## 9.7 Appello 2014-08-25

### 9.7.1 Esercizio 1

Enunciare e dimostrare il teorema di Rice.

#### Soluzione

Ogni proprietà non banale relativa al comportamento dei programmi non è decidibile.

Ovvero sia $A \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dei programmi che hanno una qualche proprietà e quindi $A$ è un insieme saturo, se $A \neq \mathbb{N}$ e $\neq \emptyset$, allora $A$ non è ricorsivo.

Questo può essere dimostrato per riduzione $K \leq_m A$.

Sia $e_0$ un programma che calcola la funzione sempre indefinita ($\phi_{e_0} = \emptyset$). Questo programma può essere in $A$ o in $\overline{A}$. Assumiamo che sia in $\overline{A}$.

Possiamo quindi scegliere un qualsiasi programma $e_1 \in A$ e almeno uno deve esserci perché $A \neq \emptyset$.

Questi due programmi possono essere utilizzati per definire la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \phi_{e_0}(y) & \text{se } x \notin K \end{cases} = \begin{cases} \phi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = \phi_{e_1}(y) \cdot \mathbb{1}\big(\phi_x(x)\big)$$

la quale è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$ e che può essere usata come funzione di riduzione, perché:

- Se $x \in K$: $\phi_{f(x)} = \phi_{e_1}$ e quindi dal momento che $A$ è saturo e che $e_1 \in A$, allora anche $f(x) \in A$.

- Se $x \notin K$: $\phi_{f(x)} = \phi_{e_0}$ e quindi dal momento che $e_0 \notin A$, anche $f(x) \notin A$, perché se $f(x)$ fosse in $A$, anche $e_0$ dovrebbe esserci, perché $A$ è saturo e i due programmi calcolano la stessa funzione.

Se invece $e_0 \in A$, basta osservare che il complementare di un insieme saturo è saturo e, indicando con $B = \overline{A}$, $\overline{B} = A$, si ha che $e_0 \in \overline{B}$ e quindi vale la dimostrazione precedente.

### 9.7.2 Esercizio 2

Può esistere una funzione **non calcolabile** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che **per ogni** funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la funzione $h$ definita come $h(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare la risposta, fornendo un'esempio di $f$ oppure dimostrando che non può esistere.

#### Soluzione

Supponiamo che $f$ esista e che quindi $h(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile. Dal momento che $h$ è calcolabile per tutte le $g$ non calcolabili, si ha anche che $h(x) = f(x) + f(x) = 2 \cdot f(x)$ deve essere calcolabile.

Si ha quindi che $f$ può essere definita come

$$f(x) = qt\big(h(x), 2\big)$$

$f$ risulta quindi essere calcolabile per composizione di funzioni calcolabili il che va contro l'ipotesi della non calcolabilità di $f$ e pertanto $f$ non può esistere.

### 9.7.3 Esercizio 3

Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \phi_x(y + x) \downarrow \text{ per qualche } y \geq 0\}$

#### Soluzione

$A$ sembra essere RE, perché per determinare l'appartenenza è necessario determinare se il programma $x$ termina ricevendo in input se stesso più una qualche costante.

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \, \exists y \geq 0 \mid \phi_x(x+y) \downarrow \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\Big(\mu w.\overline{sg}\Big(S\big(x, x + (w)_1, (w)_2, (w)_3\big)\Big)\Big)$$

La funzione semi-caratteristica è calcolabile per composizione di funzioni calcolabili e quindi $A$ è RE.

Per provare che $A$ non è ricorsivo, si può effettuare la riduzione $K \leq_m A$.

Ovvero bisogna trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che dato $x \in K$, $f(x) \in A$ e se $x \notin K$, $f(x) \notin A$.

Si può osservare che se $x \in K$, $\phi_x(x) \downarrow$ e quindi anche $\phi_x(x + 0) \downarrow$ e pertanto $x$ è anche in $A$.

Si può quindi definire la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_x(x) & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \phi_x(x) = \Phi_U(x, x)$$

la quale è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile, totale e tale che $g(x, y) = \phi_{f(x)}(y)$.

$f$ è funzione di riduzione perché:

- $x \in K$: $\phi_{f(x)}(z) = g(x, z) = \phi_x(x) =\downarrow \ \forall z$ e quindi anche $\phi_{f(x)}(f(x) + 0) \downarrow$ e quindi $f(x) \in A$ per $y = 0$.

- $x \notin K$: $\phi_{f(x)}(z) = g(x, z) =\uparrow \ \forall z$ e quindi non esiste $y \geq 0$ tale che $\phi_{f(x)}(f(x) + y) \downarrow$ e quindi $f(x) \notin A$.

In alternativa potevo usare

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = SC_K(x)$$

Essendo $A$ non ricorsivo e RE, $\overline{A}$ non è RE.

### 9.7.4 Esercizio 4

Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \mid Pr \subseteq W_x\}$, dove $Pr \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi.

#### Soluzione

Si può osservare che l'insieme $B$ è saturo perché riguarda una proprietà della funzione calcolata dai programmi:

$$B = \{x \mid \phi_x \in \beta\}$$
$$\beta = \{f \mid Pr \subseteq dom(f)\}$$

Inoltre si può osservare che $B$ probabilmente non è RE perché per determinare l'appartenenza bisogna verificare infiniti valori del dominio.

La funzione $id$ appartiene a $\beta$ in quanto è definita su tutto $\mathbb{N}$ e quindi anche su tutti i numeri primi, mentre tutte le sue parte finite non appartengono a $\beta$ perché hanno un dominio finito, il quale non può contenere tutti gli infiniti numeri primi.

Si ha quindi una funzione che appartiene all'insieme e tutte le sue parti finite che non ci appartengono, quindi per Rice-Shapiro $B$ non è RE.

Per quanto riguarda $\overline{B}$, si ha che contiene tutti i programmi che calcolano funzioni definite su qualche numero primo, anche nessuno (ma non tutti) ed è sempre un insieme saturo.

Analogamente a prima, la funzione $id$ non appartiene a $\overline{\beta}$ e la funzione

$$\vartheta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 5 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una parte finita di $id$ e appartiene a $\overline{\beta}$. Si ha quindi che per il teorema di Rice-Shapiro anche $\overline{B}$ non è RE.

### 9.7.5 Esercizio 5

Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_n = \phi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_m \neq \phi_{m+1}$.

#### Soluzione

Il programma composto dalla sola istruzione `Z(1)` viene codificato con $2^{4\cdot(1-1)+1} - 2 = 0$ mentre il programma `Z(1)Z(1)` viene codificato con $2^0 \cdot 3^1 - 2 = 1$, entrambi i programmi calcolano la funzione $f(x) = 0$ e quindi il primo caso è dimostrato.

Il programma composto dall'istruzione `S(1)` viene codificato con $2^{(4(1-1)+1)+1} - 2 = 2$ e calcola la funzione $f(x) = x + 1$ che è diversa dalla funzione calcolata dal programma di indice 1.

Ricapitolando:

- $\phi_0(x) = 0$
- $\phi_1(x) = 1$

- $\phi_2(x) = x + 1$

Segue quindi che esistono $n = 0$ e $m = 1$ che soddisfano quanto richiesto.

#### Soluzione decisamente migliore

La funzione *succ* è una funzione calcolabile e totale, quindi per il secondo teorema di ricorsione $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{succ(e)} = \phi_{e+1}$.

Tuttavia deve esistere almeno un $e$ tale che $\phi_e \neq \phi_{e+1}$ perché se così non fosse, tutti i programmi calcolerebbero la stessa funzione e quindi solamente una funzione sarebbe calcolabile, ma è noto che ci sono più di due funzioni calcolabili.