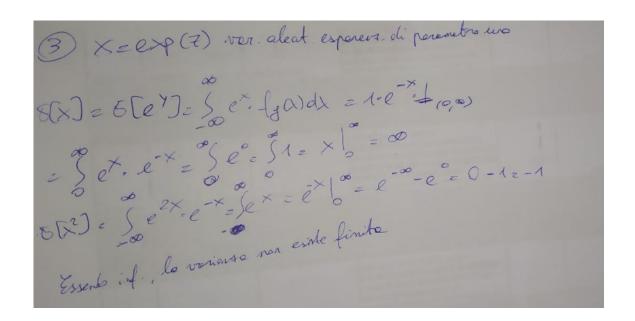
Foglio 4

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono in \mathbb{R}):

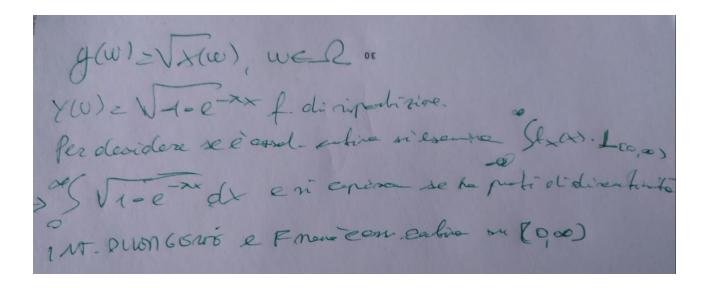
- (i) X è uniforme su [1, 2];
- (ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da F_X(x) = x³·1_{[0,1)}(x)+1_{[1,∞)}(x), x ∈ ℝ;
- (iii) $X = \exp(Z)$ per una variabile aleatoria Z esponenziale di parametro uno.



Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Poniamo

$$Y(\omega) \doteq \sqrt{X(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Si calcoli la funzione di ripartizione di Y e si decida se Y è assolutamente continua o meno.



Esercizio 3 (Esercizio 6.7 in CD). Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-\pi/2, \pi/2)$. Poniamo $Y \doteq \cos(X)$. Si mostri che Y è assolutamente continua e se ne determini la densità.

Soluzione 6.7. Per ipotesi $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$, quindi

$$P(X \in A) = \int_{A \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \frac{1}{\pi} dx = \frac{|A \cap (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|}{\pi}.$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y. Chiaramente $F_Y(y)=0$ se y<0 e $F_Y(y)=1$ se y>1, dal momento che $\cos(x)\in[0,1]$ per $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Si noti che per $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ e $y\in[0,1]$ si ha $\cos(x)\leq y$ se e solo se $x\in(-\frac{\pi}{2},-\arccos(y)]\cup[\arccos(y),\frac{\pi}{2})$, quindi per ogni $y\in[0,1]$ si ha

$$\begin{split} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}(\cos(X) \leq y) \\ &= \mathsf{P}\left(X \in (-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})\right) \\ &= \frac{|(-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})|}{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(y)\right). \end{split}$$

Dato che la funzione F_Y è \mathscr{C}^1 a tratti (è continua su \mathbb{R} e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$), segue dalla Proposizione 6.16 che Y è assolutamente continua, con densità

$$f_Y(y) = (F_Y)'(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

Esercizio 4 (Esercizio 6.11 in CD). Sia X una variabile aleatoria reale con distribuzione uniforme su (-1,1). Poniamo $Y \doteq X^+ = \max\{0,X\}$. Si determini la funzione di ripartizione di Y e si deduca che Y non è né discreta né assolutamente continua.

Soluzione 6.11. Chiaramente $Y \ge 0$, quindi per y < 0 si ha $F_Y(y) = P(X \le y) = 0$. Per $y \ge 0$ si ha $\max(x, 0) \le y$ se e solo se $x \le t$, quindi

$$F_Y(y) = F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(-1,1)}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\min(y,1)} 1 dx = \frac{\min(y,1) + 1}{2}.$$

In definitiva

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0\\ \frac{y+1}{2} & \text{se } 0 \le y \le 1\\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$

Si noti che $F_Y(0+)=F_Y(0)=\frac{1}{2}\neq F_Y(0-)=\lim_{y\uparrow 0}F_Y(y)=0$, quindi la funzione $F_Y(y)$ non è continua nel punto y=0; di conseguenza, la variabile aleatoria

Y non è assolutamente continua. Inoltre, la variabile aleatoria Y non può essere nemmeno discreta: infatti, se lo fosse, per la relazione (5.6) si dovrebbe avere che $1 = \sum_{y \in \mathbb{R}} P(Y = y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} (F_Y(y) - F_Y(y-))$; ma $F_Y(y) = F_Y(y-)$ per ogni $y \neq 0$ e quindi l'ultima somma vale $F_Y(0) - F_Y(0-) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 5 (Esercizio 7.8 in CD). "Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se T_1, T_2, \ldots, T_n sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim \text{Exp}(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale, si calcolino:

- (i) se n = 100 la probabilità P(T < 90);
- (ii) il valore minimo di n per cui $P(T < 90) \le 0.05$."

Soluzione. a.

$$P(\overline{T}_{100} < 0.9) = P(Z_{100} \le -0.1 \cdot 10) \simeq \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.15866.$$

b.

$$P\left(\overline{T}_n < \frac{90}{n}\right) = P\left(Z_n < \left(\frac{90}{n} - 1\right)\sqrt{n}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right).$$

Vogliamo allora che sia

$$\Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95,$$

da cui

$$\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}} \ge 1.64,$$

che si riscrive nella forma

$$n - 1.64\sqrt{n} - 90 \ge 0 \implies n \ge 107.$$

Esercizio 6. Lanciamo una moneta non necessariamente equilibrata n volte. Sia $k \in \{0, ..., n\}$. Se $p \in [0, 1]$ denota la probabilità di ottenere testa in un singolo lancio, per quale valore di p diventa massima la probabilità di ottenere k volte testa in n lanci?

Esercizio 7. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione uniforme Unif(0, a) per un a > 0. Poniamo

$$Y_n \doteq \max\{X_1,\ldots,X_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Si calcoli E [Y_n] per ogni n ∈ N.
- (ii) Come si comporta E [Y_n] per n → ∞?

$$\overline{+}_{r}(y) = P(Y_{r} \leq y) = P(X_{r} \leq y_{r} - i X_{r} \leq y_{r})$$

$$= \left(\frac{1}{a} \cdot L_{(0,a)}(y) + L_{(a,\infty)}(y)\right)^n$$

$$E[Z] = \begin{cases} P(Z \ge z) \lambda_1(dz) = \begin{cases} P(Z \ge z) \lambda_1(dz) \\ 0,000 \end{cases} P(Z \ge z) \lambda_1(dz) = \begin{cases} 0,000 \end{cases} P(Z \ge z) \lambda_1(dz)$$

$$E[Y_n] = \int_{(0,\infty)} (1 - \overline{t}_N(y)) \lambda_n(dy)$$

$$= \int_{(0,a)} \left(\left(1 - \left(\frac{\mathcal{A}}{a} \right)^n \right) \lambda_i(d_{\theta}) \right)$$

$$= a(1-\frac{1}{n+1}).$$

$$E[I_{h}^{*}-aI] = E[a-Y_{h}] = Fa - E[Y_{h}]$$

$$Y_{h} \leq a P_{qe}.$$

(i) =
$$a - a(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$
.

(di consequenza convergenza in probabilità e in distribuzione)

$$\begin{bmatrix} E[Y] = a & \longrightarrow & E[a-Y] = 0 \\ & \searrow o Pa-a \end{bmatrix}$$