3° APPELLO 2015 (03/09/2015)

Es. 1 del 03/09/2015

MINIMALIZZAZIONE ILLIMITATA E DIMOSTRAZIONE CHE $\mathcal{C}$ E' CHIUSO RISPETTO AD ESSA

SOLUZIONE:

- $f: \mathbb{N}^{K+1} \rightarrow \mathbb{N} \rightsquigarrow h(\vec{x}) = \mu y. f(\vec{x}, y)$ → SIGNIFICA MINIMO y t.c. $f(\vec{x}, y) = 0$

Y POTREBBE NON ESISTERE →
$$\hookrightarrow \begin{cases} y & \text{se } f(\vec{x}, y) = 0,\ \forall z < y.\ f(\vec{x}, z)\downarrow \wedge f(\vec{x}, z) \neq 0 \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- DIMOSTRAZIONE "$\mathcal{C}$ CHIUSO RISPETTO ALLA MINIMALIZZAZIONE ILLIMITATA"

SIA $f: \mathbb{N}^{K+1} \rightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{C} \Rightarrow h(\vec{x}) = \mu y. f(\vec{x}, y) \in \mathcal{C}$

SIA F PROGRAMMA URM PER f

x_1	...	x_K	...	x_1	...	x_K	y_0	0	...
1		K		m+1		m+K		m+K+2	

$m = \max\{\rho(F), K\}$

```
LOOP: F[m+1, ..., m+K, m+K+1 -> 1]
      J[1, m+K+2, END]          // f(x, y)=0?
      S(m+K+1)                  // y++
      J(1, 1, LOOP)
END : T(m+K+1, 1)
```

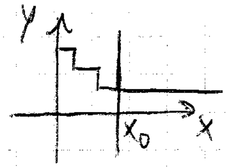
QUINDI $\mathcal{C}$ CHIUSO RISPETTO ALLA MINIMALIZZAZIONE ILLIMITATA

Es. 2 del 03/09/2015

ESISTE UNA FUNZIONE DECRESCENTE TOTALE NON CALCOLABILE? $(\forall x, y \in \mathbb{N}$ se $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$

SOLUZIONE:

NON ESISTE:



$K = \min\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ sia $x_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $f(x_0) = K$

DATO CHE f E' DECRESCENTE $\forall x \geq x_0$ $f(x) \leq f(x_0) = K$ MA $f(x) \geq K$ QUINDI $f(x) = K$

$$\theta(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < x_0 \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \theta(x) & x < x_0 \\ K & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI POTREBBE GIA' CONCLUDERE QUI MA E' POSSIBILE ESSERE PIU' PRECISI:

$$f(x) = \mu w. \left((x < x_0 \wedge S(e, x, (w)_1, (w)_2)) \wedge (x \geq x_0 \wedge (w)_1 = K) \right)_1$$

Es. 3 del 03/09/2015

STUDIARE RICORSIVITA' DI $A = \{x \mid E_x = W_x + 1\}$ SAPENDO CHE $X \subseteq \mathbb{N}$ $X+1 = \{x+1 \mid x \in X\}$

SOLUZIONE

- $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\mathcal{A} = \{f \mid \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(f) + 1\}$ SATURATO

A NON SEMBRA R.E.:

$id \notin \mathcal{A}$ $\mathrm{dom}(id) = \mathbb{N}$, $\mathrm{dom}(id)+1 = \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \mathrm{cod}(id) = \mathbb{N}$

$\emptyset \subseteq id$, $\emptyset$ FINITA e $\emptyset \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ PER RICE-SHAPIRO A NON R.E.

- $\bar{A}$ NON SEMBRA R.E.

$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0,1 \\ x & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ $\mathrm{DOM}(f) = \mathbb{N}$ $\mathrm{COD}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $f \in \mathcal{A} \Rightarrow f \notin \bar{\mathcal{A}}$

$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ $\theta \subseteq f$ $\mathrm{COD}(\theta) = \{1\} = \mathrm{DOM}(\theta) \neq \mathrm{DOM}(\theta)+1 = \{2\} \Rightarrow \theta \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow$ PER RICE-SHAPIRO $\bar{A}$ NON R.E.

Es. 4 del 03/09/2015

STUDIARE RICORSIVITA' DI $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y > x .\ 2y \in W_x\}$

SOLUZIONE

- B NON E' SATURATO E SEMBRA ESSERE NON R.E. QUINDI USO $\bar{K} \leq B$:

$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \neg H(x,x,y) \mid x \in \bar{K} \\ \uparrow & H(x,x,y) \mid x \notin \bar{K} \end{cases} = \mu w . \chi_{H(x,x,y)}$ CALCOLABILE

PER T. SMN $\exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$, s E' FUNZIONE DI RIDUZIONE:

- $x \in \bar{K} \Rightarrow \forall y\ \neg H(x,x,y) \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 0\ \forall y \Rightarrow \forall y > s(x)\ 2y \in W_{s(x)} = \mathbb{N} \Rightarrow s(x) \in B$
- $x \notin \bar{K} \Rightarrow x \in K \Rightarrow \exists y_0 .\ \forall y \geq y_0\ H(x,x,y) \Rightarrow y = s(x) + y_0 + 1 > s(x) \wedge \varphi_{s(x)}(2y)\uparrow \Rightarrow 2y \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin B$

- $\bar{B}$ SEMBRA ESSERE NON R.E. QUINDI USO $\bar{K} \leq \bar{B}$:

$f(x,y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \bar{K} \\ 1 & x \in K \end{cases} = SC_K(x)$ CALCOLABILE

PER T. SMN $\varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)$, s E' FUNZIONE DI RIDUZIONE:

- $x \in \bar{K} \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y)\uparrow\ \forall y \Rightarrow y = s(x)+1 > s(x) \wedge \varphi_{s(x)}(2y)\uparrow \Rightarrow 2y \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in \bar{B}$
- $x \notin \bar{K} \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 1\ \forall y \Rightarrow$ NON ESISTE $y > s(x)$. $2y \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin \bar{B}$

$\S$. 5 del 03/09/2015

2° TEOREMA DI RICORSIONE PER DIMOSTRARE $\Delta(x) = \min\{y : \varphi_y \neq \varphi_x\}$ NON CALCOLABILE

SOLUZIONE

- IL 2° TEOREMA DI RICORSIONE DICE CHE DATA $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$
- $\Delta(x)$ E' TOTALE QUINDI $\forall x$ $\varphi_{\Delta(x)} \neq \varphi_y$ QUINDI NON HA PUNTI FISSI, [illegible] SE FOSSE CALCOLABILE DOVREBBE ESSERCI UN e t.c. $\varphi_e = \varphi_{\Delta(e)}$. QUINDI PER IL 2° T. DI RICORSIONE NON E' CALCOLABILE