9.9 Appello 2014-07-02

9.9.1 Esercizio 1

Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo solo se $A, \overline{A}$ sono RE.

Soluzione

A ricorsivo $\Rightarrow A, \overline{A}$ sono RE.

Essendo A ricorsivo, la sua funzione caratteristica $\mathcal{X}_A$ è calcolabile e può essere utilizzata per definire la funzione semi-caratteristica di A:

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}(\mathcal{X}_A(x))\Big)$$

La funzione semi-caratteristica di $\overline{A}$ può essere definita in modo analogo

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\mathcal{X}_A(x)\Big)$$

$A, \overline{A}$ sono RE $\Rightarrow A$ ricorsivo

Entrambe le funzioni semi-caratteristiche sono calcolabili e possono essere combinate per definire la funzione caratteristica.

Sia e_1 un programma tale che $\phi_{e_1} = SC_A$ e e_2 tale che $\phi_{e_2} = \overline{sg}(SC_{\overline{A}})$, entrambi esistono perché le loro funzioni sono calcolabili.

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} SC_A(x) & x \in A \\ \overline{sg}(SC_{\overline{A}}(x)) & x \notin A \end{cases}$$
$$= \Bigg(\mu w.\Big(S\big(e_1, x, (w)_1, (w)_2\big) \wedge S\big(e_2, x, (w)_1, (w)_2\big)\Big)\Bigg)_1$$

9.9.2 Esercizio 2

Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale, non calcolabile tale che $f(x) = x/2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ e pari, oppure dimostrare che tale funzione non esiste.

Soluzione

La funzione deve essere totale e non viene specificato nulla per quanto riguarda il valore della funzione sui numeri dispari.

Sia $\{\phi_n\}$ una qualsiasi enumerazione delle funzioni calcolabili.

La funzione f può essere definita come

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x \text{ è pari} \\ \phi_x(x) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi che la funzione f:

- è totale, perché definita su tutto $\mathbb{N}$
- vale $x/$ se x è pari
- è diversa da tutte le funzioni calcolabili se x è dispari e quindi negli infiniti punti dispari non è calcolabile

9.9.3 Esercizio 3

$$A = \{x | \forall k \in \mathbb{N}. x + k \in W_x\}$$

Soluzione

A sembra non essere RE, perché per provare l'appartenenza è necessario andare a provare infiniti valori di k.

Si può quindi provare la riduzione $\overline{K} \leq_m A$.

Serve quindi una funzione tale che se $x \in \overline{K}$, $f(x)$ sia definita $\forall x' \geq x$ ed una funzione definita su tutto $\mathbb{N}$ soddisfa questa condizione, mentre se $x \in K$, $f(x)$ non deve essere definita in almeno un punto $x' \geq x$.

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & H(x,x,y) \end{cases}$$

Non posso usare $x \in \overline{K}$ perché la funzione semi-caratteristica non è calcolabile, devo ragionare sul numero di passi y impiegati dal programma per terminare.

Essendo calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, che funziona da funzione di riduzione, perché:

- $x \in \overline{K}$: $\forall y \, \neg H(x,x,y)$ è vero e quindi $\forall y \, \phi_{f(x)}(y) = 1$ ed in particolare $\phi_{f(x)}(f(x)+k) = 1 \, \forall k$, ovvero $f(x) \in A$.
- $x \in K$: $\exists y_0$ tale che $\forall y > y_0$, $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow$, è quindi possibile trovare almeno un valore $y' > y_0$ tale che $y' > x + 0$, pertanto $f(x) \notin A$.

Si ha quindi che A non è RE.

$\overline{A} = \{x | \exists k \in \mathbb{N}. x + k \notin W_x\}$, anche in questo caso sembra non essere RE, perché per verificare l'appartenenza è necessario che il programma x non termini quando riceve in input $x + k$.

Si può quindi provare la riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{A}$.

Serve quindi una funzione tale che se $x \in \overline{K}$, $f(x)$ non termini quanto riceve in input $x + k$ e si può osservare che i programmi che calcolano $\emptyset$ sono in $\overline{A}$. Se invece $x \in K$, $f(x)$ deve essere definita su tutti gli input $> x$.

$$g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \end{cases} = SC_K(x)$$

Essendo calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, che funziona da funzione di riduzione, perché:

- $x \in \overline{K}$: il predicato $\neg H(x,x,y)$ vale $\forall y$ e quindi $\phi_{f(x)}(y) = \uparrow \forall y$, pertanto $f(x) \in \overline{A}$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = 1 \forall y$ ed in particolare $\phi_{f(x)}(y) \downarrow \forall y > x$ e quindi $f(x) \in A$

Segue quindi che anche $\overline{A}$ non è RE.

9.9.4 Esercizio 4

$$V = \{x | E_x \text{ infinito}\}$$

Soluzione

V è saturo, perché $\mathcal{V} = \{f |\ |cod(f)| = \infty\}$.

Banalmente la funzione $id \in \mathcal{V}$ e tutte le sue parti finite non appartengono per definizione a $\mathcal{V}$, quindi per Rice Shapiro V è non RE.

Analogamente $id \notin \overline{\mathcal{V}}$ e la funzione $\emptyset$ appartiene a $\overline{\mathcal{V}}$ ed è parte finita di id, quindi per Rice Shapiro, $\overline{V}$ è non RE.

9.9.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione e dimostrare che $\exists k | W_k = \{k * i | i \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione

Il teorema dice che, data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, $\exists e. \phi_e = \phi_{f(e)}$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ è multiplo di } y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\!\!\!\!/\Big(\mu z. |xz - y|\Big)$$

Essendo g calcolabile, per SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y) \forall y$ e quindi si ha che

$$W_{f(x)} = \{x * i | i \in \mathbb{N}\}$$

e per il secondo teorema di ricorsione, esiste x tale che $\phi_x = \phi_{f(x)}$, ovvero $\exists x$ tale che:

$$W_x = W_{f(x)} = \{x * i | i \in \mathbb{N}\}$$