Funzioni di ripartizione per v.a. reali

Sia X una v.a. reale su uno spazio discreto (Ω, P), e sia $p_X(\cdot)$ la corrispondente densità discreta: $p_X(x) = P(X=x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Definiamo una funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ tramite

$$F_X(x) \doteq P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

F_X si dice <u>funzione di ripartizione</u> di X.

Nota: F_X dipende solo dalla distribuzione di X, quindi funzione di ripartizione della distribuzione di X.

Proprietà di F_X:

1) F_X è crescente: Per $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$,

$\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$ $\leadsto$

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F_X(y).$$

2) F_X è continua a destra:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{\underline{h \to 0+}} F_X(x+h) = F_X(x).$$

Verifica: Sia $x \in \mathbb{R}$, e sia $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \underline{(0,\infty)}$ con $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Possiamo supporre (h_n) decrescente

$\leadsto \quad x_n \doteq x + h_n \overset{n\to\infty}{\searrow} x$ dall'alto

$\leadsto \quad \cancel{\ldots} \; P\{X \le x\} = P\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X \le x_n\}\}$

e $(\{X \le x_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ successione decrescente di eventi

continuità dall'alto $\leadsto$ $\underbrace{P(X \le x)}_{= F_X(x)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{P(X \le x_n)}_{= F_X(x_n) = F_X(x+h_n)}$ //

Proprietà 1) e 2) implicano:

F_X possiede limiti a sinistra:

$\forall x \in \mathbb{R}$ esiste $\cancel{\exists}$ $\lim_{\underline{h\to 0+}} F_X(x-h) \doteq F_X(x-)$

Nota: $F_X(x-) \le F_X$.

~~[illegible]~~ Inoltre: $\forall x \in \mathbb{R}$:

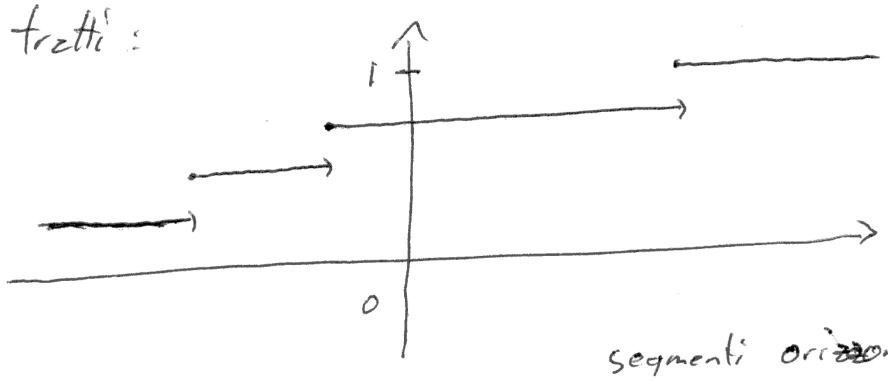
! $$F_X(x) - F_X(x-) = P(X \le x) - P(X < x)$$

$$= P(X = x) = p_X(x)$$

densità discreta in x

La funzione di ripartizione di una v.a. reale ~~discreta~~ X su uno spazio discreto è quindi costante a tratti:

Tipo:



segmenti orizzontali

3) F_X ha limiti a ~~una~~ 0 oppure 1 per $x \to \infty$ oppure $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0.$$

Infatti: $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \le x_n\}$ e $\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \le \tilde{x}_n\}$

se $x_n \nearrow \infty$ se $\tilde{x}_n \searrow -\infty$

continuità $\rightsquigarrow$ dall'alto oppure dal basso

$$1 = P(\Omega) = \lim_{n \to \infty} P(X \le x_n), \qquad 0 = P(\emptyset) = \lim_{n \to \infty} P(X \le \tilde{x}_n)$$

se $x_n \nearrow \infty$ se $\tilde{x}_n \searrow -\infty$.

Esempio: distribuzioni uniformi discrete

su $\left\{ \frac{k}{N} : k \in \{1, \dots, N\} \right\}$

Per $N \in \mathbb{N}$ sia p_N la densità discreta

della uniforme discreta su $\left\{ \frac{k}{N} : k \in \{1, \dots, N\} \right\}$:

$$p_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{se } x \in \left\{ \frac{k}{N} : k \in \{1, \dots, N\} \right\}, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia F_N la corrispondente funzione di ripartizione:

$$F_N(x) = \sum_{y \leq x} p_N(y), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, se $X \sim \mathrm{Unif}\left(\left\{ \frac{k}{N} : k \in \{1, \dots, N\} \right\} \right)$,

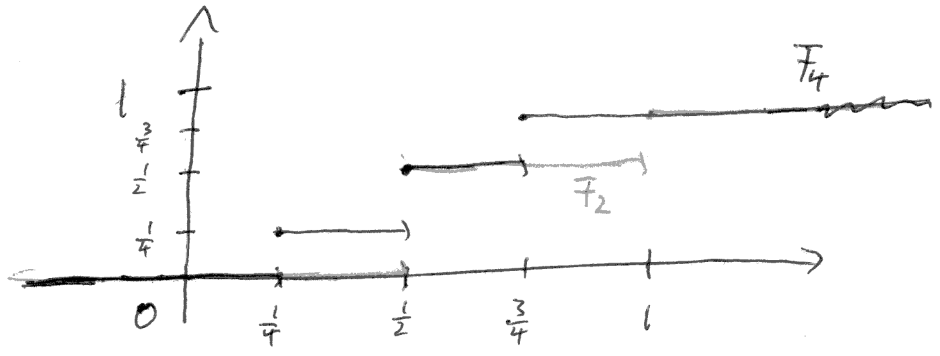
allora X ha densità discreta p_N

e $$P(X \leq x) = \sum_{\substack{y \in \mathbb{R}: \\ y \leq x}} \underbrace{P(X = y)}_{= p_N(y)}$$

Nota: ogni $P(X = y) = p_N(y) \neq 0$

solo se $y \in \left\{ \frac{k}{N} : k \in \{1, \dots, N\} \right\}$.

Grafico per $N = 2$ e $N = 4$:



Per $N \to \infty$, F_N tende a una funzione F

con F data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \in [0,1), \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Infatti: $\lim_{N \to \infty} F_N(x) = F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

e anche $\lim_{N \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_N(x) - F(x)| = 0$.

La funzione F gode delle tre proprietà di sopra.

(~~continua~~ crescente, continua a destra, limiti).

A differenza delle F_N, F è continua!

Domanda: F è la funzione di ripartizione della distribuzione di una v.a. ?

Def.: Una funzione $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

si dice una <u>funzione di ripartizione</u> se

(i) F è crescente: $F(x) \leq F(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$;

(ii) F è continua a destra: $\lim_{h \to 0+} F(x+h) = F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(iii) limiti: $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Fatto (serve la "teoria della misura"):

! Sia F una funzione di ripartizione, $F: \mathbb{R} \to [0,1]$. Allora esistono uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e una <u>v.a. reale</u> X su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tali che

F è la funzione di ripartizione di X

nel senso che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Variabili aleatorie reali generali:

Def.: Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità (generale). Una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice <u>variabile aleatoria reale</u> su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se

$$\{X \leq b\} \in \mathcal{F} \text{ per ogni } b \in \mathbb{R}.$$

Spiegazione: In generale, con Ω anche più che numerabile, la σ-algebra $\mathcal{F}$ sarà più piccola del sistema delle parti di Ω. La misura di probabilità P è ~~quindi~~ solo definita per sottoinsiemi di Ω che appartengono a $\mathcal{F}$.

La condizione nella def. di v.a. reale garantisce che P è ~~ben~~ definita per ~~eventi~~ gli eventi di interesse generati da X.

Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Poiché $\mathcal{F}$ è una σ-algebra, si ha: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$:

- $\{X \leq b\} \in \mathcal{F}$ (per definizioni),
- $\{X \in (a,b]\} \in \mathcal{F}$ $\quad \left[\{X \in (a,b]\} = \{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\} \right]$
- $\{X = b\} \in \mathcal{F}$ $\quad \left[\{X = b\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \in (b - \tfrac{1}{n}, b]\} \right]$
- $\{X \in (a,b)\},\ \{X \in [a,b]\},\ \{X \in [a,b)\} \in \mathcal{F}$

$\left[\{X \in (a,b)\} = \{X \in (a,b]\} \setminus \{X = b\},\ \{X \in [a,b]\} = \{X \in (a,b]\} \cup \{X = a\},\right.$
$\left. \{X \in [a,b)\} = \{X \in (a,b)\} \cup \{X = a\} \right]$

e molti altri, ad esempio eventi della forma

$$\{\phi(X) \leq b\} \quad \text{o} \quad \{\phi(X) = b\}$$

con $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Esempio: distribuzione uniforme continua

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Definiamo ~~$F_{Unif(a,b)} : \mathbb{R} \to [0,1]$~~ $F_{Unif(a,b)} : \mathbb{R} \to [0,1]$

tramite

$$F_{Unif(a,b)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } x \in [a,b), \\ 1 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

Allora $F_{Unif(a,b)}$ è una funzione di ripartizione;

è la funzione di ripartizione della

<u>distribuzione uniforme continua</u> su (a,b).

Def.: Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si dice che X è ~~uniforme~~ ha

distribuzione uniforme continua su (a,b),

in simboli $X \sim Unif(a,b)$,

se $F_X = F_{Unif(a,b)}$, cioè $F_{Unif(a,b)}(x) = P(X \leq x)$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio: distribuzione esponenziale

Sia $\lambda > 0$. Definiamo $F_{Exp(\lambda)} : \mathbb{R} \to [0,1]$

tramite

$$F_{Exp(\lambda)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Allora $F_{Exp(\lambda)}$ è una funzione di ripartizione;

è la funzione di ripartizione della

distribuzione esponenziale di parametro λ.

Def.: Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Si dice che X ha

distribuzione esponenziale di parametro λ,

in simboli $X \sim Exp(\lambda)$,

se $F_X = F_{Exp(\lambda)}$, cioe $P(X \leq x) = F_{Exp(\lambda)}(x)$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La distribuzione uniforme continua e la distribuzione esponenziale sono delle distribuzioni continue (anche assolutamente continue; cf. infra) nel senso che le loro funzioni di ripartizione sono continue.

Se X è una v.a. reale con distribuzione uniforme continua oppure esponenziale, allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$$

stesso argomento come a p. 75b

$$= 0$$

poiché, in questo caso, F_X continua.

In particolare, X <u>non</u> possiede una densità <u>discreta</u>.

Variabili aleatorie assolutamente continue

Una classe importante di variabili aleatorie reali ~~reali~~ è costituita da v.a. con funzione di ripartizione "assolutamente continua".

Una condizione equivalente (che useremo qui) è che la funzione di ripartizione si ottiene integrando una funzione non-negativa (e integrabile):

Def.: Sia $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ una funzione di ripartizione.

Allora F si dice <u>assolutamente continua</u> se esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrabile tale che

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

In questo caso, ~~e~~ f si dice (una versione della) <u>densità</u> (continua) di F.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$ e ~~di F~~

Def.: Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Allora X si dice assolutamente continua se la sua funzione di ripartizione F_X lo è. [La densità di F_X si indica in questo con f_X.]

Esempio: distribuzione uniforme continua

Sia $X \sim Unif(a,b)$ con $a<b$.

Allora
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } x\in[a,b), \\ 1 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ F_X è differenziabile con continuità in $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$:

$$F_X'(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \qquad x\in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$$

Se poniamo $f_X(x) := \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $x\in\mathbb{R}$, allora

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \quad \text{per ogni } x\in\mathbb{R}.$$

Esempio: distribuzione esponenziale

Sia $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ con $\lambda > 0$.

Allora
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ F_X è differenziabile con continuità in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$F_X'(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Se poniamo $f_X(x) \doteq \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

allora
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Nota: La densità continua di una funzione di ripartizione, se esiste, è determinata ~~sola~~ univocamente a parte un insieme di misura (di Lebesgue) zero.

Per noi: i punti di non-differenziabilità della funzione di ripartizione.

Condizione sufficiente per la continuità assoluta di una funzione di ripartizione:

Sia $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ una funzione di ripartizione.

Se F è continua ed esiste un insieme ~~finito~~ di punti isolati $F \subset \mathbb{R}$ [cioè: $|F \cap [a,b]| < \infty$ per ogni scelta di $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$] tale che F è di classe C^1 in $\mathbb{R} \setminus F$, allora F è assolutamente continua con densità data da

$$f(x) = F'(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus F}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esempi: distribuzione uniforme, ~~ed~~

" " esponenziale

(↗ p. 83)

Le densità si possono usare per definire funzioni di ripartizione.

Una densità è una funzione $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrabile tale che $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Data una tale funzione f, si ha che

$$F(x) \doteq \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

definisce una funzione di ripartizione.

Esempio: distribuzione ~~standard~~ normale (standard)

La funzione $f_{N(0,1)}$ data da

$$f_{N(0,1)}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

è una densità. La funzione ~~di ripartizione~~

$$\Phi(x) \doteq \int_{-\infty}^{x} f_{N(0,1)}(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R},$$ è la

funzione di ripartizione della distribuzione normale standard.

Nota (↗ Analisi):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}\,.$$

Più in generale:

Sia $\mu \in \mathbb{R}$, e sia $\sigma > 0$.

~~Al~~ La funzione $f_{N(\mu,\sigma^2)}$ data da

$$f_{N(\mu,\sigma^2)}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

è una densità, ed è la densità della <u>distribuzione normale</u> o <u>gaussiana</u> di media μ e varianza σ^2 (cf. infra)