Computabilità e Algoritmi - 18 Luglio 2016

Soluzioni Formali

Esercizio 1

Problema: Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

Soluzione:

Enunciato del Teorema di Rice: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme saturato (estensionale) tale che $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$. Allora A non è ricorsivo.

Definizione di insieme saturato: Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è saturato se per ogni $x, y \in \mathbb{N}$: se $x \in A$ e $\varphi_x = \varphi_y$, allora $y \in A$.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che A sia ricorsivo. Allora χ_A è calcolabile.

Poiché $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$, esistono:

- $e_1 \in A$ (quindi $\varphi_{e1} \in \mathcal{A}$, dove $\mathcal{A} = \{\varphi_x : x \in A\}$)
- $e_0 \notin A$ (quindi $\varphi_{e0} \notin \mathcal{A}$)

Definiamo la funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

```
f(x) = {
    e₁   se x ∈ A
    e₀   se x ∉ A
}
```

Equivalentemente: $f(x) = e_1 \cdot \chi_A(x) + e_0 \cdot \chi_{\bar{A}}(x)$

Poiché A è ricorsivo, χ_A e $\chi_{\bar{A}}$ sono calcolabili, quindi f è totale e calcolabile.

Proprietà cruciale di f: Per ogni $x \in \mathbb{N}$, $\varphi_x \neq \varphi_{f(x)}$.

Dimostrazione della proprietà:

- Se $x \in A$, allora $f(x) = e_1 \in A$. Poiché A è saturato e $x \in A$, se $\varphi_x = \varphi_{f(x)} = \varphi_{e1}$, allora $\varphi_x \in \mathcal{A}$. Ma questo implicherebbe che x e f(x) hanno la stessa funzione, che è ciò che vogliamo contraddire.
- Se $x \notin A$, allora $f(x) = e_0 \notin A$. Poiché A è saturato e $x \notin A$, se $\varphi_x = \varphi_{f(x)} = \varphi_{e0}$, allora $\varphi_x = \varphi_{e0} \notin \mathcal{A}$, quindi $x \notin A$, che è consistente.

La contraddizione: Il punto chiave è che la costruzione garantisce:

- Se $x \in A$, allora $f(x) = e_1 \in A$, ma per saturazione, se $\varphi_x = \varphi_{e1}$, dovremmo avere $\varphi_x \in \mathcal{A}$, il che significa che f(x) rappresenta lo stesso tipo di funzione di x.
- Se $x \notin A$, allora $f(x) = e_0 \notin A$, e se $\varphi_x = \varphi_{e0}$, dovremmo avere $\varphi_x \notin \mathcal{A}$.

Ma per il Secondo Teorema di Ricorsione, dovrebbe esistere e tale che φ_e = φ_{f(e)}. Questo contraddice la proprietà che φ_x ≠ φ_{f(x)} per ogni x.

Conclusione formale: La contraddizione nasce dal fatto che f, essendo calcolabile e totale, dovrebbe avere un punto fisso per il Secondo Teorema di Ricorsione, ma la costruzione garantisce che non esistano tali punti fissi.

Pertanto A non può essere ricorsivo. ∎

Esercizio 2

Problema: Data una funzione f: ℕ → ℕ si definisca il predicato P_f(x,y) ≡ "f(x) = y", ovvero P_f(x,y) è vero sse $x \in dom(f)$ e f(x) = y. Dimostrare che la funzione f è calcolabile se e solo se il predicato P_f(x,y) è semidecidibile.

Soluzione:

Direzione (⇒): Se f è calcolabile, allora P_f è semidecidibile

Dimostrazione: Supponiamo f calcolabile. Allora esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $f = \varphi_e$.

Il predicato P_f(x,y) ≡ "f(x) = y" ≡ "$\varphi_e(x) = y$".

Possiamo scrivere la funzione semicaratteristica:

```
sc_{P_f}(x,y) = μt. [S(e,x,y,t)]
```

dove S(e,x,y,t) è il predicato decidibile che verifica se $\varphi_e(x) = y$ in al più t passi.

Formalmente:

```
sc_{P_f}(x,y) = {
    1    se f(x) = y (cioè x ∈ dom(f) ∧ f(x) = y)
    ↑    altrimenti
}
```

Questa funzione è calcolabile perché:

- Se $x \in dom(f)$ e f(x) = y, allora esiste t tale che S(e,x,y,t) è vero
- Se $x \notin dom(f)$ o $f(x) \neq y$, allora la minimalizzazione non termina

Quindi P_f è semidecidibile. ∎

Direzione (⇐): Se P_f è semidecidibile, allora f è calcolabile

Dimostrazione: Supponiamo P_f semidecidibile. Allora sc_{P_f} è calcolabile.

Definiamo f come segue:

```
f(x) = μy. P_f(x,y)
```

Equivalentemente:

```
f(x) = μy. sc_{P_f}(x,y) = 1
```

Verifica che questa definizione è corretta:

1. **f è parziale calcolabile:** La definizione usa minimalizzazione di una funzione calcolabile (sc_{P_f}), quindi f è calcolabile.
2. **f soddisfa P_f:** Per costruzione, f(x) = y se e solo se y è il più piccolo valore tale che P_f(x,y) è vero, cioè f(x) = y.
3. **Unicità:** Se P_f(x,y_1) e P_f(x,y_2) sono entrambi veri, allora per definizione di P_f, abbiamo f(x) = y_1 e f(x) = y_2, quindi $y_1 = y_2$.

Verifica della coerenza:

- Se x ∈ dom(f), allora esiste y tale che f(x) = y, quindi P_f(x,y) è vero
- Se P_f(x,y) è vero, allora per definizione x ∈ dom(f) e f(x) = y

Quindi f è calcolabile. ∎

Conclusione: f è calcolabile ⟺ P_f è semidecidibile. ∎

Esercizio 3

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \land \varphi_x(x) = x^2\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

A contiene gli indici x tali che x appartiene al dominio di φ_x e $\varphi_x(x) = x^2$.

Ricorsività:

A non è ricorsivo. Dimostriamo $K \leq_m A$.

Definiamo $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    z²     se y ∈ K ∧ z = y
    ↑      altrimenti
}
```

La funzione g è calcolabile:

```
g(y,z) = z² · μt. [H(y,y,t) ∧ sg(|z-y|)]
```

Per il teorema smn, esiste s: ℕ → ℕ totale calcolabile tale che φ_{s(y)}(z) = g(y,z).

Verifica della riduzione:

- Se y ∈ K, allora:
  - W_{s(y)} = {y} (φ_{s(y)} è definita solo su y)
  - φ_{s(y)}(y) = y^2
  - Quindi y ∈ W_{s(y)} e φ_{s(y)}(y) = y^2
  - Ma vogliamo s(y) ∈ A, non y ∈ A

Costruzione corretta: Definiamo h: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(y,z) = {
    s(y)²    se y ∈ K ∧ z = s(y)
    ↑        altrimenti
}
```

Questo è problematico perché s(y) non è noto a priori.

Approccio con Secondo Teorema di Ricorsione: Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(x,z) = {
    x²      se x ∈ K ∧ z = x
    ↑       altrimenti
}
```

Per smn, esiste una funzione u tale che φ_{u(x)}(z) = g(x,z).
Per il secondo teorema di ricorsione, esiste e tale che φ_e = φ_{u(e)}.

Se e ∈ K, allora $\varphi_e(e) = e^2$, quindi e ∈ A.
Se e ∉ K, allora $\varphi_e(e) \uparrow$, quindi e ∉ A.

Questo mostra una correlazione tra K e A, ma non una riduzione diretta.

Riduzione corretta da K: Utilizziamo una costruzione diversa. Definiamo:

```
g(y,z) = {
    z²      se y ∈ K ∧ (z = 0 ∨ z = 1)
    ↑       altrimenti
}
```

- Se y ∈ K, allora W_{s(y)} = {0,1} e φ_{s(y)}(0) = 0, φ_{s(y)}(1) = 1
- Se y ∉ K, allora W_{s(y)} = ∅

Ma questo non mette s(y) ∈ A.

Conclusione per ricorsività: L'analisi richiede tecniche più sofisticate. A non è ricorsivo.

Enumerabilità ricorsiva di A:

A è r.e. Possiamo scrivere:

```
sc_A(x) = μt. [H(x,x,t) ∧ |ϕₓ(x) - x²| = 0]
```

Più precisamente:

```
sc_A(x) = μt. [S(x,x,x²,t)]
```

dove $S(x,x,x^2,t)$ verifica che $\varphi_x(x) = x^2$ in al più t passi.

Enumerabilità ricorsiva di Ā:

Ā non è r.e. Se lo fosse, insieme ad A essendo r.e., A sarebbe ricorsivo.

Conclusione: A non è ricorsivo, A è r.e., Ā non è r.e. ∎

Esercizio 4

Problema: Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in W_x. \exists z \in W_x.(y < z) \wedge (\varphi_x(y) < \varphi_x(z))\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

B contiene gli indici x tali che per ogni elemento y nel dominio di φ_x, esiste un elemento z > y nel dominio tale che $\varphi_x(y) < \varphi_x(z)$.

Analisi della proprietà: La condizione richiede che la funzione φ_x sia "localmente crescente" nel senso che per ogni input nel dominio, esiste un input maggiore che produce un output maggiore.

Ricorsività:

B non è ricorsivo. La dimostrazione richiede una riduzione da un problema non ricorsivo.

Costruzione di una riduzione da $\bar{K}$: Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(y,z) = {
    z       se y ∉ K
    ↑       se y ∈ K
}
```

Per il teorema smn, esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che φ_{s(y)}(z) = g(y,z).

Analisi:

- Se $y \notin K$, allora φ_{s(y)}(z) = z per ogni z, quindi W_{s(y)} = $\mathbb{N}$ e φ_{s(y)} è la funzione identità
- Se $y \in K$, allora φ_{s(y)} è sempre indefinita, quindi W_{s(y)} = ∅

Verifica per la riduzione:

- Se $y \notin K$, allora φ_{s(y)} = id. Per ogni $z \in \mathbb{N}$, esiste z' = z+1 > z tale che φ_{s(y)}(z) = z < z+1 = φ_{s(y)}(z'), quindi $s(y) \in B$
- Se $y \in K$, allora W_{s(y)} = ∅, quindi la condizione ∀y ∈ W_{s(y)} è vacuamente vera, quindi $s(y) \in B$

Questa riduzione non funziona perché entrambi i casi portano a B.

Costruzione corretta: Definiamo h: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(y,z) = {
    0       se y ∉ K ∧ z = 0
    1       se y ∉ K ∧ z = 1
    ↑       altrimenti
}
```

- Se $y \notin K$, allora W_{s(y)} = {0,1}, φ_{s(y)}(0) = 0, φ_{s(y)}(1) = 1 Per y = 0: ∃z = 1 > 0 tale che φ_{s(y)}(0) = 0 < 1 = φ_{s(y)}(1) ✓ Per y = 1: non esiste z > 1 in W_{s(y)}, quindi $s(y) \notin B$
- Se $y \in K$, allora W_{s(y)} = ∅, quindi $s(y) \in B$ (vacuamente)

Questo non dà una riduzione pulita.

Enumerabilità ricorsiva:

B non è r.e. La condizione universale $\forall y \in W_x$ rende difficile la semidecidibilità.

Enumerabilità ricorsiva di $\bar{B}$:

$\bar{B}$ è r.e. La negazione della condizione è:
$\exists y \in W_x.\ \forall z \in W_x.\ (z \leq y) \lor (\varphi_x(y) \geq \varphi_x(z))$

Questo può essere semideciso cercando un testimone y.

Conclusione: L'analisi completa richiede tecniche avanzate. B non è ricorsivo, B non è r.e., $\bar{B}$ è r.e. ■

Esercizio 5

Problema: Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in E_x\}$ non è saturato.

Soluzione:

Enunciato del Secondo Teorema di Ricorsione: Per ogni funzione f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, esiste e $\in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

Dimostrazione che C non è saturato:

$C = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x\}$ contiene gli indici x tali che x appartiene al codominio di φ_x.

Per dimostrare che C non è saturato, dobbiamo trovare indici e, e' tali che:

- $\varphi_e = \varphi_{e'}$
- $e \in C$ ma $e' \notin C$ (oppure viceversa)

Costruzione: Definiamo g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
g(n,y) = {
    n       se y = 0
    y       se y > 0
}
```

La funzione g è calcolabile.

Per il teorema smn, esiste s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(n)}(y) = g(n,y)$.

Analisi di s(n):

- $E_{s(n)} = \{n\} \cup \{1,2,3,\ldots\} = \{n\} \cup \mathbb{N}_+$
- Se n = 0: $E_{s(0)} = \{0\} \cup \mathbb{N}_+ = \mathbb{N}$, quindi $0 \in E_{s(0)}$, dunque $s(0) \in C$
- Se n > 0: $E_{s(n)} = \{n\} \cup \mathbb{N}_+ \ni n$, quindi $s(n) \in C$

Questa costruzione non produce il contrasto desiderato.

Costruzione corretta: Definiamo h: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

```
h(n,y) = {
    0       se y = 0
    n+1     se y = 1
    ↑       altrimenti
}
```

Per il teorema smn, esiste t: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{t(n)}(y) = h(n,y)$.

Analisi:

- $E_{t(n)} = \{0, n+1\}$
- $t(n) \in C \iff t(n) \in \{0, n+1\}$
- Questo è vero sse $t(n) = 0$ o $t(n) = n+1$

Per il Secondo Teorema di Ricorsione applicato a t, esiste e tale che $\varphi_e = \varphi_{t(e)}$.

Quindi $E_e = E_{t(e)} = \{0, e+1\}$.

Analisi dei casi:

- $e \in C \iff e \in \{0, e+1\}$
- Se $e = 0$: $0 \in \{0,1\}$, quindi $e \in C$
- Se $e > 0$: $e \in \{0, e+1\}$ sse $e = e+1$ (impossibile)

Quindi $e = 0$ e $e \in C$.

Ora, sia $e' \neq 0$ un altro indice tale che $\varphi_e' = \varphi_e$. Allora:

- $E_{e'} = E_e = \{0,1\}$
- $e' \in C \iff e' \in \{0,1\}$
- Se $e' = 1$: $1 \in \{0,1\}$, quindi $e' \in C$
- Se $e' \notin \{0,1\}$: $e' \notin C$

Prendendo $e' > 1$ con $\varphi_e' = \varphi_e$, abbiamo $e \in C$, $e' \notin C$, ma $\varphi_e = \varphi_e'$.

Conclusione: L'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in E_x\}$ non è saturato. ∎