# VALOR MEDIO E VARIANZA DI V. AL. CONTINUE

<u>DEFINIZIONE DI VALOR MEDIO</u>. Il valor medio della v.al. assolutamente continua $X$, con densità $f_X$, è dato da

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

se tale integrale esiste ed è finito.

<u>Oss</u>. La media di una v.al. continua può non esistere. Un esempio di v.al. che non ammette valor medio è la v.al. (di Cauchy) con densità $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$.

<u>Nota bene</u>: tutte le proprietà sul valor medio che abbiamo visto nella lezione 9 continuano a valere.

<u>Teorema</u>. Sia $X$ una v.al. assolutamente continua con densità $f_X$ e sia $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $g(X)$ è una v.al. assolutamente continua e il suo valor medio, se esiste, è dato da

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx.$$

<u>APPLICAZIONE</u>: se consideriamo $g(x) = (x - E(X))^2$ otteniamo la definizione di VARIANZA. Si ha

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \, f_X(x) \, dx$$

Tutte le proprietà sulla varianza viste nella lezione 9 continuano a valere. In particolare, per estrema comodità, continueremo a calcolare la varianza di $X$ come $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

## ESERCIZIO

Sia $X$ una variabile aleatoria assolutamente continua con funzione di densità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare: (a) la funzione di distribuzione di $X$; (b) la prob. che $X$ appartenga all'intervallo $(e/2, e)$; (c) valor medio e varianza di $X$; (d) la densità della v.al. $Y = \ln X$.

<u>Soluzione</u>. (a) Se $t \in \mathbb{R}$, la funz. di distr. di $X$ è data da

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

- se $t<1$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot dx = 0$$

- se $1 \leq t \leq e$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int_{1}^{t} \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \ln x \Big|_{1}^{t} = \ln t$$

- se $t > e$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int_{1}^{e} \frac{1}{x} \cdot dx + \int_{e}^{t} 0 \cdot dx$$

$$= \ln x \Big|_{1}^{e} = 1 .$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<1 \\ \ln t & \text{se } 1 \leq t \leq e \\ 1 & \text{se } t > e . \end{cases}$$

(b) Si ha $P(e/2 < X < e) = F_X(e) - F_X(e/2) = \ln 2.$

(c) Calcoliamo

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\,dx = \int_1^e dx = x\Big|_1^e = e-1.$$

Inoltre, otteniamo

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - (e-1)^2 \\ &= \int_1^e x\,dx - (e-1)^2 \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_1^e - (e-1)^2 = \dots = -\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(d) Determiniamo innanzitutto quali sono i valori assunti da $Y$.

Osserviamo che $X$ prende valori solo sull'intervallo $[1,e]$. Inoltre, abbiamo $Y = g(X)$ con $g(x) = \ln x$. Pertanto, la v.al. $Y$ prenderà valori in $g([1,e])$, cioè nell'immagine tramite la funzione $g$ dell'intervallo $[1,e]$. Si ha

$$X \in [1, e] \iff 1 \leq X \leq e$$

$$\iff \ln 1 \leq \ln X \leq \ln e$$

$$\iff 0 \leq Y \leq 1 \qquad \iff Y \in [0, 1]$$

Conclusione: $Y$ prende valori <u>solo</u> sull'intervallo $[0,1]$.
Questo significa che $f_Y(y) \equiv 0$ per $y<0$ o per $y>1$.
Per caratterizzare la densità di $Y$ su $[0, 1]$, determiniamo la funz. di distr. di $Y$ su questo intervallo e poi deriviamo. Se $y \in [0, 1]$, si ha

$$F_Y(y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y) = \ln e^y = y.$$

poiché se $y \in [0,1]$ si ha $e^y \in [1,e]$

Ora deriviamo e otteniamo

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} [y] = 1.$$

Mettendo tutto insieme, la densità risulta

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

---

# VARIABILI ALEATORIE CONTINUE NOTEVOLI

## Variabili aleatorie uniformi

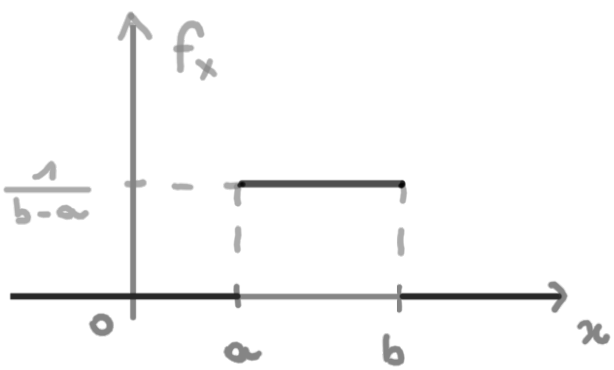
$X \sim U(a,b)$ con $a<b$ se ha densità

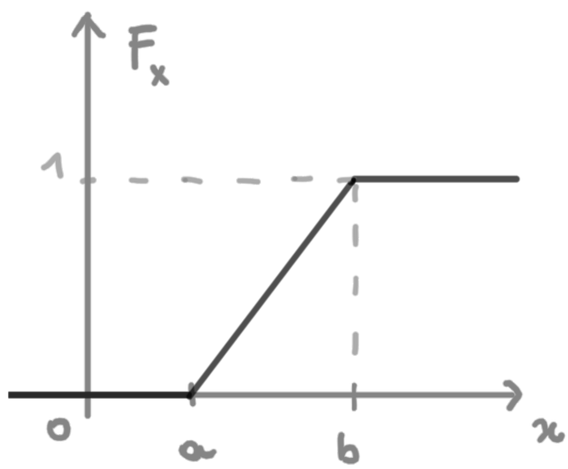
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

oppure, equivalentemente, funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b. \end{cases}$$

Inoltre, $E(X) = \frac{b+a}{2}$ e $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.



Calcoliamo

<u>Funzione di distribuzione</u>: se $t \in \mathbb{R}$, allora la funz. di distr. di $X$ è data da

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,dz$$

• se $t < a$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,dz = \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot dz = 0$$

• se $a \leq t \leq b$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,dz = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dz + \int_{a}^{t} \frac{1}{b-a} \cdot dz$$

$$= \frac{z}{b-a}\Big|_{a}^{t} = \frac{t-a}{b-a}$$

• se $t > b$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,dz = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dz + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \cdot dz + \int_{b}^{t} 0 \cdot dz$$

$$= \frac{z}{b-a}\Big|_{a}^{b} = 1 ;$$

valor medio:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx$$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b$$

$$= \dots = \frac{b+a}{2}$$

varianza:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) \, dx - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} \cdot dx - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \dots = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

## ESERCIZI

1. Gli autobus passano ad una specifica fermata ad intervalli di 15 minuti, a partire dalle 7; cioè alle 7:00, 7:15, 7:30, 7:45,... Se una persona arriva alla fermata in un istante uniformemente distribuito tra le 7:00 e le 7:30, determinare la probabilità che aspetti l'autobus meno di 5 minuti.

<u>Soluzione</u>. Chiamiamo la persona che arriva alla fermata dell'autobus Tizio. Sia $X$ il momento tra le 7:00 e le 7:30 in cui Tizio arriva alla fermata. Si ha $X \sim U(0, 30)$, cioè $X$ ha densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{se } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sappiamo che Tizio aspetterà l'autobus meno di 5 minuti se arriverà alla fermata esattamente alle 7:00 oppure tra le 7:10 e le 7:15 oppure tra le 7:25 e le 7:30. Quindi, la prob. che Tizio aspetti meno di 5 minuti è data da

$$\underbrace{P(X=0)}_{=0} + P(10<X\leq 15) + P(25<X\leq 30)$$

$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30}\cdot dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\cdot dx = \frac{1}{3}.$$

2. Un grissino di lunghezza unitaria viene spezzato a caso nel punto $X$, cioè si ha $X \sim U(0,1)$. Sia $c \in [0,1]$ un punto assegnato. Calcolare la lunghezza media del pezzo di grissino che contiene $c$.

<u>Soluzione</u>. La lunghezza $\ell$ del pezzo di grissino che contiene $c$ è una funzione della v.al. $X$. Infatti, si ha

$$\ell(X) = \begin{cases} X & \text{se } 0 \leq c \leq X \\ 1-X & \text{se } X < c < 1 \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare il valor medio di $\ell(X)$. Poiché $X \sim U(0,1)$, la sua densità è pari a

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi otteniamo

$$
\begin{aligned}
E(\ell(X)) &= \int_{\mathbb{R}} \ell(x) F_X(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \ell(x)\, dx \\
&= \int_0^c (1-x)\, dx + \int_c^1 x\, dx \\
&= \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^c + \frac{x^2}{2}\Big|_1^c \\
&= \ldots = \frac{1}{2} + c(1-c).
\end{aligned}
$$

---