Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2019/2020

ESERCITAZIONE 4

E4.1. Per effettuare un controllo di qualità si scelgono 5 oggetti da un lotto di 100. Nel lotto ci sono 10 oggetti difettosi. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Determinare alfabeto e densità discreta di X.

Soluzione. La variabile aleatoria X prende valori in $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 5\}$. Per determinare la sua densità, dobbiamo determinare con che probabilità assume tali valori. Calcoliamo questa probabilità come "casi favorevoli su casi possibili".

- Casi possibili. Ci sono $\binom{100}{5}$ modi di scegliere 5 oggetti dal lotto di 100.
- Casi favorevoli. Dobbiamo scegliere 5 oggetti, di cui k difettosi. Scegliamo prima i k difettosi tra i 10 difettosi in $\binom{10}{k}$ modi, poi scegliamo i rimanenti $5-k$ oggetti tra i rimanenti 90 non difettosi in $\binom{90}{5-k}$ modi. In definitiva, i casi favorevoli sono $\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$.

Pertanto risulta

$$p_X(k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \qquad \text{con } k = 0, \ldots, 5\,.$$

E4.2. (⚑ tratto da appello). Si consideri una variabile aleatoria discreta X con densità discreta $p_X(-1) = p_X(0) = 3k$ e $p_X(1) = p_X(2) = k$, dove k è un numero reale strettamente positivo. Si determinino: (a) l'alfabeto di X; (b) il valore della costante k; (c) il valor medio di X.

Soluzione.

(a) La variabile aleatoria X prende con probabilità non nulla i valori -1, 0, 1 e 2. Pertanto si ha $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

(b) Affinché una densità di probabilità sia tale, deve soddisfare il vincolo di normalizzazione. Quindi si deve avere

$$3k + 3k + k + k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{8}.$$

Di conseguenza la densità discreta di X risulta $p_X(-1) = p_X(0) = \frac{3}{8}$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{1}{8}$.

(c) Calcoliamo

$$E(X) = (-1)\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} = 0.$$

E4.3. (⚑ tratto da appello). Un'urna contiene 4 palline dorate, 5 palline bianche e 1 pallina blu. Peschiamo 3 palline a caso, senza reinserimento. Se estraiamo 3 palline dorate, vinciamo un euro. Se fra le 3 palline estratte c'è quella blu, perdiamo un euro. Altrimenti non vinciamo e non perdiamo. Sia X la variabile aleatoria che descrive la nostra vincita. Determinare: (a) alfabeto e densità discreta di X; (b) alfabeto e densità discreta della variabile aleatoria $Y = X^2$.

Soluzione.

(a) La variabile aleatoria X prende valori in $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1\}$. Per determinare la sua densità, determiniamo con che probabilità assume tali valori. Calcoliamo le probabilità come "casi favorevoli su casi possibili". Ci sono $\binom{10}{3}$ modi di scegliere 3 palline da 10 (casi possibili). Inoltre,

- $X = -1$ se tra le palline estratte c'è la pallina blu. Abbiamo solo un modo per scegliere la pallina blu e $\binom{9}{2}$ modi per scegliere 2 palline tra le 9 che non sono blu. Quindi,

$$P(X = -1) = \frac{1 \cdot \binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}.$$

- $X = 1$ se estraiamo 3 palline dorate. Abbiamo $\binom{4}{3}$ modi per scegliere 3 delle 4 palline dorate e quindi

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}.$$

- Calcoliamo $P(X = 0) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = \frac{2}{3}$. Alternativamente, si poteva procedere come prima: $X = 0$ se estraiamo 3 palline bianche, oppure 2 palline bianche ed una dorata, oppure 1 pallina bianca e 2 dorate. Abbiamo $\binom{5}{3}$ modi per scegliere 3 delle 5 palline bianche. Abbiamo $\binom{5}{2}$ modi per scegliere 2 delle 5 palline bianche e 4 modi per scegliere una delle 4 palline dorate. Abbiamo 5 modi per scegliere una delle 5 palline bianche e $\binom{4}{2}$ modi per scegliere 2 delle 4 palline dorate. Quindi,

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{5}{2} \cdot 4 + 5 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Pertanto, la densità di X è data da $p_X(-1) = \frac{3}{10}$, $p_X(0) = \frac{2}{3}$ e $p_X(1) = \frac{1}{30}$.

(b) Consideriamo la funzione reale $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $g(x) = x^2$. Abbiamo $Y = g(X)$ (cioè Y è una funzione di un'altra variabile aleatoria). Pertanto l'alfabeto di Y è dato da $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}) = \{0, 1\}$. Determiniamo la densità discreta di Y:

$$\begin{aligned} p_Y(0) &= p_X(0) = \frac{2}{3} \\ p_Y(1) &= P(\{X = -1\} \cup \{X = 1\}) \overset{\text{(ev. disgiunti)}}{=} p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pertanto, la densità di Y è data da $p_Y(0) = \frac{2}{3}$, $p_Y(1) = \frac{1}{3}$.

E4.4. Sia X una variabile aleatoria con alfabeto $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1, 3\}$ e densità discreta $p_X(-1) = 0.4$, $p_X(0) = 0.1$, $p_X(1) = 0.2$ e $p_X(3) = 0.3$. Calcolare la densità discreta e la media della variabile aleatoria $Y = X^3 - X$.

Soluzione. Consideriamo la funzione reale $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $g(x) = x^3 - x$. Abbiamo $Y = g(X)$ (cioè Y è una funzione di un'altra variabile aleatoria). Pertanto l'alfabeto di Y è dato da $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}) = \{0, 24\}$. Determiniamo la densità discreta di Y:

$$\begin{aligned} p_Y(0) &= P(\{X = -1\} \cup \{X = 0\} \cup \{X = 1\}) \overset{\text{(ev. disgiunti)}}{=} p_X(-1) + p_X(0) + p_X(1) = 0.7 \\ p_Y(24) &= P(X = 3) = p_X(3) = 0.3. \end{aligned}$$

Concludiamo calcolando il valor medio di Y. Si ha $E(Y) = 24 \cdot (0.3) = 7.2$.

E4.5. Si lanciano due dadi equilibrati. Siano X_i (con $i = 1, 2$) le variabili aleatorie che corrispondono ai due punteggi ottenuti. Determinare: (a) alfabeto e densità discreta della variabile aleatoria $X = X_1 + X_2$; (b) alfabeto e densità discreta della variabile aleatoria $Y = 2X_1$.

Soluzione.

(a) Per aiutarci, visualizziamo attraverso una tabella le somme dei punteggi dei due dadi:

$\boldsymbol{X}$		X_1 = 1	2	3	4	5	6
X_2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

1/36 (perché solo 1+1)
2/36=1/18 (perché 2+1 o 1+2)
3/36=1/12 (perché 1+3, 3+1, 2+2) e via così

Pertanto, la variabile aleatoria X prende valori in $\mathcal{X} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e siccome ogni coppia di punteggi è equiprobabile, calcoliamo la densità come "casi favorevoli su casi possibili". Otteniamo

$$p_X(2) = p_X(12) = \frac{1}{36}, \qquad p_X(3) = p_X(11) = \frac{1}{18}, \qquad p_X(4) = p_X(10) = \frac{1}{12}$$

$$p_X(5) = p_X(9) = \frac{1}{9}, \qquad p_X(6) = p_X(8) = \frac{5}{36}, \qquad p_X(7) = \frac{1}{6}.$$

(b) Consideriamo la funzione reale $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $g(x) = 2x$. Abbiamo $Y = g(X_1)$ (cioè Y è una funzione di un'altra variabile aleatoria). Pertanto l'alfabeto di Y è dato da $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}_1) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Determiniamo la densità discreta di Y:

$$p_Y(k) = p_{X_1}\left(\tfrac{k}{2}\right) = \frac{1}{6}, \qquad \text{per ogni } k \in \mathcal{Y}.$$

⚠ Osservazione importante: le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono probabilisticamente equivalenti (o equidistribuite), cioè hanno lo stesso alfabeto e la stessa densità discreta, ma non sono uguali! Infatti si ha $X_1 + X_2 \neq 2X_1$.

E4.6. Un'urna contiene 3 palline numerate da 1 a 3. Si estraggono con reinserimento due palline. Sia X la variabile aleatoria che indica la differenza in modulo dei numeri estratti. Si determino: (a) alfabeto e densità discreta di X; (b) valor medio di X; (c) le probabilità $P(X \leq 2)$ e $P(2 \leq X < 5)$.

Soluzione.

(a) Siano X_i (con $i = 1, 2$) le variabili aleatorie che corrispondono ai punteggi delle due palline estratte, allora si ha $X = |X_1 - X_2|$. Per aiutarci, visualizziamo attraverso una tabella le differenze in valore assoluto delle due estrazioni:

$\boldsymbol{X}$		X_1 = 1	2	3
X_2	1	0	1	2
	2	1	0	1
	3	2	1	0

Pertanto, la variabile aleatoria X prende valori in $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ e siccome ogni coppia di numeri è equiprobabile, calcoliamo la densità come "casi favorevoli su casi possibili". Otteniamo

$$p_X(0) = \frac{1}{3}, \qquad p_X(1) = \frac{4}{9} \quad \text{e} \quad p_X(2) = \frac{2}{9}.$$

(b) Calcoliamo $E(X) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$.

(c) Abbiamo

$$P(X \leq 2) = P(X \in \mathcal{X}) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 1$$

e, infine, $P(2 \leq X < 5) = P(X = 2) = \frac{2}{9}$ (poiché $P(X = 3) = P(X = 4) = 0$ dato che i valori 3 e 4 non appartengono all'alfabeto di X).

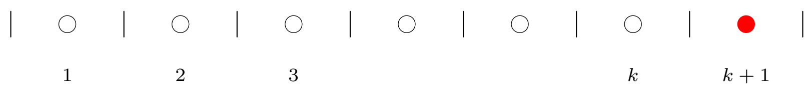
E4.7 (difficile). Un'urna contiene n palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute senza reinserimento. Sia X il numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa. Determinare l'alfabeto di X e mostrare che la sua densità discreta è data da

$$p_X(k) = \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)}, \quad \text{per ogni } k \in \mathcal{X}.$$

Soluzione. La variabile aleatoria X prende valori in $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Per determinare la sua densità, dobbiamo determinare con che probabilità assume tali valori. Calcoliamo questa probabilità come "casi favorevoli su casi possibili".

Attenzione! È importante, nei conteggi che andremo a fare, tener conto dell'ordine degli esiti delle estrazioni, perché dobbiamo tener conto del fatto che le k palline bianche devono essere estratte tutte prima della pallina rossa (altrimenti il valore assunto da X non sarebbe k).

- Casi possibili. Dobbiamo contare in quanti modi possiamo allocare in $k+1$ compartiti/posizioni $k+1$ palline estratte da un'urna che ne contiene $n+2$. Abbiamo $n+2$ modi per scegliere la prima pallina da mettere in posizione 1, $n+1$ modi per scegliere quella che va in posizione 2,... e così via fino ai $n+2-(k+1)+1$ modi per scegliere la pallina da mettere in posizione $k+1$. In definitiva, abbiamo $(n+2)(n+1)\cdots(n-k+2)$ modi per estrarre le $k+1$ palline dall'urna.
- Casi favorevoli. Dobbiamo contare in quanti modi possiamo ottenere la configurazione



Abbiamo n modi per scegliere la pallina bianca da mettere in posizione 1, $n-1$ modi per scegliere quella da mettere in posizione 2, ... e così via fino ai $(n-k+1)$ modi per scegliere la pallina bianca da mettere in posizione k. Abbiamo poi 2 modi per scegliere la pallina rossa da collocare in posizione $k+1$. In definitiva, i casi favorevoli sono $2n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Pertanto risulta

$$p_X(k) = \frac{2n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+2)(n+1)\cdots(n-k+2)} = \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)} \quad \text{con } k = 0, \ldots, n\,.$$

Alternativamente (e forse più intuitivamente), si poteva utilizzare la probabilità condizionata. Consideriamo gli eventi $R =$"la $(k+1)$-esima pallina è rossa" e $B =$"le prime k palline estratte sono tutte bianche". Per ogni $k \in \mathcal{X}$, si ha dunque

$$p_X(k) = P(B \cap R) = P(R|B)P(B) = \frac{2}{n+2-k} \cdot \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+2}{k}} = \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)}.$$