Foglio 1

Esercizio 1. Supponiamo di estrarre a caso cinque carte (una "mano") da un mazzo di carte da poker. Vi sono quindi 52 carte determinate dal loro seme (picche, fiore, quadro, cuore) e dal loro tipo ($2, \dots, 10$, J, Q, K, A). Le carte dal seme picche o fiore sono nere, le altre rosse. Si calcolino le probabilità delle seguenti combinazioni di cinque carte :

(i) almeno due carte dello stesso tipo;

(ii) un poker ("four of a kind"): quattro carte dello stesso tipo e una quinta carta;

(iii) un full ("full house"): tre carte di un tipo e due carte di un altro tipo;

(iv) un full con una sola carta rossa.

Esercizio 2. Distribuiamo le 52 carte di un mazzo da poker tra quattro giocatori A, B, C, D; ogni giocatore riceve quindi 13 carte. Si calcoli la probabilità che A o B (o entrambi) abbiano almeno due assi.

1 … 13 ~~carte rosse~~ cuori | ROSSO
14 … 26 quadre
27 … 39 picche | NERE
40 … 52 fiori

Modello prob.
$\Omega = \{w \in \{1 \dots 52\}$ tale che $|w| = 5\}$
P misura in $\Omega \to P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $A \subset \Omega$

1) A = "almeno 2 carte dello stesso tipo" A^C = cinque carte di tipi diversi
$A^C = \{w \in \Omega : \forall i, j \in w : |i - j| \bmod 13 \neq 0\}$
$\binom{13}{5}$ ← scelta in tipi diversi e 4 alternative per i 5 tipi

$$P(A^C) = \frac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$$

2) POKER → $\frac{52!}{5! \cdot 47!}$ (CASI POSSIBILI) $10 \cdot (4^5 - 4)$ (CASI FAVOREVOLI)

$$P(6) = \frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}}$$

3) FULL HOUSE (SCELTA DELLE 4 CARTE BUONE CONSECUTIVE SULLE 4 POSIZIONI)

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

④ FULL CON UNA CARTA ROSSA (LE CARTE ROSSE SONO LA METÀ)

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{26}{5}}$$

ES 2 FOGLIO 1

$\Omega = \{(w_1 \dots w_4) : w_i \in \{1, \dots 52\}, |w_i| = 13 \ \forall i \in \{1,4\}\}$

$|\Omega| = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}$ $\quad M = \{1 + k \, i \dots 13, k \in 0,3\}$

PROB. DI AVERE 2 ASSI

$E = \{w_1 \dots w_4\} \mid |w_1 \cap M| \geq 2$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$E_1 \cap E_2 = \{(w_1 \dots w_4) \in \Omega \mid |w_1 \cap M| = 2, |w_2 \cap M| = 2$

$E_1 \cap E_2$ scelte fra $\qquad P(E_1) = P(E_2)$

- DUE ASSI GIOCATORE A $\rightarrow \binom{4}{2}$ alternative
- CARTE DI A $\longrightarrow \binom{48}{11}$
- DUE ASSI DI B $\rightarrow 1 \cdot$
- CARTE DI C $\rightarrow \binom{26}{13}$

Esercizio 3. Per le estrazioni da un'urna come viste a lezione, si dimostri l'equivalenza asintotica tra i due schemi di estrazione. Più precisamente, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si consideri un'urna contenente N palline di cui M_N rosse e $N - M_N$ verdi. Siano $n, k \in \mathbb{N}$ fissati. Indichiamo con c_N la probabilità di ottenere esattamente k palline rosse in n estrazioni *con reinserimento* dall'urna di N palline, ed indichiamo con s_N la probabilità di ottenere esattamente k palline rosse in n estrazioni *senza reinserimento* dall'urna di N palline (a patto che $N \geq n$). Supponendo che il limite

$$\lim_{N \to \infty} \frac{M_N}{N} \doteq p \in (0,1)$$

esista, si mostri che

$$\lim_{N \to \infty} c_N = \lim_{N \to \infty} s_N = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

ES. 3 FOGLIO 1

$C_N \to$ K palline rosse in n estrazioni con reinserimento

$S_N \to$ K palline rosse in n estrazioni senza reinserimento

CON REINSERIMENTO $\Rightarrow \binom{n}{K}\left(\frac{M_N}{K}\right)\left(\frac{N-M_N}{N}\right)^{n-K}$

SENZA REINSERIMENTO (IPERGEOMETRICA) $\rightarrow \dfrac{\binom{M_N}{K}\binom{N-M_N}{n-K}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow{\text{METTENDO INSIEME}} \dfrac{M_N!\,(N-M_N)!}{K!\,(M_N-K)!\,(n-K)!\,(N-M_N-n)}$

$$= \binom{n}{K} \cdot \prod_{l=1}^{K} \frac{(M_N-K+l)}{N-n+l} \cdot \prod^{n-K} \frac{N-M_N-n+K+J}{N-n+K+J} \xrightarrow{n\to\infty} (1-p)$$

Esercizio 4. Sia Ω un insieme non-vuoto, e sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra in Ω. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ una successione arbitraria di elementi di Ω non necessariamente distinti. Definiamo una mappa $\mathbf{P}$ su $\mathcal{F}$ tramite

$$\mathbf{P}(A) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \delta_{x_n}(A), \quad A \in \mathcal{F},$$

ove δ_x indica la misura di Dirac concentrata in x, cioè

$$\delta_x(A) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}.$$

Si dimostri che $\mathbf{P}$ così definita è una misura di probabilità su $\mathcal{F}$.

ES. 4 FOGLIO 1

$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \delta_{x_n}(A,\ A \in F$

Consideriamo che $(A_N)_{n\in\mathbb{N}}$ sia successione di eventi disgiunti. Poniamo $y(i)\{n\in\mathbb{N}, x_n \in A_i\}$

$P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{x_n}(\bigcup A_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } \exists i \in \mathbb{N},\ n \in y(i) \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

$\doteq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot \mathbb{1}_{y(i)}(n) = \sum_{n\in y(i)} a_n$

IN PRATICA LUI BUTTA INSIEME LE SERIE DI PROBABILITÀ

Per $i \in N$
$P(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot d_i(a_i) = \sum_{n\in y(i)} a_n$

Esercizio 5. a) Sia A un insieme finito non-vuoto con $|A| = n$. Sia $r \in \mathbb{N}$, e siano $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ tali che $k_1 + \ldots + k_r = n$. Si mostri che il numero delle partizioni di A in esattamente r parti con rispettivamente $k_1, \ldots, k_r$ elementi è dato da

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

b) Immaginiamo di disporre casualmente n oggetti in r cassetti. Siano $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ tali che $k_1 + \ldots + k_r = n$. Si calcoli la probabilità che k_1 oggetti finiscano nel primo cassetto, k_2 nel secondo,... e k_r nel r-esimo cassetto.

A) $\mathcal{E} = \{(A_1 \ldots A_n), A_i \in \{1 \ldots n\}, A_i \ldots A_n\}$

① scelta degli elementi di A_i $\binom{n}{k}$ alternative

② scegliere gli elementi di A_i $\binom{n-k_1}{k_2}$

③ scelta degli elementi di A_n $\binom{n-(k_1 \ldots + k_{n-1})}{k_n} = 1$ alternative

④ $|\mathcal{E}| = \binom{n}{k_1} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \binom{n-(k_1 \ldots k_n)}{k_{l+1}} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdots \frac{(n-k_1+\ldots k_{n-1})!}{k_n!\, 0!}$

B) $\Omega = \{w = w_i \in \{1 \ldots n\} \to \{1 \ldots n\}$

$B = \{w \in \Omega : |w^{-1}\{1\}| = k_1 \ldots n \, w^{-1}\{n\} = k_n\}$

oggetti dell i-esimo cassetto $\to k_1 + \ldots k_n = n \to |B| = |\mathcal{E}| = \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!}$ $-r^n$ $|\Omega| = r^n$

Esercizio 6. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, e siano $B \in \mathcal{F}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Si verifichino le seguenti implicazioni:

(i) Se $\mathbf{P}(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

(ii) Se $\mathbf{P}(A_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

(iii) Se $\mathbf{P}(B) = 0$, allora $\mathbf{P}(B \cap A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

(iv) Se $\mathbf{P}(B) = 1$, allora $\mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

$(A_N)_{n \in N} \subseteq \mathcal{F}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sp. di prob

① Se $P(A_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $P(\bigcup_{n \in N} A_n) = 0$

σ-subadditività $P(\bigcup_{n \in N} A_n) \leq \sum_{n \in N} P(A_n)$

CONVERGENZA
EV. INDIPENDENTI

② Se $P(A_n) = 1$ $\forall n \in N$ allora $P(\bigcap_{n \in N} A_N) = 1$ $P(A_n)^c = 0$

ma $(\bigcap_{n \in N} A_N)^c = \bigcup_{n \in N} A_n^c = 1 - P(A_n) = 0$ $\forall n \in N$

③ Se $P(B) = 0$ allora $P(B \cap A) = 0$ $P(B \cap A) \subseteq P(B)$

④ Se $P(B) = 1$ allora $P(B \cap A) = P(A)$

$P(A) = P(B \cap A) \cap (B^c \cap A)$ ma $P(B^c) = 1 - P(B) = 0 \to P(B^c \cap A) = 0$

Esercizio 7. Siano Ω_1, Ω_2 due insiemi (non vuoti) al più numerabili. Poniamo $\Omega \doteq \Omega_1 \times \Omega_2$, e supponiamo di avere una misura di probabilità $\mathbf{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$. Definiamo la funzione $Q\colon \mathcal{P}(\Omega_1) \to [0,1]$ tramite

$$Q(A) \doteq \mathbf{P}(A \times \Omega_2), \quad A \subset \Omega_1.$$

(i) Si dimostri che (Ω_1, Q) è uno spazio di probabilità discreto.

(ii) Sia dia un esempio per Ω_1, Ω_2, $\mathbf{P}$ in cui Ω_1, Ω_2 siano insiemi numerabili infiniti.

(iii) Supponiamo ora che Ω_1, Ω_2 siano insiemi finiti e $\mathbf{P}$ la probabilità uniforme. Si mostri che allora Q è la probabilità uniforme su Ω_1.

P mis. di probabilità su $P(\Omega)$

Definiamo $Q: P(\Omega) \to [0,1]$ tramite $Q(A) = P(A \times \Omega_2)$; $A \subseteq \Omega_1$

allora (Ω, Q) è uno sp. di prob. discreto, Ω al più numerabile e

Q misura di probabilità

1) $Q(\Omega_1) = P(\Omega_1 \times \Omega_2) = 1$

2) sia $(A_n)_{n\in N} \subset P(\Omega_1) \mid A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$ eventi disgiunti a due a due

$\to A_1 \times \Omega_2 \cap A_2 \times \Omega_2 = \emptyset$ se $n \neq m$

$Q(\bigcup_{n\in N} A_n) = P((\bigcup_{n\in N} A_n \times \Omega_2) = P(\bigcup_{n\in N} A_n \times \Omega_2) = \sum_{n\in N} P(A_n \times \Omega_2) = Q(A_n)$

Q quale condizioni possiamo usare Poisson $\to$ $P(n_1, n_2) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } n_1 = n_2 = n \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$

3) Ω_1, Ω_2 non vuoti finiti

P la prob. uniforme $\to P = \frac{|A \times \Omega_2|}{|\Omega_1 \times \Omega_2|} = \frac{|A| \cdot |\Omega_2|}{|\Omega_1| \times |\Omega_2|} = \frac{|A|}{|\Omega_1|}$

Esercizio 8. Sia Ω un insieme finito, e sia $H\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Per $\beta > 0$, definiamo una densità discreta su Ω attraverso

$$p_\beta(\omega) \doteq \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(\omega)}, \quad \omega \in \Omega,$$

dove Z_β è la costante di normalizzazione: $Z_\beta \doteq \sum_{\omega\in\Omega} e^{-\beta H(\omega)}$. Denotiamo con $\mathbf{P}_\beta$ la misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ indotta da p_β. Poniamo

$$A \doteq \{\omega \in \Omega : H(\omega) \le H(\tilde\omega) \text{ per ogni } \tilde\omega \in \Omega\}.$$

Per ogni $\omega \in \Omega$, si determinino

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathbf{P}_\beta(\{\omega\}) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\beta\to 0+} \mathbf{P}_\beta(\{\omega\}).$$

(a) $\beta \to 0$: $\forall \omega \in \Omega$ $e^{-\beta H(\omega)} \to 1 \to Z_\beta \xrightarrow{\beta \to 0} |\Omega| \to P_\beta(\omega) \to \frac{1}{|\Omega|}$

$P_\beta(B) = \sum_{\omega \in B} P_\beta(\omega)$, $B \subseteq \Omega \to P_\beta \xrightarrow{\beta \to 0}$ distrib. uniforme su Ω

(b) $\beta \to \infty$ $A = \{\omega \in \Omega : H(\omega) \in H(\tilde{\omega})\}$ $\forall \omega \in \Omega$

$m = \min\{H(\omega) : \omega \in \Omega\}$ $Z_\beta = \sum_{\omega \in A} e^{-\beta H(\omega)} + \sum_{\omega \in A^c} e^{-\beta H(\omega)} = |A| \cdot e^{-\beta \cdot m} + \sum_{\omega \in A^c} e^{-\beta(H(\omega))}$

Se $\omega \in A$, $b > 0$, allora $P_\beta(\omega) = \frac{1}{Z_\beta} \cdot e^{-\beta m} = \frac{1}{|A| + \sum_{\omega \in A^c} e^{-\beta(H(\omega) - m)}} = \frac{1}{A}$

Se $\omega \in A^c$, allora $P_\beta(\omega) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta(H(\omega))} \cdot e^{-\beta(\omega)}$

$\xrightarrow{\beta \to \infty} \frac{1}{|A|} \xrightarrow{\beta \to \infty} 0$ $P_\beta(\omega) \xrightarrow{\beta \to 0} \begin{cases} 1/|A| & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esercizio 9. Sia $(\Omega, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità discreto, e sia $B \subseteq \Omega$ tale che $\mathbf{P}(B) > 0$. Poniamo

$$\mathbf{P}(A|B) \doteq \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \quad A \subseteq \Omega.$$

Si verifichi che $(\Omega, \mathbf{P}(\cdot|B))$ è uno spazio di probabilità discreto. Inoltre, sia dia un esempio di uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$ ed eventi $A_1, A_2, B \subseteq \Omega$ tali che $\mathbf{P}(B) > 0$, $\mathbf{P}(A_1|B) > \mathbf{P}(A_1)$ e $\mathbf{P}(A_2|B) < \mathbf{P}(A_2)$.

(Ω, P) sp. di prob. discreto $B \subseteq \Omega$ con $P(B) > 0$

allora $A \to P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ definendo una misura di probabilità su $P(\Omega)$

Esempio di (Ω, P) ed eventi A_1, A_2, B tali che

$P(B) > 0$, $P(A_1|B) > P(A_1)$, $P(A_2|B) > P(A_2)$

$P(B) = \frac{3}{4}$ $P(A) = \frac{1}{2} = P(A_2)$ $P(A_1|B) = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$ $P(A_2|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

Esercizio 10. Si verifichi se esiste o meno uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con eventi $A, B, C \in \mathcal{F}$ tali che

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{12}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A|C) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(B|C) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3}.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ di prob. con eventi $A, B, C \mid P(A) = \frac{5}{12}$ $P(B) = \frac{1}{3}$ $P(C) = \frac{1}{4}$

$P(A|B) = \frac{1}{3}$, $P(A|C) = \frac{1}{3}$, $P(B|C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{9}$ $\quad \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + q$

$P(A \cap C) = P(A|C) \cdot P(C) = \frac{1}{12}$ $\quad \uparrow$ PROB. TOTALI

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + q \; , \; q \geq 0$

Esercizio 11. Sia $\Omega \doteq \{0,1\}^3$, e sia $\mathbf{P}$ la misura uniforme su Ω. Poniamo

$$A \doteq \{\omega \in \Omega : \omega_3 = 0\}, \qquad B \doteq \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1\},$$
$$C \doteq \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1)\}.$$

Si calcolino le probabilità delle varie intersezioni e si determinino le relazioni di indipendenza tra A, B, C. Si dia poi un'interpretazione di questi eventi in termini dell'esperimento aleatorio del lancio di tre monete.

$\Omega = \{0,1\}^3$; $A = \{w \in \Omega : w_3 = 0\}$ $B = \{w \in \Omega : w_1 = 1\}$

$P = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1)$

$P(A \cap C) = \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(C)$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$ $\quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Nota= A intersecato C viene 3/8 perché P(A) = 1/2 ma P(C) considera la probabilità che w3 = 0, cioè che il terzo carattere sia uguale a zero, che infatti accade 3 volte su 4, dunque 3/4. Da qui → 1/2 * 3/4 = 3/8

Esercizio 12. Sia $q \in (0,1)$. Definiamo la funzione $p \colon \mathbb{N} \to [0,1]$ mediante

$$p(k) \doteq q(1-q)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si verifichi che p è una densità discreta su $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Sia $\mathbf{P}$ la misura di probabilità su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ indotta da p. Si dimostri che per ogni $n, m \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathbf{P}\left(\{k \in \mathbb{N} : k > n + m\} \,\middle|\, \{k \in \mathbb{N} : k > m\}\right) = \mathbf{P}\left(\{k \in \mathbb{N} : k > n\}\right).$$

Di quale proprietà e di quale distribuzione si tratta?

La distribuzione in questione è la *geometrica*.

$q \in (0,1)$ $\quad p(k) = \begin{cases} q(1-q)^{k-1} & \text{se } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

p densità discreta della Geo (q) $\quad$ Per $m, n \in \mathbb{N}_0$: $P\{k \in \mathbb{N}; k > n+m\}$ $\{k \in \mathbb{N}, k > m)$

$\dfrac{P(\{k \in \mathbb{N}; k > n+m\})}{P(\{k \in \mathbb{N}: k > m\})}$ $\quad \rightarrow q(1-q)^{l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k$ (SERIE GEOMETRICA

$= \dfrac{(1-q)^{n+m}}{(1-q)^{m}} = (1-q)^{n}$

Esercizio 13 (Problema 3.38 in Ross, "Probabilità e Statistica", terza edizione). "Due palline vengono tinte con vernice nera o dorata, ciascuna con probabilità 1/2 e indipendentemente l'una dall'altra. Esse vengono poi inserite in un'urna.

(a) Supponi di sapere per certo che la vernice dorata sia stata usata (e quindi vi è almeno una pallina di questo colore). Calcola la probabilità condizionata che entrambe le palline siano dorate.

(b) Supponi adesso che l'urna venga scossa violentemente, e ne esca una pallina dorata. Qual è la probabilità condizionata che anche l'altra pallina lo sia?

(c) Spiega come mai nei due punti precedenti hai ottenuto lo stesso numero / un numero diverso."

Infine, si scelga una spazio di probabilità $(\Omega, \mathbf{P})$ discreto che rappresenti l'esperimento aleatorio descritto sopra, e si definiscano gli eventi d'interesse come sottoinsiemi di Ω.

Sol: a. Consideriamo gli eventi

F = "entrambe le palline sono dorate" con $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{4}$

E = "almeno una pallina è dorata" con $\mathbb{P}(E) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(F|E) = \dfrac{\mathbb{P}(F \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \dfrac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$

b. Consideriamo l'evento

A = "la pallina fuoriuscita è dorata"

B = "la pallina nell'urna è dorata"

1° MODO: Poiché le palline sono colorate in modo indipendente, si ha: $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

2° MODO: $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(A)}$

Per calcolare $\mathbb{P}(A)$, consideriamo gli eventi
D_j = "j-palline sono dorate" con $j = 0, 1, 2$
Allora, per la formula delle probabilità totali

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}(A \mid D_j) \cdot \mathbb{P}(D_j) = 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

dunque $\mathbb{P}(B/A) = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$

8

c. In a. e b. sono state ottenute valori diversi.
Infatti in a., l'evento E su cui stiamo condizionando non stabilisce quale delle palline dorate, e ammette le 3 possibilità:

$(\overset{1^o}{D}, \overset{2^o}{N})$, $(\overset{1^o}{N}, \overset{2^o}{D})$, $(\overset{1^o}{D}, \overset{2^o}{D})$ ← coppie di valori di colore per la 1° e la 2° pallina

Invece in b., l'evento A crea una distinzione tra le palline (estratta e non estratta), e ammette le 2 possibilità: $(\overset{u}{N}, \overset{e}{D})$, $(\overset{u}{D}, \overset{e}{D})$

coppie di valori di colore per pallina nell'urna e pallina estratta

#