

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

22 Marzo 2013

Esercizio 1

Dare la definizione dell'insieme \mathcal{PR} delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $half : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definita da $half(x) = x/2$.

Soluzione: L'insieme \mathcal{PR} delle funzioni primitive ricorsive è il minimo insieme di funzioni che contiene le funzioni di base:

1. $\mathbf{0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{0}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$;
2. $\mathbf{s} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{s}(x) = x + 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$;
3. $\mathbf{U}_j^K : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{U}_j^K(x_1, \dots, x_k) = x_j$ per ogni $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$.

e chiuso rispetto a composizione generalizzata e ricorsione primitiva, definite come segue. Date le funzioni $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ la loro composizione generalizzata è la funzione $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ definita da:

$$h(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})).$$

Date le funzioni $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione definita per ricorsione primitiva è $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y + 1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Occorre dimostrare che la funzione $half$ può essere ottenuta dalle funzioni di base (1), (2) e (3), utilizzando ricorsione primitiva e composizione generalizzata. Si può procedere come segue.

Si definisce in primo luogo la funzione $\overline{sg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\overline{sg}(x) = 1$ se $x = 0$ e $\overline{sg}(x) = 0$ altrimenti:

$$\begin{cases} \overline{sg}(0) = 1 \\ \overline{sg}(x + 1) = 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione $rm_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che restituisce il resto della divisione di x per 2:

$$\begin{cases} rm_2(0) = 0 \\ rm_2(x + 1) = \overline{sg}(rm_2(x)) \end{cases}$$

Infine la funzione $half : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ può essere definita come:

$$\begin{cases} half(0) = 0 \\ half(x + 1) = half(x) + rm_2(x) \end{cases}$$

□

Esercizio 2

Una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ si dice *totale crescente* quando è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Dimostrare che l'insieme delle funzioni totali crescenti non è numerabile.

Soluzione: Data una qualsiasi enumerazione delle funzioni totali crescenti $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si può definire una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=0}^x f_n(n),$$

che è totale crescente e diversa da tutte le f_n . Infatti,

- f è chiaramente totale per definizione.
- f è crescente, dato che $f(x+1) = f(x) + \varphi_{x+1}(x+1) > f(x)$. L'ultima diseguaglianza segue dal fatto che, essendo φ_{x+1} crescente, $\varphi_{x+1}(x+1) > \varphi_{x+1}(x) \geq 0$.
- f è diversa da tutte le f_x dato che per ogni $x \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=0}^x \varphi_n(n) \geq 1 + \varphi_x(x) > \varphi_x(x).$$

Ne consegue che nessuna enumerazione può contenere tutte le funzioni totali crescenti. □

Esercizio 3

Dato un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $F(X) = \{0\} \cup \{y, y+1 \mid y \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = F(E_x)\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : \text{dom}(f) = F(\text{cod}(f))\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova A e \bar{A} sono entrambi non r.e.:

- A non r.e.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1, 2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha che $f \notin \mathcal{A}$, in quanto $\text{dom}(f) = \{0, 1, 2\}$ e $\text{cod}(f) = \{0\}$. Dunque $F(\text{cod}(f)) = \{0, 1\} \neq \text{dom}(f)$. Inoltre se consideriamo

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

chiaramente $\theta \subseteq f$. Inoltre $dom(\theta) = \{0, 1\}$ e $cod(\theta) = \{0\}$. Dunque $F(cod(\theta)) = \{0, 1\} = dom(\theta)$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che A non è r.e.

- \bar{A} non r.e.

Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \bar{\mathcal{A}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$, dato che $dom(\emptyset) = cod(\emptyset) = \emptyset$ e pertanto $F(cod(\emptyset)) = \{0\} \neq dom(\emptyset)$. Quindi, riassumendo $\theta \notin \bar{\mathcal{A}}$, ma ammette una parte finita, ovvero la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che \bar{A} non è r.e.

□

Esercizio 4

Una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ si dice *crescente* quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Indicato con $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x$ crescente $\}$, dimostrare che $\bar{K} \leq_m B$.

Soluzione: Si può procedere in modo simile alla prova del teorema di Rice-Shapiro e definire

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo, se $x \in \bar{K}$ allora g , vista come funzione di y sarà l'identità, che è crescente. Altrimenti esisterà un numero di passi per cui $H(x, x, y)$ e quindi da quel punto in poi $g(x, y)$ è costantemente uguale a 0 e quindi non crescente

Più precisamente, si osserva che la funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x, y) = y \cdot \chi_{\neg H}(x, x, y)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di \bar{K} a B . Infatti

- Se $x \in \bar{K}$ allora per ogni $y \in \mathbb{N}$ è falso $H(x, x, y)$. Pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $\varphi_{s(x)}$ è crescente e pertanto $s(x) \in B$.
- Se $x \notin \bar{K}$ allora esiste un $y \in \mathbb{N}$ tale che vale $H(x, x, y)$, e quindi vale anche $H(x, x, y+1)$. Pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = 0 = \varphi_{s(x)}(y+1)$. Quindi $\varphi_{s(x)}$ non è crescente e pertanto $s(x) \notin B$.

Alternativamente, in modo più semplice, si può osservare che la funzione sempre indefinita è crescente e la costante 0 non lo è. Pertanto basta definire $g(x, y) = sc_K(x)$ (funzione semi-caratteristica dell'insieme K , che è nota essere calcolabile dato che K è r.e.) e si procede poi come sopra. \square

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che se C è un insieme tale che $C \leq_m \bar{C}$, allora C non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, sia $C \leq_m \bar{C}$ e sia f la funzione di riduzione, ovvero $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è calcolabile e totale, e soddisfa:

$$x \in C \text{ iff } f(x) \notin C \quad (1)$$

Siccome f è calcolabile totale, per il Secondo Teorema di Ricorsione, esiste e tale che

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}. \quad (2)$$

Ora se $e \in C$, essendo C saturato, da (2) segue che $f(e) \in C$ e questo contraddice (1). Analogamente se $e \notin C$, si arriva ad una contraddizione. Quindi se ne conclude che la funzione di riduzione non può esistere e quindi C non è saturato. \square

9.10 Appello 2014-03-21

9.10.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice

Soluzione

Il teorema di Rice asserisce che qualsiasi proprietà non banale delle funzioni calcolate dai programmi non è decidibile. In altre parole, sia $A \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme che contiene tutti i programmi la cui funzione calcolata gode di una determinata proprietà (ovvero A è un insieme saturo), se la proprietà non è banale ($A \neq \emptyset, \neq \mathbb{N}$) allora A non è ricorsivo.

La non ricorsività si dimostra per riduzione $K \leq_m A$.

Sia e_0 un programma tale che $\phi_{e_0} = \emptyset$. Questo programma può trovarsi in A oppure in \overline{A} . Assumiamo che $e_0 \in \overline{A}$.

Essendo A non vuoto, ci sarà almeno un programma $e_1 \in A$ che calcola una qualche funzione.

Si può quindi definire la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & x \in K \\ \phi_{e_0}(y) = \uparrow & x \notin K \end{cases} = SC_K(x)$$

Tale funzione è calcolabile, perché la funzione semi-caratteristica di K è nota che è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$.

f è funzione di riduzione perché

- $x \in K, \phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \phi_{e_1}(y) \forall y$ e dal momento che A è saturo e che $\phi_{f(x)} = \phi_{e_1}$, $f(x) \in A$.
- $x \notin K, \phi_{f(x)} = \emptyset(y) = \phi_{e_0}(y) \forall y$ e dal momento che anche \overline{A} è saturo e che $\phi_{f(x)} = \phi_{e_0}$, $f(x) \in \overline{A}$ e quindi $f(x) \notin A$.

Dal momento che K si riduce ad A , A è non ricorsivo.

Se invece $e_0 \in A$ si può effettuare lo stesso ragionamento, indicando con $\overline{B} = A$ e $B = \overline{A}$. $e_0 \in \overline{B}$ e quindi la dimostrazione è la stessa.

9.10.2 Esercizio 2

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è RE allora $f(A) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in A. y = f(x)\}$ è RE. Vale anche il contrario?

Soluzione

Se A è RE, la sua funzione semi-caratteristica è calcolabile e quindi esiste un programma e_0 che la calcola e che può essere utilizzato per calcolare la funzione semi-caratteristica di $f(A)$:

$$SC_{f(A)}(x) = \mathbb{M} \left(\mu w. \overline{sg} \left(\underbrace{H(e_0, (w)_1, (w)_2)}_{(w)_1 \in A} \wedge \underbrace{S(e_1, (w)_1, x, (w)_3)}_{f((w)_1) = x} \right) \right)$$

dove e_1 è un programma che calcola f . Devo utilizzare la minimalizzazione illimitata perché f può essere indefinita su qualche punto. Il segno negato serve per azzerare l'espressione quando entrambe le condizioni sono soddisfatte.

Se $f(A)$ è RE la sua funzione semi-caratteristica è calcolabile e può essere utilizzata per definire SC_A :

$$SC_A(x) = SC_{f(A)}(f(x))$$

Perché questo funziona è necessario che f sia iniettiva e totale, perché sennò possono verificarsi dei casi in cui o $x \in A, x \notin \text{dom}(f)$, oppure $fy \in f(A)$ perché $\exists z \in A. f(z) = y, z \neq x$.

Quindi, se f è iniettiva e totale, allora anche A è RE. Altrimenti non è detto che A sia RE.

9.10.3 Esercizio 3

Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ un insieme finito, $X \neq \emptyset$ e si definisca $A_X = \{x \in \mathbb{N} : W_x = E_x \cup X\}$. Studiare la ricorsività di A_X .

Soluzione

L'insieme è saturo perché può essere visto come

$$A_X = \{f \in \mathcal{C} \mid \text{dom}(f) = \text{cod}(f) \cup X\}$$

Inoltre, $\text{id} \in A_X$ e $\emptyset \notin A_X$, ovvero A_X non è banale e quindi per Rice A_X non è ricorsivo.

L'insieme A_X sembra anche essere non-RE, perché per valutare l'appartenenza è necessario esaminare tutti gli elementi del dominio e del codominio.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in X \\ x_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $x_0 \in X$. Questa funzione non appartiene a A_X perché $\text{dom}(f) = \mathbb{N} \neq \text{cod}(f) \cup X = X$, mentre la sua parte finita

$$\vartheta(x) = \begin{cases} x & x \in X \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene ad A_X perché $\text{dom}(\vartheta) = \text{cod}(\vartheta) = X$. Quindi per Rice-Shapiro A_X è non RE.

Per quanto riguarda il complementare, il ragionamento è simile. $\text{id} \notin \overline{A_X}$ ($\text{dom}(\text{id}) = \text{cod}(\text{id}) = \mathbb{N}$), $\emptyset \in \overline{A_X}$ perché $\text{dom}(\emptyset) = \emptyset \neq \text{cod}(\emptyset) \cup X$, \emptyset è parte finita di id e quindi per Rice-Shapiro $\overline{A_X}$ è non RE.

9.10.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}. k \cdot x \in W_x\}$.

Soluzione

B sembra essere RE:

$$SC_B(x) = \mathbb{1} \left(\mu w. S \left(x, (w)_1 \cdot x, (w)_2, (w)_3 \right) \right)$$

La funzione semi-caratteristica è calcolabile e quindi B è RE.

Probabilmente B non è ricorsivo, $K \leq_m B$.

Se $x \in K$, $f(x) \in B$ e questo è banale dato che B contiene anche le funzioni che sono totali. Se $x \notin K$, $f(x)$ non deve essere in B e quindi non deve esserci un multiplo dell'indice del programma nel dominio della funzione, quindi gli indici dei programmi che calcolano la funzione sempre indefinita non sono in B .

Posso quindi definire

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = SC_K(x)$$

g è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste f calcolabile, totale, tale che $\phi_{f(x)} = g(x, y)$ e che può essere utilizzata come funzione di riduzione perché

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$, ovvero $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi di sicuro $\exists k \in \mathbb{N}. k \cdot f(x) \in W_{f(x)}$
- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y$ ovvero $W_{f(x)} = \emptyset$ e quindi di sicuro $\nexists k \in \mathbb{N}. k \cdot f(x) \in W_{f(x)}$.

Quindi B non è ricorsivo ed è RE. \overline{B} è per forza non RE.

9.10.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Dimostrare che $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}. k \cdot x \in W_x\}$ non è saturo.

Soluzione

Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale, allora $\exists e. \phi_e = \phi_{f(e)}$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}_{\mu k. |x - y|}$$

Essendo g calcolabile, posso applicare SMN per trovare $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$ e per il secondo teorema di ricorsione si ha che:

$$\exists e \text{ tale che } \phi_e(y) = \phi_{f(e)}(y) = g(e, y) = \begin{cases} 1 & y = e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi tale che $W_e = W_{f(e)} = \{e\}$ e quindi $e \in B$ per $k = 1$.

Dal momento che ϕ_e è calcolabile, ci sono infiniti indici che la calcolano e di sicuro ci sono degli indici $e' > e$. Ovvero tali che $W_{e'} = W_e = e$.

Essendo $e' > e$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \cdot e' \notin W_{e'} = W_e$ e quindi e' non è in B , ovvero B non è saturo.

C'è un caso particolare se $e = 0$, perché in quel caso tutti gli e' sono multipli per $k = 0$.

Per gestire ciò si può forzare il fatto che il punto fisso sia $\neq 0$, ovvero si sceglie un e_0 tale che $\phi_{e_0} = \phi_0$ e si riapplica il secondo teorema di ricorsione utilizzando come funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) = e & f(x) \neq 0 \\ e_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

9.11 Appello 2014-04-03

9.11.1 Esercizio 1

Dimostrare il teorema di struttura dei predici semi-decidibili.

Soluzione

Se $Q(x, y)$ è decidibile, allora la sua funzione caratteristica χ_Q è calcolabile e può essere utilizzata per definire quella semi-caratteristica di P .

$$SC_P(x) = \begin{cases} 1 & \exists y.Q(x, y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{W}\left(\mu w.\overline{sg}\left(\chi_Q(x, w)\right)\right)$$

Se invece P è semi-decidibile, allora esiste un programma e che calcola la sua funzione semi-caratteristica. Inoltre, se P è vero, esiste un numero di passi che fanno terminare il programma e :

$$P(x) \equiv \mu y.H(e, x, y)$$

Indicando con $Q(x, y)$ il predicato $H(e, x, y)$ si ottiene il predicato decidibile desiderato.

9.11.2 Esercizio 2

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} | f(x) \in A\}$ è RE. L'insieme $f^{-1}(A)$ è anche ricorsivo?

Soluzione

Sia e un programma che calcola f . Questo programma può essere utilizzato per definire la funzione semi-caratteristica di $f^{-1}(A)$:

$$SC_{f^{-1}(A)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in f^{-1}(A) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & f(x) \in A \\ \uparrow & f(x) \notin A \end{cases} = \mathbb{W}\left(\mu w.\overline{sg}\left(S\left(e, x, (w)_1, (w)_2\right) \wedge \chi_A((w)_1)\right)\right)$$

Questa funzione è calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili, e quindi $f^{-1}(A)$ è RE.

Dal momento che non è garantito che f è totale, l'insieme $f^{-1}(A)$ non è ricorsivo, perché può esistere un x per il quale $f(x)$ non è definita e quindi non può essere determinato se $f(x)$ è in A o meno.

9.11.3 Esercizio 3

$$A = \{x : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$$

Soluzione

L'insieme è saturo, perché contiene tutti i programmi le cui funzioni calcolate hanno $\text{dom}(f) \cap \text{cod}(f) \neq \emptyset$.

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : \text{dom}(f) \cap \text{cod}(f) \neq \emptyset\}$$

Quindi per il teorema di Rice A non è ricorsivo.

A sembra essere ricorsivo, perché una volta trovato un punto in comune tra il dominio e il codominio, il test di appartenenza può terminare.

$$SC_A(x) = \mathbb{W}\left(\mu w.\overline{sg}\left(S(x, (w)_1, (w)_1, (w)_2)\right)\right)$$

Essendo la funzione semi-caratteristica calcolabile, A è RE e non ricorsivo per quanto detto prima. \overline{A} deve quindi essere non RE.

Dimostrazione che \overline{A} è non RE \overline{A} probabilmente è non RE, perché per determinare l'appartenenza è necessario valutare tutto il dominio e il codominio per determinare se l'intersezione è vuota.

La funzione $f(x) = 1$ è in \overline{A} perché $\text{dom}(f) \cap \text{cod}(f) = \{1\}$ e quindi $f \notin \overline{A}$.

La sua parte finita:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è in \overline{A} perché $\text{dom}(\vartheta) \cap \text{cod}(\vartheta) = \emptyset$. Quindi per Rice-Shapiro \overline{A} è non RE.

9.11.4 Esercizio 4

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}. k + x \in W_x\}$$

Soluzione

B sembra essere non-RE perché per decidere l'appartenenza bisogna controllare infiniti valori.

Si va quindi di riduzione $\overline{K} \leq_m B$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & H(x, x, y) \end{cases} = \mathbb{W}\left(\mu w.H(x, x, y)\right)$$

È calcolabile, quindi per SMN esiste f che fa da funzione di riduzione:

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$. $\phi_{f(x)}(y)$ è quindi sempre definita ed in particolare $\forall k \in \mathbb{N}, f(x) + k \in W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\exists y_0 \in \mathbb{N}. \phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y > y_0$. Quindi $\exists k \in \mathbb{N}. f(x) + k \notin W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \notin B$.

Si ha quindi che B è non-RE.

$\overline{B} = \{x : \exists k \in \mathbb{N}. x + k \notin W_x\}$ sembra essere non-RE perché per trovare un k che soddisfa la condizione di appartenenza è necessario aspettare la terminazione del programma su un input in cui non termina.

$$g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \end{cases} = SC_K(x)$$

Per SMN esiste f :

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y$ e quindi $f(x) \in \overline{B}$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$, in particolare $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi $f(x) \in B$.

\overline{B} quindi è non-RE.

9.11.5 Esercizio 5

Dimostrare che l'insieme non è saturo:

$$C = \{x : \phi_x(x) = x^2\}$$

Soluzione

Il secondo teorema dice che data f calcolabile e totale, esiste e tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

$$g(x, y) = \begin{cases} y^2 & y = x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y^2 \cdot \mathbb{1}(\mu w. |y - x|)$$

Per SMN esiste f . $\phi_{f(x)}(x) = g(x, x) = x^2 \rightarrow f(x) \in C$.

Per il secondo teorema $\exists e. \phi_e(e) = \phi_{f(e)}(e) = g(e, e) = e^2 \rightarrow e \in C, W_e = \{e^2\}$.

Sia $e' \in \mathbb{N} : \phi_{e'} = \phi_e, e' \neq e \rightarrow \phi_{e'}(e') = \uparrow \neq e'^2 \rightarrow e' \notin C$.

Ma dato che $\phi_e = \phi_{e'}$ si ha che l'insieme C non è saturo.

9.9 Appello 2014-07-02

9.9.1 Esercizio 1

Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo solo se A, \overline{A} sono RE.

Soluzione

A ricorsivo $\Rightarrow A, \overline{A}$ sono RE.

Essendo A ricorsivo, la sua funzione caratteristica χ_A è calcolabile e può essere utilizzata per definire la funzione semi-caratteristica di A :

$$SC_A(x) = \mathbb{W}(\mu w. \overline{sg}(\chi_A(x)))$$

La funzione semi-caratteristica di \overline{A} può essere definita in modo analogo

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{W}(\mu w. \chi_A(x))$$

A, \overline{A} sono RE $\Rightarrow A$ ricorsivo

Entrambe le funzioni semi-caratteristiche sono calcolabili e possono essere combinate per definire la funzione caratteristica.

Sia e_1 un programma tale che $\phi_{e_1} = SC_A$ e e_2 tale che $\phi_{e_2} = \overline{sg}(SC_{\overline{A}})$, entrambi esistono perché le loro funzioni sono calcolabili.

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} SC_A(x) & x \in A \\ \overline{sg}(SC_{\overline{A}}(x)) & x \notin A \end{cases} \\ &= \left(\mu w. \left(S(e_1, x, (w)_1, (w)_2) \wedge S(e_2, x, (w)_1, (w)_2) \right) \right)_1 \end{aligned}$$

9.9.2 Esercizio 2

Definire una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale, non calcolabile tale che $f(x) = x/2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ e pari, oppure dimostrare che tale funzione non esiste.

Soluzione

La funzione deve essere totale e non viene specificato nulla per quanto riguarda il valore della funzione sui numeri dispari.

Sia $\{\phi_n\}$ una qualsiasi enumerazione delle funzioni calcolabili.

La funzione f può essere definita come

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x \text{ è pari} \\ \phi_x(x) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi che la funzione f :

- è totale, perché definita su tutto \mathbb{N}
- vale $x/2$ se x è pari
- è diversa da tutte le funzioni calcolabili se x è dispari e quindi negli infiniti punti dispari non è calcolabile

9.9.3 Esercizio 3

$$A = \{x \mid \forall k \in \mathbb{N}. x + k \in W_x\}$$

Soluzione

A sembra non essere RE, perché per provare l'appartenenza è necessario andare a provare infiniti valori di k .

Si può quindi provare la riduzione $\overline{K} \leq_m A$.

Serve quindi una funzione tale che se $x \in \overline{K}$, $f(x)$ sia definita $\forall x' \geq x$ ed una funzione definita su tutto \mathbb{N} soddisfa questa condizione, mentre se $x \in K$, $f(x)$ non deve essere definita in almeno un punto $x' \geq x$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & H(x, x, y) \end{cases}$$

Non posso usare $x \in \overline{K}$ perché la funzione semi-caratteristica non è calcolabile, devo ragionare sul numero di passi y impiegati dal programma per terminare.

Essendo calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, che funziona da funzione di riduzione, perché:

- $x \in \overline{K}$: $\forall y \neg H(x, x, y)$ è vero e quindi $\forall y \phi_{f(x)}(y) = 1$ ed in particolare $\phi_{f(x)}(f(x) + k) = 1 \forall k$, ovvero $f(x) \in A$.
- $x \in K$: $\exists y_0$ tale che $\forall y > y_0$, $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow$, è quindi possibile trovare almeno un valore $y' > y_0$ tale che $y' > x + 0$, pertanto $f(x) \notin A$.

Si ha quindi che A non è RE.

$\overline{A} = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}. x + k \notin W_x\}$, anche in questo caso sembra non essere RE, perché per verificare l'appartenenza è necessario che il programma x non termini quando riceve in input $x + k$.

Si può quindi provare la riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{A}$.

Serve quindi una funzione tale che se $x \in \overline{K}$, $f(x)$ non termini quanto riceve in input $x + k$ e si può osservare che i programmi che calcolano \emptyset sono in \overline{A} . Se invece $x \in K$, $f(x)$ deve essere definita su tutti gli input $> x$.

$$g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \end{cases} = SC_K(x)$$

Essendo calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, che funziona da funzione di riduzione, perché:

- $x \in \overline{K}$: il predicato $\neg H(x, x, y)$ vale $\forall y$ e quindi $\phi_{f(x)}(y) = \uparrow \forall y$, pertanto $f(x) \in \overline{A}$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = 1 \forall y$ ed in particolare $\phi_{f(x)}(y) \downarrow \forall y > x$ e quindi $f(x) \in A$

Segue quindi che anche \overline{A} non è RE.

9.9.4 Esercizio 4

$$V = \{x | E_x \text{ infinito}\}$$

Soluzione

V è saturo, perché $\mathcal{V} = \{f | |cod(f)| = \infty\}$.

Banalmente la funzione $id \in \mathcal{V}$ e tutte le sue parti finite non appartengono per definizione a \mathcal{V} , quindi per Rice Shapiro V è non RE.

Analogamente $id \notin \overline{\mathcal{V}}$ e la funzione \emptyset appartiene a $\overline{\mathcal{V}}$ ed è parte finita di id , quindi per Rice Shapiro, \overline{V} è non RE.

9.9.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione e dimostrare che $\exists k | W_k = \{k * i | i \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione

Il teorema dice che, data una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale, $\exists e. \phi_e = \phi_{f(e)}$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ è multiplo di } y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}_{\{(xz - y) \mid z \in \mathbb{N}\}}$$

Essendo g calcolabile, per SMN esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y) \forall y$ e quindi si ha che

$$W_{f(x)} = \{x * i | i \in \mathbb{N}\}$$

e per il secondo teorema di ricorsione, esiste x tale che $\phi_x = \phi_{f(x)}$, ovvero $\exists x$ tale che:

$$W_x = W_{f(x)} = \{x * i | i \in \mathbb{N}\}$$

9.8 Appello 2014-07-21

9.8.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice

Soluzione

Il teorema di Rice asserisce che le proprietà non banali di un programma non sono ricorsive.

Ovvero dato $A \subseteq \mathbb{N}$ saturo e tale che $A \neq \mathbb{N}$ e $\neq \emptyset$, A è ricorsivo.

Questo si dimostra per riduzione $K \leq_m A$.

Sia e_0 un programma che calcola la funzione sempre indefinita ($\phi_{e_0} = \emptyset$). Questo programma può essere in A o in \overline{A} . Assumiamo che sia in \overline{A} .

Sia e_1 un programma in A , ed esiste perché $A \neq \emptyset$.

Serve quindi una funzione tale che $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A$.

Possiamo definire

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & x \in K \\ \phi_{e_0}(y) = \uparrow \forall y & x \notin K \end{cases} = \phi_{e_1} \cdot \mathbb{W}(SC_K(x))$$

g è calcolabile e totale, quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale, tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$.

f è funzione di riduzione perché

- $x \in K: \phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \phi_{e_1}(y) \forall y$ e quindi dal momento che A è saturo e che $e_1 \in A$, anche $f(x) \in A$.
- $x \notin K: \phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow = \phi_{e_0}(y) \forall y$ e quindi, dato che $e_0 \notin A$, anche $f(x) \notin A$, perché se $f(x) \in A$, anche e_0 dovrebbe essere in A dato che calcolano la stessa funzione.

Segue quindi che A non è ricorsivo, se $e_0 \notin A$. Assumendo invece che $e_0 \in A$, si può osservare che il complementare di un insieme saturo è anch'esso saturo e che se $B = \overline{A}$, $\overline{B} = A$ e $e_0 \in \overline{B}$ e quindi vale la dimostrazione precedente.

9.8.2 Esercizio 2

Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che la funzione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita per ogni $x \in \mathbb{N}$, da $g(x) = f(x) \doteq x$ sia calcolabile? Fornire un esempio di f oppure dimostrare che tale funzione non esiste.

Soluzione

Si esiste:

$$f(x) = \chi_K(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$$

(funzione caratteristica dell'insieme K , è noto che non è calcolabile).

Con questa funzione si ha che:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x = 0 \text{ e } f(x) = 1 \\ 0 & x = 0 \text{ e } f(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x = 0 \text{ e } x \in K \\ 0 & x = 0 \text{ e } x \notin K \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x = 0 \text{ e } \phi_x(x) \downarrow \\ 0 & x = 0 \text{ e } \phi_x(x) \uparrow \end{cases}$$

g risulta quindi essere calcolabile in quanto viene definita per casi e utilizzando solamente funzioni calcolabili. $\phi_x(x)$ può essere calcolato utilizzando la funzione universale.

verificare
il caso
in cui
 $f(x)$ vale
0

9.8.3 Esercizio 3

Una funzione parziale è iniettiva quando per ogni $x, y \in \text{dom}(f)$, se $f(x) = f(y)$, allora $x = y$. Studiare la ricorsività di $A = \{x | \phi_x \text{ è iniettiva}\}$.

Soluzione

L'insieme è saturo perché descrive una proprietà non banale delle funzioni calcolate dai programmi che appartengono all'insieme

Probabilmente A non è RE, perché per provare se una funzione è iniettiva è necessario verificare tutti i valori del dominio.

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è iniettiva e quindi non appartiene ad \mathcal{A} , ma ammette una parte finita $\vartheta \in \mathcal{A}$:

$$\vartheta = \begin{cases} x & x \leq 3 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi per il teorema di Rice Shapiro, A non è RE.

Per quanto riguarda \overline{A} non si può fare lo stesso ragionamento perché una funzione iniettiva ha tutte le parti finite iniettive, e sembra valere anche il viceversa.

Per vedere se una funzione non è iniettiva, basta trovare x, y tali che $x \neq y$ e $f(x) = f(y)$ e quindi stabilire l'appartenenza ad \overline{A} sembra essere semi-decidibile.

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{K} \left(\mu w. \left(\underbrace{S(x, (w)_1, (w)_2, (w)_3)}_{a=(w)_1 \in W_x} \wedge \underbrace{S(x, (w)_4, (w)_5, (w)_6)}_{b=(w)_4 \in W_x} \wedge \underbrace{\left((w)_1 \neq (w)_4 \right)}_{a \neq b} \wedge \underbrace{\left((w)_2 = (w)_5 \right)}_{\phi_x(a) = \phi_x(b)} \right) \right)$$

$SC_{\overline{A}}$ è calcolabile per composizione di funzioni calcolabili (quasi, l'uguaglianza e la disuguaglianza sono predicati, ma la loro funzione caratteristica è calcolabile) e quindi \overline{A} è RE.

9.8.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività di $B = \{x | x \in W_x \setminus \{0\}\}$

Soluzione

B sembra essere RE, perché molto simile a K .

$$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \wedge x \neq 0 \\ \uparrow & x = 0 \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \mathbb{W}(\mu w. \overline{sg}(x)) \cdot SC_K(x)$$

SC_B è calcolabile per composizione di funzioni calcolabili e quindi B è RE.

$\overline{B} = \{x | \phi_x(x) \uparrow\} \cup \{0\} = \overline{K} \cup \{0\}$ e quindi $\overline{K} \cup \{0\} \subseteq \overline{B}$. Essendo \overline{K} non RE si può effettuare la riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{B}$ utilizzando come funzione la funzione identità e quindi anche \overline{B} non è RE.

9.8.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione e dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{kn | k \in \mathbb{N}\}$

Soluzione

Il teorema asserisce che data una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale, $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

Definisco

$$g(x, y) = \begin{cases} x \cdot y & \text{se } x \text{ è multiplo di } y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = xy \cdot \mathbb{W}(\mu z. |zx - y|)$$

ed è calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili, quindi per SMN esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y) \forall y$ e tale che $W_{f(x)} = E_{f(x)} = \{kx | k \in \mathbb{N}\}$.

Per il secondo teorema di ricorsione, esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_x = \phi_{f(x)}$ e quindi tale che $W_x = E_x = W_{f(x)} = E_{f(x)} = \{kx | k \in \mathbb{N}\}$

9.7 Appello 2014-08-25

9.7.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

Soluzione

Ogni proprietà non banale relativa al comportamento dei programmi non è decidibile.

Ovvero sia $A \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dei programmi che hanno una qualche proprietà e quindi A è un insieme saturo, se $A \neq \mathbb{N}$ e $\neq \emptyset$, allora A non è ricorsivo.

Questo può essere dimostrato per riduzione $K \leq_m A$.

Sia e_0 un programma che calcola la funzione sempre indefinita ($\phi_{e_0} = \emptyset$). Questo programma può essere in A o in \overline{A} . Assumiamo che sia in \overline{A} .

Possiamo quindi scegliere un qualsiasi programma $e_1 \in A$ e almeno uno deve esserci perché $A \neq \emptyset$.

Questi due programmi possono essere utilizzati per definire la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \phi_{e_0}(y) & \text{se } x \notin K \end{cases} = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = \phi_{e_1}(y) \cdot \mathbb{1}_{\{x \in K\}}(\phi_x(x))$$

la quale è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$ e che può essere usata come funzione di riduzione, perché:

- Se $x \in K$: $\phi_{f(x)} = \phi_{e_1}$ e quindi dal momento che A è saturo e che $e_1 \in A$, allora anche $f(x) \in A$.

- Se $x \notin K$: $\phi_{f(x)} = \phi_{e_0}$ e quindi dal momento che $e_0 \notin A$, anche $f(x) \notin A$, perché se $f(x)$ fosse in A , anche e_0 dovrebbe esserci, perché A è saturo e i due programmi calcolano la stessa funzione.

Se invece $e_0 \in A$, basta osservare che il complementare di un insieme saturo è saturo e, indicando con $B = \overline{A}$, $\overline{B} = A$, si ha che $e_0 \in \overline{B}$ e quindi vale la dimostrazione precedente.

9.7.2 Esercizio 2

Può esistere una funzione **non calcolabile** $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che **per ogni** funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la funzione h definita come $h(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare la risposta, fornendo un'esempio di f oppure dimostrando che non può esistere.

Soluzione

Supponiamo che f esista e che quindi $h(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile. Dal momento che h è calcolabile per tutte le g non calcolabili, si ha anche che $h(x) = f(x) + f(x) = 2 \cdot f(x)$ deve essere calcolabile.

Si ha quindi che f può essere definita come

$$f(x) = qt(h(x), 2)$$

f risulta quindi essere calcolabile per composizione di funzioni calcolabili il che va contro l'ipotesi della non calcolabilità di f e pertanto f non può esistere.

9.7.3 Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \phi_x(y + x) \downarrow \text{ per qualche } y \geq 0\}$

Soluzione

A sembra essere RE, perché per determinare l'appartenenza è necessario determinare se il programma x termina ricevendo in input se stesso più una qualche costante.

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \exists y \geq 0 \mid \phi_x(x + y) \downarrow \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{M}(\mu w.\overline{sg}(S(x, x + (w)_1, (w)_2, (w)_3)))$$

La funzione semi-caratteristica è calcolabile per composizione di funzioni calcolabili e quindi A è RE.

Per provare che A non è ricorsivo, si può effettuare la riduzione $K \leq_m A$.

Ovvvero bisogna trovare una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che dato $x \in K$, $f(x) \in A$ e se $x \notin K$, $f(x) \notin A$.

Si può osservare che se $x \in K$, $\phi_x(x) \downarrow$ e quindi anche $\phi_x(x + 0) \downarrow$ e pertanto x è anche in A .

Si può quindi definire la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_x(x) & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \phi_x(x) = \Phi_U(x, x)$$

la quale è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile, totale e tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$.

f è funzione di riduzione perché:

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(z) = g(x, z) = \phi_x(x) \downarrow \forall z$ e quindi anche $\phi_{f(x)}(f(x) + 0) \downarrow$ e quindi $f(x) \in A$ per $y = 0$.
- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(z) = g(x, z) = \uparrow \forall z$ e quindi non esiste $y \geq 0$ tale che $\phi_{f(x)}(f(x) + y) \downarrow$ e quindi $f(x) \notin A$.

In alternativa potevo usare

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = SC_K(x)$$

Essendo A non ricorsivo e RE, \overline{A} non è RE.

9.7.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \mid Pr \subseteq W_x\}$, dove $Pr \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi.

Soluzione

Si può osservare che l'insieme B è saturo perché riguarda una proprietà della funzione calcolata dai programmi:

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid \phi_x \in \beta\} \\ \beta &= \{f \mid Pr \subseteq \text{dom}(f)\} \end{aligned}$$

Inoltre si può osservare che B probabilmente non è RE perché per determinare l'appartenenza bisogna verificare infiniti valori del dominio.

La funzione id appartiene a β in quanto è definita su tutto \mathbb{N} e quindi anche su tutti i numeri primi, mentre tutte le sue parti finite non appartengono a β perché hanno un dominio finito, il quale non può contenere tutti gli infiniti numeri primi.

Si ha quindi una funzione che appartiene all'insieme e tutte le sue parti finite che non ci appartengono, quindi per Rice-Shapiro B non è RE.

Per quanto riguarda \overline{B} , si ha che contiene tutti i programmi che calcolano funzioni definite su qualche numero primo, anche nessuno (ma non tutti) ed è sempre un insieme saturo.

Analogamente a prima, la funzione id non appartiene a $\overline{\beta}$ e la funzione

$$\vartheta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 5 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una parte finita di id e appartiene a $\overline{\beta}$. Si ha quindi che per il teorema di Rice-Shapiro anche \overline{B} non è RE.

9.7.5 Esercizio 5

Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_n = \phi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_m \neq \phi_{m+1}$.

Soluzione

Il programma composto dalla sola istruzione $Z(1)$ viene codificato con $2^{4 \cdot (1-1)+1} - 2 = 0$ mentre il programma $Z(1)Z(1)$ viene codificato con $2^0 \cdot 3^1 - 2 = 1$, entrambi i programmi calcolano la funzione $f(x) = 0$ e quindi il primo caso è dimostrato.

Il programma composto dall'istruzione $S(1)$ viene codificato con $2^{(4(1-1)+1)} - 2 = 2$ e calcola la funzione $f(x) = x + 1$ che è diversa dalla funzione calcolata dal programma di indice 1.

Ricapitolando:

- $\phi_0(x) = 0$
- $\phi_1(x) = 1$
- $\phi_2(x) = x + 1$

Segue quindi che esistono $n = 0$ e $m = 1$ che soddisfano quanto richiesto.

Soluzione decisamente migliore

La funzione $succ$ è una funzione calcolabile e totale, quindi per il secondo teorema di ricorsione $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{succ(e)} = \phi_{e+1}$.

Tuttavia deve esistere almeno un e tale che $\phi_e \neq \phi_{e+1}$ perché se così non fosse, tutti i programmi calcolerebbero la stessa funzione e quindi solamente una funzione sarebbe calcolabile, ma è noto che ci sono più di due funzioni calcolabili.

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

Prova Intermedia - 20 Aprile 2014

Esercizio 1

Dare la definizione dell'insieme \mathcal{PR} delle funzioni primitive ricorsive e dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $cpr : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definita come

$$cpr(x, y) = |\{p \mid x \leq p < y \wedge p \text{ primo}\}|,$$

ovvero $cpr(x, y)$ è il numero di primi nell'intervallo $[x, y]$ (si può assumere che somma + e differenza $\dot{-}$ tra numeri naturali, nonché la funzione caratteristica dell'insieme dei numeri primi χ_{Pr} siano primitive ricorsive, senza provarlo). [Suggerimento: Può essere conveniente considerare inizialmente la funzione $cpr'(x, k) = |\{p \mid x \leq p < x+k \wedge p \text{ primo}\}|$]

Soluzione: Si definisce $cpr' : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, tale che $cpr'(x, k) = |\{p \mid x \leq p < x+k \wedge p \text{ primo}\}|$, per ricorsione primitiva, utilizzando solo funzioni primitive e loro composizioni:

$$\begin{cases} cpr(x, 0) = 0 \\ cpr(x, k+1) = cpr(x, k) + \chi_{Pr}(x+k) \end{cases}$$

quindi si osserva che $cpr(x, y) = cpr'(x, y-x)$, composizione di funzioni primitive ricorsive è ancora primitiva ricorsiva. \square

Esercizio 2

Enunciare il teorema s-m-n e utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$ vale $W_{s(x)} = \{(k+x)^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Si definisce una funzione $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $g(x, y)$ vista come funzione di y abbia le proprietà desiderate

$$g(x, y) = \begin{cases} k & \text{se esiste } k \text{ tale che } y = (x+k)^2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ovvero $g(x, y) = \mu k. |(x+k)^2 - y|$. Tale funzione è calcolabile, quindi utilizzando il teorema s-m-n si conclude. \square

Esercizio 3

Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \cap cod(f) = \emptyset$? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f , se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} 2\varphi_{\frac{x}{2}}(x) + 1 & \text{se } x \text{ pari e } x \in W_{\frac{x}{2}} \\ 1 & \text{se } x \text{ pari e } x \notin W_{\frac{x}{2}} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f ha dominio coincidente con i numeri pari, codominio che è sottoinsieme dei dispari (pertanto disgiunto dal dominio) e per ogni n si ha che $f \neq \varphi_n$ (dato che $f(2n) \neq \varphi_n(2n)$). Quindi f è la funzione desiderata.

□

1° APPELLO 2015 (30/06/2015)

E. 1 del 30/06/2015

$P(\vec{x})$ SEMI DECIDIBILE $\Leftrightarrow \exists Q(\vec{x}, y)$ DECIDIBILE TALE CHE $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$

SOLUZIONE:

(\Rightarrow) DATO CHE $P(\vec{x})$ E' SEMI DECIDIBILE ESISTE $SC_p(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } P(\vec{x}) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ CALCOLABILE, QUINDI $\exists p \in \mathbb{N}. SC_p = \psi_e$.

QUESTO SIGNIFICA CHE $P(\vec{x})$ VALE SSE $SC_p(\vec{x}) \neq \psi_e(\vec{x})$ SSE $\exists y. H(e, \vec{x}, y)$

SIA $Q(\vec{x}, y) = H(e, \vec{x}, y)$ PREDICATO DECIDIBILE, $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$

(\Leftarrow) $SC_p(\vec{x}) = \mathbb{1}(\mu y. \mathbb{1}x_{Q(\vec{x}, y)} - 1)$ E' CALCOLABILE PERCHÉ Q E' DECIDIBILE QUINDI $P(\vec{x})$

E' SEMI DECIDIBILE PERCHÉ ESISTE $SC_p(\vec{x})$ CALCOLABILE E $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$

E. 2 (INCOMPLETO) del 30/06/2015

DEFINIRE $A \leq_m B$ E DIRE SE E' VERO CHE VALE $A \leq_m A \cup \{0\}$

SOLUZIONE:

- DATI $A, B \subseteq \mathbb{N}$ CON $A \leq_m B$. INDICHiamo IL FATTO CHE UN INSIEME SIA RIUCOPIBLE AD UN ALTRO, IN QUESTO CASO A E' RIUCOPIBILE ALL'INSIEME B . QUESTO VALE SSE $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE, CHE CHIAMIAMO FUNZIONE DI RIUCOPIAZIONE, TALE CHE $\forall x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.
- NON E' VERO CHE $A \leq_m A \cup \{0\}$, IL CONTRO ESEMPIO E' $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

E. 3 del 30/06/2015

STUDIO RICORSIVITÀ DI $A = \{x \in N : x \in E_x \vee W_x\}$

SOLUZIONE:

- NON È SATURATO, SEMBRA ESSERE R.E. QUINDI (CERCO $s_A(x)$)
- $s_A(x) = \bigcup (\mu w. (H(x, x, w)_1 \vee s(x, w)_2, x, w)_3))$ CALCOLABILE $\Rightarrow A$ R.E.
- DIMOSTRIAMO CHE A NON È RICORSIVO CON $K \leq_m A$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases} = s_K(x)$$

PER IL TEOREMA SNN $\exists s: N \rightarrow N$ TOTALE CALCOLABILE t.c. $\psi_{s(x)}(y) = g(x,y)$

- $x \in K \Rightarrow \psi_{s(x)}(y) = 1 \forall y \Rightarrow W_{s(x)} = N \Rightarrow s(x) \in W_{s(x)} \subseteq W_{s(x)} \cup E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Rightarrow \psi_{s(x)}(y) \uparrow \forall y \Rightarrow W_{s(x)} = E_{s(x)} = \emptyset \Rightarrow s(x) \notin W_{s(x)} \cup E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin A$

QUINDI S È FUNZIONE DIRIGENZIALE DA K AD A $\Rightarrow A$ NON RICORSIVO MA R.E. $\Rightarrow \bar{A}$ NON R.E.

E. 4 del 30/06/2015

STUDIO RICORSIVITÀ DI $B = \{x \in N : 1 \leq |Ex| \leq 2\}$

SOLUZIONE:

- $B = \{x \mid \psi_x \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{B} = \{f \mid 1 \leq |\text{cod}(f)| \leq 2\}$ SATURATO

- B NON R.E.:

$\text{id} \in \mathcal{B}$ ($|\text{cod}(\text{id})| > 2$), $\exists \emptyset \subseteq \text{id}$, \emptyset FINITA: $\emptyset(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

~~$\emptyset \in \mathcal{B}$~~ ($|\text{cod}(\emptyset)| = 1$) \Rightarrow PER RICE-SHAPIRO B NON R.E.

- \bar{B} NON R.E.:

$\emptyset \notin \bar{\mathcal{B}}$ MA $\emptyset \subseteq \emptyset$ E $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ ($|\text{cod}(\emptyset)| = 0$) $\Rightarrow \bar{B}$ NON R.E. PER RICE-SHAPIRO

E. 5 del 30/06/2025

2° TEOREMA DI RECORSIONE PER DIMOSTRARE CHE $C = \{x \in \mathbb{N} : [0, x] \subseteq W_x\}$ NON È SATURATO

SOLUZIONE

• IL 2° T. DI RECORSIONE ASSEGNA UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\exists e \in \mathbb{N}$.

TALE CHE $\psi_{h(e)} = \psi_e$

• $\psi(x,y) = \begin{cases} 0 & y \in [0,x] \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \text{fuz. y} = x \text{ CALCOLABILE}$

• PER T. SMN $\exists s \in \mathbb{N} \ni \text{CALC. TOT. E.C. } \psi_{s(e)}(y) = \psi(x,y)$

• PER 2° T. RECORSIONE $\exists p \in \mathbb{N}$ E.C. $\psi_{s(p)} = \psi_e$

• $\psi_e(y) = \psi_{s(p)}(y) = \psi(p,y) = \begin{cases} 0 & y \in [0,p] \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad W_p = [0, p] \quad \text{QUINDI } p \in C$

• ESISTONO INFINTI p' CHE CALCOLANO LA STESSA FUNZIONE (IN PARTICOLARE INFINTI $e' \in \mathbb{C}$ $e' > p$ E $\psi_e = \psi_{e'}$)

MA L'INTERVALLO $[0, p'] \neq [0, p]$ PERCHÉ PIÙ GRANDE QUINDI $p \in C$ MA $p' \notin C$ E $\psi_e = \psi_{p'}$

CHE CONTRADDICE LA DEFINIZIONE DI INSIEME SATURATO, QUINDI C NON SATURATO



STA A SÌN, $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} \quad x \in A \wedge \psi_x = \psi_y \Rightarrow y \in A$

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

30 Giugno 2015

Esercizio 1

Dimostrare che un predicato $P(\vec{x})$ è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile $Q(\vec{x}, y)$ tale che $P(\vec{x}) \equiv \exists y.Q(\vec{x}, y)$.

Esercizio 2

Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leq_m B$. È vero che per ogni insieme A vale vale $A \leq_m A \cup \{0\}$? In caso affermativo dare una prova e in caso negativo un controesempio. Nel secondo caso, proporre una condizione (indicando se è solo sufficiente o anche necessaria) che renda vero $A \leq_m A \cup \{0\}$.

Soluzione:

In generale non vale, in particolare non vale per $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Infatti, la relazione desiderata diviene $\mathbb{N} \setminus \{0\} \leq_m \mathbb{N}$ e si osserva che non può esistere una funzione totale $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sse $f(x) \in \mathbb{N}$: qualunque sia f la seconda parte è sempre vera, mentre la prima è falsa per $x = 0$.

Questo è l'unico controesempio all'asserto, ovvero per ogni $A \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale $A \leq_m A \cup \{0\}$. Infatti, distinguiamo due casi:

- se $0 \in A$, allora $A = A \cup \{0\}$ (la funzione di riduzione può essere l'identità).
- se $0 \notin A$, allora possiamo considerare certamente $x_0 \notin A$, $x_0 \neq 0$ (infatti sappiamo che $A \neq \mathbb{N}$ e $A \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$). E la funzione di riduzione può essere

$$f(x) = \begin{cases} x_0 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si conclude quindi che $A \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è condizione necessaria e sufficiente per la validità dell'asserto

□

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \cup W_x\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Mostriamo che $K \leq A$, quindi A non ricorsivo. Si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x, y) = \Psi_U(x, x)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a A . Infatti

- se $x \in K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = \varphi_x(x) \downarrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto $s(x) \in E_{s(x)} \cup W_{sx} = \mathbb{N}$. Quindi $s(x) \in A$.
- se $x \notin K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto $s(x) \notin E_{s(x)} \cup W_{sx} = \emptyset$. Quindi $s(x) \notin A$.

Inoltre A è r.e., dato che la sua funzione caratteristica

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w. H(x, x(w)_1) \vee S(x, (w)_1, x, (w)_2))$$

è calcolabile. Pertanto \bar{A} non r.e., e quindi non è neppure ricorsivo. \square

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in N : 1 \leq |E_x| \leq 2\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $B = \{x : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : 1 \leq |\text{cod}(f)| \leq 2\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova B e \bar{B} sono entrambi non r.e.:

- B non r.e.

Si osservi che $id \notin \mathcal{B}$ ma vi è la funzione finita

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

tale che $\theta \subseteq id$ e $\theta \in \mathcal{B}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che B non è r.e.

- \bar{B} non r.e.

Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \bar{\mathcal{B}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che \bar{B} non è r.e.

□

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} : [0, x] \subseteq W_x\}$ non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, come nel caso della prova per K , possiamo trovare un indice e tale che $W_e = [0, e]$. Per provare questo, definiamo

$$g(e, x) = \begin{cases} e & \text{se } x \leq e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È una funzione calcolabile e quindi per il teorema smn, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $e, x \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(e)}(x) = g(e, x)$$

Per il II teorema di ricorsione esiste un e tale che $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ e quindi

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} e & \text{se } x \leq e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato un qualsiasi indice $e' > e$ tale che $\varphi_e = \varphi_{e'}$ (esiste certamente dato che ci sono infiniti indici per una funzione calcolabile) si ha che $e' \notin C$, dato che $[0, e'] \not\subseteq [0, e] = W_{e'}$.

Quindi C non saturato. □

2° APPELLO 2015 (16/07/2015)

E.1 del 16/07/2015

$P(x, \vec{y})$ SEMIDEcidibile $\Rightarrow \exists x. P(x, \vec{y})$ E' SEMIDEcidibile. CONTRAFFERMO DEL CONTRARIO.

SOLUZIONE:

- E' UTILE CITARE IL TEOREMA DI STRUTTURA: $P(x)$ SEMIDEcidibile $\Leftrightarrow \exists Q(x, \vec{y})$ DECIDIBILE E.C. $\Leftrightarrow P(x) \equiv \exists y. Q(x, \vec{y})$
- DEVO DIMOSTRARE $P(x, \vec{y})$ SEMIDEcidibile $\Rightarrow P'(y) = \exists x. P(x, \vec{y})$ SEMIDEcidibile.
- $P(x, \vec{y})$ E' SEMIDEcidibile $\Leftrightarrow \exists t. Q(x, \vec{y}, t)$ DECIDIBILE E.C. $P(x, \vec{y}) \equiv \exists t. Q(t, x, \vec{y})$
- $P'(y) = \exists x. \exists t. Q(t, x, \vec{y}) \equiv \exists w. Q((w)_1, (w)_2, \vec{y})$ DECIDIBILE QUINDI PER IL T. STRUTTURA $P'(y)$ E' SEMIDEcidibile. \square
- NON VALE IL CONTRARIO AD ESEMPIO $P(x, \vec{y}) \equiv (x \in W_x) \quad \exists x. P(x, \vec{y})$
- ALTERNATIVA: $P(x, y) \equiv (y=1) \wedge (x \notin W_x) \quad Q(y) \equiv \exists x. P(x, y) \equiv (y=1)$
- ALTERNATIVA: SUPponiamo $P(x, y)$ VALGA SE $\varphi_{f(x)} \uparrow$, $P(x, y)$ NON SEMIDEcidibile. ATRIAMENTI K SAREBBERE R.E. MA SAPPIAMO CHE ESISTONO PROGRAMMI CHE APPARISCONO A K, AD ES. QUELLI CHE CALCOLANO LA FUNZIONE SEMPRE INDEFINITA, ALLORA $\exists x. P(x, \vec{y})$ VALE SEMPRE QUINDI SEMIDEcidibile.

E.2 del 16/07/2015

A R.E. $\Leftrightarrow A \leq_m K$

SOLUZIONE:

(\Leftarrow) K R.E. QUINDI $SC_K(x)$ E' CALCOLABILE, $f: \text{IN} \rightarrow \text{IN}$ E' FUNZIONE DI RIDUZIONE QUINDI

$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in K \Rightarrow SC_A(x) = SC_K(f(x))$ CALCOLABILE \Rightarrow A.R.E.

(\Rightarrow) A R.E. QUINDI $SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ CALCOLABILE

PONIAMO $\varphi: \text{IN} \rightarrow \text{IN}$ FUNZIONE DI RIDUZIONE QUINDI $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in K$ (CALC. TOT.)

$y(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = SC_A(x)$ CALCOLABILE, PARTE. SENN $\varphi_{f(x)}(y) = y(x, y)$

- $x \in A \Rightarrow \varphi_{f(x)}(y) = 1 \forall y \Rightarrow f(x) \in W_{\varphi_{f(x)}} \Rightarrow f(x) \in K$
- $x \notin A \Rightarrow \varphi_{f(x)}(y) \uparrow \forall y \Rightarrow \varphi_{f(x)}(f(x)) \uparrow \Rightarrow f(x) \notin K$

$A \leq_m K$

Esercizio 3 del 26/07/2015

RICORSIVITÀ DI $A = \{x \in N \mid \exists y \in E_x, \exists z \in W_x, x = y \cdot z\}$

SOLUZIONE:

- A SEMBRA ESSERE R.E.:

$$SC_A(x) = \mathbb{1} \left(\text{M.W. } (S(x, (w)_1, (w)_2, (w)_3) \wedge H(x, (w)_4, (w)_5) \wedge (x = (w)_2 * (w)_4)) \right)$$

SC_A CALCOLABILE QUINDI A R.E.

- DIMOSTRIAMO A NON RICONOSCIBILE USANDO $K \subseteq_m A$:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases} = SC_K(x) \text{ CALCOLABILE}$$

PER T.SMN $\exists s$: INSIEME CALCOLABILE TOTALE E.S. $f_{S(x)}(y) = \psi(x,y)$, S' È FUNZIONE DI RISOLVITÀ:

$$\cdot x \in K \Rightarrow f_{S(x)}(y) = 1 \forall y \Rightarrow f_{S(x)}(S(x)) = 1 \quad S(x) = y * z \Rightarrow S(x) \in A$$

$$\cdot x \notin K \Rightarrow f_{S(x)}(y) \neq 1 \forall y \Rightarrow f_{S(x)} = W_{S(x)} = \emptyset \Rightarrow S(x) \notin A$$

A R.E. E A NON RICONOSCIBILE $\Rightarrow \overline{A}$ NON R.E.

Esercizio 4 del 26/07/2015

RICORSIVITÀ DI $B = \{x \in N \mid |W_x \setminus E_x| \geq 2\}$

SOLUZIONE:

- $B = \{x \mid x \in \mathcal{B}\}$ $\mathcal{B} = \{f \mid |\text{dom}(f) \setminus \text{cod}(f)| \geq 2\}$. B SATURATO

$$f(x) = x - 2 = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ x-2 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad \text{dom}(f) = \text{cod}(f) = N \Rightarrow |\text{dom}(f) \setminus \text{cod}(f)| = 0 \Rightarrow f \notin \mathcal{B}$$

$$\emptyset(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \emptyset & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad \text{dom}(\emptyset) = \{0, 1, 2\}, \text{cod}(\emptyset) = \{0\} \Rightarrow |\text{dom}(\emptyset) \setminus \text{cod}(\emptyset)| = 2 \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$$

QUINDI $f \notin \mathcal{B}$ MA $\emptyset \subseteq f$, \emptyset FINITA, $\emptyset \in \mathcal{B}$ PER RICE STAPPIRO B NON R.E.

- $\overline{\mathcal{B}} = \{f \mid |\text{dom}(f) \setminus \text{cod}(f)| \leq 2\}$

$$11 \notin \overline{\mathcal{B}} \quad |\text{dom}(11) \setminus \text{cod}(11)| = N \setminus \{1\} \geq 2$$

$$\emptyset \in \overline{\mathcal{B}} \quad |\text{dom}(\emptyset) \setminus \text{cod}(\emptyset)| = 0 \leq 2$$

QUINDI $11 \notin \overline{\mathcal{B}}$ MA $\emptyset \subseteq 11$, \emptyset FINITA, $\emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$ PER RICE STAPPIRO \overline{B} NON R.E.

E.s del 16/07/2015

2° TEOREMA DI RISOLVIMENTO PROBLEMA: $\exists x \in E.c. W_x = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$

SOLUZIONE

- IL 2° T. DI RISOLVIMENTO ASSUNTE CHE DATA UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$

TALE CHE $\psi_{f(p)} = \phi_p$

$$- y(x, y) = \begin{cases} k & y = kx \text{ PER QUALENNE } k \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \mu k. (kx - y)$$

PER T.SVN $\exists s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE t.c. $y(x, y) = \psi_{s(x)}(y)$

$W_{s(x)} = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$ MA NOI VOGLIAMO SOLO W_x

PER IL 2° T. DI RISOLVIMENTO $\exists p \in \mathbb{N}$ t.c. $\psi_{s(p)} = \phi_p$ QUINDI $W_p = W_{s(p)} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\}$

ALTERNATIVA SBAGLIATA: $y(x, y) = \begin{cases} 1 & yx \in W_x \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \mathbb{1}(\psi_s(x, y))$

Dopo tutti i procedimenti come sopra: $W_x = \{y \mid y \neq x \in W_x\}$. NON VA BENE PERCHÉ

SI DEDICA A VUOTO

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

16 Luglio 2015

Esercizio 1

Dimostrare che se un predicato $P(x, \vec{y})$ è semidecidibile allora $\exists x.P(x, \vec{y})$ è semidecidibile. Vale anche il contrario? Dimostrarlo o portare un controesempio.

Soluzione: Il primo asserto è parte della teoria. Si osservi invece che l'implicazione opposta è falsa. Si consideri, per esempio, il predicato $P(x, y) = x \notin W_x$, che non è semidecidibile. Il predicato ottenuto tramite la quantificazione esistenziale $Q(y) = \exists x. P(x, y)$ è costantemente vero o falso (anche se non rilevante per la prova, si osservi che essendo \bar{K} non vuoto, il predicato $Q(y)$ è costantemente vero), quindi decidibile. Come esempio meno “degenero” si può considerare $P(x, y) = (y > x) \wedge (y \notin W_x)$ e la quantificazione $Q(y) = \exists x. (y > x) \wedge (y \notin W_x)$. In questo caso, si osservi che detto $e_0 \in \mathbb{N}$, un indice per la funzione sempre indefinita, si ha che $Q(y)$ è vero per ogni $y > e_0$, da cui discende facilmente la decidibilità di $Q(y)$. \square

Esercizio 2

Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se $A \leq_m K$.

Soluzione: Si consideri Se A è r.e., allora $g(x, y) = sc_A(x)$, con l'applicazione del teorema smn porta alla funzione di riduzione. Viceversa, se $A \leq_m K$, allora detta f la funzione di riduzione, si ha $sc_A(x) = sc_k(f(x))$ è calcolabile. \square

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in E_x. \exists z \in W_x. x = y * z\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Mostriamo che $K \leq A$, quindi A non ricorsivo. Infatti si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x, y) =_K (x)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a A . Infatti, se $x \in K$, $\varphi_{s(x)}(y) = y$ per ogni y e quindi esistono certamente $y = 1 \in E_{s(x)} = \{1\}$ e $z = s(x) \in W_{s(x)} = \mathbb{N}$ etali che $s(x) = y * z = s(x) * 1$. Quindi $s(x) \in A$. Altrimenti $\varphi_{s(x)} = \emptyset$ ed è immediato concludere $s(x) \notin A$.

Inoltre A è r.e., dato che la sua funzione semicaratteristica può essere espressa come:

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w. S(x, (w)_1, (w)_2, (w)_4) \wedge H(x, (w)_3, (w)_4) \wedge (w)_2 * (w)_3 = x)$$

e quindi è calcolabile. Pertanto \bar{A} non r.e. (e quindi neppure ricorsivo). \square

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in N : |W_x \setminus E_x| \geq 2\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $B = \{x : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : |\text{dom}(f) \setminus \text{cod}(f)| \geq 2\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova B e \bar{B} sono entrambi non r.e.:

- B non r.e.

Si osservi che $f(x) = x - 2 \notin \mathcal{B}$ ($\text{dom}(f) = \text{cod}(f) = \mathbb{N}$ quindi $\text{dom}(f) - \text{cod}(f)$ ma vi è la funzione finita

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

tale che $\theta \subseteq f$ e $\theta \in \mathcal{B}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che B non è r.e.

- \bar{B} non r.e.

Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \bar{\mathcal{B}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che \bar{B} non è r.e.

\square

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice x tale che $W_x = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, definiamo una funzione $g(x, y) = \mu z. |zx - y|$. infatti:

$$g(x, y) = \begin{cases} y/x & \text{se } y \text{ multiplo di } x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mu z. |zx - y|$$

Per come si può esprimere, la funzione è calcolabile, pertanto il teorema smn ci garantisce l'esistenza di una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$. Si nota che $\text{dom}(\varphi_{s(x)}) = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ora, per il secondo teorema di ricorsione, esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ e pertanto

$$\text{dom}(\varphi_e) = \text{dom}(\varphi_{s(e)}) = \{ke \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

come desiderato. \square

3° APPELLO 2015 (03/09/2015)

E.1 del 03/09/2015

MINIMALIZZAZIONE ILLIMITATA E DIMOSTRAZIONE CHE C'È CHILO RISPETTO AD BTA

SOLUZIONE:

- $f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ $\forall \vec{x}, h(\vec{x}) = \min_y f(\vec{x}, y) \rightarrow$ SIGNIFICA minimo $y \in \mathbb{N}$ c.t. $f(\vec{x}, y) = 0$
Y POTREBBE NON ESISTERE $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \text{ se } f(\vec{x}, y) = 0, \forall z < y : f(\vec{x}, z) \neq 0 \\ \text{ALTRIMENTI} \end{array} \right.$

- DIMOSTRAZIONE "C'È CHILO RISPETTO ALLA MINIMALIZZAZIONE ILLIMITATA"

SIA $f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{C} \Rightarrow h(\vec{x}) = \min_y f(\vec{x}, y) \in \mathcal{C}$

SIA F PROGRAMMA URM PER f $\boxed{\begin{array}{cccccc} x_1 & \dots & x_k & \dots & x_{m+k} & y_0 & 0 \\ 1 & \dots & k & \dots & m+k & m+k+1 & \end{array}} \dots, m = \max \{ D(F), k \}$

LOOP: $F[m+1, \dots, m+k, m+k+1 \rightarrow 1]$

J[1, m+k+2, END]

S(m+k+1)

J(1, 1, loop)

END: T(m+k+1, 1)

// $f(\vec{x}, y) = 0$?

// $y++$

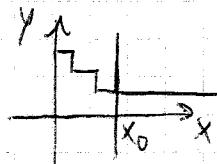
QUINDI C'È CHILO RISPETTO ALLA
MINIMALIZZAZIONE ILLIMITATA

E.2 del 03/09/2015

ESISTE UNA FUNZIONE DECRESCENTE TOTALE NON CALCOLABILE? ($\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$)

SOLUZIONE:

NON ESISTE:



$K = \min \{ f(x) \mid x \in \mathbb{N} \}$ ma $x_0 \in \mathbb{N}$ c.t. $f(x_0) = K$

DATO CHE f È DECRESCENTE $\forall x \geq x_0 \quad f(x) \leq f(x_0) = K$ MA $f(x) \geq K$ QUINDI $f(x) = K$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < x_0 \\ \uparrow \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x < x_0 \\ K & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI POTREBBE GIÀ CONCLUDERE QUI MA È POSSIBILE FARE PIÙ PRECISI:

$$f(x) = \min_{w_1} \left((x < x_0 \wedge s(e, x, (w_1)_1, (w_1)_2)) \wedge (x \geq x_0 \wedge (w_1 = K)) \right)_1$$

§. 3 del 03/09/2025

STUDIARE RICONOSCITÀ DI $A = \{x \mid E_x = W_x + 1\}$ SAPENDO CHE $X \subseteq \mathbb{N}$ $X+1 = \{x+1 \mid x \in X\}$

SOLUZIONE

- $A = \{x \mid f_x \in A\}$ $\bar{A} = \{f \mid \text{cod}(f) = \text{dom}(f) + 1\}$ SATURATO

A NON SEMBRA R.E.

id $\notin A$ $\text{dom}(\text{id}) = \mathbb{N}$, $\text{dom}(\text{id}) + 1 = \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \text{cod}(\text{id}) = \mathbb{N}$

$\emptyset \subseteq \text{id}$, \emptyset FINITA $\& \emptyset \in A \Rightarrow$ PER RICE-SHAPIRO A NON R.E.

- \bar{A} NON SEMBRA R.E.

$f(x) = \begin{cases} 1 & x=0,1 \\ x & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad \text{dom}(f) = \mathbb{N} \quad \text{cod}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad f \in \bar{A} \Rightarrow f \notin A$

$\emptyset \subseteq f \quad \text{cod}(\emptyset) = \{1\} = \text{dom}(\emptyset) + \text{dom}(\emptyset + 1) = \{1\} \Rightarrow \emptyset \in \bar{A} \Rightarrow$ PER RICE-SHAPIRO \bar{A} NUOVA

§. 4 del 03/09/2025

STUDIARE RICONOSCITÀ DI $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y > x . \exists z \in W_x\}$

SOLUZIONE

- B NON È SATURATO E SEMBRA OJERE NON R.E. QUINDI VEDO $\bar{K} \leq B$:

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \exists z \in W_x \mid z < y \\ 1 & \forall z \in W_x \mid z < y \end{cases} = \mu_{W_x} \cdot \chi_{\exists z \in W_x \mid z < y} \quad \text{CALCOLO B/LE}$$

PER T. SMN $\exists s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE E.C. $\psi_{s(x)}(y) = g(x,y)$, S È FUNZIONE DI RISOLVITONE:

$\cdot x \in \bar{K} \Rightarrow \forall y \exists z \in W_x \mid z < y \Rightarrow \psi_{s(x)}(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \forall y > s(x) \exists z \in W_{s(x)} = \mathbb{N} \Rightarrow s(x) \in B$

$\cdot x \notin \bar{K} \Rightarrow x \in K \Rightarrow \exists y_0 . \forall y \geq y_0 \forall z \in W_x \mid z < y \Rightarrow y = s(x) + y_0 + 1 > s(x) \wedge \psi_{s(x)}(y) \uparrow \Rightarrow \exists y \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin B$

- \bar{B} SEMBRA FISSEREE NON R.E. QUINDI VEDO $\bar{K} \leq \bar{B}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{K} \\ 0 & x \notin \bar{K} \end{cases} = s(x) \quad \text{CALCOLO B/LE}$$

PER T. SMN $\psi_{s(x)}(y) = f(x,y)$, S È FUNZIONE DI RISOLVITONE:

$\cdot x \in \bar{K} \Rightarrow \psi_{s(x)}(y) \uparrow \forall y \Rightarrow y = s(x) + 1 > s(x) \wedge \psi_{s(x)}(2y) \uparrow \Rightarrow \exists y \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in \bar{B}$

$\cdot x \notin \bar{K} \Rightarrow \psi_{s(x)}(y) = 1 \quad \forall y \Rightarrow \text{NON ESISTE } y > s(x) . \exists y \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin \bar{B}$

g. s del 03/09/2015

2° TEOREMA DI RICORSIONE PER DEMOSTRARE $\Delta(x) = \min\{y : y \neq \varphi_x\}$ NON E' CALCOLABILE

SOLUZIONE

- IL 2° TEOREMA DI RICORSIONE DICE CHE DATA $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ TOTALE CALCOLABILE $\exists p \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{h(p)} = \varphi_p$
- $\Delta(x)$ E' TOTALE QUINDI $\forall x \varphi_{\Delta(x)} \neq \varphi_x$ QUINDI NON HA PUNTI FISSI, ~~SE~~ SE FORSE CALCOLABILE DOVREBBE ESSERE UN P.T.C. $\varphi_p = \varphi_{\Delta(p)}$, QUINDI PER IL 2° T. DI RICORSIONE NON E' CALCOLABILE.

9.5.2 Esercizio 2 - Funzione decrescente totale e non calcolabile

Esiste una funzione decrescente e non calcolabile?

Decrescente:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Soluzione

Tale funzione non esiste.

Sia f una funzione decrescente e totale. Si può quindi individuare $k = \min\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ e $x_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_0) = k$.

Si ha quindi che $\forall x \geq x_0, f(x) \leq f(x_0) = k$ e quindi $f(x) = k$, perché k è il minimo valore assunto dalla funzione.

Si può quindi definire

$$\vartheta(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < x_0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la quale essendo una parte finita di f è calcolabile. Con ϑ si può definire:

$$g(x) = \begin{cases} \vartheta(x) & \text{se } x < x_0 \\ k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è calcolabile. Si potrebbe già concludere qui ma si può essere più precisi, sia *e* il programma che calcola ϑ :

$$g(x) = \mu w. \left(\left(x < x_0 \wedge S(e, x, (w)_1, (w)_2) \right) \vee \left(x \geq x_0 \wedge (w)_1 = k \right) \right)$$

9.5.3 Esercizio 3 - Ricorsività

Studiare la ricorsività di $A = \{x \mid E_x = W_x + 1\}$ sapendo che se $X \subseteq \mathbb{N}$, $X + 1 = \{x + 1 \mid x \in X\}$

Soluzione

Si può osservare che l'insieme è saturo in quanto contiene tutte le funzioni il cui codominio è il successore del dominio.

Inoltre, probabilmente A non è RE perché per poter verificare l'appartenenza di una funzione all'insieme è necessario provare tutti i valori del dominio.

Si può quindi applicare Rice-Shapiro: la funzione id non appartiene a A perché il suo dominio coincide con il codominio e la funzione \emptyset appartiene ad A perché sia il codominio che il dominio sono l'insieme vuoto.

Si ha quindi che $id \notin A$, $\emptyset \in A$ e \emptyset è parte finita di id , quindi per il teorema di Rice-Shapiro A non è RE.

Resta da valutare \overline{A} (saturo).

Posso definire la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, 1 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che ha codominio $\mathbb{N} - \{0\}$ e dominio \mathbb{N} , quindi $f \in \mathcal{A}$ e $f \notin \overline{\mathcal{A}}$.

Una parte finita di f è:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dato che $\text{dom}(\vartheta) = \text{cod}(\vartheta)$, $\vartheta \in \overline{\mathcal{A}}$ e quindi per Rice-Shapiro, $\overline{\mathcal{A}}$ non è RE.

9.5.4 Esercizio 4 - Ricorsività

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y > x, 2y \in W_x\}$$

Soluzione

B non è saturo, in quanto descrive una proprietà non banale delle funzioni, inoltre, dato che per verificare l'appartenenza a B è necessario provare tutti i valori del dominio, probabilmente B non è RE.

Si tratta quindi di effettuare la riduzione $\overline{K} \leq_m B$, dove \overline{K} è noto non essere RE e contiene tutti i programmi che non terminano su se stessi.

Serve quindi una funzione di riduzione che dato un programma x con $\phi_x(x) \uparrow$ fornisca un programma $f(x)$ tale che per tutti i valori maggiori del suo indice ($y > f(x)$), $2y \in W_{f(x)}$ e che se $x \in K$, $W_{f(x)}$ non contenga $2y$.

Possiamo quindi definire la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 1(\mu w. |\mathcal{X}_{H(x, x, y)}|)$$

Trattandosi di una funzione calcolabile, per il teorema SMN esiste una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$.

f è proprio la funzione di riduzione perché

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = 1 \forall y$ e quindi $\phi_{f(x)}$ è definita su tutto \mathbb{N} , pertanto $f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}$ è sempre indefinita $\forall y$ e quindi anche se $y > f(x)$, $2y \notin W_{f(x)}$, pertanto $f(x) \notin B$.

Quindi B non è RE.

Per quanto riguarda \overline{B} , anche questo sembra non essere RE e si può provare la stessa riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{B}$.

Serve quindi una funzione che dato un programma x che non termina quando riceve se stesso in input, fornisca un programma $f(x)$ tale che esiste un $y > x$, $2y \notin W_{f(x)}$ e che se x termina su se stesso in input, $f(x)$ termina su $2y$ per qualche $y > x$.

Possiamo quindi definire la funzione:

$$g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \equiv x \notin \overline{K} \end{cases} = SC_K(x)$$

g è calcolabile perché SC_K è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale, tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$ ed è quindi la funzione di riduzione cercata, perché:

- $x \in \overline{K}$: $W_{f(x)} = \emptyset$ e quindi $f(x) \in \overline{B}$.
- $x \in K$: $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi $\forall y > f(x)$, $2y \in W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \notin \overline{B}$.

Segue quindi che anche \overline{B} non è RE.

9.5.5 Esercizio 5 - Secondo teorema di ricorsione

Dimostrare che $f(x) = \min\{y \mid \phi_x \neq \phi_y\}$ non è calcolabile.

Soluzione

Il secondo teorema di ricorsione dice che data $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale e calcolabile, $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{h(e)}$.

La funzione f è totale perché fissato un programma x è sempre possibile trovare un programma y che calcola una funzione diversa.

Inoltre, per come è definita f , questa non ha punti fissi, perché fissato un e , $\phi_{f(e)} \neq \phi_e$.

Quindi per il secondo teorema di ricorsione, f non può essere calcolabile perché altrimenti dovrebbe esistere un punto fisso.

9.3 Appello 2016-01-25

9.3.1 Esercizio 1

Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e \overline{A} sono RE.

Soluzione

Se A è ricorsivo posso definire

$$SC_A(x) = \mathbb{W}(\mu w. \overline{sg}(\mathcal{X}_A(x)))$$

che risulta calcolabile perché definita utilizzando funzioni calcolabili e quindi A è anche RE. Per ottenere $SC_{\overline{A}}$ basta togliere il segno negato, oppure utilizzare $\mathcal{X}_{\overline{A}}$.

Se invece sono entrambi RE, posso definire

$$\mathcal{X}_A(x) = \left(\mu w. S(e_1, x, (w)_1, (w)_2) \vee S(e_2, x, (w)_1, (w)_2) \right)_1$$

dove e_1 e e_2 sono i programmi che calcolano le due funzioni semi-caratteristiche (quella di \overline{A} deve essere composta con il segno negato).

9.3.2 Esercizio 2

Definire una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale e non calcolabile tale che $f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che questa funzione non esiste.

Soluzione

La funzione deve essere definita su tutto \mathbb{N} e $f(x) = id(x) = x$.

Dato che le due funzioni sono uguali e sono definite sullo stesso dominio, un programma che calcola id calcola anche f ed essendo id calcolabile, esistono infiniti programmi che sono in grado di calcolarla e che quindi riescono a calcolare anche f .

Tuttavia, la funzione può essere non calcolabile:

$$f(x) = x \cdot \mathbb{W}(\mathcal{X}_K(x))$$

Così definita, è totale, uguale all'identità e non calcolabile perché \mathcal{X}_K è non calcolabile.

9.3.3 Esercizio 3

$$A = \{x | \phi_x \text{ strettamente crescente}\}$$

Soluzione

A probabilmente è non-RE perché per valutare l'appartenenza è necessario controllare infiniti punti del dominio.

A è saturo:

$$\mathcal{A} = \{f | \forall x, y \in \text{dom}(f) : x < y \rightarrow f(x) < f(y)\}$$

Una qualsiasi funzione gradino:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

non appartiene a \mathcal{A} , ma la parte finita

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ 1 & x = x_0 + 1 \\ \uparrow & \text{altriamenti} \end{cases}$$

appartiene ad \mathcal{A} e quindi per Rice-Shapiro, A è non-RE.

Per quanto riguarda \overline{A} , per decidere l'appartenenza basta trovare una coppia di punti sui quali la funzione è non crescente, quindi potrebbe essere RE.

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{W} \left(\mu w. \overline{sg} \left(S(x, (w)_1, (w)_2, (w)_3) \wedge S(x, (w)_4, (w)_5, (w)_6) \wedge (w)_1 < (w)_4 \wedge (w)_2 \geq (w)_5 \right) \right)$$

Essendo la funzione semi-caratteristica calcolabile, \overline{A} è non-RE.

9.3.4 Esercizio 4

$$B = \{x : x > 0 \wedge x/2 \notin E_x\}$$

Soluzione

B probabilmente è non-RE, perché dovrei provare il programma x su infiniti input.

$$\overline{K} \leq_m B$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & x \notin K \\ y/2 & x \in K \end{cases} = y/2 \cdot SC_K(x)$$

Per SMN esiste la funzione di riduzione f :

- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow \forall y \Rightarrow E_{f(x)} = \emptyset \Rightarrow f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = y/2 \forall y \Rightarrow \phi_{f(x)}(f(x)) = f(x)/2 \Rightarrow f(x)/2 \in E_{f(x)} \Rightarrow f(x) \notin B$

E quindi B è non RE.

\overline{B} invece sembra essere ricorsivo, perché basta eseguire in parallelo il programma su tutti i possibili input fino a che non viene trovato in output il valore $x/2$.

$$SC_{\overline{B}}(x) = \mathbb{W} \left(\mu w. \overline{sg} \left(S(x, (w)_1, x/2, (w)_2) \right) \right)$$

\overline{B} è RE e non ricorsivo.

9.3.5 Esercizio 5

$$\exists x. \phi_x(y) = x + y$$

Soluzione

Definisco $g(x, y) = x + y$.

Per SMN:

$$\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = x + y$$

Per il secondo teorema di ricorsione

$$\exists x. \phi_x(y) = \phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = x + y$$

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

Prova Intermedia - 18 Aprile 2016

Esercizio 1

Dare la definizione dell'insieme \mathcal{PR} delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $pow2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $pow2(y) = 2^y$.

Esercizio 2

Si consideri una variante della macchina URM dove l'istruzione di salto e successore sono sostituite dall'istruzione $Jl(m, n, t)$ che confronta il contenuto r_m e r_n dei registri R_m e R_n e quindi:

- se $r_m = r_n$ incrementa il registro R_m e salta all'indirizzo t (restando inteso che se t non cade nel programma, l'esecuzione termina).
- altrimenti continua con l'istruzione successiva.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme \mathcal{C}' delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme \mathcal{C} delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Esercizio 3

Può esistere una funzione non calcolabile totale $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $cod(f)$ sia l'insieme \mathbb{P} dei numeri pari? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f , se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

9.2 Appello 2016-07-01

Correzione di Baldan.

9.2.1 Esercizio 1

Sia A un insieme ricorsivo e siano $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funzioni calcolabili. Dimostrare che è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \notin A \end{cases}$$

Il risultato continua a valere se indeboliamo le ipotesi e assumiamo A RE? Spiegare come si adatta la dimostrazione, in caso positivo, o fornire un controsenso in caso negativo.

Soluzione

Siano e_1, e_2 i programmi che calcolano le due funzioni date.

La funzione f può essere calcolata con:

$$f(x) = \left(\mu w. \left(S(e_1, x, (w)_1, (w)_2) \wedge x \in A \right) \vee \left(S(e_2, x, (w)_1, (w)_2) \wedge x \notin A \right) \right)_1$$

questo perché l'appartenenza o meno ad A è decidibile in quanto A è ricorsivo.

Utilizzare

$$f(x) = f_1(x)\chi_A(x) + f_2(x)\chi_{\bar{A}}$$

è **sbagliato** perché una delle due funzioni può **non essere totale** e quindi verrebbe prodotto un risultato sbagliato, utilizzando una funzione sempre indefinita. Se ci fosse anche l'ipotesi della totalità il discorso sarebbe stato diverso.

Se invece A è ricorsivamente enumerabile, la non appartenenza ad A non è più decidibile.

Per dimostrare questo conviene trovare un contro esempio.

Posso prendere $A = K$, $f_1(x) = 1, f_2(x) = 0$, così facendo f risulta essere:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$$

ed essendo f_1, f_2 calcolabili, anche $f = \chi_K$ è calcolabile, ma è noto che questa funzione non è calcolabile e quindi in generale f non è calcolabile.

9.2.2 Esercizio 2

Dimostrare che un insieme A è RE se e solo se esiste una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile tale che $A = \text{img}(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione

Se A è RE, allora la sua funzione SC_A è calcolabile ed è definita solo su A .

Per fare in modo che A sia l'immagine di f , si può prendere

$$f(x) = x \cdot SC_A(x)$$

In questo modo, quando $x \in A$, $SC_A(x) = 1$ e quindi $f(x) = x$ e pertanto $f(x) \in A$. f è calcolabile in quanto è ottenuta componendo funzioni calcolabili.

Se $A = \text{img}(f)$ con f calcolabile. L'idea è quella di definire la funzione semi-caratteristica di A in modo che valga 1 solo quando viene calcolata su un valore x che viene fornito in output dalla funzione.

Sia e un programma che calcola f . La funzione semi-caratteristica di A può essere definita come:

$$SC_A(x) = \mathbb{W}(\mu w.S(e, (w)_1, x, (w)_2,))$$

È necessario effettuare la minimalizzazione perché f può non essere totale, ovvero **non** può essere definita come:

$$SC_A(x) = \mathbb{W}(\mu w.|f(w) - x|)$$

9.2.3 Esercizio 3

$$A = \{x | x \in W_x \wedge \phi_x(x) > x\}$$

Soluzione

L'insieme è molto simile a K , quindi probabilmente è RE:

$$SC_A(x) = \mathbb{W}(\mu w.x + 1 \dashv \phi_x(x)) = \mathbb{W}(\mu w.x + 1 \dashv \Phi_u(x, x))$$

La funzione è calcolabile, quindi A è RE e va bene anche se $x \notin W_x$ perché la funzione è correttamente indefinita.

Per dimostrare che A non è ricorsivo posso fare la riduzione $K \leq_m A$.

Serve quindi una funzione $g(x, y)$ tale che vista come funzione di y appartenga ad A solo se $x \in K$.

$$g(x, y) = \begin{cases} y + 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = (y + 1) \cdot SC_K(x)$$

Quando x in K , $g(x, x) = x + 1$ quindi la condizione di appartenenza ad A è soddisfatta.

Per SMN esiste f che funziona come funzione di riduzione e tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$:

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y) = y + 1 \forall y$ in particolare, $\phi_{f(x)}(f(x)) = f(x) + 1 \forall f(x)$ ed inoltre $f(x) \in W_{f(x)}$, quindi $f(x) \in A$.
- $x \notin K$: $\phi_{f(x)} = g(x, y) = \uparrow \forall y$, quindi $f(x) \notin W_{f(x)}$ e pertanto $f(x) \notin A$.

A non è ricorsivo ed è RE, quindi \overline{A} è non RE.

9.2.4 Esercizio 4

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in W_x \exists z \in W_x (y < z) \wedge \phi_x(y) > \phi_x(z)\}$$

Soluzione

L'insieme contiene tutti gli indici, tali che per ogni valore del dominio, esiste un valore più grande tale che il valore della funzione calcolato in quel punto sia più basso.

L'insieme è saturo, perché

$$\beta = \{f \in \mathcal{C} : \forall y \in \text{dom}(f). \exists z \in \text{dom}(f). y < z \vee f(y) > f(z)\}$$

C'è una quantificazione universale, quindi è probabile che sia non RE.

Ad occhio c'è una sola funzione che appartiene a β è ed \emptyset perché è sempre indefinita. Dato che \emptyset è una parte finita di tutte le funzioni, basta trovarne una che non appartiene a β . Per non appartenere a β basta che una funzione non sia decrescente, quindi la funzione *id* non appartiene a β ma ammette parte finta che ci appartiene e quindi per Rice Shapiro, B è non RE.

$$\overline{\beta} = \{f \in \mathcal{C} : \exists y \in \text{dom}(f). \forall z \in \text{dom}(f). y > z \vee f(y) \leq f(z)\}$$

Osservando $\overline{\beta}$ a prima vista sembra essere non RE, però ragionando meglio sulle condizioni di appartenenza a $\overline{\beta}$ si può notare che viene richiesto che la funzione abbia un minimo e questo è sempre vero per le funzioni definite sui numeri naturali.

Quindi $f \in \overline{\beta} \Leftrightarrow f \neq \emptyset$, ovvero $\overline{\beta} = \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$, $\beta = \{\emptyset\}$.

Si può definire la funzione semi-caratteristica:

$$SC_{\overline{B}}(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.H(x, (w)_1, (w)_2)\right)$$

Quindi \overline{B} è RE e non ricorsivo, perché B è non-RE.

9.2.5 Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $W_e = \{e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione

Il secondo teorema dice che, data una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile e totale, $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

Definisco quindi una funzione che vista come funzione di y abbia le caratteristiche desiderate:

$$g(x, y) = \begin{cases} \log_x y & \text{se } y = x^n \text{ per qualche } n \\ \uparrow & \end{cases} = \mu n. |x^n - y|$$

Essendo g calcolabile, per SMN esiste f calcolabile e totale, tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x, y)$.

Quindi $W_{f(x)} = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per il secondo teorema di ricorsione $\exists e$ tale che $\phi_e = \phi_{f(e)}$.

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

1 Settembre 2016

(con bozza di soluzione)

Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il secondo teorema di ricorsione.

Esercizio 2

Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ 2x - 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: La funzione non è calcolabile, dato che possiamo scrivere

$$\chi_K(x) = sg(f(x) \dot{-} 2x).$$

Se f fosse calcolabile, dedurremmo che anche χ_K lo è, mentre sappiamo che K non è ricorsivo, ovvero χ_K non è calcolabile. \square

Esercizio 3

Sia f una funzione calcolabile totale tale che $img(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$ sia infinito. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x : \exists y \in W_x. x < f(y)\},$$

ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A non è ricorsivo dato che $K \leq_m A$. Infatti, si consideri la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

è calcolabile. Dunque per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, calcolabile totale, tale che $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$, e la funzione s è funzione di riduzione.

Infatti, se $x \in K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = 1$ per ogni y . Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$, e pertanto $f(W_{s(x)}) = f(\mathbb{N}) = img(f)$, che è infinita per ipotesi. Pertanto certamente esiste $z \in f(W_{s(x)})$ tale che $x < z$, ovvero esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \in A$.

Se invece $x \notin K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ per ogni y . Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$, e pertanto, certamente non esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \notin A$.

L'insieme A è r.e., infatti

$$sc_A(x) = \mu w.(H(x, (w)_1, (w)_2) \wedge x < f((w)_1))$$

Pertanto, \bar{A} non r.e.

□

Esercizio 4

Detto $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è totale}\}$, dimostrare che $\bar{K} \leq_m A$.

Soluzione: Si definisce

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che s può essere la funzione di riduzione. □

Esercizio 5

Esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile tale che $dom(f) = K$ e $cod(f) = \mathbb{N}$? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: Si esiste, ad esempio si può considerare $f(x) = \varphi_x(x)$. Chiaramente $dom(f) = K$. Inoltre, per ogni $k \in N$, se si considera un indice e della funzione costante k si ha che $f(e) = \varphi_e(e) = k$. Quindi $cod(f) = \mathbb{N}$.

Alternativamente si può definire

$$f(x) = (\mu t.H(x, x, t)) - 1$$

Chiaramente $dom(f) = K$ poiché $f(x) \downarrow$ sse esiste t tale che $H(x, x, t)$, i.e., sse $x \in K$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{N}$ basta prendere il programma Z_k che consiste di $Z(1)$ ripetuto x volte. Sull'indice corrispondente $y = \gamma(Z_k)$ avremo $f(y) = k-1$, che mostra che $cod(f) = \mathbb{N}$.

□

Nota: Correzione, risultati e visione dei compiti: *Mercoledì 7 Settembre, ore 9:30, 1BC/45*

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

Prova Intermedia - 29 Novembre 2016

Esercizio 1

Dare la definizione dell'insieme \mathcal{PR} delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $p_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $p_2(y) = |y - 2|$.

Soluzione: Per la definizione di \mathcal{PR} si veda il libro. Per la seconda parte, si osserva che se definiamo $p_1(y) = |y - 1|$ allora

$$\begin{cases} p_1(0) = 1 \\ p_1(y + 1) = |y + 1 - 1| = |y| = y \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} p_2(0) = 2 \\ p_2(y + 1) = |y + 1 - 2| = |y - 1| = p_1(y) \end{cases}$$

Quindi p_2 definita per ricorsione primitiva a partire dalle funzioni di base è in \mathcal{PR} . \square

Esercizio 2

Dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $W_{k(n)} = \mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari}\}$ e $E_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}$.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x , con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n, x) = \begin{cases} x/2 + n & \text{se } x \text{ pari} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = qt(2, x) + n + \mu z. rm(2, x)$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto:

- $W_{k(x)} = \{x \mid f(n, x) \downarrow\} = \{x \mid x \text{ pari}\}$
- $E_{k(x)} = \{f(n, x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{n + x/2 \mid x \text{ pari}\} = \{n + x \mid x \geq 0\} = \{y \mid y \geq \mathbb{N}\}$

come desiderato. \square

Esercizio 3

Può esistere una funzione totale, non calcolabile, tale che $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ sia l'insieme Pr dei numeri primi? Motivare la risposta.

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{se } x \in W_x \text{ e } p = \min\{p' \in Pr \mid p' > \varphi_x(x)\} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora la funzione f

- è totale;
- non è calcolabile in quanto per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha che $f(x) \neq \varphi_x(x)$; infatti, se $\varphi_x(x) \downarrow$ si ha che $f(x)$ è un primo maggiore di $\varphi_x(x)$, e se invece $\varphi_x(x) \uparrow$ allora $f(x) = 2$;
- chiaramente $img(f) \subseteq Pr$. Per l'inclusione inversa si consideri un qualunque numero primo $p \in Pr$ e la funzione costante $g(x) = p - 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. La funzione g è calcolabile, quindi $g = \varphi_n$ per un opportuno indice n . Si conclude notando che $f(n) = \min\{p' \in Pr \mid p' > \varphi_n(n)\} = \min\{p' \in Pr \mid p > p - 1\} = \min\{p' \in Pr \mid p' \geq p\} = p$ e quindi $p \in img(f)$.

□

Computabilità e Algoritmi (Computabilità) Prova Intermedia - 20 Novembre 2017

Esercizio 1

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $W_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}$ e $E_{k(n)} = \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ pari}\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x , con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n, x) = \begin{cases} 2 * (x - n) & \text{se } x \geq n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 2 * (x - n) + \mu z. (n - x)$$

Per il teorema smm esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n, x) \downarrow\} = \{x \mid x \geq n\};$
- $E_{k(n)} = \{f(n, x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2(x - n) \mid x \geq n\} = \{2(n + z) - n \mid z \geq 0\} = \{2z \mid z \in \mathbb{N}\}.$

□

Esercizio 2

Si consideri una variante della macchina URM, che comprende le istruzioni di salto, trasferimento e due nuove istruzioni

- $A(m, n)$ che scrive nel registro m la somma dei registri m e n , ovvero $r_m \leftarrow r_m + r_n$;
- $C(n)$ che scrive nel registro n il valore del suo segno, ovvero $r_n \leftarrow sg(r_n)$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme \mathcal{C}' delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme \mathcal{C} delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Indichiamo con URM^* la macchina modificata. Osserviamo che le istruzioni della macchina URM^* sono codificabili nella macchina URM.

L'istruzione $I_j : A(m, n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine: detto q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

```
SUB  : J(n, q, j + 1)
      S(m)
      S(q)
      J(1, 1, SUB)
```

Allo stesso modo, indicando ancora con q l'indice di un registro non utilizzato, un'istruzione $I_j : C(m)$ si può sostituire con un salto alla subroutine

```
SUB  : J(n, q, ZERO)
      Z(n)
      J(1, 1, j + 1)
ZERO  : S(n)
      J(1, 1, j + 1)
```

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k per ogni un programma P che utilizzi entrambi i set di istruzioni si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f_{P'}^{(k)} = f_P^{(k)}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni A e C nel programma. Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni A e C è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h+1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione A o una istruzione C . Supponiamo che sia l'istruzione di indice j e sia una istruzione A .

$$\begin{array}{ll} 1 & : I_1 \\ & \dots \\ j & : A(m, n) \\ & \dots \\ \ell(P) & : I_{\ell(P)} \end{array}$$

Costruiamo un programma P'' , utilizzando un registro non riferito da P , $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

$$\begin{array}{ll} 1 & : I_1 \\ & \dots \\ j & : J(1, 1, SUB) \\ & \dots \\ \ell(P) & : I_{\ell(P)} \\ & \quad J(1, 1, END) \\ SUB & : J(n, q, ZERO) \\ & Z(n) \\ & \quad J(1, 1, j + 1) \\ ZERO & : S(n) \\ & \quad J(1, 1, j + 1) \\ END & : \end{array}$$

Il programma P'' è tale che $f_{P''}^{(k)} = f_P^{(k)}$ e contiene h istruzioni di tipo A o C . Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f_{P'}^{(k)} = f_{P''}^{(k)}$ che quindi è il programma desiderato.

Se l'istruzione I_j è di tipo C si procede in modo completamente analogo, rimpiazzando l'istruzione con la sua codifica e usando l'ipotesi induttiva.

L'inclusione è stretta, ovvero $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{C}^*$. Ad esempio si può facilmente vedere che la funzione successore non è URM* calcolabile. Infatti, si può dimostrare che partendo da una configurazione con i registri tutti a zero, un qualunque programma URM*, dopo un qualunque numero di passi, produrrà una configurazione con i registri ancora tutti a zero. Una prova completamente formale dimostra la tesi suddetta per induzione sul numero di passi. \square

Esercizio 3

Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tale che la sua immagine $\text{cod}(f) = \{y \mid \exists x \in \mathbb{N}. f(x) = y\}$ sia finito? Fornire un esempio o mostrare che una tale funzione non esiste.

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} \overline{s}\overline{g}(\varphi_x(x)) & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{se } x \notin W_x \end{cases}$$

Allora la funzione f

- è totale;
- non è calcolabile in quanto per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha che $f(x) \neq \varphi_x(x)$; infatti, se $\varphi_x(x) \downarrow$ allora $f(x) = \overline{s}\overline{g}(\varphi_x(x)) \neq \varphi_x(x)$, e se invece $\varphi_x(x) \uparrow$ allora $f(x) = 0 \neq \varphi_x(x)$;
- chiaramente $\text{cod}(f) \subseteq \{0, 1\}$.

\square

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

Prova Intermedia - 20 Novembre 2018

Esercizio 1

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $W_{k(n)} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\}$ e $E_{k(n)}$ è l'insieme dei numeri dispari.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x , con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n, x) = \begin{cases} 2z + 1 & \text{se } x = z^n \text{ per qualche } z \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 2 * (\mu z. |x - z^n|) + 1$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n, x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n, x) \downarrow\} = \{x \mid \exists z \in \mathbb{N}. x = z^n\} = \{z^n \mid z \in \mathbb{N}\};$
- $E_{k(n)} = \{f(n, x) \mid x \in W_{k(n)}\} = \{2 \sqrt[n]{z^n} + 1 \mid z \in \mathbb{N}\} = \{2z + 1 \mid z \in \mathbb{N}\}.$

□

Esercizio 2

Si consideri una variante della macchina URM, che comprende le istruzioni di salto, trasferimento e due nuove istruzioni

- $A(m, n)$ che scrive nel registro m la somma dei registri m e n , ovvero $r_m \leftarrow r_m + r_n$;
- $C(n)$ che scrive nel registro n il valore del suo segno negato, ovvero $r_n \leftarrow \overline{sg}(r_n)$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme \mathcal{C}' delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme \mathcal{C} delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Indichiamo con URM^* la macchina modificata. Osserviamo che le istruzioni della macchina URM^* sono codificabili nella macchina URM.

L'istruzione $I_j : A(m, n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine: detto q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

```
SUB  : J(n, q, j + 1)
      S(m)
      S(q)
      J(1, 1, SUB)
```

Allo stesso modo, indicando ancora con q l'indice di un registro non utilizzato, un'istruzione $I_j : C(m)$ si può sostituire con un salto alla subroutine

```
SUB  : J(n, q, ZERO)
      Z(n)
      J(1, 1, j + 1)
ZERO  : S(n)
      J(1, 1, j + 1)
```

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k per ogni un programma P che utilizzi entrambi i set di istruzioni si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f_{P'}^{(k)} = f_P^{(k)}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni A e C nel programma. Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni A e C è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h+1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione A o una istruzione C . Supponiamo che sia l'istruzione di indice j e sia una istruzione A .

$$\begin{array}{ll} 1 & : I_1 \\ & \dots \\ j & : A(m, n) \\ & \dots \\ \ell(P) & : I_{\ell(P)} \end{array}$$

Costruiamo un programma P'' , utilizzando un registro non riferito da P , $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

$$\begin{array}{ll} 1 & : I_1 \\ & \dots \\ j & : J(1, 1, SUB) \\ & \dots \\ \ell(P) & : I_{\ell(P)} \\ & J(1, 1, END) \\ SUB & : J(n, q, ZERO) \\ & Z(n) \\ & J(1, 1, j + 1) \\ ZERO & : S(n) \\ & J(1, 1, j + 1) \\ END & : \end{array}$$

Il programma P'' è tale che $f_{P''}^{(k)} = f_P^{(k)}$ e contiene h istruzioni di tipo A o C . Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f_{P'}^{(k)} = f_{P''}^{(k)}$ che quindi è il programma desiderato.

Se l'istruzione I_j è di tipo C si procede in modo completamente analogo, rimpiazzando l'istruzione con la sua codifica e usando l'ipotesi induttiva.

Per l'inclusione opposta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ si osserva, analogamente, che le istruzioni $Z(n)$ e $S(n)$ sono codificabili nella macchina modificata.

più precisamente, dato un programma P e detti q_1 e q_2 indici di registri non usati dal programma (quindi inizialmente a 0), si considera il programma

$$\begin{array}{l} C(q_1) \quad // \text{ fa in modo che } q_1 \text{ contenga } 1 \\ P' \end{array}$$

dove P' è ottenuto da P sostituendo ogni istruzione $Z(m)$ con $T(q_2, m)$ e ogni istruzione $S(m)$ con $A(m, q_1)$. \square

Esercizio 3

Esistono un indice $e \in \mathbb{N}$ e una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tale che indicati con $dom(f)$ e $cod(f)$ il dominio e codominio di f (ovvero $dom(f) = \{x \mid f(x) \downarrow\}$ e $cod(f) = \{y \mid \exists x. f(x) = y\}$), risulti $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$? Fornire un esempio o dimostrare la non esistenza.

Una funzione f tale che $dom(f) = W_e$ e $cod(f) = E_e$ si può trovare per ogni $e \in \mathbb{N}$?

Soluzione: Per la prima parte, si consideri un indice $e \in \mathbb{N}$ della funzione identità, quindi $W_e = E_e = \mathbb{N}$. Quindi si definisca la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è totale, quindi $\text{dom}(f) = \mathbb{N} = W_e$. Inoltre $\text{dom}(f) = \mathbb{N} = E_e$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $n = 0$ allora, considerato un indice x della funzione sempre indefinita, si ha $f(x) = 0$. Se $n > 0$ allora basta considerare un qualunque indice x della funzione costante $n - 1$ e si ha $f(x) = (n - 1) + 1 = n$.

Per la seconda domanda, la risposta è chiaramente no. Ad esempio, se consideriamo $e \in \mathbb{N}$ tale che φ_e sia la funzione sempre indefinita, ogni f tale che $\text{dom}(f) = W_e = \emptyset$ coincide con φ_e e quindi è calcolabile.

□

Computabilità e Algoritmi

9 Luglio 2019

Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di struttura dei predici semidecidibili, ovvero dimostrare che $P(\vec{y})$ è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile $Q(x, \vec{y})$ tale che $P(\vec{y}) \equiv \exists x.Q(x, \vec{y})$.

Soluzione: Si veda il libro. □

Esercizio 2

Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni altra funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f , se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Non può esistere, altrimenti, dato che la quantificazione per g è universale, la proprietà dovrebbe valere anche per $g = f$. Quindi $f + f = 2f$ calcolabile, quindi f calcolabile. □

Esercizio 3

Sia \mathbb{P} l'insieme dei numeri pari. Dimostrare che indicato con $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = \mathbb{P}\}$, si ha che $\bar{K} \leq_m A$.

Soluzione: Per ottenere la funzione di riduzione si può considerare

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa è calcolabile, dato che può essere scritta come $f(x, y) = 2y \bar{s}g(\chi_H(x, x, y)) + \chi_H(x, x, y)$.

Pertanto, per il teorema smn, esiste $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, che può essere usata come funzione di riduzione per $\bar{K} \leq_m A$. Infatti:

- se $x \in \bar{K}$, allora $\chi_H(x, x, y) = 0$ per ogni y , e pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = 2y$ per ogni y . Quindi $E_{s(x)} = \mathbb{P}$, e pertanto $s(x) \in A$.
- se $x \notin \bar{K}$, ovvero $x \in K$ allora esiste y_0 tale che $\chi_H(x, x, y) = 1$ per ogni $y \geq y_0$. Quindi $\varphi_{s(x)}(y) = 1$ per $y \geq y_0$, dunque $1 \in E_{s(x)}$ e pertanto $E_{s(x)} \neq \mathbb{P}$, quindi $s(x) \notin A$.

□

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = y^2 \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Osserviamo che B è saturato, dato che $B = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \mid f(y) = y^2 \text{ per infiniti } y\}$. Si usa Rice-Shapiro per dedurre che entrambi gli insiemi non sono r.e.

- B non r.e. perché \mathcal{B} contiene y^2 e nessuna sua sottofunzione finita (dato che non contiene nessuna funzione finita).
- \bar{B} non r.e. dato che $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ e \emptyset ammette come estensione $y^2 \notin \bar{\mathcal{B}}$.

□

Esercizio 5

Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che, indicato con e_0 un indice della funzione sempre indefinita \emptyset e con e_1 un indice della funzione identità, la funzione $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definita da

$$h(x) = \begin{cases} e_0 & \text{se } \varphi_x \text{ è totale} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile.

Soluzione: Si osservi che h è totale. Inoltre $\varphi_x \neq \varphi_{h(x)}$ per ogni x , dato che φ_x è totale se $\varphi_{h(x)}$ non lo è. Quindi, per il secondo teorema di ricorsione, si deduce che h non può essere calcolabile. □

Computabilità e Algoritmi (Computabilità)

Prova Intermedia - 18 Novembre 2019

Esercizio 1

Si consideri una variante della macchina URM, nella quale l'istruzione di azzeramento è sostituita dall'istruzione $P(n)$ il cui effetto è quello di sostituire il contenuto del registro n con il suo predecessore, ovvero $r_n \leftarrow r_n - 1$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme \mathcal{C}' delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme \mathcal{C} delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Si ha che $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, dato che le istruzioni di ciascuna macchina sono codificabili nell'altra.

Per provare $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, si mostra che, dato un programma URM' P' e $k \in \mathbb{N}$, si può ottenere un programma URM P che calcola la stessa funzione, ovvero tale che $f_P^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$, come segue. Si osserva che ogni istruzione $P(n)$, detto j il suo numero d'ordine e $m = \max\{\rho(P'), k\} + 1$ il primo registro non usato da P' , può essere sostituita da un salto alla subroutine

```

SUB:   J(n,m,j+1)
      S(m)
LOOP:  J(n,m,END)
      S(m)
      S(m+1)
END    T(m+1,n)
      J(1,1,j+1)
  
```

Più formalmente, si dimostra che dato un qualunque programma P' della macchina URM', si può ottenere un programma equivalente P , ovvero tale che $f_P^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$, che non usa istruzioni $P(n)$, che è quindi un programma URM. La dimostrazione procede per induzione sul numero h di istruzioni $P(n)$ in P' .

- ($h = 0$) In questo caso P' è già il programma desiderato.
- ($h \rightarrow h + 1$) Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h + 1$. Il programma P' contiene certamente almeno una istruzione $P(n)$. Sia j l'indice di una tale istruzione. Quindi P' ha la forma:

1	:	I_1
		...
j		$P(n)$
		...
$\ell(P')$:	$I_{\ell(P')}$

Costruiamo un programma P'' , utilizzando un registro di indice $m = \max\{\rho(P'), k\} + 1$, non riferito da P'

1	:	I_1
		...
j	:	$J(1,1,\text{SUB})$
		...
$\ell(P')$:	$I_{\ell(P')}$
		$J(1,1,\text{END})$
SUB	:	$J(n,m,j+1)$
		$S(m)$
LOOP	:	$J(n,m,\text{RES})$
		$S(m)$
		$S(m+1)$
		$J(1,1,\text{LOOP})$
RES	:	$T(m+1,n)$
		$J(1,1,j+1)$
END	:	

Il programma P'' è tale che $f_{P''}^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$ e contiene h istruzioni di tipo $P(n)$. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P tale che $f_P^{(k)} = f_{P''}^{(k)}$ che quindi è il programma desiderato.

Per l'inclusione opposta $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, si procede in modo analogo, osservando che l'istruzione $Z(n)$ si può codificare nella macchina URM' come segue, dove m è, come sopra, l'indice di un registro oltre l'area utilizzata dal programma (e quindi a 0)

```
SUB:  J(n,m,j+1)
      P(n)
      J(1,1,SUB)
```

Ancora più semplicemente, si può osservare che ogni istruzione $Z(n)$ è sostituibile da una istruzione $T(m,n)$. \square

Esercizio 2

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $\varphi_{k(n)}$ è totale e $E_{k(n)}$ è l'insieme dei divisori interi di n .

Soluzione: Per l'enunciato del teorema smn, si rimanda al libro.

Per la seconda parte, si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n,x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x , con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è un divisore di } n \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} = n * \overline{sg}(rm(x,n)) + sg(rm(x,n))$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n,x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \mathbb{N}$;
- $E_{k(n)} = \{x \mid rm(x,n) = 0\} \cup \{1\}$,
che è l'insieme dei divisori di n , dato che 1 è sempre un divisore di n .

\square

Esercizio 3

Definire una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \subseteq \{0,1\}$.

La funzione $\overline{sg} \circ f$ può essere calcolabile? Motivare la risposta.

Soluzione: Per la prima parte, si definisca $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ per diagonalizzazione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \overline{sg}(\varphi_x(x)) & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è totale e non calcolabile dato che, per definizione, $f(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Per la seconda domanda, la risposta è chiaramente no. Per questo basta osservare che $f = \overline{sg} \circ (\overline{sg} \circ f)$, quindi se $\overline{sg} \circ f$ fosse calcolabile, lo sarebbe anche f per composizione. \square

Computabilità

23 Novembre 2020 - prova intermedia

Esercizio 1

Si consideri una variante URM^P della macchina URM nella quale l'istruzione di azzeraamento $Z(n)$ è sostituita dell'istruzione di predecessore $P(n)$ che decrementa il contenuto del registro n , ovvero $r_n \leftarrow r_n - 1$. Indicato con \mathcal{C}^P l'insieme delle funzioni calcolabili dalla macchina URM^P , stabilire la relazione tra \mathcal{C}^P e l'insieme delle funzioni URM-calcolabili \mathcal{C} . Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Dato che l'istruzione $P(n)$ è codificabile nella macchina URM, chiaramente $\mathcal{C}^P \subseteq \mathcal{C}$. Più precisamente l'istruzione $I_j : P(n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine. Si indichi con q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

$$\begin{aligned}
SUB &: J(n, q, RIS) \\
&\quad S(q+1) \\
LOOP &: J(n, q+1, RIS) \\
&\quad S(q) \\
&\quad S(q+1) \\
&\quad J(1, 1, LOOP) \\
RIS &: T(q, n) \\
&\quad J(1, 1, j+1)
\end{aligned}$$

La routine controlla se il registro n contiene 0. In caso affermativo non c'è niente da fare. Altrimenti, con R_q che parte da 0 e R_{q+1} da 1, continua ad incrementare i due registri. Quando R_{q+1} eguaglia R_n , avremo che R_q contiene il predecessore.

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^P \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k per ogni programma URM^P P si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f_{P'}^{(k)} = f_P^{(k)}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni P nel programma P . Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni, è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h + 1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione P . Supponiamo che sia l'istruzione di indice j .

$$\begin{aligned}
1 &: I_1 \\
&\dots \\
j &: P(n) \\
&\dots \\
\ell(P) &: I_{\ell(P)}
\end{aligned}$$

Costruiamo un programma P'' , utilizzando un registro non riferito da P , $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

1	:	I_1
		\dots
j	:	$J(1, 1, SUB)$
		\dots
$\ell(P)$:	$I_{\ell(P)}$
		$J(1, 1, END)$
SUB	:	$J(n, q, RIS)$
		$S(q + 1)$
$LOOP$:	$J(n, q + 1, RIS)$
		$S(q)$
		$S(q + 1)$
		$J(1, 1, LOOP)$
RIS	:	$T(q, n)$
		$J(1, 1, j + 1)$
END	:	

Il programma P'' è un programma URM ^{p} tale che $f_{P''}^{(k)} = f_P^{(k)}$ e contiene h istruzioni di tipo P . Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f_{P'}^{(k)} = f_{P''}^{(k)}$ che quindi è il programma desiderato.

Vale anche l'inclusione opposta e quindi l'uguaglianza. Infatti l'istruzione $Z(n)$ può essere sostituita semplicemente da un'istruzione $T(q, n)$, dove q è un qualunque registro non usato dal programma e quindi a 0. Più precisamente, dato un programma URM P e un numero di argomenti fissato $k \in \mathbb{N}$, detto $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$ l'indice del primo registro non usato e quindi inizialmente a 0, sostituendo in P ogni istruzione $Z(n)$ con l'istruzione $T(q, n)$, è un programma URM ^{p} che calcola esattamente la stessa funzione.

Esercizio 2

Definire una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $img(f) = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (dove $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$).

Soluzione: Si procede per diagonalizzazione definendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\varphi_x(x)} & \text{se } x \in W_x \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è chiaramente totale. Inoltre

- f non calcolabile dato che per ogni $x \in \mathbb{N}$ risulta $f \neq \varphi_x$, ovvero f è diversa da tutte le funzioni calcolabili. Infatti, se $x \in W_x$ allora $f(x) = 2^{\varphi_x(x)} > \varphi_x(x)$, e mentre se $x \notin W_x$ si ha $f(x) = 1 \neq \varphi_x(x)$, dato che $\varphi_x(x) \uparrow$.
- Vale $img(f) = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione $img(f) \subseteq \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dato che se $x \in W_x$ allora $f(x) = 2^{\varphi_x(x)}$ e se $x \notin W_x$ allora $f(x) = 1 = 2^0$. Vale anche l'inclusione

inversa. Infatti, dato un qualunque $n \in \mathbb{N}$, la funzione costante n è chiaramente calcolabile. Indicato con x un qualunque indice per tale funzione, ovvero $\varphi_x(y) = n$ per ogni y , dato che $x \in W_x = \mathbb{N}$, vale $f(x) = 2^{\varphi_x(x)} = 2^n$.

Esercizio 3

Enunciare il teorema smn ed utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione totale calcolabile $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$ valga $|W_x| = 2^x$ e $|E_x| = x + 1$.

Soluzione: Si definisce una funzione $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ come segue:

$$g(x, y) = \begin{cases} \lfloor \log_2(y + 1) \rfloor & \text{se } y < 2^x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione g è calcolabile. Infatti, $g(x, y)$, quando definito, è il massimo z tale che $2^z \leq y + 1$ e quindi il minimo tale che $2^{z+1} > y + 1$, ovvero

$$g(x, y) = \mu z. \overline{s}g(2^{z+1} \dotminus (y + 1)) + \mu w. (y + 1 \dotminus 2^x)$$

Pertanto per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ risulta

$$g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$$

e si dimostra che s che è la funzione cercata. Infatti

- $W_x = \{y \mid g(x, y) \downarrow\} = [0, 2^x - 1]$ e quindi $|W_x| = |[0, 2^x - 1]| = 2^x$
- $E_x = \{g(x, y) \mid 0 \leq y < 2^x\} = \{\lfloor \log_2(y + 1) \rfloor \mid 0 \leq y < 2^x\} = [0, x]$ e quindi $|E_x| = |[0, x]| = x$.

Computabilità

25 gennaio 2021

Esercizio 1

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. È vero che se A è r.e. allora anche $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$ è r.e.? E se l'insieme A è ricorsivo possiamo concludere che $f^{-1}(A)$ è ricorsivo? Motivare le risposte con prove o controesempi.

Soluzione: Per la prima parte, se A è r.e. allora anche $f^{-1}(A)$ lo è. Infatti, per definizione vale $x \in f^{-1}(A)$ se e solo se $f(x) \downarrow$ e $f(x) \in A$ ovvero se e solo se $sc_A(f(x)) = 1$, dove sc_A è la funzione semi-caratteristica di A , calcolabile in quanto A r.e.. Quindi possiamo scrivere la funzione semi-caratteristica di $f^{-1}(A)$ come $sc_{f^{-1}(A)}(x) = sc_A(f(x))$, calcolabile in quanto composizione di funzioni calcolabili. Quindi $f^{-1}(A)$ è r.e.

Lo stesso risultato non vale per la ricorsività. Ad esempio, la funzione semicaratteristica di K , ovvero sc_k è calcolabile, ma $sc_k^{-1}(\mathbb{N}) = \{x \mid sc_K(x) \in \mathbb{N}\} = \{x \mid sc_K(x) \downarrow\} = K$ non ricorsivo, nonostante \mathbb{N} sia ricorsivo.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x = \overline{E_x}\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid \text{dom}(f) \setminus \text{cod}(f) \text{ finito}\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e \bar{A} sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{se } x = 0 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si nota che $f \in \mathcal{A}$, dato che $\text{dom}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \overline{\text{cod}(f)} = \overline{\{0\}}$. Inoltre nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq f$ può essere in $\bar{\mathcal{A}}$, dato che se θ è finita, $\text{dom}(\theta)$ e $\text{cod}(\theta)$ sono finiti, e quindi non possono essere l'uno il complementare dell'altro, poiché il complementare di un insieme finito è infinito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- \bar{A} non r.e.

Infatti $f \notin \bar{\mathcal{A}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \subseteq f$ e $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$, dato che $\text{dom}(f) = \emptyset \neq \overline{\text{cod}(f)} = \overline{\emptyset}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che \bar{A} non è r.e.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \setminus E_x \text{ finito}\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid \text{dom}(f) = \overline{\text{cod}(f)}\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e \bar{A} sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.

Indicato con $\mathbf{1}$ la costante 1, vale che $\mathbf{1} \notin \mathcal{A}$, dato che $\text{dom}(\mathbf{1}) \setminus \text{cod}(\mathbf{1}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ è infinito. Inoltre la funzione sempre indefinita $\emptyset \subseteq \mathbf{1}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$, dato che $\text{dom}(\emptyset) \setminus \text{cod}(\emptyset) = \emptyset$ finito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- \bar{A} non r.e.

Si osserva che $\mathbf{1} \in \bar{\mathcal{A}}$, ma nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq \mathbf{1}$ può essere in $\bar{\mathcal{A}}$, dato che se θ è finita, $\text{dom}(\theta)$ e $\text{cod}(\theta)$ sono finiti, e quindi anche $\text{dom}(\theta) \setminus \text{cod}(\theta)$ è finito. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che \bar{A} non è r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y. (x \leq y \leq 2x \wedge y \in W_x)\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leq_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = 1$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x)$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B . Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto esiste certamente y , con $s(x) \leq y \leq 2s(x)$ tale che $y \in W_{s(x)}$, ad esempio $y = s(x)$. Quindi $s(x) \in B$.
- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto non può esistere y , con $s(x) \leq y \leq 2s(x)$ tale che $y \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x, (w)_1, (w)_2) \wedge (x \leq (w)_1 \leq 2x)),$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare \bar{B} non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi \bar{B} non è neppure ricorsivo.

Computabilità

9 febbraio 2021

Esercizio 1

Può esistere una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che la funzione $g(x) = \Pi_{y < x} f(y)$ sia calcolabile? Motivare le risposta fornendo un esempio di tale funzione oppure dimostrando che non esiste.

Soluzione: Si consideri la funzione caratteristica di K , ovvero $\chi_K : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è totale e non calcolabile. Sia $x_0 = \min\{x \mid \chi_K(x) = 0\} = \min\{x \mid x \in \bar{K}\}$. Si osservi che x_0 è ben definito, dato che $\bar{K} \neq \emptyset$.

A questo punto se $g(x) = \Pi_{y < x} f(y)$ è facile vedere che g è calcolabile, dato che

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < x_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = sg(x_0 \dot{-} x)$$

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x \cap E_x| = 2\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid |\text{dom}(f) \cap \text{cod}(f)| = 2\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e \bar{A} sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.

Indicato con id la funzione identità, vale che $id \notin \mathcal{A}$, dato che $\text{dom}(id) \cap \text{cod}(id) = \mathbb{N}$ non ha cardinalità 2. Inoltre la funzione

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è finita, $\theta \subseteq id$ e inoltre $\text{dom}(\theta) = \text{cod}(\theta) = \{0, 1\}$ quindi $|\text{dom}(\theta) \cap \text{cod}(\theta)| = |\{0, 1\}| = 2$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- \bar{A} non r.e.

Si osserva che, se θ è la funzione del punto precedente, $\theta \notin \bar{\mathcal{A}}$, e la funzione sempre indefinita \emptyset soddisfa $\emptyset \subseteq \theta$ e $|\text{dom}(\emptyset) \cap \text{cod}(\emptyset)| = |\emptyset| = 0$, quindi $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che \bar{A} non è r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists x \in E_x\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leq_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = y$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x) \cdot y$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B . Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $E_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto certamente $\exists * s(x) \in E_{s(x)}$. Quindi $s(x) \in B$.
- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $E_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto certamente $\exists * s(x) \notin E_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(S(x, (w)_1, 3x, (w)_2))),$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare \bar{B} non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi \bar{B} non è neppure ricorsivo.

Computabilità

9 febbraio 2021

Esercizio 1

Può esistere una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che la funzione $g(x) = \Pi_{y < x} f(y)$ sia calcolabile? Motivare le risposte fornendo un esempio di tale funzione oppure dimostrando che non esiste.

Soluzione: Si consideri la funzione caratteristica di K , ovvero $\chi_K : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è totale e non calcolabile. Sia $x_0 = \min\{x \mid \chi_K(x) = 0\} = \min\{x \mid x \in \bar{K}\}$. Si osservi che x_0 è ben definito, dato che $\bar{K} \neq \emptyset$.

A questo punto se $g(x) = \Pi_{y < x} f(y)$ è facile vedere che g è calcolabile, dato che

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < x_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = sg(x_0 \dot{-} x)$$

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x \cap E_x| = 2\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid |\text{dom}(f) \cap \text{cod}(f)| = 2\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A e \bar{A} sono non r.e., e quindi non sono neppure ricorsivi. In dettaglio:

- A non r.e.

Indicato con id la funzione identità, vale che $id \notin \mathcal{A}$, dato che $\text{dom}(id) \cap \text{cod}(id) = \mathbb{N}$ non ha cardinalità 2. Inoltre la funzione

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è finita, $\theta \subseteq id$ e inoltre $\text{dom}(\theta) = \text{cod}(\theta) = \{0, 1\}$ quindi $|\text{dom}(\theta) \cap \text{cod}(\theta)| = |\{0, 1\}| = 2$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che A non è r.e.

- \bar{A} non r.e.

Si osserva che, se θ è la funzione del punto precedente, $\theta \notin \bar{\mathcal{A}}$, e la funzione sempre indefinita \emptyset soddisfa $\emptyset \subseteq \theta$ e $|\text{dom}(\emptyset) \cap \text{cod}(\emptyset)| = |\emptyset| = 0$, quindi $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$. Quindi per Rice-Shapiro si conclude che \bar{A} non è r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists x \in E_x\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leq_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = y$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x) \cdot y$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B . Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $E_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto certamente $\exists * s(x) \in E_{s(x)}$. Quindi $s(x) \in B$.
- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $E_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto certamente $\exists * s(x) \notin E_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(S(x, (w)_1, 3x, (w)_2))),$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare \bar{B} non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi \bar{B} non è neppure ricorsivo.

Computabilità

30 giugno 2021

Esercizio 1

Può esistere una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che la funzione $g(x) = \sum_{y < x} f(y)$ sia calcolabile? Motivare le risposta fornendo un esempio di tale funzione oppure dimostrando che non esiste.

Soluzione: Non può esistere. Infatti, si supponga che $g(x) = \sum_{y < x} f(y)$ sia calcolabile. Allora possiamo esprimere f come $f(x) = g(x+1) - g(x)$, e pertanto f è calcolabile in quanto composizione di funzioni calcolabili.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P} \cap W_x = \emptyset\}$, dove \mathbb{P} è l'insieme dei numeri pari, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid |dom(f) \cap \mathbb{P}| = \emptyset\}$.

Indicato con id la funzione identità, vale che $id \notin \mathcal{A}$, dato che $dom(id) \cap \mathbb{P} = \mathbb{P} \neq \emptyset$. Inoltre la funzione sempre indefinita, $\theta = \emptyset$ chiaramente soddisfa $dom(\theta) \cap \mathbb{P} = \emptyset \cap \mathbb{P} = \emptyset$, quindi $\theta \in \mathcal{A}$.

Quindi, dato che A è non banale e saturato, per il teorema di Rice si conclude che A e \bar{A} non sono ricorsivi.

Inoltre \bar{A} è r.e. Infatti, si ha che $x \in \bar{A}$ sse esiste y pari tale che $y \in W_x$. Dunque la funzione semicaratteristica di A si può scrivere come:

$$sc_A(x) = \mu w.H(x, 2 * (w)_1, (w)_2)$$

Dunque \bar{A} r.e., e non ricorsivo, quindi A non r.e. (altrimenti sarebbe ricorsivo).

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y, z \in W_x. x = y * z\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leq_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = 1$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x)$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B . Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto $s(x) = s(x) * 1$, con $s(x), 1 \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \in B$.
- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto certamente non possono esistere y, z tali che $s(x) = y * z$ e $y, z \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x, (w)_1, (w)_3) \wedge H(x, (w)_2, (w)_3) \wedge x = (w)_2 * (w)_3)$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare \bar{B} non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi \bar{B} non è neppure ricorsivo.

Computabilità

16 luglio 2021

Esercizio 1

Enunciare il teorema smn. Utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ vale $|W_{s(x,y)}| = x * y$.

Soluzione: Si definisca la funzione $f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ come segue:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < x * y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione è calcolabile dato che $f(x, y, z) = \mu w. z + 1 \doteq x * y$ e quindi, per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$. Pertanto $|W_{s(x,y)}| = |\{z \mid z < x * y\}| = x * y$ come desiderato.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid E_x \subseteq W_x \cup \{0\}\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che l'insieme A è saturato, dato che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid \text{cod}(f) \subseteq \text{dom}(f) \cup \{0\}\}$.

Concludiamo che A e \bar{A} sono non r.e. per Rice-Shapiro.

- Si consideri la funzione $f = sc_{\overline{\{0,1\}}}$, calcolabile in quanto $\{0, 1\}$ è finito e quindi ricorsivo, pertanto lo è anche $\overline{\{0, 1\}}$ che quindi è anche r.e.

Vale che $f \notin \mathcal{A}$, dato che $\text{cod}(f) = \{1\} \not\subseteq \text{dom}(f) \cup \{0\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Inoltre, la funzione sempre indefinita, $\theta = \emptyset$, è tale che $\theta \subseteq f$ e $\text{cod}(\theta) = \emptyset \subseteq \text{dom}(\theta) \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$, quindi $\theta \in \mathcal{A}$. Pertanto, per Rice-Shapiro, A non r.e.

- La funzione $\overline{sg}(x) = 1$ se $x = 0$ e $\overline{sg}(x) = 0$, altrimenti, è tale che $\text{cod}(\overline{sg}) = \{0, 1\} \subseteq \text{dom}(\overline{sg}) \cup \{0\} = \mathbb{N}$, quindi $\overline{sg} \notin \overline{\mathcal{A}}$. Se si considera $\theta(x) = 1$ se $x = 0$ e $\theta(x) \uparrow$ altrimenti, vale $\theta \subseteq \overline{sg}$ e $\text{cod}(\theta) = \{1\} \not\subseteq \text{dom}(\theta) \cup \{0\} = \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$, quindi $\theta \in \overline{\mathcal{A}}$. Pertanto, per Rice-Shapiro, \bar{A} non r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \in W_x\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B non è ricorsivo dato che $K \leq_m B$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = 1$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti. Tale funzione è calcolabile, dato che $g(x, y) = sc_k(x)$. Quindi per il teorema smn, esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Si vede dunque che s è funzione di riduzione di K a B . Infatti

- Se $x \in K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e pertanto $s(x) + 1 \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \in B$.
- Se $x \notin K$ allora $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$ e pertanto certamente non può essere $s(x) + 1 \in W_{s(x)}$. Quindi $s(x) \notin B$.

L'insieme B è r.e., infatti la sua funzione semi-caratteristica

$$sc_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x + 1 \in W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbf{1}(\varphi_x(x)) = \mathbf{1}(\Psi_U(x, x + 1))$$

è calcolabile.

Dato che B è r.e., ma non ricorsivo, il suo complementare \bar{B} non r.e. (altrimenti entrambi sarebbero ricorsivi), e quindi \bar{B} non è neppure ricorsivo.

Computabilità

7 settembre 2021

Esercizio 1

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Definire la nozione di riducibilità $A \leq_m B$. Si dimostri che $A \subseteq \mathbb{N}$ è r.e. se e solo se $A \leq_m K$.

Soluzione: Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Si scrive $A \leq_m B$ se esiste $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$, $x \in A$ sse $f(x) \in B$.

L'insieme K è noto essere r.e. Quindi se $A \leq_m K$, per riduzione anche A è r.e. Esplicitamente, si può scrivere la funzione caratteristica di A come $sc_A = sc_K \circ f$. Quindi risulta calcolabile per composizione.

Viceversa, se A r.e., per definizione la funzione semi-caratteristica sc_A è calcolabile. Si consideri dunque la funzione $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $g(x, y) = sc_A(x)$. Questa è chiaramente calcolabile e quindi per il teorema smn, esiste $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = sc_A(x)$$

È facile vedere che s è funzione di riduzione per $A \leq_m K$. Infatti,

- se $x \in A$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = sc_A(x) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x) \in W_{s(x)} = \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \in K$.
- se $x \notin A$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = sc_A(x) = \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x) \notin W_{s(x)} = \emptyset$. Pertanto $s(x) \notin K$.

Esercizio 2

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x + 1 \in E_x\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A non è ricorsivo dato che $K \leq_m A$. Per mostrarlo si può considerare la funzione $g(x, y) = y$ se $x \in K$ e indefinita altrimenti, ovvero $g(x, y) = y * sc_K(x)$. Questa è chiaramente calcolabile e quindi per il teorema smn, esiste $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

È facile vedere che s è funzione di riduzione per $K \leq_m A$. Infatti,

- se $x \in K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x) + 1 \in E_{s(x)} = \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \in A$.

- se $x \notin K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi certamente $s(x) + 1 \notin E_{s(x)} = \emptyset$. Pertanto $s(x) \notin A$.

L'insieme A è r.e., infatti

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.S(x, (w)_1, x + 1, (w)_2))$$

quindi \bar{A} non r.e.

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cup E_x = \mathbb{N}\}$, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che B è saturato, dato che $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \mid \text{dom}(f) \cup \text{cod}(f) = \mathbb{N}\}$.

Quindi per Rice-Shapiro si conclude

- B non r.e.. Infatti $id \in \mathcal{B}$, visto che $\text{dom}(id) \cup \text{cod}(id) = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Inoltre, nessuna funzione finita $\theta \subseteq id$ può appartenere a \mathcal{B} , dato che $\text{dom}(\theta) \cup \text{cod}(\theta)$, unione di insiemi finiti, è finito e quindi certamente diverso da \mathbb{N} , qualunque sia θ . Pertanto, per Rice-Shapiro si conclude che B non è r.e.
- \bar{B} non r.e., dato che, come visto sopra, $id \notin \bar{\mathcal{B}}$, ma $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ e $\emptyset \subseteq id$ è una parte finita di id . Pertanto, per Rice-Shapiro si conclude che \bar{B} non è r.e.

Computability

Jan 19 2022

Exercise 1

- a. Provide the definition of reducibility, i.e., given sets $A, B \subseteq \mathbb{N}$ define what it means that $A \leq_m B$.
- b. Show that if A is not recursive and $A \leq_m B$ then B is not recursive.
- c. Show that if A is recursive then $A \leq_m \{1\}$.

Solution:

1. Given sets $A, B \subseteq \mathbb{N}$, we say that $A \leq_m B$ if there exists a total computable function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that for all $x \in \mathbb{N}$, it holds $x \in A$ iff $f(x) \in B$.
2. If A is not recursive and $A \leq_m B$ then B is not recursive. In fact, let $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be the reduction function. The characteristic function of A can be written as $\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$. If B were recursive, i.e., χ_B computable, then $\chi_A = \chi_B \circ f$ would be computable, i.e., A would be recursive. Hence B is not recursive.
3. Let χ_A be the characteristic function of A , i.e.,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

If A is recursive, by definition such function is computable and it is total. It is immediate to see that it is a reduction function for $A \leq_m \{1\}$ since $x \in A$ iff $\chi_A(x) = 1$ iff $\chi_A(x) \in \{1\}$.

Exercise 2

Is there a non-computable total function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $f(x) = f(x+1)$ on infinitely many inputs x , i.e., such that the set $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = f(x+1)\}$ is infinite? Provide an example or show that such a function cannot exist.

Solution: Yes, such a function exists. For instance one can define $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is not a multiple of 3 or } x \notin W_x \\ \varphi_{x/3}(x) + 1 & \text{if } x \text{ is a multiple of 3 and } x \in W_x \end{cases}$$

Observe that

- The function f is total by construction.
- For all n , if we let $x = 3n + 1$, since neither x nor $x + 1$ are multiple of 3, $f(x) = f(x + 1) = 0$.
- The function is not computable, since for all $x \in \mathbb{N}$, $f \neq \varphi_x$. In fact if $\varphi_x(3x) \downarrow$ then $f(3x) = \varphi_x(3x) + 1 \neq \varphi_x(3x)$. If instead, $\varphi_x(3x) \uparrow$ then $f(3x) = 0 \neq \varphi_x(3x)$.

A more elegant, but less immediate solution is to take $f = \chi_K$, the characteristic function of the halting set K , which is total and not computable. It is true but not obvious that $\chi_k(x) = \chi_K(x + 1)$ for infinitely many x . Assume by contradiction that, instead, $D = \{x \mid \chi_K(x) = \chi_k(x + 1)\}$ is finite and let $d = \max D$. This means that for all $x > d$ it holds that $\chi_K(x) \neq \chi_K(x + 1)$ and since χ_K can assume only values 0 and 1, $\chi_K(x + 1) = \overline{sg}(\chi_K(x))$.

Now, let $v_x = \chi_K(x)$ for $x \in \{0, \dots, d\}$. Moreover, consider the function $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ defined by primitive recursion

$$\begin{aligned} g(0) &= v_d \\ g(y + 1) &= \overline{sg}(g(y)) \end{aligned}$$

Then we have that

$$\chi_k(x) = \begin{cases} v_x & \text{if } x \leq d \\ f(x - (d + 1)) & \text{otherwise} \end{cases} = \prod_{i=1}^k (v_i \cdot sg(|x - i|) + sg(x - d)f(x - (d + 1)))$$

Exercise 3

Say that a function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is quasi-total if it is undefined on a finite number of inputs, i.e., $\overline{\text{dom}(f)}$ is finite. Classify the set $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ quasi-total}\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether A and \bar{A} are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that A is saturated, since it can be expressed as $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid f \text{ quasi-total}\}$.

Hence, by Rice-Shapiro's theorem, we conclude that A and \bar{A} are not r.e., and thus they are not recursive. More in detail:

- A is not r.e.

The identity $\text{id} \in \mathcal{A}$ and for all $\theta \subseteq \text{id}$, θ finite, clearly $\theta \notin \mathcal{A}$. In fact, $\text{dom}(\theta)$ is finite and thus $\overline{\text{dom}(\theta)}$ is infinite and thus θ is not quasi-total. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that A is not r.e.

- \bar{A} is not r.e.

In fact, $id \notin \bar{A}$, but the always undefined function $\theta = \emptyset \subseteq id$ and $\theta \in \bar{A}$, since $dom(\theta) = \emptyset$ and thus $\overline{dom(\theta)} = \mathbb{N}$ is infinite. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that \bar{A} is not r.e.

Exercise 4

Classify the set $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > 2x. y \in E_x\}$ from the point of view of recursiveness, i.e., establish whether B and \bar{B} are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set B is not recursive since $K \leq_m B$. In order to prove this fact, let us consider the function $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ defined, by

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

The function is computable since $g(x, y) = sc_k(x)$. Hence, by smn-theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. We next argue that s is a reduction function for $K \leq_m B$. In fact

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence, if we set $y = 2s(x) + 1 > 2s(x)$ we have $\varphi_{s(x)}(y) = y = 2s(x) + 1$. Hence $2s(x) + 1 \in E_{s(x)}$ and thus $s(x) \in B$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = \uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $E_{s(x)} = \emptyset$ and therefore there cannot be $y > 2x$ such that $y \in E_{s(x)}$. Hence $s(x) \notin B$.

The set B is r.e., in fact its semi-characteristic function is

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(S(x, (w)_1, x + 1 + (w)_2, (w)_3)),$$

In fact the minimalisation search for a input $(w)_1$ for the machine x , such that in some number $(w)_3$ of steps, the machine stops providing as an output $x + 1 + (w)_2$ for some $(w)_2$. When $(w)_2$ ranges over the naturals, $x + 1 + (w)_2$ ranges over all values greater than x .

The semi-characteristic function is computable, since it is the minimalisation of computable functions, hence B is r.e.

Since B is r.e. and not recursive, its complement \bar{B} is not r.e. (otherwise both B and \bar{B} would be recursive). Thus \bar{B} is not recursive.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability

June 17, 2022

Exercise 1

- a. Provide the definition of a decidable predicate.
- b. Provide the definition of a semi-decidable predicate.
- c. Show that $P(\vec{x})$ is semi-decidable if and only if there exists a decidable predicate $Q(\vec{x}, y)$ such that $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$.

Solution:

1. A predicated $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_P : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A predicated $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_P : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ defined by

$$sc_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Assume that $P(\vec{x})$ is semi-decidable. Then $\chi_P(\vec{x})$ is computable. Let $e \in \mathbb{N}$ be an index for such function, i.e., $\chi_P = \varphi_e^{(k)}$. Then we have that $P(\vec{x})$ holds iff $sc_P(\vec{x}) = 1$ iff $sc_P(\vec{x}) \downarrow$ iff $\exists y. H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$. Hence, if we let $Q(\vec{x}, y) = H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$, we have

$$P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$$

and $Q(\vec{x}, y)$ is decidable, since $H^{(k)}(e, \vec{x}, y)$ is so.

Assume now that $P(\vec{x}) \equiv \exists y. Q(\vec{x}, y)$ with $Q(\vec{x}, y)$ decidable. Let $\chi_Q : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ be its computable characteristic function.

Then $sc_A(\vec{x}) = \mu y. |\chi_Q(\vec{x}, y) - 1|$ is computable, i.e., $P(\vec{x})$ is semi-decidable.

$$1 \dot{-} sc_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable. Let $e_1, e_0 \in \mathbb{N}$ be such that $\varphi_{e_1} = sc_A$ and $\varphi_{e_0} = 1 \dot{-} sc_{\bar{A}}$. Then $\chi_A(x) = (\mu w.S(e_0, x, (w)_1, (w)_2) \vee S(e_1, x, (w)_1, (w)_2))_1$. This is computable and thus A is recursive.

Exercise 2

Define the class of primitive recursive functions. Using only the definition show that the function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ defined below is primitive recursive

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is even} \\ 0 & \text{if } x \text{ is odd} \end{cases}$$

Solution: The class of primitive recursive functions is the least class of functions $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_k (\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N})$ containing the base functions (zero, successor, projections) and closed under composition and primitive recursion.

In order to show that f is primitive recursive observe that it can be defined as

$$\begin{cases} f(0) & = 1 = \text{succ}(0) \\ f(y+1) & = \overline{sg}(y) \end{cases}$$

where \overline{sg} is the complemented sign, which can be defined as

$$\begin{cases} \overline{sg}(0) & = 1 = \text{succ}(0) \\ \overline{sg}(y+1) & = 0 \end{cases}$$

Exercise 3

Study the recursiveness of the set $A = \{x \mid \varphi_x(y+x) \downarrow \text{ for some } y \geq 0\}$, i.e., establish if A and \bar{A} are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set $A = \{x \mid \varphi_x(y+x) \downarrow \text{ for some } y \geq 0\}$ is not recursive because $K \leq A$. In order to prove this fact, let us consider the function $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ defined, by

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

The function is computable since $g(x, y) = sc_K(x)$. Hence, by the smn-theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. We next argue that s is a reduction function for $K \leq_m A$. In fact

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = 1$ for all $y \in \mathbb{N}$. In particular, $\varphi_{s(x)}(0 + s(x)) \downarrow$. Hence $s(x) \in A$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $\varphi_{s(x)}(y + s(x)) \uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $s(x) \notin A$.

The set A is r.e., since it semi-characteristic function

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu(y, t).H(x, x + y, t))$$

is computable.

Therefore, \bar{A} is not r.e.

Exercise 4

Let $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$. Study the recursiveness of A , i.e., establish if A and \bar{A} are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set A is saturated, since $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : \text{dom}(f) \cap \text{cod}(f) \neq \emptyset\}$. It is not empty (since $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$) and it is not the entire \mathbb{N} (since $\emptyset \notin \mathcal{A}$), thus by Rice's theorem A is not recursive. Furthermore, A is r.e. since

$$\begin{aligned} sc_A(x) &= \mathbf{1}(\mu(y, z, t).H(x, y, t) \wedge S(x, z, y, t)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.H(x, (w)_1, (w)_3) \wedge S(x, (w)_2, (w)_1, (w)_3)) \end{aligned}$$

Therefore \bar{A} is not r.e.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability

February 1, 2023

Exercise 1

- a. Provide the definition of decidable predicate.
- b. Provide the definition of semi-decidable predicate.
- c. Show that if predicate $Q(\vec{x}, y) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ is semi-decidable then also $P(\vec{x}) = \exists y.Q(\vec{x}, y)$ is semi-decidable (do not assume structure and projection theorems). Does the converse hold, i.e., is it the case that if $P(\vec{x}) = \exists y.Q(\vec{x}, y)$ is semi-decidable then $Q(\vec{x}, y)$ is semi-decidable? Provide a proof or a counterexample.

Solution:

1. A predicate $Q(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is decidable if the characteristic function $\chi_Q : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ defined by

$$\chi_Q(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } Q(\vec{x}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

2. A predicate $Q(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ is semi-decidable if the semi-characteristic function $sc_Q : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ defined by

$$sc_Q(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } Q(\vec{x}) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

is computable.

3. Let $Q(\vec{x}, y) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ be semi-decidable. Then the semi-characteristic function $sc_Q : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ is computable. Let $e \in \mathbb{N}$ be such that $sc_Q = \varphi_e^{(k+1)}$.

Then $Q(\vec{x}, y)$ holds iff $\varphi_e^{(k+1)}(\vec{x}, y) = 1$ iff $\varphi_e^{(k+1)}(\vec{x}, y) \downarrow$ iff $\exists t.H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, y), t)$.

Therefore $Q(\vec{x}, y) \equiv \exists t.H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, y), t)$ and thus

$$P(\vec{x}) \equiv \exists y.Q(\vec{x}, y) \equiv \exists y.\exists t.H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, y), t) \equiv \exists w.H^{(k+1)}(e, (\vec{x}, (w)_1), (w)_2)$$

Therefore $sc_P(\vec{x}) = \mathbf{1}(\mu w. |\chi_{H^{(k+1)}}(e, (\vec{x}, (w)_1)), (w)_2) - 1|)$ is computable, and thus $P(\vec{x})$ is semi-decidable.

The converse implication does not hold. For instance, consider the predicate $Q(x, y) \equiv \text{"}\phi_y(x) \uparrow\text{"}$. Then $P(x) \equiv \exists y.Q(x, y) \equiv \exists y.\phi_y(x) \uparrow$ is always true, hence decidable. In fact, if e_0 is an index for the always undefined function, for $y = e_0$ clearly $Q(x, y)$ for every $x \in \mathbb{N}$. Instead $Q(x, y) = \phi_y(x) \uparrow$ is not semi-decidable (it is negation of the halting predicate, which is semi-decidable but not decidable).

Exercise 2

Give the definition of the class \mathcal{PR} of primitive recursive functions. Show that the following functions are in \mathcal{PR}

1. $isqrt : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $isqrt(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$;
2. $lp : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $lp(x)$ is the largest prime divisor of x (Conventionally, $lp(0) = lp(1) = 1$.)

You can assume primitive recursiveness of the basic arithmetic functions seen in the course.

Solution:

1. The basic observation is that $isqrt(x)$ is largest y such that $y^2 \leq x$ and in turn this is the smallest y such that $y^2 > x$. In addition, it is immediate to realise that such a y is bounded by x , hence we get

$$isqrt(x) = \mu y < x + 1. ((y + 1)^2 > x) = \mu y < x + 1. \overline{sg}((y + 1)^2 \dotminus x))$$

2. Observe that, for $x > 1$, $lp(x)$ is surely smaller or equal to p_x . Hence one can count the prime divisors of x , restricting the search to p_1, \dots, p_x :

$$count(x) = \sum_{i=1}^x div(p_i, x)$$

and then $lp(x) = p_{count(x)}$. The function needs to be adjusted for $x = 0$ and $x = 1$, where $count(x) = 0$ and thus $p_{count(x)} = 0$ while $lp(x) = 1$. This is easily done as follows:

$$lp(x) = p_{count(x)} + \overline{sg}(x \dotminus 1).$$

Since we use only known primitive recursive functions, bounded sum and composition we conclude that lp is primitive recursive.

Alternatively, the idea can be to check explicitly the prime divisors of x , starting from p_x , then p_{x-1} and so on, stopping at the first. In detail, look for the smaller y , call it $i(x)$, such that p_{x-y} is a divisor of x .

$$i(x) = \mu y \leq x \cdot \overline{sg}(div(p_{x-y}, x))$$

Then, whenever $x > 1$, $lp(x)$ is $p_{x-i(x)}$ and the cases $x \leq 1$ must be treated separately as before:

$$lp(x) = p_{x-i(x)} \cdot sg(x-1) + \overline{sg}(x-1).$$

Exercise 3

Classify from the point of view of recursiveness the set $A = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \neq \emptyset \wedge W_x \subseteq E_x\}$, i.e., establish whether A and \bar{A} are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that A is saturated, since it can be expressed as $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid \text{dom}(f) \neq \emptyset \wedge \text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(f)\}$.

Hence, by Rice-Shapiro's theorem, we conclude that A and \bar{A} are not r.e., and thus they are not recursive. More in detail:

- A is not r.e.

Consider the predecessor function $\text{pred}(x) = x-1$. Then $\text{pred} \in \mathcal{A}$ since $\text{dom}(\text{pred}) = \mathbb{N} = \text{cod}(\text{pred})$, hence $\text{dom}(\text{pred}) \neq \emptyset$ and $\text{dom}(\text{pred}) \subseteq \text{cod}(\text{pred})$. Moreover, consider a generic finite $\theta \subseteq \text{pred}$. If $\theta \neq \emptyset$, i.e., θ is not the always undefined function, then it is easy to realise that $\text{dom}(\theta) \not\subseteq \text{cod}(\theta)$. In fact, if $k = \max(\text{dom}(\theta))$ necessarily $k \notin \text{cod}(\theta)$ (since $\max(\text{cod}(\theta)) = k-1$). Hence no finite subfunction of pred is in \mathcal{A} and therefore, by Rice-Shapiro, A is not r.e.

- \bar{A} is not r.e.

In fact, $\text{pred} \notin \bar{\mathcal{A}}$ and $\theta = \emptyset \subseteq \text{pred}$, $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that A is not r.e.

Exercise 4

Let $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be some fixed total computable function and for $X \subseteq \mathbb{N}$ define $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Study the recursiveness of the set $B = \{x \mid x \in f(W_x) \cup E_x\}$, i.e., establish if B and \bar{B} are recursive/recursively enumerable.

Solution: The set B is not recursive because $K \leq B$. In order to prove this fact, let us consider the function $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ defined, by

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

The function is computable since $g(x, y) = y \cdot sc_K(x)$. Hence, by the smn-theorem, there is a total computable function $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$ for all $x, y \in \mathbb{N}$. We next argue that s is a reduction function for $K \leq_m B$. In fact

- If $x \in K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \mathbb{N}$ and thus $s(x) \in f(W_{s(x)}) \cup E_{s(x)} = f(\mathbb{N}) \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$.
- If $x \notin K$ then $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ for all $y \in \mathbb{N}$. Hence $W_{s(x)} = E_{s(x)} = \emptyset$ and thus $s(x) \notin f(W_{s(x)}) \cup E_{s(x)} = f(\emptyset) \cup \emptyset = \emptyset$.

The set B is r.e. In fact $x \in B$ if and only if one of the following conditions hold

- $x \in f(W_x)$, i.e.. there is $z \in W_x$ such that $f(z) = x$ or
- $x \in E_x$, i.e.. there is $z \in W_x$ such that $\varphi_x(z) = x$

Hence the semi-characteristic function of B can be written:

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x, (w)_1, (w)_2) \wedge (f((w)_1) = x) \vee (S(x, (w)_1, x, (w)_2)))$$

and this shows that it is computable.

Therefore, \bar{B} is not r.e. (hence not recursive).

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.

Computability

February 20, 2023

Exercise 1

- a. Provide the definition of a saturated (or extensional) set $A \subseteq \mathbb{N}$.
- b. State the Second Recursion Theorem.
- c. Show that K is not saturated.

Solution:

1. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is saturated whenever, if it includes the index (program) for a computable function, it includes also all the other indexes (programs) for the same function. Formally, for all $x, y \in \mathbb{N}$ if $x \in A$ and $\varphi_x = \varphi_y$ then $y \in A$.
2. The Second Recursion Theorem says that: for all functions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, if f is total and computable then there is $e \in \mathbb{N}$ such that $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.
3. In order to show that K is not saturated, let us first prove that there is an index e such that

$$\varphi_e(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = e \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

In fact, first define $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} = \mu z. |y - x|$$

The function is computable, hence by smn-theorem, there exists $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

By the Second Recursion Theorem there exists e such that $\varphi_e = \varphi_{s(e)}$ and thus:

$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = e \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

as desired.

Clearly $e \in K$ since $\varphi_e(e) = 0$. Now, just take $e' \neq e$ such that $\varphi_{e'} = \varphi_e$ (which exists since there are infinitely many indices for the same computable function). We have $\varphi_{e'}(e') = \varphi_e(e') \uparrow$ and thus $e' \notin K$.

Summing up, $e \in K$, $\varphi_{e'} = \varphi_e$ and $e' \notin K$. Hence K not saturated.

Exercise 2

State the smn-theorem. Show that there exists a total computable function $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that for all $x \in \mathbb{N}$, $x > 0$ we have $W_{s(x)} = \mathbb{P}$ and $|E_{s(x)}| = 2x$.

Solution:

1. The smn-theorem says that: Given $m, n \geq 1$ there is a computable total function $s_{m,n} : \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $\forall e \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^m, \vec{y} \in \mathbb{N}^n$

$$\varphi_e^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi_{s_{m,n}(e, \vec{x})}^{(n)}(\vec{y})$$

2. We define $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ by

$$g(x, y) = \begin{cases} (y/2) \bmod 2x & \text{if } y \in \mathbb{P} \text{ and } x > 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Observe that for a fixed $x > 0$, seen as a function of y , the function g has domain \mathbb{P} and codomain $\{0, 1, \dots, 2x - 1\}$.

Clearly g is computable since

$$g(x, y) = rm(2x, qt(2, y)) + \mu z. (rm(2, y) + \overline{sg}(x))$$

(observe that the term $rm(2, y) + \overline{sg}(x) \neq 0$ and thus its minimalisation is undefined, if and only if y is odd or $x = 0$).

By the smn theorem there is $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that for all $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = \begin{cases} (y/2) \bmod 2x & \text{if } y \in \mathbb{P} \text{ and } x > 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hence, as observed above:

- $W_{s(x)} = \mathbb{P}$
- $|E_{s(x)}| = |\{y \mid y < 2x\}| = 2x$

as desired.

Exercise 3

Let $X \subseteq \mathbb{N}$ be a fixed non-empty finite set. Classify from the point of view of recursiveness the set

$$A = \{x \mid E_x \cap X \neq \emptyset\},$$

i.e., establish whether A and \bar{A} are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that A is saturated, since it can be expressed as $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid \text{cod}(f) \cap A \neq \emptyset\}$.

Moreover $A \neq \emptyset, \mathbb{N}$. In fact

- if $e \in \mathbb{N}$ is such $\varphi_e = id$ then $e \in A$, since $X \cap E_e = X \cap \mathbb{N} = X \neq \emptyset$;
- if $e' \in \mathbb{N}$ is such $\varphi_{e'} = \emptyset$ then $e' \notin A$, since $X \cap E_{e'} = X \cap \emptyset = \emptyset$.

Hence by Rice's theorem A is not recursive.

The set A is r.e. In fact $x \in A$ if and only if there exists an input $y \in \mathbb{N}$ such that $\varphi_x(y) \downarrow$ and $\varphi_x(y) \in X$. The latter condition can be easily checked since X is finite and thus recursive. Hence we can just search for such an input.

Formally the semi-characteristic function of A can be written as:

$$\begin{aligned} sc_A(x) &= \mathbf{1}(\mu w.(S(x, (w)_1, (w)_2, (w)_3) \wedge (w)_2 \in Y)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.(|\chi_S(x, (w)_1, (w)_2, (w)_3) * \chi_Y((w)_2) - 1|)) \end{aligned}$$

and, since S is decidable and X is recursive (since it is finite), this shows that sc_A is computable.

Therefore, \bar{A} is not r.e. (hence not recursive).

Exercise 4

Classify from the point of view of recursiveness the set

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \neq \emptyset \wedge \min(W_x) > 0\},$$

i.e., establish whether B and \bar{B} are recursive/recursively enumerable.

Solution: Observe that B is saturated, since it can be expressed as $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, where $\mathcal{B} = \{f \mid \text{dom}(f) \neq \emptyset \wedge \min(\text{dom}(f)) > 0\}$.

Hence, by Rice-Shapiro's theorem, we conclude that B and \bar{B} are not r.e., and thus they are not recursive. More in detail:

- B is not r.e.

Consider the identity function $id(x) = x$. Then $id \notin \mathcal{B}$ since $\text{dom}(id) = \mathbb{N}$, hence $\min(\text{dom}(id)) = 0$. Moreover, consider the finite function $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ defined by

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Clearly $\theta \subseteq id$ and $\min(dom(\theta)) = \min(\{1\}) = 1 > 0$ hence $\theta \in \mathcal{B}$. Therefore, by Rice-Shapiro, B is not r.e.

- \bar{B} is not r.e.

In fact, if θ is the function defined above, $\theta \notin \bar{\mathcal{B}}$. Moreover $\theta' = \emptyset \subseteq \theta$, $\theta' \in \bar{\mathcal{B}}$. Hence by Rice-Shapiro's theorem we conclude that B is not r.e.

Note: Each exercise contributes with the same number of points (8) to the final grade.