01/12/2021

ES. 1 FOGLIO 3

X, Y, Z v.a. tali che $\cdot\ P(X<Y)=1$

- X, Y, Z a valori in $\mathbb{Z}$ $\quad \}$ ← QUESTA È (**)
- $\xi \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$
- $(X,Y), Z, \xi$ indipendenti

$$M = \begin{cases} Y & \xi = 1 \\ X & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A = \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}$$

↑ unione disgiunta

$$P(A) = P(\xi=1, M \geq Z) + P(\xi = 0, M < Z) = P(\xi = 1, Y \geq Z) + P(\xi=0, X<Z) \overset{\text{indip.}}{=} P(\xi=1)\cdot P(Y \geq Z) + P(\xi=0)\cdot P(X<Z)$$

$$\overset{\xi = Ber(\frac{1}{2})}{=} \frac{1}{2}\left(P(Y \geq Z) + P(X<Z)\right) \overset{\text{PROB TOTALE}}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Y \geq Z \mid Z=k)\cdot P(Z=k) + \sum_{k\in \mathbb{Z}} P(X<Z \mid Z=k)\cdot P(Z=k)\right) \quad (*)$$

(*)

$$\rightarrow P(A) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Z=k)\cdot \left(P(Y \geq k \mid Z=k) \overset{\text{INDIP.}}{+} P(X<k \mid Z=k)\right)\right)$$

↑ PER L'INDIPEN. POSSO TOGLIERE IL CONDIZIONAMENTO

Se A e B sono indipendenti e $P(B)>0$ allora $P(A|B) = P(A)$

(**) $\rightarrow P(X<Y)=1$

Mostrare: $P(A) \geq \frac{1}{2}$

Grazie all'ipotesi (**): $P(X<k) \geq P(Y<k)$

$$\rightarrow P(A) \geq \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} P(Z=k)\cdot\underbrace{\left(P(Y\geq k) + P(Y<k)\right)}_{=1} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} P(Z=k)}_{=1} =$$

$=1$ ← L'UNIONE È L'EVENTO TOTALE ED ENTRAMBI SONO DISGIUNTI

$=1$ perché $Z \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{1}{2}$$

(ii) Supponiamo $P(Z=k) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$, $Im(Z) \subseteq \mathbb{Z}$

Poiché X a valori in $\mathbb{Z}$ troviamo $k_0 \in \mathbb{Z}$ $P(X=k_0)>0 \longrightarrow$

$\rightarrow P(X<k_0+1) > P(Y<k_0+1)$

$X = k_0$ implica $Y \geq k_0+1$ $\quad$ $Y \leq k_0$ implica $X \leq k_0$

(esempio pratico, se k_0 è <11, sarà che $y \leq 10$ e quindi vale $X < Y$)

$\Rightarrow P(Y < k_0+1) \leq P(X < k_0)$ PER COSTANTI K LA SOMMA È ≥ 1, NON SOMMO ≥ 1

$P(X = k_0) > 0$

$P(Z=k) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$P(A) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Z=k) \cdot P(Y \geq k) + P(\cancel{X} < k) > \frac{1}{2}$

$\geq P(Y < k)$

$e \geq P(Y < k)$

se $k = k_0 - 1$

(perchè la ∅ potebbe togliere la prob. ...

FOGLIO 3 ES. 2

Siano X, Y v.a. reali su (Ω, P) discreto

X, Y indipendenti

Densità discreta di $X+Y$: Per $z \in \mathbb{R}$ $P(X+\cancel{Y}=z) = P(X=z-$

probabilità

$= \sum_{y \in Im(Y)} P(X = z-Y, Y=y) \stackrel{indip.}{=} \sum_{y \in Im(Y)} P(X = z-y) \cdot P(Y=y)$

$= \sum_{y \in Im(Y)} \left(\sum_{x \in Im(X)} P(X = z-y, X = x) \cdot P(Y=y) \right)$

questo cosa diventa piccolo → X al posto di Y

$= \underbrace{P(X=z-y)}_{= 1_{\{x\}}(z-y)} \cdot P(X=x)$

$= \sum_{y \in Im(Y)} \left(\sum_{x \in Im(X)} 1_{\{z\}} (x \cdot y) P(X=x) P(\cancel{Y}=y) \right)$

1 se rappresentare

0 altrimenti

FOGLIO 3 ES. 3

$\Omega = \{\sigma : N_{52} \to N_{52} : \sigma \text{ biettivo}\}$ $P = Unif(\Omega)$ $\sigma \in \Omega$ PERCHÉ SONO PERMUTAZIONI

$X_i(\sigma) = \{\sigma(13(i-1)+j) : j \in \{1, \dots 13\}\}$

$Y_i(\sigma) = \{\sigma(i+4(j-1)) : j \in \{1, \dots 13\}\}$, $i \in \{1, \dots 4\}$

$X_1 \dots X_4$, $Y_1 \dots Y_4$ v.a. a valori in $\mathcal{B} = \{A : A \subseteq N_{52} \text{ con } |A| = 13\}$

$(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_4)$ sono le identità delle carte nel mazzo

$i \in \{1 \dots 4\}$ $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 = 52$ (STESSA COSA VALE IN Y)

Densità congiunta di $X_1 \dots X_4$.

Siano $A_1 \dots A_4 \in \mathcal{B}$: $P(X_1 = A_1, \dots X_4 = A_4) = \begin{cases} 0 & \text{se } A_1 \cup \dots A_4 \neq N_{52} \\ \frac{(13!)^4}{52!} & \text{(se } A_1 \cap A_j = \emptyset \text{) altrimenti} \end{cases}$

Per $\sigma_1 = 13$ possibilità Per $\sigma_2 = 12$ Per $\sigma_3 = 11$ Per σ_{13}

ed ogni mano si "resetta" e quindi 4 volte il fattoriale

$N_{52} \in \{1 \ldots 52\}$

FOGLIO 3 ES. 5

$Bin(n, p_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} Poiss(\lambda)$ se $n \cdot p_n \xrightarrow{n \to \infty} \lambda > 0$ (legge dei piccoli numeri)