9.10 Appello 2014-03-21

9.10.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice

Soluzione

Il teorema di Rice asserisce che qualsiasi proprietà non banale delle funzioni calcolate dai programmi non è decidibile. In altre parole, sia $A \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme che contiene tutti i programmi la cui funzione calcolata gode di una determinata proprietà (ovvero A è un insieme saturo), se la proprietà non è banale ($A \neq \emptyset, \neq \mathbb{N}$) allora A non è ricorsivo.

La non ricorsività si dimostra per riduzione $K \leq_m A$.

Sia e_0 un programma tale che $\phi_{e_0} = \emptyset$. Questo programma può trovarsi in A oppure in $\overline{A}$. Assumiamo che $e_0 \in \overline{A}$.

Essendo A non vuoto, ci sarà almeno un programma $e_1 \in A$ che calcola una qualche funzione.

Si può quindi definire la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & x \in K \\ \phi_{e_0}(y) = \uparrow & x \notin K \end{cases} = SC_K(x)$$

Tale funzione è calcolabile, perché la funzione semi-caratteristica di K è noto che è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$.

f è funzione di riduzione perché

- $x \in K$, $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \phi_{e_1}(y) \forall y$ e dal momento che A è saturo e che $\phi_{f(x)} = \phi_{e_1}$, $f(x) \in A$.
- $x \notin K$, $\phi_{f(x)} = \emptyset(y) = \phi_{e_0}(y) \forall y$ e dal momento che anche $\overline{A}$ è saturo e che $\phi_{f(x)} = \phi_{e_0}$, $f(x) \in \overline{A}$ e quindi $f(x) \notin A$.

Dal momento che K si riduce ad A, A è non ricorsivo.

Se invece $e_0 \in A$ si può effettuare lo stesso ragionamento, indicando con $\overline{B} = A$ e $B = \overline{A}$. $e_0 \in \overline{B}$ e quindi la dimostrazione è la stessa.

9.10.2 Esercizio 2

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è RE allora $f(A) = \{y \in \mathbb{N} | \exists x \in A. y = f(x)\}$ è RE. Vale anche il contrario?

Soluzione

Se A è RE, la sua funzione semi-caratteristica è calcolabile e quindi esiste un programma e_0 che la calcola e che può essere utilizzato per calcolare la funzione semi-caratteristica di $f(A)$:

$$SC_{f(A)}(x) = \mathbb{1}\left(\mu w. \overline{sg}\left(\underbrace{H\left(e_0, (w)_1, (w)_2\right)}_{(w)_1 \in A} \wedge \underbrace{S\left(e_1, (w)_1, x, (w)_3\right)}_{f\left((w)_1\right) = x}\right)\right)$$

dove e_1 è un programma che calcola f. Devo utilizzare la minimalizzazione illimitata perché f può essere indefinita su qualche punto. Il segno negato serve per azzerare l'espressione quando entrambe le condizioni sono soddisfatte.

Se $f(A)$ è RE la sua funzione semi-caratteristica è calcolabile e può essere utilizzata per definire SC_A:

$$SC_A(x) = SC_{f(A)}(f(x))$$

Perché questo funzioni è necessario che f sia iniettiva e totale, perché sennò possono verificarsi dei casi in cui o $x \in A, x \notin dom(f)$, oppure $fy \in f(A)$ perché $\exists z \in A. f(z) = y, z \neq x$.

Quindi, se f è iniettiva e totale, allora anche A è RE. Altrimenti non è detto che A sia RE.

9.10.3 Esercizio 3

Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ un insieme finito, $X \neq \emptyset$ e si definisca $A_X = \{x \in \mathbb{N} : W_x = E_x \cup X\}$. Studiare la ricorsività di A_X.

Soluzione

L'insieme è saturo perché può essere visto come

$$\mathcal{A}_X = \{f \in \mathcal{C} | dom(f) = cod(f) \cup X\}$$

Inoltre, $id \in \mathcal{A}_X$ e $\emptyset \notin \mathcal{A}_X$, ovvero A_X non è banale e quindi per Rice A_X non è ricorsivo.

L'insieme A_X sembra anche essere non-RE, perché per valutare l'appartenenza è necessario esaminare tutti gli elementi del dominio e del codominio.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in X \\ x_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $x_0 \in X$. Questa funzione non appartiene a $\mathcal{A}_X$ perché $dom(f) = \mathbb{N} \neq cod(f) \cup X = X$, mentre la sua parte finita

$$\vartheta(x) = \begin{cases} x & x \in X \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene ad A_X perché $dom(\vartheta) = cod(\vartheta) = X$. Quindi per Rice-Shapiro A_X è non RE.

Per quanto riguarda il complementare, il ragionamento è simile. $id \notin \overline{\mathcal{A}_X}$ ($dom(id) = cod(id) = \mathbb{N}$), $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}_X}$ perché $dom(\emptyset) = \emptyset \neq cod(\emptyset) \cup X$, $\emptyset$ è parte finita di id e quindi per Rice-Shapiro $\overline{\mathcal{A}_X}$ è non RE.

9.10.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}. k \cdot x \in W_x\}$.

Soluzione

B sembra essere RE:

$$SC_B(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w. S\big(x, (w)_1 \cdot x, (w)_2, (w)_3\big)\Big)$$

La funzione semi-caratteristica è calcolabile e quindi B è RE.

Probabilmente B non è ricorsivo, $K \leq_m B$.

Se $x \in K$, $f(x) \in B$ e questo è banale dato che B contiene anche le funzioni che sono totali. Se $x \notin K$, $f(x)$ non deve essere in B e quindi non deve esserci un multiplo dell'indice del programma nel dominio della funzione, quindi gli indici dei programmi che calcolano la funzione sempre indefinita non sono in B.

Posso quindi definire

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = SC_K(x)$$

g è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste f calcolabile, totale, tale che $\phi_{f(x)} = g(x, y)$ e che può essere utilizzata come funzione di riduzione perché

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$, ovvero $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi di sicuro $\exists k \in \mathbb{N}. k \cdot f(x) \in W_{f(x)}$
- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y$ ovvero $W_{f(x)} = \emptyset$ e quindi di sicuro $\nexists k \in \mathbb{N}. k \cdot f(x) \in W_{f(x)}$.

Quindi B non è ricorsivo ed è RE. $\overline{B}$ è per forza non RE.

9.10.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Dimostrare che $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}. k \cdot x \in W_x\}$ non è saturo.

Soluzione

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, allora $\exists e. \phi_e = \phi_{f(e)}$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \nVdash \Big(\mu k. |x - y| \Big)$$

Essendo g calcolabile, posso applicare SMN per trovare $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$ e per il secondo teorema di ricorsione si ha che:

$$\exists e \text{ tale che} \phi_e(y) = \phi_{f(e)}(y) = g(e, y) = \begin{cases} 1 & y = e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi tale che $W_e = W_{f(e)} = \{e\}$ e quindi $e \in B$ per $k = 1$.

Dal momento che ϕ_e è calcolabile, ci sono infiniti indici che la calcolano e di sicuro ci sono degli indici $e' > e$. Ovvero tali che $W_{e'} = W_e = e$.

Essendo $e' > e$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \cdot e' \notin W_{e'} = W_e$ e quindi e' non è in B, ovvero B non è saturo.

C'è un caso particolare se $e = 0$, perché in quel caso tutti gli e' sono multipli per $k = 0$.

Per gestire ciò si può forzare il fatto che il punto fisso sia $\neq 0$, ovvero si sceglie un e_0 tale che $\phi_{e_0} = \phi_0$ e si riapplica il secondo teorema di ricorsione utilizzando come funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) = e & f(x) \neq 0 \\ e_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$