FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

Sia X una variabile aleatoria discreta reale.
La funzione di ripartizione è $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- $F_X(x)$ è crescente, continua da dx, $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} F_X(x) = 0, 1$

Questa funzione determina la distribuzione di una variabile aleatoria reale discreta

PROPRIETÀ : $1 - F_X(x) = P(X > n)$

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

F_X DI $\text{unif}(a,b)$ $\quad F_X = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } x \in [a,b] \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$

F_X DI $\text{Exp}(\lambda)$ $\quad F_X = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

F_X DI Normale $N(\mu, \sigma^2)$ $\quad F_X(z) = \int_{-\infty}^{z} f_{N(\mu,\sigma^2)}(y)\, dy$

$$z \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(z) =$$

$$f_{N(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \text{densità}$$

μ: media
σ^2: varianza

$$F_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\left(\frac{y-\mu}{2\sigma^2}\right)^2} dy$$

F_X DI POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

F_X BINOMIALE

$$F(X = k) = P(X \le k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Poisson $\sim$ Binomiale

DISTRIBUZIONE DI BERNOULLI

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

La distribuzione è determinata completamente dal parametro $p = p_X(1) \in [0, 1]$ dal momento che $p_X(0) = 1 - p$ e $p_X(x) = 0$ se $x \notin \{0, 1\}$

La densità discreta è data da:

$$p_X(k) = p_{Be(p)}(k) := (1-p)1_{\{0\}}(k) + p1_{\{1\}}(k) = \begin{cases} 1-p & \text{se } k = 0 \\ p & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Dato che $X^2 = X$ quasi certamente, è immediato

$$\underline{E[X] = E[X^2] = p}$$ e dunque

$$\underline{\mathrm{var}(X) = E[X^2] - (E(X))^2 = p(1-p)}$$

Ogni variabile aleatoria X di Bernoulli è quasi certamente uguale a una variabile aleatoria indicatrice.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Dati $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0, 1]$, la v.a. X è binomiale di parametri n e p se ha densità discreta data da

$$p_X(k) = p_{Bin(n,p)}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbb{1}_{\{0,\dots,n\}}(k)$$

Si noti che $X(\Omega) = \{0, 1, \dots n\}$. Nel caso $n = 1$ ritroviamo le variabili di Bernoulli:
$Bin(1, p) = Be(p)$

PROVE RIPETUTE E INDIPENDENTI Siano $X_1 \dots X_n$ v.a. $Be(p)$ indipendenti. Allora $X_1 + \dots + X_n \sim Bin(n, p)$. Per calcolare media, varianza è meglio usare questa caratterizzazione.
Siano infatti $X_1 \dots X_n$ v.a. indipendenti con $X_i \sim Be(p)$. Allora $X := X_1 + \dots + X_n \sim Bin(n, p)$ e per la linearità della media,

$$\boxed{\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + \dots + X_n] = np \\ var(X) &= \sum_{i=1}^{n} var(X_i) = np(1-p) \end{aligned}}$$

$\leftarrow$ VALORE ATTESO

$\leftarrow$ VARIANZA

DISTRIBUZIONE DI RADEMACHER

La densità discreta è data da:

$$p_X(z) = \begin{cases} q & \text{se } z = 1 \\ 1-q & \text{se } z = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad q \in [0,1]$$

$\Downarrow$
PARAMETRO

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Dato $\lambda \in (0, \infty)$ diremo che una v.a. X è di Poisson di parametro λ ($X \sim Pois(\lambda)$) se la densità di X è data da

$$p_X(k) = p_{Pois(\lambda)}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(k)$$

Dato che $X(\Omega) \cdot \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ possiamo riformulare la convergenza:

Sia $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $(0,1)$ tale che $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ con $\lambda \in (0, \infty)$ (ossia $\lim_{n \to \infty} n p_n = \lambda$) Allora

$$\lim_{n \to \infty} p_{Bin(n, p_n)}(k) = p_{Pois(\lambda)}(k)$$

PROPRIETÀ: $\underline{E[X] = \lambda}$, $E[X^2] = \lambda + \lambda^2$

$\underline{var(X) = \lambda}$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

Densità data da:

$k \in [0,1]$

$$p_X(k) = p_{Geo(p)}(k) := p(1-p)^{k-1} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)$$

X calcolo l'indice del primo successo

PROPRIETÀ: $E[X] = \frac{1}{k}$, $E(X^2) = \frac{(2-k)}{k^2}$

$$var(X) = \frac{1-k}{k^2}$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

discreta su $A \subseteq \mathbb{R}$ con $|A| < \infty$

$$p_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{|A|} & \text{se } z \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$A = \{1, 2 \dots n\}$

$\downarrow$

PROPRIETÀ: $E(X) = \frac{n+1}{2}$, $E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{3}$

TEOREMI LIMITE

APPLICAZIONE: Successioni di variabili aleatorie reali definite in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ che hanno le stesse distribuzioni marginali, con valor medio finito. Misurazioni successive di una stessa grandezza fisica. Viene considerata la media aritmetica dei risultati $\overline{X_n}$

LEGGE DEI GRANDI NUMERI (debole)

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ successione in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $E[X_i] = \mu$

la successione soddisfa tale legge se

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

(forte): $P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \overline{X_n}(\omega) = \mu) = 1$

La legge afferma che per $n \to \infty$ la media campionaria converge verso μ.

La legge è valida se le variabili sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione.

PROPRIETÀ $E[X_i] = \mu$ $\quad var(X_i) = \sigma^2 \in [0, \infty)$

$cov(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

$E[\bar{X}_n] = \mu$

$$var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n^2}\left(\Sigma\, Var(X_i) + \Sigma(cov(X_i, X_j))\right)$$

Applicando Chebyshev a $\overline{X_n}$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

SUCCESSIONI CON $P(C_i) = p \in [0,1]$ - prove ripetute e indipendenti

le funzioni indicatrici hanno distrib. di Bernoulli

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad e\ Be(p) \sim Bin(n,p)$$

TEOREMA LIMITE CENTRALE

APPLICAZIONE: vedere quanto velocemente $(\bar{X}_n - \mu) \to 0$ nella legge dei grandi numeri

$\mu = E[X_i]$, $\sigma^2 = Var(X_i)$

$\mu = E[\bar{X}_n]$, $\sigma^2/n = var(\bar{X}_n)$

$E[\bar{X}_n - \mu) = 0$, $Var(\bar{X}_n - \mu) = Var(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$

Per n grande $(\bar{X}_n - \mu)$ è molto piccola. Si può amplificare moltiplicandola per $\sqrt{n}/\sigma$ così da ottenere una quantità con varianza unitaria.

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(x_n - \mu)$$

$E[Z_n] = 0$ $\qquad$ $var(Z_n) = 1$

<u>TEOREMA</u>: $\lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq x) = P(Z \leq x)$

Afferma che la successione converge, la funzione di ripartizione F_{Z_n} converge verso un limite non degenere che risulta essere la funzione di ripartizione della normale standard. $Z \sim N(0,1)$

<u>SOMME DI SUCCESSIONI</u> $\qquad \bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$

$E(S_n) = n\mu$ $\qquad$ $var(S_n) = n\sigma^2$

$$\bar{Z}_n = \frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{var(S_n)}} = \bar{S}$$

$\hookrightarrow \bar{X}_n$ $\qquad$ $\sqrt{n\sigma^2}$

APPROSSIMAZIONE NORMALE

APPLICAZIONE : con il teorema del limite centrale è possibile calcolare in modo approssimato la probabilità di interesse

$Z \sim N(0,1) \longrightarrow$ variabile aleatoria normale standard.

$\Phi : \mathbb{R} \to (0,1) \longrightarrow$ funzione di ripartizione di Z

$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \, dt \longrightarrow$ strettamente crescente

Sia X_i successione di v.a. i.i.d. con

$E[X_i] = \mu$, $var(X_i) = \sigma^2$

$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ Il teorema limite centrale afferma

$\lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x) = P(Z \leq x)$

$P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)$

$\limsup_{n \to \infty} P(Z_n < x) \leq \Phi(x)$

per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $P(Z_n < x) \geq P(Z_n \leq x - \varepsilon)$

SOMMA DI SUCCESSIONI :

$$P(S_n \leq s) = P\left(Z_n \leq \frac{s - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{s - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$P(S_n \geq x) = 1 - P(S_n < x)$

se $\frac{s - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} < 0 \rightarrow \Phi(-\lambda) = 1 - \Phi(\lambda)$ boh