B. Operazioni insiemistiche

Abbiamo le seguenti operazioni elementari tra insiemi:

Siano A, B insiemi. Allora:

$A \cup B \doteq \{ x : x \in A \text{ o } x \in B \}$ unione

o inclusivo

$A \cap B \doteq \{ x : x \in A \text{ e } x \in B \}$ intersezione

$A \setminus B \doteq \{ x : x \in A \text{ e } x \notin B \}$ differenza

$A \Delta B \doteq \{ x : \text{o } x \in A \text{ o } x \in B \}$ differenza simmetrica

esclusivo

Nota: $A \Delta B \doteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Relazioni fondamentali: "$\in$"

- $A \subset B$ se e solo se $\forall x \in A : x \in B$

$\subseteq$

- $A \supset B$ se e solo se $\forall x \in B : x \in A$.
- $A = B$ se e solo se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Notazione: "$\subset$", "$\subseteq$" equivalenti. Per l'inclusione stretta:

$A \subsetneq B$ se e solo se $A \subset B$ e $A \neq B$.

Spesso avremo un insieme di riferimento $\Omega \neq \emptyset$; gli insiemi di interesse saranno sottoinsiemi di Ω.

Se $A \subset \Omega$ definiamo il <u>complementare</u> di A (rispetto a Ω) ~~come~~ mediante

$$A^c \doteq \Omega \setminus A.$$

Si possono considere unioni e intersezioni arbitrarie: Siano A_i, $i \in I$, insiemi, $I \neq \emptyset$. Allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i \doteq \{ x : \exists\, i \in I : x \in A_i \} \qquad \text{unione}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \doteq \{ x : \forall\, i \in I : x \in A_i \} \qquad \text{intersezione.}$$

Le Leggi di De Morgan: Se $A_i \subseteq \Omega$ per ogni $i \in I$ allora

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i \Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c ,$$

$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i \Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c .$$

Complementare corrisponde alla negazione logica, $\cup$ corrisponde a "esiste" $\exists$, $\cap$ corrispondere a "per ogni" $\forall$.

Utile: Funzioni indicatrici

Siano $A, B \subset \Omega$. La <u>funzione indicatrice</u> di A (rispetto a Ω) è data da

$$\mathbb{1}_A(x) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in A^c \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \quad \mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$.

In termini di funzioni indicatrici abbiamo, ad esempio,

a) $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ se e solo se $A \subseteq B$

nel senso che $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x) \ \forall x \in \Omega$

b) $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$

c) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$

d) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$

e) $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.

Per successioni di insiemi si possono definire i limiti superiore e inferiore (~~se~~ esistono!)

Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi.

Def.: Il <u>limite superiore</u> di $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è dato da

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \doteq \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq K} A_n .$$

Il <u>limite inferiore</u> di $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è dato da

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \doteq \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq K} A_n .$$

Nota: • Analogia con il limsup, liminf per i numeri in $\overline{\mathbb{R}}$

• $$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

• Se $A_n \in \mathcal{A}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora

$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c .$$

• Interpretazione "logica":

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x : \forall K\in\mathbb{N}\ \exists\ n\geq K : x\in A_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x : \exists K\in\mathbb{N}\ \forall n\geq K : x\in A_n\}.$$

Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi.

Allora si definiscono i limiti superiore e inferiore mediante

$$\limsup_{n \to \infty} A_n \doteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} A_n .$$

$$\liminf_{n \to \infty} A_n \doteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n .$$

Nota: $\liminf_{n \to \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \to \infty} A_n$

Def.: ~~La succ~~ Si dice che $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge se $\liminf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n$.

In questo caso: ~~scriviamo~~ l'insieme

$$A \doteq \liminf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n$$

si dice il limite di $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in simboli

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A .$$

Esempio:

- Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente, cioè $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, allora

  $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e

  $$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} A_n .$$

- Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decresente, cioè $A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, allora

  $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e

  $$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} A_n .$$