Computabilità e Algoritmi - 25 Agosto 2014

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

Soluzione:

Enunciato del Teorema di Rice: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme saturato tale che $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$. Allora A non è ricorsivo.

Definizione: Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è saturato (estensionale) se per ogni $x, y \in \mathbb{N}$: se $x \in A$ e $\varphi_x = \varphi_y$, allora $y \in A$.

Dimostrazione: Dimostriamo che $K \leq_m A$. Sia e_0 tale che $\varphi_{e0}(x) \uparrow$ per ogni x. Distinguiamo due casi:

Caso 1: $e_0 \notin A$ Poiché $A \neq \emptyset$, esiste $e_1 \in A$. Definiamo:

```
g(x,y) = { ϕe1(y)  se x ∈ K
         { ϕe0(y)  se x ∉ K
```

Questa è equivalente a: $g(x,y) = \varphi_{e1}(y) \cdot 1(\Psi U(x,x))$

Per il teorema S-m-n, esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifichiamo che s è una funzione di riduzione per $K \leq_m A$:

- $x \in K \implies \forall y\ \varphi_{s(x)}(y) = \varphi_{e1}(y) \implies s(x) \in A$ (poiché A è saturato)
- $x \notin K \implies \forall y\ \varphi_{s(x)}(y) = \varphi_{e0}(y) \uparrow \implies s(x) \notin A$

Caso 2: $e_0 \in A$ Allora $e_0 \notin \bar{A}$. Poiché $\bar{A} \neq \emptyset$, $\bar{A} \neq \mathbb{N}$, e $\bar{A}$ è saturato, per il caso 1 applicato ad $\bar{A}$, otteniamo che $\bar{A}$ non è ricorsivo, quindi A non è ricorsivo. □

Esercizio 2

Problema: Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione f+g definita da $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ sia calcolabile?

Soluzione: No, una tale funzione non può esistere.

Dimostrazione per assurdo: Supponiamo che esista una funzione totale non calcolabile f tale che per ogni funzione totale non calcolabile g, la funzione f+g sia calcolabile.

Sia h una funzione totale non calcolabile qualsiasi (ad esempio, una funzione diagonale che evita tutte le funzioni calcolabili).

Per ipotesi, f+h è calcolabile. Ma allora:
$g(x) = (f+h)(x) - f(x) = h(x)$

Se f+h è calcolabile e f è una funzione (anche se non calcolabile), allora per ottenere h dovremmo essere in grado di calcolare $h(x) = (f+h)(x) - f(x)$.

Tuttavia, questo richiede di poter calcolare f(x), contraddicendo il fatto che f non è calcolabile.

Argomento alternativo più rigoroso: Consideriamo l'insieme delle funzioni totali calcolabili C. Se f+g è sempre calcolabile per ogni g non calcolabile, allora l'operazione $x \mapsto f(x) + c$ (dove c è una costante) mapperebbe funzioni non calcolabili in funzioni calcolabili, il che contraddice il fatto che l'insieme delle funzioni calcolabili è chiuso sotto composizione con funzioni calcolabili ma non può "assorbire" l'incomputabilità in questo modo sistematico. □

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x : \varphi_x(y + x) \downarrow \text{ per qualche } y \geq 0\}$.

Soluzione:

A è ricorsivamente enumerabile:

```
scₐ(x) = 1(μy.S(x, y+x, μt.T(x, y+x, t)))
```

dove S(e,n,t) è il predicato "il programma e su input n termina in t passi".

Questa è calcolabile perché per ogni x fissato, testiamo sequenzialmente y = 0, 1, 2, ... fino a trovare un y tale che $\varphi_x(y+x) \downarrow$.

A non è ricorsivo: Dimostriamo che $K \leq_m A$ costruendo una riduzione.

Definiamo g(x,y) attraverso:

```
g(x,y) = { y    se x ∈ K
         { ↑    se x ∉ K
```

Per il teorema S-m-n, esiste s calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifichiamo la riduzione:

- $x \in K \Longrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = y$ per ogni $y \Longrightarrow \varphi_{s(x)}(s(x)) = s(x) \downarrow \Longrightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Longrightarrow \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \Longrightarrow s(x) \notin A$

Quindi $K \leq_m A$, e poiché K non è ricorsivo, A non è ricorsivo.

$\bar{A}$ non è ricorsivamente enumerabile: Poiché A è r.e. ma non ricorsivo, per il teorema fondamentale, $\bar{A}$ non può essere r.e. □

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : W_x \supseteq Pr\}$, dove $Pr \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi.

Soluzione:

B non è ricorsivamente enumerabile: Dimostriamo che $\bar{K} \leq_m B$.

Definiamo g(x,y) come:

```
g(x,y) = { ↑      se x ∈ K
         { 1      se x ∉ K
```

Per il teorema S-m-n, esiste s calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$.

Verifichiamo la riduzione:

- $x \in K \Longrightarrow W_{s(x)} = \varnothing \Longrightarrow W_{s(x)} \not\supseteq Pr \Longrightarrow s(x) \notin B$
- $x \notin K \Longrightarrow W_{s(x)} = \mathbb{N} \Longrightarrow W_{s(x)} \supseteq Pr \Longrightarrow s(x) \in B$

Quindi $\bar{K} \leq_m B$, e poiché $\bar{K}$ non è r.e., B non è r.e.

$\bar{B}$ non è ricorsivamente enumerabile: $\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \not\supseteq Pr\} = \{x \in \mathbb{N} : \exists p \in Pr.\ p \notin W_x\}$

Questo insieme non è r.e. perché verificare che un numero primo non è in W_x richiederebbe di determinare che l'enumerazione di W_x non produrrà mai quel primo, il che è indecidibile.

Conclusione: B non è ricorsivo. □

Esercizio 5

Problema: Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_n = \varphi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_m \neq \varphi_{m+1}$.

Soluzione:

Parte 1: Esistenza di n tale che $\varphi_n = \varphi_{n+1}$

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato alla funzione f(x) = x+1:
Esiste n tale che $\varphi_n = \varphi f(n) = \varphi_{n+1}$.

Costruzione esplicita: Consideriamo la funzione successore succ(x) = x+1. Per il secondo teorema di ricorsione, esiste n tale che $\varphi_n(y) \simeq \varphi_{su}cc(n)(y) = \varphi_{n+1}(y)$ per ogni y.

Parte 2: Esistenza di m tale che $\varphi_m \neq \varphi_{m+1}$

Supponiamo per assurdo che $\varphi_x = \varphi_{x+1}$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Allora $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_x$ per ogni x, il che implicherebbe che esiste una sola funzione parziale calcolabile.

Ma sappiamo che esistono infinite funzioni parziali calcolabili distinte (ad esempio, le funzioni costanti $\lambda y.c$ per ogni $c \in \mathbb{N}$).

Contraddizione.

Costruzione esplicita: Possiamo costruire esplicitamente m considerando due programmi che calcolano funzioni diverse:

- Programma m: calcola la funzione costante 0
- Programma m+1: calcola la funzione costante 1

Allora $\varphi_m \neq \varphi_{m+1}$. □