Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2020/2021

ESERCITAZIONE 9

E9.1. Si consideri la funzione

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{se } x < 0 \\ cx & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determinare: (a) la costante $c \in \mathbb{R}_+$ tale per cui f_X risulta essere la funzione di densità di una variabile aleatoria assolutamente continua X; (b) la probabilità che X valga al più $\frac{1}{2}$; (c) il valor medio e la varianza di X.

Soluzione.

(a) Affinché f_X sia una densità si deve avere

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx + c\int_0^1 x\,dx = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{e^{3x}}{3}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{cx^2}{2}\bigg|_0^1 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{c}{2} = 1$$

e quindi otteniamo $c = \frac{4}{3}$. Pertanto la funzione di densità risulta

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{4}{3}\,x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

(b) Calcoliamo

$$P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx + \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{3}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

(c) Per il valor medio otteniamo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{3x}\,dx + \frac{4}{3}\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{x^3}{9}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

poiché

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + \text{costante.}$$

Inoltre, abbiamo

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{3x}\,dx + \frac{4}{3}\int_0^1 x^3\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{x^4}{3}\bigg|_0^1 = \frac{11}{27},$$

poiché

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\,dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + \text{costante}.$$

Quindi $Var(X) = \frac{11}{27} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$.

E9.2. La variabile aleatoria X ha densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4} & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e descrive la distribuzione del reddito mensile, in K€ (migliaia di euro), in una popolazione con reddito minimo di 1 K€. Calcolare: (a) la probabilità che il reddito di un individuo sia superiore a 2 K€; (b) la probabilità che il reddito di un individuo sia tra 1.5 K€ e 2 K€; (c) il reddito mensile medio.

Soluzione. Calcoliamo

(a) $P(X > 2) = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = -\frac{1}{x^3}\bigg|_2^{+\infty} = \frac{1}{8}$,

(b) $P\left(\dfrac{3}{2} < X < 2\right) = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{3}{x^4}\,dx = -\frac{1}{x^3}\bigg|_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{37}{216} \approx 0.1713.$

(c) $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3}\,dx = -\frac{3}{2x^2}\bigg|_1^{+\infty} = \frac{3}{2}.$

E9.3 (⚑ tratto da appello). Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare: (a) il valore $c > 0$ per cui la funzione f risulta una densità di probabilità; (b) la funzione di distribuzione associata alla densità f; (c) valor medio e varianza.

Soluzione.

(a) Imponiamo la condizione di normalizzazione. Otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^c \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (c-2)^2 = 0,$$

da cui segue $c = 2$. Quindi la densità risulta

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(b) Consideriamo $t \in \mathbb{R}$, la funzione di distribuzione associata ad f è data da

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^t = t - \frac{t^2}{4} & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

(c) Determiniamo il valor medio. Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Determiniamo ora la varianza. Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right)\,dx - \frac{4}{9} = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2 - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

E9.4 (tratto da appello; video). Sia $\alpha > 0$. Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{c_\alpha}{\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x < \alpha \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare: (a) il valore c_α per cui la funzione f_α risulta una densità di probabilità; (b) la funzione di distribuzione associata alla densità f_α; (c) valor medio e varianza.

Soluzione.

(a) Imponiamo la condizione di normalizzazione. Otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\alpha \frac{c_\alpha}{\sqrt{x}}\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[2c_\alpha\sqrt{x}\right]_0^\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

e quindi la densità risulta

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha x}} & \text{se } 0 < x < \alpha \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(b) Consideriamo $t \in \mathbb{R}$, la funzione di distribuzione associata ad f_α è data da

$$F_\alpha(t) = \int_{-\infty}^t f_\alpha(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{2\sqrt{\alpha x}} = \sqrt{\frac{x}{\alpha}}\Bigg|_0^t = \sqrt{\frac{t}{\alpha}} & \text{se } 0 < t < \alpha \\ 1 & \text{se } t \ge \alpha. \end{cases}$$

(c) Determiniamo il valor medio. Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}} x f_\alpha(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^\alpha \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha}{3}.$$

Inoltre, poiché si ha

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f_\alpha(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^\alpha x^{3/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^2}{5},$$

otteniamo varianza pari a $\frac{\alpha^2}{5} - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 = \frac{4\alpha^2}{45}$.

E9.5 (difficile). Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione di X. Si definisca ora $Y = -\ln X$; determinare la funzione di densità di Y.

Soluzione.

- Consideriamo $t \in \mathbb{R}$, la funzione di distribuzione di X è data da

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \int_0^t (-\ln x)\,dx = t - t\ln t & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1, \end{cases} \tag{1}$$

  dal momento che

$$\int_0^t (-\ln x)\,dx = -x\ln x\Big|_0^t + \int_0^t dx = t - t\ln t\,.$$

- Innanzitutto caratterizziamo la funzione di distribuzione della variabile aleatoria Y. Otterremo poi la densità derivando.
  Dal momento che X ha una densità non nulla solo sull'intervallo $(0,1]$, la variabile aleatoria Y assume solamente valori positivi[*]. Pertanto: per $y < 0$, si ha $F_Y(y) \equiv 0$; mentre, per $y \geq 0$, si ottiene

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P\left(X \geq e^{-y}\right) = 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-y} - ye^{-y}\,,$$

  dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'espressione della funzione di ripartizione (1), valutata nel punto e^{-y}. La densità di Y è data da

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ ye^{-y} & \text{se } y \geq 0, \end{cases}$$

  poiché si ottiene

$$\frac{d}{dy}\left[1 - e^{-y} - ye^{-y}\right] = e^{-y} - e^{-y} + ye^{-y} = ye^{-y}.$$

E9.6 (video). Il tempo di vita di una certa specie di plancton può essere rappresentato come una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[1, 10]$. Calcolare: (a) il tempo medio di vita; (b) la probabilità che il tempo di vita sia compreso tra 4 e 5; (c) la probabilità che il tempo di vita sia

[*] La variabile aleatoria Y è definita come funzione della variabile aleatoria X. Infatti si può scrivere $Y = g(X)$, con $g(x) = -\ln x$. Pertanto Y prende valori nell'immagine, tramite g, dell'insieme dei valori di X, cioè in $g((0,1])$. Devo capire chi è l'insieme $g((0,1])$, cioè capire cosa diventa l'intervallo $(0,1]$ dopo che ho applicato g. Procedo passo passo:

$$X \in (0,1] \quad \text{significa} \quad 0 < X \leq 1$$

ora applico a tutti i termini della disuguaglianza la funzione ln (poiché crescente non cambia il verso delle disuguaglianze), facendo attenzione al fatto che ln non è definita per $x = 0$, e ottengo

$$\lim_{x\to 0} \ln x < \ln X \leq \ln 1 \quad \text{cioè} \quad -\infty < -Y \leq 0$$

ora moltiplico tutti i termini della disuguaglianza per -1, ricordandomi che se moltiplico per una costante negativa devo girare i versi delle disuguaglianze, si ha

$$0 \leq Y < +\infty$$

da cui l'affermazione che Y assume solo valori positivi.

maggiore di 5.

Soluzione. Abbiamo $X \sim \mathrm{U}(1, 10)$ e quindi $E(X) = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2}$ (risposta (a)). Per rispondere alle domande successive serve l'espressione esplicita della densità di X. Si ha

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{se } 1 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi calcoliamo

(b) $P(4 \leq X \leq 5) = \dfrac{1}{9} \displaystyle\int_4^5 dx = \dfrac{x}{9}\Big|_4^5 = \dfrac{5}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{9}$;

(c) $P(X \geq 5) = \dfrac{1}{9} \displaystyle\int_5^{10} dx = \dfrac{x}{9}\Big|_5^{10} = \dfrac{10}{9} - \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{9}$.

E9.7. Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[2, 6]$ e sia Y una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ. Si determini il valore λ tale per cui $P(X \leq 4) = P(Y \leq 4)$.

Soluzione. Poiché le funzioni di distribuzione di X e Y sono date rispettivamente da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \frac{x-2}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

calcoliamo

$$P(X \leq 4) = F_X(4) = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad P(Y \leq 4) = F_Y(4) = 1 - e^{-4\lambda}\,.$$

Pertanto, si ottiene

$$P(X \leq 4) = P(Y \leq 4) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-4\lambda} = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -4\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{4} \approx 0.17329\,.$$

E9.8. Il tempo di durata (in anni) di un certo componente elettronico è una variabile aleatoria X con funzione di densità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Calcolare la probabilità che il componente funzioni per almeno 30 anni sapendo che è già durato 10 anni.

(b) Qual è la probabilità che su 150 componenti esattamente k abbiano durata maggiore di 20 anni? Come potremmo approssimare tale probabilità?

Soluzione.

(a) Osserviamo che $X \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$. Usando la proprietà di *assenza di memoria* delle variabili aleatorie esponenziali, otteniamo

$$P(X > 30 | X > 10) = P(X > 20) = 1 - F_X(20) = 1 - \left(1 - e^{-10}\right) = e^{-10} \quad (\simeq 0.000045)\,.$$

(b) Costruiamo uno schema di Bernoulli. Per $i = 1, \ldots, 150$, definiamo le variabili aleatorie

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esimo componente ha una durata maggiore di 20 ore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le variabili $Y_1, \ldots, Y_{150}$ sono indipendenti ed identicamente distribuite con densità discreta $\mathrm{Be}(p)$, dove il parametro p vale

$$p = P(Y_i = 1) = P(X > 20) = e^{-10} .$$

Sia $Y = \sum_{i=1}^{150} Y_i$ la variabile aleatoria che rappresenta il numero di componenti la cui durata è superiore alle 20 ore. Si ha $Y \sim \mathrm{Bin}\left(150, e^{-10}\right)$ e quindi

$$P(Y = k) = \binom{150}{k} \left(e^{-10}\right)^k \left(1 - e^{-10}\right)^{150-k} .$$

Per l'approssimazione di Poisson, Y ha approssimativamente distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_\star = 150e^{-10} \simeq 0.00675$. Quindi potremmo stimare

$$P(Y = k) \simeq e^{-\lambda_\star} \frac{\lambda_\star^k}{k!} .$$

E9.9. Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(0, 1]$. Determinare la densità di $Y = -\ln X$ e calcolare il valor medio di $Z = 2Y - 3$.

Soluzione.

- Innanzitutto osserviamo che, dal momento che X ha una densità non nulla solo sull'intervallo $(0, 1]$, la variabile aleatoria Y assume solamente valori positivi. Pertanto: per $y < 0$, si ha $F_Y(y) \equiv 0$; mentre, per $y \geq 0$, si ottiene

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P\left(X \geq e^{-y}\right) = 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-y} ,$$

  dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'espressione per la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1]$, valutata nel punto e^y. La funzione F_Y è la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1$, quindi $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

- Per la proprietà di linearità della media e il fatto che $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, calcoliamo

$$E(Z) = E(2Y - 3) = 2\,E(Y) - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1 .$$

E9.10 (⚑ tratto da appello; 🎞 video). Sia $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Consideriamo la variabile aleatoria $Y = e^X$. Determinare: (a) il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove Y prende valori; (b) la funzione di distribuzione di Y; (c) la densità di Y.

Soluzione.

(a) Poiché $X \geq 0$ equivale a $e^X \geq 1$ (prendendo l'esponenziale di entrambi i membri della disuguaglianza), si ottiene $Y \in [1, +\infty)$.

(b) Consideriamo $y \in \mathbb{R}$. Dal punto (a) segue che, se $y < 1$, allora $F_Y(y) \equiv 0$. Per $y \geq 1$, otteniamo invece

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y) = 1 - e^{-\lambda \ln y} = 1 - y^{-\lambda},$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato l'espressione per la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ, valutata nel punto $\ln y$. Ricapitolando, si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ 1 - y^{-\lambda} & \text{se } y \geq 1. \end{cases}$$

(c) Otteniamo la densità di Y derivando la sua funzione di distribuzione. Pertanto, si ha

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ \lambda y^{-(\lambda+1)} & \text{se } y \geq 1. \end{cases}$$

E9.11 (⚑ tratto da appello). Sia $X \sim \text{Exp}(1)$ e si consideri la variabile aleatoria $W = X^{1/a}$, dove $a > 0$. Mostrare che la funzione di distribuzione di W è data da

$$F_W(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^a} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre determinare la densità di probabilità di W e calcolare la probabilità dell'evento $\{W > 3\}$.

Soluzione.

- La variabile aleatoria W prende valori in $[0, +\infty)$. Pertanto, se $x < 0$, allora $F_W(x) \equiv 0$; mentre, se $x \geq 0$, otteniamo

  $$F_W(x) = P(W \leq x) = P(X^{1/a} \leq x) = P(X \leq x^a) = F_X(x^a) = 1 - e^{-x^a},$$

  dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'espressione per la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1, valutata nel punto x^a. Ricapitolando, poiché $F_W(0) = 0$, abbiamo ottenuto

  $$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^a} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

  che è quanto si voleva.

- Otteniamo la densità di probabilità di W derivando la sua funzione di distribuzione. Quindi risulta

  $$f_W(x) = \frac{d}{dx} F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ a x^{a-1} e^{-x^a} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- Si ha $P(W > 3) = 1 - P(W \leq 3) = 1 - F_W(3) = e^{-3^a}$.