Ricorda:

Sia X una v.a. reale su uno spazio di probabilità discreto (Ω, P).

Allora la legge (o distribuzione) di X è determinata ~~data~~ dalla ~~densità~~

$$p_X(a) \doteq P_X(\{a\}) \doteq P(X=a), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

evento $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} = X^{-1}(\{a\})$

p_X è una densità discreta (generalizzata) su $\mathbb{R}$:

$$\sum_{a\in\mathbb{R}} p_X(a) = \sum_{a \in Im(X)} p_X(a) = 1$$

poiché $Im(X)$ al più numerabile e $p_X(a) = 0$ se $a \notin Im(X)$.

La probabilità di un insieme $B \subseteq \mathbb{R}$ rispetto alla legge di X è data da

densità discreta di X

$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{a \in B} p_X(a)$$

Distribuzioni notevoli di v.a. reali discrete:

Sia X una v.a. reale discreta con densità discreta p_X.

1) X ha distribuzione di Bernoulli di parametro $q \in [0,1]$ se

$X \sim Ber(q)$

$$p_X(z) = \begin{cases} q & \text{se } z = 1, \\ 1-q & \text{se } z = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2) X ha distribuzione di Rademacher di parametro $q \in [0,1]$ se

$X \sim Rad(q)$

$$p_X(z) = \begin{cases} q & \text{se } z = 1, \\ 1-q & \text{se } z = -1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

632

3) X ha distribuzione binomiale di parametri $n \in \mathbb{N}$ e $q \in [0,1]$ se

($X \sim Bin(n,q)$)

$$p_X(z) = \begin{cases} \binom{n}{z} \cdot q^z \cdot (1-q)^{n-z} & \text{se } z \in \{0, \dots, n\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4) X ha distribuzione ipergeometrica di parametri di parametri $N \in \mathbb{N}$, $M \in \{0, \dots, N\}$, e $n \in \{1, \dots, N\}$ se

($X \sim Ipergeo(N, M, n)$)

$$p_X(z) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{z} \cdot \binom{N-M}{n-z}}{\binom{N}{n}} & \text{se } z \in \{0, \dots, n \wedge M\}, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5) X ha distribuzione geometrica di parametro q $q \in [0,1]$ se

($X \sim Geo(q)$)

$$p_X(z) = \begin{cases} q \cdot (1-q)^{z-1} & \text{se } z \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

6) X ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se

$(X \sim Poiss(\lambda))$

$$P_X(z) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^z}{z!} & \text{se } z \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

7) X ~~distribuzione~~ ha distribuzione uniforme discreta su $A \subset \mathbb{R}$ insieme finito

$(X \sim Unif(A))$

se

$$P_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{|A|} & \text{se } z \in A, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ricorda la definizione del valor medio per una v.a. reale X su (Ω, P) ~~dis~~ discreto:

a) Se $X \geq 0$, allora valor medio di X data da
$$E[X] \doteq \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}),$$
ben definito in $[0, \infty]$.

b) In generale, X ammette valor medio se $E[X^+]$ o $E[X^-]$ è finito, dove ~~$X(\omega) = \max\{0, X(\omega)\}$~~ X^+, X^- risp. ~~$X(\omega)$~~ parte positiva e parte negativa di X:
$$X^+(\omega) \doteq \max\{0, X(\omega)\}, \quad X^-(\omega) \doteq \max\{0, -X(\omega)\}, \quad \omega \in \Omega,$$
e $E[X^+]$, $E[X^-]$ definiti nel senso di a).

In questo caso, valor medio di X dato da
$$E[X] \doteq E[X^+] - E[X^-].$$

Abbiamo (cf. Richiami: somme infinite):

X ammette valor medio

se e solo se

$\left(X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \right)_{\omega \in \Omega}$ ammette somma;

in questo caso

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

ben definito in $[-\infty, \infty]$.

Formula di trasformazione:

Sia p_X la densità discreta di X,

quindi $p_X(z) = P(X = z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Allora: X ammette valor medio

! se e solo se $\left(z \cdot p_X(z) \right)_{z \in \mathbb{R}}$ ammette somma;

in questo caso $E[X] = \sum_{z \in R(X)} z \cdot p_X(z)$.

↑ immagine di X

Dimostrazione della formula di trasformazione:

(Ω, P) discreto

Possiamo supporre $X \geq 0$

(altrimenti argomento per X^+, X^- separatamente).

Allora $$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$ | per def.

$$= \sum_{z \in Im(X)} \sum_{\omega \in \{\tilde{\omega} \in \Omega : X(\tilde{\omega}) = z\}} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

| Nota $\Omega = \bigcup_{z \in Im(X)} \{X = z\}$ unione di insiemi disgiunti a due a due

$$= \sum_{z \in Im(X)} z \cdot \underbrace{\left(\sum_{\omega \in \{X=z\}} P(\{\omega\}) \right)}_{\overset{\sigma\text{-add.}}{=} P(X=z)}$$

Ω al più numerabile $\downarrow$

| Nota $\{X = z\} = \bigcup_{\omega \in \{X=z\}} \{\omega\}$ unione al più numerabile di insiemi disgiunti a due a due

$$= \sum_{z \in Im(X)} z \cdot P(X=z)$$

$$= \sum_{z \in Im(X)} z \cdot p_X(z).$$

//

Esempi: X v.a. reale su (Ω, P) discreto

1) ~~Sia X~~

Sia X una ~~non~~ quasi certamente costante,

cioè $P(X=c)$ per un $c \in \mathbb{R}$.

Allora $p_X(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a=c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = c \cdot 1 = c$$

In particolare, per ogni $c \in \mathbb{R}$:

! $$E[c] = c.$$

2) Sia $X = \mathbb{1}_A$ per un evento $A \subseteq \Omega$.

$$\rightsquigarrow \quad p_X(a) = \begin{cases} P(A) & \text{se } a=1, \\ 1-P(A) & \text{se } a=0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1-P(A)) + 0$$

$$= P(A).$$

65b

3) Sia X con $X \sim Ber(q)$, $q \in [0,1]$

$$\rightsquigarrow \quad p_X(z) = \begin{cases} q & \text{se } z = 1 \\ 1-q & \text{se } z = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = 1 \cdot q + 0 \cdot (1-q) + 0 = q$$

Nota: se $X = \mathbb{1}_A$ per un evento A, allora $X \sim Ber(P(A))$.

4) Sia X con $X \sim Unif(\{1, \ldots, 6\})$

("numero segnato da un dado a sei facce")

$$\rightsquigarrow \quad p_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } z \in \{1, \ldots, 6\}, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = \frac{1}{6} \cdot (1 + \ldots + 6)$$

| "formula di Gauss bambino"

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2}$$

$$= \frac{7}{2}.$$

5) "Size bias"

Esperimento: Immaginiamo di avere 120 persone divise in tre gruppi di numerosità 36, 40, 44.

Scegliamo a caso uno dei tre gruppi e denotiamo con X la numerosità del gruppo scelto

$\rightsquigarrow$ X v.a. reale con ~~densità discreta~~ $X \sim Unif\{36, 40, 44\}$,

$\rightsquigarrow$ $$p_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } z \in \{36, 40, 44\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora scegliamo a caso una delle 120 persone e denotiamo con Y la numerosità del gruppo di appartenenza della persona scelta

$\rightsquigarrow$ Y ~~X~~ v.a. reale con $$p_Y(z) = \begin{cases} \frac{z}{120} & \text{se } z \in \{36, 40, 44\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $$E[X] = \frac{1}{3} \cdot (36 + 40 + 44) = \frac{120}{3} = 40,$$

$$E[Y] = \frac{1}{120}(36^2 + 40^2 + 44^2) = \frac{4832}{120} = 40{,}2\overline{6}.$$

Nota: $E[Y] > E[X]$.

Proprietà del valor medio:

Siano X, Y v.a. reali su (Ω, P) spazio discreto

[I risultati valgono anche per ~~app~~ v.a. reali su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generale]

1) monotonia — Se X, Y ammettono valor medio e $X \leq Y$ P-q.c. (cioè $P(X \leq Y) = 1$),

allora $E[X] \leq E[Y]$.

2) stima fondamentale — Se X ammette valor medio, allora $|E[X]| \leq E[|X|]$.

3) linearità — Se X, Y ~~sono~~ hanno ~~non-negative~~ valor medio ~~oppure~~ finito ~~hanno~~ ~~entrambe~~ ~~va~~ (oppure sono non-negative),

allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ogni $\alpha, \beta \in [0, \infty)$):

$$E[\alpha \cdot X + \beta \cdot Y] = \alpha \cdot E[X] + \beta \cdot E[Y].$$

[dim. qui dalle proprietà delle somme infinite]

Formula di trasformazione

(caso discreto)

Sia Z una v.a. su (Ω, P) discreto

a valori in $E \neq \emptyset$.

Sia $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione.

La v.a. reale $g(Z)$ ammette allora

valor medio se e solo se

$(g(z) \cdot p_Z(z))_{z \in E}$

densità discreta di Z

ammette somma, e in questo caso

$$E[g(Z)] = \sum_{z \in E} g(z) \cdot p_Z(z) = \sum_{z \in Im(Z)} g(z) \cdot p_Z(z).$$