Distribuzione congiunta e distribuzioni marginali

Def.: Siano X, Y v.a. discrete su (Ω, P) a valori risp. in E e F.

La distribuzione della v.a. discreta
$$(X,Y) : \Omega \to E \times F, \quad \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$
si dice distribuzione congiunta di X e Y.

Attenzione: ordine delle componenti!

Viceversa, se Z è una v.a. discreta su (Ω, P) a valori in uno spazio prodotto $E \times F$, allora $Z = (X, Y)$ con X proiezione su E, Y proiezione su F. Le distribuzioni delle componenti X, Y si dicono distribuzioni marginali di Z.

In particolare, P_X è la prima marginale,

P_Y è la seconda marginale.

Nota:
(cf. p. 57a)
~~Poiché~~ Quando le variabili aleatorie sono discrete (come qui), abbiamo che le leggi sono determinate dalle densità discrete.

Nella situazione di sopra:

$$p_Z(x,y) = P(X=x, Y=y) = p_{(X,Y)}(x,y)$$

densità discreta di ~~della~~ P_Z (legge)

$$p_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in F} p_{(X,Y)}(x,y),$$

$$p_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x \in E} p_{(X,Y)}(x,y)$$

La definizione di distribuzione congiunta si estende al caso di un numero finito di v.a.:

Def.: Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. discrete su (Ω, P) a valori risp. in $E_1, \dots, E_n$.

La distribuzione della v.a.

$$X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$$

$$\omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega,$$

si dice <u>distribuzione congiunta</u> di $X_1, \dots, X_n$.

Attenzione all'ordine delle componenti.

In questo caso, le leggi $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$ si dicono <u>distribuzioni marginali</u> di X.

Legame tra la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali:

! La distribuzione congiunta determina le distribuzioni marginali, ma non viceversa:

Siano X, Y v.a. discrete su (Ω, P) a valori risp. in E, F.

La distribuzione congiunta $P_{(X,Y)}$ determina le distribuzioni marginali P_X, P_Y:

$$P_X(A) = P(X \in A) = P(X \in A, Y \in F)$$

$$= P((X,Y) \in A \times F)$$

$$= P_{(X,Y)}(A \times F) \qquad \text{per ogni } A \subseteq E.$$

Analogamente, $P_Y(B) = P_{(X,Y)}(E \times B)$

per ogni $B \subseteq F$.

In termini delle densità discrete:

$$p_X(x) = P(X=x,\ Y\in F) \qquad | \ Im(Y) \text{ al più numerab}$$

$$= P(X=x,\ Y\in Im(Y)) \qquad | \ \sigma\text{-additività}$$

$$= \sum_{y\in Im(Y)} P(X=x,\ Y=y)$$

$$= \sum_{y\in Im(Y)} P((X,Y)=(x,y))$$

$$= \sum_{y\in Im(Y)} p_{(X,Y)}(x,y)$$

densità discreta della congiunta

$$= \sum_{\underline{y\in F}} p_{(X,Y)}(x,y) \qquad \text{per ogni } x\in E$$

$p_{(X,Y)}(x,y)=0$ se $x\notin Im(X)$ o $y\notin Im(Y)$

Analogamente,

$$p_Y(y) = \sum_{\underline{x\in E}} p_{(X,Y)}(x,y) \qquad \text{per ogni } y\in F.$$

Le distribuzioni marginali <u>non</u> determinano, in generale, la distribuzione congiunta.

(Contro-)esempio: lancio di due dadi regolari a sei facce

$\rightsquigarrow \quad \Omega \doteq \{1,\ldots,6\}^2, \quad P \doteq$ uniforme discreta su Ω.

Definiamo v.a. discrete X, Y tramite ~~[illegible]~~

$$X(\omega) \doteq \omega_1, \quad Y(\omega) \doteq \omega_2, \qquad \omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega.$$

$\rightsquigarrow$ X esito/punteggio del primo dado,

Y " " " secondo " .

$\rightsquigarrow$ P_X = uniforme discreta su $E \doteq \{1,\ldots,6\}$,

P_Y = " " " " $F \doteq \{1,\ldots,6\}$,

$P_{(X,Y)}$ ($= P$) uniforme discreta su $E \times F$ ($=\Omega$)

Indichiamo con Q la distribuzione uniforme discreta su $\{1,\ldots,6\}$, quindi $P_X = P_Y = Q$.

Le v.a. (X,X) e (X,Y) hanno le stesse distribuzioni marginali: ~~cioè~~ $P_X = P_X = P_Y = Q$.

~~[illegible]~~

Però, la distribuzione congiunta di X, X

è data dalla sua densità discreta

$$P_{(X,X)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y, \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = y. \end{cases}$$

$(x,y) \in \{1,..,6\}^2$

$\rightsquigarrow$ distribuzione uniforme discreta

sulla diagonale $\{(x,x) : x \in \{1,..,6\}\} \in \{1,..,6\}^2$

$$\rightsquigarrow \quad P_{(X,X)} \neq P_{(X,Y)}$$

Nota:

$$P_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{36} \quad \text{per ogni } (x,y) \in \{1,..,6\}^2.$$

$\nearrow$ densità discreta

Indipendenza di variabili aleatorie:

Def.: Sia $I \neq \emptyset$. Siano X_i, $i \in I$, v.a. discrete definite su (Ω, P) discreto con X_i a valori in E_i.

La famiglia $(X_i)_{i \in I}$ si dice <u>indipendente</u> se per ogni scelta di sottoinsiemi $A_i \subseteq E_i$, $i \in I$, la famiglia $(\{X_i \in A_i\})_{i \in I}$ è indipendente (come famiglia di eventi).

Osservazione: $(X_i)_{i \in I}$ è indipendente se e solo se, per ogni $J \subseteq I$ <u>finito</u>, $(X_j)_{j \in J}$ è indipendente

Possiamo quindi limitarci all'indipendenza per un numero finito di v.a.

Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. su (Ω, P) spazio di probab. discreto a valori risp. in $E_1, \ldots, E_n$.

! Allora $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti (come famiglia) se e solo se per ogni scelta di $A_i \subseteq E_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, si ha

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\} \right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Questo è equivalente a

$$P_{(X_1, \ldots, X_n)}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(A_i)$$

per ogni scelta di $A_i \subseteq E_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$\rightsquigarrow$ $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti (come famiglia) se e solo se

$$P_{(X_1, \ldots, X_n)} = \bigotimes_{i=1}^{n} P_{X_i}.$$

→

Ricorda: ~~A~~ qui: Ω al più numerabile

$\rightsquigarrow$ $Im(X_i)$ al più numerabile per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$

$\rightsquigarrow$ $(X_1,\dots,X_n)$ prende valori in $Im(X_1)\times\dots\times Im(X_n)$

sottoinsieme al più numerabile di $E_1\times\dots\times E_n$.

$\rightsquigarrow$ $P_{(X_1,\dots,X_n)}$ determinata dalla densità discreta

$$P_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = P_{(X_1,\dots,X_n)}(\{(x_1,\dots,x_n)\})$$
$$= P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n).$$

In termini delle densità discrete abbiamo:

$X_1,\dots,X_n$ sono indipendenti se e solo se

$$P_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i) \quad \forall\ (x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\dots\times E_n$$

densità ~~cong~~ discreta congiunta

densità discrete marginali

Esempio:

$$\Omega \doteq \{0,1\}^3 , \qquad P \doteq \text{uniforme discreta su } \Omega$$

Poniamo

$$X_1(\omega) \doteq \omega_1 ,$$
$$X_2(\omega) \doteq \omega_2 + \omega_3 . \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$$

$\leadsto$ X_1 è una v.a. discreta a valori in $E_1 \doteq \{0,1\}$,

X_2 è una v.a. discreta a valori in $E_2 \doteq \{0,1,2\}$

$\leadsto$ (X_1, X_2) è una v.a. discreta a valori in $E \doteq E_1 \times E_2 = \{0,1\} \times \{0,1,2\}$.

Densità discrete marginali

$$p_{X_1}(x_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{per } x_1 \in \{0,1\},$$

$$p_{X_2}(x_2) = P(X_2 = x_2) = \begin{cases} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} & \text{se } x_2 = 0, \\ \frac{4}{8} = \frac{1}{2} & \text{se } x_2 = 1, \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} & \text{se } x_2 = 2. \end{cases}$$

Densità congiunta:

$$p_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = P(X_1=x_1, X_2=x_2)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } (x_1,x_2)=(0,0) \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} & \text{se } (x_1,x_2)=(0,1) \\ \frac{1}{8} & \text{se } (x_1,x_2)=(0,2) \\ \frac{1}{8} & \text{se } (x_1,x_2)=(1,0) \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} & \text{se } (x_1,x_2)=(1,1) \\ \frac{1}{8} & \text{se } (x_1,x_2)=(1,2) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $p_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ per ogni $(x_1,x_2) \in E$?

Sì !

$\rightsquigarrow$ X_1, X_2 sono indipendenti !

↓

Valor medio per v.a. reali discrete

Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto, e sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. a valori in $\mathbb{R}$.

1) Se $X \geq 0$, allora il <u>valor medio</u> / <u>valor atteso</u> di X è definito da

$$E[X] \doteq \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

ben definito in $[0, \infty]$.

2) In generale, scriviamo $X = X^+ - X^-$, dove

$X^+(\omega) \doteq X(\omega) \vee 0$ parte positiva,

$X^-(\omega) \doteq (-X(\omega)) \vee 0$ parte negativa.

Nota: $X^+, X^- \geq 0$

$E[X^+]$, $E[X^-]$ sono ben definiti in $[0, \infty]$ nel senso di 1).

Si dice che X <u>ammette valor medio</u> se $E[X^+] < \infty$ o $E[X^-] < \infty$. In questo caso, ~~il valor medio~~ $E[X] \doteq E[X^+] - E[X^-]$ ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

è il <u>valor medio</u> di X.

Si dice che X __ammette valor medio finito__

se $E[X^+] < \infty$ e $E[X^-] < \infty$. In questo caso,

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-] \text{ è ben definito in } \underline{\underline{(-\infty, \infty)}}$$

Osservazioni:

1) Il valor medio è definito in termini della densità discreta della misura di probabilità P; funziona per (Ω, P) ~~sp~~ spazio di probabilità discreto.

2) Formula di ~~trans~~ trasformazione:

Sia p_X la densità discreta della legge di X.

Allora X ammette valor medio se e solo se $\{(x \cdot p_X(x))\}_{x \in \mathbb{R}}$ ammette somma.

In questo caso:

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_X(x) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot p_X(x)$$

! ↑ al più numerabile

Ricorda: $p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$.