

23 novembre 2021 (aggiornato al 30 novembre 2021)

**Esercizio 1.** Siano  $X, Y, Z, \xi$  variabili aleatorie definite su  $(\Omega, \mathbf{P})$  con le seguenti proprietà:

- $X, Y, Z$  sono a valori in  $\mathbb{Z}$ ;
- $\xi$  è di Bernoulli di parametro  $1/2$ ;
- $\mathbf{P}(X < Y) = 1$ ;
- $(X, Y), Z, \xi$  sono indipendenti.

In questo esercizio si sfruttano diverse proprietà, in particolare l'indipendenza, notando che noi vogliamo trovare sia la probabilità che  $y$  sia  $<$  che  $\geq$  a  $z$ . Essendo quindi disgiunte ed indipendenti, tutto il calcolo tenderà ad 1 che moltiplicato per  $1/2$  darà luogo proprio ad  $1/2$ .

Definiamo una variabile aleatoria  $M$  tramite

$$M(\omega) \doteq \begin{cases} Y(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ X(\omega) & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \omega \in \Omega,$$

e introduciamo l'evento

$$A \doteq \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}.$$

- Si calcoli la probabilità di  $A$  in termini delle distribuzioni marginali di  $X, Y, Z$ .
- Si mostri che  $\mathbf{P}(A) \geq 1/2$ .
- Si mostri che  $\mathbf{P}(A) > 1/2$  se  $\mathbf{P}(Z = k) > 0$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ .

La densità discreta viene data dalla somma delle densità discrete di  $X$  e  $Y$  singolarmente prese. Essendo in termini discreti, si ha che la densità è data dalla somma data dal discreto. Possiamo porre ad esempio  $p(x)=1/2$  e  $p(y)=1/3$ , a quel punto la legge di  $x$  è data dalla  $p(x)*X$ , per esempio  $X=2$  e  $Y=3$ . Posti dei valori di esempio, l'esercizio viene risolto.

**Esercizio 2.** Siano  $X, Y$  variabili aleatorie reali su  $(\Omega, \mathbf{P})$  discreto. Supponiamo che  $X, Y$  siano indipendenti. Si calcoli allora la densità discreta di  $X + Y$  in termini delle densità discrete di  $X$  e  $Y$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\Omega$  l'insieme delle permutazioni dei numeri da 1 a 52:

$$\Omega \doteq \{\sigma: N_{52} \rightarrow N_{52} : \sigma \text{ biettiva}\},$$

dove  $N_{52} \doteq \{1, \dots, 52\}$ . Sia  $\mathbf{P}$  la distribuzione uniforme discreta su  $\Omega$ . Sia  $E$  l'insieme dei sottoinsiemi di  $N_{52}$  di cardinalità uguale a 13:

$$E \doteq \{A \subset N_{52} : |A| = 13\}.$$

Definiamo variabili aleatorie  $X_i, Y_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ , a valori in  $E$  mediante

$$X_i(\sigma) \doteq \{\sigma(13(i-1) + j) : j \in \{1, \dots, 13\}\},$$

$$Y_i(\sigma) \doteq \{\sigma(i + 4(j-1)) : j \in \{1, \dots, 13\}\}.$$

Si calcolino la distribuzione congiunta di  $X_1, \dots, X_4$  e quella di  $Y_1, \dots, Y_4$ . Come si può interpretare il risultato?

Valgono le regole della disuguaglianza triangolare. In poche parole è metrica se valgono le 3 proprietà della dis. triang. Si vede analiticamente. Essendo al più numerabile, quindi discreta, per il secondo punto viene ottenuto andando a prendere i due valori (p maggiore rispetto a q) e dimostrando sempre con la dis. triangolare che vale la cosa detta

**Esercizio 4.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F})$  uno spazio misurabile, e sia  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$  l'insieme delle misure di probabilità su  $\mathcal{F}$ . Definiamo una funzione  $d_{TV} : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \rightarrow [0, \infty)$  tramite

$$d_{TV}(P, Q) \doteq \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(A) - Q(A)|.$$

- (a) Si mostri che  $d_{TV}$  è una metrica su  $\mathcal{M}_1$ .
- (b) Supponiamo ora che  $\Omega$  sia al più numerabile e che  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Si mostri allora che

$$d_{TV}(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |p(\omega) - q(\omega)|,$$

dove  $p, q$  sono le densità discrete rispettivamente di  $P$  e di  $Q$ . [Suggerimento: considerare l'evento  $B \doteq \{\omega \in \Omega : p(\omega) \geq q(\omega)\}$ .]

In poche parole si usa l'approssimazione di Poisson alla binomiale e si approssimano i singoli limiti. Con questo si vede che la probabilità è positiva e tende a 0. Si deve usare la dis. triangolare applicata ai limiti e si verifica che ogni limite è minore/uguale ai precedenti, per questo tende a 0 perché più piccolo

**Esercizio 5.** Consideriamo la situazione dell'Esercizio 4. Sia  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$  una successione tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda$  per un  $\lambda \in (0, \infty)$ . Per  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $P_n$  la distribuzione binomiale di parametri  $n$  e  $p_n$ , e sia  $Q_n$  la distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda_n \doteq n \cdot p_n$ . Sia infine  $Q$  la distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$ . Possiamo interpretare tutte queste misure come elementi di  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$  con  $\Omega \doteq \mathbb{N}_0, \mathcal{F} \doteq \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ .

- (i) Si mostri che  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(P_n, Q_n) = 0$ .
- (ii) Si mostri che  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(Q_n, Q) = 0$ .
- (iii) Si concluda che  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(P_n, Q) = 0$ .

**Esercizio 6.** Siano  $N, X_i, i \in \mathbb{N}$ , variabili aleatorie *indipendenti* su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  con  $N$  poissoniana di parametro  $\lambda > 0$  e le  $X_i$  bernoulliane di parametro  $p \in [0, 1]$ . Poniamo

$$Y \doteq \sum_{i=1}^N X_i,$$

cioè

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } N(\omega) = 0, \\ \sum_{i=1}^n X_i(\omega) & \text{se } N(\omega) = n \text{ per un } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad \omega \in \Omega.$$

Si determini la distribuzione di  $Y$ .

Per dimostrare (a) si deve usare l'integrale tra 0 ed inf di  $(x-\lambda)e^{-\lambda x}$ , per esempio con  $\lambda=1, 2$ , ecc. A quel punto possiede questi momenti perché minore di infinito (in particolare si tratta di variabili indipendenti tra di loro).

A quel punto, si risolve la seconda con Markov/Chebyshev (quindi  $X \geq c \leq E(x)/c$ )

**Esercizio 7.** Sia  $X$  una variabile aleatoria non-negativa definita su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  tale che, per un  $\lambda > 0$ ,  $\mathbf{E}[e^{\lambda X}] < \infty$ .

- a) Si mostri che  $X$  possiede momenti di ogni ordine, cioè  $\mathbf{E}[X^k] < \infty$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .
- b) Si mostri che esiste una costante  $K \in (0, \infty)$  tale che

$$\mathbf{P}(X \geq c) \leq K \cdot e^{-\lambda c} \text{ per ogni } c > 0.$$

[Suggerimento: disuguaglianza di Markov-Chebyshev.]

Qui si usa il magico Markov-Chebyshev, andando a porre: (ricordando  $E[x]=4$ )  
 $P(X \geq C+1) \leq E(X)/(C+1) < 1/20$  (che sarebbe 0.05) e diventa  $C+1 > 80$ , quindi  $C > 79$

**Esercizio 8.** Un'azienda offre un servizio di manutenzione di frigoriferi industriali. Si osserva che di un certo pezzo di ricambio costoso e ingombrante ne servono in media quattro unità alla settimana. L'azienda può rifornirsi di quel pezzo di ricambio solo a inizio settimana. Quante unità ne deve avere il lunedì per non trovarsi sprovvista nel corso della settimana con probabilità maggiore del 95%?

**Esercizio 9.** Siano  $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  con  $\text{var}(X) > 0$ ,  $\text{var}(Y) > 0$ . Si dimostri che per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{E}[(Y - (a \cdot X + b))^2] \geq \text{var}(Y) (1 - \rho(X, Y)^2),$$

dove  $\rho(X, Y)$  indica il coefficiente di correlazione tra  $X$  e  $Y$ :

$$\rho(X, Y) \doteq \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)} \cdot \sqrt{\text{var}(Y)}}.$$

Suggerimento: Si definisca una funzione  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$  mediante

$$\phi(a, b) \doteq \mathbf{E}[(Y - (a \cdot X + b))^2],$$

e si mostri che il minimo di  $\phi$  viene assunto in  $(a_*, b_*)$  con

$$a_* = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}, \quad b_* = \mathbf{E}[Y] - \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} \mathbf{E}[X].$$

**Esercizio 10.** Siano  $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Supponiamo che  $X, Y$  siano indipendenti e identicamente distribuite. Si mostri che allora

$$\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \frac{1}{2} \mathbf{E}[(X - Y)^2].$$

Essi sono indipendenti, quindi deve valere necessariamente la relazione di varianza con i dati presenti, cioè:  $E[x^2] - E[y^2] - E[x^2y^2]$ . Vedendo anche  $1/2$  davanti a tutta sta relazione, si usa la formula della varianza,  $1/2$  e come risultato finale si ottiene  $2\text{var}(y)$ , perché  $x$  e  $y$  sono appunto indipendenti, quindi posso riscrivere anche la formula descritta sopra in termini di  $x$  e trovare comunque il risultato.

La variabile aleatoria theta sarà data dai valori presenti, ad esempio per theta=0, assume valori tra 0 ed 1/12, in 1 tra 1/12 e 3/12 (dato questo dalla somma di 1/12 e 1/6 che si vede anche sotto e ricavandosi in questo modo tutti i termini presenti). Per la verifica completa, di questo come di tutti gli altri, si fa sempre riferimento alla correzione presente nella cartella Esercizi.

**Esercizio 11.** Sia  $\xi$  una variabile aleatoria reale su  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  con distribuzione uniforme continua su  $[0, 1]$ . Si trova una funzione misurabile  $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$  tale che la variabile aleatoria  $Y \doteq \phi(\xi)$  abbia la seguente distribuzione discreta:

$$\mathbf{P}(Y = n) = \begin{cases} 1/12 & \text{se } n = 1, \\ 1/6 & \text{se } n = 2, \\ 1/4 & \text{se } n = 3, \\ 1/12 & \text{se } n = 4, \\ 1/4 & \text{se } n = 5, \\ 1/6 & \text{se } n = 6, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Esercizio 12** (Esercizio 3.9 in CD). Sia  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Per  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $X_n$  una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su  $\{1, \dots, n\}$ . Poniamo

$$m_n \doteq \mathbf{E} \left[ f \left( \frac{X_n}{n} \right) \right].$$

Si identifichi il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n.$$

Avendo distribuzione uniforme, la funzione di densità è data dalla serie di tutte le singole misure e in particolare diventa  $m(n) = f(i/n) \cdot 1/n$ , il tutto con estremi 0 ed 1 essendo uniforme e quindi vale l'integrale tra 0 ed 1 di  $f(x)$ .

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)