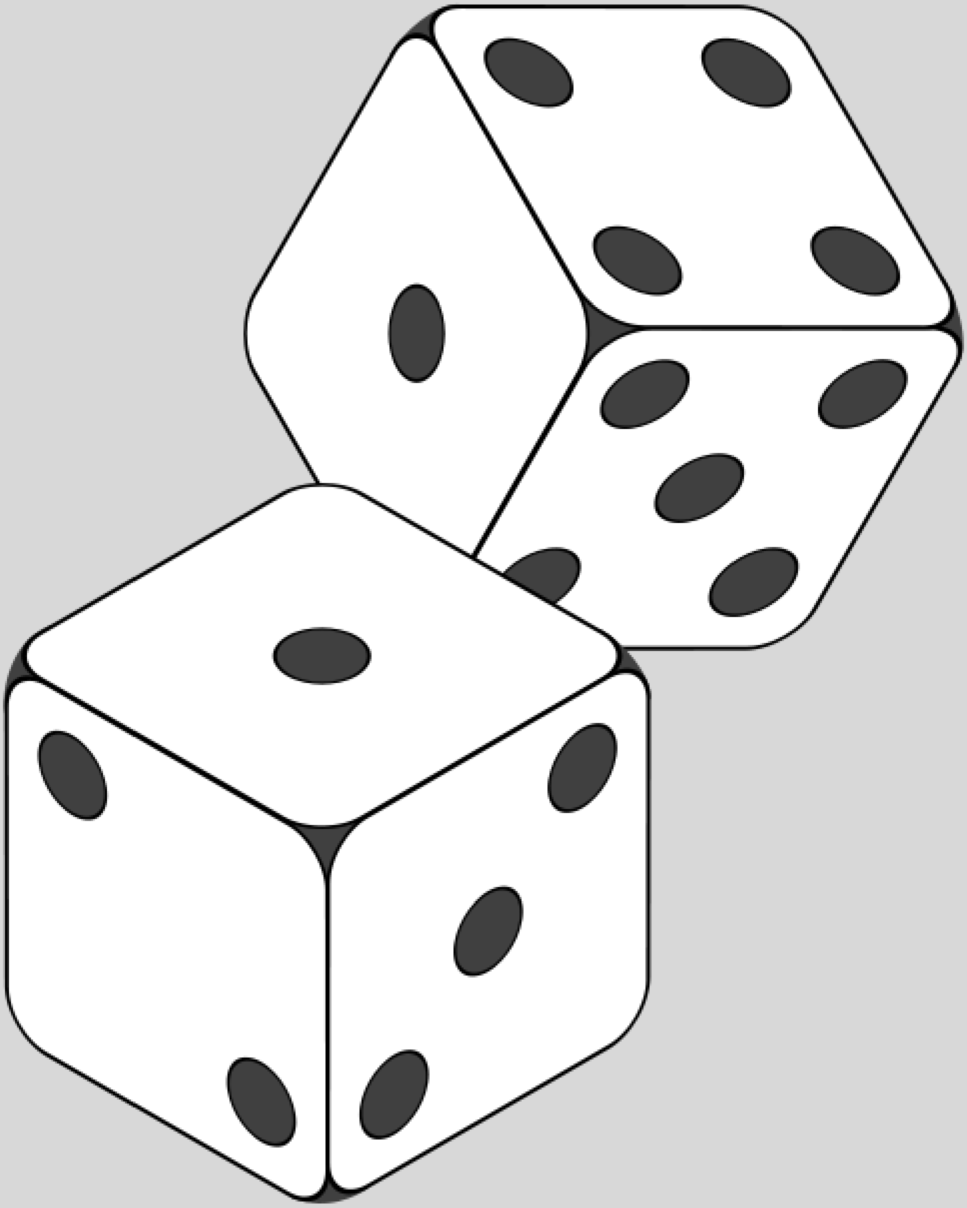
Calcolo delle Probabilità

Sintesi essenziale



Prefazione

Questo documento è stato creato appositamente per coloro che devono affrontare l'esame di Probabilità di Informatica. Al suo interno è presente un'ampia sintesi di (quasi) tutti gli argomenti in programma con relativi esempi. Il contenuto è stato preso totalmente dal libro di testo "Calcolo delle Probabilità" di Sheldon M. Ross. Per questo motivo il seguente documento non deve avere fini di lucro ma fungere solamente da guida promemoria prima di un esame.

L'autore non ha la presunzione di affermare che questo documento è esaustivo al fine di una buona preparazione all'esame. Altresì consiglia a chiunque di approfondire le conoscenze attraverso la lettura completa del libro sopra citato e le dispense del professor Finesso e, soprattutto, di basare il proprio studio principalmente sugli **esercizi**. La teoria è certamente importante, come lo sono i mattoni per costruire un muro, ma tutti sappiamo che per costruire un muro solido serve farlo stare in piedi. Considerate gli esercizi come la malta per i muri o la farina per gli impasti. Metafore a parte, l'esame consisterà di soli esercizi per cui una volta che sapete risolvere gli esercizi sarete in grado di superare brillantemente l'esame.

Qualora i lettori notassero imperfezioni, errori o semplicemente sezioni da approfondire o migliorare sono invitati a contattarmi personalmente. Chiunque volesse mettersi in contatto con me per qualsiasi ragione può scrivermi al seguente indirizzo e-mail:

luca.defranceschi.91@gmail.com

Il seguente documento non presenta edizioni, in quanto sarà costantemente modificato a seconda delle necessità. Un continuo aggiornamento è necessario al fine di arricchire ulteriormente i contenuti e di rendere questo testo uno strumento sempre più utile ed efficace al fine del superamento di un esame. Qualora questo scritto sia servito a far passare anche a un singolo collega tale esame esso avrà compiuto la sua missione e io mi riterrò soddisfatto.

Se fossi un vero autore e dovessi dedicare questo lavoro a qualcuno, lo dedicherei a tutti coloro che, come me, considerano il lavoro di squadra e la collaborazione un pilastro portante per il proprio percorso di studi universitario. Spero solo che questo non sia l'ultima delle mie sintesi.

Auguro quindi a tutti voi una buona lettura e un sincero "in bocca al lupo" per l'esame.

L'autore

Luca De Franceschi

Sommario

1 - Concetti Base

$$0 \leq P(E) \leq 1$$
$$P(\Omega) = 1$$

Per ogni successione di eventi a due a due disgiunti $E_1, E_2, \ldots$ (cioè eventi per i quali $E_i E_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

$$P(E^C) = 1 - P(E)$$

Se $E \subset F$, allora $P(E) \leq P(F)$.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

Esempio. Giovanna decide di portare con sé due libri per le vacanze. Con probabilità pari a 0,5 le piacerà il primo libro, con probabilità pari a 0,4 le piacerà il secondo libro e con probabilità pari a 0,3 le piaceranno entrambi i libri. Quanto vale la probabilità che non le piaccia nessuno di libri?
Sol. Denotiamo con B_i l'evento che a Giovanna piaccia il libro $i, i = 1,2$. Allora la probabilità che le piaccia almeno un libro sarà pari a:

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}6$$

Poiché l'evento che a Giovanna non piaccia nessuno dei due libri è il complementare dell'evento che gliene piaccia almeno uno, otteniamo il risultato:

$$P\left(B_1^C B_2^C\right) = P((B_1 \cup B_2)^C) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 0{,}4$$

$$P(E) = \frac{numero\ di\ elementi\ di\ E}{numero\ di\ elementi\ di\ \Omega}$$

Esempio. Una commissione di 5 persone viene estratta da un gruppo composto di 6 uomini e 9 donne. Se la selezione avviene in modo casuale, qual è la probabilità che la commissione consti di 3 uomini e 2 donne?
Sol. Supponiamo che la locuzione "in modo casuale" significhi che ognuna delle $\binom{15}{5}$ possibili combinazioni venga estratta in modo equiprobabile. La probabilità desiderata è pari a :

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}$$

2 - Probabilità condizionata

La probabilità condizionata è la probabilità che si verifichi un evento *E* se si è verificato un evento *F*. Se $P(F) > 0$, allora:

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Esempio. Da un'urna contenente 8 palline rosse e 4 palline bianche, si estraggono 2 palline senza rimpiazzo. Supponendo che ogni pallina rossa possa essere ugualmente estratta, qual è la probabilità che entrambe le palline estratte siano rosse?
Sol. Siano R_1 e R_2 gli eventi, rispettivamente, "la prima pallina è rossa" e "la seconda pallina è rossa". Ora, supponendo che la prima pallina estratta sia rossa, restano nell'urna 7 palline rosse e 4 palline bianche, sicchè $P(R_2|R_1) = \frac{7}{11}$. Dato che $P(R_1)$ vale ovviamente $\frac{8}{12}$, la probabilità cercata è:

$$P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{14}{33}$$

3 - La regola del prodotto

Se $P(E_1 \dots E_{n-1}) > 0$, allora:

$$P(E_1E_2E_3 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) \dots P(E_n|E_1 \dots E_{n-1})$$

4 - La formula di Bayes

Siano *E* ed *F* due eventi con $0 < P(F) < 1$. Si può scrivere *E* come:

$$E = EF \cup EF^C$$

$$P(E) = P(EF) + P(EF^C) = P(E|F)P(F) + P(E|F^C)P(F^C) = P(E|F)P(F) + P(E|F^C)[1 - P(F)]$$

$$P(E|F) = \frac{P(E)P(F|E)}{P(F|E)P(E) + P(F|E^C)P(E^C)}$$

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

Esempio. In un laboratorio di analisi l'esame del sangue è efficace al 95% nell'individuare una certa malattia quando essa è presente nell'organismo. L'esame tuttavia rileva anche dei falsi positivi nell'1% delle persone sane che si sottopongono all'esame. Se lo 0,5% della popolazione soffre della malattia, qual è la probabilità che una persona risultata positiva all'esame abbia la malattia?
Sol. Sia *D* l'evento "la persona testata ha la malattia" e sia *E* l'evento "la persona è positiva all'esame". La probabilità cercata è $P(D|E)$ ed è data da:

$$P(D|E) = \frac{P(DE)}{P(E)} = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^C)P(D^C)} = \frac{(0{,}95)(0{,}005)}{(0{,}95)(0{,}005) + (0{,}01)(0{,}995)} = \frac{95}{294}$$

Il rapporto a favore di un evento *A* è definito da:

$$\frac{P(A)}{P(A^C)} = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

5 - Eventi indipendenti

Due eventi *E* ed *F* si dicono indipendenti se vale:

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

Tre eventi *E*, *F*, *G* si dicono indipendenti se

$P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$
$P(EF) = P(E)P(F)$
$P(EG) = P(E)P(G)$
$P(FG) = P(F)P(G)$

Esempio. Si sceglie a caso una carta da un mazzo ordinario di 52 carte. Siano *E* l'evento "la carta scelta è un asso" e *F* l'evento "la carta scelta è di picche". Gli eventi *E* ed *F* sono indipendenti. Infatti $P(EF) = \frac{1}{52}$, mentre $P(E) = \frac{4}{52}$ e $P(F) = \frac{13}{52}$.

6 - Variabili aleatorie

Esempio. Supponiamo che il nostro esperimento consista nel lanciare 3 monete equilibrate. Se denotiamo con Y il numero di teste che si ottengono, allora Y è una variabile aleatoria che assume i valori 0, 1, 2, 3 con le seguenti probabilità:

$$P\{Y=0\} = P\{(C,C,C)\} = \frac{1}{8}$$
$$P\{Y=1\} = P\{(C,C,T),(C,T,C),(T,C,C)\} = \frac{3}{8}$$
$$P\{Y=2\} = P\{(C,T,T),(T,C,T),(T,T,C)\} = \frac{3}{8}$$
$$P\{Y=3\} = P\{(T,T,T)\} = \frac{1}{8}$$

Siccome Y deve assumere uno tra i valori 0, 1, 2 e 3 abbiamo:

$$1 = P\left(\bigcup_{i=0}^{3}\{Y=i\}\right) = \sum_{i=0}^{3} P\{Y=i\}$$

7 - Variabili aleatorie discrete

Una variabile aleatoria che possa assumere un’’infinità al più numerabile di valori è detta discreta. Per una variabile aleatoria discreta X, definiamo la *densità discreta* $p(a)$ di X come:

$$p(a) = P\{X=a\}$$

La densità discreta $p(a)$ è positiva per non più di un’infinità al più numerabile di valori di a. Quindi, se X assume i valori $x_1, x_2, \ldots$, allora:

$$\begin{aligned} p(x_i) &\geq 0 \qquad\qquad i = 1,2,\ldots \\ p(x) &= 0 \qquad\qquad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

Poiché X deve assumere almeno uno dei valori x_i, abbiamo che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

8 - Valore atteso

Il valore atteso è definito da:

$$\boxed{E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)}$$

A parole, il valore atteso di *X* è la media pesata di tutti i possibili valori che *X* può assumere, ognuno pesato con la probabilità che *X* lo assuma.

Esempio:
Si calcoli *E[X]* quando *X* rappresenta l'esito del lancio di un dado equilibrato (non truccato).
Essendo $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$, otteniamo che:

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

9 - Valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria

Se *X* è una variabile aleatoria discreta, che assume i valori $\boldsymbol{x_i, i \geq 1}$ con probabilità pari a $\boldsymbol{p(x_i)}$, allora per ogni funzione a valori reali *g*:

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)}$$

Esempio:
$P\{X = -1] = 0{,}2 \qquad P\{X = 0\} = 0{,}5 \qquad P\{X = 1\} = 0{,}3$

$$E[X^2] = (-1)^2(0{,}2) + 0^2(0{,}5) + 1^2(0{,}3) = 1(0{,}2 + 0{,}3) + 0(0{,}5) = 0{,}5$$

Se *a* e *b* sono **costanti**, allora:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

10 – Varianza

Se X è una variabile aleatoria di media μ, allora la varianza di X, che denotiamo con $Var(X)$, è definita:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Una formula alternativa per $Var(X)$ è la seguente:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Esempio:

Si calcoli $Var(X)$ dove X rappresenta l'esito del lancio di un dado.

Avevamo calcolato che $E[X] = \frac{7}{2}$. Inoltre:

$$E[X^2] = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)(91) = \frac{91}{6}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Date due costanti *a* e *b*, vale la seguente identità:

$$Var(aX + b) = a^2Var(X)$$

La radice quadrata della $Var(X)$ è detta *deviazione standard* di X e la denotiamo con σ_X. Cioè:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

11 - Le variabili aleatorie di Bernoulli e Binomiali

Supponiamo di eseguire una prova, o un esperimento, i cui possibili esisti possono essere classificati come *successo* o *insuccesso*. Se poniamo $X = 1$ quando l'esito è un successo e $X = 0$ quando questo è un insuccesso, allora la densità discreta di *X* è data da:

$$p(0) = P\{X = 0\} = 1 - p$$
$$p(1) = P\{X = 1\} = p$$

dove *p*, $0 \leq p \leq 1$, rappresenta la probabilità che la prova abbia avuto successo. Questa è detta variabile aleatoria di ***Bernoulli***.
La densità discreta di una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p), dove *n* corrisponde al numero di prove e *p* la probabilità di successo/insuccesso, è data da:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad i = 0,1, \dots, n$$

Esempio:
Lanciamo 5 monete equilibrate. Se gli esiti delle singole monete sono considerati indipendenti, si determini la densità discreta della variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute.
Sol. Se denotiamo con *X* la variabile aleatoria che conta il numero di teste (successi) che si ottengono, allora *X* risulta essere una variabile binomiale di parametri $(n = 5, p = \frac{1}{2})$. Perciò:

$$P\{X = 0\} = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$
$$P\{X = 1\} = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$
$$P\{X = 2\} = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$
$$P\{X = 3\} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$
$$P\{X = 4\} = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$
$$P\{X = 5\} = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

12 - Proprietà delle variabili aleatorie binomiali

$$E[X^k] = \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Se *X* è una variabile aleatoria binomiale di parametri *n* e *p*, allora:

$$E[X] = np \qquad Var(X) = np(1-p)$$

13 - Calcolo della funzione di distribuzione di una variabile aleatoria binomiale

Sia *X* una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p). Per calcolare la sua funzione di distribuzione

$$P\{X \leq i\} = \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad i = 0,1, \dots, n$$

è conveniente utilizzare ricorsivamente la seguente relazione:

$$P\{X = k+1\} = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P\{X = k\}$$

Esempio: Sia *X* una v.a. binomiale di parametri $n = 6, p = 0,4$. Allora, iniziando da $P\{X = 0\} = (0.6)^6$ e utilizzando ricorsivamente la formula appena vista otteniamo:

$P\{X = 0\} = (0.6)^6 \approx 0.0467$ $\qquad P\{X = 1\} = \frac{4}{6}\frac{6}{1} P\{X = 0\} \approx 0.1866$

$P\{X = 2\} = \frac{4}{6}\frac{5}{2} P\{X = 0\} \approx 0.3110$ $\qquad$ …

14 - La variabile aleatoria di Poisson

Una variabile aleatoria *X*, che assuma i valori 0,1,2,…, è detta una variabile aleatoria di Poisson con parametro λ (lambda) se per un qualche valore $\lambda > 0$,

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

Esempio.
Supponiamo che un pezzo prodotto da un macchinario sia difettoso con probabilità pari a 0.1. Si determini la probabilità che un insieme di 10 pezzi ne contenga al più uno difettoso.
Sol. La probabilità desiderata è $\binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10} + \binom{10}{1}(0,1)^1(0,9)^9 = 0,7361$ (probabilità che ce ne siano 0 + probabilità che ce ne sia 1), mentre l'approssimazione di Poisson dà il valore $e^{-1} + e^{-1} \approx 0,7358$.

La variabile di Poisson di parametro *np* è una buona approssimazione per la distribuzione dei numeri di successi in *n* prove indipendenti quando ogni prova ha probabilità *p* di essere successo, suppondendo che *n* sia grande e *p* piccolo.

Il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria di Poisson sono entrambi uguali al suo parametro λ.

Se *X* è una variabile aleatoria di *Poisson* di parametro λ, allora:

$$\frac{P\{X = i + 1\}}{P\{X = i\}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+1}/(i+1)!}{e^{-\lambda}\lambda^i/i!} = \frac{\lambda}{i+1}$$

15 - La variabile aleatoria geometrica

Supponiamo di ripetere in maniera indipendente una prova, che abbia probabilità pari a *p*, $0 < p < 1$ di risultare in un successo, fintanto che non si verifica il primo successo. Se denotiamo con *X* il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo, allora:

$$P\{X = n\} = (1 - p)^{n-1}p \qquad n = 1,2,\ldots$$

Ogni variabile aleatoria *X* la cui densità discreta è data dalla formula precedente è detta variabile aleatoria geometrica di parametro *p*.

Esempio.
Un urna contiene *8* palline bianche ed *10* palline nere. Si estrae una pallina alla volta, in maniera aleatoria, fino a che si pesca la prima pallina nera. Se supponiamo che ogni volta che estraiamo una pallina la reinseriamo nell'urna prima della successiva estrazione, qual è la probabilità che:

a) Si debbano estrarre esattamente 3 palline
b) Si debbano estrarre almeno 5 palline

Sol. Se denotiamo con *X* il numero di palline che dobbiamo estrarre per ottenere la prima pallina nera, allora *X* avrà una densità discreta data dalla formula precedente con $p = 10/(8+10)$. Quindi:

a) $P\{X = 3\} = (\frac{8}{10+8})^{3-1} \frac{10}{10+8} = \frac{8*3^{3-1}}{(10+8)^3} = 0{,}0123$

b) $P\{X \geq 5\} = \frac{10}{10+8} \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{8}{10+8}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{10}{10+8}\right)\left(\frac{8}{10+8}\right)^{5-1}}{\left[1-\frac{8}{10+8}\right]} = \left(\frac{8}{10+8}\right)^{5-1} = 0{,}0390$

16 - Variabili aleatorie continue

Le variabili aleatorie discrete sono variabili aleatorie che assumono un numero finito o una infinità numerabile di valori. Diciamo che *X* è una variabile aleatoria **continua** se esiste una funzione non negativa *f* definita per ogni numero reale $x \in (-\infty, \infty)$, tale che per ogni sottoinsieme *B* di numeri reali:

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\, dx$$

La funzione *f* è chiamata la *funzione di densità* della variabile aleatoria *X*.
Tutte le affermazioni probabilistiche riguardanti *X* si possono esprimere in termini di *f*. Ad esempio, se $B = [a, b]$, si ottiene dalla formula precedente che:

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\, dx$$

La probabilità che una variabile aleatoria continua assuma un dato valore è uguale a zero. Questo è espresso dalla formula seguente:

$$P\{X = a\} = \int_a^a f(x)\, dx = 0\,, \qquad [a = b]$$

Esempio. Supponiamo che *X* sia una variabile aleatoria continua la cui densità sia data da:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

a) Qual è il valore di *C*?
b) Determinare $P\{X > 1\}$

Sol. (a) Dato che *f* è una densità, si deve avere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, e pertanto:

$$C \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = 1$$

$$C \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 1$$

$$C = \frac{3}{8}$$

Pertanto,

(b) $$P\{X > 1\} = \int_1^{\infty} f(x)\, dx = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\, dx = \frac{1}{2}$$

17 - Valore atteso e varianza di una variabile aleatoria continua

Il valore atteso di una variabile aleatoria discreta *X* è:

$$E[X] = \sum_x xP\{X = x\}$$

Se ora *X* è una variabile aleatoria continua con densità $f(x)$, prendendo spunto dal fatto che:

$$f(x)\,dx \approx P\{x \le X \le x + dx\} \qquad \text{per } dx \text{ piccolo}$$

si definisce il valore atteso di *X* come l'integrale:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Esempio. Determinare $E[X]$ sapendo che la densità di *X* è:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & se \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Sol.

$$E[X] = \int xf(x)\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

Se *X* è una variabile aleatoria continua con densità $f(x)$, allora per ogni funzione *g* a valori reali,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

Esempio. La densità di *X* è data da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Determinare $E[e^X]$.

Sol. Sia $Y = e^X$. Cominciamo determinando f_Y, la densità di *Y*. Ora, per $1 \le x \le e$ si ha,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y \le x\} \\ &= P\{e^X \le x\} \\ &= P\{X \le \log(x)\} \\ &= \int_0^{\log(x)} f(y)\,dy \\ &= \log(x) \end{aligned}$$

Derivando $F_Y(x)$, otteniamo che la densità di *Y* è data da:

$$f_Y(x) = \frac{1}{x} \qquad 1 \le x \le e$$

$$E[e^X] = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_Y(x)\,dx = \int_1^e dx = e - 1$$

Se *a* e *b* sono delle costanti si ha:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

La **varianza di una variabile aleatoria continua** è definita esattamente come per una variabile discreta. Precisamente, se *X* è una variabile aleatoria con valore atteso μ, la varianza di *X* è definita da:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

La formula alternativa:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Esempio. Determinare $Var(X)$, dove *X* è descritta:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Sol. Calcoliamo prima $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 2x^3\, dx = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = \int xf(x)\, dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Se *a* e *b* sono delle costanti, allora:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

18 - Variabile aleatoria uniforme

In generale, diciamo che *X* è una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo (α, β) se la sua densità è data da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & se\ \alpha < x < \beta \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Esempio. Sia *X* una variabile aleatoria uniforme su (α, β). Determinare (a) $E[X]$ e (b) $Var(X)$.
Sol.

(a) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\beta+\alpha}{2}$

(b) $E[X^2] = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta-\alpha} x^2\,dx = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$

$$Var(X) = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Esempio. Gli autobus passano a una specifica fermata a intervalli di 15 minuti a partire dalle 7; cioè alle 7, 7:15, 7:30, 7:45 ecc. Se un passeggero arriva alla fermata in un istante uniformemente distribuito tra le 7 e le 7:30, determinare la probabilità che egli aspetti l'autobus:

(a) meno di 5 min.

(b) più di 10 min.

Sol. Sia *X* il minuto dopo le 7 al quale arriva il passeggero. Dato che *X* è uniforme sull'intervallo (0, 30), si ha che il passeggero aspetterà meno di 5 min se (e solo se) egli arriva tra le 7:10 e le 7:15 o tra le 7:25 e le 7:30. Pertanto la probabilità cercata in (a) è data da:

$$P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} = \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

Analogamente, egli dovrà aspettare più di 10 minuti se arriva tra le 7 e le 7:05 o tra le 7:15 e le 7:20, la probabilità cercata in (b) vale:

$$P\{0 < X < 5\} + P\{15 < X < 20\} = \frac{1}{3}$$

19 - Variabili aleatorie normali

Diciamo che *X* è una variabile aleatoria normale, o semplicemente che *X* è distribuita normalmente, di parametri μ e σ^2 se la densità di *X* è data da:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma} \qquad -\infty < x < \infty$$

Tradizionalmente si indica la funzione di distribuzione di una variabile normale standard con $\Phi(x)$. Si pone cioè:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

I valori di $\Phi(x)$ per gli *x* non negativi sono dati nella tabella della normale standard. Per i valori negativi di *x*, $\Phi(x)$ si può ottenere dalla seguente formula:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

Dato che $Z = (X-\mu)/\sigma$ è una variabile normale standard se *X* è normale di parametri μ e σ^2, la funzione di distribuzione di *X* si può anche scrivere come:

$$F_X(a) = P\{X \le a\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Esempio. Sia *X* una variabile aleatoria normale di parametri $\mu = 3, \sigma^2 = 9$, determinare:
(a) $P\{2 < X < 5\}$; (b) $P\{X > 0\}$; (c) $P\{|X-3| > 6\}$.

Sol. (a)

$$P\{2 < X < 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right\} = P\left\{-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right\} =$$
$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right] \approx 0.3779$$

(b) $P\{X > 0\} = P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right\} = P\{Z > -1\} = 1 - \Phi(-1) = 1 - [1 - \Phi(1)] = \Phi(1) = 0{,}8413$

(c) $P\{|X-3| > 6\} = P\{X > 9\} + P\{X < -3\} = P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right\} + P\left\{\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right\} =$
$$= P\{Z > 2\} + P\{Z < -2\} = 1 - \Phi(2) + \Phi(2) = 2[1 - \Phi(2)] \approx 0.0456$$

Esempio. La durata (in giorni) di gravidanza è approssimativamente distribuita normalmente con parametri $\mu = 270$ e $\sigma^2 = 100$. Una ragazza madre cerca di capire chi è il padre di suo figlio. Un suo partner è stato all'estero per un periodo che va da 290 giorni a 240 giorni prima della nascita del suo bambino. Se quest'uomo è davvero il padre del bambino, qual è la probabilità che la madre abbia avuto la gravidanza così corta o così lunga?

Sol. Sia *X* la durata della gravidanza e si supponga che il tale in questione sia il padre del bambino. Allora la probabilità che la nascita sia avvenuta nel periodo indicato è:

$$P\{X > 290 \;\; o \;\; X < 240\} = P\{X > 290\} + P\{X < 240\} = P\left\{\frac{X-270}{10} > 2\right\} + P\left\{\frac{X-279}{10} < -3\right\} =$$
$$= 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(3) \approx 0.0241$$

20 - L'approssimazione normale della distribuzione binomiale

Il teorema di *DeMoivre-Laplace* afferma che, se *n* è grande, una variabile aleatoria binomiale di parametri *n*, *p* ha approssimativamente la stessa distribuzione di una variabile aleatoria normale con stessa media e varianza della binomiale. Sia S_n il numero di successi che si realizzano in *n* prove indipendenti, in ognuna delle quali il successo ha probabilità *p*. Allora, per ogni $a < b$,

$$P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \to \Phi(\mathrm{b}) - \Phi(\mathrm{a}) \qquad n \to \infty$$

Esempio. Sia *X* il numero di volte che una moneta equa, lanciata 40 volte, faccia testa. Determinare la probabilità che $X = 20$. Utilizzare l'approssimazione normale e confrontarla con la soluzione binomiale.
Sol. Usiamo l'approssimazione normale:

$$P\{X = 20\} = P\{19{,}5 \leq X \leq 20{,}5\} = P\left\{\frac{19{,}5-20}{\sqrt{10}} < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < \frac{20{,}5-20}{\sqrt{10}}\right\}$$
$$\approx P\left\{-0{,}16 < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < 0{,}16\right\} \approx \Phi(0{,}16) - \Phi(0{,}16) \approx 0{,}1272$$

Il risultato esatto è:

$$P\{X = 20\} = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} \approx 0{,}1254$$

Esempio. Si ritiene che il numero ideale di studenti per un corso al I anno di Ingegneria di una Facoltà dove è prevista una prova di ammissione di 150 studenti. La Facoltà, sapendo che nel passato solo il 30% degli iscritti all'esame di ammissione ha superato l'esame, ammette all'esame 450 studenti. Calcolare la probabilità che l'esame di ammissione venga superato da più di 150 studenti.

Sol. Il numero *X* di studenti che partecipano alla prova di ammissione è una variabile binomiale di parametri $n = 450$ e $p = 0{,}3$. Utilizzando la correzione di continuità, l'approssimazione normale dà:

$$P\{X \geq 150{,}5\} = P\left\{\frac{X - (450)(0{,}3)}{\sqrt{450(0{,}3)(0{,}7)}} \geq \frac{150{,}5 - (450)(0{,}3)}{\sqrt{450(0{,}3)(0{,}7)}}\right\} \approx 1 - \Phi(1{,}59) \approx 0.0559$$

21 - Variabili aleatorie esponenziali

Una variabile aleatoria si dice *esponenziale* se la sua densità è data, per qualche $\lambda > 0$, da:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ \ x \geq 0 \\ 0 & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

La funzione di distribuzione $F(a)$ di una variabile aleatoria esponenziale è data da:

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^a = 1 - e^{-\lambda a} \qquad\qquad a \geq 0$$

Esempio. Sia *X* una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ. Calcolare (a) $E[X]$ e (b) $Var(X)$.
Sol. (a) Dato che la densità è data da:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ \ x \geq 0 \\ 0 & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

(c) Per calcolare la varianza di *X*, dobbiamo prima calcolare $E[X^2]$.
(d)

$$E[X^2] = -x^2\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\, dx = 0 + \frac{2}{\lambda}E[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

La distribuzione esponenziale è spesso, nella pratica, la distribuzione dell'intervallo di tempo che intercorre tra due eventi specifici.

Esempio. Supponiamo che la lunghezza di una telefonata in minuti sia una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{10}$. Se qualcuno arriva immediatamente prima di voi alla cabina telefonica, determinare la probabilità di dover aspettare:

a) Più di 10 min;
b) Tra 10 e 20 min.

Sol. Sia *X* la lunghezza della telefonata fatta dalla persona che occupa la cabina; le probabilità cercate valgono:

(a) $\mathrm{P}\{X > 10\} = 1 - F(10) = e^{-1} \approx 0{,}368$
(b) $P\{10 < X < 20\} = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0{,}233$

Diciamo che una variabile aleatoria *X* è *priva di memoria* se:

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \qquad per\ ogni\ s, t \geq 0$$

22 - Funzioni di distribuzione congiunte

Siamo spesso interessati a studiare problemi legati al valore congiunto di due o più variabili aleatorie. Per trattare queste probabilità, definiamo, per due variabili aleatorie *X* e *Y*, la *funzione di distribuzione congiunta* di *X* e *Y* come:

$$F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\} \qquad -\infty < a, b < \infty$$

Tutte le proprietà riguardanti le probabilità relative alle variabili *X* e *Y* possono, in teoria, essere espresse in termini della loro funzione di distribuzione congiunta. Per esempio, supponiamo di voler calcolare la probabilità che *X* sia maggiore di *a* e *Y* sia maggiore di *b*:

$$P\{X > a, Y > b\} = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a, b)$$

Nel caso in cui sia *X* che *Y* siano variabili aleatorie discrete, è conveniente definire la funzione di densità discreta congiunta di *X* e *Y* come segue:

$$p(x, y) = P\{X = x, Y = y\}$$

Esempio. Supponiamo che vengano scelte a caso 3 palline da un'urna contenente 3 palline rosse, 4 bianche e 5 blu. Se denotiamo con *X* e *Y*, rispettivamente, il numero di palline rosse e bianche scelte, allora la densità discreta congiunta di *X* e *Y*, $p(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$, è data da:

$$p(0,0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$$

$$p(0,1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220}$$

…

23 - Variabili aleatorie indipendenti

Le variabili aleatorie *X* e *Y* si dicono *indipendenti* se, per ogni coppia di sottoinsiemi della retta reale *A* e *B*,

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$$

In altre parole, *X* e *Y* sono indipendenti se, per ogni *A* e *B*, gli eventi $E_A = \{X \in A\}$ e $F_B = \{Y \in B\}$ sono indipendenti. In termini della distribuzione congiunta *F* di *X* e *Y*, abbiamo che *X* e *Y* sono indipendenti se e solo se:

$$F(a, b) = F_X(a)F_Y(b) \qquad \text{per ogni } a, b$$

Quando *X* e *Y* sono variabili aleatorie discrete, la definizione di indipendenza risulta uguale a:

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \qquad \text{per ogni } x, y$$

Esempio. Supponiamo che vengano eseguite $n + m$ prove indipendenti, ognuna delle quali abbia probabilità pari a *p* di risultare in un successo. Se *X* è il numero di successi nelle prime *n* prove e *Y* il numero di successi nelle *m* prove successive, allora *X* e *Y* sono indipendenti, già che conoscere il numero di successi nelle ulteriori *m* prove. Infatti, per valori interi positivi *x* e *y*,

$$P\{X = x, Y = y\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y} = P\{X = x\}P\{Y = y\}$$

24 - Valore atteso di somme di variabili aleatorie

Se *X* e *Y* hanno densità congiunta discreta $p(x, y)$, allora:

$$E[g(X, Y)] = \sum_y \sum_x g(x, y)p(x, y)$$

Se *X* e *Y* hanno densità congiunta $f(x, y)$, allora:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)dx\, dy$$

Esempio. Un incidente avviene in un punto *X* che è uniformemente distribuito su una strada di lunghezza *L*. Al momento dell'incidente, un'ambulanza si trova in un punto *Y* che è anch'esso distribuito uniformemente sulla stessa strada. Supponendo che *X* e *Y* siano indipendenti, determinare il valore atteso della distanza tra l'ambulanza e il punto dell'incidente.
Sol. Dobbiamo calcolare $E[|X-Y|]$. Dato che la densità congiunta di *X* e *Y* è:

$$f(x,y)=\frac{1}{L^2}, \qquad 0<x<L, \qquad 0<y<L$$

Otteniamo che:

$$E[|X-Y|]=\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L |x-y|\,dx\,dy$$

$$\int_0^L |x-y|\,dy=\int_0^x (x-y)\,dy+\int_x^L (y-x)\,dy=\frac{x^2}{2}+\frac{L^2}{2}-\frac{x^2}{2}-x(L-x)=\frac{L^2}{2}+x^2-xL$$

$$E[|X-Y|]=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left(\frac{L^2}{2}+x^2-xL\right)dx=\frac{L}{3}$$

25 - Covarianza, varianza di una somma e correlazioni

Il valore atteso di un prodotto di variabili aleatorie indipendenti è uguale al prodotto dei loro valori attesi.

Se *X* e *Y* sono indipendenti, e *h* e *g* sono due funzioni, allora:

$$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$$

La **covarianza** tra *X* e *Y*, indicata con $Cov(X,Y)$, è definita da:

$$Cov(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$$

Se *X* e *Y* sono indipendenti allora si ha che $Cov(X,Y)=0$.

(i) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
(ii) $Cov(X,X)=Var(X)$
(iii) $Cov(aX,Y)=aCov(X,Y)$
(iv) $Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i,\ \sum_{j=1}^m Y_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m Cov(X_i,Y_j)$

Il **coefficiente di correlazione** tra due variabili aleatorie *X* e *Y* è definito, se $Var(X)$ e $Var(Y)$ non sono nulle, da:

$$p(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

26 - Disuguaglianza di Markov

Se *X* è una variabile aleatoria che assume solo valori non negativi, allora per ogni numero reale $a > 0$,

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

27 - Disuguaglianza di Chebyshev

Se *X* è una variabile aleatoria di media μ e varianza σ^2, finite, allora per ogni numero reale $k > 0$,

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Esempio. Supponiamo di sapere che il numero di articoli prodotti da una fabbrica durante una settimana è dato da una variabile aleatoria di media pari a 50.

a) Cosa possiamo dire riguardo alla probabilità che la produzione di questa settimana sia superiore alle 75 unità?
b) Se la varianza della produzione settimanale è nota essere uguale a 25, allora cosa possiamo affermare della probabilità che la produzione di questa settimana sia compresa tra le 40 e 60 unità?

Sol. Sia *X* il numero aleatorio di articoli prodotti in una settimana.

a) Per la disuguaglianza di Markov

$$P\{X > 75\} \leq \frac{E[X]}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

b) Per la disuguaglianza di Chebyshev

$$P\{|X - 50| \geq 10\} \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4}$$

$$P\{|X - 50| < 10\} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Perciò la probabilità che la produzione di questa settimana sia compresa tra 40 e 60 unità è maggiore o uguale a 0,75.

28 - Legge debole dei grandi numeri

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie i.i.d., ognuna con media finita $E[X_i] = \mu$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

29 - Il teorema del limite centrale

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie i.i.d., ognuna di media μ e varianza σ^2. Allora la distribuzione di

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

tende a una variabile aleatoria normale standard quando $n \to \infty$. Ciò significa che, per $-\infty < a < \infty$,

$$P\left\{\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Esempio. Il numero di studenti che si iscrivono a un corso di laurea specialistica è rappresentato da una variabile aleatoria di Poisson di media 100. Se il numero di studenti effettivamente è almeno di 120 unità, si sarà costretti a sdoppiare i corsi di base, mentre se il numero sarà inferiore si farà un unico canale. Qual è la probabilità che i corsi vengano sdoppiati?
Sol. La soluzione esatta è: $\boldsymbol{e^{-100} \sum_{i=120}^{\infty} (100)^i / i!}$ non permette di ricavare effettivamente il numero cercato. Ciononostante, ricordando che una variabile aleatoria di Poisson di media 100 può essere vista come la somma di 100 variabili di Poisson indipendenti di media 1, possiamo usare il teorema del limite centrale per ottenere una soluzione approssimata. Se *X* denota il numero di studenti che si iscrivono al corso di studi, abbiamo:

$$P\{X \geq 120\} = P\{X \geq 119{,}5\} = P\left\{\frac{X - 100}{\sqrt{100}} \geq \frac{119{,}5 - 100}{\sqrt{100}}\right\} = 1 - \Phi(1{,}95) \approx 0{,}0256$$

Dove abbiamo usato il fatto che la varianza di una variabile aleatoria di Poisson è uguale alla sua media.

Esempio. Se 10 dadi equilibrati vengono lanciati, si determini la probabilità approssimata che la somma di valori ottenuti sia compresa tra 30 e 40, estremi inclusi.
Sol. Denotiamo con X_i il valore dell' *i*-esimo dado, $i = 1,2, \dots ,10$. Poiché $E(X_i) = \frac{7}{2}$, $Var(X_i) = E\left[X_i^2\right] - (E[X_i])^2 = \frac{35}{12}$, il teorema del limite centrale dà:

$$P\{29{,}5 \leq X \leq 40{,}5\} = P\left\{\frac{29{,}5 - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{X - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{40{,}5 - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}\right\} \approx 2\Phi(1{,}0184) - 1 \approx 0{,}692$$