9.11 Appello 2014-04-03

9.11.1 Esercizio 1

Dimostrare il teorema di struttura dei predicati semidecidibili.

Soluzione

Se $Q(x, y)$ è decidibile, allora la sua funzione caratteristica $\mathcal{X}_Q$ è calcolabile e può essere utilizzata per definire quella semi-caratteristica di P.

$$SC_P(x) = \begin{cases} 1 & \exists y.Q(x, y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}\Big(\mathcal{X}_Q(x, w)\Big)\Big)$$

Se invece P è semi-decidibile, allora esiste un programma e che calcola la sua funzione semi-caratteristica. Inoltre, se P è vero, esiste un numero di passi che fanno terminare il programma e:

$$P(x) \equiv \mu y.H(e, x, y)$$

Indicando con $Q(x, y)$ il predicato $H(e, x, y)$ si ottiene il predicato decidibile desiderato.

9.11.2 Esercizio 2

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} | f(x) \in A\}$ è RE. L'insieme $f^{-1}(A)$ è anche ricorsivo?

Soluzione

Sia e un programma che calcola f. Questo programma può essere utilizzato per definire la funzione semi-caratteristica di $f^{-1}(A)$:

$$SC_{f^{-1}(A)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in f^{-1}(A) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & f(x) \in A \\ \uparrow & f(x) \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}\Big(S\Big(e, x, (w)_1, (w)_2\Big) \wedge \mathcal{X}_A\Big((w)_1\Big)\Big)\Big)$$

Questa funzione è calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili, e quindi $f^{-1}(A)$ è RE.

Dal momento che non è garantito che f è totale, l'insieme $f^{-1}(A)$ non è ricorsivo, perché può esistere un x per il quale $f(x)$ non è definita e quindi non può essere determinato se $f(x)$ è in A o meno.

9.11.3 Esercizio 3

$$A = \{x : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$$

Soluzione

L'insieme è saturo, perché contiene tutti i programmi le cui funzioni calcolate hanno $dom(f) \cap cod(f) \neq \emptyset$.

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \cap cod(f) \neq \emptyset\}$$

Quindi per il teorema di Rice A non è ricorsivo.

A sembra essere ricorsivo, perché una volta trovato un punto in comune tra il dominio e il codominio, il test di appartenenza può terminare.

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.\overline{sg}\Big(S\big(x, (w)_1, (w)_1, (w)_2\big)\Big)\right)$$

Essendo la funzione semi-caratteristica calcolabile, A è RE e non ricorsivo per quanto detto prima. $\overline{A}$ deve quindi essere non RE.

Dimostrazione che $\overline{A}$ è non RE $\overline{\mathcal{A}}$ probabilmente è non RE, perché per determinare l'appartenenza è necessario valutare tutto il dominio e il codominio per determinare se l'intersezione è vuota.

La funzione $f(x) = 1$ è in $\overline{\mathcal{A}}$ perché $dom(f) \cap cod(f) = \{1\}$ e quindi $f \notin \overline{\mathcal{A}}$.

La sua parte finita:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è in $\overline{\mathcal{A}}$ perché $dom(\vartheta) \cap cod(\vartheta) = \emptyset$. Quindi per Rice-Shapiro $\overline{A}$ è non RE.

9.11.4 Esercizio 4

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}. k + x \in W_x\}$$

Soluzione

B sembra essere non-RE perché per decidere l'appartenenza bisogna controllare infiniti valori.

Si va quindi di riduzione $\overline{K} \leq_m B$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & H(x, x, y) \end{cases} = \mathbb{1}\Big(\mu w.H(x, x, y)\Big)$$

È calcolabile, quindi per SMN esiste f che fa da funzione di riduzione:

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$. $\phi_{f(x)}(y)$ è quindi sempre definita ed in particolare $\forall k \in \mathbb{N}, f(x) + k \in W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\exists y_0 \in \mathbb{N}.\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y > y_0$. Quindi $\exists k \in \mathbb{N}. f(x) + k \notin W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \notin B$.

Si ha quindi che B è non-RE.

$\overline{B} = \{x : \exists k \in \mathbb{N}. x + k \notin W_x\}$ sembra essere non-RE perché per trovare un k che soddisfa la condizione di appartenenza è necessario aspettare la terminazione del programma su un input in cui non termina.

$$g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \end{cases} = SC_K(x)$$

Per SMN esiste f:

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y$ e quindi $f(x) \in \overline{B}$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$, in particolare $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi $f(x) \in B$.

$\overline{B}$ quindi è non-RE.

9.11.5 Esercizio 5

Dimostrare che l'insieme non è saturo:

$$C = \{x : \phi_x(x) = x^2\}$$

Soluzione

Il secondo teorema dice che data f calcolabile e totale, esiste e tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

$$g(x, y) = \begin{cases} y^2 & y = x \\ \uparrow & \text{altrimeniti} \end{cases} = y^2 \cdot \nVdash\Big(\mu w.|y - x|\Big)$$

Per SMN esiste f. $\phi_{f(x)}(x) = g(x, x) = x^2 \to f(x) \in C$.
Per il secondo teorema $\exists e.\phi_e(e) = \phi_{f(e)}(e) = g(e, e) = e^2 \to e \in C, W_e = \{e^2\}$.
Sia $e' \in \mathbb{N} : \phi_{e'} = \phi_e, e' \neq e \to \phi_{e'}(e') = \uparrow \neq e'^2 \to e' \notin C$.
Ma dato che $\phi_e = \phi_{e'}$ si ha che l'insieme C non è saturo.