9.3 Appello 2016-01-25

9.3.1 Esercizio 1

Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e $\overline{A}$ sono RE.

Soluzione

Se A è ricorsivo posso definire

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}(\mathcal{X}_A(x))\Big)$$

che risulta calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili e quindi A è anche RE. Per ottenere $SC_{\overline{A}}$ basta togliere il segno negato, oppure utilizzare $\mathcal{X}_{\overline{A}}$.

Se invece sono entrambi RE, posso definire

$$\mathcal{X}_A(x) = \Big(\mu w.S\big(e_1, x, (w)_1, (w)_2\big) \vee S\big(e_2, x, (w)_1, (w)_2\big)\Big)_1$$

dove e_1 e e_2 sono i programmi che calcolano le due funzioni semi-caratteristiche (quella di $\overline{A}$ deve essere composta con il segno negato).

9.3.2 Esercizio 2

Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e non calcolabile tale che $f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che questa funzione non esiste.

Soluzione

La funzione deve essere definita su tutto $\mathbb{N}$ e $f(x) = id(x) = x$.

Dato che le due funzioni sono uguali e sono definite sullo stesso dominio, un programma che calcola id calcola anche f ed essendo id calcolabile, esistono infiniti programmi che sono in grado di calcolarla e che quindi riescono a calcolare anche f.

Tuttavia, la funzione può essere non calcolabile:

$$f(x) = x \cdot \mathbb{1}\Big(\mathcal{X}_K(x)\Big)$$

Così definita, è totale, uguale all'identità e non calcolabile perché $\mathcal{X}_K$ è non calcolabile.

9.3.3 Esercizio 3

$$A = \{x|\phi_x \text{ strettamente crescente}\}$$

Soluzione

A probabilmente è non-RE perché per valutare l'appartenenza è necessario controllare infiniti punti del dominio.

A è saturo:

$$\mathcal{A} = \{f|\forall x, y \in dom(f) : x < y \to f(x) < f(y)\}$$

Una qualsiasi funzione gradino:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

non appartiene a $\mathcal{A}$, ma la parte finita

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ 1 & x = x_0 + 1 \\ \uparrow & \text{altriementi} \end{cases}$$

appartiene ad $\mathcal{A}$ e quindi per Rice-Shapiro, A è non-RE.

Per quanto riguarda $\overline{A}$, per decidere l'appartenenza basta trovare una coppia di punti sui quali la funzione è non crescente, quindi potrebbe essere RE.

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.\overline{sg}\Big(S\big(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3\big) \wedge S\big(x,(w)_4,(w)_5,(w)_6\big) \wedge (w)_1 < (w)_4 \wedge (w)_2 \geq (w)_5\Big)\right)$$

Essendo la funzione semi-caratteristica calcolabile, $\overline{A}$ è non-RE.

9.3.4 Esercizio 4

$$B = \{x : x > 0 \wedge x/2 \notin E_x\}$$

Soluzione

B probabilmente è non-RE, perché dovrei provare il programma x su infiniti input.

$$\overline{K} \leq_m B$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & x \notin K \\ y/2 & x \in K \end{cases} = y/2 \cdot SC_K(x)$$

Per SMN esiste la funzione di riduzione f:

- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \forall y \Rightarrow E_{f(x)} = \emptyset \Rightarrow f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = y/2 \forall y \Rightarrow \phi_{f(x)}(f(x)) = f(x)/2 \Rightarrow f(x)/2 \in E_{f(x)} \Rightarrow f(x) \notin B$

E quindi B è non RE.

$\overline{B}$ invece sembra essere ricorsivo, perché basta eseguire in parallelo il programma su tutti i possibili input fino a che non viene trovato in output il valore $x/2$.

$$SC_{\overline{B}}(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.\overline{sg}\Big(S(x,(w)_1,x/2,(w)_2)\Big)\right)$$

$\overline{B}$ è RE e non ricorsivo.

9.3.5 Esercizio 5

$$\exists x.\phi_x(y) = x + y$$

Soluzione

Definisco $g(x,y) = x + y$.

Per SMN:

$$\phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = x + y$$

Per il secondo teorema di ricorsione

$$\exists x.\phi_x(y) = \phi_{f(x)}(y) = g(x,y) = x + y$$