Esempio: Strategia del raddoppio

Immaginiamo di giocare la seguente strategia alla roulette, che termina dopo al massimo n giocate (per un $n \in \mathbb{N}$):

Nota: Alla roulette, "rosso" esce con probabilità $\frac{18}{37} \doteq q$ $\rightsquigarrow q < \frac{1}{2}$

```
ℓ ← 1;
REPEAT
    puntare 2^(ℓ-1) € su "rosso";
    ℓ ← ℓ+1;
    far girare la roulette;
UNTIL ((esce "rosso") OR (ℓ > n));
```

Sia Y_n il guadagno in € (possibilmente negativo) che risulta dalla strategia di sopra con al massimo n giocate partendo dalla posta iniziale di 1 €.

Nota: Se in n giocate non esce "rosso", allora abbiamo perso $\sum_{\ell=1}^{n} 2^{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^{\ell} = 2^n - 1$ (in €);

se esce "rosso", guadagniamo sempre solo 1 €.

Sia A_n l'evento "non esce 'rosso' in n giocate successive"

$$\rightsquigarrow \quad Y_n = \mathbb{1}_{A_n^c} - (2^n - 1) \cdot \mathbb{1}_{A_n}.$$

Ma $P(A_n) = (1-q)^n = \left(\frac{19}{37}\right)^n$. ↗ prove ripetute e indipendenti

$\rightsquigarrow$ Distribuzione di Y_n data da:

$$P(Y_n = y) = \begin{cases} 1-\left(1-\frac{18}{37}\right)^n & \text{se } y = 1, \\ \left(1-\frac{18}{37}\right)^n & \text{se } y = -(2^n-1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad E[Y_n] = 1\cdot\left(1-\left(\tfrac{19}{37}\right)^n\right) - (2^n-1)\cdot\left(\tfrac{19}{37}\right)^n$$

$$= 1 - \Big(\underbrace{\tfrac{38}{37}}_{>1}\Big)^n < 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Comportamento per $n \to \infty$:

$$P(Y_n = 1) = 1 - \left(\tfrac{19}{37}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

probabilità di guadagnare 1€ tende a 1

ma

$$E[Y_n] = 1 - \left(\tfrac{38}{37}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

guadagno atteso tende a $-\infty$.

Sia X una v.a. reale su (Ω, P) discreto.

Una caratteristica importante della distribuzione di X sono i momenti assoluti p-esimi, $p>0$, se finiti:

Def.: Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto. Sia $p>0$.

L'insieme

$$L^p(\Omega, P) \doteq \{ X : \Omega \to \mathbb{R} : E[|X|^p] < \infty \}$$

si dice spazio delle v.a. reali (su (Ω, P)) aventi momenti assoluti p-esimi finiti o, più semplicemente, spazio L^p.

Osservazioni:

1) Casi più importanti: L^p con $p \in \{1, 2\}$.

2) Una v.a. reale X ammette valor medio finito se e solo se $X \in L^1$.

3) Se $X, Y \in L^2(\Omega, P)$, allora $X \cdot Y \in L^1(\Omega, P)$.

In particolare, $L^2(\Omega, P) \subseteq L^1(\Omega, P)$

In generale, "$\subsetneq$" ; uguaglianza se $|\Omega| < \infty$.

4) Se $q \leq p$, allora $L^p(\Omega, P) \subseteq L^q(\Omega, P)$.

Per v.a. in L^2 si possono definire varianza e covarianza:

Def. Sia $X \in L^2(\Omega, P)$.

Si dice varianza di X la quantità

$$\text{var}(X) := E[(X - E[X])^2].$$

Si dice deviazione standard di X.

la quantità $\sqrt{\text{var}(X)}$

Def.: Siano $X, Y \in L^2(\Omega, P)$.

Si dice covarianza di X e Y la quantità

$$\text{cov}(X,Y) := E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])].$$

Osservazioni :

1) Per $X \in L^2(\Omega, P)$ si ha $\mathrm{var}(X) \in [0, \infty)$.

La varianza si può anche definire per $X \in L^1$; in questo caso, $\mathrm{var}(X) \in [0, \infty]$.

2) Per $X, Y \in L^2(\Omega, P)$ si ha $\mathrm{cov}(X, Y) \in \mathbb{R}$.

3) La varianza di X dipende solo dalla legge di X:

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{z \in \mathrm{Im}(X)} (z - E[X])^2 \cdot P_X(\{z\})$$

e $$E[X] = \sum_{z \in \mathrm{Im}(X)} z \cdot P_X(\{z\}) .$$

! 4) La covarianza di X e Y dipende invece dalla legge congiunta di X e Y:

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{(x,y) \in \mathrm{Im}(X) \times \mathrm{Im}(Y)} (x - E[X]) \cdot (y - E[Y]) \cdot P_{(X,Y)}(\{(x,y)\})$$

$$E[X] = \sum_{z \in \mathrm{Im}(X)} z \cdot P_X(\{z\}) ,$$

e

$$E[Y] = \sum_{z \in \mathrm{Im}(Y)} z \cdot P_Y(\{z\}) .$$

Proprietà di varianza e covarianza:

Siano $X, Y \in L^2(\Omega, P)$.

1) $\quad var(X) = cov(X, X)$.

2) $\quad cov(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$;

in particolare $\quad var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

3) $\quad cov(\cdot, \cdot)$ è un operatore $L^2(\Omega, P) \times L^2(\Omega, P) \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrico:

- $cov(X, Y) = cov(Y, X)$;
- $cov(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha\, cov(X, Y) + \beta\, cov(X, Z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

in particolare $\quad var(\alpha \cdot X) = \alpha^2 \cdot var(X)$.

4) $$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + 2 \sum_{\underline{i<j}} cov(X_i, X_j).$$

! 5) $\quad$ Se $var(X) = 0$, allora $X = E[X]$ P-q.c., quindi $P_X = \delta_{E[X]}$.

Se $cov(X, Y) = 0$, allora X, Y si dicono <u>incorrelate</u>.

Prop.: (valor atteso e v.a. indipendenti)

Siano X, Y v.a. reali su (Ω, P).

1) Se X, Y sono non-negative e indipendenti, allora

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] \qquad \text{valori in } [0, \infty]$$

2) Se X, Y sono in L^1 e indipendenti, allora

$$X \cdot Y \text{ in } L^1 \quad \text{e} \quad E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

valori in $\mathbb{R}$

Idea della dim.:

2) dalla 1) scrivendo $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$ parti positive / negative.

1) Siano X, Y v.a. non-negative e indipendenti su (Ω, P) discreto. Allora densità congiunta $p_{(X,Y)}$ della forma $p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

$$\rightsquigarrow \quad E[X \cdot Y] = \sum_{(x,y) \in Im(X) \times Im(Y)} x \cdot y \cdot p_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} x \cdot y \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$\overset{\substack{\text{sommandi } \geq 0 \\ \text{riordinare}}}{=} \sum_{x \in Im(X)} x \cdot p_X(x) \underbrace{\left(\sum_{y \in Im(Y)} y \cdot p_Y(y) \right)}_{= E[Y]} = E[X] \cdot E[Y].$$

//