2° APPELLO 2015 (16/07/2015)

Es. 1 del 16/07/2015

$P(x,\vec{y})$ SEMIDECIDIBILE $\Rightarrow \exists x. P(x,\vec{y})$ E' SEMIDECIDIBILE. CONTROESEMPIO DEL CONTRARIO.

SOLUZIONE:

- E' UTILE CITARE IL TEOREMA DI STRUTTURA: $P(\vec{x})$ SEMIDECIDIBILE $\Leftrightarrow \exists Q(\vec{x},y)$ DECIDIBILE t.c. t.c. $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x},y)$
- DEVO DIMOSTRARE $P(x,\vec{y})$ SEMIDECIDIBILE $\Rightarrow P'(\vec{y}) = \exists x. P(x,\vec{y})$ SEMIDECIDIBILE
- $P(x,\vec{y})$ É SEMIDECIDIBILE $\Leftrightarrow \exists t. Q(x,\vec{y},t)$ DECIDIBILE t.c. $P(x,\vec{y}) \equiv \exists t. Q(t,x,\vec{y})$
- $P'(\vec{y}) = \exists x. \exists t. Q(t,x,\vec{y}) \equiv \exists w. Q((w)_1,(w)_2,\vec{y})$ DECIDIBILE QUINDI PER IL T. STRUTTURA $P'(\vec{y})$ E' SEMIDECIDIBILE. $\square$
- NON VALE IL CONTRARIO AD ESEMPIO $P(x,\vec{y}) \equiv (x \in W_x)$ $\exists x. P(x,\vec{y})$
- <u>ALTERNATIVA</u>: $P(x,y) \equiv (y=1) \land (x \notin W_x)$ $Q(y) \equiv \exists x. P(x,y) \equiv (y=1)$
- <u>ALTERNATIVA</u>: SUPPONIAMO $P(x,y)$ VALGA SE $\varphi_x(x)\uparrow$, $P(x,y)$ NON SEMIDECIDIBILE ALTRIMENTI $\bar{K}$ SAREBBE R.E. MA SAPPIAMO CHE ESISTONO PROGRAMMI CHE APPARTENGONO A $\bar{K}$, AD ESEMPIO QUELLI CHE CALCOLANO LA FUNZIONE SEMPRE INDEFINITA, ALLORA $\exists x. P(x,\vec{y})$ VALE SEMPRE QUINDI INEVITABILMENTE SEMIDECIDIBILE

Es. 2 del 16/07/2015

A R.E. $\Leftrightarrow A \leq_m K$

SOLUZIONE:

($\Leftarrow$) K R.E. QUINDI $SC_K(x)$ E' CALCOLABILE, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ E' FUNZIONE DI RIDUZIONE QUINDI $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in K \Rightarrow SC_A(x) = SC_K(f(x))$ CALCOLABILE $\Rightarrow$ <u>A R.E.</u>

($\Rightarrow$) A R.E. QUINDI $SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ CALCOLABILE

PRENDIAMO $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ FUNZIONE DI RIDUZIONE QUINDI $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in K$ CALC. TOT.

$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = SC_A(x)$ CALCOLABILE, PER T. SMN $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x \in A \Rightarrow \varphi_{f(x)}(y) = 1\ \forall y \Rightarrow f(x) \in W_{f(x)} \Rightarrow f(x) \in K \\ \bullet\ x \notin A \Rightarrow \varphi_{f(x)}(y)\uparrow\ \forall y \Rightarrow \varphi_{f(x)}(f(x))\uparrow \Rightarrow f(x) \notin K \end{array}\right\} \underline{A \leq_m K}$$

Es. 3 del 16/07/2015

RICORSIVITA' DI $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in E_x,\ \exists z \in W_x .\ x = y \cdot z\}$

SOLUZIONE:

- A SEMBRA ESSERE R.E.:

$$sc_A(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.\ S(x, \overset{\overset{y}{\uparrow}}{(w)_1}, (w)_2, (w)_3) \wedge H(x, \overset{\overset{z}{\uparrow}}{(w)_4}, (w)_5) \wedge (x = (w)_1 * (w)_4)\right)$$

sc_A CALCOLABILE QUINDI <u>A R.E.</u>

- DIMOSTRIAMO A NON RICORSIVO USANDO $K \leq_m A$:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = sc_K(x) \quad \text{CALCOLABILE}$$

PER T. SMN $\exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ CALCOLABILE TOTALE t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$, S E' FUNZIONE DI RIDUZIONE:

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 1\ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}(\overset{z \in W_x}{\overset{\uparrow}{s(x)}}) = \overset{y \in E_x}{\overset{\uparrow}{1}} \quad s(x) = y * z \Rightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) \uparrow\ \forall y \Rightarrow E_{s(x)} = W_{s(x)} = \emptyset \Rightarrow s(x) \notin A$

A R.E. e A NON RICORSIVO $\Rightarrow$ <u>$\bar{A}$ NON R.E.</u>

Es. 4 del 16/07/2015

RICORSIVITA' DI $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x \setminus E_x| \geq 2\}$

SOLUZIONE:

- $B = \{x \mid x \in \mathcal{B}\}$ $\quad \mathcal{B} = \{f \mid |dom(f) \setminus cod(f)| \geq 2\}$. B SATURATO

$$f(x) = x \dot{-} 2 = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ x-2 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad dom(f) = cod(f) = \mathbb{N} \Rightarrow |dom(f) / cod(f)| = 0 \Rightarrow f \notin \mathcal{B}$$

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad dom(\vartheta) = \{0,1,2\},\ cod(\vartheta) = \{0\} \Rightarrow |dom(\vartheta) / cod(\vartheta)| = 2 \Rightarrow \vartheta \in \mathcal{B}$$

QUINDI $f \notin \mathcal{B}$ MA $\exists \vartheta \subseteq f$, ϑ FINITA, $\vartheta \in \mathcal{B}$ PER RICE SHAPIRO <u>B NON R.E.</u>

- $\bar{\mathcal{B}} = \{f \mid |dom(f) \setminus cod(f)| < 2\}$

$\mathbb{1} \notin \bar{\mathcal{B}} \quad |dom(\mathbb{1}) \setminus cod(\mathbb{1})| = \mathbb{N} \setminus \{1\} > 2$

$\emptyset \in \bar{\mathcal{B}} \quad |dom(\emptyset) \setminus cod(\emptyset)| = 0 < 2$

QUINDI $\mathbb{1} \notin \bar{\mathcal{B}}$ MA $\emptyset \subseteq \mathbb{1}$, $\emptyset$ FINITA, $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ PER RICE SHAPIRO <u>$\bar{B}$ NON R.E.</u>

E.S del 16/07/2015

2° TEOREMA DI RICORSIONE PER DIMOSTRARE $\exists x$ t.c. $W_x = \{Kx \mid K \in \mathbb{N}\}$

SOLUZIONE

- IL 2° T. DI RICORSIONE ASSERISCE CHE DATA UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\exists e \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$

- $g(x, y) = \begin{cases} K & y = Kx \text{ PER QUALCHE } K \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \mu K . |Kx - y|$

PER T.SMN $\exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE t.c. $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$

$W_{s(x)} = \{Kx \mid K \in \mathbb{N}\}$ MA NOI VOGLIAMO SOLO W_x

PER IL 2° T. DI RICORSIONE $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ QUINDI $\underline{W_e = W_{s(e)} = \{Ke \mid K \in \mathbb{N}\}}$

ALTERNATIVA $\boxed{\text{SBAGLIATA}}$: $g(x, y) = \begin{cases} 1 & yx \in W_x \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \mathbb{1}(\varphi_U(x, yx))$

DOPO TUTTI I PROCEDIMENTI COME SOPRA: $W_x = \{y \mid y * x \in W_x\}$ NON VA BENE PERCHE' SODDISFATTO DA VUOTO