Scritto zero bis

E.1

Media e varianza di una v.a. reale X

Ricorda: $\quad var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

Se X è assolutamente continua con densità f_X e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile (ad esempio, continua) tale che $E[g(X)]$ esiste, allora

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx.$$

(i) $\quad X \sim Unif(4,6)$:

Si moltiplica per 1/2 considerando i due estremi
e anche la distr. uniforme

$\rightsquigarrow$ X assol. continua con $f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot 1_{[4,6]}(x)$

$\rightsquigarrow$ $E[X] = \frac{1}{2}\int_4^6 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=4}^{x=6} = \frac{20}{4} = \underline{\underline{5}},$

$E[X^2] = \frac{1}{2}\int_4^6 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=4}^{x=6} = \frac{152}{6} = \frac{76}{3}.$

$\rightsquigarrow$ $var(X) = \frac{76}{3} - 25 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$

El cont.

(ii) X ha funzione di ripartizione
$$F_X(x) = \frac{x^3}{27} \cdot 1_{[0,3)}(x) + 1_{[3,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

F_X è continua e C^1 su $\mathbb{R} \setminus \{0,3\}$

Abbiamo la funz. di ripartizione, pertanto per trovare valor medio e varianza facciamo la derivata della f.di rip. moltiplicata per la funzione indicatrice.

$\rightsquigarrow$ F_X è assol. continua con densità

$$f_X(x) = F_X'(x) \cdot 1_{\mathbb{R}\setminus\{0,3\}}(x) = \frac{x^2}{9} \cdot 1_{(0,3)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = \int_0^3 x \cdot \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^4}{36}\right]_{x=0}^{x=3} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}},$$

$$E[X^2] = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{x^2}{9}\, dx = \left[\frac{x^5}{45}\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{5}.$$

$$\rightsquigarrow \quad var(X) = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{432-405}{80} = \underline{\frac{27}{80}}.$$

(iii) $X = Y^2$ con Y normale standard.

Noto: Siccome $Y \sim N(0,1)$ abbiamo
$$E[Y] = 0, \quad var(Y) = E[Y^2] = 1,$$

$$Y \text{ assol. continua con } f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = E[Y^2] = 1.$$

Nota: $$E[Y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

El cont.

$$E[X^2] = E[Y^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad | \text{ integrazione per parti}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\underbrace{\Big[x^3 \cdot (-e^{-\frac{x^2}{2}}) \Big]_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \cdot (-e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \Big)$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1 \text{ da sopra}}$$

$$= 3$$

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{var}(X) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$.

E. 2

Siano $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. con comune distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$.
Poniamo

$$M_n \doteq \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$G(x) \doteq e^{-e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) G è una funzione di ripartizione.

Nota: G è (infinite volte) differenziabile con continuità

$\rightsquigarrow$ G è continua destra.

Inoltre, $G'(x) = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ G è crescente

Resta da mostrare: $\lim_{x \to \infty} e^{-e^{-x}} = 1$, $\lim_{x \to -\infty} e^{-e^{-x}} = 0$.

Ma $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$\rightsquigarrow$ $\lim_{x \to \infty} e^{-e^{-x}} = e^0 = 1$, $\lim_{x \to -\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\infty} = 0$.

//

E2 cont.

$\log$ logaritmo naturale

$\log = \log_e$

$(\overline{ii})$ Per $x \in \mathbb{R}$,

$$P(\lambda M_n - \log(n) \leq x) = P\left(M_n \leq \frac{x+\log(n)}{\lambda}\right) \quad \Big| \; M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$= P\left(X_1 \leq \frac{x+\log(n)}{\lambda}, \dots, X_n \leq \frac{x+\log(n)}{\lambda}\right) \quad \Big| \; X_1, \dots, X_n \text{ indipendenti}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \leq \frac{x+\log(n)}{\lambda}\right) \quad \Big| \; X_1, \dots, X_n \text{ identicamente distrib. con } X_i \sim Exp(\lambda)$$

$$= \Big(\underbrace{P\left(X_1 \leq \frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)}_{= F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)}\Big)^n \quad \Big| \; F = F_{Exp(\lambda)} \text{ funzione di ripartizione}$$

$$\rightsquigarrow \quad P(\lambda M_n - \log(n) \leq x) = \left(F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)\right)^n.$$

funzione di ripartizione $Exp(\lambda)$

(iii) Ora $F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\rightsquigarrow \quad \left(F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)\right)^n = \left(1 - e^{-x} \cdot e^{-\log(n)}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n} \cdot e^{-x}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{[-\log(n),\infty)}(x).$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} e^{-e^{-x}} = G(x)$$

poiché $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

e $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[-\log(n),\infty)}(x) \to 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

//

E.3 : analogo all'Esercizio 3 dello Scritto Zero.

E.4 :

Siano $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Trovare una v.a. X tale che

$$E[X] = \mu, \qquad var(X) = \sigma^2, \qquad E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = 1.$$

Supponiamo di aver trovato una v.a. $\tilde{X}$ tale che

$$(*) \quad E[\tilde{X}] = 0, \qquad E[\tilde{X}^2] = 1, \qquad E[\tilde{X}^3] = 1.$$

Poniamo $\quad X \doteq \sigma \tilde{X} + \mu$

Allora $\quad E[X] = \sigma \cdot E[\tilde{X}] + \mu = \mu,$

$$var(X) = E[(\sigma\tilde{X} + \mu - \mu)^2] = \sigma^2 E[\tilde{X}^2] = \sigma^2,$$

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = E[\tilde{X}^3] = 1.$$

Basta quindi trovare $\tilde{X}$ tale che $(*)$.

Condizioni in $(*)$ dipendono solo dalla distribuzione di $\tilde{X}$

$\rightsquigarrow$ basta trovare la distribuzione di $\tilde{X}$.

(E.4 cont.)

Ansatz: $\tilde{X}$ a valori in $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

con $x_1 \doteq -1$, $x_2 \doteq 0$, $x_3 \doteq 1$, $x_4 \doteq 2$.

Poniamo $p_i \doteq P(\tilde{X} = x_i)$, $i \in \{1, .., 4\}$

Basta trovare $p_1, p_2, p_3, p_4 \in [0,1]$ con $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$
tali che $(\ast)$, cioè:

Valgono 2,4,8 semplicemente perché considera
la formula del valor medio

a) $0 = E[\tilde{X}] = -p_1 + 0 \cdot p_2 + p_3 + 2p_4$,

b) $1 = E[\tilde{X}^2] = p_1 + 0 \cdot p_2 + p_3 + 4p_4$,

c) $1 = E[\tilde{X}^3] = -p_1 + 0 \cdot p_2 + p_3 + 8p_4$.

$\overset{a)}{\rightsquigarrow}$ $p_1 = p_3 + 2p_4$

$\overset{\text{in } b)}{\rightsquigarrow}$ $1 = 2p_3 + 6p_4$

I valori, come P4, vengono decisi pur
di far rispettare la normalizzazione (ergo
tutto = 1). A causa di questo, si ha p4=1/6,
p3=0 e tutto il resto consegue, appunto
avendo p3=1.

$\overset{\text{in } c)}{\rightsquigarrow}$ $1 = 6p_4$ $\rightsquigarrow$ $p_4 = \frac{1}{6}$

$\overset{\text{in } b)}{\rightsquigarrow}$ $1 = 2p_3 + 6 \cdot \frac{1}{6}$ $\rightsquigarrow$ $p_3 = 0$.

$\rightsquigarrow$ $p_1 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ $\rightsquigarrow$ $p_2 = 1 - (\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6})$

$\rightsquigarrow$ $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = 0$, $p_4 = \frac{1}{6}$.

Errore di calcolo del prof:
P1 vale 1

//