①

Scritto del 7 febbraio 2022

~~Esercizio~~ E. 1 :

Media e varianza di X v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

(i) X assol. continua con densità

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-4,-3)}(x) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[3,4)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

| $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x) dx$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] \overset{\text{formula}}{=} \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\overset{\text{qui}}{=} \frac{1}{2} \left(\int_{-4}^{-3} x\, dx + \int_{3}^{4} x\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-4}^{-3} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{3}^{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(9 - 16 + 16 - 9 \right) = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{E[X] = 0.}}$$

$$\mathrm{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 \overset{\text{qui}}{=} E[X^2].$$

E.1 (i) (cont.)

$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{var}(X) = E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$\overset{\text{qui}}{=} \frac{1}{2}\left(\int_{-4}^{-3} x^2 dx + \int_{3}^{4} x^2 dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{-3} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{3}^{4} \right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-27 + 64 + 64 - 27\right) = \frac{37}{3}.$$

$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{var}(X) = \underline{\underline{\frac{37}{3}}}.$$

(ii) X con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \sin(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2})}(x) + \mathbb{1}_{[\frac{\pi}{2},\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ F_X continua e C^1 a tratti

$\rightsquigarrow$ X è assol. continua con densità

$$f_X(x) = F_X'(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x) = \cos(x) \cdot \mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

E.1 (ii) (cont.)

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$\overset{\text{qui}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x)\,dx \qquad \Big|\ \text{integrazione per parti}$$

$$= \Big[x \cdot \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$$

$$= +\frac{\pi}{2} - \underbrace{\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=(0-1)} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\leadsto \quad E[X] = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}.$$

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$\overset{\text{qui}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x)\,dx \qquad \Big|\ \text{integrazione per parti}$$

$$= \Big[x^2 \cdot \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x)\,dx \qquad \Big|\ \text{integrazione per parti bis}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 2\left(\Big[-x \cdot \cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\left(0 + \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\leadsto \quad E[X^2] = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\mathrm{var}(X)}$$

E.1 (ii) (cont.)

$$\rightsquigarrow \quad var(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 - \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi + 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\pi - 3}}.$$

(iii) $X = \exp(Z)$ con Z uniforme continua su $(0,2)$.

Nota: Z assol. continua con densità $f_Z = \frac{1}{2} \cdot 1_{(0,2)}$.

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = E[e^Z] = \int_{\mathbb{R}} e^x \cdot f_Z(x)\, dx$$

$$\overset{\text{qui}}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 e^x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^x\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}}.$$

$$E[X^2] = E[e^{2Z}] = \int_{\mathbb{R}} e^{2x} f_Z(x)\, dx$$

$$\overset{\text{qui}}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot e^{2x}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

$$\rightsquigarrow \quad var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{4}(e^4 - 1) - \frac{1}{4}(e^4 - 2e^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

E.2

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. reali <u>i.i.d.</u>

con comune distribuzione $Exp(\lambda)$.

$$M_n \doteq \min \{X_1, \dots, X_n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i)

$$P(X_1 > x, \dots, X_n > x) \qquad \Big| \text{ v.a. indipendenti}$$

$$= P(X_1 > x) \cdot \ldots \cdot P(X_n > x) \qquad \Big| \text{ v.a. identicamente distribuite}$$

$$= P(X_1 > x)^n$$

$$= (1 - P(X_1 \leq x))^n \qquad \Big| \text{ def. funzione di ripartizione } F_1 = F_{X_1} = F_\mu$$

$$= (1 - F_1(x))^n.$$

(ii) Calcolare F_n funzione di ripartizione di M_n:

$$F_n(x) = P(M_n \leq x)$$

$$= 1 - P(M_n > x) \qquad \Big| \; M_n > x \text{ se e solo se } X_1 > x, \dots, X_n > x$$

$$= 1 - P(X_1 > x, \dots, X_n > x).$$

E. 2 (ii) (cont.)

Per il punto (i): $P(X_1 > x, \dots, X_n > x) = (1 - F_1(x))^n$

$$\rightsquigarrow \quad F_n(x) = 1 - (1 - F_1(x))^n.$$

Ora $F_1(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$$\rightsquigarrow \quad 1 - F_1(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\rightsquigarrow \quad F_n(x) = 1 - \left(\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \right)^n.$$

(iii) Dal punto (ii):

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0), \\ 1 - e^{-\lambda \cdot n \cdot x} & \text{se } x \in [0, \infty). \end{cases} \qquad | \; \lambda > 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, \underline{\underline{0]}}, \\ 1 & \text{se } x \in \underline{\underline{(0}}, \infty). \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \mathbb{1}_{\underline{\underline{[0,\infty)}}}(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$ funzione di ripartizione della distribuzione di Dirac concentrata in 0.

↓

~~Abbiamo quindi~~ Inoltre, 0 l'unico punto di discontinuità di $F(x) \doteq 1_{[0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo quindi che $F_n(x)$ converge a $F(x)$, per $n \to \infty$ per ogni punto di continuità di F, dove $F = 1_{[0,\infty)}$ funzione di ripartizione di δ_0.

$\leadsto$ $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in distribuzione a 0 (v.a. costante uguale a zero).

E. 3

Stima per $N \doteq \min\{ n \in \mathbb{N} : P(S \leq n) \geq 0{,}99 \}$,

dove $S \doteq \sum_{i=1}^{800} X_i$ e $X_1, \ldots, X_{800}$ v.a. i.i.d.

con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $\frac{1}{400}$.

Nota: $X_i \sim Ber(\frac{1}{400}) \rightsquigarrow E[X_i] = \frac{1}{400}$,

$$var(X_i) = \frac{1}{400} \cdot \left(1 - \frac{1}{400}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad E[S] = \sum_{i=1}^{800} E[X_i] = \frac{800}{400} = 2,$$

$$var(S) = \sum_{i=1}^{800} var(X_i) = \frac{800}{400} \cdot \left(\frac{399}{400}\right) = \frac{399}{200}.$$

↑ $X_1, \ldots, X_{800}$ indipendenti

Inoltre, $S \sim Bin(800, \frac{1}{400})$.

a) Stima per N usando Chebyshev:

Disuguaglianza di ~~Parceval~~: Chebyshev

$$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

dove X v.a. di quadrato integrabile.

E.3 2) (cont.)

Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$P(S \leq n) = 1 - P(S > n) = 1 - P(S \geq n+1).$$

Ora $P(S \geq n+1) = P(S - E[S] \geq n+1 - E[S])$

$$= P(S - E[S] \geq n-1) \qquad | \; E[S] = 2$$

$$\leq P(|S - E[S]| \geq n-1)$$

| Chebyshev

$$\leq \frac{var(S)}{(n-1)^2} \qquad | \; var(S) = \frac{399}{200}$$

$$= \frac{399}{200 \cdot (n-1)^2}.$$

$$\rightsquigarrow \quad P(S \leq n) \geq 1 - \frac{399}{200 \cdot (n-1)^2}.$$

Scegliere $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ minimo tale che $1 - \frac{399}{200 \cdot (n-1)^2} \geq \frac{99}{100}$:

$$1 - \frac{399}{200} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n-1)^2} \leq \frac{2}{399} \quad \Leftrightarrow \quad n-1 \geq \sqrt{\frac{399}{2}}.$$

$$\rightsquigarrow \quad n \geq \sqrt{\frac{399}{2}} + 1.$$

E.3 a) (cont.)

Ora $\sqrt{\frac{399}{2}} \approx \sqrt{2} \cdot 10$

$\rightsquigarrow \sqrt{\frac{399}{2}} \in (14, 15)$

$\rightsquigarrow$ $n > 14 + 1 \overset{n \in \mathbb{N}}{\rightsquigarrow} n \geq 16$

$\rightsquigarrow$ Stima per N: $\underline{\underline{N_* = 16}}$.

b) Stima per N usando l'approssimazione normale:

Grazie al teorema del limite centrale abbiamo che

la distribuzione di $\frac{1}{\sqrt{var(S)}} \cdot (S - E[S])$

è vicina alla distribuzione normale standard.

$\rightsquigarrow P(S \leq n) = P\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \leq \frac{n - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \right)$

$\approx \Phi\left(\frac{n - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \right)$, dove Φ funzione di ripartizione della normale standard

Scegliamo $y \in \mathbb{R}$ minimo (nella tabella) tale che $\Phi(y) \geq \frac{99}{100}$

$\overset{\text{tabella}}{\rightsquigarrow}$ $y = 2{,}33$.

E.3 b) (cont.) (10b)

Scegliere $n \in \mathbb{N}$ minimo tale che

$$\frac{n - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \geq 2{,}33$$

Qui $E[S] = 2$, $var(S) = \frac{399}{200}$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{n-2}{\sqrt{\frac{399}{200}}} \geq 2{,}33$$

$$\rightsquigarrow \quad n \geq 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{399}{200}} + 2$$

Ora $\sqrt{\frac{399}{200}} \approx \sqrt{2}$ $\rightsquigarrow$ $\sqrt{\frac{399}{200}} \in \left(\frac{14}{10}, \frac{15}{10}\right)$

$\rightsquigarrow$ $n > 3{,}3 + 2$ $\overset{n \in \mathbb{N}}{\rightsquigarrow}$ $n \geq 6$

$\rightsquigarrow$ Stima per N: $\underline{\underline{N_* = 6}}$.

E.3

a) Stima per N usando l'approssimazione di Poisson:

Ricorda: $S \sim Bin\left(800, \frac{1}{400}\right)$.

Grazie alla legge dei piccoli numeri abbiamo che la distribuzione di S (binomiale di parametri $800, \frac{1}{400}$) è vicina alla Poisson di parametro $800 \cdot \frac{1}{400} = 2$.

$$\rightsquigarrow \quad P(S \leq n) \approx F_{Poiss(2)}(n).$$

Scegliere $n \in \mathbb{N}$ tale che $F_{Poiss(2)}(n) \geq \frac{99}{100}$:

$$\overset{\text{tabella}}{\rightsquigarrow} \quad n \geq 6$$

$\rightsquigarrow$ Stima per N: $\underline{\underline{N_* = 6}}$.

E.4.

Per $N \in \mathbb{N}$ poniamo:

$\Omega_N \doteq \{1, \dots, N\}$, $P_N \doteq$ distribuzione uniforme discreta su Ω_N,

quindi $P_N(A) = \frac{|A|}{N}$ per $A \subseteq \Omega_N$.

Trovare N e v.a. Y definita su (Ω_N, P_N) tale che $P(Y=1) = 0{,}12$, $P(Y=0) = 0{,}88$.

Scegliamo $N = 100$ e poniamo

$$Y(\omega) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in \{1, \dots, 12\}, \\ 0 & \text{se } \omega \in \{13, \dots, 100\}, \end{cases} \quad \omega \in \Omega_{100}.$$

Allora $P_{100}(Y=1) = P_{100}(\{1, \dots, 12\}) = \frac{|\{1, \dots, 12\}|}{100}$

$= \frac{12}{100} = 0{,}12$

e $P_{100}(Y=0) = P_{100}(\{13, \dots, 100\}) = \frac{|\{13, \dots, 100\}|}{100} = \frac{88}{100} = 0{,}88$.

[Funziona anche con $N = 25$ e $Y(\omega) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{se } \omega \in \{4, \dots, 25\} \end{cases}$, $\omega \in \Omega_{25}$.