Foglio 2

Esercizio 1. Per l'esempio del test clinico visto a lezione (incontro del 4 ottobre 2021), si trovi uno spazio di probabilità discreto che descriva il corrispondente esperimento aleatorio e si definiscano gli eventi d'interesse come sottoinsiemi dello spazio campionario scelto.

Eventi: $A =$ "individuo portatore del virus"

$B =$ "test risulta positivo"

$P_V = P(B|A) = 99\%$

$P_F = P(B|A^c) = 0,5\%$

$P(A) = q = 4 \cdot 10^{-4}$

$\Omega = \{ (S,P), (S,n), (V,P), (V,n)$

P determinata dai valori discreti

$A = \{(V,P),(V,n)\}$ $B = \{(S,P),(V,P)\}$

$A \cap B = \{(V,P)\} \to P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$A^c \cap B = \{(S,P)\}$ $P(A^c \cap B) = P(B|A^c) \cdot (1 - P(A)$

Esercizio 2. Immaginiamo di voler stimare il numero di carpe (adulte) che vivono in un laghetto. Supponiamo che vi siano delle carpe. Indichiamo con X questo numero ignoto; possiamo interpretare X come una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$. Ora catturiamo r carpe, le marchiamo, e le liberiamo. Aspettiamo che i pesci marchiati si siano mescolati tra i loro compagni. Poi ne catturiamo n esemplari e contiamo il numero di carpe marchiate. Denotiamo con $A_{n,i}$ l'evento di aver trovato esattamente i carpe marchiate tra le n carpe prese alla seconda cattura. Per $r, n, N \in \mathbb{N}$ con $r \vee n \leq N$, $i \in \{0, \ldots, r \wedge n\}$, si calcoli la probabilità condizionale

$$c(N) \doteq \mathbf{P}\left(A_{n,i} \mid X = N\right).$$

Nel caso $r = 10$, $n = 20$, $i = 7$, si trovi numericamente il numero N che massimizzi la probabilità condizionale $c(N)$. Si dia infine una formula per stimare N in termini di r, n, i.

Tante parole ma in breve: ipergeometrica essendo una estrazione senza reinserimento.

n = numero di carpe marchiate

X numero di carpe nel laghetto

$$P(A_{n,i} \mid X = N) = \frac{\binom{n}{i}\binom{N-n}{m-i}}{\binom{N}{m}} = f(N)$$

Dando i valori messi dall'es $\longrightarrow \underset{N \geq m}{\operatorname{argmax}} \ f(m) = \{28\}$

Esercizio 3. Siano $N \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$. Sia $p_{Bin(N,q)}$ la densità discreta della distribuzione binomiale di parametri N e q, quindi

$$p_{Bin(N,q)}(k) = \begin{cases} \binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k} & \text{se } k \in \{0, \dots, N\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostri che, per $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot p_{Bin(N,q)}(k).$$

Si verifichi inoltre che, per $k \in \{0, \dots, N\}$,

$$p_{Bin(N,q)}(k) = p_{Bin(N,1-q)}(N-k).$$

$$P_B(N,q)(k) = \begin{cases} \binom{N}{k} \cdot q^k (1-q)^{N-k} & \text{se } k \in \{0 .. n\} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$P_{BIN(N,q)}(k+1) = \frac{N!}{(k+1)!\,(N-k-1)!} \cdot q^{k+1}(1-q)^{N-k-1}$$

$$= \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \cdot q^k (1-q)^{n-k}$$

$$= \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot P_{BIN}(N,q)(k)$$

Esercizio 4. In un ballottaggio tra due candidati, A e B, vota un milione di persone: $N \doteq 998000$ elettori sono completamente indecisi e votano a caso, con uguale preferenza per A e per B, mentre una minoranza di $M \doteq 2000$ persone sostiene il candidato A. Vogliamo trovare la probabilità che vinca A.

Come visto in aula, possiamo descrivere il comportamento elettorale delle N persone indecise tramite una variabile aleatoria S_N con distribuzione binomiale di parametri N e $1/2$, definita su un opportuno spazio discreto $(\Omega, \mathbf{P})$; S_N rappresenta il numero di voti che il candidato A riceve dal gruppo delle persone indecise. La probabilità che vinca A è allora data da

$$\mathbf{P}\left(S_N + M > \frac{N+M}{2}\right) = \mathbf{P}\left(S_N > \frac{N-M}{2}\right) = \sum_{k=\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor + 1}^{N} p_{Bin(N,1/2)}(k).$$

Si calcoli numericamente questa probabilità. [Suggerimento: usare l'Esercizio 3.]

$$P_{BIN(N,1/2)}\left[\frac{N-n}{2}+1\right] = \frac{N!}{\left[\frac{N-n}{2}+1\right]!\left[\frac{N-n}{2}\right]} \cdot q^{\frac{N-n}{2}+1}(1-q)^{N-\frac{N-n}{2}}$$

dice di usarla come prova di calcolo lui

dove scrivo di usarla come prova di calcolo e letteralmente sostituisco i termini nella binomiale.

Esercizio 5 (Esercizio 1.41 in CD). "Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia (esattamente) n figli, con $n \geq 0$, vale $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, dove λ è un parametro fissato, e ciascun figlio è maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri. Consideriamo l'evento

$$A_k \doteq \text{"il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente } k \text{ figli maschi"},$$

per $k \in \mathbb{N}_0$. Si mostri che la probabilità di A_k è uguale a $e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$."

Soluzione. Dalle ipotesi del modello segue che, se $n \geq k$,

$$P(A_k|B_n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

Ovviamente, $P(A_k|B_n) = 0$ se $k > n$. Pertanto

$$P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k|B_n)P(B_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda}\frac{1}{2^k}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-k}}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda/2)^n}{n!} = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$$

Esercizio 6. Sia $q \in (1/2, 1]$. Per $n \in \mathbb{N}$, sia $(\Omega_n, \mathbf{P}_n)$ uno spazio di probabilità discreto con eventi $A_0^n, A_1^n, \ldots, A_n^n$ indipendenti e tali che $\mathbf{P}_n(A_0^n) = 1/2$, mentre $\mathbf{P}_n(A_i^n) = q$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definiamo variabili aleatorie $X_i^n : \Omega_n \to \{-1, 1\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ponendo

$$X_0^n(\omega) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A_0^n, \\ -1 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega_n,$$

e, per $i \in \{1, \ldots, n\}$, procedendo tramite ricorsione:

$$X_i^n(\omega) \doteq \begin{cases} X_{i-1}^n(\omega) & \text{se } \omega \in A_i^n, \\ -X_{i-1}^n(\omega) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega_n.$$

Poniamo infine $C_i^n \doteq \{\omega \in \Omega_n : X_i^n(\omega) = 1\}$, $i \in \{0, \ldots, n\}$.

a) Si calcoli $\mathbf{P}(C_i^n)$ per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$.

b) Si decida se gli eventi C_0^n e C_n^n sono indipendenti o meno.

c) Si calcoli il limite di $\mathbf{P}(C_n^n)$ per $n \to \infty$.

$p \in (0,1)$, $q \in (\frac{1}{2}, 1)$ $A_0 \ldots A_n$ eventi indipendenti in (Ω, P) tali che $P(A_0)^n = p_0$, $i \in \{1 \ldots n\}$

$X_0^n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A_0^n \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $X_i^n(\omega) = \begin{cases} X_{i-1}^n(\omega) & \text{se } \omega \in A_i^n \\ -X_{i-1}^n(\omega) & \text{altrimenti} \end{cases}$

$C_i^n \{\omega \in \Omega_i, X_i(\omega) = 1\}$

c) Per $i \in \{1 \ldots n\}$ $C_i^n = \{A_i^n \cap C_{i-1}^n\} \cup \{(A_i)^c \cap (C_i)^n)^c)$

$P(C_1^n) = P(A_i^n \cap C_{i-1}^n) + P(A_i)^c \cap (C_{i-1}^n)^c = P(A_i^n) \cdot P(C_{i-1}^n) + (1 - P(A_i)^n)(1 - P(C_{i-1})$

$= 1 - q + (2q-1) \cdot P(C_{1-1}^n)$

in buona sostanza ci butto un po' di cose e

$P(C_i) = \frac{1}{2}(\underbrace{1 - (2q-1)^n}_{(0,1)}) + \underbrace{(2q-1)^n}_{0,1} \cdot p_0 \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2} \leftarrow$ c

INDIPENDENTI PER (1)

$P(C_i^n \cap A_0^n) = P(A_i^n \cap C_{i-1}^n \cap A_0^n) + P(A_i^n)^c \cap (C_{i-1}) \cap A_0^n) =$

$= q \cdot P(C_{i-1}^n \cap A_0^n) + (1-q) P(C_{i-1})^n)^c \cap A_0^n$

$P(C_i | A_0^n) = q \cdot P(C_{i-1}^n / A_0^n) + (1-q) P(C_{i-1}^n)^c (A_0^n) = 1 - P(C_{i-1}^n | A_0^n) \sim P(C_i \cap A^n) = 1$

Esercizio 7. Consideriamo l'esperimento del lancio di tre dadi regolari. Sia $\mathbf{P}$ la distribuzione uniforme sullo spazio campionario $\Omega \doteq \{1, \ldots, 6\}^3$. Per $i \in \{1, 2, 3\}$ poniamo

$$X_i(\omega) \doteq \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega.$$

Di conseguenza, X_i può essere vista come il punteggio segnato dal dado i-esimo. Poniamo inoltre

$$Y_1 \doteq (X_1, X_2), \qquad Y_2 \doteq (X_2, X_3).$$

a) Si mostri che le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 sono indipendenti, e si trovino le loro distribuzioni.

b) Si mostri che Y_1, Y_2 *non* sono indipendenti.

c) Sia D la diagonale in $\{1, \ldots, 6\}^2$, cioè $D \doteq \{(i, i) : i \in \{1, \ldots, 6\}\}$. Si decida se gli eventi $\{Y_1 \in D\}$ e $\{Y_2 \in D\}$ sono indipendenti o meno.

Sol: a. è ovvio per indipendenza dei lanci, ma mostriamolo. Si tratta di verificare che

$$\mathbb{P}((X_1,X_2,X_3)=(i,j,k)) \underset{(*)}{=} \mathbb{P}(X_1=i)\,\mathbb{P}(X_2=j)\,\mathbb{P}(X_3=k)$$

$$\forall (i,j,k)\in\Omega$$

Sappiamo che $\mathbb{P}((X_1,X_2,X_3)=(i,j,k)) = \frac{1}{6^3}$

poiché $\mathbb{P}$ è uniforme su Ω.

D'altro lato $\mathbb{P}(X_1=i) = \frac{|\{\omega\in\Omega : \omega_1=i\}|}{6^3}$

$$= \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6} \quad \forall i\in\{1,\dots,6\}$$

lo stesso vale per X_2 ed X_3, dunque l'identità $(*)$ è verificata.

b. Osserviamo che, $\forall (j,k)\in\{1,\dots,6\}^2$

$$\mathbb{P}(Y_1=(j,k)) = \frac{|\{\omega\in\Omega : \omega_1=j,\ \omega_2=k\}|}{6^3} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

e similmente $\mathbb{P}(Y_2=(j,k)) = \frac{1}{36}$

Si tratta di decidere se, $\forall (j,k),(l,m)\in\{1,\dots,6\}^2$

$$\mathbb{P}(Y_1=(j,k),\ Y_2=(l,m)) \overset{?}{=} \underbrace{\mathbb{P}(Y_1=(j,k))}_{=1/36}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(Y_2=(l,m))}_{=1/36}$$

ma se $k \neq l$, allora si ottiene

$$\mathbb{P}(Y_1 = (j,k), Y_2 = (l,m)) = \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k, X_2 = l, X_3 = m)$$

$$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{3}$$

Quindi Y_1 e Y_2 non sono indipendenti. #

c. Calcoliamo

$$\mathbb{P}(Y_1 \in D) = \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = k,\ k = 1, \ldots 6)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{6} |\{\omega : \omega_1 = \omega_2 = k\}|}{6^3} = \frac{1}{6}$$

Similmente per Y_2: $\mathbb{P}(Y_2 \in D) = \frac{1}{6}$

Infine:

$$\mathbb{P}(Y_1 \in D, Y_2 = D) = \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = k, X_3 = k, k = 1, \ldots 6)$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{|\omega : \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = k|}{6^3} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

Per cui è verificato che

$$\mathbb{P}(Y_1 \in D, Y_2 \in D) = \mathbb{P}(Y_1 \in D)\,\mathbb{P}(Y_2 \in D)$$

ovvero l'indipendenza dei 2 eventi. #

Esercizio 8. Siano X, Y, ξ variabili aleatorie definite sullo stesso spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$. Supponiamo che X e Y siano a valori nello stesso insieme non-vuoto E, ξ a valori in $\{0,1\}$ con distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$, e che ξ e (X,Y) siano indipendenti. Poniamo

$$Z(\omega) \doteq \begin{cases} X(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ Y(\omega) & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Si determini la distribuzione di Z in termini di $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}_Y$, p.

X, Y, ξ v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con X, Y a valori in $(E, \mathcal{E})$, $\xi \sim Ber(p)$

e tali che ξ e (X,Y) indipendenti

Poniamo
$$Z(\omega) \doteq \begin{cases} X(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ Y(\omega) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Distribuzione di Z: Sia $B \in \mathcal{E}$.

$$\underbrace{P(Z \in B)}_{= P_Z(B)} = P(Z \in B \mid \xi = 1) \cdot P(\xi = 1) + P(Z \in B \mid \xi = 0) \cdot P(\xi = 0)$$

$$= P(X \in B \mid \xi = 1) \cdot p + P(Y \in B \mid \xi = 0) \cdot (1-p)$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} \underbrace{P(X \in B)}_{= P_X(B)} \cdot p + \underbrace{P(Y \in B)}_{= P_Y(B)} \cdot (1-p).$$

Esercizio 9 (cf. Esempio 3.99 in [CD]). Immaginiamo di avere un'urna con N palline numerate da 1 a N. Estraiamo le palline a caso una dopo l'altra senza reinserimento, e indichiamo con X_i il numero dell'i-esima pallina estratta. Interpretiamo X_i, $i = 1, \dots, N$, come variabili aleatorie a valori in $\{1, \dots, N\}$ definite su un opportuno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$.

a) Si determini la distribuzione (congiunta) del vettore $(X_1, \dots, X_N)$. Si determinino poi le distribuzioni (marginali) delle X_i.

b) Si mostri che, per $(i,j) \in \{1, \dots, N\}^2$, X_i e X_j *non* sono indipendenti.

c) Sia σ una permutazione di $\{1, \dots, N\}$, cioè $\sigma : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, N\}$ è biiettiva. Si mostri che allora $(X_1, \dots, X_N)$ e $(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(N)})$ hanno la stessa distribuzione.

Sol:

a. Osserviamo che $(X_1, \dots, X_N)$ ha valore nell'insieme

$$S_N = \{(k_1, \dots, k_n) : k_j \in \{1, \dots, N\} \text{ e } k_i \neq k_j \ \forall i \neq j\}$$
$$= \{\sigma : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, N\} \text{ biettive}\}$$

con cardinalità $|S_N| = N!$

Poichè ogni realizzazione ha stessa probabilità, si ha

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_N = k_N) = \frac{1}{N!} \quad \forall (k_1, \dots, k_N) \in S_N$$

(In altri termini, con condizionamenti successivi, si ha

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_N = k_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1}{N-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{N!}$$)

- Osserviamo che con calcoli analoghi, si ottiene che $\forall\, m \leq N$, la distribuzione congiunta di $(X_1, \dots, X_m)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m) = \frac{1}{D_{N,m}} \quad \forall (k_1, \dots, k_n) \in S_{N,m}$$

con $S_{N,m} = \{(k_1, \dots, k_m) : k_i \in \{1, \dots, N\}, k_i \neq k_j \ \forall i \neq j\}$
$= \{f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, N\} \text{ iniettive}\}$

ed $|S_{N,m}| = D_{N,m} = \frac{N!}{(N-m)!} = N \cdot (N-1) \cdots (N-m+1)$

- Per calcolare la legge (marginale) di X_i, osserviamo che X_i ha valore in $\{1, \dots, N\}$.
Si ha, per $k \in \{1, \dots, N\}$:

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_{i-1}) \\ \in A_i^k}} \mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots X_{i-1} = k_{i-1}, X_i = k) = \frac{|A_i^k|}{D_{N,i}}$$

con $A_i^k = \{(k_1, \dots, k_{i-1}) : k_\ell \in \{1, \dots, N\} \setminus k,\ k_\ell \neq k_j \ \forall \ell \neq j\}$

$$\Longrightarrow |A_i^k| = |S_{N-1, i-1}| = \frac{(N-1)!}{(N-i)!} \longrightarrow$$

ovvero $$\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{\frac{(N-1)!}{(N-\cancel{k})!}}{\frac{N!}{(N-\ell)!}} = \frac{1}{N}$$

(Stessa distribuzione per ogni estrazione!) ✱

$\boxed{b.}$ Vogliamo verificare che X_i e X_j non sono indipendenti, ovvero che $\exists\, k, \ell$ t.c.

$$\mathbb{P}(X_i = k, X_j = \ell) \neq \mathbb{P}(X_i = k)\mathbb{P}(X_j = \ell)$$

- ovvio se $i = j$ (basta scegliere $k \neq \ell$: $0 \neq \frac{1}{N^2}$)
- Se $i \neq j$, possiamo assumere $i < j$.

Per $k, \ell \in \{1, 2, \dots, N\}$ si ha

$$\mathbb{P}(X_i = k, X_j = \ell) = \sum_{A_j^{k,\ell}} \mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_{i-1} = k_{i-1}, X_i = k, X_{i+1} = k_{i+1}, \dots, X_{j-1} = k_{j-1}, X_j = \ell)$$

$$= \frac{|A_j^{k,\ell}|}{D_{N,j}} = \frac{\frac{(N-2)!}{(N-j)!}}{\frac{N!}{(N-j)!}} = \frac{1}{N(N-1)}$$

con $A_j^{k\ell} = \left\{ (k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_{j-1}) : k_m \in \{1, \dots N\} \setminus \{k, \ell\} \text{ e } k_m \neq k_s \ \forall m \neq s \right\}$

$$\Longrightarrow |A_j^{k,\ell}| = |S_{N-2,\, j-2}| = \frac{(N-2)!}{(N-j)!}$$

Dunque $\mathbb{P}(X_i = k, X_j = \ell) = \frac{1}{N(N-1)} \neq \frac{1}{N^2} = \mathbb{P}(X_i = k)\mathbb{P}(X_j = \ell)$

#

c) Basta osservare che per $(k_1, \dots, k_n) \in S_N$, si ha 14

$$\mathbb{P}(X_{\sigma(1)} = k_1, \dots, X_{\sigma(N)} = k_N) = \mathbb{P}(X_1 = k_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, X_N = k_{\sigma^{-1}(N)})$$

$$= \mathbb{P}(X_1 = k'_1, \dots, X_N = k'_N) \quad = \frac{1}{N!}$$

con $(k'_1, \dots, k'_n) \in S_N$ #

Esercizio 10. Sia X una variabile aleatoria reale definita su $(\Omega, \mathbf{P})$ discreto. Si dimostrino le seguenti implicazioni:

a) Se esiste $C \in (0, \infty)$ tale che $|X(\omega)| \leq C$ per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, allora X ammette valor medio finito e $-C \leq \mathbf{E}[X] \leq C$.

b) Se $X(\omega) \geq 0$ per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ e $\mathbf{E}[X] = 0$, allora $X(\omega) = 0$ per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$.

a) Ricordando intanto che la proprietà descritta sopra del *p-quasi certamente*, riportata qui per comodità:

Una successione di variabili casuali $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **convergere quasi certamente** (o "quasi ovunque" se non anche "**P quasi certamente**" intendendo con P la probabilità, abbreviabile come "P q.c") alla variabile casuale X, in simboli $X_n \overset{q.c.}{\to} X$ o $X_n \overset{q.o.}{\to} X$, se

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

La funzione assume valor medio finito in quanto definibile a livello generale come |E[X(ω)|, definibile quindi come valore assoluto.
Essa deve convergere in p-quasi certamente qualora il valor medio sia finito. È chiaro che si intende che sia finito il limite, dunque:

$$\lim_{n\to\infty} Xn = 1$$

La variabile aleatoria è reale, come tale definibile discreta, ricordando che la proprietà del discreto impone che la serie degli eventi converga ad 1, come tale vale già la proprietà del limite per $n \to \infty$.
Fatte tali considerazioni, il valore atteso, per linearità, permane nei limiti forniti dalla distribuzione discreta.
Sicuramente, quindi, la stessa distribuzione rispetta la condizione della convergenza della variabile X, essendo essa discreta e definita parimenti tra 0 ed ∞. Ponendo C=1, funziona.

b) Dando quindi le condizioni del p-quasi certamente, è chiaro che il valore atteso è dipendente dalla stessa distribuzione discreta a cui fa riferimento.
Formalmente, se il valore atteso tende a 0, avremo che la condizione base del valor medio è dato da $P(X = 0) =$ $f(x_0)$. Essendo |E[X(ω)| regolarmente definita, vale il seguente limite:

$$\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$$

dove avendo $f(x_0) = 0$, il limite stesso della successione discreta tende per proprietà stessa discreta (definita quindi univocamente da 0) a 0 stesso, pertanto anche X(ω)=0.

Esercizio 11. Siano X, Y variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta $p_{(X,Y)}$ data dalla seguente tabella:

x \ y	2	4	6	8
1	$\frac{0}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$
-3	$\frac{5}{64}$	$\frac{0}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$
5	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$
-7	$\frac{2}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{11}{64}$

Si calcolino valor medio, varianza e covarianza di X e Y, e si decida se X e Y sono indipendenti o meno.

P(X) = P (X=1) + P (X=-3) + P (X=5) + P (X=-7) = 51/64
P(Y) = P (Y=2) + P (Y=4) + P (Y=6) + P (Y=8) = 1
Per ogni valore di X, dobbiamo considerare il rispettivo valore di Y e viceversa.
Quindi:

- Per (X=1) = 0/64 + 3/64 + 3/64 + 1/64 = 7/64
- Per (X=-3) = 5/64 + 0/64 + 4/64 + 1/64 = 10/64 = 5/32
- Per (X=5) = 1/64 + 7/64 + 3/64 + 6/64 = 17/64
- Per (X=-7) = 2/64 + 9/64 + 8/64 + 11/64 = 30/64 = 15/32
- Per (Y=2) = 0/64 + 5/64 + 1/64 + 2/64 = 8/64 = 1/8
- Per (Y=4) = 3/64 + 0/64 + 7/64 + 9/64 = 19/64
- Per (Y=6) = 3/64 + 4/64 + 3/64 + 8/64 = 18/64 = 9/32
- Per (Y=8) = 1/64 + 1/64 + 6/64 + 11/64 = 19/64

Per il valor medio: Un valore ha possibilità di esserci ¼ delle volte sui valori di X.
Pertanto, il valor medio di ogni valore per X è dato da ¼ * P(X=1/-3/5/-7)
Per Y il valor medio di ogni valore è dato da ¼ * P(Y=2/4/6/8)
Fatto questo, la varianza si applichi la formula e la covarianza sfrutta questo calcolo; se risulta 0 allora sono indipendenti.

Esercizio 12 (*KidsUniversity*). Immaginiamo di avere una scacchiera da 20 righe (numerate da zero a 19 dal basso in alto) per 12 colonne (numerate da 1 a 12 da sinistra a destra). Disponiamo dodici pedine nelle caselle della riga zero. Ora lanciamo due dadi regolari da sei facce. Spostiamo di una casella in alto la pedina che si trova nella colonna il cui numero è uguale alla somma dei punteggi segnati dai due dadi. Continuiamo a lanciare i due dadi e a spostare pedine, muovendo sempre la pedina che si trova nella colonna del numero corrispondente alla somma dei punteggi segnati, finché la prima pedina non sarà arrivata alla riga 19. A questo punto il gioco si ferma. Si calcolino, analiticamente o solo numericamente, le probabilità dei seguenti eventi:

a) La pedina della colonna sette arriva per prima.

b) La pedina della colonna due arriva per prima.

c) La pedina della colonna sette arriva prima di quella della colonna otto.

d) Il gioco ha durata di 100 mosse.

In questo esercizio si fa riferimento ad una variante generale della binomiale definita come *distribuzione multinomiale*, impostando il formulone sotto presente.

La funzione di probabilità della distribuzione multinomiale ha la seguente forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; n; p_1, p_2, ..., p_k) = \binom{n}{x_1, x_2, ..., x_k} \prod_i^k p_i^{x_i} = \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$$

$$con$$
$$x_1 + x_2 +, ..., + x_k = n$$
$$e$$
$$p_1^{x_1} + p_2^{x_2} +, ..., + p_k^{x_k} = 1$$