ESERCIZI

1. Si lancia un dado truccato in modo che si abbia

$$P(\text{ottenere il punteggio } i) = \begin{cases} p & \text{se } i \text{ è dispari} \\ 2p & \text{se } i \text{ è pari} \end{cases}$$

con $p \in (0,1)$. Sia D il punteggio ottenuto. Definiamo le variabili aleatorie

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se } D \text{ è pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{se } D > 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare la densità congiunta di (X,Y).

<u>Soluzione</u>. Innanzitutto determiniamo il valore di p. La condizione di normalizzazione si traduce in

$$p + 2p + p + 2p + p + 2p = 1,$$

da cui ricaviamo $p = 1/9$. Quindi otteniamo

$$P(D=1) = P(D=3) = P(D=5) = 1/9$$

e

$$P(D=2) = P(D=4) = P(D=6) = 2/9.$$

Caratterizziamo il vettore aleatorio (X, Y). Abbiamo $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ e il nostro vettore prenderà valori in questo insieme. Calcoliamo la densità.

$$
\begin{aligned}
p_{XY}(0,0) &= P(X=0, Y=0) \\
&= P(\{D \text{ dispari}\} \cap \{D \leq 3\}) \\
&= P(D \in \{1, 3\}) \\
&= P(D=1) + P(D=3) = 2/9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{XY}(0,1) &= P(X=0, Y=1) \\
&= P(\{D \text{ dispari}\} \cap \{D > 3\}) \\
&= P(D=5) = 1/9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{XY}(1,0) &= P(X=1, Y=0) \\
&= P(\{D \text{ pari}\} \cap \{D \leq 3\}) \\
&= P(D=2) = 2/9
\end{aligned}
$$

$$
p_{XY}(1,1) = 1 - p_{XY}(0,0) - p_{XY}(0,1) - p_{XY}(1,0) = 4/9 .
$$

2. Un'urna contiene 6 palline colorate (rosso/nero) e numerate (da 1 a 6). Le tre palline rosse

sono contrassegnate dai punteggi 1, 2 e 4; mentre, le tre palline nere dai punteggi 3, 5 e 6. Si estraggono due palline senza reinserimento.

Siano X il numero di palline rosse estratte e Y il numero di palline con punteggio pari estratte.

(a) Determinare la densità congiunta del vettore (X, Y).

(b) Determinare la densità marginale di Y.

<u>Soluzione</u>. (a) Abbiamo $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$. Pertanto il vettore aleatorio (X, Y) prende valori in

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

Determiniamo la densità congiunta. Calcoliamo le probabilità come "casi Favorevoli su casi possibili". Innanzitutto osserviamo che ci sono $\binom{6}{2} = 15$ modi per scegliere due palline dall'urna (casi possibili). Quindi

$$p_{XY}(0,0) = P(X=0, Y=0)$$

$$= P(\{2p\ N\} \cap \{2 \text{nr. dispari}\})$$

$= P(2p\ N \text{ con nr. dispari})$

$= \frac{1}{15}$

$p_{XY}(0,1) = P(X=0, Y=1)$

$= P(\{2p\ N\} \cap \{1 \text{ nr. pari e } 1 \text{ nr. dispari}\})$

$= P\left(2pN, \text{ una con nr. pari e una con nr. dispari}\right)$

$= \frac{1 \cdot 2}{15} = \frac{2}{15}$

$p_{XY}(0,2) = P(X=0, Y=2)$

$= P(\{2p\ N\} \cap \{2 \text{ nr. pari}\})$

$= P(\varnothing)$

$= 0$

$p_{XY}(1,1) = P(X=1, Y=1)$

$= P(\{1p\ N \text{ e } 1p\ R\} \cap \{1 \text{ nr. pari e } 1 \text{ nr. dispari}\})$

$= P\left(\{1p\ N \text{ con nr. pari e } 1p\ R \text{ con nr. dispari}\} \cup \{1p\ N \text{ con nr. dispari e } 1p\ R \text{ con nr. pari}\}\right)$

$= P(\{\dots\}) + P(\{\dots\})$

$= \frac{1 \cdot 1}{15} + \frac{2 \cdot 2}{15} = \frac{1}{3}$

Analogamente si calcolano $p_{XY}(1,0) = 2/15$, $p_{XY}(1,2) = 2/15$, $p_{XY}(2,0) = 0$, $p_{XY}(2,1) = 2/15$ e $p_{XY}(2,2) = 1/15$.

(b) Ora ricaviamo la densità marginale di Y. Otteniamo

$$p_Y(0) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(1,0) + p_{XY}(2,0)$$
$$= 1/15 + 2/15 = 1/5$$

$$p_Y(1) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,1)$$
$$= 2/15 + 1/3 + 2/15 = 3/5$$

$$p_Y(2) = 1 - p_Y(0) - p_Y(1) = 1/5 .$$

3. Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con densità congiunta p_{XY} illustrata dalla seguente tabella:

X \ Y	1	2	3
0	1/16	1/6	1/48
2	3/16	?	1/16

(a) Determinare il valore $p_{XY}(2,2)$.

(b) Calcolare $P(X<Y)$ e $P(X=Y \mid Y=3)$.

(c) Determinare le densità marginali di X e Y.

(d) Calcolare la covarianza tra X e Y.

Soluzione. (a) Sfruttiamo il vincolo di normalizzazione. Otteniamo

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{3}{15} + p_{XY}(2,2) + \frac{1}{16} = 1,$$

da cui ricaviamo $p_{XY}(2,2) = \frac{1}{2}$.

(b) Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) + p_{XY}(0,3) + p_{XY}(2,3) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(X=Y \mid Y=3) &= \frac{P(X=Y,\, Y=3)}{P(Y=3)} \\ &= \frac{P(X=Y=3)}{P(Y=3)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) Abbiamo $\mathcal{X} = \{0, 2\}$ e $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$. Ricaviamo le densità marginali

$$p_X(0) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) + p_{XY}(0,3)$$
$$= 1/16 + 1/6 + 1/48 = 1/4$$

$$p_X(2) = 1 - p_X(0) = 3/4$$

e

$$p_Y(1) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(2,1)$$
$$= 1/16 + 3/16 = 1/4$$

$$p_Y(2) = p_{XY}(0,2) + p_{XY}(2,2)$$
$$= 1/6 + 1/2 = 2/3$$

$$p_Y(3) = 1 - p_Y(1) - p_Y(2) = 1/12.$$

(d) Si ha $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Calcoliamo

$$E(X) = 2 \cdot 3/4 = 3/2$$

$$E(Y) = 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{2}{3} + 3 \cdot \tfrac{1}{12} = \tfrac{11}{6}$$

$$E(XY) = 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{3}{16} + 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{16} = \tfrac{11}{4}$$

Quindi $\mathrm{Cov}(X,Y) = \tfrac{11}{4} - \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{11}{6} = 0$.