2 Spazi di probabilità discreti

Uno spazio di probabilità è il modello matematico di base per descrivere un "esperimento aleatorio".

In questo capitolo consideriamo il caso più semplice di spazi di probabilità discreti.

Def.: Una coppia (Ω, P) si dice spazio di probabilità discreto se

Ω è un insieme non-vuoto al più numerabile

e P è una mappa $\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

sistema delle parti di Ω

tale che

(A1) $P(\Omega) = 1$

(Aσ) Per ogni successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

"σ-additività"

di sotto-insiemi disgiunti a due a due, cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, si ha

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto.

Allora Ω si dice spazio campionario,

P si dice misura di probabilità,

$\mathcal{P}(\Omega)$ si dice (in questo) il sistema degli eventi

(cioè, sottoinsiemi di Ω si dicono eventi).

Osservazione: Le condizioni (A1) + (Aσ) implicano:

- $P(\emptyset) = 0$.
- (Aσ) implica l'additività finita di P: se $A, B \subset \Omega$ tali che $A \cap B = \emptyset$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- ~~Pd~~ Per ogni $A \subseteq \Omega$,

  $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Interpretazione di uno spazio di probabilità (Ω, P) come modello per un esperimento aleatorio:

modello matematico	interpretazione
• spazio campionario $\Omega \neq \emptyset$ (insieme al più numerabile)	insieme di tutti gli esiti possibili dell'esperimento
• sistema degli eventi qui: $\mathcal{P}(\Omega)$	insieme di tutte le affermazioni ammissibili sull'esito dell'esperimento
• misura di probabilità ~~qui~~ mappa $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$	grado di fiducia assegnato alle affermazioni sull'esito dell'esperimento

Primi esempi di spazi di probabilità discreti

$\Omega \neq \emptyset$ al più numerabile

1) Ω finito: misura di probabilità P su $\mathcal{P}(\Omega)$

mediante
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \subseteq \Omega$$

$\rightsquigarrow$ P uniforme discreta su Ω

2) Ω finito: Sia $H : \Omega \to \mathbb{R}$,

e sia $\beta > 0$. Definiamo P_β su $\mathcal{P}(\Omega)$

mediante
$$P(A) \doteq \frac{1}{Z_\beta} \cdot \sum_{\omega \in A} e^{-\beta \cdot H(\omega)}, \quad A \subseteq \Omega,$$

dove
$$Z_\beta \doteq \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}.$$

$\rightsquigarrow$ misura di Gibbs associata all'energia H

e alla temperatura inversa β.

Esempi cont.

3) $\Omega = \mathbb{N}_0$. Sia $\lambda > 0$.

Definiamo P su $\mathcal{P}(\Omega)$ mediante

$$P(A) \doteq e^{-\lambda} \cdot \sum_{n \in A} \frac{\lambda^n}{n!}, \qquad A \subseteq \Omega.$$

$\rightsquigarrow$ P distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$.

Proprietà fondamentali delle misure di probabilità

Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto.

Siano $A, B \subseteq \Omega$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Allora:

1) Se $A \subseteq B$, allora $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

In particolare, $P(A^c) = 1 - P(A)$ "almeno uno"

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ "inclusione / esclusione"

In particolare, se $A \cap B = \emptyset$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3) $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ "σ-subadditività"

4) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di eventi disgiunti a due a due e tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$, allora per ogni $B \subseteq \Omega$

$$P(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B \cap A_n)$$ "probabilità totali"

Proprietà fondamentali (cont.)

5) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $A \in \mathcal{A}$

nel senso che $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$,

allora $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

In particolare, se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente (cioè $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$),

allora $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$;

se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi decrescente, ($A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$)

allora $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Esempio estremo di misura di probabilità:

Sia $\Omega \neq \emptyset$ al più numerabile (in realtà arbitrario).

Sia $x \in \Omega$. Allora

$$\delta_x(A) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad A \subseteq \Omega,$$

definisce una misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$;

δ_x si dice la misura di Dirac concentrata in x.

Le misure di Dirac si possono utilizzare per costruire misure di probabilità "meno estreme":

Siano $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$ (non necessariamente distinti), e siano $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Poniamo

$$P \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \delta_{x_i}$$ nel senso che

$$P(A) \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \delta_{x_i}(A), \qquad A \subseteq \Omega.$$

$\leadsto$ P è una misura di probabilità.

In particolare, se $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, allora $P(\{x_i\}) = a_i$.

Esempio: $\Omega \neq \emptyset$ finito, $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\quad |\Omega| = n$

$P \doteq$ uniforme discreta su Ω

$$\leadsto \quad P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \delta_{x_i}$$

Più in generale, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, $\Omega \neq \emptyset$ arbitrario,

e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tale che $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, allora

$$P \doteq \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \, \delta_{x_i} \quad \text{nel senso che}$$

$$P(A) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{x_i}(A), \quad A \subseteq \Omega,$$

definisce una misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$.

Viceversa, se P è una misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ con Ω al più numerabile, allora

$$P = \sum_{\omega\in\Omega} a_\omega \cdot \delta_\omega \quad \text{con } a_\omega \doteq P(\{\omega\}).$$