Teoremi limite

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. reali su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Def. Si dice che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X

- P-quasi certamente, in simboli $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ P-q.c. se esiste $N \in \mathcal{F}$ tale che $P(N)=0$ e per ogni $\omega \in \Omega \setminus N$ $X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)$ (convergenza in $\mathbb{R}$)
- in probabilità (rispetto a P) in simboli $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ in P-probabilità se $\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Fatto: La convergenza P-quasi certa implica la convergenza in probabilità

Infatti: $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = E\left[1_{[\varepsilon,\infty)}(|X_n - X|)\right]$

Siano X_n, $n \in \mathbb{N}$ v.a. reali su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

<u>Osservazione</u>

Se $X_1, X_2 \dots$ sono identicamente distribuite in L^1 (valor medio comune finito), allora

$$E[\bar{S}_n] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} X_i\right] \underset{\text{lin}}{=} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} E[X_i]\right) \underset{\text{ident. distr.}}{=} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} E[X_1]\right) = \frac{n}{n} E[X_1] = E[X_1]$$

Teorema (legge debole dei grandi numeri)

Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ successione di v.a. i.i.d

Poniamo $\mu = E[X_1]$ media comune

$\sigma^2 = var(X_1)$ $\quad \bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}$ media empirica

Allora $\bar{S}_n \xrightarrow{n \to \infty} \mu$ in probabilità

Dim $\forall \varepsilon > 0$, $P(|\bar{S}_n - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Sia $\varepsilon > 0$

Nota: $E[\bar{S}_n] = E[X_i] = \mu$

Grazie alla disuguaglianza di Chebyshev

$$P(|\bar{S}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(\bar{S}_n)}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{Ora } var(\bar{S}_n) = var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \sum_{i=1} \underbrace{cov(X_i X_j)}_{=0}\right)$$

$\uparrow$ PER INDIPENDENZA

$$Var(c \cdot Y) = E[c \cdot Y - E[c \cdot Y])^2 = E[(c(Y - E(Y)])^2$$

ident. distr.

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2\right) = \frac{n}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

La dimostrazione mostra la seguente approssimazione della legge debole.

Corollario $\to$ Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ una successione di v. a. tali che

- media comune $\exists \mu \in \mathbb{R}$

$E[X_i] = \mu$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

- varianze limitate

$\sup_{n \in \mathbb{N}} var(X_n) < \infty$

- v.a. incorrelate a due a due

$cov(X_i, X_j) = 0$ se $i \neq j$

Osservazione:

Nelle condizione del Teorema

(v.a. i.i.d in L^2)

vale anche la legge forte dei grandi Numeri

$\overline{S}_n \xrightarrow{n \to \infty} \mu$ P.q.c

Applicazione della legge dei grandi numeri

Siano $X_1, X_2 \ldots$ v.a. i.i.d a valori e al più numerabile

Per $x \in E$ poniamo $p(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{x\}}(X_i)$ → Per densità discreta congiunta empirica

Sia $x \in E$ fissato → Poniamo $Y_n = 1_{\{x\}}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$

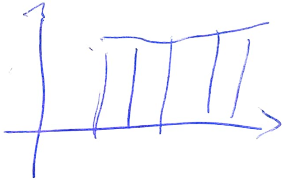
→ Y_n, $n \in \mathbb{N}$, v.a. i.i.d e in L^2 (Y_n a valori in $\{0,1\}$)

Grazie alla legge debole dei grandi numeri $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{n \to \infty} E[Y_i]$

Applicazione → Metodo Monte Carlo

Obiettivo → Calcolare approssimativamente $\int_a^b f(x)\,dx$ per una funzione Riemann-integrabile su $[a,b]$

Ad esempio → $a=0$, $b=1$, $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$



Osservazione: Sia $X \sim \mathrm{Unif}(a,b)$ allora $E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, f_X(x)\,dx$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Sia $X_1, X_2, \ldots$ v.a. con comune distribuzione $\mathrm{Unif}(a,b)$

allora in L^2 (poiché f limitata)

Legge dei grandi numeri $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{n\to\infty} E[f(X_i)]$ ma $E[f(X_i)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$