

Computabilità e Algoritmi (Mod. A)

13 Settembre 2011

Esercizio 1

Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $A = \text{img}(f)$ (si ricordi che $\text{img}(f) = \{y : \exists z. y = f(z)\}$).

Esercizio 2

Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\text{dom}(f) \cap \text{img}(f)$ sia finito? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f , se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}. \varphi_x(x + 3k) \uparrow\}$, ovvero dire se A e \bar{A} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : W_x \supseteq Pr\}$, dove $Pr \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi, ovvero dire se B e \bar{B} sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 5

Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \leq y \leq x + 2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$