Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
Prova Intermedia - 20 Novembre 2018

Esercizio 1
Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $W_{k(n)} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\}$ e $E_{k(n)}$ è l'insieme dei numeri dispari.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n,x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} 2z+1 & \text{se } x = z^n \text{ per qualche } z \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = 2 * (\mu z.|x \dot{-} z^n|) + 1$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n,x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid \exists z \in \mathbb{N}.\, x = z^n\} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\}$;
- $E_{k(n)} = \{f(n,x) \mid x \in W_{k(n)}\} = \{2\sqrt[n]{z^n} + 1 \mid z \in \mathbb{N}\} = \{2z+1 \mid z \in \mathbb{N}\}$.

$\square$

Esercizio 2
Si consideri una variante della macchina URM, che comprende le istruzioni di salto, trasferimento e due nuove istruzioni

- *A(m,n)* che scrive nel registro m la somma dei registri m e n, ovvero $r_m \leftarrow r_m + r_n$;
- *C(n)* che scrive nel registro n il valore del suo segno negato, ovvero $r_n \leftarrow \overline{sg}(r_n)$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Indichiamo con URM* la macchina modificata. Osserviamo che le istruzioni della macchina URM* sono codificabili nella macchina URM.

L'istruzione $I_j : A(m,n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine: detto q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

$$\begin{array}{lll} SUB & : & J(n,q,j+1) \\ & & S(m) \\ & & S(q) \\ & & J(1,1,SUB) \end{array}$$

Allo stesso modo, indicando ancora con q l'indice di un registro non utilizzato, un'istruzione $I_j : C(m)$ si può sostuire con un salto alla subroutine

$$\begin{array}{lll} SUB & : & J(n,q,ZERO) \\ & & Z(n) \\ & & J(1,1,j+1) \\ ZERO & : & S(n) \\ & & J(1,1,j+1) \end{array}$$

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k per ogni un programma P che utilizzi entrambi i set di istruzioni si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f^{(k)}_{P'} = f^{(k)}_{P}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni A e C nel programma. Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni A e C è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h+1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione A o una istruzione C. Supponiamo che sia l'istruzione di indice j e sia una istruzione A.

$$\begin{array}{lll}
1 & : & I_1 \\
 & & \dots \\
j & & A(m,n) \\
 & & \dots \\
\ell(P) & : & I_{\ell(P)}
\end{array}$$

Costruiamo un programma P'', utilizzando un registro non riferito da P, $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

$$\begin{array}{lll}
1 & : & I_1 \\
 & & \dots \\
j & & J(1,1,SUB) \\
 & & \dots \\
\ell(P) & : & I_{\ell(P)} \\
 & & J(1,1,END) \\
SUB & : & J(n,q,ZERO) \\
 & & Z(n) \\
 & & J(1,1,j+1) \\
ZERO & : & S(n) \\
 & & J(1,1,j+1) \\
END & : &
\end{array}$$

Il programma P'' è tale che $f^{(k)}_{P''} = f^{(k)}_{P}$ e contiene h istruzioni di tipo A o C. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f^{(k)}_{P'} = f^{(k)}_{P''}$ che quindi è il programma desiderato.

Se l'istruzione I_j è di tipo C si procede in modo completamente analogo, rimpiazzando l'istruzione con la sua codifica e usando l'ipotesi induttiva.

Per l'inclusione opposta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ si osserva, analogamente, che le istruzioni $Z(n)$ e $S(n)$ sono codificabili nella macchina modificata.

più precisamente, dato un programma P e detti q_1 e q_2 indici di registri non usati dal programma (quindi inizialmente a 0), si considera il programma

$C(q_1)$ `// fa in modo che` q_1 `contenga` 1
P'

dove P' è ottenuto da P sostituendo ogni istruzione $Z(m)$ con $T(q_2, m)$ e ogni istruzione $S(m)$ con $A(m, q_1)$. □

Esercizio 3

Esistono un indice $e \in \mathbb{N}$ e una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che indicati con $dom(f)$ e $cod(f)$ il dominio e codominio di f (ovvero $dom(f) = \{x \mid f(x)\downarrow\}$ e $cod(f) = \{y \mid \exists x.\ f(x) = y\}$), risulti $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$? Fornire un esempio o dimostrare la non esistenza.

Una funzione f tale che $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$ si può trovare per ogni $e \in \mathbb{N}$?

Soluzione: Per la prima parte, si consideri un indice $e \in \mathbb{N}$ della funzione identità, quindi $W_e = E_e = \mathbb{N}$. Quindi si definisca la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è totale, quindi $dom(f) = \mathbb{N} = W_e$. Inoltre $dom(f) = \mathbb{N} = E_e$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $n = 0$ allora, considerato un indice x della funzione sempre indefinita, si ha $f(x) = 0$. Se $n > 0$ allora basta considerare un qualunque indice x della funzione costante $n - 1$ e si ha $f(x) = (n - 1) + 1 = n$.

Per la seconda domanda, la risposta è chiaramente no. Ad esempio, se consideriamo $e \in \mathbb{N}$ tale che φ_e sia la funzione sempre indefinita, ogni f tale che $dom(f) = W_e = \varnothing$ coincide con φ_e e quindi è calcolabile.

$\square$