Commenti foglio IV.

Calcolo del v. atteso di una funzione di una v.a reale X assolut. continua

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx$$

↑ densità di X

In particolare

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx \qquad E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx$$

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

<u>ES. 7 FOGLIO 4</u> Sia $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ success. di v.a reali indipendenti.

~~Se X_i, $i \in \mathbb{N}$ sono ind~~ Poniamo $Y_n(\omega) \doteq \max\{X_1(\omega), \dots X_n(\omega)\}$, $\omega \in \Omega$

Se X_i $i \in \mathbb{N}$ sono indipendenti allora $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(X_1 \leq y \dots X_n \leq y) \quad \text{indipendenza}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) \rightarrow P$$

<u>ES. 6 FOGLIO 3</u>

Siano N, X_i, $i \in \mathbb{N}$ v.a. indipendenti con $N \sim Poiss(\lambda)$

Poniamo $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, cioè $Y(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ se } N(\omega) = 0, \\ \sum_{i=1}^{K} X_i(\omega) \text{ se } N(\omega) = K \text{ per un } K \in \mathbb{N} \end{cases}$

Distribuzione di Y?

Basta calcolare $P(Y = K)$ per un $K \in \mathbb{N}_0$

$n=k$

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N=n\right) = \sum_{n=k}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\cdot P(N=n)$$

$$=\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\frac{p^k}{k!}\cdot\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-k}\cdot\lambda^n}{(n-k)!}\right)=e^{-\lambda}\cdot\frac{p^k\cdot\lambda^k}{k!}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-k}\cdot\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\right.$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-p)^m\cdot\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\frac{(p\cdot\lambda)^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{((1-p)\cdot\lambda)^m}{m!}=e^{(1-p)\cdot\lambda}$$

$\uparrow$ serie esponenziale

$$=e^{-\lambda+(1-p)\lambda}\cdot\frac{(p\cdot\lambda)^k}{k!}\rightarrow P(Y=k)=e^{-p\cdot\lambda}\cdot$$

$$\frac{(p\cdot\lambda)^k}{k},\ n\in\mathbb{N}\rightarrow Y\sim Pois(p\cdot\lambda)$$

Es. 10 FOGLIO 3

Siano $X, Y\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ indipendenti e identic. distribuite

Allora $var(X)=var(Y)$

$$E[(X-E[X])^2]=E[(X-Y)^2]=E[X^2]+E[Y^2]-2E[X\cdot Y]$$

$(X, Y$ indipendenti$)$.

$= E[X^2] + E[Y^2] - 2E[X]\cdot E[Y]$ $\cancel{X}$, Y indet. distribuite

$= E[X^2] + E[X^2] - 2(E[X])^2$ $E[X^2]$ ed $E[X^2]$ perché $X = Y$
e dunque è come fare due volte l'operazione

$= 2\underbrace{(E[X^2] - (E[X])^2)}_{= var(X) = E[(X - E[X])^2] = \dots} = 2\, var(Y)$

FOGLIO 3 ES. 11 $\to$ con ξ = CSI $\to P(\xi \in [a, b]) = b - a$ se $0 \le a \le b \le 1$

Sia $\xi \sim Unif(0,1)$ Trovare $\phi : [0,1] \to \mathbb{N}$ tale che $Y = \phi(\xi)$
~~abbia~~ abbia densità discreta

$$P(Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{12} \text{ se } n = 1 & \frac{1}{12} \text{ se } n = 4 \\ \frac{1}{6} \text{ se } n = 2 & \frac{1}{4} \text{ se } n = 5 \\ \frac{1}{4} \text{ se } n = 3 & 1/6 \text{ se } n = 6 \\ \emptyset \text{ altrimenti} \end{cases}$$

In pratica, ricavo ciascun elemento per somma di quelli precedenti.
Esempio 6/12 (caso 3):
1/12+1/6+1/4

\

Definiamo $\phi : [0,1] \to \mathbb{N}$ tramite

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in [0, \frac{1}{12}) & 5, \text{ se } x \in [\frac{7}{12}, \frac{10}{12}] \\ 2 \text{ se } x \in [\frac{1}{12}, \frac{3}{12}), & 6 \text{ se } x \in [\frac{10}{12}, 1] \\ 3 \text{ se } x \in [\frac{3}{12}, \frac{6}{12}) & \\ 4 \text{ se } x \in [\frac{6}{12}, \frac{7}{12}) & \end{cases}$$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{6}$

$P(Y = 5) = P(\phi(\xi) = 5) = P(\xi \in [\frac{7}{12}, \frac{10}{12})) = P(\xi \le \frac{10}{12}) - P(\xi \le \frac{7}{12})$

$F_\xi(\frac{10}{12}) - F_\xi(\frac{7}{12})$ | $\xi \sim Unif(0,1)$:

$F_\xi(x) = x \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$= \frac{10}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \qquad \to P(Y=5) = \frac{1}{4}$

FOGLIO 3 ES. 12: ~~X_n, $n \in \mathbb{N}$ i.i.d.~~

$X_n \sim Unif(\{1, \dots n\}) \to P(X_n = k) = \frac{1}{k}$ se $k \in \{1 \dots n\}$.

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua (e limitata, me ne vede)

$m_n = E[f(X_n)] \quad E[f(X_n)] = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot P(X_n = i)$

$\to m_n = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^1 f(x)\,dx$

somme di Riemann

FOGLIO 3 ES. 8 $\qquad$ Siano $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $var(X) > 0$, $var(Y) > 0$

COEFF. DI CORRELAZIONE

$E[(Y - (a_x + b))^2] \geq var(Y) \cdot (1 - \rho(X,Y)^2)$,

$\phi(a, b)$

$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}$