1. Richiami

A. Retta reale estesa e somme infinite

Conveniente lavorare con la <u>retta reale estesa</u>

$$\overline{\mathbb{R}} \doteq [-\infty, \infty] \doteq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Ordinamento naturale ("<", "≤")

estensione dell'addizione e della moltiplicazione:

$$a + \infty \doteq \infty \quad \text{se} \quad a \in (-\infty, \infty]$$

$$a - \infty \doteq -\infty \quad \text{se} \quad a \in [-\infty, \infty)$$

<u>non</u> definito: "$\infty - \infty$"

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a \doteq \begin{cases} \infty & \text{se } a > 0, \\ -\infty & \text{se } a < 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases} \quad !$$

Analogamente per $\cdot (-\infty)$.

In $\overline{\mathbb{R}}$ esistono sempre l'<u>estremo superiore</u> e l'<u>estremo inferiore</u> di un insieme $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Sia $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Allora esiste un unico numero $M \in \overline{\mathbb{R}}$ tale

che $M \geq x$ per ogni $x \in A$

e se $y \geq M$ allora $y \geq x$ per ogni $x \in A$.

Questo numero si dice l'<u>estremo superiore</u> di A

e si indica con $M \doteq \sup A$.

Analogamente viene definito l'estremo inferiore di A,

indicato con $\inf A$.

Esempio: $A = \mathbb{Q}$ $\rightsquigarrow$ $\sup \mathbb{Q} = \infty$,

$\inf \mathbb{Q} = -\infty$.

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ una successione. Allora

sono ben definiti

il <u>limite superiore</u> di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\limsup_{n \to \infty} a_n \doteq \cancel{\sup\{}\ \inf\{\sup\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\},$$

il <u>limite</u> <u>inferiore</u> di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \doteq \sup\{\inf\{a_k : k\geq n\} : n\in\mathbb{N}\};$$

ben definiti in $\overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ <u>converge</u> in $\overline{\mathbb{R}}$ con <u>limite</u> $a\in\overline{\mathbb{R}}$ se

$$a = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

[Attenzione: In generale, $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.]

In questo caso, si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definizione di limite compatibile con la convergenza in $\mathbb{R}$ per successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $\overline{\mathbb{R}}$ con limite $a\in\mathbb{R}$ se e solo se $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}: \forall\, n\geq n_0$

$$|a-a_n|\leq\varepsilon .$$

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Il valore della <u>serie</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ è definito da

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq \lim_{N\to\infty} s_N \quad \text{se esiste in } \mathbb{R},$$

dove $$s_N \doteq \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad N \in \mathbb{N}.$$

somma parziale N-esima

Il valore della serie è quindi definito come il limite delle somme parziali (se esiste in $\mathbb{R}$)

Esempi:

a) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge / esiste in } [0,\infty) \\ \text{se } \alpha > 1, \\ \text{diverge / } = \infty \\ \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

b) Per $x \in \mathbb{R}$, <u>serie esponenziale</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \in (0,\infty)$$

Sia $\mathcal{I} \neq \emptyset$ insieme arbitrario,

e sia $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ una famiglia di numeri reali estesi indicizzati da $\mathcal{I}$.

Def. (somma infinita)

1) Se $a_i \geq 0$ $\forall\, i \in \mathcal{I}$, allora

termini non-negativi

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i \doteq \sup\left\{ \sum_{j\in J} a_j \,:\, J \subseteq \mathcal{I} \ \underline{\text{finito}} \right\}$$

è il valore della <u>somma infinita</u> di $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$

$\rightsquigarrow$ valore esiste in $[0,\infty]$.

2) Scriviamo $a_i = a_i^+ - a_i^-$, dove

$a_i^+ \doteq a_i \vee 0 \doteq \max\{a_i, 0\}$ "parte positiva"

$a_i^- \doteq (-a_i) \vee 0 \doteq \max\{-a_i, 0\}$ "parte negativa"

Si dice che $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ <u>ammette somma</u> nel senso di 1)

se almeno una delle due somme $\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i^+$, $\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i^-$ è finita, cioè esiste in $[0,\infty)$.

In questo caso,
$$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i \doteq \left(\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i^+\right) - \left(\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i^-\right) \in \overline{\mathbb{R}}$$

(Def. cont.)

Si dice che $(a_i)_{i \in J}$ <u>ammette somma finita</u> se $\sum_{i \in J} a_i^+$, $\sum_{i \in J} a_i^-$ sono entrambe finite.

Anche in questo caso,

$$\sum_{i \in J} a_i \doteq \left(\sum_{i \in J} a_i^+\right) - \left(\sum_{i \in J} a_i^-\right)$$

esiste in $\mathbb{R}$

— — —

Esempio: $J = \mathbb{N}$

$$a_n \doteq (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Domande:

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette somma (finita o infinita) ~~somma finita~~ ?

2) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ?

Sì, per Leibniz! $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = \log(2)$

Invece 1):

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^+ = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2k-1} = \infty !$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^- = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2k} = \infty$$

nel senso della Def. 1) esistono in $[0, \infty]$

$\leadsto$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>non</u> ammette somma!

Osservazione:

Se $(a_i)_{i\in I}$ ammette somma finita, allora

(i) $a_i \in (-\infty,\infty)$ per ogni $i \in I$;

(ii) l'insieme degli indici i ~~per~~ ~~con~~ tali che $a_i \neq 0$ è al più numerabile:

$\{ i \in I : a_i \neq 0 \}$ è al più numerabile. !

Ricorda distinzione fondamentale:

- insieme finito
- insieme infinito numerabile

$\Big\}$ al più numerabile

- insieme più che numerabile

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette somma finita,

allora
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
← valore della serie

Infatti, la serie in questo caso è assolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Teorema (proprietà delle somme infinite)

Siano $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ due famiglie indicizzate dallo stesso insieme I. Allora:

1) Linearità: Se (a_i), (b_i) ammettono somma finita, allora
$$\sum_{i\in I} (\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) = \alpha \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big) + \beta \Big(\sum_{i\in I} b_i\Big)$$
per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Monotonia: Se (a_i), (b_i) ammettono somma (finita o infinita) e $a_i \leq b_i$ $\forall i \in I$, allora
$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i .$$

3) Somma a blocchi: Se $(a_i)_{i\in I}$ ammette somma e $(I_j)_{j\in J}$ è una partizione di I (cioè $\bigcup_{j\in J} I_j = I$, e $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$, e $I_i \neq \emptyset$ $\forall i \in J$), allora

$(a_i)_{i\in I_j}$ ~~ammett esiste~~ ammette somma per ogni $j \in J$

e
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I_j} a_i \Big) .$$

~~(proprietà cont.)~~

Osservazzioni:

1) Se $(a_i)_{i\in\hat{I}}$, $(b_i)_{i\in\tilde{I}}$ sono famiglie di numeri reali estesi con insiemi di indici diversi, possiamo ~~posso~~ porre $I := \hat{I} \cup \tilde{I}$,

$$\bar{a}_i := \begin{cases} a_i & \text{se } i \in \hat{I}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad \bar{b}_i := \begin{cases} b_i & \text{se } i \in \tilde{I}, \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Allora $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ ammette somma se e solo se $(a_i)_{i\in\hat{I}}$ ammette somma e i valori coincidono; analogamente per $(\overset{(-)}{b_i})$; inoltre, insieme degli indici comune, per $(\bar{a}_i)$, $(\bar{b}_i)$.

2) Se $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ sono tali che $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, allora

$$\sum_{i\in I} (\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) = \alpha \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big) + \beta \Big(\sum_{i\in I} b_i\Big)$$

per ogni $\alpha, \beta \geq 0$;

somme ben definite in $[0,\infty]$.

(Osservazioni cont.)

3) Poniamo $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i \doteq 0$ se $I = \emptyset$.

4) Per la proprietà della somma blocchi, se $(a_i)_{i \in I}$ ammette somma, allora il valore della somma <u>non</u> dipende dall'ordine in cui si sommano i termini.

5) Se I è numerabile con

$$I = \{ i_j : j \in \mathbb{N} \},$$ ~~allora~~

e $a_i \geq 0$ per ogni $i \in I$, allora

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i_j}$$

serie

La "somma a blocchi" implica:

Corollario (Fubini - Tonelli per le somme infinite):

Sia $(a_i)_{i\in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$ con I un insieme prodotto della forma $I = I_1 \times I_2$, dove $I_1, I_2 \neq \emptyset$.

! Se $(a_i)_{i\in I}$ ammette somma, allora

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i_1\in I_1} \Big(\sum_{i_2\in I_2} a_{(i_1,i_2)} \Big) = \sum_{i_2\in I_2} \Big(\sum_{i_1\in I_1} a_{(i_1,i_2)} \Big)$$

$$\| \quad \sum_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2} a_{(i_1,i_2)}$$

e le somme infinite esistono tutte. //

Esempio: Sia $\lambda > 0$. ~~I~~ Sia $I = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Pongo $a_{(i,j)} \doteq \dfrac{\lambda^{i+j}}{i!\cdot j!}$, $(i,j)\in I$.

Allora $(a_{(i,j)})_{(i,j)\in I}$ ammette somma (tutti termini non-negativi!),

quindi ~~e per~~ per Fubini-Tonelli,

$$\sum_{(i,j)\in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^{i+j}}{i!\cdot j!} = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^{i+j}}{i!\cdot j!} \Big) \overset{\text{linearità}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^i}{i!} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^j}{j!} \Big)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^i}{i!} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \Big) \overset{\text{serie esponenziale}}{=} e^{\lambda} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \Big) = e^{2\lambda}. \quad //$$