Variabili aleatorie discrete

Motivazione: rappresentare quantità che dipendono dall'esito di un esperimento aleatorio

Def.: Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto, e sia E un insieme non-vuoto.

Una <u>variabile aleatoria</u> (v. a.) <u>a valori in E</u> è una funzione $\Omega \to E$.

Una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$ si dice v. a. <u>reale</u> (o <u>scalare</u>),
una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^d$ si dice v. a. <u>vettoriale</u>.

(Ω, P) spazio di probabilità

Esempi:

1) Variabili aleatorie costanti: $E \neq \emptyset$.

Sia $c \in E$. Allora

$$X(\omega) \doteq c, \quad \omega \in \Omega,$$

definisce una v. a. a valori in E.

2) Variabili aleatorie indicatrici: Sia $E = \{0,1\}$ oppure $E = \mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \Omega$ un evento.

Allora
$$X(\omega) \doteq \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

definisce una v. a. a valori in E.

3) Nella situazione delle prove ripetute e indipendenti:

$C_1, \dots, C_n$ eventi indipendenti ed equiprobabili in (Ω, P)

v. a.: $\rightsquigarrow$
$$X_i(\omega) \doteq \mathbb{1}_{C_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$
successo della prova i-es

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$
numero di successi in n prove;

$$T(\omega) \doteq \inf\{ i \in \{1, \dots, n\} : X_i(\omega) = 1 \}, \quad \omega \in \Omega,$$
prova di primo successo

T a valori in $\{1, \dots, n\} \cup \{\infty\}$ oppure in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Legame tra variabili aleatorie ed eventi

Def.: Sia X v.a. a valori in E definita su uno spazio di probabilità discreto (Ω, P).

L' insieme $\sigma(X) \doteq \{ X^{-1}(B) : B \subseteq E \}$

si dice <u>sistema degli eventi generati da X</u>.

Nota: $X^{-1}(B) = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in B \}$.

Osservazioni:

↗ Cap. 3

1) $\sigma(X)$ è una σ-algebra in Ω.

2) Se $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ sono tali che $X(\omega) = X(\tilde{\omega})$,

allora $\omega \in A$ se e solo se $\tilde{\omega} \in A$

per ogni $A \in \sigma(X)$.

3) Poiché Ω al più numerabile, abbiamo che

l'immagine $\mathrm{Im}(X) \doteq \{ X(\omega) : \omega \in \Omega \}$

è al più numerabile!

Def.: Sia X una v.a. su (Ω, P) a valori in $E \neq \emptyset$.

~~Si dice~~ distribuzione (o legge) di X è la mappa $P_X : \wp(E) \to [0,1]$ data da

$$P_X(B) \doteq P(X \in B), \quad B \subseteq E.$$

La densità discreta di X è la mappa $p_X : E \to [0,1]$ data da

$$p_X(x) \doteq P(X = x) = P_X(\{x\}), \quad x \in E.$$

Notazione: $P(X \in B) = P(\{X \in B\})$, dove

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B).$$

Analogamente, $P(X = x) = P(\{X = x\})$, dove

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\}).$$

Osservazioni:

1) La legge P_X di una v.a. X a valori in E è una misura di probabilità su $\mathcal{B}(E)$ nel senso della def. generale (vedi infra), anche quando E è più che numerabile.

2) Poiché $Im(X)$ è al più numerabile e $P(X \in Im(X)) = P_X(Im(X)) = 1$, $(Im(X), P_X)$ è di nuovo uno spazio di probabilità discreto.

3) La densità discreta p_X di una v.a. X è davvero una densità discreta:

$$\sum_{x \in E} p_X(x) = \sum_{x \in Im(X)} p_X(x) = 1,$$

p_X è la densità discreta di P_X

perché $p_X(x) = P(X = x) = 0$ se $x \in E \setminus Im(X)$

e $\Omega = \bigcup_{x \in Im(X)} \{X = x\}$ unione al più numerabile di eventi disgiunti a due a due.

Esempi:

1) Variabili aleatorie (quasi certamente) costanti:

Sia $E \neq \emptyset$, e sia $c \in E$. Poniamo

$$X(\omega) \doteq c, \quad \omega \in \Omega.$$

$\rightsquigarrow$ X v.a. a valori in E.

La legge di X è data da

$$P_X(B) = P(X \in B) = \begin{cases} 1 & \text{se } c \in B, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \quad B \subseteq E.$$

$\rightsquigarrow$ $P_X = \delta_c$ misura di Dirac concentrata in c.

Sia $A \subseteq \Omega$ un evento con $P(A) = 1$.

Sia $\tilde{z} \in E$ un altro elemento di E. Poniamo

$$\tilde{X}(\omega) \doteq \begin{cases} c & \text{se } \omega \in A, \\ \tilde{z} & \text{se } \omega \in A^c, \end{cases} \quad \omega \in \Omega.$$

$\rightsquigarrow$ La legge di $\tilde{X}$ è data da

$$P_{\tilde{X}} = \delta_c \quad \text{come prima poiché } P(A) = 1.$$

2) Variabili aleatorie indicatrici

Sia $E = \mathbb{R}$ oppure $E = \{0,1\}$

Sia $A \in \mathcal{A}$ un evento arbitrario. Poniamo

$$Y(\omega) \doteq \mathbb{1}_A(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

$\rightsquigarrow$ Y una v.a. aleatoria a valori in $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$.

La legge di Y è data da

$$P_Y(B) = P(Y \in B) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in B \text{ e } 1 \in B, \\ P(A) & \text{se } 0 \notin B \text{ e } 1 \in B, \\ P(A^c) & \text{se } 0 \in B \text{ e } 1 \notin B, \\ 0 & \text{se } 0 \notin B \text{ e } 1 \notin B. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $P_Y = P(A) \cdot \delta_1 + (1 - P(A)) \cdot \delta_0$.

$\rightsquigarrow$ $P_Y = \mathrm{Ber}(q)$ con $q = P(A)$

distribuzione di Bernoulli di parametro $q = P(A)$.

3) Prove ripetute e indipendenti:

Siano $C_1, \dots, C_n$ eventi indipendenti ed equiprobabili in (Ω, P), con $P(C_i) = q$.

Poniamo

$$X_i(\omega) \doteq \mathbb{1}_{C_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \qquad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

esempio 2) $\rightsquigarrow$ $X_1, \dots, X_n$ sono v.a. a valori in $\{0,1\}$

con la stessa legge:

$$P_{X_i} = q \cdot \delta_1 + (1-q) \cdot \delta_0 \, , = \mathrm{Ber}(q)$$

~~la~~ distribuzione di Bernoulli di parametro q.

Invece, S è una v.a. a valori in $\{0, \dots, n\}$

con densità discreta p_S data da

$$p_S(k) = \underbrace{P(S = k)}_{} = \binom{n}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

$$= P_S(\{k\})$$

$p_S(x) = 0$ se $x \notin \{0, \dots, n\}$

$$\rightsquigarrow \quad P_S(B) = \sum_{x \in B} p_S(x).$$

3) cont. 54d

$\leadsto$ P_S è la distribuzione binomiale di parametri n e q:

$$P_S = \mathrm{Bin}(n, q).$$

Infine, poniamo $T(\omega) \doteq \inf\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i(\omega) = 1\}$, $\omega \in \Omega$,

dove $\inf \emptyset \doteq \infty$.

$\leadsto$ T è una v.a. a valori in $\{1, \ldots, n\} \cup \{\infty\} \subseteq [0, \infty]$

La densità discreta p_T è data da

$$p_T(x) = \begin{cases} (1-q)^{x-1} \cdot q & \text{se } x \in \{1, \ldots, n\}, \\ \underbrace{1 - \sum_{x=1}^{n} (1-q)^{x-1} q}_{= (1-q)^n} & \text{se } x = \infty, \quad \text{"n fallimenti"} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\leadsto$ p_T e P_T (la legge di T) sono legate alla distribuzione geometrica su $\mathbb{N}$ di parametro q.