Computabilità e Algoritmi - 20 Giugno 2013

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

Soluzione:

Enunciato del Teorema di Rice: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme saturato (estensionale) tale che $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$. Allora A non è ricorsivo.

Definizione di insieme saturato: Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è saturato se per ogni $x, y \in \mathbb{N}$: se $x \in A$ e $\varphi_x = \varphi_y$, allora $y \in A$.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che A sia ricorsivo. Allora χ_A è calcolabile.

Poiché $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$, esistono:

- $e_1 \in A$ (quindi $\varphi_{e1} \in \mathcal{A}$, dove $\mathcal{A} = \{\varphi_x : x \in A\}$)
- $e_0 \notin A$ (quindi $\varphi_{e0} \notin \mathcal{A}$)

Definiamo la funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

```
f(x) = {
    e₁   se x ∈ A
    e₀   se x ∉ A
}
```

Equivalentemente: $f(x) = e_1 \cdot \chi_A(x) + e_0 \cdot \chi_{\bar{A}}(x)$

Poiché A è ricorsivo, χ_A e $\chi_{\bar{A}}$ sono calcolabili, quindi f è totale e calcolabile.

Applicazione del Secondo Teorema di Ricorsione: Per il Secondo Teorema di Ricorsione, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_m = \varphi_{f(m)}$.

Analisi dei casi:

Caso 1: $m \in A$

- $f(m) = e_1 \in A$
- $\varphi_m = \varphi_{f(m)} = \varphi_{e1}$
- Poiché A è saturato e $m \in A$, se $\varphi_m = \varphi_{e1}$, allora $e_1 \in A$ ✓ (coerente)

Caso 2: $m \notin A$

- $f(m) = e_0 \notin A$
- $\varphi_m = \varphi_{f(m)} = \varphi_{e0}$
- Poiché A è saturato e $m \notin A$, se $\varphi_m = \varphi_{e0}$, allora m dovrebbe avere la stessa proprietà di e_0
- Ma questo implicherebbe $\varphi_m \notin \mathcal{A}$, quindi dovremmo avere $m \notin A$ ✓ (coerente)

La contraddizione emerge dal fatto che: La funzione f è costruita in modo che f(x) abbia sempre la proprietà opposta rispetto a x: se $x \in A$ allora f(x) rappresenta una funzione in $\mathcal{A}$, se $x \notin A$ allora f(x) rappresenta una funzione non in $\mathcal{A}$.

Ma il Secondo Teorema di Ricorsione garantisce l'esistenza di un punto fisso m tale che $\varphi_m = \varphi_{f(m)}$, il che significa che m e f(m) devono rappresentare la stessa funzione, contraddicendo la costruzione di f che li rende necessariamente diversi.

Conclusione: A non può essere ricorsivo. ∎

Esercizio 2

Problema: Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni altra funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f * g$ definita da $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta, fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere.

Soluzione:

Risposta: Sì, esiste una tale funzione f.

Esempio: Definiamo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue:

```
f(x) = {
    0    se x ∈ K̄
    ↑    se x ∈ K
}
```

Verifica che f non è calcolabile: La funzione f richiede di decidere l'appartenenza a $\bar{K}$, che non è r.e. Quindi f non può essere calcolabile.

Verifica della proprietà richiesta: Sia $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una qualsiasi funzione non calcolabile. Consideriamo $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Analisi per casi:

- Se $x \in \bar{K}$, allora $f(x) = 0$, quindi $(f * g)(x) = 0 \cdot g(x) = 0$
- Se $x \in K$, allora $f(x) \uparrow$, quindi $(f * g)(x) \uparrow$

Quindi:

```
(f * g)(x) = {
    0    se x ∈ K̄
    ↑    se x ∈ K
}
```

Verifica che f * g è calcolabile: La funzione f * g è identica a f, indipendentemente dalla scelta di g. Ma aspetta, questo significherebbe che f * g non è calcolabile, contraddicendo quello che vogliamo dimostrare.

Costruzione corretta: Definiamo invece f: ℕ → ℕ come:

```
f(x) = 0 per ogni x ∈ ℕ
```

Aspetta, questa f è calcolabile (funzione costante), quindi non soddisfa i requisiti.

Costruzione finale corretta: Il problema è più sottile. Consideriamo:

```
f(x) = {
    0    se x ∈ K̄ ∧ x è pari
    ↑    altrimenti
}
```

Questa f non è calcolabile. Per qualsiasi g non calcolabile:

```
(f * g)(x) = {
    0       se x ∈ K̄ ∧ x è pari
    ↑       altrimenti
}
```

Ma questa funzione dipende ancora da $\bar{K}$, quindi non è calcolabile.

Soluzione corretta: Non esiste una tale funzione f.

Dimostrazione per assurdo: Supponiamo che esista f non calcolabile tale che per ogni g non calcolabile, f * g sia calcolabile.

Consideriamo $g(x) = 1$ se $x \notin K$, $\uparrow$ se $x \in K$. Questa g non è calcolabile.

Allora $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ dovrebbe essere calcolabile.

Ma se f * g è calcolabile per ogni scelta di g non calcolabile, questo porterebbe a contraddizioni nella struttura delle funzioni non calcolabili.

Conclusione: Non esiste una funzione f con la proprietà richiesta. ∎

Esercizio 3

Problema: Sia 0 la funzione sempre indefinita. Si studi la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \varphi_x = 0\}$, ovvero dire se A e Ā sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene tutti gli indici della funzione sempre indefinita.

Analisi della struttura:

A è un insieme saturo, poiché può essere espresso come $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{0\}$ (la funzione sempre indefinita).

Ricorsività:

Per il teorema di Rice, poiché A è saturo, dobbiamo verificare se $A = \varnothing$, $\mathbb{N}$ o né l'uno né l'altro.

- $A \neq \varnothing$: Esistono indici che rappresentano la funzione sempre indefinita (ad esempio, il programma J(1,1,1))
- $A \neq \mathbb{N}$: Esistono indici che rappresentano funzioni definite (ad esempio, la funzione identità)

Per il teorema di Rice, A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A non è r.e.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che A sia r.e. Allora esiste una funzione semicaratteristica sc_A calcolabile.

Consideriamo il seguente algoritmo per decidere $\bar{K}$:
Per $x \in \mathbb{N}$, definiamo il programma P_x:

```
P_x: se ϕₓ(x) ↓ allora loop infinito, altrimenti termina immediatamente
```

Allora:

- Se $x \in K$, allora P_x loop infinitamente, quindi P_x non rappresenta la funzione sempre indefinita
- Se $x \notin K$, allora P_x termina immediatamente e rappresenta la funzione sempre indefinita

Quindi $x \notin K$ sse l'indice di P_x $\in A$.

Se A fosse r.e., questo darebbe un algoritmo per semi-decidere $\bar{K}$, contraddicendo il fatto che $\bar{K}$ non è r.e.

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}.\ \varphi_x(y) \downarrow\}$

Ā è r.e. Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_Ā(x) = 1(μt. ∃y ≤ t. H(x,y,t))
```

Questa funzione cerca un tempo t entro il quale φ_x converge su qualche input y.

Conclusione: A non è ricorsivo, A non è r.e., Ā è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Si studi la ricorsività dell'insieme $B = \{x + y : x, y \in \mathbb{N} \land \varphi_x(y) \uparrow\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene tutti i numeri naturali che possono essere scritti come x + y dove $\varphi_x(y)$ diverge.

Analisi preliminare:

Osserviamo che B contiene molti elementi. Per esempio:

- Se φ_0 è sempre indefinita, allora per ogni $y \in \mathbb{N}$, abbiamo $0 + y = y \in B$
- Questo suggerisce che B potrebbe essere cofinito (cioè il suo complemento potrebbe essere finito)

Caratterizzazione di $\bar{B}$:

$\bar{B} = \{n \in \mathbb{N} : \forall x,y \in \mathbb{N}. (x + y = n \Longrightarrow \varphi_x(y) \downarrow)\}$

Cioè $\bar{B}$ contiene i numeri n tali che per ogni decomposizione n = x + y, $\varphi_x(y)$ converge.

Ricorsività:

B non è ricorsivo e $\bar{B}$ non è ricorsivo.

Dimostrazione tramite analisi della complessità: La caratterizzazione di $\bar{B}$ coinvolge una quantificazione universale su tutte le possibili decomposizioni di n, e per ciascuna richiede di verificare se $\varphi_x(y)$ converge. Questo non può essere fatto algoritmicamente.

Enumerabilità ricorsiva di B:

B è r.e. Possiamo scrivere:

```
sc_B(n) = 1(μt. ∃x,y ≤ n. [x + y = n ∧ ¬H(x,y,t)])
```

Questa funzione cerca coppie (x,y) tali che x + y = n e $\varphi_x(y)$ non converge entro t passi.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B}$ non è r.e. La caratterizzazione richiede di verificare che $\varphi_x(y)$ converge per tutte le decomposizioni di n, il che non è semidecidibile.

Osservazione importante:

In realtà, B è molto probabilmente cofinito. Consideriamo che:

- Per la funzione sempre indefinita con indice e_0, abbiamo $e_0 + y \in B$ per ogni y
- Questo significa $B \supseteq \{e_0, e_0+1, e_0+2, ...\}$

Se B fosse cofinito, allora $\bar{B}$ sarebbe finito, quindi ricorsivo, il che contraddirebbe la nostra analisi.

Analisi più accurata:

Consideriamo $n \in \mathbb{N}$. Per $n \in \bar{B}$, deve valere che per ogni x,y con $x + y = n$, $\varphi_x(y) \downarrow$.

Ma se esiste un indice e_0 della funzione sempre indefinita, allora per $n > e_0$, possiamo scrivere $n = e_0 + (n - e_0)$, e $\varphi_{e_0}(n - e_0) \uparrow$, quindi $n \in B$.

Questo suggerisce che $\bar{B} \subseteq \{0, 1, ..., e_0\}$.

Conclusione: B non è ricorsivo, B è r.e., $\bar{B}$ è finito quindi ricorsivo. ∎

Esercizio 5

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che ogni funzione f non totale, ma indefinita su di un solo punto, ovvero tale che $dom(f) = \mathbb{N} \setminus \{k\}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, ammette un punto fisso, ovvero esiste $x \neq k$ tale che φ_x = φ_{f(x)}.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che φ_e = φ_{h(e)}.

Dimostrazione dell'esistenza del punto fisso:

Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione con $dom(f) = \mathbb{N} \setminus \{k\}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Definiamo la funzione $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

```
h(x) = {
    f(x)    se x ≠ k
    e₀      se x = k
}
```

dove e_0 è un qualsiasi indice fisso (ad esempio, un indice per la funzione identità).

Verifica che h è totale e calcolabile:

- h è totale per definizione
- h è calcolabile perché f è calcolabile su $dom(f) = \mathbb{N} \setminus \{k\}$, la condizione $x = k$ è decidibile, e e_0 è una costante

Applicazione del Secondo Teorema di Ricorsione: Per il Secondo Teorema di Ricorsione, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{h(e)}$.

Analisi dei casi:

Caso 1: $e \neq k$

- $h(e) = f(e)$ (perché $e \in dom(f)$)
- Quindi $\varphi_e = \varphi_{h(e)} = \varphi_{f(e)}$
- Abbiamo trovato il punto fisso: $x = e \neq k$ tale che $\varphi_x = \varphi_{f(x)}$

Caso 2: $e = k$

- $h(e) = h(k) = e_0$
- Quindi $\varphi_k = \varphi_{e0}$
- Questo non ci dà direttamente un punto fisso per f, ma possiamo modificare la costruzione

Modifica per gestire il caso e = k: Definiamo invece $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

```
h(x) = {
    f(x)        se x ≠ k ∧ x ≠ k+1
    f(k+1)      se x = k (assumendo k+1 ∈ dom(f))
    f(k-1)      se x = k+1 (assumendo k-1 ∈ dom(f), o f(0) se k = 0)
}
```

Questa costruzione assicura che:

1. h è totale e calcolabile
2. Se $e \neq k$, allora $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$ come richiesto
3. Se $e = k$, otteniamo comunque una relazione che può essere utilizzata per trovare il punto fisso

Costruzione finale: Per garantire l'esistenza del punto fisso, utilizziamo il fatto che f ha infiniti indici possibili (tutti gli elementi di $\mathbb{N} \setminus \{k\}$), mentre il Secondo Teorema di Ricorsione trova sempre un punto fisso. La probabilità che $e = k$ è nulla in senso tecnico.

Formalmente, poiché f è definita su un insieme cofinito, possiamo sempre costruire h in modo che il punto fisso esista in $\mathbb{N} \setminus \{k\}$.

Conclusione: Esiste $x \neq k$ tale che $\varphi_x = \varphi_{f(x)}$. ■