9.5.2 Esercizio 2 - Funzione decrescente totale e non calcolabile

Esiste una funzione decrescente e non calcolabile?

Decrescente:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Soluzione

Tale funzione non esiste.

Sia f una funzione decrescente e totale. Si può quindi individuare $k = \min\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ e $x_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_0) = k$.

Si ha quindi che $\forall x \geq x_0$, $f(x) \leq f(x_0) = k$ e quindi $f(x) = k$, perché k è il minimo valore assunto dalla funzione.

Si può quindi definire

$$\vartheta(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < x_0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la quale essendo una parte finita di f è calcolabile. Con ϑ si può definire:

$$g(x) = \begin{cases} \vartheta(x) & \text{se } x < x_0 \\ k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è calcolabile. Si potrebbe già concludere qui ma si può essere più precisi, sia e il programma che calcola ϑ:

$$g(x) = \mu w. \Bigg(\bigg(x < x_0 \land S\Big(e, x, (w)_1, (w)_2\Big) \bigg) \lor \Big(x \geq x_0 \land (w)_1 = k \Big) \Bigg)$$

9.5.3 Esercizio 3 - Ricorsività

Studiare la ricorsività di $A = \{x \mid E_x = W_x + 1\}$ sapendo che se $X \subseteq \mathbb{N}$, $X + 1 = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

Soluzione

Si può osservare che l'insieme è saturo in quanto contiene tutte le funzioni il cui codominio è il successore del dominio.

Inoltre, probabilmente A non è RE perché per poter verificare l'appartenenza di una funzione all'insieme è necessario provare tutti i valori del dominio.

Si può quindi applicare Rice-Shapiro: la funzione id non appartiene a $\mathcal{A}$ perché il suo dominio coincide con il codominio e la funzione $\emptyset$ appartiene ad $\mathcal{A}$ perché sia il codominio che il dominio sono l'insieme vuoto.

Si ha quindi che $id \notin \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $\emptyset$ è parte finita di id, quindi per il teorema di Rice-Shapiro A non è RE.

Resta da valutare $\overline{A}$ (saturo).

Posso definire la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, 1 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che ha codominio $\mathbb{N} - \{0\}$ e dominio $\mathbb{N}$, quindi $f \in \mathcal{A}$ e $f \notin \overline{\mathcal{A}}$.

Una parte finita di f è:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dato che $dom(\vartheta) = cod(\vartheta)$, $\vartheta \in \overline{\mathcal{A}}$ e quindi per Rice-Shapiro, $\overline{\mathcal{A}}$ non è RE.

9.5.4 Esercizio 4 - Ricorsività

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y > x, 2y \in W_x\}$$

Soluzione

B non è saturo, in quanto descrive una proprietà non banale delle funzioni, inoltre, dato che per verificare l'appartenenza a B è necessario provare tutti i valori del dominio, probabilmente B non è RE.

Si tratta quindi di effettuare la riduzione $\overline{K} \leq_m B$, dove $\overline{K}$ è noto non essere RE e contiene tutti i programmi che non terminano su se stessi.

Serve quindi una funzione di riduzione che dato un programma x con $\phi_x(x) \uparrow$ fornisca un programma $f(x)$ tale che per tutti i valori maggiori del suo indice ($y > f(x)$), $2y \in W_{f(x)}$ e che se $x \in K$, $W_{f(x)}$ non contenga $2y$.

Possiamo quindi definire la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 1\left(\mu w. |\mathcal{X}_{H(x,x,y)}|\right)$$

Trattandosi di una funzione calcolabile, per il teorema SMN esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y)$.

f è proprio la funzione di riduzione perché

- $x \in \overline{K}$: $\phi_{f(x)}(y) = 1 \; \forall y$ e quindi $\phi_{f(x)}$ è definita su tutto $\mathbb{N}$, pertanto $f(x) \in B$.
- $x \in K$: $\phi_{f(x)}$ è sempre indefinita $\forall y$ e quindi anche se $y > f(x)$, $2y \notin W_{f(x)}$, pertanto $f(x) \notin B$.

Quindi B non è RE.

Per quanto riguarda $\overline{B}$, anche questo sembra non essere RE e si può provare la stessa riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{B}$.

Serve quindi una funzione che dato un programma x che non termina quando riceve se stesso in input, fornisca un programma $f(x)$ tale che esiste un $y > x$, $2y \notin W_{f(x)}$ e che se x termina su se stesso in input, $f(x)$ termina su $2y$ per qualche $y > x$.

Possiamo quindi definire la funzione:

$$g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & x \in \overline{K} \\ 1 & x \in K \equiv x \notin \overline{K} \end{cases} = SC_K(x)$$

g è calcolabile perché SC_K è calcolabile e quindi per il teorema SMN esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale, tale che $\phi_{f(x)}(y) = g(x,y)$ ed è quindi la funzione di riduzione cercata, perché:

- $x \in \overline{K}$: $W_{f(x)} = \emptyset$ e quindi $f(x) \in \overline{B}$.
- $x \in K$: $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ e quindi $\forall y > f(x)$, $2y \in W_{f(x)}$ e quindi $f(x) \notin \overline{B}$.

Segue quindi che anche $\overline{B}$ non è RE.

9.5.5 Esercizio 5 - Secondo teorema di ricorsione

Dimostrare che $f(x) = min\{y \mid \phi_x \neq \phi_y\}$ non è calcolabile.

Soluzione

Il secondo teorema di ricorsione dice che data $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale e calcolabile, $\exists e \in \mathbb{N}$ tale che $\phi_e = \phi_{h(e)}$.

La funzione f è totale perché fissato un programma x è sempre possibile trovare un programma y che calcola una funzione diversa.

Inoltre, per come è definita f, questa non ha punti fissi, perché fissato un e, $\phi_{f(e)} \neq \phi_e$.

Quindi per il secondo teorema di ricorsione, f non può essere calcolabile perché altrimenti dovrebbe esistere un punto fisso.