

# Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

## 1 Luglio 2016

### Esercizio 1

Sia  $A$  è un insieme ricorsivo e siano  $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  funzioni calcolabili. Dimostrare che è calcolabile la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x \in A \\ f_2(x) & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Il risultato continua a valere se indeboliamo le ipotesi e assumiamo  $A$  r.e.? Spiegare come si adatta la dimostrazione, in caso positivo, o fornire un controesempio, in caso negativo.

### Esercizio 2

Dimostrare che un insieme  $A$  è r.e. se e solo se esiste una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  calcolabile tale che  $A = \text{img}(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$ .

### Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme  $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \wedge \varphi_x(x) > x\}$ , ovvero dire se  $A$  e  $\bar{A}$  sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

### Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in W_x. \exists z \in W_x. (y < z) \wedge (\varphi_x(y) > \varphi_x(z))\},$$

ovvero dire se  $B$  e  $\bar{B}$  sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

### Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice  $e \in \mathbb{N}$  tale che  $W_e = \{e^n : n \in \mathbb{N}\}$ .