Foglio 4

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono in $\mathbb{R}$):

(i) X è uniforme su $[1, 2]$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq x^3 \cdot \mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X = \exp(Z)$ per una variabile aleatoria Z esponenziale di parametro uno.

① $X \sim \text{Unif}[1;2]$ $\qquad \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2-1} = 1$

→ X ass. continua con $f_X(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{(2;1)}(x)$

$E[X] = 1\int_1^2 x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{2}$

$E[X^2] = 1\int_1^2 x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{7}{3}$

$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{28-27}{12} = \frac{1}{12}$

② $F_X(x) = x^3 \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$

F_X è continua e C^1 su $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ → F_X ass. continua con densità

$f_X(x) = F'_X(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0,1\}} = 3x^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}$, $x \in \mathbb{R}$

$E[X] = \int_0^1 x \cdot 3x^2 = 3\int_0^1 x^3\,dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 3\left[\frac{1}{4} - \frac{0}{4}\right] = \frac{3}{4}$

$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 = 3\int x^4\,dx = 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 3\left[\frac{1}{5} - \frac{0}{5}\right] = \frac{3}{5}$

$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$

③ $X = \exp(1)$ var. aleat. esponenz. di parametro uno

$E[X] = E[e^Y] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot f_y(x)\,dx = 1 \cdot e^{-x} \cdot 1_{(0,\infty)}$

$= \int_0^{\infty} e^x \cdot e^{-x} = \int_0^{\infty} e^0 = \int_0^{\infty} 1 = x\Big|_0^{\infty} = \infty$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} \cdot e^{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} = e^{-x}\Big|_0^{\infty} = e^{-\infty} - e^0 = 0 - 1 = -1$

Essendo inf., la varianza non esiste finita

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Poniamo

$$Y(\omega) \doteq \sqrt{X(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Si calcoli la funzione di ripartizione di Y e si decida se Y è assolutamente continua o meno.

$y(\omega) = \sqrt{X(\omega)}$, $\omega \in \Omega$

$Y(\omega) = \sqrt{1 - e^{-\lambda x}}$ f. di ripartizione.

Per decidere se è assol. continua si esamina $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot 1_{[0,\infty)}$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} \sqrt{1 - e^{-\lambda x}}\,dx$ e si esamina se ha punti di discontinuità

INT. DIVERGENTE e F non è ass. continua su $[0,\infty)$

Esercizio 3 (Esercizio 6.7 in CD). Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-\pi/2, \pi/2)$. Poniamo $Y \doteq \cos(X)$. Si mostri che Y è assolutamente continua e se ne determini la densità.

Soluzione 6.7. Per ipotesi $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$, quindi

$$\mathrm{P}(X \in A) = \int_{A\cap(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{|A \cap (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})|}{\pi}.$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y. Chiaramente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$, dal momento che $\cos(x) \in [0,1]$ per $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Si noti che per $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ e $y \in [0,1]$ si ha $\cos(x) \le y$ se e solo se $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})$, quindi per ogni $y \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(\cos(X) \le y) \\
&= \mathrm{P}\left(X \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \tfrac{\pi}{2})\right) \\
&= \frac{|(-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})|}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(y)\right).
\end{aligned}$$

Dato che la funzione F_Y è $\mathscr{C}^1$ a tratti (è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$), segue dalla Proposizione 6.16 che Y è assolutamente continua, con densità

$$f_Y(y) = (F_Y)'(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

Esercizio 4 (Esercizio 6.11 in CD). Sia X una variabile aleatoria reale con distribuzione uniforme su $(-1,1)$. Poniamo $Y \doteq X^+ = \max\{0, X\}$. Si determini la funzione di ripartizione di Y e si deduca che Y non è né discreta né assolutamente continua.

Soluzione 6.11. Chiaramente $Y \ge 0$, quindi per $y < 0$ si ha $F_Y(y) = \mathrm{P}(X \le y) = 0$. Per $y \ge 0$ si ha $\max(x,0) \le y$ se e solo se $x \le t$, quindi

$$F_Y(y) = F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{\min(y,1)} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\min(y,1)+1}{2}.$$

In definitiva

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{y+1}{2} & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$

Si noti che $F_Y(0+) = F_Y(0) = \frac{1}{2} \neq F_Y(0-) = \lim_{y\uparrow 0} F_Y(y) = 0$, quindi la funzione $F_Y(y)$ non è continua nel punto $y = 0$; di conseguenza, la variabile aleatoria Y non è assolutamente continua. Inoltre, la variabile aleatoria Y non può essere nemmeno discreta: infatti, se lo fosse, per la relazione (5.6) si dovrebbe avere che $1 = \sum_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{P}(Y = y) = \sum_{y\in\mathbb{R}}(F_Y(y) - F_Y(y-))$; ma $F_Y(y) = F_Y(y-)$ per ogni $y \neq 0$ e quindi l'ultima somma vale $F_Y(0) - F_Y(0-) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 5 (Esercizio 7.8 in CD). "Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim \mathrm{Exp}(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale, si calcolino:

(i) se $n = 100$ la probabilità $\mathbf{P}(T < 90)$;

(ii) il valore minimo di n per cui $\mathbf{P}(T < 90) \le 0.05$."

Soluzione. a.

$$P(\overline{T}_{100} < 0.9) = P(Z_{100} \leq -0.1 \cdot 10) \simeq \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.15866.$$

b.

$$P\left(\overline{T}_n < \frac{90}{n}\right) = P\left(Z_n < \left(\frac{90}{n} - 1\right)\sqrt{n}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right).$$

Vogliamo allora che sia

$$\Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95,$$

da cui

$$\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}} \geq 1.64,$$

che si riscrive nella forma

$$n - 1.64\sqrt{n} - 90 \geq 0 \;\Rightarrow\; n \geq 107.$$

Esercizio 6. Lanciamo una moneta non necessariamente equilibrata n volte. Sia $k \in \{0, \ldots, n\}$. Se $p \in [0, 1]$ denota la probabilità di ottenere testa in un singolo lancio, per quale valore di p diventa massima la probabilità di ottenere k volte testa in n lanci?

Sol.: Se $X = \#$ teste ottenute in n lanci, allora

$X \sim \text{Bin}(n, p)$ e per $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: g(p)$$

Cerchiamo il massimo di $g(p)$:

$$g'(p) = \binom{n}{k} \cdot \left(k p^{k-1}(1-p)^{n-k} - (n-k)p^k(1-p)^{n-k-1}\right)$$

$$= \binom{n}{k} p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}\left(k(1-p) - (n-k)p\right) = 0$$

$$\iff k - \cancel{kp} - np + \cancel{kp} = 0 \iff p = \frac{k}{n}$$

dunque $p = \frac{k}{n}$ è pto estremale di $g(p)$, e si può verificare essere un massimo (per esempio mostrando che $g''(p) \geq 0$, o anche osservando che $g(0) = 0 < g(p)$) #

Esercizio 7. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione uniforme $\text{Unif}(0, a)$ per un $a > 0$. Poniamo

$$Y_n \doteq \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Si calcoli $\mathbf{E}[Y_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Come si comporta $\mathbf{E}[Y_n]$ per $n \to \infty$?

(ii) Valor atteso di Y_n:

Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y_n: Per $y \in \mathbb{R}$:

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \le y) = P(X_1 \le y, \dots, X_n \le y)$$

$$\overset{\text{indep.}}{=} P(X_1 \le y) \cdot \ldots \cdot P(X_n \le y)$$

$$\overset{\text{ident. distr.}}{=} \left(P(X_1 \le y) \right)^n \qquad \Big|\ X_1 \sim Unif(0,a)$$

$$= \left(\frac{y}{a} \cdot \mathbb{1}_{(0,a)}(y) + \mathbb{1}_{[a,\infty)}(y) \right)^n$$

Sia Z una v.a. reale <u>non-negativa</u>. Allora

$$E[Z] = \int_{(0,\infty)} P(Z \ge z)\, \lambda_1(dz) = \int_{(0,\infty)} P(Z > z)\, \lambda_1(dz)$$

$$= \int_{(0,\infty)} \left(1 - F_Z(z)\right) \lambda_1(dz)$$

Per la formula,

$$E[Y_n] = \int_{(0,\infty)} \left(1 - F_{Y_n}(y)\right) \lambda_1(dy)$$

$$= \int_{(0,\underline{a})} \left(1 - \left(\frac{y}{a}\right)^n\right) \lambda_1(dy)$$

$$= a - \frac{1}{a^n} \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} \right]_0^a$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Nota: $E[Y_n] < a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

ma $E[Y_n] \overset{n \to \infty}{\nearrow} a$.

(ii) Convergenza di (Y_n):

a) $Y_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ in L^1:

$$E[|Y_n - a|] \underset{\substack{\uparrow \\ Y_n \leq a \text{ P-q.c.}}}{=} E[a - Y_n] = a - E[Y_n]$$

$$\overset{(i)}{=} a - a\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(di conseguenza convergenza in probabilità e in distribuzione)

b) $Y_n \overset{n\to\infty}{\nearrow} a$ P-q.c.:

Nota: • $0 \leq Y_n \leq a$ P-q.c. $\forall n \in \mathbb{N}$

• $Y_n \leq Y_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\underset{\text{+ monotonia}}{\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\rightsquigarrow}}$ $Y_n \overset{n\to\infty}{\nearrow} Y$ P-q.c. per una v.a. Y a valori in $[0, a]$

Per convergenza ~~dominata~~ monotona (dominata): $E[Y_n] \overset{n\to\infty}{\nearrow} E[Y]$

$\overset{(*)}{\rightsquigarrow}$ $E[Y] = a$.

Ma $Y \leq a$ P-q.c.

$\overset{E[Y]=a}{\rightsquigarrow}$ $Y = a$ P-q.c.

$$\left[\quad E[Y] = a \rightsquigarrow E[\underbrace{a - Y}_{\geq 0 \text{ P-q.c.}}] = 0 \quad \right]$$

$\rightsquigarrow$ $Y_n \overset{n\to\infty}{\nearrow} a$ P-q.c.