Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2020/2021

ESERCITAZIONE 5

E5.1. La probabilità che durante la produzione giornaliera di computer portatili si verifichino X pezzi difettosi è data da: $P(X=0)=P(X=2)=k$, $P(X=1)=3k$, $P(X=3)=P(X=4)=2k$ e $P(X\geq 5)=0$. Determinare: (a) la costante k; (b) media e varianza di X.

Soluzione.

(a) Affinché una densità di probabilità sia tale, deve soddisfare il vincolo di normalizzazione. Quindi si deve avere
$$k+3k+k+2k+2k=1 \quad \Leftrightarrow \quad k=\frac{1}{9}$$
e la densità discreta di X risulta $p_X(0)=p_X(2)=\frac{1}{9}$, $p_X(1)=\frac{1}{3}$, $p_X(3)=p_X(4)=\frac{2}{9}$ e $p_X(x)=0$, per ogni $x\geq 5$.

(b) Calcoliamo
$$E(X)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{2}{9}=\frac{19}{9}$$
e
$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{2}{9}-\left(\frac{19}{9}\right)^2=\frac{152}{81}.$$

E5.2. Una partita di 6 smartphone ne contiene 2 difettosi. Un negoziante acquista 3 di questi telefoni a caso. Sia X il numero di telefoni difettosi acquistati. Calcolare: (a) $P(X=1)$ e $P(0<X\leq 2)$; (b) media e varianza di X.

Soluzione. La variabilie aleatoria X prende valori in $\mathcal{X}=\{0,1,2\}$. Determiniamo la sua densità discreta. Calcoliamo le probabilità come "casi favorevoli su casi possibili". Ci sono $\binom{6}{3}$ modi per scegliere 3 smartphone dai 6 della partita (casi possibili). Inoltre,

- $X=0$ se il negoziante non acquista pezzi difettosi. Scegliamo 3 smartphone funzionanti tra i 4 non difettosi in $\binom{4}{3}$ modi (casi favorevoli) e quindi
$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{5}.$$
- $X=1$ se il negoziante acquista 1 pezzo difettoso. Abbiamo 2 modi per scegliere uno smartphone non funzionante tra i 2 difettosi e $\binom{4}{2}$ modi per scegliere i 2 funzionanti tra i 4 smartphone non difettosi. Quindi,
$$P(X=1)=\frac{2\cdot\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{3}{5}.$$
- $X=2$ se il negoziante acquista entrambi i pezzi difettosi. Abbiamo un solo modo per scegliere i telefoni difettosi e 4 modi per sceglierne uno funzionante tra i 4 non difettosi. Quindi,
$$P(X=2)=\frac{1\cdot 4}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{5}.$$

Rispondiamo ora alle domande.

(a) Abbiamo già calcolato $P(X=1)=\frac{3}{5}$. Inoltre, si ha

$$P(0<X\leq 2)=P(X\in\{1,2\})=P(\{X=1\}\cup\{X=2\})=P(X=1)+P(X=2)=\frac{4}{5}.$$

(b) Calcoliamo

$$E(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5}=1$$

e

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}-1^2=\frac{2}{5}.$$

E5.3 (🎞 video). Sia X una variabile aleatoria con alfabeto $\mathcal{X}=\{-1,0,1\}$ e densità discreta $p_X(-1)=0.2$, $p_X(0)=0.5$ e $p_X(1)=0.3$. Calcolare media e varianza della variabile aleatoria $Y=X^5$.

Soluzione. Calcoliamo

$$E(Y)=E\left(X^5\right)=(-1)^5\cdot(0.2)+0^5\cdot(0.5)+1^5\cdot(0.3)=-0.2+0.3=0.1.$$

e

$$\begin{aligned}Var(Y)&=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=E\left(X^{10}\right)-(0.1)^2\\&=(-1)^{10}\cdot(0.2)+0^{10}\cdot(0.5)+1^{10}\cdot(0.3)-(0.1)^2=0.49.\end{aligned}$$

E5.4 (🎞 video). Una variabile aleatoria X è tale che $E(X)=-3$ e $Var(X)=2$. Definiamo $Y=-3X+2$, quanto valgono media e varianza di Y?

Soluzione. Per le proprietà di media e varianza otteniamo

$$E(Y)=E(-3X+2)=-3\,E(X)+2=(-3)(-3)+2=11$$

e

$$Var(Y)=Var(-3X+2)=Var(-3X)=(-3)^2\,Var(X)=9\cdot 2=18\,.$$

E5.5. La variabile aleatoria X descrive il numero settimanale di guasti hardware in un sistema di computer. Registrando per un anno il numero di crash settimanali nel sistema, sono state stimate le seguenti probabilità: $p_X(0)=0.17$, $p_X(1)=0.27$, $p_X(2)=0.25$, $p_X(3)=0.17$, $p_X(4)=0.08$, $p_X(5)=0.04$ e $p_X(6)=0.02$. Calcolare il numero medio di guasti settimanali e la sua varianza.

Supponiamo che la perdita economica settimanale dovuta ai guasti possa essere stimata come $\texttt{Per}=10X+200$ (euro). Calcolare la perdita settimanale media e la sua varianza.

Soluzione.

- Calcoliamo

$$E(X)=1\cdot(0.27)+2\cdot(0.25)+3\cdot(0.17)+4\cdot(0.08)+5\cdot(0.04)+6\cdot(0.02)=1.92$$

e

$$\begin{aligned}Var(X)&=E(X^2)-E(X)^2\\&=1^2\cdot(0.27)+2^2\cdot(0.25)+3^2\cdot(0.17)+4^2\cdot(0.08)+5^2\cdot(0.04)+6^2\cdot(0.02)-(1.92)^2\\&=2.1136.\end{aligned}$$

- Per le proprietà di media e varianza otteniamo

$$E(\texttt{Per}) = E(10X + 200) = 10E(X) + 200 = 219.2$$

e

$$Var(\texttt{Per}) = 100Var(X) = 211.36.$$

E5.6 (video). Un'urna contiene 5 palline bianche e 5 nere. Dall'urna vengono estratte (senza reinserimento) 2 palline. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di palline bianche estratte. Quanto vale la varianza di X?

Soluzione. La variabile aleatoria X prende valori in $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Determiniamo la sua densità discreta. Calcoliamo le probabilità come "casi favorevoli su casi possibili". Ci sono $\binom{10}{2}$ modi di scegliere 2 palline tra 10 (casi possibili). Inoltre,

- $X = 0$ se estraiamo 2 palline nere. Scegliamo 2 palline nere tra le 5 nere in $\binom{5}{2}$ modi (casi favorevoli) e quindi

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9}.$$

- $X = 1$ se estraiamo 1 pallina bianca e 1 pallina nera. Scegliamo 1 pallina bianca tra le 5 bianche in 5 modi e 1 pallina nera tra le 5 nere in 5 modi e quindi

$$P(X = 1) = \frac{5 \cdot 5}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}.$$

- $X = 2$ se estraiamo 2 palline bianche. Scegliamo 2 palline bianche tra le 5 bianche in $\binom{5}{2}$ modi (casi favorevoli) e quindi

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9}.$$

Dal momento che

$$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = 1$$

otteniamo

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \cdot \frac{5}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} - 1^2 = \frac{4}{9}.$$

E5.7 (video). Due palline vengono scelte a caso da un'urna che contiene 8 palline bianche, 4 nere e 2 gialle. Supponiamo che si vincano 2 euro per ogni pallina nera estratta e se ne perda 1 per ogni pallina bianca estratta. Denotiamo con X la vincita/perdita. Calcolare media e varianza di X.

Soluzione. Cominciamo col determinare i valori che può assumere la variabile aleatoria X. Dobbiamo capire quali sono gli esiti della doppia estrazione dall'urna e stabilire quali sono le vincite associate a tali esiti. Abbiamo

PALLINE ESTRATTE	VINCITA
2 palline bianche	-2 euro
2 palline nere	4 euro
2 palline gialle	0 euro
1 pallina bianca e 1 pallina nera	1 euro
1 pallina bianca e 1 pallina gialla	-1 euro
1 pallina nera e 1 pallina gialla	2 euro

e quindi la variabile aleatoria X prende valori nell'insieme $\mathcal{X} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$. Ora dobbiamo determinare la sua densità discreta, cioè la probabilità con cui assume tali valori. Per cambiare, invece di calcolare direttamente le probabilità come "casi favorevoli su casi possibili" (come ho fatto nel video), formalizziamo la risoluzione nel contesto della probabilità condizionata. Se, per $i = 1, 2$, definiamo gli eventi

$$B_i \text{ (risp. } N_i,\, G_i) \;=\; \text{“alla } i\text{-esima estrazione esce una pallina bianca (risp. nera, gialla)”}\,,$$

otteniamo

$$P(X = -2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{4}{13}$$

$$\begin{aligned} P(X = -1) &= P(\{B_1 \cap G_2\} \cup \{G_1 \cap B_2\}) \overset{\text{(ev. disgiunti)}}{=} P(B_1 \cap G_2) + P(G_1 \cap B_2) \\ &= P(G_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|G_1)P(G_1) = \frac{8}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{2}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{16}{91} \end{aligned}$$

$$P(X = 0) = P(G_1 \cap G_2) = P(G_2|G_1)P(G_1) = \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{91}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\{B_1 \cap N_2\} \cup \{N_1 \cap B_2\}) \overset{\text{(ev. disgiunti)}}{=} P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) \\ &= P(N_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{4}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{32}{91} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(\{G_1 \cap N_2\} \cup \{N_1 \cap G_2\}) \overset{\text{(ev. disgiunti)}}{=} P(G_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap G_2) \\ &= P(N_2|G_1)P(G_1) + P(G_2|N_1)P(N_1) = \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} = \frac{8}{91} \end{aligned}$$

$$P(X = 4) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_2|N_1)P(N_1) = \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{6}{91}\,.$$

Pertanto, otteniamo

$$E(X) = -2 \cdot \frac{4}{13} + (-1) \cdot \frac{16}{91} + 1 \cdot \frac{32}{91} + 2 \cdot \frac{8}{91} + 4 \cdot \frac{6}{91} = 0$$

e

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (-2)^2 \cdot \frac{4}{13} + (-1)^2 \cdot \frac{16}{91} + 1^2 \cdot \frac{32}{91} + 2^2 \cdot \frac{8}{91} + 4^2 \cdot \frac{6}{91} - 0^2 = \frac{288}{91}.$$