Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2019/2020

ESERCITAZIONE 2

E2.1. Un'urna contiene 6 palline rosse, 4 nere, 8 bianche. Si estrae una pallina. Calcolare la probabilità di avere: (a) una pallina bianca; (b) una pallina nera; (c) una pallina non bianca; (d) una pallina blu.

Soluzione. Consideriamo le palline distinguibili (supponiamo ad esempio che siano anche numerate) e consideriamo lo spazio campionario dato da

$$\Omega = \{❶, ❷, ❸, ❹, ❺, ❻, ❶, ❷, ❸, ❹, ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧\}.$$

Si ha $|\Omega| = 18$. Sia B (risp. N o A) l'evento "estraggo una pallina bianca (risp. nera o blu)". Otteniamo

(a) $P(B) = \dfrac{\#\text{palline bianche}}{|\Omega|} = \dfrac{4}{9}$.

(b) $P(N) = \dfrac{\#\text{palline nere}}{|\Omega|} = \dfrac{2}{9}$.

(c) $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

(d) $P(A) = \dfrac{\#\text{palline blu}}{|\Omega|} = 0$.

E2.2. Quante sono le targhe formate da 7 caratteri, sapendo che i primi 3 sono delle lettere (scelte tra le 26 dell'alfabeto anglosassone) e gli ultimi 4 delle cifre? Quante targhe vi sarebbero escludendo le ripetizioni tra lettere e cifre?

Soluzione. Abbiamo 26 modi per scegliere ciascuna delle tre lettere e 10 modi per scegliere ciascuna delle quattro cifre, quindi otteniamo

$$26^3 \cdot 10^4 = 175\,760\,000$$

possibili targhe. Se invece escludiamo le ripetizioni tra lettere e cifre, abbiamo 26 modi per scegliere la prima lettera, 25 per la seconda e 24 per la terza, poi abbiamo 10 modi per scegliere la prima cifra, 9 per la seconda, 8 per la terza e 7 per la quarta. Pertanto otteniamo

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$$

possibili targhe con lettere e cifre distinte.

E2.3. Anni fa il prefisso telefonico nel Canada e negli Stati Uniti consisteva in una sequenza di 3 cifre: la prima era un intero compreso tra 2 e 9, la seconda era 0 o 1, la terza era un intero tra 1 e 9. Quanti prefissi erano possibili? Quanti di essi cominciavano con il 4?

Soluzione. Abbiamo 8 modi per scegliere la prima cifra, 2 modi per scegliere la seconda e 9 per scegliere la terza, quindi otteniamo

$$8 \cdot 2 \cdot 9 = 144$$

possibili prefissi. Per calcolare quanti sono i prefissi che iniziano con 4, osserviamo che in questo caso la prima cifra è già fissata e abbiamo possibilità di scelta solo per la seconda e la terza. Pertanto i prefissi che cominciavano con il 4 in Canada e Stati Uniti erano

$$2 \cdot 9 = 18.$$

E2.4 (difficile). In quanti modi si possono disporre 9 persone in fila indiana? E se invece si devono disporre in cerchio?

Soluzione. Dobbiamo associare ad ogni persona la sua posizione nella fila. Abbiamo 9 modi per scegliere la posizione della prima persona, 8 per quella della seconda, 7 per la terza e così via fino all'ultima per cui rimane una sola scelta. In totale otteniamo $9! = 362\,880$ possibili file indiane.

Ora facciamo sedere le 9 persone attorno ad una tavola rotonda. In questo caso conta solo l'ordinamento in cui si siedono, cioè conta chi è vicino a chi e non chi sta dove, perché non ci sono un primo ed un ultimo posto. Facciamo un semplice esempio con 3 persone. Le tre sequenze ABC, BCA, CAB rappresentano tre file indiane distinte: nella prima A sta in posizione 1, nella seconda in posizione 2 e nella terza è in posizione 3. Se disponiamo le tre sequenze in cerchio, otteniamo in tutti e tre i casi la stessa configurazione, dove A ha B alla sua sinistra e C alla sua destra. Le tre sequenze, che sulla linea erano distinte, messe sul cerchio danno origine alla stessa configurazione, in quanto differiscono solamente per rotazione. Dobbiamo dunque eliminare dal conteggio fatto prima tutte quelle stringhe che risultano equivalenti una volta trasferite sul cerchio.
Innanzitutto dobbiamo crearci un punto di riferimento sul cerchio. Per farlo posizioniamo la prima persona in una qualche sedia e la usiamo a questo scopo, la fissiamo. Poi associamo ad ogni altra persona un posto a sedere. Contiamo quindi quanti modi abbiamo per accomodare le 8 persone rimanenti nei posti a sedere che sono rimasti liberi. Questo si può fare in $8!$ modi distinti. Quindi abbiamo $8! = 40\,320$ modi per disporre 9 persone in cerchio.

E2.5. Lancio un dado regolare a sei facce e due monete equilibrate. Qual è la probabilità che il risultato del dado sia 3 e che entrambe le monete diano croce?

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario $\Omega = \big\{(x,y,z) : x \in \{\text{⚀},\text{⚁},\text{⚂},\text{⚃},\text{⚄},\text{⚅}\}$ e $y,z \in \{\mathsf{T},\mathsf{C}\}\big\}$. Si ha $|\Omega| = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$. Poiché abbiamo un solo esito favorevole per l'evento $E =$"escono un 3 e due croci", otteniamo

$$P(E) = \frac{1}{24}\,.$$

E2.6. Qual è la probabilità di ottenere *almeno una testa* in tre lanci di una moneta?

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario $\Omega = \big\{(x,y,z) : x,y,z \in \{\mathsf{T},\mathsf{C}\}\big\}$. Si ha $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Per calcolare la probabilità dell'evento $E =$"esce almeno una testa", ci conviene utilizzare l'evento complementare $E^c =$"escono tre croci". Poiché abbiamo un solo esito favorevole per l'evento E^c, otteniamo

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\,.$$

E2.7. Supponiamo di avere due mazzi di 52 carte da poker e di estrarre una carta per ogni mazzo. Qual è la probabilità che entrambe le carte siano di quadri?

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario

$$\Omega = \left\{(x,y) : x,y \in \left\{\mathsf{A}^{\heartsuit},\dots,\mathsf{K}^{\heartsuit},\mathsf{A}^{\spadesuit},\dots,\mathsf{K}^{\spadesuit},\mathsf{A}^{\diamondsuit},\dots,\mathsf{K}^{\diamondsuit},\mathsf{A}^{\clubsuit},\dots,\mathsf{K}^{\clubsuit}\right\}\right\}.$$

Si ha $|\Omega| = 52 \cdot 52 = 2\,704$. Sia E l'evento "estraiamo da ciascun mazzo una carta di quadri". Poiché abbiamo 13 modi per scegliere la carta di quadri dal primo mazzo e altrettanti per sceglierla dal secondo mazzo, otteniamo

$$P(E) = \frac{13 \cdot 13}{2\,704} = \frac{1}{16}\,.$$

E2.8. Lanciando due volte un dado equilibrato a sei facce, qual è la probabilità che il punteggio del secondo lancio sia *strettamente* maggiore del punteggio del primo lancio?

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario $\Omega = \left\{(x,y) : x,y \in \{\epsdice{1},\epsdice{2},\epsdice{3},\epsdice{4},\epsdice{5},\epsdice{6}\}\right\}$. Si ha $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$. Sia E l'evento "il punteggio del secondo lancio è strettamente maggiore di quello del primo". Gli esiti favorevoli all'evento E sono

$$\left\{(\epsdice{1},y) : y \in \{\epsdice{2},\epsdice{3},\epsdice{4},\epsdice{5},\epsdice{6}\}\right\}, \qquad \left\{(\epsdice{2},y) : y \in \{\epsdice{3},\epsdice{4},\epsdice{5},\epsdice{6}\}\right\}, \qquad \left\{(\epsdice{3},y) : y \in \{\epsdice{4},\epsdice{5},\epsdice{6}\}\right\}$$

$$\left\{(\epsdice{4},y) : y \in \{\epsdice{5},\epsdice{6}\}\right\}, \qquad \left\{(\epsdice{5},y) : y \in \{\epsdice{6}\}\right\}$$

e pertanto otteniamo

$$P(E) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{5}{12}\,.$$

E2.9. A un congresso partecipano 30 ingegneri e 24 informatici. Tre dei 54 partecipanti al congresso vengono scelti a caso per comporre un gruppo di lavoro. Qual è la probabilità che almeno un informatico ne faccia parte?

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme dei sottoinsiemi di 3 persone scelte tra i 54 partecipanti. Si ha $|\Omega| = \binom{54}{3} = 24\,804$. Per calcolare la probabilità dell'evento $E =$"almeno un informatico fa parte del gruppo di lavoro", ci conviene usare l'evento complementare $E^c =$"nessun informatico fa parte del gruppo di lavoro". Poiché abbiamo $\binom{30}{3} = 4\,060$ modi per scegliere 3 ingegneri dai 30 presenti, otteniamo

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{4\,060}{24\,804} \approx 0.8363.$$

E2.10. Un'urna contiene n palline bianche e m palline nere, dove n e m sono numeri positivi. Se estraiamo due palline, qual è la probabilità che abbiano il medesimo colore? Se estraiamo una pallina, la rimettiamo nell'urna e quindi estraiamo una seconda pallina, qual è la probabilità che le due palline estratte abbiano il medesimo colore?

Soluzione.

- Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme dei sottoinsiemi di 2 palline scelte dalle $n+m$ nell'urna. Si ha $|\Omega| = \binom{n+m}{2}$.
  Sia E l'evento "le 2 palline estratte hanno il medesimo colore" e sia N (risp. B) l'evento "le 2 palline estratte sono entrambe nere (risp. bianche)". Osserviamo che $E = N \cup B$ ed inoltre N e B sono eventi disgiunti, quindi si ha $P(E) = P(N) + P(B)$. Poiché abbiamo $\binom{m}{2}$ modi

per scegliere 2 palline nere dalle m nell'urna e $\binom{n}{2}$ modi per scegliere 2 palline bianche dalle n nell'urna, otteniamo

$$P(E) = P(N) + P(B) = \frac{\binom{m}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+m}{2}} = \frac{m(m-1) + n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}.$$

- Consideriamo le palline distinguibili (supponiamo ad esempio che siano anche numerate) e consideriamo lo spazio campionario dato da

$$\Omega = \left\{ (p_1, p_2) : p_1, p_2 \in \{\underbrace{❶, ❷, ❸, \dots}_{m}, \underbrace{①, ②, ③, \dots}_{n}\} \right\}.$$

Si ha $|\Omega| = (n+m)^2$. Mantenendo le notazioni introdotte precedentemente, in questo caso otteniamo

$$P(E) = P(N) + P(B) = \frac{m^2 + n^2}{(n+m)^2}.$$

E2.11. Una scatola contiene 20 lampadine di cui si sa che 5 sono difettose; si prendono a caso 3 lampadine. Calcolare la probabilità che: (a) siano tutte difettose; (b) almeno una non sia difettosa.

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme dei sottoinsiemi di 3 lampadine scelte dalle 20. Si ha $|\Omega| = \binom{20}{3} = 1\,140$.

(a) Sia E l'evento "estraiamo 3 lampadine difettose". Poiché abbiamo $\binom{5}{3} = 10$ modi per scegliere 3 lampadine dalle 5 difettose, otteniamo

$$P(E) = \frac{10}{1\,140} = \frac{1}{114}.$$

(b) Sia F l'evento "estraiamo almeno una lampadina non difettosa". Poiché $F = E^c$, otteniamo

$$P(F) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{114} = \frac{113}{114}.$$

E2.12. Si estraggono contemporaneamente 3 carte da un mazzo di 40 carte. Calcolare la probabilità di avere: (a) 3 figure; (b) 2 figure e un asso; (c) una figura, un asso e un sette.

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme dei sottoinsiemi di 3 carte scelte da un mazzo di 40. Si ha $|\Omega| = \binom{40}{3} = 9\,880$.

(a) Sia E l'evento "estraiamo 3 figure". Poiché abbiamo $\binom{12}{3} = 220$ modi per scegliere 3 figure dalle 12 presenti nel mazzo, otteniamo

$$P(E) = \frac{220}{9\,880} = \frac{11}{494}.$$

(b) Sia F l'evento "estraiamo 2 figure ed un asso". Poiché abbiamo $\binom{12}{2} = 66$ modi per scegliere 2 figure dalle 12 presenti nel mazzo e 4 modi per scegliere un asso, otteniamo

$$P(F) = \frac{4 \cdot 66}{9\,880} = \frac{33}{1\,235}.$$

(c) Sia G l'evento "estraiamo una figura, un asso e un sette". Poiché nel mazzo ci sono 12 figure, 4 assi e 4 sette e dobbiamo scegliere una carta per tipo, otteniamo

$$P(G) = \frac{12 \cdot 4 \cdot 4}{9\,880} = \frac{24}{1\,235}\,.$$

E2.13. Si consideri un gruppo di 5 persone. Calcolare la probabilità che: (a) siano nate tutte nello stesso mese, supponendo che le nascite nei vari mesi siano tutte egualmente possibili; (b) siano nate tutte in mesi diversi.

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario

$$\Omega = \{gen, feb, mar, apr, mag, giu, lug, ago, set, ott, nov, dic\}^5.$$

Si ha $|\Omega| = 12^5 = 248\,832$.

(a) Sia E l'evento "le cinque persone sono nate tutte lo stesso mese". Dobbiamo scegliere il mese in cui sono nate tutte le persone. Per farlo abbiamo 12 modi. Pertanto otteniamo

$$P(E) = \frac{12}{248\,832} = \frac{1}{20\,736}\,.$$

(b) Sia F l'evento "le cinque persone sono nate in mesi diversi". Abbiamo 12 modi per scegliere il mese in cui è nata la prima persona, 11 modi per il mese della seconda, 10 per quello della terza, 9 per la quarta e 8 per la quinta. Quindi otteniamo

$$P(F) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{248\,832} = \frac{55}{144}\,.$$

E2.14. Si scelgono a caso 5 carte da un mazzo di 52 carte da Poker. Calcolare la probabilità che: (a) le 5 carte estratte siano tutte di cuori; (b) le 5 carte estratte siano tutte dello stesso seme; (c) delle 5 carte estratte 3 siano di un seme e 2 di un altro.

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme dei sottoinsiemi di 5 carte scelte da un mazzo di 52. Si ha $|\Omega| = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

(a) Sia E l'evento "estraiamo 5 carte di cuori". Poiché abbiamo $\binom{13}{5} = 1\,287$ modi per estrarre 5 carte dalle 13 di cuori, otteniamo

$$P(E) = \frac{1\,287}{2\,598\,960} = \frac{33}{66\,640}\,.$$

(b) Sia F l'evento "estraiamo 5 carte dello stesso seme". Dobbiamo scegliere il seme e, una volta fissato questo, le cinque carte. Poiché abbiamo 4 modi per scegliere un seme e poi $\binom{13}{5} = 1\,287$ modi per estrarre 5 carte dalle 13 del seme dato, otteniamo

$$P(F) = \frac{4 \cdot 1\,287}{2\,598\,960} = \frac{33}{16\,660}\,.$$

(c) Sia G l'evento "estraiamo 3 carte di un seme e 2 di un altro". Abbiamo 4 modi per scegliere il primo seme e quindi $\binom{13}{3} = 286$ modi per scegliere le 3 carte dalle 13 di questo seme; ci rimangono poi 3 modi per scegliere il secondo seme e $\binom{13}{2} = 78$ modi per scegliere le 2 carte dalle 13 del seme appena fissato. Pertanto otteniamo

$$P(G) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 286 \cdot 78}{2\,598\,960} = \frac{5\,577}{54\,145}.$$

E2.15 (⚑ tratto da appello). Mr. Clooney è un tipo molto abitudinario. Passa ogni domenica mattina leggendo la sua rivista di musica jazz e bevendo 3 caffè. Prepara gli espressi usando 3 capsule scelte casualmente (e senza reinserimento. . .) da un barattolo che ne contiene 3 arancioni (le sue preferite), 5 viola, 7 verdi, 2 azzurre e 8 dorate.
Calcolare la probabilità che Mr. Clooney (a) beva tutte e 3 le volte il suo caffè preferito; (b) non beva il suo caffè preferito; (c) beva il suo caffè preferito soltanto una volta; (d) usi una capsula viola per preparare il primo caffè, una capsula verde per preparare il secondo ed una dorata per il terzo.

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme dei sottoinsiemi di 3 capsule scelte dalle 25 nel barattolo. Si ha $|\Omega| = \binom{25}{3} = 2\,300$.

(a) Sia A l'evento "Mr. Clooney estrae 3 capsule arancioni". Poiché abbiamo un solo modo per scegliere 3 capsule arancioni dal barattolo, otteniamo

$$P(A) = \frac{1}{2\,300}.$$

(b) Sia B l'evento "Mr. Clooney non estrae capsule arancioni". Poiché abbiamo $\binom{22}{3} = 1\,540$ modi per scegliere 3 capsule non arancioni, otteniamo

$$P(B) = \frac{1\,540}{2\,300} = \frac{77}{115}.$$

(c) Sia C l'evento "Mr. Clooney estrae una sola capsula arancione". Poiché abbiamo 3 modi per scegliere la capsula arancione e $\binom{22}{2} = 231$ modi per scegliere le 2 capsule non arancioni, otteniamo

$$P(C) = \frac{3 \cdot 231}{2\,300} = \frac{693}{2\,300}.$$

Osserviamo che per rispondere all'ultima domanda è importante tener conto dell'ordine degli esiti delle estrazioni. Cambiamo quindi spazio campionario. Consideriamo $\overline{\Omega}$ dato dall'insieme delle disposizioni di 3 capsule scelte dalle 25 nel barattolo. Si ha $|\overline{\Omega}| = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$.

(d) Sia D l'evento "Mr. Clooney estrae, nell'ordine, una capsula viola, una verde ed una dorata". Poiché abbiamo 5 modi per scegliere una capsula viola, 7 modi per scegliere una capsula verde e 8 modi per una dorata, otteniamo

$$P(D) = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{13\,800} = \frac{7}{345}.$$

E2.16. Una professoressa assegna agli studenti 10 problemi, informandoli che l'esame finale consisterà in 5 di questi scelti a caso. Se uno studente è riuscito a risolverne 7, qual è la probabilità che risponda esattamente a (a) 5 dei problemi dell'esame finale; (b) almeno 4 dei problemi dell'esame finale?

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme dei sottoinsiemi di 5 problemi scelti dai 10 assegnati. Si ha $|\Omega| = \binom{10}{5} = 252$.

(a) Sia E l'evento "lo studente risponde esattamente ai 5 problemi dell'esame". Osserviamo che lo studente può rispondere a tutti i problemi solo se la professoressa ha scelto i 5 quesiti dell'esame tra i 7 che lo studente ha risolto. Poiché ci sono $\binom{7}{5} = 21$ modi per fare questa scelta, otteniamo

$$P(E) = \frac{21}{252} = \frac{1}{12}.$$

(b) Sia F l'evento "lo studente risponde esattamente ad almeno 4 dei problemi dell'esame". Osserviamo che $F = G \cup E$, dove $G =$"lo studente risponde esattamente a 4 dei problemi dell'esame". Inoltre, gli eventi E e G sono disgiunti. Pertanto, otteniamo

$$P(F) = P(G) + P(E) = \frac{\binom{7}{4} \cdot 3}{252} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2},$$

dove $\binom{7}{4}$ sono i modi in cui la professoressa può scegliere i 4 problemi a cui lo studente sa rispondere (infatti la scelta è fatta tra i 7 che quest'ultimo ha risolto) e 3 sono i modi in cui la professoressa può scegliere il quesito che lo studente non sa risolvere.

E2.17. Il codice segreto di una carta di credito è formato da una sequenza di 4 cifre *distinte* tra 0 e 9. Effettuando un tentativo di indovinare il codice qual è la probabilità di indovinarlo? Qual è la probabilità di indovinare le 4 cifre che formano il codice, ma non necessariamente nel giusto ordine? Qual è la probabilità di indovinare almeno una cifra del codice, ma non necessariamente nella giusta posizione?

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme delle disposizioni di 4 cifre scelte dall'insieme $\{0, 1, \dots, 9\}$. Si ha $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$.

- Sia E l'evento "indovino il codice". Poiché abbiamo un solo esito favorevole per l'evento E (cioè la sola sequenza corretta), otteniamo

$$P(E) = \frac{1}{5\,040}.$$

- Sia F l'evento "indovino le 4 cifre che formano il codice, ma non necessariamente nel giusto ordine". Gli esiti favorevoli all'evento F sono tutte le sequenze ottenute come permutazione delle 4 cifre che formano il codice corretto, pertanto

$$P(F) = \frac{4!}{5\,040} = \frac{1}{210}.$$

- Sia G l'evento "indovino almeno una cifra, ma non necessariamente nella giusta posizione". Per calcolare la probabilità di G ci conviene usare l'evento complementare G^c="non indovino nessuna cifra". Poiché abbiamo $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ modi per scegliere 4 cifre tra le 6 che non compaiono nel codice (disposizioni di 4 oggetti scelti da 6), otteniamo

$$P(G) = 1 - P(G^c) = 1 - \frac{360}{5\,040} = \frac{13}{14}.$$

E2.18 (difficile). Cinque amici A, B, C, D, E acquistano 5 biglietti per 5 posti contigui a teatro e si siedono a caso in uno dei posti. Calcolare la probabilità degli eventi: (a) i 5 amici si siedono in ordine alfabetico; (b) A e B sono seduti vicino.

Soluzione. Consideriamo lo spazio campionario Ω dato dall'insieme delle permutazioni dei 5 oggetti A, B, C, D ed E. Si ha $|\Omega| = 5! = 120$.

(a) Sia F l'evento "i 5 amici siedono in ordine alfabetico". Poiché abbiamo un solo esito favorevole per l'evento F (cioè la sola sequenza $ABCDE$), otteniamo

$$P(F) = \frac{1}{120}.$$

(b) Sia G l'evento "A e B si siedono vicini". Osserviamo che

- abbiamo 4 modi per scegliere i 2 posti *contigui* dove fare sedere A e B: $\blacksquare\blacksquare\square\square\square$, $\square\blacksquare\blacksquare\square\square$, $\square\square\blacksquare\blacksquare\square$, $\square\square\square\blacksquare\blacksquare$;
- una volta scelti i 2 posti contigui, abbiamo 2 modi per scegliere come farci sedere A e B: AB oppure BA;
- ci rimangono poi 3! modi per disporre C, D ed E nei 3 posti rimanenti (C può scegliere tra 3 posti liberi, D tra 2 ed E non ha molta scelta...).

Pertanto, otteniamo

$$P(G) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3!}{120} = \frac{2}{5}.$$