2. LA σ-ALGEBRA DEGLI EVENTI

Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoins. di Ω si chiama σ-algebra se:

(i) $\mathcal{F}$ è non vuota

(ii) se $E \in \mathcal{F}$, allora $E^c \in \mathcal{F}$

(iii) se $E_n \in \mathcal{F}$ per $n \geq 1$, allora $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{F}$

<u>Esempi</u>

1. <u>σ-algebra banale</u>. Qualunque sia Ω, la famiglia $\{\Omega, \emptyset\}$ è una σ-algebra.

2. <u>σ-algebra generata da un evento</u>. Dato Ω e un evento $E \subseteq \Omega$, la famiglia $\{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$ è una σ-algebra.

3. <u>σ-algebra massima</u>. Qualunque sia Ω, la famiglia di tutti i suoi sottoinsiemi (detta insieme delle

parti) $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$ è una σ-algebra.

NOTA: se Ω è discreto prenderemo sempre $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$.

Conseguenze elementari degli assiomi:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \in \mathcal{F}$

Come lo vedo?

Esiste $E \in \mathcal{F}$ per (i) $\Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$ per (ii)

Ora: $\Omega = \underbrace{E \cup E^c}_{\in \mathcal{F} \text{ per (iii)}} \in \mathcal{F}$

$$\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F} \quad \text{per (ii)}$$

(2) se $E_n \in \mathcal{F}$ per ogni $n \geq 1$, allora $\bigcap_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{F}$

Come lo vedo?

Usiamo De Morgan:

$$\underbrace{\left(\bigcap_{n\geq 1} E_n\right)^c = \bigcup_{n\geq 1} \underbrace{E_n^c}_{\in \mathfrak{F} \text{ per (ii)}}}_{\in \mathfrak{F} \text{ per (iii)}} \in \mathfrak{F}$$

Chiudiamo: $$\bigcap_{n\geq 1} E_n = \underbrace{\Big(\underbrace{\big(\bigcap_{n\geq 1} E_n\big)^c}_{\in \mathfrak{F}}\Big)^c}_{\in \mathfrak{F} \text{ per (ii)}} \in \mathfrak{F}$$

$\blacksquare$

3. LA MISURA DI PROBABILITÀ P

Una misura di probabilità è una mappa

$$P : \mathfrak{F} \longrightarrow [0,1]$$
$$E \longmapsto P(E) \qquad \text{(prob. evento } E\text{)}$$

tale che: (i) $P(\Omega) = 1$ (normalizzazione)

(ii) se $\{E_n\}_{n\geq 1}$ famiglia di eventi <u>mutualmente incompatibili</u>, allora $P\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(E_n)$.

Conseguenze elementari degli assiomi:

(1) $P(E^c) = 1 - P(E)$

Come lo vedo?

Si ha $1 = P(\Omega) = P(\underbrace{E \cup E^c}_{\text{disgiunti}}) \overset{(ii)}{=} P(E) + P(E^c)$

da cui $P(E^c) = 1 - P(E)$. $\blacksquare$

(2) $P(\emptyset) = 0$

Come lo vedo?

Si ha $\emptyset = \Omega^c$, quindi

$$P(\emptyset) = P(\Omega^c) \overset{(1)}{=} 1 - \underbrace{P(\Omega)}_{= 1 \text{ per } (i)} = 0 \qquad \blacksquare$$

(3) se $E \subset F$, allora $P(E) < P(F)$

Come lo vedo?

Se $E \subset F$, allora $F = E \cup \underline{(F \setminus E)}$

disgiunti

Quindi $P(F) \overset{(ii)}{=} P(E) + \underbrace{P(F \setminus E)}_{\in [0,1]}$

positivo!

da cui segue $P(F) > P(E)$. $\blacksquare$

(4) **Formula di inclusione/esclusione**

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Come lo vedo?

Si ha $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$ (unione disgiunta)

e quindi $P(E \cup F) = P(E) + P(F \setminus E)$.

Inoltre $F = (F \setminus E) \cup (F \cap E)$ (unione disgiunta)

e quindi $P(F) = P(F \setminus E) + P(F \cap E)$.

Ricavo $P(F \setminus E) = P(F) - P(F \cap E)$.

Ottengo: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(F \cap E)$ $\blacksquare$

<u>Oss.</u> Dato $(\Omega, \mathfrak{F})$ la misura di prob. P che ci metto non è univocamente determinata dagli assiomi.

<u>Esempio</u>

Lancio di una moneta: $\Omega = \{T, C\}$ e $\mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega)$.
Infinite misure di prob. compatibili con gli assiomi:

$$P(T) = p \in [0,1], \quad P(C) = 1 - p.$$

ESERCIZI

1. Siano $E, F \in \mathfrak{F}$ eventi. Mostrare che
   (a) $P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$
   (b) $P(E \Delta F) = P(E) + P(F) - 2P(E \cap F)$

Soluzione.

(a) Si ha $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$ (un. disg.)
Allora $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$, da cui ricavo $P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$.

(b) Si ha $E \Delta F = (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)$ (un. disg.)
Allora $P(E \Delta F) = P(E \cap F^c) + P(F \cap E^c)$.
Ora uso il punto (a). Ottengo

$$P(E \Delta F) = P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$$
$$= P(E) + P(F) - 2P(E \cap F).$$

2. Siano $A, B \in \mathcal{F}$ eventi incompatibili. Sapendo che $P(A) = 0.3$ e $P(A \cup B) = 0.5$, calcolare
(a) $P(B)$
(b) $P(A \Delta B)$

Soluzione.

(a) A, B incomp. $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Quindi otteniamo
$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.5 - 0.3 = 0.2$.

(b) Per ES 1, $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2\underbrace{P(A \cap B)}_{=0}$

$$= 0.3 + 0.2 = 0.5.$$

3. Siano $A, B \in \mathcal{F}$ eventi. Mostrare che se $P(A) = P(B) = 0$, allora $P(A \cup B) = 0$.

<u>Soluzione</u>. Osserviamo che

$$0 \leq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\substack{\in [0,1] \\ \text{positivo!}}} \leq P(A) + P(B) = 0$$

cioè $0 \leq P(A \cup B) \leq 0$ e quindi $P(A \cup B) = 0$.

4. Siano $A, B, C \in \mathcal{F}$ tre eventi equiprobabili e tali che $A \cap B = \emptyset$; $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ e $P(B \cap C) = P(B)P(C)$.
Sapendo che $P(A \cup C) = 5/9$, calcolare $P(A \cup B \cup C)$.

Soluzione.

A, B, C equiprob. $\iff$ $P(A) = P(B) = P(C) = p$, con $p \in [0,1]$.

$P(A \cup B \cup C) =$

propr. distr.

$$\overset{(I/E)}{=} P(A \cup B) + P(C) - P\Big(\overbrace{(A \cup B) \cap C}^{= (A\cap C) \cup (B \cap C)}\Big)$$

$$\overset{(I/E)}{=} P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0} + P(C)$$

$$- \Big[P(A \cap C) + P(B \cap C) - \underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{=0} \Big]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(C) - P(B)P(C)$$

$$= 3p - 2p^2$$

Per ricavare p, uso l'info $P(A \cup C) = 5/9$.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$
$$= 2p - p^2$$

Risolvo $2p - p^2 = 5/9$ e ottengo
$p = 1/3$ o $p = 5/3$ (non accettabile !!!).

Sostituisco e concludo $P(A \cup B \cup C) = 7/9$.

5. Gioia deve leggere 2 libri. Con probabilità 0.5 le piacerà il primo, con probabilità 0.4 il secondo e con probabilità 0.3 le piaceranno entrambi.
Qual è la probabilità che non le piaccia nessuno dei due libri?

Soluzione.

Sia E_i l'evento "a Gioia piace il libro i-esimo", con $i = 1, 2$. L'evento a cui siamo interessati è $E_1^c \cap E_2^c$. Quindi

$$\begin{aligned} P(E_1^c \cap E_2^c) &= P((E_1 \cup E_2)^c) \\ &= 1 - P(E_1 \cup E_2) \\ &= 1 - P(E_1) - P(E_2) + P(E_1 \cap E_2) \\ &= 1 - 0.5 - 0.4 + 0.3 \\ &= 0.4. \end{aligned}$$