LEGGE CONGIUNTA

Siano ξ_1 ξ_2 ξ_3 v.a i.i.d con comune distribuzione di Rademacher $P(\xi_1 = \pm 1) = 1/2$

Poniamo

$X(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot \xi_2(\omega)$ $\quad Y(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) - \xi_3(\omega))$

1) MEDIA E VARIANZA DI X, Y

$E[X] = E[\xi_1 \cdot \xi_2] \overset{\text{indip}}{=} E[\xi_1] \cdot E[\xi_2] = 0$

$E[\xi_1] = 1 \cdot 1/2 + (-1) \cdot 1/2 = 0$

$var(X) = E[X^2] = E[\xi_1^2 \cdot \xi_2^2] \overset{\text{indip}}{=} E[\xi_1^2] \cdot E[\xi_2^2]$

$E[\xi_1^2] = 1^2 \cdot 1/2 + (-1)^2 \cdot 1/2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$var(X) = 1$

$E[Y] = E[\xi_1 \cdot (\xi_2 - \xi_3)] \overset{\text{indip}}{=} E[\xi_1] \cdot E[\xi_2 - \xi_3]$

ma $E[\xi_1] = 0$ quindi $E[Y] = 0$

$var(Y) = E[Y^2] = E[\underbrace{\xi_1^2}_{1} \cdot (\xi_2 - \xi_3)^2]$

$= E[\xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3] \overset{\text{linearità}}{=} E[\xi_2^2] + E[\xi_3^2] - 2\underbrace{E[\xi_2\xi_3]}_{0}$

$var(Y) = 2$

COVARIANZA

ii) $cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E[Y])]$

$E[X] = E[Y] = 0$

$cov(X, Y) = E[X \cdot Y]$

$= E[(\xi_1 \cdot \xi_2) \cdot (\xi_1 \cdot (\xi_2 - \xi_3))]$

$= E[(\xi_1 \cdot \xi_2) \cdot (\xi_1 \xi_2 - \xi_1 \xi_3)]$

$= E[\underbrace{\xi_1^2 \xi_2^2}_{1} - \xi_1^2 \xi_2 \xi_3] = 1 - E[\xi_2 \xi_3]$

$= 1 - \underbrace{E[\xi_2]}_{0} \cdot \underbrace{E[\xi_3]}_{0}$

$cov(X, Y) = 1$ quindi X, Y non sono indipendenti

$X \perp Y \iff cov(X, Y) = 0$

iii) LEGGE CONGIUNTA

X a valori in $(-1, 1)$

Y a valori in $(-2, 0, 2)$

$P(X = 1, Y = -2) = 0$

Per $\xi_1 = \xi_2 \to X = 1$

$Y = \xi_1 \cdot (\xi_2 - \xi_3)$ se $\xi_1 = \xi_2 = 1$ $\quad Y = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi_3 = 1 \\ 2 & \text{se } \xi_3 = -1 \end{cases}$

$P(X = -1, Y = -2) = 2/8 = 1/4 = P(\xi_1 = -\xi_2, \xi_2 = -\xi_3)$

Per $\xi_1 = -\xi_2 \to X = -1$

Se $\xi_1 = 1 \quad \xi_2 = -1$ $\quad Y = \begin{cases} -2 & \text{se } \xi_3 = 1 \\ 0 & \text{se } \xi_3 = -1 \end{cases}$

$P(X = -1, Y = 0) = P(\xi_1 = -\xi_2, \xi_2 = \xi_3) = 2/8 = 1/4$

$P(X = +1, Y = 0) = P(\xi_1 = \xi_2 = \xi_3) = 2/8 = 1/4$

$P(X = -1, Y = 2) =$ [illegible] $, 0) =$ [illegible]

$P(X = 1, Y = 2) = P(\xi_1 = \xi_2 , \xi_2 = -\xi_3) = 2/8 = 1/4$

-1 oppure 1

Ci sono 2 scelte per ogni variabile ed essendo 3 variabili indipendenti la loro probabilità è il prodotto delle probabilità

Rademacher $P(\xi_1 \pm 1) = 1/2$ quindi

$$\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{8}}$$