solution

$\boxed{\text{yes}}$

$f = \chi_K$



$x_0 = \min\{x \mid \chi_K(x) = 0\}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < x_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = sg(x_0 \dot{-} x)$$

So, it can't exist. Suppose $g(x) = \prod_{y<x} f(y)$ is computable then, $f(y)$ has to be computable, specifically using g as a recursive definition, something like: $f(x) = g(x-1) * g(x)$ which should be computable considering it is the composition of computable functions, which actually is not.

Exercise (2010-03-19)

Prove if the function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ defined as:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \forall x \leq x, \phi_y\ total \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

is computable. Give adequate reasons for your answer.

Solution

The function is computable. Given $\phi_y(y)$ is total, define $y_0 = \min\{y \mid \phi_y(y) \downarrow\}$. We then define a functio

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < y_0 \\ 0, & otherwise \end{cases} = x * sg(y_0 - \phi_y(y))$$

which is computable.

Exercise (2019-11-18-solved)

Define a total non-computable function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s.t. $dom(f) \subseteq \{0,1\}$.

Can the function $\overline{sg} \circ f$ be computable? Motivate your answer

Solution

Define $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ by diagonalization as follows:

$$f(x) = \begin{cases} \overline{sg}(\phi_x(x)), & x \in W_x \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

f is total but not computable, given by definition $f(x) \neq \phi_x(x)\ \forall x \in N$.

Observe $\overline{sg} \circ (\overline{sg} \circ f)$, so if it $\overline{sg} \circ f$ were computable, also f would be computable by composition, but it is not.

Smn-theorem

Esercizio 1

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $W_{k(n)} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\}$ e $E_{k(n)}$ è l'insieme dei numeri dispari.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} 2z+1 & \text{se } x = z^n \text{ per qualche } z \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = 2 * (\mu z.|x \dot{-} z^n|) + 1$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid \exists z \in \mathbb{N}.\, x = z^n\} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\}$;
- $E_{k(n)} = \{f(n,x) \mid x \in W_{k(n)}\} = \{2\sqrt[n]{z^n} + 1 \mid z \in \mathbb{N}\} = \{2z+1 \mid z \in \mathbb{N}\}$.

$\square$

Esercizio 1

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $W_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$ e $E_{k(n)} = \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ pari}\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} 2 * (x \dot{-} n) & \text{se } x \geqslant n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = 2 * (x \dot{-} n) + \mu z.(n \dot{-} x)$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid x \geqslant n\}$;
- $E_{k(n)} = \{f(n,x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2(x \dot{-} n) \mid x \geqslant n\} = \{2(n+z) \dot{-} n) \mid z \geqslant 0\} = \{2z \mid z \in \mathbb{N}\}$.

$\square$

Esercizio 2

Enunciare il teorema s-m-n e utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$ vale $W_{s(x)} = \{(k+x)^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Si definisce una funzione $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tale che $g(x, y)$ vista come funzione di y abbia le proprietà desiderate

$$g(x,y) = \begin{cases} k & \text{se esiste } k \text{ tale che } y = (x+k)^2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ovvero $g(x, y) = \mu k.|(x + k)^2 - y|$. Tale funzione è calcolabile, quindi utilizzando il teorema s-m-n si conclude. $\square$

<u>Second recursion theorem</u>

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice x tale che $W_x = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, definiamo una funzione $g(x, y) = \mu z.|zx - y|$. infatti:

$$g(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{se } y \text{ multiplo di } x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mu z.|zx - y|$$

Per come si può esprimere, la funzione è calcolabile, pertanto il teorema smn ci garantisce l'esistenza di una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$. Si nota che $dom(\varphi_{s(x)}) = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ora, per il secondo teorema di ricorsione, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ e pertanto

$$dom(\varphi_e) = dom(\varphi_{s(e)}) = \{ke \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

come desiderato. □

9.7.5 Esercizio 5

Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_n = \phi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_m \neq \phi_{m+1}$.

Soluzione

Il programma composto dalla sola istruzione `Z(1)` viene codificato con $2^{4\cdot(1-1)+1} - 2 = 0$ mentre il programma `Z(1)Z(1)` viene codificato con $2^0 \cdot 3^1 - 2 = 1$, entrambi i programmi calcolano la funzione $f(x) = 0$ e quindi il primo caso è dimostrato.

Il programma composto dall'istruzione `S(1)` viene codificato con $2^{(4(1-1)+1)+1} - 2 = 2$ e calcola la funzione $f(x) = x + 1$ che è diversa dalla funzione calcolata dal programma di indice 1.

Ricapitolando:

- $\phi_0(x) = 0$
- $\phi_1(x) = 1$
- $\phi_2(x) = x + 1$

Segue quindi che esistono $n = 0$ e $m = 1$ che soddisfano quanto richiesto.

Soluzione decisamente migliore

La funzione *succ* è una funzione calcolabile e totale, quindi per il secondo teorema di ricorsione $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{succ(e)} = \phi_{e+1}$.

Tuttavia deve esistere almeno un e tale che $\phi_e \neq \phi_{e+1}$ perché se così non fosse, tutti i programmi calcolerebbero la stessa funzione e quindi solamente una funzione sarebbe calcolabile, ma è noto che ci sono più di due funzioni calcolabili.

Primitive recursion

15. Show that the following function is primitive recursive.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \text{ is multiple of } 3 \\ x+3 & \text{if } x \text{ has a rest of } 1 \text{ when dividing by } 3 \\ x! & \text{if } x \text{ has a rest of } 2 \text{ when dividing by } 3 \end{cases}$$

To prove that the given function f is primitive recursive, we will use the fact that the functions x^2, x + 3, and the characteristic function of "x is a multiple of 3" are all primitive recursive.

Let χ_3(x) be the characteristic function of the predicate "x is a multiple of 3", defined as:

χ_3(x) = sg(rm(3,x))

where rm(x,y) is the remainder function and sg(x) is the sign function, both known to be primitive recursive.

Now, we can express f as:

f(x) = χ_3(x) · x^2 + (1 - χ_3(x)) · (χ_1(rm(3,x)) · (x + 3) + (1 - χ_1(rm(3,x))) · x!)

where χ_1 is the characteristic function of the predicate "x has a rest of 1 when dividing by 3".

Since the functions x^2, x + 3, x!, rm, sg, and the characteristic functions χ_3 and χ_1 are all primitive recursive, and primitive recursive functions are closed under composition and operations like addition and multiplication, we conclude that f is also primitive recursive.

Additional Examples:

1. The Collatz function C(x), defined as:

C(x) = x/2 if x is even

C(x) = 3x + 1 if x is odd

This function can be expressed using primitive recursion as:

C(0) = 0

C(x+1) = (1 - sg(rm(2,x+1))) · ((x+1)/2) + sg(rm(2,x+1)) · (3(x+1) + 1)

2. The log_2 function, which computes the floor of the base-2 logarithm of its input:

log_2(x) = 0 if x = 1

log_2(x) = 1 + log_2(x/2) if x > 1

This function can be defined by primitive recursion as follows:

log_2(0) = 0

$log\_2(x+1) = (1 - sg(x)) \cdot 0 + sg(x) \cdot (1 + log\_2((x+1)/2))$

Other additional examples:

Example 1: The Fibonacci function

The Fibonacci function F(n) is defined as follows:

$F(0) = 0$

$F(1) = 1$

$F(n+2) = F(n) + F(n+1)$

To show F(n) is primitive recursive, we utilize the fact that primitive recursion allows defining a function in terms of multiple previous values. Define the helper function G:

$G(x,0) = (0,1)$

$G(x,y+1) = (\pi_2(G(x,y)), \pi_1(G(x,y))+\pi_2(G(x,y)))$

where $\pi_1((a,b)) = a$ and $\pi_2((a,b)) = b$.

Now F can be defined using G as:

$F(0) = 0$

$F(y+1) = \pi_1(G(0,y))$

Since G is defined by primitive recursion from initial functions, projection functions π_1 and π_2, and arithmetic operations, it is primitive recursive. Therefore, F is also primitive recursive by composition.

Example 2: The exponential function a^n

For fixed a, the function f(n) = a^n can be defined by primitive recursion:

$a^0 = 1$

$a^{\wedge}(n+1) = a^{\wedge}n \cdot a = f(n) \cdot a$

Using this, we can define the general case $f(a,n) = a^n$ as:

$f(0,n) = 0^n = 0$ for $n>0$, 1 for $n=0$

$f(a+1,0) = (a+1)^0 = 1$

$f(a+1,n+1) = f(a+1,n) \cdot (a+1)$

So $f(a,n) = a^n$ is primitive recursive.

Example 3: The binomial coefficient $C(n,k)$

The binomial coefficient $C(n,k)$ counts the ways to choose k items from n items. It satisfies:

$C(n,0) = C(n,n) = 1$

$C(n+1,k+1) = C(n,k) + C(n,k+1)$

We can define it by nested primitive recursion:

$h(0,k) = 1$ if $k=0$, 0 otherwise

$h(n+1,0) = 1$

$h(n+1,k+1) = h(n,k) + h(n,k+1)$

Then $C(n,k) = h(n,k)$ is primitive recursive.

In summary, the Fibonacci numbers, exponential function a^n, and binomial coefficients are all primitive recursive. This was shown by carefully defining them using the initial functions, projection functions, and the operations of primitive recursion and composition. The key is to break them down into simpler functions that are already known to be primitive recursive.