Foglio 3

Esercizio 1. Siano X, Y, Z, ξ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X, Y, Z sono a valori in $\mathbb{Z}$;
- ξ è di Bernoulli di parametro $1/2$;
- $\mathbf{P}(X < Y) = 1$;
- (X, Y), Z, ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria M tramite

$$M(\omega) \doteq \begin{cases} Y(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ X(\omega) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

e introduciamo l'evento

$$A \doteq \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}.$$

(i) Si calcoli la probabilità di A in termini delle distribuzioni marginali di X, Y, Z.

(ii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) \geq 1/2$.

(iii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) > 1/2$ se $\mathbf{P}(Z = k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

$$M = \begin{cases} Y & \text{se } \xi \neq 1 \\ X & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad A = \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}$$

1

$P(A) = P(\xi = 1, M \geq Z) + P(\xi = 0, M < Z) = P(\xi = 1, Y \geq Z) + P(\xi = 0, X < Z) \overset{\text{INDIP}}{=}$

$P(\xi = 1) \cdot P(Y \geq Z) + P(\xi = 0) \cdot P(X < Z) = \frac{1}{2} P((Y \geq Z) + P(X < Z)) =$

PROB. TOTALI

$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Y \geq Z \mid Z = k) \cdot P(Z = k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X < Z \mid Z = k) \cdot P(Z = k) \right.$

$P(A) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Z = k) \cdot P(Y \geq k \mid Z = k) + P(X < k \mid \cancel{Z = k}) \right)$

SI TOGLIE INDIPENDENZA PER IL CONDIZIONAMENTO

2 Grazie all'indipendenza $\rightarrow P(X < k) \geq P(Y < k)$

$P(A) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Z = k) \cdot P(Y \geq k) + P(Y < k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{P(Z = k)}_{1} = \frac{1}{2}$

3 $P(X = k_0) > 0 \rightarrow P(X < k_0 + 1) > P(Y < k_0 + 1)$

$Y = k_0 \rightarrow P(\cancel{X} < k_0 + 1) \leq P(X < k_0)$

$P(A) \geq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Z = k) \cdot P(Y \geq k) + P(X < k) > 1/2 \quad \forall P(Z = k) > 0$

Esercizio 2. Siano X, Y variabili aleatorie reali su $(\Omega, \mathbf{P})$ discreto. Supponiamo che X, Y siano indipendenti. Si calcoli allora la densità discreta di $X + Y$ in termini delle densità discrete di X e Y.

X, Y v.a. reali

$P(X+Y = z) = P(X = z) + P(Y = z) = \sum (P_z X = z - y, Y = y) =$

Ordine: $\sum_{y \in Im(Y)} \left(\sum_{x \in Im(X)} P(X = z - y, X = x) \cdot P(\cancel{Y} = y) \right) \to P(X = z-y) ; P(X = x)$

$= 1_{(x)}(z - y) = \sum_{y \in Im(Y)} \left(\sum_{x \in Im(X)} 1_{\{z\}}(x \cdot y) P(X = x) P(Y = y) \right)$

Esercizio 3. Sia Ω l'insieme delle permutazioni dei numeri da 1 a 52:

$$\Omega \doteq \{\sigma \colon N_{52} \to N_{52} : \sigma \text{ biiettiva}\},$$

dove $N_{52} \doteq \{1, \dots, 52\}$. Sia $\mathbf{P}$ la distribuzione uniforme discreta su Ω. Sia E l'insieme dei sottoinsiemi di N_{52} di cardinalità uguale a 13:

$$E \doteq \{A \subset N_{52} : |A| = 13\}.$$

Definiamo variabili aleatorie X_i, Y_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, a valori in E mediante

$$X_i(\sigma) \doteq \{\sigma(13(i-1)+j) : j \in \{1, \dots, 13\}\},$$
$$Y_i(\sigma) \doteq \{\sigma(i + 4(j-1)) : j \in \{1, \dots, 13\}\}.$$

Si calcolino la distribuzione congiunta di $X_1, \dots, X_4$ e quella di $Y_1, \dots, Y_4$. Come si può interpretare il risultato?

$\Omega = \{\sigma : N_{52} \to N_{52} : \sigma \text{ biettiva}\}$ $P = Unif(\Omega)$ $\sigma \in \Omega$

$X_i(\sigma) = \{\sigma(13(i-1)+j)) : j \in \{1 \dots 13\}\}$

$Y_i(\sigma) = \{\sigma(i+4(j-1)) : j \in \{1 \dots 13\}\}$, $i \in \{1 \dots 4\}$

$X_1 \dots X_4$ $Y_1 \dots Y_4$ v.a. a valori in $E = \{A : A \in N_{52}$ con $|A| = 13\}$

D. discreta di $X_1 \dots X_4$:

$A_1, A_4 \in E \to P(X_1 = A_1, \dots X_4 = A_4) = \begin{cases} 0 & \text{se } A_1 \cup \dots A_4 \neq N_{52} \\ \frac{(13!)^4}{52!} & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esercizio 4. Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile, e sia $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ l'insieme delle misure di probabilità su $\mathcal{F}$. Definiamo una funzione $\mathrm{d}_{TV} : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to [0, \infty)$ tramite

$$\mathrm{d}_{TV}(P, Q) \doteq \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(A) - Q(A)|.$$

(a) Si mostri che d_{TV} è una metrica su $\mathcal{M}_1$.

(b) Supponiamo ora che Ω sia al più numerabile e che $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Si mostri allora che

$$\mathrm{d}_{TV}(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |p(\omega) - q(\omega)|,$$

dove p, q sono le densità discrete rispettivamente di P e di Q. [Suggerimento: considerare l'evento $B \doteq \{\omega \in \Omega \ : \ p(\omega) \geq q(\omega)\}$.]

Si noti che per metrica lui intende letteralmente le proprietà della disuguaglianza triangolare.

d_{TV} METRICA $\rightarrow$ $- d_{TV}(P,Q) = d_{TV}(Q,P)$

$- d_{TV}(P,Q) = 0$ sse $P = Q$

(1) $\sup |P(A) - Q(A)| \leq \sup (P(A) - R(A) + (R(A) - Q(A))$

$\leq \sup_{A \in F} (P(A) - R(A)) + \sup_{A \in F} (R(A) - Q(A))$

P, Q con densità discrete $\rightarrow P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \quad Q(A) = \sum_{\omega \in A} q(\omega)$

$\rightarrow d_{TV}(P,Q) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |p(\omega) - q(\omega)|$, $B = \{\omega \in \Omega : p(\omega) \geq q(\omega)\}$

(2) $B = \{\omega \in \Omega : p(\omega) \geq q(\omega)\}$

$|P(A) - Q(A)| = \sum_{\omega \in A} (p(\omega) - q(\omega)) = |\sum_{\omega \in A \cap B} (p(\omega) - q(\omega)) + \sum_{\omega \in A \cap B^c} (p(\omega) - q(\omega))| \leq$

$\max\{\sum_{\omega \in A \cap B} (p(\omega) - q(\omega)); \sum_{\omega \in A \cap B} (q(\omega) - p(\omega))\} \Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 = \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega)$

$\rightarrow \sum_{\omega \in B} p(\omega) + \sum_{\omega \in B^c} p(\omega) = \sum_{\omega \in B} q(\omega) + \sum_{\omega \in B} q(\omega) \Rightarrow \sum_{\omega \in B} (p(\omega) - q(\omega)) = \sum_{\omega \in B^c} q(\omega) - p(\omega)$

Esercizio 5. Consideriamo la situazione dell'Esercizio 4. Sia $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ una successione tale che $\lim_{n \to \infty} n \cdot p_n = \lambda$ per un $\lambda \in (0, \infty)$. Per $n \in \mathbb{N}$, sia P_n la distribuzione binomiale di parametri n e p_n, e sia Q_n la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_n \doteq n \cdot p_n$. Sia infine Q la distribuzione di Poisson di parametro λ. Possiamo interpretare tutte queste misure come elementi di $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ con $\Omega \doteq \mathbb{N}_0$, $\mathcal{F} \doteq \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$.

(i) Si mostri che $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}_{TV}(P_n, Q_n) = 0$.

(ii) Si mostri che $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}_{TV}(Q_n, Q) = 0$.

(iii) Si concluda che $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}_{TV}(P_n, Q) = 0$.

$\boxed{ii.}$ $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(Q_n, Q) = 0$

Sol: Poiché $Q(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mathbb{1}(k \in \mathbb{N}_0)$, si ha

$$d_{TV}(Q_n, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{(np_n)^k}{k!} e^{-np_n} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left| (np_n)^k \cdot e^{-np_n} - \lambda^k \cdot e^{-\lambda} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\underbrace{\left|(np_n)^k - \lambda^k\right|}_{\leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0} e^{-np_n} + \underbrace{\left|e^{-np_n} - e^{-\lambda}\right|}_{\leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0} \cdot \lambda^k \right)$$

Dunque, per n sufficientemente grande, i termini della serie sono tutti arbitrariamente piccoli e tendenti a 0, così la serie. #

$\boxed{iii.}$ $\lim d_{TV}(P_n, Q) = 0$

Sol. Per la disuguaglianza triangolare, si ha

$$d_{TV}(P_n, Q) \leq d_{TV}(P_n, Q_n) + d_{TV}(Q_n, Q) \to 0 \quad \#$$

Esercizio 6. Siano N, X_i, $i \in \mathbb{N}$, variabili aleatorie *indipendenti* su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con N poissoniana di parametro $\lambda > 0$ e le X_i bernoulliane di parametro $p \in [0,1]$. Poniamo

$$Y \doteq \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

cioè

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } N(\omega) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) & \text{se } N(\omega) = n \text{ per un } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Si determini la distribuzione di Y.

Quello che viene fatto è esprimere $X_i = k \mid N = n$, per condizionamento. Essendo poi che abbiamo delle Poisson su delle Bernoulli, una serie di Bernoulli può essere espressa come binomiale.

Sol: Osserviamo che Y ha valori in $\mathbb{N}_0$.

Per $k \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=m)\cdot \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i = k\right)$$

Infine osserviamo:

- $\mathbb{P}(N=m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$
- $\sum_{i=1}^{m} X_i \sim Bi(m,p)$ $\forall m \geq 1$ e $0 \leq k \leq m$ si ha:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i = k\right) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Quindi, se $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda+\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \Longrightarrow Y \sim Poi(\lambda p)$$

#

Esercizio 7. Sia X una variabile aleatoria non-negativa definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tale che, per un $\lambda > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{\lambda X}\right] < \infty$.

a) Si mostri che X possiede momenti di ogni ordine, cioè $\mathbf{E}\left[X^k\right] < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

b) Si mostri che esiste una costante $K \in (0, \infty)$ tale che

$$\mathbf{P}(X \geq c) \leq K \cdot e^{-\lambda c} \text{ per ogni } c > 0.$$

[Suggerimento: disuguaglianza di Markov-Chebyshev.]

E V.5

Sia X una v.a. non-negativa su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

tale che $E[e^{\lambda X}] < \infty$ per <u>un</u> $\lambda > 0$.

(i) Sia ~~prom~~ $k \in \mathbb{N}$. Allora ~~esistono~~ esiste

~~a,~~ $b > 0$ tale che

$$x^k \leq \cancel{a} \, b \cdot e^{\lambda x} \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

grazie alla serie esponenziale: per $x \geq 0$,

$$e^{\lambda x} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^l}{l!}$$

$$\geq \frac{(\lambda x)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!} x^k$$

$$\rightsquigarrow \quad b \doteq \frac{k!}{\lambda^k}.$$

$$\cancel{X} \geq 0 \rightsquigarrow \quad X^k \leq b \, e^{\lambda X} \qquad \lambda > 0 \text{ come nell' ipotesi}$$

$$\overset{\text{monotonia}}{\underset{\text{linearità}}{\rightsquigarrow}} \quad E[X^k] \leq b \cdot \underbrace{E[e^{\lambda X}]}_{< \infty \text{ per ipotesi}} < \infty.$$

E V.5 (cont.)

(ii) Da mostrare: $\exists \, K \in (0, \infty)$:

$$P(X \geq c) \leq K \cdot e^{-\lambda c} \quad \text{per ogni } c \geq 0.$$

Per la disuguaglianza di Markov generalizzata ($\lambda > 0$ dall'ipotesi)

con $f(x) = e^{\lambda x}$, $x \geq 0$,

$$P(X \geq c) \leq \frac{E[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda c}} = \underbrace{E[e^{\lambda X}]}_{\doteq K < \infty \text{ per ipotesi}} \cdot e^{-\lambda c}$$

Esercizio 8. Un'azienda offre un servizio di manutenzione di frigoriferi industriali. Si osserva che di un certo pezzo di ricambio costoso e ingombrante ne servono in media quattro unità alla settimana. L'azienda può rifornirsi di quel pezzo di ricambio solo a inizio settimana. Quante unità ne deve avere il lunedì per non trovarsi sprovvista nel corso della settimana con probabilità maggiore del 95%?

X v.a "numero di p. di ricambio richiesti" $E[X]=4$

$$P(X \geq C+1) \leq \frac{E[X]}{C+1} < \frac{1}{20} \to C+1 > 4\cdot 20 \to C > 79$$

(Si salta l'esercizio nove in quanto servono le derivate parziali che noi non abbiamo mai visto, a sorpresa del prof quando gliel'ho fatto notare)

Esercizio 10. Siano $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Supponiamo che X, Y siano indipendenti e identicamente distribuite. Si mostri che allora

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\left[(X-Y)^2\right].$$

$X.Y$ i.i.d $\mid$ $var(X) = var(y)$

$$E[(X-E[X])^2] = E[(X-y)^2] = E[X^2] - E[Y^2] - 2E[X\cdot y]$$

$$= E[X^2] + E[Y^2] - 2E[X]\cdot E[Y]$$

$$= E[X^2] + E[Y^2] - 2E[X]^2 \leftarrow \text{sapendo } X=Y$$

$$= 2(E[X^2] - (E[X])^2) = var(X) = E[(X-E[X])^2] = 2\, var\, y$$

Esercizio 11. Sia ξ una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione uniforme continua su $[0,1]$. Si trova una funzione misurabile $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{N}$ tale che la variabile aleatoria $Y \doteq \phi(\xi)$ abbia la seguente distribuzione discreta:

$$\mathbf{P}(Y=n) = \begin{cases} 1/12 & \text{se } n=1, \\ 1/6 & \text{se } n=2, \\ 1/4 & \text{se } n=3, \\ 1/12 & \text{se } n=4, \\ 1/4 & \text{se } n=5, \\ 1/6 & \text{se } n=6, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$\xi \sim \mathrm{Unif}(0,1)$

$$P(Y=n) = \begin{cases} 1/12 & \text{se } n=1;\ n=4 \\ 1/4 & \text{se } n=3;\ n=5 \\ 1/6 & \text{se } n=2;\ n=6 \end{cases}$$

Creata

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, \tfrac{1}{12}) \\ 2 & \text{se } x \in [\tfrac{1}{12}; \tfrac{3}{12}) \\ 3 & \text{se } x \in [\tfrac{3}{12}; \tfrac{6}{12}) \\ 4 & \text{se } x \in [\tfrac{6}{12}; \tfrac{7}{12}) \\ 5 & \text{se } x \in [\tfrac{7}{12}; \tfrac{10}{12}) \\ 6 & \text{se } x \in [\tfrac{10}{12}; 1] \end{cases}$$

P

Esercizio 12 (Esercizio 3.9 in CD). Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per $n \in \mathbb{N}$, sia X_n una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $\{1, \ldots, n\}$. Poniamo

$$m_n \doteq \mathbf{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right].$$

Si identifichi il limite

$$\lim_{n\to\infty} m_n.$$

Soluzione 3.9. Si osservi che

$$\mathrm{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n),$$

che è una somma di Riemann per l'integrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$