1° APPELLO 2015 (30/06/2015)

Es. 1 del 30/06/2015

$P(\vec{x})$ SEMIDECIDIBILE $\Leftrightarrow \exists Q(\vec{x},y)$ DECIDIBILE TALE CHE $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x},y)$

SOLUZIONE:

($\Rightarrow$) DATO CHE $P(\vec{x})$ E' SEMIDECIDIBILE ESISTE $SC_p(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } P(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ CALCOLABILE, QUINDI $\exists e \in \mathbb{N} . SC_p = \varphi_e$.

QUESTO SIGNIFICA CHE $P(\vec{x})$ VALE SSE $SC_p(\vec{x})\downarrow = \varphi_e(\vec{x})$ SSE $\exists y . H(e,\vec{x},y)$

SIA $Q(\vec{x},y) = H(e,\vec{x},y)$ PREDICATO DECIDIBILE, $P(\vec{x}) \equiv \exists y. (Q(\vec{x},y))$

($\Leftarrow$) $SC_p(\vec{x}) = 1\!\!1(\mu y. |\chi_{Q(\vec{x},y)} - 1|)$ E' CALCOLABILE PERCHE' Q E' DECIDIBILE QUINDI $P(\vec{x})$ E' SEMIDECIDIBILE PERCHE' ESISTE $SC_p(\vec{x})$ CALCOLABILE E $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x},y)$

Es. 2 (INCOMPLETO) del 30/06/2015

DEFINIRE $A \leq_m B$ E DIRE SE E' VERO CHE VALE $A \leq_m A \cup \{0\}$

SOLUZIONE:

- DATI $A, B \subseteq \mathbb{N}$ CON $A \leq_m B$ INDICHIAMO IL FATTO CHE UN INSIEME SIA RIDUCIBILE AD UN ALTRO, IN QUESTO CASO A E' RIDUCIBILE ALL'INSIEME B. QUESTO VALE SSE $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE, CHE CHIAMIAMO FUNZIONE DI RIDUZIONE, TALE CHE $\forall x\, x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.
- NON E' VERO CHE $A \leq_m A \cup \{0\}$, IL CONTROESEMPIO E' $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Es. 3 del 30/06/2015

STUDIO RICORSIVITA' DI $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \cup W_x\}$

SOLUZIONE:

- NON E' SATURATO, SEMBRA ESSERE R.E. QUINDI CERCO $sc_A(x)$
- $sc_A(x) = 1\!\!1(\mu w. (H(x,x,(w)_1) \vee S(x,(w)_2,x,(w)_3)))$ CALCOLABILE $\Rightarrow$ A R.E.
- DIMOSTRIAMO CHE A NON E' RICORSIVO CON $K \leq_m A$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = sc_K(x)$$

PER IL TEOREMA SMN $\exists s : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 1 \ \forall y \Rightarrow W_{s(x)} = \mathbb{N} \Rightarrow s(x) \in W_{s(x)} \subseteq W_{s(x)} \cup E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) \uparrow \ \forall y \Rightarrow W_{s(x)} = E_{s(x)} = \emptyset \Rightarrow s(x) \notin W_{s(x)} \cup E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin A$

QUINDI S E' FUNZIONE DI RIDUZIONE DA K AD A $\Rightarrow$ A NON RICORSIVO MA R.E. $\Rightarrow \bar{A}$ NON R.E.

Es. 4 del 30/06/2015

STUDIO RICORSIVITA' DI $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq |E_x| \leq 2\}$

SOLUZIONE:

- $B = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{B} = \{f \mid 1 \leq |cod(f)| \leq 2\}$ SATURATO
- B NON R.E.:

$id \notin \mathcal{B}$ $(|cod(id)| > 2)$, $\exists \theta \subseteq id$, θ FINITA: $\theta(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$\theta \in \mathcal{B}$ $(|cod(\theta)| = 1)$ $\Rightarrow$ PER RICE-SHAPIRO B NON R.E.

- $\bar{B}$ NON R.E.:

$\theta \notin \bar{\mathcal{B}}$ MA $\emptyset \subseteq \theta$ E $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ $(|cod(\emptyset)| = 0)$ $\Rightarrow \bar{B}$ NON R.E. PER RICE-SHAPIRO

Es. 5 del 30/06/2015

2° TEOREMA DI RICORSIONE PER DIMOSTRARE CHE $C = \{x \in \mathbb{N} : [0,x] \subseteq W_x\}$ NON E' SATURATO

SOLUZIONE

- IL 2° T. DI RICORSIONE ASSERISCE CHE DATA UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\exists e \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$
- $g(x,y) = \begin{cases} 0 & y \in [0,x] \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \mu z.\ y = x$ CALCOLABILE
- PER T. SMN $\exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ CALC. TOT. t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$
- PER 2° T. RICORSIONE $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$
- $\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e,y) = \begin{cases} 0 & y \in [0,e] \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ $W_e = [0,e]$ QUINDI $e \in C$
- ESISTONO INFINITI e' CHE CALCOLANO LA STESSA FUNZIONE IN PARTICOLARE INFINITI e' t.c. $e' > e$ E $\varphi_e = \varphi_{e'}$ MA L'INTERVALLO $[0,e'] \nsubseteq [0,e]$ PERCHE' PIÙ GRANDE QUINDI $e \in C$ MA $e' \notin C$ E $\varphi_e = \varphi_{e'}$ CHE CONTRADDICE LA DEFINIZIONE DI INSIEME SATURATO QUINDI C NON SATURATO

SIA $A \subseteq \mathbb{N}$, $\forall x,y$ $x \in A$ E $\varphi_x = \varphi_y \Rightarrow y \in A$