Esercizi extra

Esercizio 1. Siano X, ξ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X è standard normale;
- ξ è di Rademacher di parametro $1/2$, cioè $\mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(\xi = -1) = 1/2$;
- X e ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria Y tramite

$$Y(\omega) \doteq \xi(\omega) \cdot X(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge di Y e si decida se è assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue) o meno.

E1:

X, ξ v.a. indipendenti con $X \sim N(0,1)$, $\xi \sim Rad(\frac{1}{2})$.

Poniamo $Y = \xi \cdot X$.

Nota: $\xi \sim Rad(\frac{1}{2})$ implica $E[\xi] = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$,

$var(\xi) = E[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

(i) Media e varianza di X, Y:

X normale standard, quindi

$E[X] = 0$, $var(X) = E[X^2] = 1$.

$$E[Y] = E[\xi \cdot X] \underset{\xi, X \text{ indipendenti}}{=} E[\xi] \cdot E[X] \underset{\text{da sopra}}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow \quad var(Y) = E[Y^2] = E[\xi^2 \cdot X^2] \underset{\xi^2 = 1 \text{ P-q.c.}}{=} E[X^2] \underset{\text{da sopra}}{=} 1$$

(oppure usando l'indipendenza).

(ii) Covarianza tra X e Y:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-E[X])\cdot(Y-E[Y])] \qquad | \; E[X]=0=E[Y]$$

$$= E[\xi \cdot X^2] \qquad | \text{ indipendenza}$$

$$= \underbrace{E[\xi]}_{=0} \cdot E[X^2]$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

$\rightsquigarrow$ X, Y sono incorrelate, ma non indipendenti.

Ad esempio,

$$P(|X| \leq 1, |Y| > 1) = 0 \quad \text{poiché } |\xi| = 1 \;\; P\text{-q.c.},$$

mentre $P(|X| \leq 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} \lambda_1(dx) > 0,$

$$P(|Y| > 1) = P(|\xi| \cdot |X| > 1)$$

$$= P(|X| > 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{1}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \lambda_1(dx) > 0.$$

Esercizio 2. Siano X_1, X_2 variabili aleatorie reali indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione standard normale. Poniamo

$$Z_1 \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} X_1 - \frac{1}{2} X_2, \qquad Z_2 \doteq \frac{1}{2} X_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} X_2.$$

(i) Si calcolino media e varianza di Z_1, Z_2.

E2:

X_1, X_2 indipendenti standard normali.

$\rightsquigarrow$ $E[X_i] = 0$, $var(X_i) = E[X_i^2] = 1$.

Poniamo $Z_1 \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} X_1 - \frac{1}{2} X_2$, $Z_2 \doteq \frac{1}{2} X_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} X_2$.

(i) Media e varianza di Z_1, Z_2:

| $X_1, X_2 \sim N(0,1)$

$E[Z_1] = \frac{\sqrt{3}}{2} E[X_1] - \frac{1}{2} E[X_2] = 0$,

linearità di $E[\cdot]$

$E[Z_2] = \frac{1}{2} E[X_1] + \frac{\sqrt{3}}{2} E[X_2] = 0$.

$$var(Z_1) = E[Z_1^2] = E\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} X_1 - \frac{1}{2} X_2\right)^2\right]$$

$$= \frac{3}{4} \underbrace{E[X_1^2]}_{=1} + \frac{1}{4} \underbrace{E[X_2^2]}_{=1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{E[X_1 \cdot X_2]}_{\overset{\text{indip.}}{=} E[X_1] \cdot E[X_2] = 0}$$

$\rightsquigarrow$ $var(Z_1) = 1$.

Analogamente, $var(Z_2) = \frac{1}{4} E[X_1^2] + \frac{3}{4} E[X_2^2] = 1$.

Esercizio 3. Siano C_1, C_2, C_3 eventi indipendenti ed equiprobabili su uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$ con comune probabilità $1/2$. Poniamo

$$X_0(\omega) \doteq 0, \quad \omega \in \Omega,$$

e definiamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 per ricorsione mediante

$$X_i(\omega) \doteq \begin{cases} X_{i-1}(\omega) + 1 & \text{se } \omega \in C_i, \\ X_{i-1}(\omega) - 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Si determinino le distribuzioni di $X_0, \ldots, X_3$.

(ii) Si calcoli la probabilità condizionale dell'evento $\{X_2 = 0\}$ dato che $\{X_3 < 0\}$.

(iii) Si verifichi se gli eventi $\{X_2 \geq 0\}$ e $\{X_3 \leq 0\}$ sono indipendenti o meno.

$X_0(\omega)=0$

X_1, X_2, X_3 per ricorsione su $X_i(\omega)=\begin{cases} X_{i-1}(\omega)+1 & \text{se } \omega\in C_i \\ X_{i-1}(\omega)-1 & \text{altrimenti}\end{cases}$

$X_1 = X_0(\omega)+1$ $\quad X_1=1$

$X_2 = X_1(\omega)+1$ $\quad X_2=2$ $\quad X_3=0 \to P(X_i=\omega) \; \omega\notin C_i$

$X_3 = X_2(\omega)+1$ $\quad X_3=3$ $\quad X_3=-3 \to P(X_3)=\begin{cases}X_3=3\\X_3=-3\end{cases}$

$X_4 = X_3(\omega)+1$ $\quad X_4=4$

(2) $P(X_2=0) = P(X_3<0)\cdot P(X_2=X_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(3) $P(X_2\geq 0 \cap X_3\leq 0) = P(X_2\geq 0)\cdot P(X_3\leq 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

gli eventi sono indipendenti

Esercizio 4. Per ogni $c>1$ si trovino variabili aleatorie reali $X=X_c$ e $Y=Y_c$ tali che

$$\mathbf{P}\left(X\leq Y\leq c\cdot X\right)=1,\quad \mathbf{E}\left[Y\right]=\sqrt{c}\,\mathbf{E}\left[X\right],\quad \mathbf{E}\left[Y^2\right]\neq c\cdot\mathbf{E}\left[X^2\right].$$

$P(X\leq Y\leq c\cdot X)=1$, $E[Y]=\sqrt{c}\cdot E[X]$, $E[Y^2]\neq c\cdot E[X^2]$

$E[Y]=\sqrt{c}\cdot E[X] = \sqrt{c}\int_0^{\sqrt{c}} \log(x) = \sqrt{c}\cdot\left[\frac{1}{x}\right]_0^{\sqrt{c}} = 1$ $\quad E[X]\leq 1$ p.q.c

$E[Y^2] = c\cdot E[X^2] = c\cdot\int_0^c \log^2(x) \sim \neq c\cdot E[X^2]$

Esercizio 4. Per ogni $m\in\mathbb{N}$, si trovi una densità discreta $p=p_{(m)}$ su $\mathbb{N}_0$ tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p(k)=1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)^2\cdot p(k)=m.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(k) = 1 \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)^2 \cdot p(k) = m \qquad P = P(m) \text{ su } \mathbb{N}_0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k^2+1-2k)\, p(k) = m \qquad \sim k^2 p(k) = m$$

Accedendo in caso par. di una distrib. di Poisson con densità $p_\lambda(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \quad \text{e.q.c} \to \lambda = 0 \qquad \text{se } \lambda > 0 \to k^2 \cdot p(k) = m$$

dove m è il parametro lambda maggiorato da una costante

Esercizio 6. Siano $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Poniamo $\Omega \doteq \{0,1\}^n$ e, per $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$A_i \doteq \{\omega \in \Omega \, : \, \omega_i = 1\}.$$

Definiamo una densità discreta $p \colon \Omega \to [0,1]$ tramite

$$p(\omega) \doteq q^{|\omega|} \cdot (1-q)^{n-|\omega|}, \quad \omega \in \Omega,$$

ove $|\omega| \doteq \sum_{i=1}^{n} \omega_i$. Sia $\mathbf{P}$ la corrispondente misura di probabilità.

(i) Si verifichi che effettivamente $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

(ii) Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, si calcoli $\mathbf{P}(A_i)$.

(iii) Si mostri che $A_1, \ldots, A_n$ sono indipendenti rispetto a $\mathbf{P}$ (come famiglia di eventi).

(iv) Si determini la distribuzione rispetto a $\mathbf{P}$ della variabile aleatoria S_n a valori in $\{0, \ldots, n\}$ data da

$$S_n(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

$q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{0,1\}^n$ e per $i \in \{1 \dots n\}$
$A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 1\}$, $P: \Omega \to [0,1]$ con $q^{|\omega|} \cdot (1-q)^{n-|\omega|}$, $\omega \in \Omega$
$|\omega| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$. P la misura di prob.

1. Sapendo che $|\omega| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ avremo che
$P(\omega) = q^{|\sum_{i=1}^{n} \omega_i|} \, 1-q^{n-|\sum_{i=1}^{n} \omega_i|} \sim q(1-q)^{n-1} \sim 1$ P.q.C

2. $\forall i$ si calcoli $P(A_i)$
$P(X=k) = q(1-q)^{n-1} \sim P(X=A_i) = q^i(1-q)^{n-i}$
$\sum^{\text{IND.}} P(X_1=1, X_2=2 \dots X_k=k) = P(X_i \geq k) = 1 - P(X_i \leq k) = 1-(1-q^k) = P(A_i)$

3. $P(A_i = X) \wedge P(A_j = Y) = P(A_i = X) \cdot P(A_j = Y)$ per def. di indipendenza.
Avendo che $1-(1-q)^X \cdot 1-(1-q)^Y = 1-(1-q)^{K+Y}$, la cosa è verificata
Anche ev. singoli.

4. $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1} A_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\infty)} A_i(\omega) \sim \int_0^{\infty} A_i(\omega) \sim (1-q)^k$

F. DI [illegible]
[illegible]

Esercizio 4. Siano X, Y, Z variabili aleatorie reali su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Si mostrino le seguenti affermazioni.

a) Se $Z \geq 0$ $\mathbf{P}$-quasi certamente e $\mathbf{E}[Z] = 0$, allora $Z = 0$ $\mathbf{P}$-quasi certamente.

b) Se $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sono indipendenti ed identicamente distribuite, allora

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[(X - Y)^2\right].$$

X, Y, Z (Ω, F, P)

a) Se $Z \geq 0$ P.q.c e $E[Z] = 0$, allora $Z = 0$ P.q.c

P.q.c $\rightarrow P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$

- Se il val. medio $E[Z] = 0$, allora significa che $P(Z > 0) > 0$ e, similmente, è caratterizzabile da $\sum_0^\infty X_n \xrightarrow{n\to\infty \text{ P.q.c}} \geq 1$

b) Se $X, Y \in L^2(\Omega, F, P]$, allora $\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = \frac{1}{2} E[(X-Y)^2]$

$E[(X - E[X])^2 = E[(X-Y)^2) = E[X^2] - E[Y^2] = 2E[X \cdot Y]$

$= E[X^2] + E[Y^2] - 2E[X] \cdot E[Y] = E[X^2] + E[Y^2] - 2E[X^2] \leftarrow$ dato che $X = Y$

$= 2(E[X^2] - (E[X])^2) = \operatorname{var}(X) = E[(X - E[X]^2) = 2 \operatorname{var} Y$

Esercizio 7. Sia $n \in \mathbb{N}$, e siano $X_1, \ldots, X_n$, ξ variabili aleatorie definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Supponiamo che $X_1, \ldots, X_n$ prendano valori nello stesso spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$, che ξ sia uniformemente distribuita su S_n, il gruppo delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$, e che ξ e $(X_1, \ldots, X_n)$ siano indipendenti (le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$ non sono necessariamente indipendenti tra di loro). Per $i \in \{1, \ldots, n\}$ poniamo

$$Z_i(\omega) \doteq X_{\xi_\omega(i)}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

ricordando che, per ogni $\omega \in \Omega$, ξ_ω è un elemento di S_n, cioè una funzione biunivoca da $\{1, \ldots, n\}$ in $\{1, \ldots, n\}$.

(i) Si mostri che per ogni scelta di $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}$,

$$\mathbf{P}(Z_1 \in B_1, \ldots, Z_n \in B_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \mathbf{P}\left(X_{\tau(1)} \in B_1, \ldots, X_{\tau(n)} \in B_n\right).$$

(ii) Si mostri che per ogni $\sigma \in S_n$, ogni scelta di $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}$,

$$\mathbf{P}(Z_1 \in B_1, \ldots, Z_n \in B_n) = \mathbf{P}\left(Z_{\sigma(1)} \in B_1, \ldots, Z_{\sigma(n)} \in B_n\right),$$

e che quindi $\mathbf{P}_{(Z_1, \ldots, Z_n)} = \mathbf{P}_{(Z_{\sigma(1)}, \ldots, Z_{\sigma(n)})}$ per ogni $\sigma \in S_n$.

(iii) Si dia un esempio in cui le v.a. $Z_1, \ldots, Z_n$ costruite come sopra non siano indipendenti.

$X_1 \ldots X_n$ v.a su (Ω, F, P) a valori in (E, ξ)

ξ su (Ω, F, P) ind. di $\{X_1 \ldots X_n\}$ a valori in S_n con $P_\xi = \text{Unif}(\xi_n)$

Poniamo $\to$ $Z_i(\omega) = X_{\xi(x)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $i \in \{1 \ldots n\}$

Allora (congiunta per ogni B, con $B_1, \ldots B_n \in \mathcal{E}\}$

$P(Z_1 \in B \ldots Z_n \in B) = P_{(Z_n \ldots Z_1)}(B_1 \times \ldots B_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} P(X_{\tau(1)} B \ldots X_{\tau(n)} B_n)$

$\overset{\text{PROB. TOTALI}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} P(X_{\sigma(1)} \in B_1 \ldots X_{\sigma(n)} \in B_n \mid \xi = \sigma) \cdot P(\xi = \sigma) = \frac{1}{n!}$ per tutti gli eventi

③ La distribuzione congiunta rimane la stessa per simmetria per marginali identiche

Esercizio 4. Sia $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ una funzione di ripartizione (cioè F non-decrescente e continua a destra con $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$). Si trovi una successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di *densità discrete* su $\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0,$$

ove F_n è la funzione di ripartizione associata a p_n, cioè

$$F_n(x) \doteq \sum_{y\in\mathbb{R}: y\leq x} p_n(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

F f. di ripartizione su $\mathbb{R}$

Per successione $F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dove $F_n(x) = \sum_{y \leq x} p_n(y)$

Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo p_n tramite

$$p_n(x) = \begin{cases} F(x + \frac{1}{n}) - F(x) & \text{se } x \in \frac{k}{n} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

SERIE TELESCOPICA

$$\rightarrow \sum_{n\in N} p_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \lim \sum_{k=n}^{N} \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$= \underbrace{F\left(\frac{N+1}{n}\right)}_{1} - \underbrace{F\left(\frac{N}{n}\right)}_{0} = 1$$

DUE LIM. TENDONO A 1 E 0

Ora per $x \in \mathbb{R}$

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\sum_{y\leq x} p_n(y) - F(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{y\leq x} p_n(y) - F(x)\right| = \left|\left(\sum_{k\in N} p\left(\frac{1}{n}\right)\right) - F(x)\right| = \left|F\left(\frac{\lfloor n x\rfloor + 1}{n}\right) - F(x)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ con } F \text{ continua da dx}$$

Ho comunque convergenza uniforme per $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

$$\rightarrow p_n(x) = \begin{cases} F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)}) \\ \emptyset \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia Ω un insieme non-vuoto, e sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra in Ω.

(i) Sia $\tilde{\Omega}$ un sottoinsieme di Ω non-vuoto (non necessariamente $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$). Poniamo

$$\tilde{\mathcal{F}} \doteq \left\{ A \cap \tilde{\Omega} : A \in \mathcal{F} \right\}.$$

Si mostri che allora $\tilde{\mathcal{F}}$ è una σ-algebra in $\tilde{\Omega}$.

(ii) Si mostri che se Ω è un insieme finito di cardinalità $|\Omega| = n$, allora esiste $k \in \{1, \dots, n\}$ tale che

$$|\mathcal{F}| = 2^k.$$

[Suggerimento: induzione su n usando il punto precedente.]

(iii) Supponiamo ora che Ω sia un insieme infinito (numerabile o più che numerabile). Si mostri che allora $\mathcal{F}$ ha cardinalità o finita o più che numerabile.

Sia $\Omega \neq \emptyset$. F σ-algebra in Ω

① Sia $\tilde\Omega \in \Omega$, Allora $\tilde F = \{A \cap \tilde\Omega, A \in F\}$ Allora $\tilde F$ è σ-algebra su $\tilde\Omega$

$\tilde\Omega \setminus (A \cap \tilde\Omega) = A \cap \tilde\Omega$

$\bigcup_{i \in N} (A_i \cap \tilde\Omega) = (\bigcup_{i \in N} A_i) \cap \tilde\Omega$

② Supponiamo che $|\Omega| < \infty$.

Allora $\exists\, k \in \{1 .. |\Omega|\}$ tale che $|F| = 2^k$

Induzione su $|\Omega|$

inizio $|\Omega| = 1 \to F = \{\emptyset, \Omega\} \to |F| = 2^{|\Omega|}$

Preso $\Omega = \{w_1 .. w_{n+1}\}$. Ponendo $\tilde\Omega = \{w_1, .. w_n\}$

Definiamo $\tilde F = \{A \cap \tilde\Omega, A \in F\} \to \tilde F$ è σ-algebra su $\tilde\Omega$

Per induzione $\exists\, K \in \{1..n\}$ $|\tilde F| = 2^k$

due casi

a) $\{w_{n+1}\} \in F$ ($\tilde\Omega \in F$) Per ogni $\tilde A \in \tilde F$ $\tilde A \in F$ e $\tilde A \cup \{w_n\} \in F \to |F| = 2|\tilde F| = 2^{k+1}$

b) $\{w_{n+1}\} \notin F$ ($\Leftrightarrow \tilde\Omega \notin F$) $\forall \tilde A \in \tilde F$ o $\tilde A \in F$ o $\tilde A \cup \{w_{n+1}\} \in F$ $\to |F| = |\tilde F|$

③ Definiamo una relazione di equivalenza su Ω,

$w \sim \tilde w$ se e solo se $\forall A \in F$, $w \in A \Leftrightarrow \tilde w \in A$

Poniamo $\tilde\Omega = \Omega/\sim$ insieme delle classi di equivalenza

$\to F \cong P(\tilde\Omega) \to F$ finito o più che numerabile

Esercizio 8. Siano X, Y, ξ variabili aleatorie definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, con X, Y a valori in un insieme al più numerabile E, ξ a valori in $\{0,1\}$. Supponiamo inoltre che ξ abbia distribuzione di Bernoulli di parametro $q \in [0,1]$ e che ξ e (X,Y) siano indipendenti. Poniamo

$$Z(\omega) \doteq \begin{cases} X(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ Y(\omega) & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \omega \in \Omega.$$

Si determini la densità discreta di Z in termini del parametro q e delle densità

Sol: Osserviamo che $Z \in E$. Se $x \in E$ si ha

$\mathbb{P}(Z = x) = \mathbb{P}(\{\xi = 1, X = x\} \sqcup \{\xi = 0, Y = x\})$

$= \mathbb{P}(\xi = 1)\mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(\xi = 0)\mathbb{P}(Y = x)$

$= q \cdot p_X(x) + (1-q) p_Y(x)$

dove si è usato l'indipendenza di ξ da (X,Y). //

Esercizio 9. Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile, e siano $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ misure di probabilità su $\mathcal{F}$. Sia $\lambda \in [0,1]$. Poniamo

$$\bar{\Omega} \doteq \{0,1\} \times \Omega,$$

Sia Q la misura di probabilità su $\mathcal{P}(\{0,1\}) \otimes \mathcal{F}$ determinata da

$$Q(\{\omega_0\} \times A) \doteq \begin{cases} \lambda \cdot \mathbf{P}_1(A) & \text{se } \omega_0 = 0, \\ (1-\lambda) \cdot \mathbf{P}_2(A) & \text{se } \omega_0 = 1, \end{cases} \quad \omega_0 \in \{0,1\},\ A \in \mathcal{F}.$$

Sia $E \in \mathcal{F}$. Si calcoli la probabilità rispetto a Q dell'evento

$$B \doteq \{(\omega_0, \omega_1) \in \bar{\Omega} : \omega_1 \in E\},$$

e si decida se gli eventi B e $C \doteq \{(\omega_0, \omega_1) \in \bar{\Omega} : \omega_0 = 0\}$ sono indipendenti o meno.

Sol: Osserviamo che $B = (\{1\} \times E) \sqcup (\{0\} \times E)$, dunque

$Q(B) = Q(\{1\} \times E) + Q(\{0\} \times E) = \lambda \mathbb{P}_1(E) + (1-\lambda)\mathbb{P}_2(E)$

mentre $Q(C) = Q(\{0\} \times \Omega) = \lambda \cdot \mathbb{P}_1(\Omega) = \lambda$

e $Q(B \cap C) = Q(\{0\} \times E) = \lambda \cdot \mathbb{P}_1(E)$

In conclusione:

$Q(B \cap C) = \lambda \cdot \mathbb{P}_1(E) \neq Q(B) \cdot Q(C) = \cancel{\lambda(\lambda \mathbb{P}_1(E) + (1-\lambda)\mathbb{P}_2)}$

solo quando $\lambda = 1, 0$

ovvero B e C non sono indipendenti //

Esercizio 8. Sia Ω un insieme non-vuoto, e sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra in Ω. Sia $\tilde{\Omega}$ un sottoinsieme di Ω non-vuoto (non necessariamente $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$). Poniamo

$$\tilde{\mathcal{F}} \doteq \left\{ A \cap \tilde{\Omega} : A \in \mathcal{F} \right\}.$$

Si mostri che allora $\tilde{\mathcal{F}}$ è una σ-algebra in $\tilde{\Omega}$.

Sol. Dobbiamo verificare le proprietà di σ-algebra.

$\boxed{i.}$ $\phi \in \tilde{\mathcal{F}}$. Infatti $\phi \in \mathcal{F}$ (poiché è σ-algebra) ed $\tilde{\Omega} \cap \phi = \phi \Rightarrow \phi \in \tilde{\mathcal{F}}$

$\boxed{ii.}$ Se $E \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow E^c \in \tilde{\mathcal{F}}$ (chiusura rispetto al complementare)

Infatti se $E \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow E = E' \cap \tilde{\Omega}$, con $E' \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ E^c \text{ in } \tilde{\Omega}}}{\tilde{\Omega} \setminus E} = (\Omega \cap \tilde{\Omega}) \setminus (E' \cap \tilde{\Omega}) = (\Omega \setminus E') \cap \tilde{\Omega} = (E')^c \cap \tilde{\Omega} \in \tilde{\mathcal{F}}$$

$\boxed{iii.}$ Se $(E_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \tilde{\mathcal{F}}$ (chiusura rispetto unione numerabile)

Infatti: $E_i = E_i' \cap \tilde{\Omega}$, con $E_i' \in \mathcal{F}$, $\forall i \in \mathbb{N}$

Quindi

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (E_i' \cap \tilde{\Omega}) = \underbrace{\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i'\right)}_{\in \mathcal{F}} \cap \tilde{\Omega} \in \tilde{\mathcal{F}}$$

#

Esercizio 11. Sia $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ una funzione di ripartizione. Sia ξ una variabile aleatoria reale definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione uniforme continua su $(0, 1)$. Poniamo

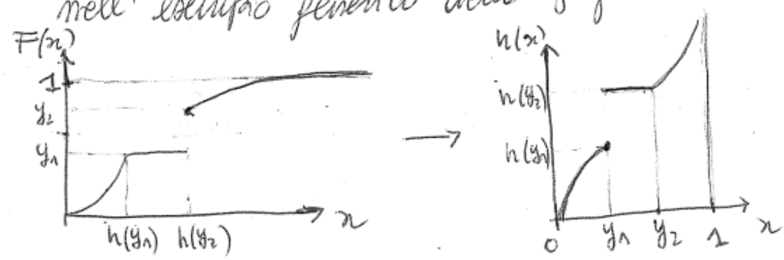
$$h(x) \doteq \inf \{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\}, \quad x \in (0, 1).$$

Si mostri che h è ben definita come funzione $(0, 1) \to \mathbb{R}$ e si determini la distribuzione della variabile aleatoria Y data da

$$Y(\omega) \doteq h(\xi(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Sol: Osservazioni preliminari:

1. h è detta "inversa generalizzata" di F, o anche funzione quantile di F
2. Se F è continua e strettamente crescente, allora $h \equiv F^{-1}$. In generale, si comporta come nell'esempio generico della figura:



In particolare h è <u>non-decrescente</u> e continua a sinistra

3. $h(F(x)) \leq x$
4. $F(h(x)) \geq x$.

Andando a risolvere il problema, osserviamo ancora che se F è continua e crescente (strettamente), cioè se $h = F^{-1}$, allora 16

$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F^{-1}(\xi) \leq y) = \mathbb{P}(\xi \leq F(y))$

↳ poiché $F^{-1} \nearrow$

$= F(y)$

↳ poiché $\xi \sim \mathcal{U}[0,1]$

ovvero Y ha legge F.

Più in generale (quindi F funzione di ripartizione) per le proprietà 2, 3, 4 si ha che:

$(*)$ $h(x) \leq y \iff x \leq F(y)$. Infatti:

1: $h(x) \leq y \overset{F\nearrow}{\Longrightarrow} F(h(x)) \leq F(y) \overset{P.4}{\Longrightarrow} x \leq F(y)$

2: $x \leq F(y) \overset{h\nearrow}{\Longrightarrow} h(x) \leq h(F(y)) \overset{P.3}{\Longrightarrow} h(x) \leq y$

Dunque

$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(\xi) \leq y) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(\xi \leq F(y))$

$= F(y)$

↳ poiché $\xi \sim \mathcal{U}[0,1]$: $\mathbb{P}(\xi \leq z) = z$

In conclusione si è ottenuto che Y ha distribuzione F. #

Oss: Se è possibile calcolare h (inversa generalizzata di F) allora tale risultato permette di campionare una qualsiasi distribuzione a partire dall'uniforme.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione geometrica (a partire da zero) di parametro $p \in (0,1)$. Poniamo

$$Y(\omega) \doteq \sin\left(\frac{\pi}{2}X(\omega)\right), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino valor medio e varianza di Y.

(ii) Si determini la distribuzione di Y.

(iii) Si determini la distribuzione congiunta di X e Y.

(iv) Si calcoli la covarianza tra X e Y.

$\boxed{\text{i.}}$ Calcolare valor medio e varianza di Y.

Sol: $\cdot\ \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cdot (1-p)^k p \overset{*}{=}$ →

8

- Se $k=2n \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right)=0$
- Se $k=2n+1$ allora si ha:

  * se $k=1+4n \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}(1+4n)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
  $(1,5,9,\dots)$

  * se $k=3+4n \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}(3+4n)\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1$
  $(3,7,11,\dots)$

Dunque: $\mathbb{E}(Y)=\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^{1+4n}-\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^{3+4n}$

$$=\frac{p\cdot(1-p)}{1-(1-p)^4}-\frac{p(1-p)^3}{1-(1-p)^4}=\frac{p(1-p)(1-(1-p)^2)}{1-(1-p)^4}$$

Similmente si ha:

$$\mathbb{E}(Y^2)=\mathbb{E}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}X\right)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^{1+2n}=\frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}$$

da cui si ricava $Var(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(Y)^2=\dots$

#

$\boxed{ii}$ Si determini la distribuzione di Y

Sol: $Im(Y)=\{0,-1,1\}$

$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=2k,\ k\in\mathbb{N}_0)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{2k}\cdot p=\frac{p}{1-(1-p)^2}$$

$$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=1+4k,\ k\in\mathbb{N}_0)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{1+4k}\cdot p=\frac{p(1-p)}{1-(1-p)^4}$$

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\mathbb{P}(X=3+4k,\ k\in\mathbb{N}_0)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{3+4k}\cdot p=\frac{p(1-p)^3}{1-(1-p)^4}$$

#

$\boxed{iii}$ Si determini la distribuzione congiunta di (X,Y).

9

Sol: Cerchiamo

$$\mathbb{P}(X=k,\ Y=j)\quad \text{con } k\in\mathbb{N}_0,\ j\in\{-1,0,1\}$$

Come si è visto nei punti precedenti:

"$Y=0$" = "$X=2n$"

"$Y=1$" = "$X=1+4n$"

"$Y=-1$" = "$X=3+4n$"

dunque

$\mathbb{P}(Y=0, X=2n) = \mathbb{P}(X=2n) = (1-p)^{2n} p \quad , \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\mathbb{P}(Y=1, X=1+4n) = \mathbb{P}(X=1+4n) = (1-p)^{1+4n} \cdot p \quad , \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\mathbb{P}(Y=-1, X=3+4n) = \mathbb{P}(X=3+4n) = (1-p)^{3+4n} \cdot p \quad , \forall n \in \mathbb{N}_0$

e $\mathbb{P}(Y=j, X=k) = 0 \quad \forall (k,j)$ diversi dai casi sopra. #

$\boxed{iv}$ Calcolare la covarianza tra X ed Y.

Sol: Usiamo la formula: $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

con $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{p(1-p)(1-(1-p)^2)}{1-(1-p)^4}$

e $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p (1-p)^k = \dfrac{1-p}{p}$

Infine: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{j=-1}^{1} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j, X=k) \cdot j \cdot k =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (1+4n)(1-p)^{1+4n} \cdot p - \sum_{n=0}^{+\infty} (3+4n)(1-p)^{3+4n} p = \dots$. #

Esercizio 2. Siano X, ξ variabili aleatorie reali definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X è uniforme continua su $(0, 2)$;
- ξ è tale che $\mathbf{P}(\xi = -1) = 1/4$, $\mathbf{P}(\xi = 0) = 1/2$, $\mathbf{P}(\xi = 1) = 1/4$;
- X e ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria Y tramite

$$Y(\omega) \doteq \xi(\omega) \cdot X(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge di Y e si decida se è assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue) o meno.

E2: Siano X, ξ v.a. indipendenti con $X \sim Unif(0,2)$
e $P(\xi=-1) = \frac{1}{4} = P(\xi=1)$, $P(\xi=0) = 0$.

Poniamo $Y \doteq \xi \cdot X$.

(i) Media e varianza di X, Y:

Noto: Se $Z \sim Unif(a,b)$, allora $E[Z] = \frac{a+b}{2}$, $var(Z) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Scegliendo $a=0$, $b=2$, otteniamo media e varianza di X:

$$E[X] = 1, \quad var(X) = \frac{1}{3}.$$

[In alternativa: calcolo basato sulla densità $f_X = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{(0,2)}$]

Questo implica $E[X^2] = var(X) + (E[X])^2 = \frac{4}{3}$.

Inoltre, $E[\xi] = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$,

$$var(\xi) = E[\xi^2] = 1 \cdot (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + 0 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Media di Y: $E[Y] = E[\xi \cdot X] \underset{\text{indipendenza tra } \xi \text{ e } X}{=} E[\xi] \cdot E[X]$

$\overset{E[\xi]=0}{\rightsquigarrow}$ $E[Y] = 0$.

Varianza: $var(Y) = E[Y^2] = E[\xi^2 \cdot X^2] \overset{(+\text{ trasformazione})}{=} \underbrace{E[\xi^2]}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{E[X^2]}_{=\frac{4}{3}}$.
da sopra

$\rightsquigarrow$ $var(Y) = \frac{2}{3}$.

(ii) Covarianza di X e Y:

$$cov(X,Y) = E[(X-1) \cdot Y] = E[\xi \cdot X \cdot (X-1)]$$

$$\overset{\text{indipendenza}}{=} \underbrace{E[\xi]}_{=0} \cdot E[X \cdot (X-1)] = 0$$

$\rightsquigarrow$ X, Y sono incorrelate.

Ricorda: Covarianza zero è necessario ma non sufficiente per l'indipendenza.

Infatti, X e Y non sono indipendenti:

Ad esempio, $P(Y>1, X<1) = 0$ poiché $\xi \cdot X \le X$ P-q.c.,

mentre $P(Y>1) = P(\xi=1, X>1) \overset{\text{indip.}}{=} P(\xi=1) \cdot P(X>1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} > 0$

e $P(X<1) = \frac{1}{2} > 0$.

(iii) Per determinare la distribuzione di Y calcoliamo la funzione di ripartizione: Per $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\xi \cdot X \leq y)$$

$$\overset{\text{prob. totali}}{=} P(X \leq y, \xi = 1) + P(0 \leq y, \xi = 0) + P(-X \leq y, \xi = -1)$$

$$\overset{\text{indipendenza}}{=} \frac{1}{4} P(X \leq y) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) + \frac{1}{4} P(-X \leq y).$$

Ricorda: $X \sim \text{Unif}(0,2)$, quindi $-X \in \text{Unif}(-2,0)$

funzione di ripartizione $\rightsquigarrow$ $F_X(y) = \frac{y}{2} \cdot \mathbb{1}_{(0,2)}(y) + \mathbb{1}_{[2,\infty)}(y)$

e $F_{-X}(y) = 1 - F_X(-y) = \frac{2+y}{2} \cdot \mathbb{1}_{(-2,0)}(y) + \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$

$$\rightsquigarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -2, \\ \frac{2+y}{8} & \text{se } y \in [-2,0), \\ \frac{3}{4} + \frac{y}{8} & \text{se } y \in [0,2), \\ 1 & \text{se } y \geq 2. \end{cases}$$

Nota: F_Y è discontinua in zero con $F_Y(0) - F_Y(0-) = \frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow$ Y <u>non</u> è assolutamente continua.

//

Esercizio 2. Siano X, ξ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X è uniforme continua su $[-1, 1]$;
- ξ è di Bernoulli di parametro $1/2$;
- X e ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria Y tramite

$$Y(\omega) \doteq \xi(\omega) \cdot X(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge di Y e si decida se è assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue) o meno.

E2: Siano X, ξ v.a. indipendenti con
$X \sim \text{Unif}(-1,1)$, $\xi \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$.

Poniamo $Y \doteq \xi \cdot X$.

(i) Media e varianza di X, Y:

Noto: Se $Z \sim \text{Unif}(a,b)$, allora $E[Z] = \frac{a+b}{2}$, $\text{var}(Z) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Scegliendo $a=-1$, $b=1$, otteniamo media e varianza di X:

$$E[X] = 0, \quad \text{var}(X) = \frac{1}{3}.$$

[In alternativa: calcolo basato sulla densità $f_X = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{(-1,1)}$]

Questo implica $E[X^2] = \text{var}(X) = \frac{1}{3}$.

Inoltre, $E[\xi] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$, $E[\xi^2] = \frac{1}{2}$,

$\rightsquigarrow$ $\text{var}(\xi) = E[\xi^2] - E[\xi]^2 = \frac{1}{4}$.

Media di Y: $E[Y] = E[\xi \cdot X] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indipendenza tra } \xi \text{ e } X}}{=} E[\xi] \cdot E[X]$

$\overset{E[X]=0}{\rightsquigarrow}$ $E[Y] = 0$.

Varianza: $\text{var}(Y) = E[Y^2] = E[\xi^2 \cdot X^2] \overset{\text{(+ trasformazione)}}{=} \underbrace{E[\xi^2]}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{E[X^2]}_{=\frac{1}{3}}$.

da sopra

$\rightsquigarrow$ $\text{var}(Y) = \frac{1}{6}$.

(ii) Covarianza di X e Y:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X-E[X])\cdot(Y-E[Y])] = E[X\cdot Y] = E[\xi\cdot X^2]$$

$$\overset{\text{indipendenza}}{=} \underbrace{E[\xi]}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{E[X^2]}_{=\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}.$$

$\rightsquigarrow$ X, Y sono positivamente correlate

[Ricorda: Covarianza zero è necessario ma non sufficiente per l'indipendenza.]

$\rightsquigarrow$ X e Y <u>non</u> sono indipendenti.

(iii) Per determinare la distribuzione di Y calcoliamo la funzione di ripartizione:

Per $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\xi\cdot X \le y)$$

$$\overset{\text{prob. totali}}{=} P(X \le y, \xi = 1) + P(0 \le y, \xi = 0)$$

$$\overset{\text{indipend.}}{=} P(X \le y)\cdot P(\xi = 1) + P(0 \le y)\cdot P(\xi = 0)$$

$$\Big|\ X \sim \mathrm{Unif}(-1,1),\ \xi \sim \mathrm{Ber}(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y+1}{2}\cdot \mathbb{1}_{[-1,1)}(y) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(y) + \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) \right)$$

$$\rightsquigarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -1, \\ \frac{y+1}{4} & \text{se } y \in [-1,0), \\ \frac{y+3}{4} & \text{se } y \in [0,1), \\ 1 & \text{se } y \geq 1. \end{cases}$$

Nota: F_Y è discontinua in zero con $F_Y(0) - F_Y(0-) = \frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow$ Y non è assolutamente continua.

//

Esercizio 4. Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione normale standard. Poniamo

$$Y_n \doteq \frac{1}{n^{2/3}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in probabilità e ne si determini il limite.

E4: Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. con comune distribuzione $N(0,1)$.

Poniamo $Y_n \doteq \frac{1}{n^{2/3}} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$.

Allora $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero in probabilità, ma anche in L^2.

Basta mostrare: $E[|Y_n|^2] \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Grazie alle ipotesi, X_i, $i \in \mathbb{N}$, i.i.d. e

$E[X_i] = 0$, $E[X_i^2] = var(X_i) = 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

$$\rightsquigarrow \quad E[|Y_n|^2] = \frac{1}{n^{4/3}} E\Big[\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big)^2\Big] \qquad \Big|\ \text{indip.},\ E[X_i] = 0$$

$$= \frac{1}{n^{4/3}} \Big(\sum_{i=1}^n E[X_i^2]\Big) \qquad \Big|\ E[X_i^2] = 1$$

$$= \frac{n}{n^{4/3}}$$

$$= \frac{1}{n^{1/3}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Alternativa: Per ipotesi, $X_1, \dots, X_n$ indipendenti e standard normali per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, n)$$

$$\rightsquigarrow \quad Y_n = \frac{1}{n^{2/3}} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\Big(0, \frac{1}{n^{1/3}}\Big) \qquad \rightsquigarrow var(Y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

//

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono in $\mathbb{R}$):

(i) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq x^3 \cdot \mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $X = \exp(Z)$ per una variabile aleatoria Z uniforme su $[-1, 1]$;

(iii) $X = \exp(Z)$ per una variabile aleatoria Z esponenziale di parametro uno.

① X f. di ripartizione F_X con $F_X(x) = x^3 \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + 1_{[1,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

F_X ass. continua con $x^3 \cdot 1_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

e con densità $F'(x) = 3x^2 \cdot 1_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$E[X] = \int_0^\infty x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 = 3\int_0^1 x^3 = \left[3\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$

$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 = 3\int_0^1 x^4 = \left[3\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}$

$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$

② $X = \exp(Z)$ per $Z \sim Unif(-1,1)$ → densità Unif $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = \left[\frac{1}{2}e^x\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$

$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x} = \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})$

$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^2 + e - 2)$

③ $X = \exp(Z)$ di parametro 1

→ F_X ass. continua con densità $1 \cdot e^{-x} \cdot 1_{(0,\infty)}$, $x \in \mathbb{R}$

$E[X] = \int_{\mathbb{R}} e^x \cdot f_X(x)dx = \int_0^\infty e^x \cdot e^{-x} = \int_0^\infty 1 = [x]_0^\infty = \infty$

$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} e^{2x} \cdot f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{2x} \cdot e^{-x} = \int_0^\infty e^x = [e^x]_0^\infty = \infty$

$var(x)$ non esiste

Esercizio 11. Siano X, ξ variabili aleatorie reali indipendenti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ co X standard normale e ξ tale che $\mathbf{P}(\xi = -1) = 1/2 = \mathbf{P}(\xi = 1)$. Poniamo

$$Y(\omega) \doteq \xi(\omega) \cdot X(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Si determinino le distribuzioni di Y e di (X, Y).

Esercizio 2 (Esercizio 3.22 del libro). "Si sceglie 'a caso' un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Si determini la densità discreta di X."

Soluzione 3.22. La variabile X assume solo i valori $0, 1 \ldots, 5$. $X = k$ significa che nel lotto di 5 oggetti k sono difettosi. Possiamo calcolare $\mathrm{P}(X = k)$ con la formula "casi favorevoli su casi possibili" della probabilità uniforme. *Casi possibili*: ci sono $\binom{100}{5}$ modi di scegliere 5 oggetti tra 100. *Casi favorevoli*: devo scegliere 5 oggetti di cui k difettosi. Scelgo prima i k difettosi tra i 10 difettosi in $\binom{10}{k}$ modi, poi scelgo i rimanenti $5-k$ oggetti tra i rimanenti $100-10 = 90$ non difettosi in $\binom{90}{5-k}$ modi. In definitiva i casi favorevoli sono $\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ e quindi:

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Facendo un po' di conti si ottiene: $\mathrm{P}(X = 0) \simeq 0.583$, $\mathrm{P}(X = 1) \simeq 0.340$, $\mathrm{P}(X = 2) \simeq 0.070$, $\mathrm{P}(X = 3) \simeq 0.007$, $\mathrm{P}(X = 4) \simeq \mathrm{P}(X = 5) \simeq 0$. Per essere sicuri di non aver sbagliato i conti su può fare la verifica $\sum_{k=0}^{5} \mathrm{P}(X = k) = 1$.

Esercizio 4. Siano $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$, $(\Omega_1, \mathbf{P}_2)$ spazi di probabilità discreti (nota che $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ sono definite sullo stesso spazio campionario), e sia $\lambda \in [0, 1]$. Poniamo

$$\Omega \doteq \{0, 1\} \times \Omega_1,$$

e per $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in \Omega$,

$$q(\omega) \doteq \begin{cases} \lambda \cdot \mathbf{P}_1(\{\omega_1\}) & \text{se } \omega_0 = 1, \\ (1-\lambda) \cdot \mathbf{P}_2(\{\omega_1\}) & \text{se } \omega_0 = 0. \end{cases}$$

a) Si verifichi che q è una densità discreta su Ω.

b) Sia Q la misura di probabilità indotta da q. Sia $E \subseteq \Omega_1$. Si calcoli la probabilità rispetto a Q dell'evento

$$B = \{\omega \in \Omega : \omega_1 \in E\},$$

e si determini se gli eventi B e $A \doteq \{\omega \in \Omega : \omega_0 = 1\}$ sono indipendenti o meno.

$(\Omega_1, P_1), (\Omega_2, P_2) \to P_1 \not\in P_2$ in $(\Omega] \to \Omega = \{0,1\} \times \Omega_1$

e $\lambda \in (0,1)$, $\omega \in (\omega_0, \omega_1) \in \Omega$

$$\to q(\omega) = \begin{cases} \lambda \cdot P_1(\{\omega_1\}) & \text{se } \omega_0 = 1 \\ (1-\lambda) \cdot P_2(\{\omega_1\}) & \text{se } \omega_0 = 0 \end{cases}$$

(a) Si verifichi che q è una densità discreta

Per essere densità discreta

- $f(x) \geq 0$
- $\sum_{x=1}^{n} P(x) = 1$

Per $\omega_0 = 1 \to \lambda \cdot P_1\{\omega_1\}$ $\lambda \in [0,1]$

Notiamo quindi che può essere riscritto come $\lambda \cdot 1_{[0,1]}\{\omega_1\}$

e più in generale, $P_1\{\omega_1\}$ deve essere densità discreta, risultando

ciò è sodisfatto anche per il complementare:

$(1-\lambda) \cdot P_2\{\omega_1\} \to (1-\lambda)$

$\sum_{i=1}^{n} P(x) = 1$

(b) Prob. di $B = \{\omega \in \Omega : \omega_1 \in B\}$

dipende da $\omega_1 \in B \subseteq \Omega_1$, allora, siamo sempre in $[0,1]$.

Essendoci $\omega \in \Omega$, allora, esso potrà similmente assumere

$$B = \begin{cases} \lambda & \text{se } x \in [0,1] \\ (1-\lambda) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $\omega_0 = 1 \to \lambda$.

A e B sono indipendenti sse

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Sapendo, dunque, che $P(A)$ è $\omega_0 = 1$, allora $P(A) = \lambda \cdot P_1(\omega_1) = \lambda \cdot 1_{[0,1]}(x)$

Essendo che $\Omega = \{0,1\} \times \Omega_1$, similmente, le probabilità, viene insiemisticamente, ~~??~~ graficamente come da me appunto ad ristretta di prodotto cartesiano.

allora, A e B sono indipendenti, infatti:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \lambda^2 \sim \lambda$

$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot 1_{[0,1]}$

Esercizio 8 (Esercizio 7.10 del libro). "In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B. Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantische che essi votino per il candidato A. Tutti gli altri elettori votano "a caso", scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

(i) Supponiamo che l'organizzazione malavitosa controlli $n = 2000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?

(ii) Qual è il numero minimo n di individui che l'organizzazione malavitosa deve controllare per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?"

Soluzione 7.10. (i) Sia X il numero di voti ricevuti da A tra i 998 000 elettori non controllati. Per ipotesi $X \sim \mathrm{Bin}(998\,000, \frac{1}{2})$. Si noti che il candidato A vince se e solo se $X > 498\,000$. Usando l'approssimazione normale (senza correzione di continuità, che visti i numeri elevati non è rilevante) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 498\,000) &= \mathrm{P}\left(\frac{X - 998\,000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{998\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} > \frac{498\,000 - 998\,000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{998\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \right) \\ &\approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{-1\,000}{499.5} \right) \approx 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) \approx 0.9772 . \end{aligned}$$

(ii) Sia ora X il numero di voti ricevuti da A tra i $1\,000\,000 - n$ elettori non controllati. Per ipotesi $X \sim \mathrm{Bin}(1\,000\,000 - n, \frac{1}{2})$ e il candidato A vince se e solo se $X > 500\,000 - n$, pertanto

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X > 500\,000 - n) \\ &\quad = \mathrm{P}\left(\frac{X - (1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{(1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} > \frac{500\,000 - n - (1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{(1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \right) \\ &\quad \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{-n}{\sqrt{1\,000\,000 - n}} \right) \approx \Phi\left(\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000 - n}} \right) . \end{aligned}$$

Esercizio 9 (Esercizio 7.11 del libro)**.** Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione comune Unif$[-1,1]$. Si determini per ogni $t \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{(X_1 + \dots X_n)^2}{n} > t\right).$$

Soluzione 7.11. Si noti che $\mu := \mathrm{E}(X_n) = 0$ e $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_n) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$, dunque $\sigma = \sqrt{1/3} \approx 0.577$ (abbiamo applicato le formule notevoli per media e varianza di una variabile aleatoria uniforme, ricavate nel Paragrafo 6.3.1). Possiamo allora riscrivere la probabilità di interesse facendo apparire la variabile aleatoria standardizzata

$$Z_n := \frac{(X_1 + \ldots + X_n) - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

nel modo seguente:

$$\mathrm{P}\left(\frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n} > t\right) = \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} > \sqrt{t}\right) = \mathrm{P}\left(Z_n > \sigma\sqrt{t}\right).$$

Per il teorema limite centrale, indicando con Z una variabile aleatoria normale standard, otteniamo dunque

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n} > t\right) = \mathrm{P}\left(Z > \sigma\sqrt{t}\right) = 1 - \Phi(\sigma\sqrt{t}) = 1 - \Phi(0.577\sqrt{t}).$$

Si noti che il limite è espresso in termini della funzione “notevole” Φ, i cui valori possono essere calcolati usando la tavola a pagina S-113.