Francesco Caravenna   Paolo Dai Pra

Probabilità

Soluzioni degli esercizi

28 agosto 2013

Springer

Indice

Capitolo 1
Spazi di probabilità discreti: teoria

1.1 Modelli probabilistici discreti

Esercizio 1.1. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e siano $A, B \subseteq \Omega$ eventi.

(i) Si mostri che se $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 0$ allora $\mathrm{P}(A \cup B) = 0$.
(ii) Si mostri che se $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1$ allora $\mathrm{P}(A \cap B) = 1$.

Soluzione 1.1. (1) Poiché ogni probabilità è sub-additiva (Proposizione 1.16 (ii)),

$$\mathrm{P}(A \cup B) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 0.$$

(2) Per il punto precedente, $\mathrm{P}(A^c \cup B^c) = 0$. Ma, essendo $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, si ha

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 1 - \mathrm{P}(A^c \cup B^c) = 1.$$

Esercizio 1.2. Rafforziamo l'esercizio precedente. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia *numerabile* di eventi.

(i) Si mostri che se $\mathrm{P}(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathrm{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.
(ii) Si mostri che se $\mathrm{P}(A_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathrm{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$.

Soluzione 1.2. Si argomenta in modo analogo all'esercizio precedente, osservando che, per sub-additività numerabile (Corollario 1.20),

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_n) = 0,$$

e che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c$$

Esercizio 1.3. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $C \subseteq \Omega$ un evento.

(i) Si mostri che, se $\mathrm{P}(C) = 1$, allora $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.
(ii) Si mostri che, se $\mathrm{P}(C) = 0$, allora $\mathrm{P}(A \cup C) = \mathrm{P}(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.

Soluzione 1.3. (1) Basta osservare che

$$\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A \cap C^c) = 0$$

essendo $A \cap C^c \subseteq C^c$ e $\mathrm{P}(C^c) = 0$.

(2) In modo analogo,

$$\mathrm{P}(A \cup C) - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C \cap A^c) = 0$$

essendo $C \cap A^c \subseteq C$ e $\mathrm{P}(C) = 0$.

Esercizio 1.4 (Disuguaglianza di Bonferroni). Siano $A_1, \ldots, A_n$ eventi di uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)\,.$$

In particolare, se $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = 0$ per $i \neq j$, si deduca che $\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)$.

Soluzione 1.4. Se $n = 1$ la disuguaglianza da dimostrare si riduce a

$$\mathrm{P}(A_1) \geq \mathrm{P}(A_1),$$

banalmente vera. Assumiamo la disugliaglianza vera per n. Ricordando l'identità $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ (Proposizione 1.16 (ii)),

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathrm{P}\left((\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cup A_{n+1}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right).$$

Ora, per il termine $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ usiamo l'ipotesi induttiva:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)\,.$$

mentre per il termine $\mathrm{P}\left((\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cap A_{n+1}\right)$ usiamo la sub-additività (Corollario 1.20)

$$\mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k \cap A_{n+1}).$$

Mettendo tutto assieme otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.5. Con le stesse notazioni dell'Esempio 1.14, si mostri che

$$
\lim_{\beta\to+\infty} \mathrm{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{|M|}\,, \qquad \forall \omega \in M\,. \tag{1.17}
$$

Possiamo dire che, per $\beta \to +\infty$, la probabilità P_β "converge" (nel senso della relazione (1.17)) verso la probabilità uniforme sull'insieme M.

Soluzione 1.5. Se $\omega \in M$, cioè $H(\omega) = m$, si ha

$$
\mathrm{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{e^{-\beta H(\omega)}}{\sum_{\sigma\in\Omega} e^{-\beta H(\sigma)}} = \frac{1}{\sum_{\sigma\in\Omega} e^{-\beta[H(\sigma)-m]}} = \frac{1}{|M| + \sum_{\sigma\notin M} e^{-\beta[H(\sigma)-m]}}\,.
$$

Poiché, per $\sigma \notin M$, $H(\sigma) > m$ e pertanto

$$
\lim_{\beta\to+\infty} e^{-\beta[H(\sigma)-m]} = 0,
$$

si conclude facilmente.

1.2 Calcolo combinatorio

Esercizio 1.6. Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Si mostri che per ogni $A \subset \Omega_1$

$$
\mathrm{P}_1(A) = \mathrm{P}(A \times \Omega_2).
$$

Soluzione 1.6. La conclusione è ovvia una volta osservato che

$$
|A \times \Omega_2| = |A||\Omega_2|.
$$

Esercizio 1.7. Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Si calcoli la probabilità che:

(i) nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);
(ii) nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Soluzione 1.7. Sia S l'insieme delle 52 carte, $\Omega := \{A \subseteq S : |A| = 5\}$, P la probabilità uniforme su Ω.

(i) Sia E = "nelle cinque carte estratte non c'è nessuna coppia". La scelta di un elemento di E^c può essere eseguita in due passi:

(1) Si scelgono 5 *tipi* (ossia numeri o figure) *distinti*; questo può essere fatto in $\binom{13}{5}$ modi diversi.

(2) Una volta eseguita la scelta in (1), si tratta di scegliere per ognuno dei 5 numeri o figure uno dei 4 possibili semi (cuori $\heartsuit$, quadri $\diamondsuit$, fiori $\clubsuit$, picche $\spadesuit$); questo comporta 4^5 esiti distinti della scelta.

Segue dunque che $|E^c| = 4^5\binom{13}{5}$. Pertanto, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio (Teorema 1.26),

$$\mathrm{P}(E) = 1 - \frac{4^5\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.493.$$

(iii) Sia F l'evento "nelle cinque carte estratte c'è esattamente una coppia". La scelta di un elemento di F si può eseguire in tre passi:

(1) si sceglie il numero o figura per la coppia (13 esiti);

(2) fissata la scelta in (1), si scelgono le due carte per la coppia ($\binom{4}{2}$ esiti);

(3) fissate le scelte in (1) e (2), si scelgono 3 carte con numeri o figure distinti e diversi da quello usato per la coppia. Il numero di scelte si determina come al punto (i), ma con 48 carte invece di 52 e 3 carte scelte invece di 5: ci sono dunque $4^3\binom{12}{3}$ esiti possibili.

Quindi $|F| = 13\binom{4}{2}4^3\binom{12}{3}$, da cui segue che

$$\mathrm{P}(F) = \frac{13\binom{4}{2}4^3\binom{12}{3}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.422.$$

Esercizio 1.8. Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

(i) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)

(ii) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?

Soluzione 1.8. (i) Sia

$$\Omega := \{(A_1, A_2, A_3) : A_i \subseteq \{1, 2, \ldots, 30\},\ |A_i| = 10,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j\},$$

e P la probabilità uniforme su Ω. Si noti che Ω è formato da *terne ordinate* di sottoinsiemi che formano una partizione dell'insieme $\{1, 2, \ldots, 30\}$. (Non sarebbe affatto sbagliato considerare terne non ordinate.) Non è restrittivo assumere che Giacomo, Claudio e Nicola corrispondano rispettivamente agli elementi $1,2$ e 3 di $\{1,2,\dots,30\}$. Un elemento di Ω si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo A_1: $\binom{30}{10}$ esiti.
- Scelgo A_2 da $\{1,2,\dots,30\} \setminus A_1$: $\binom{20}{10}$ esiti.

Ovviamente A_3 resta determinato. Quindi, per il Teorema 1.26,

$$|\Omega| = \binom{30}{10}\binom{20}{10}.$$

Consideriamo ora l'evento $B =$ "Giacomo, Claudio e Nicola finiscono in tre gruppi distinti". Un elemento di B si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo 9 elementi per A_1 in $\{4,5,\dots,30\}$: $\binom{27}{9}$ esiti.
- Scelgo 9 elementi per A_2 in $\{4,5,\dots,30\} \setminus A_1$: $\binom{18}{9}$ esiti.
- Scelgo come disporre $1,2$ e 3 nei tre posti vuoti: $3! = 6$ esiti.

Dunque:

$$|B| = 6\binom{27}{9}\binom{18}{9} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(B) = \frac{6\binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}} \simeq 0.246.$$

(ii) Sia $C =$ "Giacomo, Claudio e Nicola finiscono nello stesso gruppo". Un elemento di C si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo il gruppo in cui inserire Giacomo, Claudio e Nicola: 3 esiti.
- Scelgo i rimanenti componenti di quel gruppo: $\binom{27}{7}$ esiti.
- Scelgo i componenti di uno (qualsiasi) degli altri due gruppi: $\binom{20}{10}$ esiti.

Dunque

$$\mathrm{P}(C) = \frac{3\binom{27}{7}\binom{20}{10}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}} = \frac{3\binom{27}{7}}{\binom{30}{10}} \simeq 0.089.$$

1.3 Probabilità condizionale e indipendenza

Esercizio 1.9. Si mostri, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A)$ e $\mathrm{P}(A|B) < \mathrm{P}(A)$ sono possibili.

Soluzione 1.9. Si consideri un qualsiasi spazio di probabilità (Ω, P) in cui vi sia un evento B per cui $\mathrm{P}(B) \in (0,1)$. (Ad esempio, si consideri l'insieme $\Omega = \{0,1\}$ munito della probabilità P uniforme, e sia $B := \{0\}$, così che $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.) Posto $A = B$, si ha

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|B) = 1 > \mathrm{P}(A),$$

mentre, posto $A = B^c$, si ha

$$P(A|B) = P(B^c|B) = 0 < P(A).$$

Esercizio 1.10. Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Si mostri che

(i) $A \cap B$ è indipendente da C.
(ii) $A \cup B$ è indipendente da C.

Soluzione 1.10. (i) Quasi ovvio:

$$P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C) = P(A \cap B)\,P(C).$$

(ii) Per la Proposizione 1.64, è equivalente dimostrare che $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ è indipendente da C. Poichè gli eventi A^c, B^c, C sono indipendenti (ancora per la Proposizione 1.64), ci siamo ricondotti al caso precedente visto in (i).

Esercizio 1.11. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti tali che $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1$. Si mostri che esiste $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(A_k) = 1$.

Soluzione 1.11. Usando la Definizione 1.62 di indipendenza di eventi, e il fatto che l'indipendenza di n eventi implica l'indipendenza dei loro complementari (Proposizione 1.64), abbiamo che

$$0 = P\left((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c\right) = P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k^c).$$

Poiché un prodotto di numeri reali vale zero se e solo se uno dei fattori vale zero, segue che esiste $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(A_k^c) = 0$, cioè $P(A_k) = 1$.

Esercizio 1.12. Siano assegnati tre numeri: $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ e $\beta \in (0,1)$. Si mostri che esiste uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) contenente due eventi A, B tali che

$$P(B) = \beta\,, \qquad P(A|B) = \alpha_1\,, \qquad P(A|B^c) = \alpha_2\,.$$

[*Sugg.* Si consideri $\Omega = \{ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b}\} = \{a, \bar{a}\} \times \{b, \bar{b}\}$, definendo $A := \{ab, a\bar{b}\}$, $B := \{ab, \bar{a}b\}$ e mostrando che esiste un'unica probabilità P su Ω che soddisfa le specifiche richieste.]

Soluzione 1.12. Basta definire la densità discreta $p(\omega) := P(\{\omega\})$. Se devono valere le relazioni

$$P(B) = \beta\,, \qquad P(A|B) = \alpha_1\,, \qquad P(A|B^c) = \alpha_2\,, \tag{S1.1}$$

si deve avere necessariamente

$$p(ab) \;=\; P(\{ab\}) \;=\; P(A \cap B) \;=\; P(B)\,P(A|B) \;=\; \beta\,\alpha_1\,.$$

Con analoghi calcoli, si ricavano tutti i valori di p:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(ab) &= \alpha_1\beta\,, & \mathrm{p}(a\bar{b}) &= \alpha_2(1-\beta)\,, \\ \mathrm{p}(\bar{a}b) &= (1-\alpha_1)\beta\,, & \mathrm{p}(\bar{a}\bar{b}) &= (1-\alpha_2)(1-\beta)\,. \end{aligned}$$

Dunque la densità discreta p è univocamente determinata dalle richieste del problema (S1.1). Viceversa, è immediato verificare che la funzione p *definita* come sopra è effettivamente una densità discreta (Definizione 1.9), ossia $\mathrm{p}(\omega) \geq 0$ per ogni $\omega \in \Omega$ e $\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{p}(\omega) = 1$, e valgono le proprietà richieste (S1.1).

Esercizio 1.13 (Paradosso dei tre prigionieri). Tre prigionieri (A, B, C) sono condannati all'impiccagione. Il sovrano decide di graziare uno dei tre scelto a caso, ma il nome del fortunato verrà comunicato soltanto alla vigilia dell'esecuzione. Il prigioniero A si avvicina al secondino, che conosce il nome del graziato, e gli dice: "Per favore, comunicami un nome, tra B e C, che verrà sicuramente impiccato. È noto che almeno uno di loro due sarà impiccato, pertanto non mi fornisci alcuna informazione dicendomelo". Il secondino ci pensa, trova l'argomento sensato e risponde: "B verrà impiccato". A questo punto A esclama: "Evviva! Visto che B verrà impiccato, restiamo in gioco solo io e C, pertanto ho il 50% di probabilità di essere graziato, mentre in precedenza ne avevo solo $\frac{1}{3}$." Questo argomento è corretto?

Soluzione 1.13. Come nel paradosso di Monty-Hall (Esempio 1.71) è importante specificare in che modo il secondino sceglie il nome da comunicare ad A. L'opzione più naturale è che il secondino comunica B con probabilità 1 se il graziato è C, e con probabilità $\frac{1}{2}$ se il graziato è A. Se allora consideriamo gli eventi E_x = "x viene graziato", per $x \in \{A,B,C\}$, e F = "il secondino comunica che B verrà impiccato", abbiamo

$$\mathrm{P}(E_A) = \mathrm{P}(E_B) = \mathrm{P}(E_C) = \frac{1}{3},$$

e

$$\mathrm{P}(F|E_A) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(F|E_B) = 0, \quad \mathrm{P}(F|E_C) = 1.$$

Pertanto, sapendo che il secondino comunica che B verrà impiccato, la probabilità (condizionale) che A sia graziato vale

$$\mathrm{P}(E_A|F) = \frac{\mathrm{P}(F|E_A)\,\mathrm{P}(E_A)}{\mathrm{P}(F|E_A)\,\mathrm{P}(E_A) + \mathrm{P}(F|E_B)\,\mathrm{P}(E_B) + \mathrm{P}(F|E_C)\,\mathrm{P}(E_C)} = \frac{1}{3},$$

ossia la stessa che aveva in partenza. L'argomento di A è dunque sbagliato.

Esercizio 1.14 (Paradosso delle tre carte). Infilo in una busta tre carte: una ha entrambe le facce rosse, una le ha entrambe nere, una ha una faccia rossa e una nera. Con gli occhi chiusi, pesco una carta a caso e la depongo sul tavolo su una faccia a caso, quindi apro gli occhi. Se la faccia che vedo è rossa, qual è la probabilità che anche l'altra faccia sia rossa?

Soluzione 1.14. Consideriamo gli eventi: NN = "la carta pescata è quella con due facce nere", RR = "la carta pescata è quella con due facce rosse", NR = "la carta pescata è quella con una faccia rossa e una nera", R = "la faccia che vedo è rossa". Per ipotesi si ha

$$\mathrm{P}(NN) = \mathrm{P}(RR) = \mathrm{P}(NR) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(R|NN) = 0, \quad \mathrm{P}(R|RR) = 1, \quad \mathrm{P}(R|NR) = \frac{1}{2}.$$

Quindi, la probabilità cercata è, usando la Formula di Bayes (Teorema 1.49, nella versione della formula (1.41)),

$$\mathrm{P}(RR|R) = \frac{\mathrm{P}(R|RR)\,\mathrm{P}(RR)}{\mathrm{P}(R|RR)\,\mathrm{P}(RR) + \mathrm{P}(R|NN)\,\mathrm{P}(NN) + \mathrm{P}(R|NR)\,\mathrm{P}(NR)} = \frac{2}{3}.$$

1.4 Esercizi di riepilogo

Esercizio 1.15. Siano A, B eventi. Ricordando che $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, si mostri che

$$\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\,\mathrm{P}(A \cap B).$$

Siano ora A, B, C tre eventi. Si mostri che

$$\mathrm{P}(A \triangle C) \leq \mathrm{P}(A \triangle B) + \mathrm{P}(B \triangle C).$$

Soluzione 1.15. Per la prima parte, si noti che

$$A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B),$$

e quest'ultima è un'unione disgiunta. Perciò, per l'additività della probabilità,

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A \triangle B) + \mathrm{P}(A \cap B),$$

ossia $\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A \cap B)$, e si conclude usando l'identità

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\,,$$

vista nella Proposizione 1.16 (ii).

Per la seconda parte, basta notare che

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C),$$

come si verifica facilmente. La disuguaglianza cercata segue per subadditività della probabilità (si veda di nuovo la Proposizione 1.16 (ii)).

Esercizio 1.16. Siano A e B due eventi arbitrari di uno spazio di probabilità (Ω, P). Si dimostri la disuguaglianza

$$\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1.$$

Si mostri quindi per induzione che, per ogni $n \geq 2$ e per ogni scelta degli eventi

$A_1, A_2, \ldots, A_n$, si ha

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - (n-1).$$

Soluzione 1.16. Per il caso $n = 2$, basta osservare che

$$1 \geq \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Per $n > 2$, si procede per induzione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathrm{P}[(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n] \\
&\geq \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) + \mathrm{P}(A_n) - 1 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{P}(A_i) - (n-2) + \mathrm{P}(A_n) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - (n-1),
\end{aligned}$$

dove abbiamo prima usato il risultato per $n = 2$ e poi l'ipotesi induttiva.

Esercizio 1.17. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, a caso, tre carte. Si calcoli la probabilità che:

(i) tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
(ii) le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
(iii) almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Soluzione 1.17. (i) Ω è l'insieme dei sottoinsiemi di tre elementi del mazzo di 52 carte, quindi $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Il numero di modi di scegliere 3 carte in modo che non vi sia alcun asso è $\binom{48}{3}$. Quindi, la probabilità richiesta è

$$1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

(ii) Sia A l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità. Scegliere un elemento di A significa innanzitutto scegliere 3 dei 4 semi disponibili ($\binom{4}{3}$ esiti); una volta scelti i semi, ognuna delle 3 carte può essere scelta in 13 modi possibili. Dunque, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio (Teorema 1.26),

$$|A| = \binom{4}{3} 13^3$$

che, divisa per $|\Omega| = \binom{52}{3}$, dà la probabilità richiesta.

(iii) Se B è l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità, $B^c =$ "le tre carte scelte hanno numero diverso". Scegliere un elemento di B^c significa scegliere innanzitutto tre tipi (numero o figura) tra i 13 disponibili ($\binom{13}{3}$ scelte); fissati i tre tipi, ogni carta può essere scelta in 4 modi diversi. Dunque

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{13}{3}4^3}{\binom{52}{3}}.$$

Esercizio 1.18. Un mazzo di 52 carte da Poker viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Soluzione 1.18. Ci sono $\binom{52}{26}$ modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Dato che ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte, se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una parte in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. In definitiva:

$$P(\text{ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero}) = \frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.218.$$

Esercizio 1.19. Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Soluzione 1.19. Possiamo scegliere $\Omega =$ insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti, munito della probabilità uniforme. Se A è l'evento in questione, A^c è l'insieme dei sottoinsiemi di r elementi degli $n-m$ biglietti non vincenti. Allora

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}}.$$

Esercizio 1.20. Si mescolano n paia di guanti, che vengono poi distribuiti a caso a n persone, due guanti per ciascuno. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Soluzione 1.20. Numeriamo i guanti da 1 a $2n$ (da 1 a n i guanti destri), e le persone da 1 a n. Se $\sigma \in S_{2n}$ (l'insieme delle permutazioni di $\{1,\dots,2n\}$), la sequenza $(\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(2n))$ rappresenta l'ordine in cui i guanti vengono distribuiti, con la convenzione che $\sigma(2k-1),\sigma(2k)$ siano i guanti consegnati alla persona k. Denotiamo con P la probabilità uniforme su S_{2n}, e sia A l'evento costituito da quegli elementi di S_{2n} per cui ognuno riceva un guanto destro e uno sinistro. Ogni elemento di A è univocamente individuato da uno schema di scelte successive (si veda il Teorema 1.26), scegliendo successivamente le coppie ordinate $(\sigma(2k-1),\sigma(2k))$, per $k = 1,2,\dots,n$. La scelta della prima coppia $(\sigma(1),\sigma(2))$ ha $2n^2$ esiti possibili: si sceglie prima un guanto destro (n modi) e poi uno sinistro (n modi), oppure viceversa. Similmente, la scelta della seconda coppia $(\sigma(3),\sigma(4))$ ha $2(n-1)^2$ esiti possibili; più in generale, la scelta della k-esima coppia $(\sigma(2k-1),\sigma(2k))$ ha $2(n-k+1)^2$ esiti possibili. Ne segue che

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} 2(n-k+1)^2 = \big(2n^2\big)\big(2(n-1)^2\big)\cdots\big(2\big) = 2^n(n!)^2,$$

e quindi

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}.$$

Esercizio 1.21. Si esegua una permutazione casuale dei numeri $\{1,2,\ldots,n\}$. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Soluzione 1.21. Sia $\Omega = S_n$ l'insieme delle permutazioni degli n numeri, e sia

$$A := \{\sigma \in \Omega : \sigma(2) = \sigma(1)+1\}.$$

Ogni elemento di A è individuato dal seguente schema di scelte successive:

(i) i valori della coppia $(\sigma(1),\sigma(2))$ possono essere scelti in $n-1$ modi possibili, ossia $(1,2)$, $(2,3)$, $\ldots$, $(n-1,n)$;
(ii) i valori di $\sigma(i)$, $i>2$ si possono scegliere a piacere in $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{\sigma(1),\sigma(2)\}$, il che si può fare in $(n-2)!$ modi diversi.

Dunque

$$\mathrm{P}(A) = \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Esercizio 1.22. Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1,2,\ldots,n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, diciamo che l'insieme I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con $A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Indicando con P la probabilità uniforme su S_n, si calcoli $\mathrm{P}(A_I)$.

Soluzione 1.22. Si osservi che I è stabile per σ se e solo se σ è dato dalla composizione di una permutazione di I con una permutazione di I^c. Quindi $|A_I| = |I|!(n-|I|)!$, da cui

$$\mathrm{P}(A_I) = \frac{|I|!(n-|I|)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{|I|}}.$$

Esercizio 1.23. Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Si determini la probabilità p_n che gli n oggetti estratti siano tutti diversi. Usando la formula di Stirling (1.20), si determini quindi il comportamento asintotico di p_n per $n \to +\infty$, mostrando che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_{n\to\infty} p_n/(c\rho^n) = 1$) e calcolando i valori di c e ρ.

Soluzione 1.23. Il numero di sequenze di n estrazioni in cui gli oggetti estratti siano tutti diversi è

$$2n(2n-1)\cdots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Perciò

$$p_n = \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}.$$

Usando la Formula di Stirling

$$p_n = \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}e^{\theta(2n)/12n}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta(n)/12n}(2n)^n} \sim \sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^n,$$

cioè $c = \sqrt{2}$ e $\rho = 2/e$.

Esercizio 1.24. Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n-k$ verdi, con $1 \le k \le n-1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

$$A_1 := \text{"la prima pallina estratta è rossa"},$$
$$A_2 := \text{"la seconda pallina estratta è rossa"}.$$

Si mostri che gli eventi A_1 e A_2 non sono indipendenti.

Soluzione 1.24. Basta osservare che

$$\mathrm{P}(A_1|A_2) = \frac{k-1}{n-1} \neq \frac{k}{n} = \mathrm{P}(A_1).$$

Esercizio 1.25. Si voglia illuminare una stanza con un certo numero di lampadine. Assumiamo che la probabilità che una lampadina sopravviva almeno n giorni vale p^n, con $p = 0.9$. Si può ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine occorre installare affinché, con probabilità almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?

Soluzione 1.25. La probabilità che dopo 10 giorni tutte le N lampadine installate abbiano smesso di funzionare è $(1-p^{10})^N$. Perciò

$$(1-p^{10})^N \le 0.01 \iff N \ge \frac{\log(0.01)}{\log(1-p^{10})} \simeq 10.7.$$

Esercizio 1.26. Si mostri la seguente *formula di disintegrazione per la probabilità condizionale*: dati tre eventi A,B,C tali che $\mathrm{P}(B\cap C) > 0$ e $\mathrm{P}(B\cap C^c) > 0$, si ha

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B\cap C)\,\mathrm{P}(C|B) + \mathrm{P}(A|B\cap C^c)\,\mathrm{P}(C^c|B).$$

Soluzione 1.26. Si osservi che

$$\mathrm{P}(A|B\cap C)\,\mathrm{P}(C|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B\cap C)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Moltiplicando l'identità da dimostrare per $\mathrm{P}(B)$, segue che essa è equivalente a

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A\cap B\cap C) + \mathrm{P}(A\cap B\cap C^c),$$

che è vera per additività della probabilità.

Esercizio 1.27. Una compagnia di assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: “basso rischio”, “medio rischio” e “alto rischio”. Dei suoi assicurati, il 75% sono a “basso rischio”, il 20% a “medio rischio” e il restante 5% ad “alto rischio”.

È noto che gli assicurati a “basso rischio” hanno una probabilità del 2% di subire un danno che prevede il pagamento dell’assicurazione, mentre tale probabilità è del 10% per gli assicurati a “medio rischio” e del 20% per quelli ad “alto rischio”.

(i) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell’assicurazione?

(ii) Se un individuo reclama il pagamento dell’assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad “alto rischio”?

Soluzione 1.27. (i) Consideriamo gli eventi: $A_1 =$ “l’individuo scelto è della categoria “basso rischio” ”; $A_2 =$ “l’individuo scelto è della categoria “medio rischio” ”; $A_3 =$ “l’individuo scelto è della categoria “alto rischio” ”; $B =$ “l’individuo reclama il pagamento dell’assicurazione”. Sappiamo che

$$\mathrm{P}(B|A_1) = 0.02, \quad \mathrm{P}(B|A_2) = 0.1, \quad \mathrm{P}(B|A_3) = 0.2,$$
$$\mathrm{P}(A_1) = 0.75, \quad \mathrm{P}(A_2) = 0.2, \quad \mathrm{P}(A_3) = 0.05.$$

Per la formula delle probabilità totali (Proposizione 1.47)

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(B|A_i)\,\mathrm{P}(A_i) = 0.02 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.045.$$

(ii) Usando la Formula di Bayes (Teorema 1.49)

$$\mathrm{P}(A_3|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_3)\,\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.045} = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 1.28. Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l’altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell’incidente era giallo. Sappiamo che i taxi bianchi sono l’85% dei taxi in città. Inoltre, la probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore del taxi è pari a 0.8.

(i) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell’incidente fosse in realtà bianco?

(ii) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell’identificazione del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella del primo. Sulla base di questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell’incidente fosse in realtà bianco?

Soluzione 1.28. (i) Consideriamo gli eventi: $A =$ “il taxi coinvolto è bianco”, $B =$ “il testimone dichiara di aver visto un taxi giallo”. Sappiamo che $\mathrm{P}(A) = 0.85$,

$\mathrm{P}(B|A) = 0.2$, $\mathrm{P}(B|A^c) = 0.8$. Perciò, usando la Formula di Bayes,

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\,\mathrm{P}(A^c)} = \frac{17}{29}.$$

(ii) Sia $C =$ "il secondo testimone dichiara di aver visto un taxi giallo". Per ipotesi $\mathrm{P}(B \cap C|A) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(C|A) = (0.2)^2 = 0.04$ e, analogamente, $\mathrm{P}(B \cap C|A^c) = \mathrm{P}(B|A^c)\,\mathrm{P}(C|A^c) = (0.8)^2 = 0.64$. Allora

$$\mathrm{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathrm{P}(B \cap C|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B \cap C|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \cap C|A^c)\,\mathrm{P}(A^c)} = \frac{17}{65}.$$

Esercizio 1.29. Il Ministero della Pubblica Istruzione vuole stimare la frazione $\alpha \in (0,1)$ di studenti di terza media che hanno preparazione scarsa in matematica. A tal fine, sottopone a un grande numero di studenti un quesito con 10 possibili risposte, di cui una sola è corretta. Assumiamo che gli studenti con una buona preparazione in matematica rispondano correttamente al quesito, mentre quelli con preparazione scarsa diano una risposta scelta a caso (e non esistano altre possibilità). Sottoponendo ad una analisi più approfondita gli studenti che hanno risposto correttamente al quesito, si scopre che tra questi solo l'80% ha una buona preparazione in matematica. Sulla base di queste informazioni, si determini α.

Soluzione 1.29. Immaginiamo di scegliere uno studente a caso e consideriamo gli eventi $A :=$ "lo studente ha una preparazione scarsa in matematica" e $B :=$ "lo studente risponde correttamente al quesito". Secondo i dati forniti dal problema

$$\mathrm{P}(A) = \alpha, \qquad \mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{10}, \qquad \mathrm{P}(B|A^c) = 1, \qquad \mathrm{P}(A^c|B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}.$$

Si ricava quindi

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\,\mathrm{P}(A^c) = \frac{\alpha}{10} + (1-\alpha) = 1 - \frac{9}{10}\alpha,$$

da cui

$$\mathrm{P}(B|A^c) = \frac{\mathrm{P}(A^c|B)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A^c)} = \frac{\frac{4}{5}(1 - \frac{9}{10}\alpha)}{1-\alpha} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{18}{25}\alpha}{1-\alpha},$$

e dato che $\mathrm{P}(B|A^c) = 1$ si ottiene infine

$$\frac{\frac{4}{5} - \frac{18}{25}\alpha}{1-\alpha} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{5}{7} \simeq 71{,}4\%.$$

Esercizio 1.30. Tre urne, etichettate con le lettere α, β, γ, contengono 10 palline ciascuna. Due urne contengono 5 palline rosse e 5 blu, mentre la terza contiene 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale sia l'urna con 3 palline rosse: in assenza di ulteriori informazioni, riteniamo che sia α, β o γ con la stessa probabilità.

Estraiamo ora 2 palline da ognuna delle tre urne. Se dall'urna α abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall'urna β due palline rosse e dall'urna γ due palline blu, qual è la probabilità che l'urna γ sia quella contenente tre palline rosse?

Soluzione 1.30. Per $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, si A_x l'evento "l'urna con 3 palline rosse è l'urna x". Sia inoltre B l'evento "dall'urna α abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall'urna β due palline rosse e dall'urna γ due palline blu". Abbiamo

$$\mathrm{P}(B|A_\alpha) = \frac{3\cdot 7}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{84}{3645}.$$

$$\mathrm{P}(B|A_\beta) = \frac{5\cdot 5}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{243}.$$

$$\mathrm{P}(B|A_\gamma) = \frac{5\cdot 5}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{14}{243}.$$

$$\mathrm{P}(A_x) = \frac{1}{3}$$

per $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. In conclusione, usando la Formula di Bayes,

$$\mathrm{P}(A_\gamma|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_\gamma)\,\mathrm{P}(A_\gamma)}{\sum_{x\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \mathrm{P}(B|A_x)P(A_x)} = \frac{35}{54}.$$

Esercizio 1.31. Un'urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

(i) Si effettuano n estrazioni successive, *con* reimmissione. Si considerino gli eventi

$$B_j := \text{“la } j\text{-esima pallina estratta è bianca”},$$
$$A_m := \text{“delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche”},$$

dove $j, m \leq n$. Si calcoli $\mathrm{P}(B_j|A_m)$.

(ii) Si calcoli la probabilità condizionale del punto precedente nel caso di estrazioni *senza* reimmissione, supponendo che m sia tale che $\mathrm{P}(A_m) > 0$.

Soluzione 1.31. Al solo scopo di semplificare la soluzione (ma si potrebbe fare altrimenti) consideriamo la seguente osservazione, valida sia per il punto (i) che per il punto (ii). Se si considera, nell'insieme Ω delle sequenze possibili di palline estratte, la funzione che scambia la prima pallina estratta con la j-esima, tale funzione è una corrispondenza biunivoca in Ω che manda A_m in sé e B_j in B_1, e quindi manda $B_j \cap A_m$ in $B_1 \cap A_m$. Poichè, sia in (i) che in (ii), la probabilità su Ω è quella uniforme, tale trasformazione non cambia la probabilità degli eventi. In particolare $\mathrm{P}(B_j \cap A_m) = P(B_1 \cap A_m)$. Non è dunque restrittivo assumere che $j = 1$.

(i) Trattandosi di estrazioni con reimmissione, scegliamo come spazio campionario

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, M\}^n,$$

e sia P la probabilità uniforme su esso. Si vede che $B_1 \cap A_m = B_1 \cap A'_m$ dove A'_m = nelle successive $n-1$ estrazioni si estraggono $m-1$ palline bianche. Gli elementi di $B_1 \cap A'_m$ sono individuati dalle seguenti scelte successive:

- Si sceglie la pallina bianca per la prima estrazione.
- Si scelgono altre $m-1$ estrazioni in cui estrarre palline bianche.
- Per ognuna delle estrazioni scelte al punto precedente si sceglie la pallina bianca da estrarre.
- Per ognuna delle rimanenti $n-m$ estrazioni si sceglie una pallina "non bianca" da estrarre.

Si deduce che

$$|B_1 \cap A_m| = M_1 \binom{n-1}{m-1} M_1^{m-1} (M - M_1)^{n-m}.$$

Perciò

$$\mathrm{P}(B_1 \cap A_m) = \frac{|B_1 \cap A_m|}{M^n} = \frac{M_1}{M} \binom{n-1}{m-1} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{M_1}{M}\right)^{n-m}.$$

Dato che

$$\mathrm{P}(A_m) = \binom{n}{m} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{m} \left(1 - \frac{M_1}{M}\right)^{n-m},$$

si trova facilmente

$$\mathrm{P}(B_1 | A_m) = \frac{\mathrm{P}(B_1 \cap A_m)}{\mathrm{P}(A_m)} = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{n}.$$

(ii) Si noti che $\mathrm{P}(A_m | B_1)$ coincide con la probabilità che da un'urna contenente $M-1$ palline di cui $M_1 - 1$ bianche si estraggano $m-1$ palline bianche in $n-1$ estrazioni senza reimmissione. Perciò, ricordando la formula (1.31) (o con un calcolo diretto),

$$\mathrm{P}(A_m | B_1) = \frac{\binom{M_1 - 1}{m-1}\binom{M - M_1}{n-m}}{\binom{M-1}{n-1}}.$$

Essendo, analogamente,

$$\mathrm{P}(A_m) = \frac{\binom{M_1}{m}\binom{M - M_1}{n-m}}{\binom{M}{n}}, \qquad \mathrm{P}(B_1) = \frac{M_1}{M},$$

con facili calcoli si ha

$$P(B_1|A_m) = \frac{P(A_m|B_1)\,P(B_1)}{P(A_m)} = \frac{m}{n},$$

cioè lo stesso risultato ottenuto nel caso di estrazioni con reimmissione.

Esercizio 1.32. Ho due dadi regolari: il dado α ha sei facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 6, mentre il dado β ha dodici facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 12. Scelgo uno dei due dadi a caso, con la stessa probabilità, e lo lancio per n volte, dove $n \in \mathbb{N}$ è un numero fissato.

(i) Qual è la probabilità che tutti i lanci diano come risultato il numero 3?

(ii) Qual è la probabilità che tutti i lanci diano come risultato lo stesso numero?

(iii) Se tutti i lanci danno come risultato il numero 3, qual è la probabilità che il dado scelto sia stato α? Si mostri che tale probabilità (condizionale) è sempre strettamente maggiore di $\frac{1}{2}$ e se ne studi il comportamento per $n \to \infty$.

Soluzione 1.32. (i) Introduciamo gli eventi $A :=$ "il dado scelto è A" e $C :=$ "tutti i lanci danno come risultato il numero 3". Allora $P(A) = \frac{1}{2}$, mentre $P(C|A) = (\frac{1}{6})^n$ e $P(C|A^c) = (\frac{1}{12})^n$, da cui

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|A)\,P(A) + P(C|A^c)\,P(A^c) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12}\right)^n \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{12}\right)^n\right\}. \end{aligned}$$

(ii) Introduciamo l'ulteriore evento $D :=$ "tutti i lanci danno come risultato lo stesso numero". Allora $P(D|A) = 6(\frac{1}{6})^n$ mentre $P(D|B) = 12(\frac{1}{12})^n$, dunque

$$P(D) = P(D|A)\,P(A) + P(D|A^c)\,P(A^c) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\right\}.$$

(iii) Per la Formula di Bayes

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\,P(A)}{P(C)} = \frac{(\frac{1}{6})^n}{(\frac{1}{6})^n + (\frac{1}{12})^n} = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^n} = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

Dato che $2^n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$, segue che $P(A|C) > \frac{1}{2}$ e che $P(A|C) \to 1$ per $n \to \infty$.

Esercizio 1.33. Ho un'urna inizialmente vuota e un insieme di palline numerate coi numeri naturali. Il primo giorno inserisco nell'urna le palline numero 1 e 2, dopodiché ne estraggo una a caso (nell'urna rimane dunque una sola pallina). Il secondo giorno inserisco nell'urna le palline numero 3 e 4, dopodiché estraggo a caso una delle tre palline contenute nell'urna. Itero dunque la procedura: l'i-esimo giorno inserisco nell'urna le palline numero $2i-1$ e $2i$, dopodiché estraggo a caso una delle $i+1$ palline contenute nell'urna.

Si introduca per $i \in \mathbb{N}$ l'evento

$A_i :=$ "la pallina numero 1 è presente nell'urna alla fine dell'i-esimo giorno".

(i) Si spieghi perchè vale l'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e si deduca la formula

$$\mathrm{P}(A_n) \;=\; \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_{n-1}) \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,.$$

(ii) Si mostri che $\mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione 1.33. (i) L'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ è equivalente a $A_i^c \subseteq A_{i+1}^c$, che è immediatamente verificata: infatti se la pallina numero 1 non è presente nell'urna alla fine dell'i-esimo giorno, non potrà ovviamente essere presente alla fine dell'$(i+1)$-esimo.

La formula si dimostra per induzione: per $n \geq 1$, dato che $A_{n+1} \subseteq A_n$, si ha $\mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}(A_{n+1} \cap A_n) = \mathrm{P}(A_n)\,\mathrm{P}(A_{n+1}|A_n)$ e applicando l'ipotesi induttiva per $\mathrm{P}(A_n)$ si conclude.

(ii) Chiaramente $\mathrm{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$ e più in generale $\mathrm{P}(A_i|A_{i-1}) = \frac{i}{i+1}$. Applicando la formula dimostrata al punto a) si ha dunque

$$\mathrm{P}(A_n) \;=\; \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1} \;=\; \frac{1}{n+1} \,.$$

Esercizio 1.34. Si consideri il seguente modello per la distribuzione dei sessi dei figli in una famiglia:

- il primo figlio ha proabilità $\frac{1}{2}$ di essere maschio (o femmina);
- la probabilità che l'$(n+1)$-esimo figlio sia maschio, condizionalmente ai sessi dei figli precedenti, è $\frac{3}{5}$ se l'n-esimo figlio è maschio, $\frac{2}{5}$ se l'n-esimo figlio è femmina.

Si determini quindi:

(i) la probabilità che il primo figlio sia maschio, condizionale al fatto che il secondo è maschio;

(ii) la probabilità che il primo figlio sia maschio, condizionale al fatto che il terzo è maschio.

Soluzione 1.34. (i) Introduciamo gli eventi $A =$ "il primo figlio è maschio" e $B =$ "il secondo figlio è maschio". I dati del problema ci dicono che $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A) = \frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^c) = \frac{2}{5}$. La formula delle probabilità totali dà

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\,\mathrm{P}(A^c) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \,.$$

Applicando quindi la Formula di Bayes si ottiene

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\,.$$

b) Introducendo l'evento $C =$ "il terzo figlio è maschio", dobbiamo calcolare $\mathrm{P}(A|C)$. Si osservi che

$$\mathrm{P}(A|C) = \mathrm{P}(A\cap B|C) + \mathrm{P}(A\cap B^c|C).$$

Per la Formula di Bayes

$$\mathrm{P}(A\cap B|C) = \frac{\mathrm{P}(C|A\cap B)\,\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(C)}.$$

Anzitutto

$$\mathrm{P}(C|A\cap B) = \frac{3}{5}.$$

Inoltre

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A) = \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Infine, per la formula delle probabilità totali,

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C|B)\,\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C|B^c)\,\mathrm{P}(B^c) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Perciò

$$\mathrm{P}(A\cap B|C) = \frac{\frac{3}{5}\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{9}{25}.$$

Lo stesso conto con B^c al posto di B conduce a

$$\mathrm{P}(A\cap B^c|C) = \frac{4}{25},$$

da cui

$$\mathrm{P}(A|C) = \frac{13}{25}.$$

Esercizio 1.35. Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado regolare a sei facce. Se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Soluzione 1.35. Introducendo gli eventi

$T_i \equiv$ "*Rossi parte con l'i-esimo treno*",
$V \equiv$ "*Rossi parte per Roma*",
$N \equiv$ "*Rossi non prende nessuno dei primi 5 treni*"

si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V) &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{P}(T_i) &= \mathrm{P}(T_i \cap V) = \mathrm{P}(T_i|V)\,\mathrm{P}(V) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12} \\
\mathrm{P}(N) &= \mathrm{P}(V^c) + \mathrm{P}(T_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \\
\mathrm{P}(T_6 \mid N) &= \frac{\mathrm{P}(N \mid T_6)\,\mathrm{P}(T_6)}{\mathrm{P}(N)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.36. Antonio e Berta si incontrano per una gara di scacchi. Convengono di fare due partite, assegnando un punto in caso di vittoria, zero punti in caso di sconfitta e mezzo punto in caso di pareggio o patta. Nel caso in cui dopo le due partite i due giocatori abbiano lo stesso punteggio, lanceranno una moneta equilibrata per determinare il vincitore della gara.

Antonio sa giocare con due diversi approcci, uno offensivo e uno difensivo, mentre Berta gioca sempre in maniera offensiva. Se Antonio gioca in maniera offensiva, vince con probabilità $p \in (0,1]$ e perde con probabilità $1-p$. Se invece gioca in maniera difensiva, pareggia con probabilità $q \in (0,1]$ e perde con probabilità $1-q$.

Antonio decide di adottare la seguente strategia. Gioca la prima partita in maniera offensiva. Se perde, gioca anche la seconda in maniera offensiva, mentre se vince gioca la seconda partita in maniera difensiva.

(i) Si calcoli, in termini di p e q, la probabilità p_* che Antonio vinca la gara.
(ii) Si assuma che $q = 0.9$. Per quali valori di p si ha $p_* > \frac{1}{2}$? È possibile che Berta sia la giocatrice più forte — nel senso che ha maggiore probabilità di vincere una partita rispetto ad Antonio — e ciononostante Antonio abbia maggiore probabilità di vincere la gara?

Soluzione 1.36. (1) Antonio vince la gara se si verifica una delle seguenti alternative:

- vince la prima partita e pareggia la seconda;
- vince la prima partita, perde la seconda, e vince nel lancio della moneta;
- perde la prima partita, vince la seconda, e vince nel lancio della moneta.

Pertanto

$$p_* = pq + p(1-q)\frac{1}{2} + (1-p)p\frac{1}{2}.$$

(2) Posto $q = 0.9$, si ha $pq + \frac{1}{2}p(1-q) + \frac{1}{2}p(1-p) > \frac{1}{2}$ se e solo se $p > 0.4$. Quindi se $p \in (0.4, 0.5)$, Berta è più forte ma Antonio ha maggiore probabilità di vincere la gara.

Esercizio 1.37. Una guida alpina organizza abitualmente salite alla cima del Monte Archimede. Talvolta, in presenza di cattive condizioni atmosferiche, la guida decide di tornare prima di aver raggiunto la cima, anche a seconda delle capacità delle persone accompagnate. In caso di pioggia senza raffiche di vento, la guida rinuncia a raggiungere la cima il 20% delle volte; in caso di raffiche di vento ma senza pioggia, la guida rinuncia il 30% delle volte; con pioggia e raffiche di vento, la guida rinuncia l'80% delle volte; infine, se non piove e non ci sono raffiche di vento, la cima viene sicuramente raggiunta. Assumiamo che gli eventi "si trova pioggia lungo il percorso" e "ci sono raffiche di vento lungo il percorso" siano indipendenti e abbiano probabilità rispettivamente 0.3 e 0.2.

Oggi un gruppo è partito con la guida, ma è tornato senza aver raggiunto la cima. Qual è la probabilità che abbia trovato pioggia?

Soluzione 1.37. Consideriamo gli eventi $A =$ "la guida rinuncia a raggiungere la cima", $B =$ "si trova la pioggia lungo il percorso", $C =$ " ci sono raffiche di vento lungo il percorso". Sappiamo che $\mathrm{P}(A|B \setminus C) = 0.2$, $\mathrm{P}(A|C \setminus B) = 0.3$, $\mathrm{P}(A|B \cap C) = 0.8$, $\mathrm{P}(A|B^c \cap C^c) = 0$. Inoltre, $\mathrm{P}(B) = 0.3$ e $\mathrm{P}(C) = 0.2$. Infine, essendo B e C indipendenti

$$\mathrm{P}(B \setminus C) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$$

$$\mathrm{P}(C \setminus B) = \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) = 0.2 \cdot 0.7 = 0.14$$

e, chiaramente $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) = 0.06$. Per la Formula di Bayes

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B|A) &= \mathrm{P}(B \setminus C|A) + \mathrm{P}(B \cap C|A) \\
&= \frac{\mathrm{P}(A|B \setminus C)\,\mathrm{P}(B \setminus C)}{\mathrm{P}(A|B \setminus C)\,\mathrm{P}(B \setminus C) + \mathrm{P}(A|C \setminus B)\,\mathrm{P}(C \setminus B) + \mathrm{P}(A|B \cap C)\,\mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A|B^c \cap C^c)\,\mathrm{P}(B^c \cap C^c)} \\
&+ \frac{\mathrm{P}(A|B \cap C)\,\mathrm{P}(B \cap C)}{\mathrm{P}(A|B \setminus C)\,\mathrm{P}(B \setminus C) + \mathrm{P}(A|C \setminus B)\,\mathrm{P}(C \setminus B) + \mathrm{P}(A|B \cap C)\,\mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A|B^c \cap C^c)\,\mathrm{P}(B^c \cap C^c)} \\
&= \frac{16}{23}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.38. (i) Si dimostri che, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, allora per ogni scelta di $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ si ha

$$\min_{i=1,2,\ldots n} x_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \max_{i=1,2,\ldots n} x_i.$$

(ii) Siano ora $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi *disgiunti* di uno spazio di probabilità (Ω, P), tali che $\mathrm{P}(A_i) > 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Si mostri che per ogni evento B

$$\min_{i=1,2,\ldots n} \mathrm{P}(B|A_i) \leq \mathrm{P}(B|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \max_{i=1,2,\ldots n} \mathrm{P}(B|A_i).$$

Soluzione 1.38. (1) Sia $m := \min_{i=1,2,\ldots n} x_i$.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i m = m.$$

Analogamente per l'altra disuguaglianza.

(2) Si osservi che:

$$\begin{aligned} P(B|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \frac{P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n))}{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(B|A_i), \end{aligned}$$

dove

$$\alpha_i := \frac{P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)}.$$

La conclusione segue allora dal punto precedente.

Esercizio 1.39. Siano A e B due eventi con probabilità non nulla. Diciamo che *A è positivamente correlato a B* se

$$P(A|B) \geq P(A).$$

Si mostri che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti.

(i) *A è positivamente correlato a B.*
(ii) *B è positivamente correlato a A.*
(iii) *A^c è positivamente correlato a B^c.*

Soluzione 1.39. Si osservi che

$$P(A|B) \geq P(A) \iff P(A \cap B) \geq P(A)\,P(B) \iff P(B|A) \geq P(B),$$

che dimostra (i) $\iff$ (ii). Inoltre

$$\begin{aligned} P(A|B) \geq P(A) &\iff P(A \cap B) \geq P(A)\,P(B) \\ &\iff P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A)[1 - P(B^c)] \iff P(A \cap B^c) \leq P(A)\,P(B^c). \end{aligned}$$

Ripetendo lo stesso argomento si trova

$$P(A \cap B^c) \leq P(A)\,P(B^c) \iff P(A^c \cap B^c) \geq P(A^c)\,P(B^c).$$

Mettende assieme queste ultime due equivalenze si conclude che (i) $\iff$ (iii).

Esercizio 1.40. Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non conosciamo la composizione dell'urna e riteniamo che tutti i possibili valori $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

(i) Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?
(ii) Si risponda alla medesima domanda, ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Soluzione 1.40. (i) Definiti gli eventi A = "la pallina estratta è rossa" e B_k = "l'urna contiene k palline rosse", sappiamo che $\mathrm{P}(A|B_k) = \frac{k}{n}$ e $\mathrm{P}(B_k) = \frac{1}{n+1}$. Dunque, per la Formula di Bayes,

$$\mathrm{P}(B_k|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(A|B_j)\,\mathrm{P}(B_j)} = \frac{\frac{k}{n}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n(n+1)}\sum_{j=0}^{n} j} = \frac{2k}{n(n+1)},$$

dove è stata usata la prima formula in (0.7), ossia $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$. Tale probabilità, evidentemente crescente in k, è massimizzata per $k = n$.

(ii) Sia ora C = "le due palline estratte sono una rossa e una verde". Questa volta abbiamo

$$\mathrm{P}(C|B_k) = \frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}}.$$

Essendo

$$\mathrm{P}(B_k|C) = \frac{\mathrm{P}(C|B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(C|B_j)\,\mathrm{P}(B_j)},$$

e osservando che tanto $\mathrm{P}(B_k)$ quanto $\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(C|B_j)\,\mathrm{P}(B_j)$ non dipendono da k, sia ha che

$$\mathrm{P}(B_k|C) = \frac{k(n-k)}{Z},$$

dove Z è una costante che non dipende da k. Quindi massimizzare $\mathrm{P}(B_k|C)$ equivale a massimizzare $k(n-k)$ su $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Se n è pari, $k = \frac{n}{2}$ è l'unico punto di massimo, mentre se n è dispari vi sono due punti di massimo: $k = \frac{n \pm 1}{2}$.

Esercizio 1.41. Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia n figli, con $n \geq 0$, vale $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ (dove $\lambda > 0$ è un parametro fissato), e ciascun figlio è maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri. Consideriamo l'evento

$$A_k := \text{"il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente } k \text{ figli maschi"},$$

per $k \geq 0$. Si mostri che $\mathrm{P}(A_k) = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$.

[*Sugg.* Si consideri l'evento B_n = "il nucleo familiare scelto ha n figli". Si determini innanzitutto $\mathrm{P}(A_k|B_n)$ e poi si calcoli $\mathrm{P}(A_k)$. Si ricordi la serie esponenziale (0.5).]

Soluzione 1.41. Ricordando la formula (1.56) relativa a n prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo $p = \frac{1}{2}$, segue dalle ipotesi del modello che, se $n \geq k$,

$$\mathrm{P}(A_k|B_n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

Ovviamente, $\mathrm{P}(A_k|B_n) = 0$ se $k > n$. Pertanto, applicando la formula delle probabilità totali (Proposizione 1.47), si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_k|B_n)\,\mathrm{P}(B_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{1}{2^k}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-k}}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda/2)^m}{m!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}e^{\lambda/2} = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Esercizio 1.42. Sia $S = \{1,2,\dots,n\}$, $\Omega := \mathscr{P}(S)\times\mathscr{P}(S)$, e P la probabilità uniforme su Ω. Dunque gli elementi di Ω sono coppie ordinate (A,B), con $A,B \subseteq S$. Consideriamo l'evento

$$E := \{(A,B)\in\Omega : A\subseteq B\}.$$

Inoltre, per $B\subseteq S$, definiamo $F_B := \{(A',B')\in\Omega :\ B' = B\} = \{(A,B):\ A\subseteq S\}$.

(i) Si determini $\mathrm{P}(E|F_B)$.

(ii) Usando la formula di disintegrazione

$$\mathrm{P}(E) = \sum_{B\subseteq S}\mathrm{P}(E|F_B)\,\mathrm{P}(F_B),$$

si mostri che $\mathrm{P}(E) = (3/4)^n$.

[*Sugg.* Si ricordi il binomio di Newton (1.29) e il fatto che $|\mathscr{P}(S)| = 2^{|S|}$.]

Soluzione 1.42. (i) Anzitutto

$$\mathrm{P}(E|F_B) = \frac{|E\cap F_B|}{|F_B|}.$$

Gli elementi di F_B sono tanti quanti i sottoinsiemi di S, cioè 2^n. Gli elementi di $E\cap F_B$ sono tanti quanti i sottoinsiemi di B, cioè $2^{|B|}$. Dunque

$$\mathrm{P}(E|F_B) = \frac{2^{|B|}}{2^n}.$$

(ii) Essendo $P(F_B) = |F_B|/|\Omega| = 1/2^n$, si ha

$$\mathrm{P}(E) = \sum_{B\subseteq S}\frac{2^{|B|}}{4^n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{B\subseteq S:|B|=k}2^k = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \frac{3^n}{4^n},$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (1+2)^n$.

Esercizio 1.43. È stato indetto un referendum in una popolazione di $n\geq 1$ individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SÌ con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri.

(i) Qual è la probabilità p che un individuo scelto a caso vada a votare e voti SÌ?

(ii) Qual è la probabilità che il numero di voti SÌ sia k, per $k \in \{0, \dots, n\}$?

(iii) Assumendo che i voti SÌ siano k, si determini la probabilità (condizionale) che i votanti totali siano m, dove $m \in \{k, \dots, n\}$. Si mostri che tale probabilità vale

$$\binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} .$$

Soluzione 1.43. (1) Consideriamo gli eventi $A =$ "l'individuo va a votare" e $B =$ "l'individuo vota SÌ". Allora

$$p = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} .$$

(2) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $C =$ "esattamente k individui vanno a votare e votano SÌ". Dato che ciascun individuo, indipendentemente dagli altri, va a votare e vota SÌ con probabilità $p = \frac{1}{4}$, siamo in presenza di uno schema di prove ripetute e indipendenti: dunque

$$\mathrm{P}(C) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} .$$

(3) Introducendo l'evento $D =$ "esattamente m individui vanno a votare", dobbiamo calcolare $\mathrm{P}(D|C)$. Applicando la Formula di Bayes

$$\mathrm{P}(D|C) = \frac{\mathrm{P}(C|D) \cdot \mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(C)} .$$

Applicando lo schema di prove ripetute e indipendenti si ha

$$\mathrm{P}(D) = \binom{n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} , \qquad \mathrm{P}(C|D) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{m} ,$$

mentre $\mathrm{P}(C)$ è stata determinata al punto precedente. Sostituendo ed effettuando le opportune semplificazioni, si trova

$$\mathrm{P}(D|C) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{m}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^m (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^k (\frac{3}{4})^{n-k}} = \binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} .$$

Capitolo 3
Variabili aleatorie discrete: teoria

3.1 Variabili aleatorie e distribuzioni

Esercizio 3.1. Sia X una variabile aleatoria, definita su (Ω, P) a valori in E, quasi certamente costante, ossia esiste $c \in E$ tale che $\mathrm{P}(X = c) = 1$. Si mostri che esiste un *unico* elemento $c \in E$ con tale proprietà.

Soluzione 3.1. Se esistessero due costanti c e c' con tale proprietà, gli eventi $\{X = c\}$ e $\{X = c'\}$ sarebbero due eventi disgiunti di probabilità 1, il che è impossibile.

Esercizio 3.2. Siano A e B due eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P), e consideriamo la variabile aleatoria

$$X := \lambda \mathbb{1}_A + \mu \mathbb{1}_B,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si determini la densità discreta di X.

[*Sugg.* Si consideri innanzitutto il caso in cui i quattro numeri $0, \lambda, \mu, \lambda + \mu$ sono distinti.]

Soluzione 3.2. Consideriamo anzitutto il caso in cui i quattro numeri $0, \lambda, \mu, \lambda + \mu$ siano distinti. Abbiamo allora $X(\Omega) = \{0, \lambda, \mu, \lambda + \mu\}$ e

$$\begin{aligned}
\{X = \lambda\} = A \cap B^c &\Rightarrow \ \mathrm{p}_X(\lambda) = \mathrm{P}(A \cap B^c) \\
\{X = \mu\} = A^c \cap B &\Rightarrow \ \mathrm{p}_X(\mu) = \mathrm{P}(A^c \cap B) \\
\{X = \lambda + \mu\} = A \cap B &\Rightarrow \ \mathrm{p}_X(\lambda + \mu) = \mathrm{P}(A \cap B) \\
\{X = 0\} = A^c \cap B^c &\Rightarrow \ \mathrm{p}_X(0) = \mathrm{P}(A^c \cap B^c)
\end{aligned}$$

Nel caso in cui i quattro numeri $0, \lambda, \mu, \lambda + \mu$ non siano distinti, è sufficiente sommare le probabilità corrispondenti a valori uguali. Ad esempio, se $\lambda = \mu \neq 0$, allora X assume i valori $0, \lambda, 2\lambda$ e $\mathrm{p}_X(\lambda) = \mathrm{P}(A \cap B^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B)$, $\mathrm{p}_X(2\lambda) = \mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{p}_X(0) = \mathrm{P}(A^c \cap B^c)$. In modo analogo si trattano i casi rimanenti, cioè $\lambda = -\mu \neq 0$, $0 = \lambda \neq \mu$, $0 = \mu \neq \lambda$, $\lambda = \mu = 0$.

Esercizio 3.3. Sia X una variabile aleatoria definita su uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) a valori in un insieme E. Indichiamo con $\sigma(X)$ la famiglia degli eventi generati da X, secondo la Definizione 3.5:

$$\sigma(X) = \left\{ C \subseteq \Omega : \exists A \subseteq E \text{ tale che } C = \{X \in A\} \right\}.$$

Si mostri che un evento $D \subseteq \Omega$ appartiene a $\sigma(X)$ se e solo se verifica la seguente proprietà: per ogni coppia di elementi $\omega, \omega' \in \Omega$ tali che $X(\omega) = X(\omega')$, o entrambi gli elementi appartengono a D o entrambi non vi appartengono, ossia non si può avere che $\omega \in D$ e $\omega' \notin D$, o viceversa che $\omega \notin D$ e $\omega' \in D$.

Soluzione 3.3. Sia, per cominciare, D un evento con la proprietà seguente: per ogni coppia di elementi $\omega, \omega' \in \Omega$ tali che $X(\omega) = X(\omega')$, o entrambi gli elementi appartengono a D o entrambi non vi appartengono. Poniamo $A = \{X(\omega) : \omega \in D\}$ e si noti che A è un sottoinsieme di E. Per definizione, se $\omega \in D$ allora $X(\omega) \in A$, e quindi $D \subseteq \{X \in A\}$. D'altra parte, se $\omega \in \{X \in A\}$, dev'essere $X(\omega) = X(\omega')$ per qualche $\omega' \in D$; dunque, per ipotesi, $\omega \in D$. Ciò mostra che $\{X \in A\} \subseteq D$, e quindi $\{X \in A\} = D$, cioè $D \in \sigma(X)$.

Viceversa, se $D \in \sigma(X)$, esiste $A \subseteq E$ per cui $D = \{X \in A\}$. Se $\omega, \omega' \in \Omega$ sono tali che $X(\omega) = X(\omega')$, si ha che

- se $X(\omega) = X(\omega') \in A$ allora $\omega, \omega' \in D$;
- se $X(\omega) = X(\omega') \notin A$ allora $\omega, \omega' \notin D$;

dunque D ha la proprietà richiesta.

3.2 Indipendenza di variabili aleatorie

Esercizio 3.4. Siano A e B due eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si determini la densità congiunta del vettore aleatorio $(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Soluzione 3.4. La densità congiunta $\mathrm{p}(x,y) = \mathrm{P}(\mathbb{1}_A = x, \mathbb{1}_B = y)$ è data da

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(0,0) &= \mathrm{P}(A^c \cap B^c) \\ \mathrm{p}(0,1) &= \mathrm{P}(A^c \cap B) \\ \mathrm{p}(1,0) &= \mathrm{P}(A \cap B^c) \\ \mathrm{p}(1,1) &= \mathrm{P}(A \cap B), \end{aligned}$$

mentre $\mathrm{p}(x,y) = 0$ se $x, y \notin \{0,1\}$.

Esercizio 3.5. Siano $C_1, C_2, \ldots, C_n$ eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Posto $X_i := \mathbb{1}_{C_i}$, si mostri l'equivalenza delle seguenti affermazioni

(i) le variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono indipendenti;

(ii) gli eventi $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono indipendenti.

Si mostri quindi che vale lo stesso per una famiglia $(C_i)_{i\in I}$ arbitraria di eventi.

[*Sugg.* Si ricordi la Proposizione 1.63.]

Soluzione 3.5. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Si noti che

$$\bigcap_{i\in J} C_i = \{X_i = 1 \text{ per ogni } i \in J\}.$$

Dunque, usando l'ipotesi di indipendenza delle variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in J} C_i\right) &= \mathrm{P}\left(X_i = 1 \text{ per ogni } i \in J, X_k \in \{0,1\} \text{ per ogni } k \notin J\right) \\ &= \prod_{i\in J} \mathrm{P}(X_i = 1) = \prod_{i\in J} \mathrm{P}(C_i). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Mostriamo che la densità congiunta di $X_1, X_2, \ldots, X_n$ è prodotto delle densità marginali. Per $x \in \{0,1\}$, poniamo $C^x := C$ se $x = 1$ e $C^x = C^c$ se $x = 0$. Ricordando che l'indipendenza di eventi si conserva per complementazione (Proposizione 1.64) e osservando che $\{X_i = x\} = C^x$, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) &= \mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathrm{P}(C^{x_1} \cap \cdots \cap C^{x_n}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(C^{x_i}) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(X_i = x_i), \end{aligned}$$

dove, in quest'ultima uguaglianza, abbiamo usato la Proposizione 1.63.

Per estendere l'affermazione a famiglie arbitrarie, basta ricordare che l'indipendenza di una famiglia di variabili aleatorie (risp. eventi) equivale per definizione all'indipendenza di ogni sottofamiglia finita.

Esercizio 3.6. Date n prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo p, consideriamo le variabili aleatorie $S :=$ "numero di successi nelle n prove" e $T :=$ "prova in cui si ha il primo successo". Si determini la densità congiunta $\mathrm{p}_{S,T}$.

(Osserviamo che le densità marginali p_S e p_T sono già state determinate nell'Esempio 3.19:, si veda la relazione (3.14)).

Soluzione 3.6. L'evento $\{S = s, T = t\}$ si può esprimere come intersezione dei tre eventi corrispondenti alle seguenti affermazioni:

- le prime $t-1$ prove sono stati insuccessi;
- la prova t-esima è stata un successo;
- nelle rimanenti $n-t$ prove vi sono stati $s-1$ successi.

Data l'indipendenza di prove distinte, i tre eventi precedenti sono indipendenti. Ne segue che

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}_{S,T}(s,t) = \mathrm{P}(S=s, T=t) &= (1-p)^{t-1} p \binom{n-t}{s-1} p^{s-1}(1-p)^{n-t-(s-1)} \\
&= \binom{n-t}{s-1} p^s (1-p)^{n-s},
\end{aligned}
$$

con la convenzione $\binom{N}{K} \neq 0$ se e solo se $0 \leq K \leq N$.

3.3 Valor medio e disuguaglianze

Esercizio 3.7. Sia X una variabile aleatoria discreta reale a valori in $\mathbb{N}$, con densità discreta data da $\mathrm{p}_X(x) = \frac{c_\alpha}{x^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$, dove $\alpha \in (0,\infty)$ è un parametro fissato, e

$$
\frac{1}{c_\alpha} = \sum_{y \in \mathbb{N}} \frac{1}{y^{1+\alpha}}.
$$

Si determini per quali valori di $p \in (0,\infty)$ si ha $X \in L^p(\Omega, \mathrm{P})$.

Soluzione 3.7. Usando la Definizione 3.43 e la definizione di $L^p(\Omega,\mathrm{P})$ (paragrafo 3.3.3), abbiamo che $X \in L^p(\Omega,\mathrm{P})$ se e solo se

$$
\sum_{k=1}^{+\infty} k\, \mathrm{p}_X(k) < +\infty \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty.
$$

Ricordando (0.2), ciò avviene se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 3.8. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, a valori rispettivamente negli insiemi E e F, e siano $g : E \to \mathbb{R}$ e $h : F \to \mathbb{R}$ funzioni arbitrarie. Si mostri che se le variabili aleatorie $g(X)$ e $h(Y)$ ammettono valor medio finito, allora anche il loro prodotto $g(X)h(Y)$ ammette valor medio finito e $\mathrm{E}(g(X)h(Y)) = \mathrm{E}(g(X))\,\mathrm{E}(h(Y))$.

Soluzione 3.8. Dalla Proposizione 3.40 segue che le variabili aleatorie $g(X)$ e $h(Y)$ sono indipendenti. È pertanto sufficiente applicare a tali variabili la Proposizione 3.72.

Esercizio 3.9. Per $n \geq 1$, sia X_n una variabile aleatoria che assume, con la stessa probabilità, i valori $1, 2, \ldots, n-1, n$. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, sia

$$
m_n = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X_n}{n}\right)\right].
$$

Si identifichi il limite

$$
\lim_{n \to +\infty} m_n.
$$

Soluzione 3.9. Si osservi che

$$\mathrm{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n),$$

che è una somma di Riemann per l'integrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Esercizio 3.10. Sia Y una variabile aleatoria a valori in $[0,+\infty)$, e $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ una funzione crescente. Si mostri che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(Y \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}[f(Y)]}{f(\varepsilon)}.$$

Soluzione 3.10. Dal fatto che f è crescente segue l'uguaglianza di eventi

$$\{Y \geq \varepsilon\} = \{f(Y) \geq f(\varepsilon)\}\,.$$

Applicando la disuguaglianza di Markov (Teorema 3.77) alla variabile aleatoria $X := f(Y)$ si ottiene la tesi.

Esercizio 3.11. Si dimostri la seguente versione "forte" della disuguaglianza di Jensen. Sia X una variabile aleatoria reale e $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione *strettamente* convessa, nel senso che la relazione (3.49) vale come disuguaglianza stretta per ogni $x \neq x_0$. Se X e $\varphi(X)$ ammettono entrambe valor medio finito, e X *non* è quasi certamente costante, vale la disuguaglianza *stretta*

$$\varphi(\mathrm{E}(X)) > \mathrm{E}(\varphi(X))\,.$$

Soluzione 3.11. Usando la disuguaglianza (3.49) abbiamo la disuguaglianza

$$\varphi(X) - \varphi(\mathrm{E}(X)) - \lambda(\mathrm{E}(X))(X - \mathrm{E}(X)) \geq 0.$$

Si ponga $Y := \varphi(X) - \varphi(\mathrm{E}(X)) - \lambda(\mathrm{E}(X))(X - \mathrm{E}(X))$, e si noti che

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\varphi(X)) - \varphi(\mathrm{E}(X)).$$

Si tratta perciò di dimostrare che $\mathrm{E}(Y) > 0$. Usando il fatto che $Y \geq 0$ e la Proposizione 3.58, è sufficiente mostrare che Y *non* è quasi certamente uguale a 0, cioè che $\mathrm{P}(Y > 0) > 0$. Poiché, per ipotesi, X non è quasi certamente costante, abbiamo

$$\mathrm{P}(X \neq \mathrm{E}(X)) > 0.$$

Inoltre, usando la disuguaglianza (3.49) in senso stretto, abbiamo:

$$\{X \neq \mathrm{E}(X)\} \subseteq \{Y > 0\}.$$

Ciò mostra che $\mathrm{P}(Y > 0) > 0$.

Esercizio 3.12. Due variabili aleatorie X e Y sono definite nel modo seguente, sulla base dei risultati di tre lanci indipendenti di una moneta equilibrata. Se al primo lancio esce testa, poniamo $X = Y = 0$. Se esce croce sia al primo che al secondo lancio, poniamo $X = 1$, mentre se viene croce al primo lancio e testa al secondo poniamo $X = -1$. Similmente, se viene croce al primo e al terzo lancio poniamo $Y = 1$, mentre se viene croce al primo lancio e testa al terzo, poniamo $Y = -1$. Si determini la distribuzione congiunta di X e Y, mostrando che sono variabili aleatorie scorrelate ma non indipendenti.

Soluzione 3.12. Indichiamo con C_i l'evento che esca croce al lancio i-esimo. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_{X,Y}(0,0) &= \mathrm{P}(C_1^c) = \frac{1}{2} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(1,1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \frac{1}{8} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(1,-1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3^c) = \frac{1}{8} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(-1,1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2^c \cap C_3) = \frac{1}{8} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(-1,-1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2^c \cap C_3^c) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_X(0) &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{p}_X(1) &= \mathrm{p}_{X,Y}(1,1) + \mathrm{p}_{X,Y}(1,-1) = \frac{1}{4} \\
\mathrm{p}_X(-1) &= \mathrm{p}_{X,Y}(1,-1) + \mathrm{p}_{X,Y}(-1,-1) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

e, per simmetria, $\mathrm{p}_X = \mathrm{p}_Y$. In particolare $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) &= \sum_{x,y} xy\, \mathrm{p}_{X,Y}(x,y) \\
&= \mathrm{p}_{X,Y}(1,1) + \mathrm{p}_{X,Y}(-1,-1) - \mathrm{p}_{X,Y}(1,-1) - \mathrm{p}_{X,Y}(-1,1) = 0,
\end{aligned}$$

quindi X e Y sono scorrelate. Tuttavia X e Y non sono indipendenti, perché

$$\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = \mathrm{p}_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \mathrm{p}_X(0)\,\mathrm{p}_Y(0) = \mathrm{P}(X = 0)\,\mathrm{P}(Y = 0).$$

3.4 Lavorare con le distribuzioni

Esercizio 3.13 (Generalizzazione dell'Esempio 3.25). Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, entrambe a valori in $\{1,2,\ldots,n\}$, tali che $P(X=k) = P(Y=k) = \frac{1}{n}$ per ogni $k = 1,2,\ldots,n$. Si calcoli la densità di $X+Y$.

Soluzione 3.13. Usiamo la Proposizione 3.87. In questo caso abbiamo

$$\mathrm{p}_X = \mathrm{p}_Y = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{1,2,\ldots,n\}}.$$

Pertanto

$$\mathrm{p}_{X,Y}(k) = \mathrm{p}_X * \mathrm{p}_Y(k) = \frac{1}{n^2}\sum_h \mathbb{1}_{\{1,2,\ldots,n\}}(h)\mathbb{1}_{\{1,2,\ldots,n\}}(k-h).$$

Notando che

$$\mathbb{1}_{\{1,2,\ldots,n\}}(h)\mathbb{1}_{\{1,2,\ldots,n\}}(k-h) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\{1,2,\ldots,k-1\}}(h) & \text{se } 2 \le k \le n \\ \mathbb{1}_{\{k-n,k-n+1,\ldots,n\}}(h) & \text{se } n < k \le 2n, \end{cases}$$

si ha

$$\mathrm{p}_{X,Y}(k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{se } 2 \le k \le n \\ \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{se } n < k \le 2n. \end{cases}$$

Esercizio 3.14. Sia (X,Y) una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^2$. Definiamo

$$F_{X,Y}(x,y) := P(X \le x, Y \le y).$$

Si mostri che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}_{X,Y}(x,y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[F_{X,Y}(x,y) + F_{X,Y}\left(x-\tfrac{1}{n}, y-\tfrac{1}{n}\right) - F_{X,Y}\left(x-\tfrac{1}{n}, y\right) - F_{X,Y}\left(x, y-\tfrac{1}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Soluzione 3.14. Si cominci con il notare la seguente identità fra eventi:

$$\begin{aligned} &\{X \le x, Y \le y\} \\ &= \{X \le x-\tfrac{1}{n}, Y \le y\} \cup \{X \le x, Y \le y-\tfrac{1}{n}\} \cup \{x-\tfrac{1}{n} < X \le x,\, y-\tfrac{1}{n} < Y \le y\}. \end{aligned}$$

In quest'ultima unione, il terzo evento è disgiunto dai primi due, mentre l'intersezione fra i primi due è

$$\{X \le x-\tfrac{1}{n}, Y \le y\} \cap \{X \le x, Y \le y-\tfrac{1}{n}\} = \{X \le x-\tfrac{1}{n}, Y \le y-\tfrac{1}{n}\}.$$

Quindi, per la Proposizione 1.16 (ii),

$$\begin{aligned} P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x-\tfrac{1}{n}, Y \le y) + P\left(X \le x, Y \le y-\tfrac{1}{n}\right) \\ - P\left(X \le x-\tfrac{1}{n}, Y \le y-\tfrac{1}{n}\right) + P\left(x-\tfrac{1}{n} < X \le x,\, y-\tfrac{1}{n} < Y \le y\right), \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(x-\tfrac{1}{n}<X\le x,\, y-\tfrac{1}{n}<Y\le y\right)\\&\qquad=\left[F_{X,Y}(x,y)+F_{X,Y}\left(x-\tfrac{1}{n},y-\tfrac{1}{n}\right)-F_{X,Y}\left(x-\tfrac{1}{n},y\right)-F_{X,Y}\left(x,y-\tfrac{1}{n}\right)\right].\end{aligned}$$

Per concludere, è ora sufficiente prendere il limite per $n\to+\infty$, osservando che, per la continuità dall'alto della probabilità (Proposizione 1.19 (iii))

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(x-\tfrac{1}{n}<X\le x, y-\tfrac{1}{n}<Y\le y\right)=\mathrm{P}(X=x,Y=y)=\mathrm{p}_{X,Y}(x,y).$$

Esercizio 3.15. Sia X una variabile aleatoria discreta reale a valori in $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, con densità discreta data da $\mathrm{p}_X(x)=\frac{c_\alpha}{|x|^{1+\alpha}}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(|x|)$, dove $\alpha\in(0,\infty)$ è un parametro fissato, e

$$\frac{1}{c_\alpha}=\sum_{y\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{|y|^{1+\alpha}}.$$

Si mostri che che la funzione generatrice M_X di X è data da $\mathrm{M}_X(0)=1$ e $\mathrm{M}_X(t)=+\infty$ per ogni $t\neq 0$. In particolare, si noti che M_X non dipende dal valore di α.

Soluzione 3.15. Cominciamo con il considerare il caso $t>0$. Allora

$$\mathrm{M}_X(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}e^{tx}\frac{c_\alpha}{|x|^{1+\alpha}}\ge c_\alpha\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{e^{tx}}{|x|^{1+\alpha}}=+\infty,$$

dove quest'ultima uguaglianza segue dal fatto che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{tx}}{|x|^{1+\alpha}}=+\infty$$

(si ricordi che ogni serie convergente è necessariamente infinitesima). In modo analogo, per $t=-s<0$

$$\mathrm{M}_X(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}e^{-sx}\frac{c_\alpha}{|x|^{1+\alpha}}\ge c_\alpha\sum_{x<0}\frac{e^{-sx}}{|x|^{1+\alpha}}=c_\alpha\sum_{y=1}^{+\infty}\frac{e^{sy}}{|y|^{1+\alpha}}=+\infty.$$

Esercizio 3.16. Siano $X_1,X_2,\dots,X_n$ variabili aleatorie reali indipendenti, e siano M_{X_i} le relative funzioni generatrici. Si mostri che

$$\mathrm{M}_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t)=\prod_{i=1}^n\mathrm{M}_{X_i}(t),$$

per ogni $t\in\mathbb{R}$ tale che $\mathrm{M}_{X_i}(t)<+\infty$ per ogni $i=1,2,\dots,n$,

Soluzione 3.16. Per ogni tale t, le variabili aleatorie $e^{tX_1},e^{tX_2},\dots,e^{tX_n}$ sono in L^1 e, per la Proposizione 3.40, sono indipendenti. Perciò, per la Proposizione 3.72

$$\mathrm{M}_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t)=\mathrm{E}\left[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right]=\mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right]=\prod_{i=1}^n\mathrm{E}\left[e^{tX_i}\right]=\prod_{i=1}^n\mathrm{M}_{X_i}(t).$$

3.5 Classi notevoli di variabili aleatorie discrete

Esercizio 3.17. Sia $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Con un calcolo diretto a partire dall'espressione (3.78) della densità discreta, si mostri che $\mathrm{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2$. Ricordando che $\mathrm{E}(X) = np$, si deduca quindi che $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

[*Sugg.* Si applichi la formula (3.30) e si noti che $k(k-1)\binom{n}{k}p^k = p^2 \cdot \binom{n-2}{k-2}p^{k-2}$.]

Soluzione 3.17. Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \mathrm{p}_{\mathrm{Bin}(n-2,p)}(\ell) = n(n-1)p^2\,.\end{aligned}$$

Si ottiene dunque $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X) = n^2p^2 - np^2 + np$, da cui segue che $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = np - np^2 = np(1-p)$.

Esercizio 3.18. Sia $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Con un calcolo diretto a partire dall'espressione (3.78) della densità discreta, si mostri che $\mathrm{M}_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$. Applicando il Teorema 3.96, si deducano quindi i valori di $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{E}(X^2)$, e si ricavi $\mathrm{Var}(X)$.

[*Sugg.* Si applichi la formula (3.30) e si ricordi il binomio di Newton (1.29).]

Soluzione 3.18. Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_X(t) \;&=\; \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(pe^t\right)^k(1-p)^{n-k} \;=\; \left(pe^t + 1 - p\right)^n.\end{aligned}$$

Esercizio 3.19. Sia $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Usando l'espressione (3.80) della densità discreta, si mostri che $\mathrm{E}(X) = \lambda$ e $\mathrm{E}(X(X-1)) = \lambda^2$. Si deduca quindi che $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Soluzione 3.19. Cominciamo col calcolare $\mathrm{E}(X)$.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_X(n) = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda.$$

In modo simile:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X(X-1)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)p_X(n) = e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \lambda^2.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X) = \lambda^2 + \lambda .$$

Infine

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Esercizio 3.20. Siano $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Pois}(\mu)$ variabili aleatorie indipendenti. Per $n \geq 0$ fissato, si determini la distribuzione della variabile aleatoria X rispetto alla probabilità condizionata $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X+Y=n)$.

Soluzione 3.20. Poniamo per $k \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{q}(k) := \mathrm{P}(X=k\,|\,X+Y=n) = \frac{\mathrm{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathrm{P}(X=k)\,\mathrm{P}(Y=n-k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} .$$

Per la Proposizione 3.109 si ha $X+Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda+\mu)$, dunque

$$\mathrm{q}(k) = \frac{e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\mu}\,\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\,\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} , \qquad \text{con} \qquad p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu} .$$

Quindi rispetto a $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X+Y=n)$ la variabile aleatoria X ha distribuzione $\mathrm{Bin}(n,p)$.

Esercizio 3.21. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $\mathrm{Geo}(p)$. Per $n \geq 2$ fissato, si determini la distribuzione della variabile aleatoria X rispetto alla probabilità condizionata $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X+Y=n)$.

Soluzione 3.21. Poniamo per $k \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{q}(k) \,:=\, \mathrm{P}(X=k\,|\,X+Y=n) = \frac{\mathrm{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathrm{P}(X=k)\,\mathrm{P}(Y=n-k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} .$$

Osserviamo che

$$\mathrm{P}(X+Y=n) = p^2 \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} (1-p)^{n-k-1} = (n-1) p^2 (1-p)^{n-2} ,$$

da cui si ottiene

$$\mathrm{q}(k) = \frac{p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1} \qquad \text{se} \qquad k \in \{1, \ldots, n-1\} ,$$

mentre $q(k) = 0$ altrimenti. Quindi rispetto a $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X+Y=n)$ la variabile aleatoria X ha distribuzione $\mathrm{Unif}(\{1, \ldots, n-1\})$.

3.6 Esercizi di riepilogo

Esercizio 3.22. Si sceglie “a caso” un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Si determini la densità discreta di X.

Soluzione 3.22. La variabile X assume solo i valori $0,1\ldots,5$. $X=k$ significa che nel lotto di 5 oggetti k sono difettosi. Possiamo calcolare $\mathrm{P}(X=k)$ con la formula “casi favorevoli su casi possibili” della probabilità uniforme. *Casi possibili*: ci sono $\binom{100}{5}$ modi di scegliere 5 oggetti tra 100. *Casi favorevoli*: devo scegliere 5 oggetti di cui k difettosi. Scelgo prima i k difettosi tra i 10 difettosi in $\binom{10}{k}$ modi, poi scelgo i rimanenti $5-k$ oggetti tra i rimanenti $100-10=90$ non difettosi in $\binom{90}{5-k}$ modi. In definitiva i casi favorevoli sono $\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ e quindi:

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \qquad k=0,1,\ldots,5\,.$$

Facendo un po’ di conti si ottiene: $\mathrm{P}(X=0)\simeq 0.583$, $\mathrm{P}(X=1)\simeq 0.340$, $\mathrm{P}(X=2)\simeq 0.070$, $\mathrm{P}(X=3)\simeq 0.007$, $\mathrm{P}(X=4)\simeq \mathrm{P}(X=5)\simeq 0$. Per essere sicuri di non aver sbagliato i conti su può fare la verifica $\sum_{k=0}^{5}\mathrm{P}(X=k)=1$.

Esercizio 3.23. Siano X_1,X_2 variabili aleatorie indipendenti, ciascuna delle quali assume i valori $\{1,\ldots,n\}$ con la stessa probabilità, dove $n\in\mathbb{N}$. Definiamo la variabile $Y:=\min\{X_1,X_2\}$.

(i) Si calcoli $\mathrm{P}(Y=k)$ per ogni $k\in\mathbb{N}$.

(ii) Si mostri che, per ogni $t\in(0,1)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(Y\le tn) \;=\; 2t-t^2\,.$$

Soluzione 3.23. (i) Chiaramente $\mathrm{P}(Y=k)=0$ per $k>n$. Conviene innanzitutto calcolare, per $k\in\{1,\ldots,n\}$, la probabilità $\mathrm{P}(Y\ge k)$ che è data da

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge k) \;&=\; \mathrm{P}(X_1\ge k, X_2\ge k) \;=\; \mathrm{P}(X_1\ge k)\,\mathrm{P}(X_2\ge k)\\ &=\; \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 \;=\; \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=k) \;&=\; \mathrm{P}(Y\ge k)-\mathrm{P}(Y\ge k+1) \;=\; \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2\\ &-\left(\frac{n-k}{n}\right)^2 \;=\; \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

(ii) Dalla formula per $\mathrm{P}(Y\ge k)$ calcolata al punto a) si ottiene

$$\mathrm{P}(Y \le tn) \;=\; 1 - \mathrm{P}(Y > tn) \;=\; 1 - \mathrm{P}(Y > \lfloor tn \rfloor) \;=\; 1 - \left(1 - \frac{\lfloor tn \rfloor - 1}{n}\right)^2 ,$$

e dato che $(\lfloor tn \rfloor - 1)/n \to t$ per $n \to \infty$, per ogni $t \in (0,1)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y \le tn) \;=\; 1 - (1-t)^2 \;=\; 2t - t^2 .$$

Esercizio 3.24. Un gioco a premi ha un montepremi di 512 euro. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si dà alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente a ciascuna domanda con probabilità $p \in (0,1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita in euro di questo concorrente. Si determini la densità discreta p_X di X.

Soluzione 3.24. La variabile casuale X assume i valori $0, 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^9$. Per $0 \le k \le 9$, il valore 2^{9-k} viene assunto se le prime k risposte sono errate, e la $k+1$-ma è corretta. Ciò avviene con probabilità $(1-p)^k p$. Infine il valore 0 viene assunto se tutte le 10 risposte sono sbagliate, il che avviene con probabilità $(1-p)^{10}$. Riassumendo

$$\mathrm{p}_X(2^{9-k}) = p(1-p)^k$$

per $0 \le k \le 9$, e $\mathrm{p}_X(0) = (1-p)^{10}$.

Esercizio 3.25. Due mazzi di 40 carte sono ognuno costituito da 20 carte rosse e 20 nere. Si mescolano entrambi i mazzi, quindi si dispongono uno accanto all'altro. Cominciamo con lo scoprire la prima carta di entrambi i mazzi. Se entrambe sono rosse vinciamo un euro, altrimenti non vinciamo alcunché. Proseguiamo scoprendo le seconde carte dei due mazzi: se sono entrambe rosse vinciamo un altro euro, e così via. Sia X il numero di euro vinti dopo aver scoperto tutte le carte. Si calcoli la densità discreta di X.

Soluzione 3.25. Per entrambi i mazzi numeriamo le carte da 1 a 40, e conveniamo che quelle rosse siano quelle numerate da 1 a 20. Denotando con $\sigma(i)$ la posizione della carta numero i del primo mazzo dopo il mescolamento, la disposizione delle carte del primo mazzo si può identificare con $\sigma \in S_{40}$. Analogamente, denotiamo con $\eta \in S_{40}$ la disposizione del secondo mazzo. Prendiamo quindi $\Omega := S_{40} \times S_{40}$, con la probabilità uniforme, e $X(\sigma, \eta)$ denota il numero di Euro vinti con le disposizioni σ, η. Per $k = 0, 1, \ldots, 20$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{|\{(\sigma,\eta) : \; X(\sigma,\eta) = k\}|}{40!^2} .$$

Per calcolare $|\{(\sigma,\eta) : \; X(\sigma,\eta) = k\}|$ usiamo lo schema delle scelte successive: prima scegliamo σ (40! scelte possibili), poi scegliamo η in modo tale che $X(\sigma,\eta) = k$. Per determinare il numero di scelte possibili per η, sia $I_\sigma := \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(20)\}$ l'insieme delle posizioni delle carte rosse nel primo mazzo. Una permutazione η tale che $X(\sigma,\eta) = k$ si può scegliere come segue.

- Si scelgono k carte rosse (del secondo mazzo): $\binom{20}{k}$ esiti.
- Si dispongono queste carte in I_σ: $\binom{20}{k}k!$ esiti.
- Le rimanenti $20-k$ carte rosse si dispongono in $(I_\sigma)^c$: $\binom{20}{20-k}(20-k)!$ esiti.
- Si dispongono le 20 carte nere nei 20 posti rimasti liberi: 20! esiti.

Riassumendo

$$|\{X(\sigma,\eta)=k\}| = 40!\binom{20}{k}\binom{20}{k}k!\binom{20}{20-k}(20-k)!20! = 40!(20!)^2\binom{20}{k}^2$$

da cui si ottiene

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{|\{X(\sigma,\eta)=k\}|}{|\Omega|} = \frac{40!(20!)^2\binom{20}{k}^2}{(40!)^2} = \frac{\binom{20}{k}^2}{\binom{40}{20}}.$$

Esercizio 3.26. Un'urna contiene $n \geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute *senza reimmissione*. Introduciamo la variabile aleatoria

$$X \ = \ \text{numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa,}$$

la cui densità discreta verrà indicata con $\mathrm{p}_X(k) = \mathrm{P}(X=k)$.

(i) Si mostri che, per $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\mathrm{p}_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1).$$

(ii) Si calcoli la formula $\mathrm{E}(X)$.

[*Sugg.* Si ricordi (0.7).]

Soluzione 3.26. (i) Consideriamo gli eventi $A =$ "la $k+1$-ma pallina estratta è rossa", $B =$ "le prime k palline estratte sono tutte bianche". Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k) &= \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) \\
&= \frac{2}{n-k+2}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+2}{k}} \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono eseguite le dovute semplificazioni.

(ii) Si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\, \mathrm{p}_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} k(n-k+1) \\
&= \frac{2}{n+2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)}{n+2} - \frac{n(2n+1)}{3(n+2)} = \frac{n}{3},
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato (0.7).

Esercizio 3.27. Da un'urna contenente r palline rosse e v palline verdi si estraggono successivamente, senza reimmissione, k palline, con $k \le \min(r, v)$. Sia

$$
X_i := \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad \text{per } i = 1, 2, \ldots, k,
$$

e definiamo $X = X_1 + \cdots + X_k$.

(i) Si determini la distribuzione di X.
(ii) Si determinino le distribuzioni delle X_i.
(iii) Si calcoli $\mathrm{E}(X)$.
(iv) Si mostri, per induzione su k, che la densità congiunta delle X_i è data da

$$
\mathrm{p}_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{r(r-1)\cdots(r-\sum_{i=1}^{k} x_i + 1)v(v-1)\cdots(v-k+\sum_{i=1}^{k} x_i + 1)}{(r+v)(r+v-1)\cdots(r+v-k+1)}
$$

Soluzione 3.27. (i) X è il numero di palline rosse estratte in k estrazioni senza reimmissione, e quindi (si ricordi (1.31))

$$
\mathrm{p}_X(n) = \binom{r}{n}\binom{v}{k-n} \Big/ \binom{r+v}{n}.
$$

(ii) Identifichiamo l'insieme delle palline con $\{1, 2, \ldots, r+v\}$, convenendo che le palline rosse siano le prime r. Lo schema di estrazioni senza reitroduzione si può modellare scegliendo, come spazio campionario, Ω = insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, r+v\}$, con la probabilità uniforme. Allora l'evento $\{X_i = 1\} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(i) \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$ ha cardinalità $r(r+v-1)!$ e quindi la sua probabilità vale $\frac{r}{r+v}$. In conclusione

$$
\mathrm{p}_{X_i}(1) = \frac{r}{r+v}, \qquad \mathrm{p}_{X_i}(0) = 1 - \mathrm{p}_{X_i}(1) = \frac{v}{r+v},
$$

ossia $X_i \sim \mathrm{Be}(\frac{r}{r+v})$.

(iii) Essendo $\mathrm{E}(X_i) = \frac{r}{r+v}$, per linearità del valor medio si ha $\mathrm{E}(X) = k\frac{r}{r+v}$.

(iv) Per induzione su k. Per $k = 1$ la risposta è già in (ii). Altrimenti, se $x = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \in \{0, 1\}^k$,

$$P(X = x) = P(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1) \, P(X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1).$$

Per $P(X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1)$ si usa l'ipotesi induttiva, mentre

$$P(X_k = 1 | X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1) = \frac{r - \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{r + v - k + 1},$$

da cui si giunge alla conclusione.

Esercizio 3.28. Siano W, T variabili aleatorie indipendenti, a valori in $\{0,1\}$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ rispettivamente, con le seguenti distribuzioni marginali:

$$P(T = 0) \; = \; P(T = 1) \; = \; \frac{1}{2}, \qquad P(W = n) \; = \; p\,(1-p)^{n-1}\, \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n),$$

dove $p \in (0,1)$ è un parametro fissato. Definiamo la variabile

$$X := W\, \mathbb{1}_{\{T=0\}} + \frac{1}{W}\, \mathbb{1}_{\{T=1\}},$$

che può dunque assumere come valori i numeri naturali e i reciproci dei numeri naturali, ossia $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(i) Si determini la densità discreta di X.

(ii) Si mostri che la variabile aleatoria $Y := 1/X$ ha la stessa distribuzione di X.

(iii) Si calcoli $E(X)$.

[*Sugg.* Si ricordi che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$, per $|x| < 1$.]

Soluzione 3.28. (i) La densità discreta di X è data da:

$$\begin{aligned} p_X(n) \; &= \; P(W = n, T = 0) \; = \; \frac{1}{2}\, p(1-p)^{n-1}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \\ p_X(1) \; &= \; P(W = 1) \; = \; p, \\ p_X\left(\frac{1}{n}\right) \; &= \; P(W = n, T = 1) \; = \; \frac{1}{2}\, p(1-p)^{n-1}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \end{aligned}$$

(ii) Si ha $Y(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dal punto precedente è chiaro che $P(X = n) = P(X = \frac{1}{n})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; di conseguenza $p_Y(n) = p_X(\frac{1}{n}) = p_X(n)$ e $p_Y(\frac{1}{n}) = p_X(n) = p_X(\frac{1}{n})$.

(iii) Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathrm{p}_X(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{p}_X\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \cdot \mathrm{p}_X(1) + \sum_{n=2}^{\infty} n\,\mathrm{p}_X(n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{2}\,p(1-p)^{n-1} + p + \sum_{n=2}^{\infty} n\,\frac{1}{2}\,p(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{p}{2(1-p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-p)^n + \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{(1-p)} \log\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p}\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 3.29. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e indichiamo con S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1,\ldots,n\}$, munito della probabilità P uniforme. Gli elementi di S_n saranno indicati con $\sigma = (\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$. Introduciamo le variabili aleatorie reali X,Y definite da

$$X(\sigma) := \sigma(1), \qquad Y(\sigma) := \sigma(2).$$

(i) Si mostri che, per ogni $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, la densità congiunta di X e Y vale

$$\mathrm{p}_{X,Y}(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_n} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases},$$

dove c_n è un'opportuna costante che è richiesto di determinare.

(ii) Si determini la densità della variabile $D := Y - X$.

[*Sugg.* Basta calcolare $\mathrm{p}_D(m)$ per $m > 0$, poiché per simmetria $\mathrm{p}_D(-m) = \mathrm{p}_D(m)$.]

Siano ora Z,W due variabili aleatorie reali indipendenti, definite su uno spazio di probabilità $(\Omega,\widetilde{\mathrm{P}})$, tali che $\widetilde{\mathrm{P}}(Z=i) = \widetilde{\mathrm{P}}(W=i) = \frac{1}{n}$, per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$.

(iii) Si calcoli $\widetilde{\mathrm{P}}(Z \neq W)$.

(iv) Si mostri che $\widetilde{\mathrm{P}}(Z=i, W=j \,|\, Z \neq W) = \mathrm{p}_{X,Y}(i,j)$ per ogni $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$. In altri termini, il vettore aleatorio (Z,W), rispetto alla probabilità condizionale $\widetilde{\mathrm{P}}(\cdot \,|\, Z \neq W)$, ha la stessa distribuzione congiunta del vettore iniziale (X,Y).

Soluzione 3.29. (i) Per definizione di spazio di probabilità uniforme

$$\mathrm{p}_{X,Y}(i,j) = \mathrm{P}(X=i, Y=j) = \frac{|\{\sigma \in S_n : \ \sigma(1) = j,\, \sigma(2) = j\}|}{|S_n|}.$$

Chiaramente $\mathrm{p}_{X,Y}(i,j) = 0$ se $i = j$, perché le permutazioni sono biunivoche e dunque non si può avere $\sigma(1) = \sigma(2)$. Per $i \neq j$, le permutazioni $\sigma \in S_n$ tali che $\sigma(1) = j$, $\sigma(2) = j$ sono in corrispondenza con le applicazioni biunivoche da $\{3,\ldots,n\}$ a valori in $\{1,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}$, di conseguenza $|\{\sigma \in S_n : \ \sigma(1) = j,\, \sigma(2) = j\}| = (n-2)!$ e si ottiene

$$\mathrm{p}_{X,Y}(i,j) \;=\; \frac{(n-2)!}{n!} \;=\; \frac{1}{c_n}\,, \qquad \text{dove } \; c_n \;:=\; n(n-1)\,.$$

(Si noti che $c_n = |\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} : i \neq j\}| = |(X,Y)(S_n)|$.)

(ii) Chiaramente i valori possibili per la variabile aleatoria D sono dati da $D(S_n) = \{-(n-1),\ldots,(n-1)\} \setminus \{0\}$. Per $m \in D(S_n)$, con $m > 0$, si ha

$$\{D=m\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{n-m} \{X=k, Y=k+m\}\,,$$

e dato che gli eventi che appaiono nell'unione sono disgiunti segue che per ogni $m \in \{1,\ldots,n-1\}$

$$\mathrm{P}(D=m) \;=\; \sum_{k=1}^{n-m} \mathrm{P}(X=k, Y=k+m) \;=\; \frac{1}{c_n}\,(n-m) \;=\; \frac{n-m}{n(n-1)}\,.$$

Con analoghi argomenti (oppure per simmetria) si ha $\mathrm{P}(D=m) = \mathrm{P}(D=-m)$ per $m < 0$, per cui la formula generale è

$$\mathrm{P}(D=m) \;=\; \frac{n-|m|}{n(n-1)}\,,$$

per ogni $m \in \{-(n-1),\ldots,(n-1)\} \setminus \{0\}$.

(iii)

$$\widetilde{\mathrm{P}}(Z \neq W) \;=\; 1-\widetilde{\mathrm{P}}(Z=W) \;=\; 1-\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathrm{P}}(Z=i, W=i) \;=\; 1-n\cdot\frac{1}{n^2} \;=\; 1-\frac{1}{n}\,.$$

(iv) Chiaramente $\widetilde{\mathrm{P}}(Z=i, W=j \,|\, Z \neq W) = 0$ se $i=j$. Per $i \neq j$, con $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, si ha

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{P}}(Z=i, W=j \,|\, Z \neq W) \;&=\; \frac{\widetilde{\mathrm{P}}(Z=i, W=j)}{\widetilde{\mathrm{P}}(Z \neq W)} \;=\; \frac{\widetilde{\mathrm{P}}(Z=i)\widetilde{\mathrm{P}}(W=j)}{\widetilde{\mathrm{P}}(Z \neq W)} \;=\; \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \\ &=\; \frac{1}{n(n-1)} \;=\; \frac{1}{c_n} \;=\; \mathrm{p}_{X,Y}(i,j)\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3.30. Fissati $p \in (0,1)$ e $n \geq 2$, siano $Z_1,\ldots,Z_n$ variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{-1,1\}$, con $\mathrm{P}(Z_i = 1) = p$ per ogni $i = 1,\ldots,n$. Definiamo

$$X \;:=\; \prod_{i=1}^{n} Z_i \;=\; Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_n\,.$$

(i) Si determini $\mathrm{E}(X)$ e si deduca la distribuzione di X.

[*Sugg.* Che valori può assumere X?]

(ii) X è indipendente dal vettore aleatorio $(Z_1,\dots,Z_n)$?
(iii) X è indipendente dal vettore aleatorio $(Z_2,\dots,Z_n)$?

Soluzione 3.30. (i) Per l'indipendenza delle Z_i si ha

$$\mathrm{E}(X) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Z_i) = \mathrm{E}(Z_1)^n = (p \cdot 1 + (1-p)\cdot(-1))^n = (2p-1)^n .$$

Dato che $X \in \{-1,1\}$, la distribuzione di X è data da $\mu_X = q\delta_1 + (1-q)\delta_{-1}$, ossia $\mathrm{p}_X(1) = q$, $\mathrm{p}_X(-1) = 1-q$ e $\mathrm{p}_X(x) = 0$ se $x \notin \{-1,+1\}$, per un opportuno $q \in [0,1]$. Dato che $\mathrm{E}(X) = q - (1-q) = 2q-1$, dalla formula per $\mathrm{E}(X)$ ricavata sopra si ottiene $q = \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n)$.

(ii) X è funzione di $(Z_1,\dots,Z_n)$, quindi non può essere indipendente da $(Z_1,\dots,Z_n)$ (a parte il caso banale in cui $X = (cost.)$ q.c.). Più formalmente

$$0 = \mathrm{P}(X=-1,(Z_1,\dots,Z_n)=(1,\dots,1)) \neq \mathrm{P}(X=-1)\,\mathrm{P}(Z_1,\dots,Z_n)=(1,\dots,1)) > 0 .$$

(iii) C'è indipendenza se e solo se $p = \frac{1}{2}$. Infatti, se $p = \frac{1}{2}$ si ha

$$\mathrm{P}(X=\pm 1 | Z_2 = t_2,\dots,Z_{n-1}=t_{n-1}) = \mathrm{P}(Z_1 = \pm\,\mathrm{sign}(t_2\cdot t_3\cdots t_{n-1})) = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(X=\pm 1) ,$$

quindi X e $(Z_2,\dots,Z_n)$ sono indipendenti. Se invece $p \neq \frac{1}{2}$

$$\mathrm{P}(X=1|Z_2=1,\dots,Z_n=1) = \mathrm{P}(Z_1=1) = p \neq \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n) = \mathrm{P}(X=1) .$$

Esercizio 3.31. Da un mazzo di 50 carte numerate da 1 a 50, si estraggono a caso 3 carte. Introduciamo le seguenti variabili aleatorie:

$$\begin{aligned} X &:= \text{numero più basso estratto} \\ Z &:= \text{numero più alto estratto} \\ Y &:= \text{terzo numero estratto} . \end{aligned}$$

(i) Si determinino le distribuzioni marginali di X, Y e Z.
(ii) Si determini la distribuzione di (X,Y) e si mostri che $Y-X$ ha la stessa distribuzione di X.

Soluzione 3.31. (i) Notare che $X \in \{1,2,\dots,48\}$. Se $n \in \{1,2,\dots,48\}$, l'evento $\{X=n\}$ significa "oltre a n, gli altri due numeri estratti sono maggiori di n". Quindi

$$\mathrm{P}(X=n) = \frac{\binom{50-n}{2}}{\binom{50}{3}} .$$

Con argomenti analoghi: per $n \in \{3,4,\dots,50\}$

$$P(Z = n) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{50}{3}}$$

e per $n \in \{2, 3, \dots, 49\}$

$$P(Y = n) = \frac{(n-1)(50-n)}{\binom{50}{3}}.$$

(ii) Se $n \in \{1, 2, \dots, 48\}$, $m \in \{2, 3, \dots, 49\}$ con $n < m$, si ha

$$P(X = n, Y = m) = \frac{50 - m}{\binom{50}{3}}.$$

Notare che $Y - X \in \{1, \dots, 48\}$. Se $k \in \{1, \dots, 48\}$

$$\begin{aligned} P(Y - X = k) &= \sum_n P(X = n, Y = n + k) = \sum_{n=1}^{49-k} \frac{50 - n - k}{\binom{50}{3}} \\ &= \frac{1}{\binom{50}{3}} \left[(50-k)(49-k) - \sum_{n=1}^{49-k} n \right] = \frac{\binom{50-k}{2}}{\binom{50}{3}} \end{aligned}$$

Esercizio 3.32. Si estraggono, una dopo l'altra, senza reimmissione, quattro palline da un'urna che contiene 10 palline, numerate da 1 a 10.

(i) Sia X il più alto numero estratto. Qual è la distribuzione di X?
(ii) Sia A l'evento "tra i numeri delle quattro palline estratte non ce ne sono due di consecutivi". Qual è la probabilità di A?
(iii) Si calcoli $P(A|X = 7)$.
(iv) Qual è la probabilità di A condizionata al fatto che tra i numeri estratti c'è il 7?

Soluzione 3.32. (i) Notare anzitutto che $4 \le X \le 10$. L'evento $X = n$ si realizza in tanti modi quante sono le scelte di tre numeri tra 1 e $n - 1$. Quindi

$$P(X = n) = \frac{\binom{n-1}{3}}{\binom{10}{4}}.$$

(ii) Bisogna contare il numero di scelte di quattro numeri tra 1 e 10 senza coppie consecutive. Si può procedere per enumerazione, ma c'è un modo più astuto. Mostriamo che le scelte di quattro numeri tra 1 e 10 senza coppie consecutive sono in corrispondenza biunivoca con tutte le scelte di 4 numeri tra 1 e 7. Infatti:

- Consideriamo quattro numeri tra 1 e 10 senza coppie consecutive, e rappresentiamo la scelta nella forma seguente: $1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 5, 6, \mathbf{7}, 8, 9, \mathbf{10}$, dove i numeri in grassetto sono quelli scelti. Cancelliamo ora il numero immediatamente a destra dei 3 numeri scelti più piccoli: $1, \mathbf{2}, \mathbf{4}, 6, \mathbf{7}, 9, \mathbf{10}$.

Infine ri-enumeriamo i 7 numeri restanti: $1,\mathbf{2},\mathbf{3},4,\mathbf{5},6,\mathbf{7}$. Si ottiene un sottoinsieme di 4 numeri tra 1 e 7.

- La mappa è invertibile: partendo da $1,\mathbf{2},\mathbf{3},4,\mathbf{5},6,\mathbf{7}$, si aggiunge un "oggetto" a destra dei tre numeri scelti più piccoli ($1,\mathbf{2},\bullet,\mathbf{3},\bullet,4,\mathbf{5},\bullet,6,\mathbf{7}$), e infine si ri-enumera ($1,\mathbf{2},3,\mathbf{4},5,6,\mathbf{7},8,9,\mathbf{10}$).

Quindi il numero di scelte di quattro numeri tra 1 e 10 senza coppie consecutive è pari a $\binom{7}{3}$, da cui segue che

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}.$$

(iii) La probabilità $\mathrm{P}(A \cap \{X=7\})$ vale $k/\binom{10}{4}$, dove k è il numero di scelte di quattro numeri senza coppie consecutive di cui il più grande sia 7. Vi è un'unica tale scelta $(1,3,5,7)$, quindi $k=1$. Perciò

$$\mathrm{P}(A|X=7) = \frac{\mathrm{P}(A \cap \{X=7\})}{\mathrm{P}(X=7)} = \frac{1}{\binom{6}{3}}.$$

(iv) Sia $B = A \cap \{\text{“uno dei numeri estratti è il 7”}\}$. Il numero di elementi di B è il numero delle quaterne di A che contengono 7. Necessariamente 7 deve essere o il numero più grande, o il secondo numero più grande. Come abbiamo visto, A ha un unico elemento avente 7 come numero più grande. Contiamo ora gli elementi di A che hanno 7 come secondo numero più grande. Tale conteggio può essere fatto con il seguente schema di scelte successive:

- Il numero più grande può essere 9 o 10 (due esiti);
- bisogna poi scegliere due numeri non consecutivi fra 1 e 5. Il numero di esiti di tale scelta è 6, come si può ottenere con una semplice enumerazione, oppure con il trucco precedente.

Quindi $\mathrm{P}(B) = 12/\binom{10}{4}$. Infine

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|\{\text{“uno dei numeri estratti è il 7”}\}) &= \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(\text{“uno dei numeri estratti è il 7”})} \\ &= \frac{12}{\binom{9}{3}},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il semplice fatto che

$$\mathrm{P}(\text{“uno dei numeri estratti è il 7”}) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}}.$$

Esercizio 3.33. Sia Ω l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di $\{1,2,\dots,N\}$, dove $N \in \mathbb{N}$ con $N \geq 2$. In altre parole

$$\Omega := \{\omega \subseteq \{1,2,\dots,N\} : \omega \neq \emptyset\}.$$

Se $\omega \in \Omega$ sia $X(\omega) := \max(\omega)$ il massimo elemento di ω e $Y(\omega) := \min(\omega)$ il minimo elemento di ω. Infine, sia P la probabilità uniforme su Ω.

(i) Si mostri che, per $n \in \{1,2,\dots,N\}$,

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{2^{n-1}}{2^N - 1}.$$

(ii) Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di X.

(iii) Si determini la densità congiunta di (X,Y).

(iv) Si determini la densità di $X - Y$.

Soluzione 3.33. (i) Anzitutto, è noto che $|\Omega| = 2^N - 1$, visto che un insieme di N elementi ha 2^N sottoinsiemi, di cui uno è l'insieme vuoto. Inoltre, $X(\omega) = n$ se e solo se $n \in \omega$, e $\omega \setminus \{n\} \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}$. Perciò

$$|\{\omega : X(\omega) = n\}| = |\{\omega' : \omega' \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}\} = 2^{n-1},$$

da cui si ottiene la formula richiesta.

(ii) Ricordando (0.3):

$$\begin{aligned}\gamma_X(t) = E\left[e^{tX}\right] &= \sum_{n=1}^{N} e^{tn}\frac{2^{n-1}}{2^N - 1} = \frac{e^t}{2^N - 1}\sum_{n=1}^{N}\left(2e^t\right)^{n-1} \\ &= \frac{e^t}{2^N - 1}\sum_{m=0}^{N-1}\left(2e^t\right)^m = \frac{e^t}{2^N - 1}\frac{(2e^t)^N - 1}{2e^t - 1}.\end{aligned}$$

(iii) Ovviamente, per ogni $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq Y(\omega)$. Pertanto, per $N \geq n \geq m \geq 1$ dobbiamo calcolare

$$\mathrm{P}(X = n, Y = m).$$

Si noti che $X(\omega) = n, Y(\omega) = m$ se e solo se $n,m \in \omega$ e $\omega \setminus \{n,m\} \subseteq \{m+1,\dots,n-1\}$. Perciò, il numero di ω per cui $X(\omega) = n, Y(\omega) = m$ è uguale al numero di sottoinsiemi di $\{m+1,\dots,n-1\}$. Notare che quest'ultimo insieme è vuoto se $n = m$, altrimenti ha $n-m-1$ elementi. Perciò

$$\mathrm{P}(X = n, Y = m) = \begin{cases} \frac{1}{2^N - 1} & \text{se } n = m \\ \frac{2^{n-m-1}}{2^N - 1} & \text{se } n > m. \end{cases}$$

(iv) L'evento $\{X - Y = k\}$, che è non vuoto per $k = 0,1,\dots,N-1$, si può scrivere come unione disgiunta come segue:

$$\{X - Y = k\} = \bigcup_{m=1}^{N-k}\{Y = m, X = m+k\}.$$

Usando allora quanto mostrato al punto (iii),

$$\mathrm{P}(X-Y=k)=\begin{cases}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2^N-1}=\frac{N}{2^N-1} & \text{se } k=0\\ \sum_{m=1}^{N-k}\frac{2^{k-1}}{2^N-1}=(N-k)\frac{2^{k-1}}{2^N-1} & \text{se } 1\le k\le N-1.\end{cases}$$

Esercizio 3.34. Sia $\Omega_n := \{0,1\}^n$, e

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{+\infty}\Omega_n.$$

In altre parole gli elementi di Ω sono sequenze binarie di lunghezza arbitraria, ma finita. Se $\omega\in\Omega$, l'unico $n\ge 1$ per cui $\omega\in\Omega_n$ si dice *lunghezza* di ω, e si denota con $l(\omega)$. Per ogni $\omega\in\Omega$, definiamo

$$\mathrm{p}(\omega) := 2^{-2l(\omega)}.$$

(i) Si mostri che p è una densità discreta su Ω (nel senso della Definizione 1.9). Pertanto, secondo la Proposizione 1.11, essa identifica una probabilità P.

(ii) Sullo spazio di probabilità (Ω,P) appena definito, si definisca per ogni $i\ge 1$ la variabile aleatoria

$$X_i(\omega) := \begin{cases}\omega_i & \text{se } i\le l(\omega)\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Si determini la distribuzione di X_i.

Soluzione 3.34. (i) p è una densità discreta se $\mathrm{p}(\omega)\ge 0$ per ogni ω (il che è ovvio in questo caso) e $\sum_{\omega\in\Omega}\mathrm{p}(\omega)=1$. Ma essendo $|\Omega_n|=2^n$, si ottiene

$$\sum_{\omega\in\Omega}2^{-2l(\omega)}=\sum_{n\ge 1}\sum_{\omega\in\Omega_n}2^{-2n}=\sum_{n\ge 1}2^{-2n}|\Omega_n|=\sum_{n\ge 1}2^{-n}=1,$$

avendo usato la formula (0.4) della serie geometrica.

(ii) Chiaramente la variabile aleatoria X_i assume solo i valori 0 e 1. Inoltre

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_i=1)&=\sum_{n\ge i}\sum_{\omega\in\Omega_n:\omega_i=1}2^{-2l(\omega)}\\ &=\sum_{n\ge i}2^{-2n}|\{\omega\in\Omega_n:\omega_i=1\}|\\ &=\sum_{n\ge i}2^{-2n}2^{n-1}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n\ge i}2^{-n}=2^{-i}.\end{aligned}$$

In altre parole, $X_i\sim\mathrm{Be}(2^{-i})$.

Esercizio 3.35. Un insetto depone un numero aleatorio $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ di uova. Ciascun uovo deposto si schiude con probabilità $p \in (0,1)$, indipendentemente dal numero di uova deposte e dal fatto che le altre si schiudano. Indichiamo con X il numero (aleatorio) di uova che si schiudono.

(i) Qual è il valore di $\mathrm{P}(X = k \,|\, N = n)$, per $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{R}$?

(ii) Si determini la distribuzione di X.

Soluzione 3.35. Per ipotesi

$$\mathrm{P}(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{per } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ si ha dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{P}(X = k | N = n)\, \mathrm{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}\end{aligned}$$

cioè $X \sim \mathrm{Pois}(p\lambda)$.

Esercizio 3.36. Siano X e Y due variabili aleatorie a valori in $\mathbb{N}_0$ aventi la seguente densità congiunta:

$$\mathrm{p}_{X,Y}(k,n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0,1)$ e $\lambda > 0$ sono parametri fissati. Si determinino le densità marginali di X e Y e si calcoli $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Soluzione 3.36. Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{p}_X(k) &= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n \ge k} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \\ \mathrm{p}_Y(n) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}\end{aligned}$$

quindi $X \sim \mathrm{Pois}(p\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Inoltre

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_{n,k \in \mathbb{N}_0} nk\, p_{X,Y}(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_X(n) \sum_{k=0}^{n} k p_{\mathrm{Bin}(n,p)}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_X(n)\, (pn) = p\, \mathrm{E}(X^2) = p(\lambda + \lambda^2),\end{aligned}$$

da cui $\mathrm{Cov}(X,Y) = p\lambda$.

Esercizio 3.37. Siano X, Z e W variabili aleatorie indipendenti con $X \sim \mathrm{Be}(p)$ e $Z, W \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Definiamo $Y := XZ + W$.

(i) Si spieghi la seguente uguaglianza di eventi: per ogni $m \in \{0,1\}$ e $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{X = m, Y = n\} = \{X = m, mZ + W = n\}.$$

(ii) Si determinino le densità discrete di (X,Y) e di Y.

(iii) Usando la densità p_Y ottenuta al punto precedente, si calcoli $\mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

(iv) Si calcoli $\mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$ *senza* utilizzare p_Y.

Soluzione 3.37. (i) Basta notare che per ogni $\omega \in \{X = m\}$ si ha che $Y(\omega) = X(\omega)Z(\omega) + W(\omega) = mZ(\omega) + W(\omega)$.

(ii) Si ha

$$\mathrm{p}_{X,Y}(0,n) = \mathrm{P}(X = 0, Y = n) = \mathrm{P}(X = 0, W = n) = (1-p)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},$$
$$\mathrm{p}_{X,Y}(1,n) = \mathrm{P}(X = 1, Y = n) = \mathrm{P}(X = 1, Z + W = n) = pe^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!},$$

da cui

$$\mathrm{p}_Y(n) = \mathrm{p}_{X,Y}(0,n) + \mathrm{p}_{X,Y}(1,n) = pe^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!} + (1-p)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

(iii) Si ha

$$\mathrm{E}(Y) = p \cdot 2\lambda + (1-p)\cdot\lambda = \lambda(p+1),$$
$$\mathrm{E}(Y^2) = p\cdot[(2\lambda)^2 + (2\lambda)] + (1-p)\cdot(\lambda^2 + \lambda),$$

da cui $\mathrm{Var}(Y) = \lambda^2(p - p^2) - \lambda(1+p)$.

(iv) Applicando le proprietà del valor medio e dell'indipendenza, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Z) + \mathrm{E}(W) = p\lambda + \lambda,\\
\mathrm{E}(Y^2) &= \mathrm{E}(X^2Z^2) + \mathrm{E}(W^2) + 2\,\mathrm{E}(XZW)\\
&= \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Z^2) + \mathrm{E}(W^2) + 2\,\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(W)\\
&= p(\lambda + \lambda^2) + (\lambda + \lambda^2) + 2p\lambda^2 = (p+1)\lambda + (3p+1)\lambda^2,
\end{aligned}$$

che coincidono con i valori trovati in precedenza.

Esercizio 3.38. Un gioco a premi ha il seguente funzionamento. Il montepremi iniziale è $C > 0$. Il concorrente lancia due volte una moneta. Se l'esito del primo e del secondo lancio sono uguali, il concorrente vince l'intero montepremi. In caso contrario il montepremi si dimezza. Il concorrente lancia la moneta una terza volta. Se l'esito del terzo lancio è uguale a quello del secondo, allora il concorrente vince

$C/2$. In caso contrario il montepremi si dimezza ulteriormente, e così via. Sia X il montepremi vinto dal concorrente al termine del gioco.

(Si accetti il fatto che il gioco ha termine, cioè che non sia possibile avere una successione infinita di esiti in cui ogni esito è diverso dal precedente.)

(i) Assumendo che la moneta sia equilibrata, si determini la densità discreta di X.

(ii) Sempre nell'ipotesi che la moneta sia equilibrata, si determini il valor medio di X (si ricordi la serie geometrica (0.4)).

(iii) Supponiamo ora che la moneta non sia equilibrata: la probabilità che esca *testa* è $p \in (0,1)$. Si determinino la densità e il valor medio di X.

Soluzione 3.38. (a) Si tratta di usare lo schema delle prove ripetute indipendenti. Si noti che l'evento $\left\{X = \frac{C}{2^{k-1}}\right\}$ è costituito dalle sequenze di esiti di lanci di una moneta in cui nei primi k esiti le teste e le croci si alternano, mentre l'esito $(k+1)$-esimo è uguale al k-esimo. Limitandosi ai primi $k+1$ lanci, ci sono due sequenze con questa proprietà, a seconda che l'esito del primo lancio sia testa o croce. Ognuna di queste sequenze ha probabilità $\frac{1}{2^{k+1}}$. Quindi

$$\mathrm{P}\left(X = \frac{C}{2^{k-1}}\right) = \frac{2}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

(b) Ne segue che, ricordando la somma della serie geometrica (0.4),

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\,\mathrm{P}(X=x) = \sum_{k\geq 1} \frac{C}{2^{k-1}}\frac{1}{2^k} = \frac{C}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{4^{k-1}} = \frac{C}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2C}{3}.$$

(c) È ancora vero che l'evento $\left\{X = \frac{C}{2^{k-1}}\right\}$, limitandosi ai primi $k+1$ lanci, è costituito da due sequenze, quella che inizia con una testa e quella che inizia con una croce. Non necessariamente queste due sequenze hanno la stessa probabilità. Conviene distinguere due casi:
Primo caso: $k = 2n$, cioè k pari. La sequenza di $k+1 = 2n+1$ lanci che inizia per testa contiene n teste e $n+1$ croci, e ha dunque probabilità $p^n(1-p)^{n+1}$. Analogamente, la sequenza che comincia per croce ha probabilità $p^{n+1}(1-p)^n$. Pertanto

$$\mathrm{P}\left(X = \frac{C}{2^{2n-1}}\right) = p^{n+1}(1-p)^n + p^n(1-p)^{n+1} = p^n(1-p)^n.$$

Secondo caso: $k = 2n-1$, cioè k dispari. In questo caso le due sequenze dei primi $k+1 = 2n$ lanci contengono, rispettivamente, $n+1$ teste e $n-1$ croci e viceversa, da cui segue che

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X = \frac{C}{2^{2n-2}}\right) &= p^{n+1}(1-p)^{n-1} + p^{n-1}(1-p)^{n+1}\\ &= p^{n-1}(1-p)^{n-1}\left[p^2 + (1-p)^2\right].\end{aligned}$$

Infine

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{n\geq 1} \frac{C}{2^{2n-1}} p^n(1-p)^n + \left[p^2+(1-p)^2\right] \sum_{n\geq 1} \frac{C}{2^{2n-2}} p^{n-1}(1-p)^{n-1} \\
&= C\left[\frac{1}{2}p(1-p)+p^2+(1-p)^2\right] \sum_{n\geq 1} \left(\frac{p(1-p)}{4}\right)^{n-1} \\
&= C\,\frac{\frac{1}{2}p(1-p)+p^2+(1-p)^2}{1-\frac{p(1-p)}{4}}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.39. Elena lancia ripetutamente una moneta. La probabilità di ottenere testa vale $p \in (0,1)$. Detto $X_k \in \{0,1\}$ l'esito dell'k-esimo lancio (testa = 1, croce = 0), indichiamo con S,T rispettivamente il primo e secondo istante in cui esce testa:

$$
S := \min\{k \in \mathbb{N} :\ X_k = 1\}, \quad T := \min\{k \in \mathbb{N}, k > S :\ X_k = 1\},
$$

con la convenzione $\min \emptyset := +\infty$. Poniamo quindi

$$
U := T - S
$$

e definiamo infine per $k \in \mathbb{N}$ gli eventi

$$
A_k := \{X_k = 1\}.
$$

(i) Fissiamo $n,m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Si esprima l'evento $\{S = m, T = n\}$ in funzione degli eventi $A_1,\dots,A_n$ mediante opportune operazioni insiemistiche. Si deduca quindi la densità congiunta

$$
\mathrm{p}_{S,T}(m,n) = \mathrm{P}(S = m, T = n) = (1-p)^{n-2}p^2\, \mathbb{1}_{\{1\leq m<n\}}.
$$

(ii) Si determini la densità congiunta delle variabili aleatorie S,U. Si deduca che S e U sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione marginale (quale?).

(iii) Si calcolino $\mathrm{E}(T)$ e $\mathrm{Var}(T)$.

Soluzione 3.39. (i) Si ha

$$
\{S = m, T = n\} = \Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i^c\Big) \cap A_m \cap \Big(\bigcap_{i=m+1}^{n-1} A_i^c\Big) \cap A_n,
$$

e dato che gli eventi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti con la stessa probabilità p si deduce che per $m,n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ si ha

$$
\mathrm{p}_{S,T}(m,n) = (1-p)^{m-1}p(1-p)^{n-m-1}1 = (1-p)^{n-2}p^2.
$$

(ii) Per ogni $m,\ell \in \mathbb{N}$ si ha

$$
\{S = m, U = \ell\} = \{S = m, T = m+\ell\},
$$

da cui

$$\mathrm{p}_{S,U}(m,\ell) = \mathrm{p}_{S,T}(m,m+\ell) = p^2(1-p)^{m+\ell-2} = [p(1-p)^{m-1}][p(1-p)^{\ell-1}].$$

Questo mostra che $S,U \sim \mathrm{Geo}(p)$ e che S e U sono indipendenti.

(iii) Si ha $T = S+U$ da cui, per linearità del valor medio e ricordando (3.87), si ottiene $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(S)+\mathrm{E}(U) = \frac{1}{p}+\frac{1}{p} = \frac{2}{p}$. Dato che S e U sono indipendenti, ricordando (3.88) si ottiene $\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(S)+\mathrm{Var}(U) = 2\frac{1-p}{p^2}$.

Esercizio 3.40. Stefano lancia ripetutamente un dado regolare a sei facce. Indichiamo con X_k il risultato dell'k-esimo lancio, per $k \in \mathbb{N}$. Matteo sta a guardare gli esiti dei lanci, aspettando il primo istante T in cui esce un numero in $\{1,2,3,4,5\}$. Quando ciò accade, si appunta su un foglio il numero uscito $Y := X_T$.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1,\ldots,X_n$. Si deduca quindi la densità discreta di T e la si riconosca.
(ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$, si esprima l'evento $\{T = n, Y = a\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1,\ldots,X_n$. Si deduca quindi la densità discreta congiunta delle variabili aleatorie T e Y.
(iii) Si determini la distribuzione di Y. Le variabili T e Y sono indipendenti?

Soluzione 3.40. (i) Si osservi che

$$\{T = n\} = \{X_1 = 6,\ldots,X_{n-1} = 6, X_n \neq 6\},$$

da cui, usando l'indipendenza delle X_k, otteniamo

$$\mathrm{P}(T = n) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1},$$

cioè $T \sim \mathrm{Geo}(\frac{5}{6})$.

(ii) Per ogni $n \geq 1$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$ si ha

$$\{T = n, Y = a\} = \{X_1 = 6,\ldots,X_{n-1} = 6, X_n = a\},$$

da cui segue che

$$\mathrm{p}_{T,Y}(n,a) = \frac{1}{6^n}.$$

(iii) Abbiamo

$$\mathrm{p}_Y(a) = \sum_{n\geq 1} \mathrm{p}_{T,Y}(n,a) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{5}, \qquad \forall a \in \{1,2,3,4,5\},$$

cioè $Y \sim \mathrm{Unif}(\{1,2,3,4,5\})$. Dunque, per ogni $n \geq 1$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$

$$\mathrm{p}_T(n)\,\mathrm{p}_Y(a) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{5} = \frac{1}{6^n} = \mathrm{p}_{T,Y}(n,a),$$

da cui segue che T e Y sono indipendenti.

Esercizio 3.41. Consideriamo una famiglia di urne, indicizzate dai numeri naturali incluso lo zero: l'urna k-esima, con $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$, contiene 1 pallina nera e k palline bianche. Katia sceglie un numero casuale X, con distribuzione $\mathrm{Pois}(\lambda)$, e pesca una pallina a caso dall'urna numero X. Indichiamo con A l'evento "la pallina pescata da Katia è nera".

(i) Si determini $\mathrm{P}(A|X=k)$, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$. Si deduca che $\mathrm{P}(A) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.
(ii) Si determini $\mathrm{q}(k) := \mathrm{P}(X=k|A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$.
(iii) Si mostri che $\mathrm{q}(\cdot)$ coincide con la densità discreta della variabile aleatoria $Y := X-1$ rispetto alla probabilità $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X \ge 1)$.
(iv) Si calcoli $\mathrm{E}(X|A)$, ossia il valore atteso di X rispetto alla probabilità $\mathrm{P}(\,\cdot\,|A)$.

Soluzione 3.41. (i) Per costruzione $\mathrm{P}(A|X=k) = \frac{1}{k+1}$, quindi per la formula delle probabilità totali

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \mathrm{P}(A|X=k)\,\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda}\big(1-\mathrm{P}(X=0)\big) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda},$$

avendo fatto il cambio di variabili $k+1=m$.

(ii) Per la formula di Bayes

$$\mathrm{q}(k) = \frac{\mathrm{P}(A|X=k)\,\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}{\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}.$$

(iii) Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{P}(Y=k|X\ge 1) = \mathrm{P}(X=k+1|X\ge 1) = \frac{\mathrm{P}(X=k+1)}{\mathrm{P}(X\ge 1)} = \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \mathrm{q}(k).$$

(iv) Usando la formula per $\mathrm{q}(k)$ ricavata sopra si ha

$$\mathrm{E}(X|A) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} k\,\mathrm{q}(k) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!},$$

e scrivendo $k=(k+1)-1$ si ottiene

$$\mathrm{E}(X|A) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\left(\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\big(\lambda e^{\lambda} - (e^{\lambda}-1)\big) = \frac{\lambda-(1-e^{-\lambda})}{1-e^{-\lambda}}.$$

Capitolo 6
Variabili aleatorie assolutamente continue

6.2 Variabili aleatorie reali assolutamente continue

Esercizio 6.1. Sia X una variabile aleatoria reale assolutamente continua e sia (a,b) un intervallo aperto (limitato o illimitato) di $\mathbb{R}$, tale che $\mathrm{P}(X \in (a,b)) = 1$. Sia $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^1$ tale che $\varphi'(x) > 0$ (oppure < 0) per ogni $x \in (a,b)$. Allora l'immagine di φ è un intervallo aperto (c,d). L'obiettivo di questo esercizio è di mostrare che la variabile aleatoria $Y := \varphi(X)$ è assolutamente continua, con densità

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X\big(\varphi^{-1}(y)\big) \mathbb{1}_{(c,d)}(y), \tag{6.25}$$

dove $\varphi^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ indica la funzione inversa di φ.

Si consideri solo il caso $\varphi'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ (il caso $\varphi'(x) < 0$ è analogo).

(i) Si mostri che la funzione di ripartizione di Y è data da

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq c \\ F_X(\varphi^{-1}(y)) & \text{se } c < y < d \\ 1 & \text{se } y \geq d \end{cases}$$

(ii) Assumendo che F_X sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, si concluda che Y è assolutamente continua, con densità f_Y data da (6.25).

(iii) Si giunga alla stessa conclusione senza assumere che F_X sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, usando la formula di cambio di variabili (6.12).

Soluzione 6.1. Assumiamo che $\varphi'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ (il caso $\varphi'(x) < 0$ è analogo). Dunque φ è strettamente crescente, pertanto l'immagine $\varphi((a,b))$ è un intervallo aperto (c,d), la funzione φ ammette inversa $\varphi^{-1} : (c,d) \to (a,b)$, anch'essa di classe $\mathscr{C}^1$, e per ogni $y \in (c,d)$

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)}. \tag{S6.1}$$

(i) Determiniamo la funzione di ripartizione di Y. Innanzitutto $F_Y(y) = 0$ se $y \leq c$ mentre $F_Y(y) = 1$ se $y \geq d$, perché per ipotesi $\mathrm{P}(X \in (a,b)) = 1$, e dunque $\mathrm{P}(Y \in (c,d)) = 1$. Per $y \in (c,d)$, usando la monotonia stretta di φ, si ha che $\varphi(x) \leq y$ se e solo se $x \leq \varphi^{-1}(y)$, quindi

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(\varphi(X) \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \varphi^{-1}(y)) = F_X(\varphi^{-1}(y)). \tag{S6.2}$$

(ii) Assumiamo che F_X sia $\mathscr{C}^1$ a tratti. Allora anche F_Y lo è, perché φ^{-1} è una funzione di classe $\mathscr{C}^1$. Per la Proposizione 6.16, Y è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1})'(y)\, \mathbb{1}_{(c,d)}(y),$$

e ricordando (S6.1) si ottiene la relazione cercata (6.25).

(iii) In completa generalità, per $y \in (c,d)$ possiamo scrivere, grazie a (S6.2) e al fatto che $f_X(x) = 0$ se $x \notin (a,b)$,

$$F_Y(y) = F_X(\varphi^{-1}(y)) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dato che la funzione ristretta $\varphi^{-1} : (c,y) \to (a, \varphi^{-1}(y))$ è di classe $\mathscr{C}^1$, con il cambio di variabili $x = \psi(t) := \varphi^{-1}(t)$ (si ricordi la formula (6.12)) l'integrale può essere riscritto come

$$F_Y(y) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^y f_X(\varphi^{-1}(t))\,(\varphi^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ricordando la relazione (S6.1) e indicando con $g(y)$ la funzione nel membro destro di (6.25), abbiamo mostrato che $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)\,\mathrm{d}t$, per ogni $y \in (c,d)$. È facile verificare che questa relazione vale anche per $y \leq c$ e $y \geq d$, perché entrambi i membri valgono 0 e 1 rispettivamente. Ricordando la Definizione 6.11, segue che Y è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità $f_Y(y) = g(y)$, che è esattamente quanto dovevamo dimostrare.

Esercizio 6.2. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie reali indipendenti, con la stessa distribuzione. Indicando con $F = F_{X_i}$ la comune funzione di ripartizione, facciamo l'ipotesi che F sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, così che $f(x) = F'(x)$ è la densità delle X_i.

Si mostri che $Z := \max(X_1, \ldots, X_n)$ e $W := \min(X_1, \ldots, X_n)$ sono variabili aleatorie assolutamente continue, con densità

$$f_Z(x) = n\left(F(x)\right)^{n-1} f(x), \qquad f_W(x) = n\left(1 - F(x)\right)^{n-1} f(x). \tag{6.26}$$

Soluzione 6.2. Applicando la Proposizione 3.93 (la cui dimostrazione è valida, senza alcuna modifica, per variabili aleatorie generali), le funzioni di ripartizione di W

e Z sono date rispettivamente da

$$F_Z(x) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x) = F(x)^n, \quad F_W(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n}[1 - F_{X_k}(x)] = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n.$$

Dato che F è per ipotesi $\mathscr{C}^1$ a tratti, anche F_Z e F_W lo sono; per la Proposizione 6.16, Z e W sono variabili aleatorie assolutamente continue, con densità

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= (F_Z)'(x) = n\big(F(x)\big)^{n-1} F'(x) = n\big(F(x)\big)^{n-1} f(x), \\ f_W(x) &= (F_W)'(x) = n\big(1 - F(x)\big)^{n-1} F'(x) = n\big(1 - F(x)\big)^{n-1} f(x). \end{aligned}$$

6.3 Classi notevoli di variabili aleatorie reali assolutamente continue

Esercizio 6.3. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$, definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Per $s \in [0, +\infty)$, definiamo

$$\mathrm{P}^{(s)} := \mathrm{P}(\,\cdot\,|X > s), \qquad X^{(s)} := X - s.$$

Si mostri che la variabile aleatoria $X^{(s)}$, rispetto alla probabilità (condizionale) $\mathrm{P}^{(s)}$, ha distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$, per ogni $s \in [0, \infty)$.

[*Sugg.* Si calcoli la funzione di ripartizione $\mathrm{P}^{(s)}(X^{(s)} \le x)$, sfruttando la Proposizione 6.31.]

Soluzione 6.3. Segue dalla Proposizione 6.31 che per ogni $x \ge 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{(s)}(X^{(s)} \le x) &= \mathrm{P}(X - s \le x \,|\, X > s) = \mathrm{P}(X \le x + s \,|\, X > s) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X > x + s \,|\, X > s) = 1 - \mathrm{P}(X > x) = \mathrm{P}(X \le x). \end{aligned}$$

Dato che per $x < 0$ si ha $\mathrm{P}^{(s)}(X^{(s)} \le x) = \mathrm{P}(X \le x) = 0$, abbiamo mostrato che la variabile aleatoria $X^{(s)}$ rispetto alla probabilità (condizionale) $\mathrm{P}^{(s)}$ ha la stessa funzione di ripartizione, e dunque la stessa distribuzione, della variabile aleatoria X rispetto alla probabilità originale P, cioè $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

6.4 Vettori aleatori assolutamente continui *

Esercizio 6.4 (*). Sia (X, Y) un vettore aleatorio bidimensionale assolutamente continuo. Supponiamo che esistano due funzioni integrabili $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tali che

$$f_{X,Y}(x, y) = a(x)\, b(y), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si deduca che X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

Soluzione 6.4. Per ipotesi le funzioni a e b sono positive e integrabili, pertanto

$$A := \int_{\mathbb{R}} a(x)\,\mathrm{d}x \in [0,\infty)\,, \qquad B := \int_{\mathbb{R}} b(y)\,\mathrm{d}y \in [0,\infty)\,.$$

Inoltre, applicando il teorema di Fubini-Tonelli, il fatto che l'integrale della densità $f_{X,Y}$ su $\mathbb{R}^2$ valga uno conduce a

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} a(x)\,b(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\,B\,,$$

da cui segue in particolare che $A > 0$, $B > 0$ e $B = A^{-1}$. Applicando ora la Proposizione 6.40, e in particolare la formula (6.53), sappiamo che X e Y sono variabili aleatorie reali assolutamente continue, con densità rispettive

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} a(x)\,b(y)\,\mathrm{d}y = a(x)\left(\int_{\mathbb{R}} b(y)\,\mathrm{d}y\right) = B\,a(x)\,, \\ f_Y(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} a(x)\,b(y)\,\mathrm{d}x = b(y)\left(\int_{\mathbb{R}} a(x)\,\mathrm{d}x\right) = A\,b(y)\,. \end{aligned}$$

Dato che $AB = 1$, segue facilmente che $f_X(x) f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ricordando la Proposizione 6.41, l'indipendenza di X e Y è dimostrata.

Esercizio 6.5 (*). Sia (X,Y) un vettore aleatorio bidimensionale assolutamente continuo. Supponiamo che esista un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$f_{X,Y}(x_0,y_0) \neq f_X(x_0)\,f_Y(y_0)\,.$$

Assumendo che le funzioni $f_{X,Y}$, f_X e f_Y siano continue rispettivamente nei punti (x_0,y_0), x_0 e y_0, si deduca che le variabili aleatorie X e Y *non* sono indipendenti.

Soluzione 6.5. Indichiamo con $B((x_0,y_0),r)$ la palla aperta di raggio r centrata nel punto (x_0,y_0):

$$B((x_0,y_0),r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}\,,$$

È sufficiente mostrare che esiste $r > 0$ tale che

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in B\big((x_0,y_0),r\big)\,. \tag{S6.3}$$

Infatti, dato che la palla $B((x_0,y_0),r)$ (come ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ aperto non vuoto) ha misura 2-dimensionale strettamente positiva, segue dalla Proposizione 6.41 che X e Y non sono indipendenti.

Se la relazione (S6.3) non fosse verificata, per ogni $n \in \mathbb{N}$ dovrebbe esistere un punto $(x_n,y_n) \in B((x_0,y_0),\frac{1}{n})$ tale che

$$f_{X,Y}(x_n,y_n) = f_X(x_n)\,f_Y(y_n)\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{S6.4}$$

Si osservi che, per costruzione, $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ in $\mathbb{R}^2$ e dunque $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ in $\mathbb{R}$. Per la continuità di f_X in x_0, di f_Y in y_0 e di $f_{X,Y}$ in (x_0, y_0), si può passare al limite $n \to \infty$ in (S6.4), ottenendo $f_{X,Y}(x_0, y_0) = f_X(x_0)\, f_Y(y_0)$, che è una contraddizione delle ipotesi.

6.5 Esempi e applicazioni

Esercizio 6.6. Sia $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ un processo di Poisson di intensità λ. Per ogni intervallo limitato $(a,b] \subseteq [0,\infty)$, definiamo la variabile aleatoria

$$N_{(a,b]} := N_b - N_a \,.$$

Se $I = \bigcup_{i=1}^n I_i \subseteq [0,\infty)$ è un'unione finita di intervalli $I_i = (a_i, b_i]$ disgiunti, definiamo

$$N_I := \sum_{i=1}^n N_{I_i} = \sum_{i=1}^n (N_{b_i} - N_{a_i}) \,.$$

Indichiamo con $|(a,b]| = b - a$ la lunghezza di un intervallo e, analogamente, definiamo $|I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$ come la lunghezza totale del sottoinsieme $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$.

Fissati arbitrariamente $k \geq 2$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$, definiamo gli intervalli $I_1, \ldots, I_k$ ponendo $I_j = (t_{j-1}, t_j]$. Per il Teorema 6.55, le variabili aleatorie $N_{I_1}, \ldots, N_{I_k}$ sono indipendenti, con distribuzione $N_{I_j} \sim \mathrm{Pois}(\lambda |I_j|)$.

Siano infine A e B due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti di $\{1, \ldots, k\}$. Definendo $I := \bigcup_{i\in A} I_i$ e $J := \bigcup_{j\in B} I_j$, si mostri che le variabili aleatorie N_I e N_J sono indipendenti, con distribuzioni $N_I \sim \mathrm{Pois}(\lambda|I|)$ e $N_J \sim \mathrm{Pois}(\lambda|J|)$.

Soluzione 6.6. Dato che le variabili aleatorie $N_{I_1}, \ldots, N_{I_k}$ sono indipendenti e i sottoinsiemi A e B sono disgiunti, segue dall'indipendenza a blocchi (Proposizione 3.39) che i due vettori aleatori $X := (N_{I_i})_{i\in A}$ e $Y := (N_{I_j})_{j\in B}$ sono indipendenti. Di conseguenza, grazie all'indipendenza per trasformazioni (Proposizione 3.40), le variabili aleatorie $N_I = \sum_{i\in A} N_{I_i} = f(X)$ e $N_J = \sum_{j\in B} N_{I_j} = g(Y)$ sono indipendenti. Infine, dato che $N_{I_i} \sim \mathrm{Pois}(\lambda|I_i|)$ e dato che la somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti è di Poisson, con parametro dato dalla somma dei parametri (Proposizione 3.109), si ottiene infine che

$$N_I = \sum_{i\in A} N_{I_i} \sim \mathrm{Pois}\Big(\lambda \sum_{i\in A} |I_i|\Big) = \mathrm{Pois}\big(\lambda|I|\big) \,,$$

e un conto del tutto analogo vale per N_J.

6.7 Esercizi di riepilogo

Ricordiamo che "i.i.d." significa "indipendenti e identicamente distribuite". Gli esercizi segnalati con un asterisco richiedono l'uso dei vettori aleatori.

Esercizio 6.7. Data una variabile aleatoria $X \sim \mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$, si mostri che $Y := \cos(X)$ è una variabile assolutamente continua e se ne determini la densità.

Soluzione 6.7. Per ipotesi $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$, quindi

$$\mathrm{P}(X \in A) = \int_{A \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \frac{1}{\pi} \, \mathrm{d}x = \frac{|A \cap (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|}{\pi} .$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y. Chiaramente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$, dal momento che $\cos(x) \in [0,1]$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si noti che per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y \in [0,1]$ si ha $\cos(x) \le y$ se e solo se $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})$, quindi per ogni $y \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(\cos(X) \le y) \\ &= \mathrm{P}\big(X \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \tfrac{\pi}{2})\big) \\ &= \frac{|(-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})|}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(y)\right) . \end{aligned}$$

Dato che la funzione F_Y è $\mathscr{C}^1$ a tratti (è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$), segue dalla Proposizione 6.16 che Y è assolutamente continua, con densità

$$f_Y(y) = (F_Y)'(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \mathbb{1}_{(0,1)}(y) .$$

Esercizio 6.8. Sia X un punto scelto uniformemente nell'intervallo $[0,2]$. Qual è la probabilità che il triangolo equilatero di lato X abbia area maggiore di 1?

Soluzione 6.8. L'area del triangolo equilatero di lato X vale $A := \frac{\sqrt{3}}{4} X^2$, pertanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A > 1) &= \mathrm{P}\left(X^2 > \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \mathrm{P}\left(X \in \left(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}\right) \cup \left(\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty\right)\right) \\ &= \int_{(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}) \cup (\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty)} f_X(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}) \cup (\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty)} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(0,2)}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{(3)^{1/4}}\right) = 1 - 3^{-1/4} \simeq 0.24 . \end{aligned}$$

Esercizio 6.9. Sia $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ e sia $Y := 4X(1-X)$.

(i) Si determini la funzione di ripartizione di Y, si deduca che la variabile Y è assolutamente continua e se ne calcoli la densità.

(ii) Si calcoli $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (che è ben definita: perché?).

Soluzione 6.9. (i) Chiaramente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ mentre $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$, quindi basta concentrarsi sul caso $0 \le y \le 1$. In questo caso, la disequazione $4x(1-x) \le y$ ha come soluzioni $x \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})$ oppure $x \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})$, pertanto

$$F_Y(y) \;=\; \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}\left(X \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})\right) + \mathrm{P}\left(X \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})\right).$$

Notiamo che $\mathrm{P}(X \le x) = x$ e $\mathrm{P}(X \ge x) = 1-x$ se $x \in [0,1]$. Dato che i punti $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-y})$ sono nell'intervallo $[0,1]$ per $y \in [0,1]$, segue che

$$F_Y(y) \;=\; 1 - \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y}) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y}) \;=\; 1-\sqrt{1-y}.$$

In definitiva,

$$F_Y(y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1-\sqrt{1-y} & \text{se } y \in [0,1] \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$

La funzione $F_Y(\cdot)$ è dunque $\mathscr{C}^1$ a tratti, di conseguenza la variabile Y è assolutamente continua. La sua densità è data da

$$f_Y(y) \;=\; F_Y'(y) \;=\; \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-y}}\, 1_{(0,1)}(y).$$

(ii) La covarianza di X e Y è ben definita perché entrambe le variabili aleatorie sono in L^2 (infatti sono limitate). Per le proprietà del valor medio

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; \mathrm{E}(4X(1-X)) \;=\; 4\,\mathrm{E}(X) - 4\,\mathrm{E}(X^2),$$
$$\mathrm{E}(XY) \;=\; \mathrm{E}(X \cdot 4X(1-X)) \;=\; 4\,\mathrm{E}(X^2) - 4\,\mathrm{E}(X^3),$$

quindi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \;=\; 4\,\mathrm{E}(X^2)(1+\mathrm{E}(X)) - 4(\mathrm{E}(X^3) + \mathrm{E}(X)^2).$$

Per la Proposizione 6.21, si calcola

$$\mathrm{E}(X^n) \;=\; \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

da cui segue che $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$ e $\mathrm{E}(X^3) = \frac{1}{4}$, dunque

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; 4\frac{1}{2} - 4\frac{1}{3} \;=\; \frac{2}{3},$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \;=\; 0.$$

Esercizio 6.10. Sia X una variabile aleatoria reale assolutamente continua con densità
$$f_X(x) = -\log(x^c)\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

(i) Si determini il valore di $c \in \mathbb{R}$ affinché f_X sia effettivamente una densità, e si determini la funzione di ripartizione di X.

(ii) Sia $Y = -\log X$. Si mostri che $Y \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\lambda)$, determinando α e λ.

Soluzione 6.10. (i) Si deve avere
$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = -c\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = -c[x\log x - x]_0^1 = c\,,$$
da cui $c = 1$. $F_X(x) = 0$ per $x \le 0$, $F_X(x) = 1$ per $x > 1$, e, per $0 < x \le 1$:
$$F_X(x) = -\int_0^x \log(t)\,\mathrm{d}t = x - x\log(x).$$

(ii) Si noti che $-\log X$ assume valori positivi. Allora, per $t \ge 0$:
$$\mathrm{P}(Y \le t) = \mathrm{P}(X \ge e^{-t}) = 1 - F_X(e^{-t}) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$
Derivando rispetto a t si ottiene
$$f_Y(x) = xe^{-x}\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x),$$
ossia $Y \sim \mathrm{Gamma}(2,1)$.

Esercizio 6.11. Sia $X \sim \mathrm{U}(-1,1)$. Si determini la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Y := X^+ = \max(X,0)$. Si deduca che la distribuzione di Y non è né discreta né assolutamente continua.

Soluzione 6.11. Chiaramente $Y \ge 0$, quindi per $y < 0$ si ha $F_Y(y) = \mathrm{P}(X \le y) = 0$. Per $y \ge 0$ si ha $\max(x,0) \le y$ se e solo se $x \le t$, quindi
$$F_Y(y) \;=\; F_X(y) \;=\; \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_{-1}^{\min(y,1)} 1\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\min(y,1)+1}{2}\,.$$
In definitiva
$$F_Y(y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{y+1}{2} & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$
Si noti che $F_Y(0+) = F_Y(0) = \frac{1}{2} \neq F_Y(0-) = \lim_{y\uparrow 0} F_Y(y) = 0$, quindi la funzione $F_Y(y)$ non è continua nel punto $y = 0$; di conseguenza, la variabile aleatoria

Y non è assolutamente continua. Inoltre, la variabile aleatoria Y non può essere nemmeno discreta: infatti, se lo fosse, per la relazione (5.6) si dovrebbe avere che $1 = \sum_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{P}(Y = y) = \sum_{y\in\mathbb{R}}(F_Y(y) - F_Y(y-))$; ma $F_Y(y) = F_Y(y-)$ per ogni $y \neq 0$ e quindi l'ultima somma vale $F_Y(0) - F_Y(0-) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 6.12. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := 3x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) .$$

Si considerino le variabili aleatorie

$$A := -\log X , \qquad B := \min\{1, A\} .$$

(i) Si calcoli la funzione di ripartizione della variabile aleatoria A e se ne identifichi la distribuzione (notevole).

(ii) Consideriamo la seguente equazione di secondo grado per l'incognita x, con coefficienti determinati dalla variabile aleatoria A:

$$x^2 + 3Ax + 2A^2 + 4 = 0 .$$

Qual è la probabilità che l'equazione non ammetta soluzioni reali?

(iii) Si calcoli la funzione di ripartizione di B e si deduca che B non è una variabile aleatoria assolutamente continua. B è una variabile aleatoria discreta?

Soluzione 6.12. (i) Per $t \geq 0$ si ha $F_A(t) = \mathrm{P}(A \leq t) = \mathrm{P}(X \geq e^{-t}) = \int_{e^{-t}}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-3t}$, mentre chiaramente $F_A(t) = 0$ per $t < 0$. Dato che F_A è $\mathscr{C}^1$ a tratti, la variabile aleatoria A è assolutamente continua con densità

$$f_A(t) = F_A'(t) = 3\,e^{-3t}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) ,$$

ossia $A \sim \mathrm{Exp}(3)$.

(ii) L'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni x reali se e solo se il discriminante $\Delta := b^2 - 4ac$ è strettamente negativo, ossia

$$(3A)^2 - 4(2A^2 + 4) = 9A^2 - 8A^2 - 16 = A^2 - 16 < 0 ,$$

e la probabilità di tale evento vale

$$\mathrm{P}(A^2 - 16 < 0) = \mathrm{P}(A^2 < 16) = \mathrm{P}(A < 4) = 1 - e^{-12} ,$$

dove la seconda disuguaglianza è valida perché $A \geq 0$.

(iii) Per $t < 1$ si ha $F_B(t) = \mathrm{P}(B \leq t) = \mathrm{P}(A \leq t) = F_A(t)$, mentre per $t \geq 1$ si ha $F_B(t) = 1$. Quindi

$$F_B(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-3t} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases} .$$

Dato che $F_B(1-) = 1 - e^{-3}$ mentre $F_B(1) = 1$, si ha che $\mathrm{P}(B = 1) = F_B(1) - F_B(1-) = e^{-3} > 0$, dunque B non è assolutamente continua. Allo stesso tempo, B non è discreta, perché in questo caso per la relazione (5.6) si dovrebbe avere che $1 = \sum_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{P}(B = t) = \sum_{t\in\mathbb{R}}(F_B(t) - F_B(t-))$, ma $F_B(t) - F_B(t-) = 0$ per ogni $t \neq 1$ e dunque $\sum_{t\in\mathbb{R}}(F_B(t) - F_B(t-)) = F_B(1) - F_B(1-) = e^{-3} < 1$.

Esercizio 6.13. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$ e sia

$$Z := \frac{1}{X^r},$$

con $r \in \mathbb{R}$ parametro fissato.

(i) Per quali valori di $p \in (0,\infty)$ si ha $\mathrm{E}(|Z|^p) < \infty$, ossia $Z \in L^p$?

(ii) Si determini la distribuzione della variabile aleatoria Z.

[*Sugg.* Si calcoli la funzione di ripartizione di Z, separando i casi $r < 0$, $r = 0$ e $r > 0$.]

Soluzione 6.13. (i) Con un facile calcolo, applicando la Proposizione 6.21, si ha

$$\mathrm{E}(|Z|^p) = \int_0^1 x^{-rp}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-rp} < \infty & \text{se } rp < 1 \\ +\infty & \text{se } rp \geq 1 \end{cases},$$

dato che una primitiva di x^{-rp} è $\frac{1}{1-rp}x^{1-rp}$ se $rp \neq 1$ e $\log x$ se $rp = 1$. Quindi $Z \in L^p$ se e solo se $rp < 1$. Dunque, se $r \leq 0$, $Z \in L^p$ per ogni $p \in (0,\infty)$, mentre se $r > 0$ si ha che $Z \in L^p$ per ogni $p \in (0, \frac{1}{r})$ mentre $Z \notin L^p$ se $p \geq \frac{1}{r}$.

(ii) Se $r = 0$ si ha chiaramente $Z \equiv 1$, ossia Z è quasi certamente costante, dunque Z è una variabile aleatoria discreta con densità discreta $\mathrm{p}_Z(x) = \mathbb{1}_{\{1\}}(x)$.
Sia ora $r \neq 0$. Calcoliamo la funzione di ripartizione F_Z di Z. Chiaramente $F_Z(x) = 0$ per $x \leq 0$, perché $Z > 0$. Per $x > 0$ si ha

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(Z \leq x) = \mathrm{P}(X^{-r} \leq x).$$

Se $r > 0$ si ha $X^{-r} \leq x$ se e solo se $X \geq x^{-1/r}$, dunque

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(X \geq \tfrac{1}{x^{1/r}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{1/r}} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Dato che F_Z è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che Z è assolutamente continua con densità

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{r}\frac{1}{x^{1+1/r}}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$

Se invece $r < 0$ si ha $X^{-r} \leq x$ se e solo se $X \leq x^{-1/r} = x^{1/|r|}$, dunque

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(X \leq x^{1/|r|}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^{1/|r|} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Quindi F_Z è $\mathscr{C}^1$ a tratti e segue che Z è assolutamente continua con densità

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{|r|} x^{\frac{1}{|r|}-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

Esercizio 6.14. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(-1,+1)$. Si mostri che $Z := X+Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Z(z) = \frac{1}{4}(2-|z|)\, \mathbb{1}_{(-2,+2)}(z).$$

Soluzione 6.14. Z è assolutamente continua perché somma di variabili aleatorie assolutamente continue indipendenti, grazie alla Proposizione 6.25, e la sua densità è data dalla convoluzione

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= (f_X * f_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-1,+1)}(x)\, \mathbb{1}_{(-1,+1)}(z-x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-1,+1)\cap(z-1,z+1)}(x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$(-1,+1)\cap(z-1,z+1) = \begin{cases} (z-1,1) & \text{se } z \in [0,2) \\ (-1,z+1) & \text{se } z \in (-2,0) \\ \emptyset & \text{se } x \notin (-2,+2) \end{cases},$$

pertanto $f_Z(z) = 0$ se $z \notin (-2,+2)$, mentre per ogni $z \in (-2,+2)$ la lunghezza dell'intervallo $(-1,+1)\cap(z-1,z+1)$ è pari a $2-|z|$ e quindi $f_Z(z) = \frac{1}{4}(2-|z|)$.

Esercizio 6.15. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, entrambe con distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$, e si definisca $Z := X - Y$.

(i) Si mostri che Z è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} e^{-|z|}.$$

[*Sugg.* Si ponga $Y' := -Y$, così che $Z = X + Y'$.]

(ii) Si mostri che $|Z| \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Soluzione 6.15. (i) Si noti che la variabile aleatoria $W := -Y$ è assolutamente continua con densità $f_W(w) = f_Y(-w)$ ed è indipendente da X (perché?). Dato che $Z = X - Y = X + W$, applichiamo la Proposizione 6.25: dato che $f_X(x) = f_Y(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, per $z \geq 0$ si ha

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(x-z)\, \mathrm{d}x = \int_z^{+\infty} e^{-x} e^{-(x-z)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{-z}.$$

Analogamente per $z \le 0$ si ha $f_Z(z) = \frac{1}{2}e^z$. In definitiva $f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$.

(ii) La funzione di ripartizione $F_{|Z|}(t)$ è chiaramente nulla per $t < 0$, mentre per $t \ge 0$

$$F_{|Z|}(t) = \mathrm{P}(|Z| \le t) = \mathrm{P}(-t \le Z \le t) = \int_{-t}^{t} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = 2\int_0^t \frac{e^{-z}}{2}\,\mathrm{d}z = 1 - e^{-t}\,.$$

Dato che $F_{|Z|}$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che $|Z|$ è assolutamente continua con densità

$$f_{|Z|}(t) = F'_{|Z|}(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\,,$$

cioè $|Z| \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Esercizio 6.16. Sia X un punto aleatorio dell'intervallo $(0,1)$ (non necessariamente uniformemente distrbuito). Esso divide l'intervallo $(0,1)$ in due segmenti. Sia $Y \ge 1$ il rapporto tra il segmento più lungo e quello più corto.

(i) Si esprima Y in funzione di X.

[*Sugg.* Potrebbe risultare utile usare gli eventi $\{X < \frac{1}{2}\}$ e $\{X \ge \frac{1}{2}\}$.]

(ii) Supponiamo che $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Si determinino la funzione di ripartizione e la densità di Y e si mostri che Y ha valor medio infinito.

(iii) Assumiamo ora che X sia una variabile aleatoria assolutamente continua, a valori in $(0,1)$, la cui densità f_X soddisfi la relazione:

$$f_X(x) + f_X(1-x) = 2\,, \qquad \text{per ogni } x \in (0,1)\,. \tag{6.95}$$

Si mostri che la distribuzione di Y è uguale a quella trovata al punto precedente.

[*Sugg.* Si deduca dalla relazione (6.95) che $F_X(z) - F_X(1-z) = 2z - 1$ per $z \in (0,1)$.]

(iv) Si determini una densità f_X, soddisfacente alla relazione (6.95), *diversa* dalla densità di una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$.

Soluzione 6.16. (i) Per definizione si ha

$$Y = \left(\frac{X}{1-X}\right)\mathbb{1}_{\{X \ge \frac{1}{2}\}} + \left(\frac{1-X}{X}\right)\mathbb{1}_{\{X < \frac{1}{2}\}}\,.$$

(ii) Dato che $Y \ge 1$, si ha $F_Y(y) = 0$ per $y < 1$, mentre per $y \ge 1$, usando il punto precedente,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(Y \le y, X \ge \tfrac{1}{2}) + \mathrm{P}(Y \le y, X < \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathrm{P}(\tfrac{X}{1-X} \le y, X \ge \tfrac{1}{2}) + \mathrm{P}(\tfrac{1-X}{X} \le y, X < \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathrm{P}(X \le \tfrac{y}{1+y}, X \ge \tfrac{1}{2}) + \mathrm{P}(X \ge \tfrac{1}{1+y}, X < \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathrm{P}(\tfrac{1}{2} \le X \le \tfrac{y}{1+y}) + \mathrm{P}(\tfrac{1}{1+y} \le X < \tfrac{1}{2}) = \mathrm{P}(\tfrac{1}{1+y} \le X \le \tfrac{y}{1+y})\,. \end{aligned} \tag{S6.5}$$

Dato che $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, per $0 \le a \le b \le 1$ si ha $\mathrm{P}(a \le X \le b) = |[a,b]| = b-a$, pertanto

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ \frac{y-1}{y+1} & \text{se } y \ge 1 \end{cases}. \tag{S6.6}$$

Dato che F_Y è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che Y è assolutamente continua con densità

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{(1+y)^2}\,\mathbb{1}_{[1,\infty)}(y).$$

Il valor medio di Y (che è ben definito, essendo Y positiva) è dunque dato da

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_1^\infty \frac{2y}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y = +\infty,$$

perché $\frac{2y}{(1+y)^2} \sim \frac{2}{y}$ per $y \to +\infty$.

(iii) Applicando la formula (S6.5) ottenuta nel punto precedente, per $y \ge 1$ si ha

$$F_Y(y) = \mathrm{P}\big(\tfrac{1}{1+y} \le X \le \tfrac{y}{1+y}\big) = \int_{\frac{1}{1+y}}^{\frac{y}{1+y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Con il cambio di variabili $x = 1-z$ nell'integrale, osservando che $1 - \frac{1}{1+y} = \frac{y}{1+y}$, si ottiene

$$F_Y(y) = \int_{\frac{1}{1+y}}^{\frac{y}{1+y}} f_X(1-z)\,\mathrm{d}z.$$

Cambiando la variabile di integrazione $z \to x$ e facendo la media delle due espressioni precedenti, si ha che

$$F_Y(y) = \int_{\frac{1}{1+y}}^{\frac{y}{1+y}} \frac{1}{2}\big(f_X(x) + f_X(1-x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Per ipotesi $\frac{1}{2}(f_X(x) + f_X(1-x)) = 1$, pertanto $F_Y(y) = \frac{y}{1+y} - \frac{1}{1+y} = \frac{y-1}{1+y}$ per ogni $y \ge 1$. Dato che chiaramente $F_Y(y) = 0$ per $y < 1$, la funzione di ripartizione, e dunque la distribuzione, di Y è la stessa determinata nel punto precedente.

(iv) È sufficiente considerare, ad esempio, la densità

$$f(x) := \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{se } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

(Il valore della densità $f(x)$ per $x = \frac{1}{2}$ è irrilevante, ma è stato definito esplicitamente in modo che la relazione (6.95) sia soddisfatta.)

Esercizio 6.17. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. con $X_i \sim \mathrm{U}(0,1)$.

(i) Poniamo $Y_n := -\log(X_n)$ per $n \in \mathbb{N}$. Si determini la distribuzione di Y_n e si spieghi perché le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti.
(ii) Si determini la distribuzione di $S_n := Y_1 + \ldots + Y_n$.
(iii) Si calcoli la funzione di ripartizione di $Z_n := X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ e si deduca che Z_n è una variabile aleatoria assolutamente continua. Se ne calcoli dunque la densità.

[*Sugg.* Si sfruttino i punti precedenti]

Soluzione 6.17. (i) Essendo

$$\mathrm{P}(Y_n \le y) = \mathrm{P}(-\log(X_n) \le y) = \mathrm{P}(X_n \ge e^{-y}) = 1 - F_{X_n}(e^{-y}),$$

segue che Y_n è assolutamente continua con densità

$$f_{Y_n}(y) = f_{X_n}(e^{-y})e^{-y} = e^{-y}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y),$$

ossia $Y_n \sim \mathrm{Exp}(1) = \mathrm{Gamma}(1,1)$. Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti perché funzioni delle singole variabili aleatorie indipendenti $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, per la Proposizione 3.40.

(ii) Segue dalle proprietà notevoli delle variabili Gamma (Proposizione 6.29) che $S_n \sim \mathrm{Gamma}(n,1)$, ossia $f_{S_n}(s) = \frac{1}{(n-1)!}\, s^{n-1}\, e^{-s}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(s)$.

(iii) Dato che $Z_n \in [0,1]$, si ha che $F_{Z_n}(z) = 0$ se $z < 0$ e $F_{Z_n}(z) = 1$ se $z > 1$, mentre per $z \in (0,1)$

$$F_{Z_n}(z) = \mathrm{P}(X_1 \cdots X_n \le z) = \mathrm{P}(e^{-S_n} \le z) = \mathrm{P}(S_n \ge -\log z) = 1 - F_{S_n}(-\log z),$$

da cui segue che

$$f_{Z_n}(z) = F'_{Z_n}(z) = \frac{1}{z}\, f_{S_n}(-\log z) = \frac{1}{(n-1)!}(-\log z)^{n-1}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(z).$$

Esercizio 6.18. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $\mathrm{U}(0,2)$ e sia

$$Y_n := \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia $T \sim \mathrm{Geo}(p)$ una variabile aleatoria indipendente dalle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e si ponga

$$Z := Y_T, \qquad \text{cioè} \qquad Z(\omega) := Y_{T(\omega)}(\omega).$$

Si determini la funzione di ripartizione di Z, mostrando che è una variabile aleatoria assolutamente continua.

[*Sugg.* Si determini innanzitutto $\mathrm{P}(Z \le x, T = n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.]

Soluzione 6.18. Dato che sull'evento $\{T = n\}$ si ha $Z = Y_n$, possiamo scrivere

$$P(Z \le z, T = n) = P(Y_n \le z, T = n) = P(Y_n \le z) P(T = n).$$

avendo usato l'indipendenza di Y_n e T. Ricordando la Proposizione 3.93, o con un calcolo diretto, otteniamo

$$\begin{aligned} P(Y_n \le z) &= P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le z) = 1 - P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z) P(X_2 > z) \cdots P(X_n > z) = 1 - (1-z)^n. \end{aligned}$$

Si osservi che $P(T = n) = p(1-p)^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n)$. Possiamo ora calcolare la funzione di ripartizione di Z: dato che Z assume valori in $[0,1]$, si ha $F_Z(z) = 0$ se $z < 0$ e $F_Z(z) = 1$ se $z > 1$, mentre per $z \in [0,1]$, osservando che gli eventi $\{T = n\}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ formano una partizione dello spazio di probabilità, si ottiene

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \le z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(Z \le z, T = n) = p \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (1-z)^n)(1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} - p(1-z) \sum_{n=1}^{\infty} [(1-z)(1-p)]^{n-1} \\ &= 1 - \frac{p(1-z)}{1-(1-z)(1-p)} = \frac{z}{p + (1-p)z}, \end{aligned}$$

avendo usato la somma notevole (0.4) della serie geometrica. Dato che F_Z è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che Z è assolutamente continua con densità

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{p}{(p + (1-p)z)^2} \mathbb{1}_{(0,1)}(z).$$

Esercizio 6.19. Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. con distribuzione $U(0,1)$. Introduciamo la variabile aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e, per $k \in \mathbb{N}$, l'evento A_k definiti da

$$T(\omega) := \inf\left\{k \ge 1 : \ X_k(\omega) \le \frac{1}{3}\right\}, \qquad A_k = \left\{X_k \le \frac{1}{3}\right\}.$$

Definiamo quindi la variabile aleatoria

$$Y := X_T \, \mathbb{1}_{\{T < \infty\}},$$

cioè $Y(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ se $T(\omega) < \infty$, mentre $Y(\omega) := 0$ altrimenti.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini degli eventi $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Si deduca la distribuzione di T.

(ii) Si determini la distribuzione di Y.

[*Sugg.* Si calcoli $P(Y \le x, T = n)$ per $n \in \mathbb{N}$.]

Soluzione 6.19. (i) Per definizione si ha l'uguaglianza di eventi

$$\{T = n\} = \left(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c\right) \cap A_n. \tag{S6.7}$$

Gli eventi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti, perché le variabili aleatorie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti. Dato che $\mathrm{P}(A_k) = \frac{1}{3}$ (perché?), segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(T=n) \,=\, \mathrm{P}(A_1^c)\,\mathrm{P}(A_2^c)\cdots\mathrm{P}(A_{n-1}^c)\,\mathrm{P}(A_n) \,=\, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

ossia $T \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{3})$.

(ii) Si noti che per $x \in [0,1]$

$$\mathrm{P}(Y \le x, T=n) \,=\, \mathrm{P}(X_T \le x, T=n) \,=\, \mathrm{P}(X_n \le x, T=n)\,,$$

e applicando la relazione (S6.7) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \le x, T=n) &= \mathrm{P}\left(X_1 > \tfrac{1}{3}, X_2 > \tfrac{1}{3}, \ldots, X_{n-1} > \tfrac{1}{3}, X_n \le \tfrac{1}{3}, X_n \le x\right)\\ &= \mathrm{P}\left(X_1 > \tfrac{1}{3}, X_2 > \tfrac{1}{3}, \ldots, X_{n-1} > \tfrac{1}{3}, X_n \le \min\{\tfrac{1}{3}, x\}\right).\end{aligned}$$

Usando il fatto che le variabili aleatorie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d., si ottiene

$$\mathrm{P}(Y \le x, T=n) = \mathrm{P}\left(X_1 > \tfrac{1}{3}\right)^{n-1} \mathrm{P}\left(X_1 \le \min\{\tfrac{1}{3}, x\}\right) \,=\, \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \min\left\{\frac{1}{3}, x\right\}.$$

Di conseguenza, per $x \in [0,1]$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}F_Y(x) \,=\, \mathrm{P}(Y \le x) \,=\, \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(Y \le x, T=n) \,&=\, \min\left\{\frac{1}{3}, x\right\} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ &= \min\left\{\frac{1}{3}, x\right\} \cdot 3 \,=\, \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Dato che $F_Y(x) = 0$ se $x < 0$ e $F_Y(x) = 1$ se $x > 1$, la funzione F_Y è $\mathscr{C}^1$ a tratti e pertanto Y è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Y(x) \,=\, F_Y'(x) \,=\, 3\,\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{3})}(x)\,,$$

ossia $Y \sim \mathrm{U}(0, \frac{1}{3})$. In altri termini, abbiamo mostrato che una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{U}(0, \frac{1}{3})$ può essere ottenuta a partire da una successione di variabili aleatorie i.i.d. $\mathrm{U}(0,1)$, considerando la prima di tali variabili aleatorie che assume valore minore o uguale a $\frac{1}{3}$.

Esercizio 6.20. Siano X e Y variabile aleatorie real indipendenti. Supponiamo che X sia assolutamente continua, con densità f_X, mentre Y sia discreta, con densità discreta p_Y. Supponiamo inoltre che Y assuma solo un numero finito di valori, cioè l'insieme $Y(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{p}_Y(x) > 0\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ è finito.

(i) Si esprima la funzione di ripartizione di $Z := X + Y$ in termini di f_X e p_Y.

(ii) Si mostri che Z è una variabile aleatoria assolutamente continua, determinandone la densità in funzione di f_X e p_Y.

Soluzione 6.20. (i) Sia $\{y_1,\ldots,y_n\}$ l'insieme dei valori assunti da Y. Dato che gli eventi $\{Y = x_k\}$ al variare di $k \in \{1,\ldots,n\}$ formano una partizione dello spazio di probabilità, per ogni $t \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y \le t) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X \le t - x_k, Y = x_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}_Y(x_k) \int_{-\infty}^{t-x_k} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}_Y(x_k) \int_{-\infty}^{t} f_X(x - x_k)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{t} \left(\sum_{k=1}^{n} f_X(x-x_k)\,\mathrm{p}_Y(x_k) \right) \mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{S6.8}$$

(ii) La relazione (S6.8) mostra che la funzione di ripartizione $F_{X+Y}(t)$ della variabile aleatoria $X+Y$ è data da

$$F_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{dove} \qquad f(x) := \sum_{k=1}^{n} f_X(x-x_k)\,\mathrm{p}_Y(x_k)\,.$$

Questo significa che la variabile aleatoria $X+Y$ è assolutamente continua, con densità $f_{X+Y}(x) = f(x)$.

Esercizio 6.21. L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. I tempi di attesa T_1 e T_2 per parlare con l'operatore sono, per entrambi i numeri, variabili aleatorie esponenziali, con media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che risponderà per primo.

(i) Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?
(ii) Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Soluzione 6.21. (i) Per ipotesi sia T_1 che T_2 hanno distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$ con $\lambda = 1/15$ (perché il valor medio di una $\mathrm{Exp}(\lambda)$ vale $1/\lambda$). Il tempo che occorre attendere per la risposta è dato da $T = \min(T_1, T_2)$ che ha distribuzione $\mathrm{Exp}(2/15)$, per quanto visto nell'Esempio 6.32. Da ciò segue che $\mathrm{E}(T) = 15/2$.

(ii) Ricordando che se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ si ha $\mathrm{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ per ogni $t \ge 0$, si ottiene

$$\mathrm{P}(T \le 5) = 1 - \mathrm{P}(T > 5) = 1 - e^{-\frac{2}{15}5} = 1 - e^{-2/3} \simeq 0.49.$$

Esercizio 6.22. Un congegno elettronico è costituito da n componenti collegate in serie: esso smette di funzionare non appena una qualsiasi delle sue componenti si rompe. I tempi di vita $T_1, T_2, \ldots, T_n$ delle n componenti sono variabili aleatorie reali indipendenti e con la stessa distribuzione assolutamente continua, di cui indichiamo con f la densità. Chiaramente $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ (i tempi sono quantità positive!). Supponiamo che f sia una funzione continua su $[0,\infty)$, con $f(0) > 0$. Indicando con X_n il tempo di vita dell'intero dispositivo, si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = 0$$

Soluzione 6.22. Per costruzione si ha $X_n = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, pertanto

$$\mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = \mathrm{P}(T_1 > \varepsilon, T_2 > \varepsilon, \ldots, T_n > \varepsilon) = \mathrm{P}(T_1 > \varepsilon)^n, \tag{S6.9}$$

avendo usato il fatto che le variabili aleatorie $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sono i.i.d.. Si osservi che

$$\mathrm{P}(T_1 > \varepsilon) = 1 - \mathrm{P}(T_1 \leq \varepsilon) = 1 - \int_0^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{S6.10}$$

Dal fatto che $f(0) > 0$ e dalla continuità di f segue che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > \frac{1}{2}f(0)$ per ogni $x \in [0,\delta]$. In particolare, per ogni $\varepsilon \in (0,\delta)$ si ha che

$$\int_0^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^\varepsilon \frac{1}{2}f(0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(0)\,\varepsilon > 0.$$

L'integrale è una funzione crescente di ε, quindi a maggior ragione $\int_0^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ per $\varepsilon \geq \delta$. In definitiva, $\int_0^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$; segue quindi da (S6.10) che $\mathrm{P}(T_1 > \varepsilon) < 1$ e dunque $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = 0$, grazie a (S6.9).

Esercizio 6.23. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie i.i.d., con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$, e definiamo

$$L_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \qquad Z_n := n\,L_n.$$

Si mostri che la funzione di ripartizione $F_{Z_n}(t)$ converge per $n \to \infty$ verso un limite $F(t)$, che è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $\mathrm{Exp}(1)$.

Soluzione 6.23. Per $x \in [0,1]$ si ha $\mathrm{P}(L_n > x) = \mathrm{P}(X_1 > x)^n = (1-x)^n$, quindi

$$F_{L_n}(x) = 1 - (1-x)^n,$$

mentre chiaramente $F_{L_n}(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $F_{L_n}(x) = 1$ se $x \geq 1$.

Per ogni $t \geq 0$ fissato, si ha che $t/n \in [0,1]$ per n grande e dunque

$$F_{Z_n}(t) = \mathrm{P}(Z_n \leq t) = \mathrm{P}(L_n \leq \tfrac{t}{n}) = 1 - (1 - \tfrac{t}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-t}.$$

Per $t < 0$ si ha $F_{Z_n}(t) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = 0$. In definitiva,

$$F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases},$$

che è proprio la funzione di ripartizione della distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$, cf. (6.39).

Esercizio 6.24. Ricordiamo che una variabile aleatoria reale X è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) \;:=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Può essere utile ricordare che $\arctan(z)+\arctan(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$, per ogni $z>0$.

(i) Si dimostri che la variabile aleatoria $Y := 1/X$ è di Cauchy.

(ii) Si calcoli $\mathrm{P}(X>z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ e si mostri che per $z \to +\infty$

$$\mathrm{P}(X>z) \sim \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{z}\,,$$

intendendo che il rapporto dei due membri tende a 1 per $z \to +\infty$.

(iii) Sia ora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. di variabili di Cauchy indipendenti e si definisca $M_n := \max\{X_1,\ldots,X_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che per ogni $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{n} \le t\right) \;=\; \exp\left(-\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{t}\right)\,.$$

Soluzione 6.24. (i) Si noti che la funzione di ripartizione di X è data da

$$\begin{aligned} F_X(x) \;&=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{\pi}\arctan(t)\Big|_{t=-\infty}^{t=x} \\ &=\; \frac{1}{\pi}\big(\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\big) \;=\; \frac{1}{\pi}\arctan(x)+\frac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{S6.11}$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y. Per $y<0$ si ha $\frac{1}{x} \le y$ se e solo se $\frac{1}{y} \le x < 0$, pertanto

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;&=\; \mathrm{P}(Y \le y) \;=\; \mathrm{P}\left(\frac{1}{X} \le y\right) \;=\; \mathrm{P}\left(\frac{1}{y} \le X < 0\right) \;=\; \mathrm{P}(X \le 0) - \mathrm{P}\left(X < \frac{1}{y}\right) \\ &=\; \frac{1}{2} - \mathrm{P}\left(X \le \frac{1}{y}\right) \;=\; \frac{1}{2} - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \;=\; -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\arctan(\frac{1}{y}) = -\arctan(-\frac{1}{y})$. Applicando la formula $\arctan(z)+\arctan(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$, valida per $z>0$, a $z=-1/y$ si ottiene dunque

$$F_Y(y) \;=\; \frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{1}{y}\right) \;=\; \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(-y)\right) \;=\; \frac{1}{2} + \arctan(y) \;=\; F_X(y)\,.$$

Consideriamo ora il caso in cui $y>0$. In questo caso si ha $\frac{1}{x} \le y$ se e solo se $x \le 0$ oppure $x \ge \frac{1}{y}$, pertanto

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}\left(\tfrac{1}{X} \le y\right) = \mathrm{P}\left(\{X \le 0\} \cup \{X \ge \tfrac{1}{y}\}\right) \\ &= \mathrm{P}(X \le 0) + \mathrm{P}\left(X \ge \tfrac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} + \left(1 - \mathrm{P}\left(X < \tfrac{1}{y}\right)\right) \\ &= \tfrac{3}{2} - F_X\left(\tfrac{1}{y}\right) = 1 - \tfrac{1}{\pi}\arctan\left(\tfrac{1}{y}\right) = 1 - \tfrac{1}{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - \arctan(y)\right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \arctan(y) = F_X(y)\,. \end{aligned}$$

Dato che $F_Y(0) = \mathrm{P}(Y \le 0) = \mathrm{P}(X \le 0) = F_X(0)$, abbiamo mostrato che $F_Y(y) = F_X(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Avendo la stessa funzione di ripartizione, le variabili aleatorie X e Y hanno la stessa distribuzione, pertanto Y è di Cauchy.

(ii) Applicando (S6.11) per $x > 0$ e sfruttando la relazione $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > x) &= 1 - F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione arcotangente, $\arctan(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, si ottiene la relazione cercata.

(iii) La funzione di ripartizione della variabile aleatoria M_n è data da

$$\begin{aligned} F_{M_n}(z) &= \mathrm{P}(M_n \le z) = \mathrm{P}(X_1 \le z, X_2 \le z, \ldots, X_n \le z) = \mathrm{P}(X_1 \le z)^n \\ &= \left(1 - \mathrm{P}(X_1 > z)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)^n \\ &= \exp\left\{n \log\left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right\} \qquad \text{per } z \to +\infty, \end{aligned}$$

avendo usato il punto precedente. Ricordando lo sviluppo di Taylor del logaritmo $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, per $t > 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{n} \le t\right) &= F_{M_n}(nt) = \exp\left\{n \log\left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{nt} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{n\left(-\frac{1}{\pi}\frac{1}{nt} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\pi t}\right\}. \end{aligned}$$

Esercizio 6.25. Sia $\varphi : [0, +\infty) \to [0, 1)$ una funzione continua, crescente, tale che $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 1$, e il cui comportamento asintotico per $x \downarrow 0$ è dato da

$$\varphi(x) = \alpha x^k + o(x^k), \qquad \text{con } \alpha, k > 0.$$

(i) Si mostri che la funzione $F(t) := \left(1 - \varphi(1/t)\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$ è una funzione di ripartizione, ossia soddisfa le proprietà (5.4).

(ii) Si consideri una successione $(X_n)_{n\ge 1}$ di variabili aleatorie i.i.d. con funzione di ripartizione F definita sopra. Ponendo

$$Y_n := \frac{\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{n^{1/k}},$$

si mostri che, per ogni $y > 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(Y_n \le y) = e^{-\alpha/y^k}.$$

Soluzione 6.25. (i) Dato che φ è crescente, la funzione $(0,\infty) \ni t \mapsto \varphi(1/t)$ è decrescente e dunque la funzione $F(t) = 1-\varphi(1/t)$ è crescente sulla semiretta $(0,\infty)$; inoltre è continua, perché composizione di funzioni continue. Dato che $F(0+) = \lim_{t\downarrow 0} F(t) = 1 - \lim_{s\uparrow+\infty} \varphi(s) = 1-1 = 0$ ed essendo $F(t) = 0$ per $t \le 0$, segue che F è crescente e continua su $\mathbb{R}$. Infine, chiaramente $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ mentre $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1 - \lim_{s\downarrow 0} \varphi(s) = 1-0 = 1$, pertanto tutte le proprietà (5.4) di una funzione di ripartizione sono soddisfatte.

(ii) Per $y > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_n \le y) &= \mathrm{P}(X_1 \le n^{1/k}y, X_2 \le n^{1/k}y, \ldots, X_n \le n^{1/k}y) = \mathrm{P}(X_1 \le n^{1/k}y)^n \\
&= F_X(n^{1/k}y)^n = \left(1-\varphi\left(\frac{1}{n^{1/k}y}\right)\right)^n = \left(1-\frac{\alpha}{ny^k}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\
&= \exp\left\{n\log\left(1-\frac{\alpha}{ny^k}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha}{y^k}\right\},
\end{aligned}$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$.

Esercizio 6.26. Un lanciatore di giavellotto esegue $n \in \mathbb{N}$ lanci. Detta X_i la distanza ottenuta nell'i-esimo lancio, supponiamo che $X_1, \ldots, X_n$ siano variabili aleatorie i.i.d. con $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dove $\lambda \in (0,\infty)$. Indichiamo con M_n la massima distanza a cui è stato lanciato il giavellotto.

(i) Sia $W_n := \frac{M_n}{\log(n)}$ e F_{W_n} la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{\lambda} \\ e^{-1} & \text{se } x = \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{\lambda} \end{cases}.$$

(ii) Si deduca che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(iii) Definiamo ora

$$Z_n := M_n - \frac{1}{\lambda}\log n,$$

e sia $F_{Z_n}(t)$ la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che il limite $F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t)$ esiste, e lo si determini, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che F è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria assolutamente continua.

Soluzione 6.26. (i) Dato che $f_{X_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$, si ottiene

$$F_{X_1}(x) = \mathrm{P}(X_1 \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_1}(t)\,\mathrm{d}t = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) . \tag{S6.12}$$

Di conseguenza $F_{W_n}(w) = 0$ se $w \le 0$, mentre per $w > 0$, ricordando lo sviluppo di Taylor $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}
F_{W_n}(w) &= \mathrm{P}(W_n \le w) = \mathrm{P}(M_n \le w \log n) = \mathrm{P}(X_1 \le w \log n, X_n \le w \log n) \\
&= \mathrm{P}(X_1 \le w \log n)^n = F_{X_1}(w \log n)^n = \left(1 - e^{-\lambda w \log n}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda w}}\right)^n = \exp\left\{ n \log\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda w}}\right) \right\} \\
&= \exp\left\{ n\left(- \frac{1}{n^{\lambda w}} + o\left(\frac{1}{n^{\lambda w}}\right)\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{se } w < \frac{1}{\lambda} \\ e^{-1} & \text{se } w = \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } w > \frac{1}{\lambda} \end{cases} .
\end{aligned}$$

(ii) Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{\log(n)} > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{\log(n)} < \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) \\
&= 1 - F_{W_n}\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) + F_{W_n}\left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 1 - 1 + 0 = 0 .
\end{aligned}$$

(iii) Ricordando (S6.12) si ha

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(t) &= \mathrm{P}(Z_n \le t) = \mathrm{P}\left(M_n \le \frac{1}{\lambda}\log n + t\right) = F_{X_1}\left(\frac{1}{\lambda}\log n + t\right)^n \\
&= \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}\log n + t)}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-\lambda t}\right)^n & \text{se } t > -\frac{1}{\lambda}\log n \\ 0 & \text{se } t \le -\frac{1}{\lambda}\log n \end{cases} .
\end{aligned}$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, si ha $t > -\frac{1}{\lambda}\log n$ per n sufficientemente grande. Dato che $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{c}{n})^n = e^{-c}$, come segue dallo sviluppo di Taylor del logaritmo sopra richiamato, ricaviamo il limite

$$F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-\lambda t}\right)^n = e^{-e^{-\lambda t}} ,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo che la funzione $F(t)$ appena determinata è crescente e continua su tutto $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Essendo verificate le proprietà (5.4), segue che F è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria reale. Inoltre, essendo F di classe $\mathscr{C}^1$ (in realtà $\mathscr{C}^\infty$), segue dalla Proposizione 6.16 che la variabile aleatoria di cui F è funzione di ripartizione è assolutamente continua, con densità

$$f(t) = F'(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}\, e^{-e^{-\lambda t}}\,.$$

Esercizio 6.27. Pietro è un lanciatore di giavellotto. Dopo un lancio iniziale, in cui manda il giavellotto a una distanza X_0, si cimenta in una successione di lanci ripetuti: nel lancio n-esimo il giavellotto cade a una distanza X_n. Pietro si interroga su quanti lanci T debba fare per migliorare il risultato iniziale, ossia

$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : \; X_n > X_0\}\,.$$

Assumiamo che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ siano variabili aleatorie indipendenti e (ignorando l'effetto della fatica) con la stessa distribuzione, che supponiamo assolutamente continua. Mostreremo che T *ha una distribuzione "universale", che non dipende dalla distribuzione delle* X_k, con densità discreta

$$\mathrm{p}_T(k) = \frac{1}{k(k+1)}\, \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)\,, \tag{6.96}$$

da cui segue che il numero di lanci richiesti per migliorarsi ha media $\mathrm{E}(T) = +\infty$! (Aver ignorato la fatica rende questo risultato ancora più sorprendente.)

(i) Definendo gli eventi

$$A_k^{(n)} := \Big\{X_k = \max_{0\le i\le n} X_i\Big\}\,, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},\; k \in \{0,\dots,n\}\,,$$

si mostri, con un argomento di simmetria, che

$$\mathrm{P}\big(A_0^{(n)}\big) = \mathrm{P}\big(A_1^{(n)}\big) = \ldots = \mathrm{P}\big(A_n^{(n)}\big)\,.$$

(ii) Si mostri che per ogni $i \neq j$ si ha $\mathrm{P}(X_i \neq X_j) = 1$.

[*Sugg.* Si noti che $X_i - X_j$ è una variabile reale assolutamente continua (perché?).]

(iii) Si spieghi l'inclusione di eventi $A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} \subseteq \{X_i = X_j\}$ e si deduca che

$$\mathrm{P}\big(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\big) = 0\,, \qquad \forall i \neq j\,.$$

(iv) Si spieghi perché $\bigcup_{k=0}^n A_k^{(n)} = \Omega$ e si deduca che

$$\mathrm{P}(A_k^{(n)}) = \frac{1}{n+1}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\; 0 \le k \le n\,.$$

[*Sugg.* Si ricordi l'Esercizio 1.4.]

(v) Si spieghi perché $\{T > n\} = A_0^{(n)}$ e, dunque, $\mathrm{P}(T > n) = \frac{1}{n+1}$. Si deduca la formula (6.96) e il fatto che $\mathrm{E}(T) = +\infty$.

Soluzione 6.27. (i) Intuitivamente, gli eventi $A_k^{(n)}$ al variare di $k \in \{0,1,\dots,n\}$ sono ottenuti semplicemente permutando le variabili aleatorie $X_0, X_1, \dots, X_n$;

ma qualunque permutazione ha la stessa distribuzione, perché le variabili sono i.i.d., pertanto gli eventi $A_k^{(n)}$ hanno la stessa probabilità.

Più formalmente, definendo $Z_k := X_k - \max_{0\le i\le n} X_i$, possiamo scrivere $A_k^{(n)} = \{Z_k = 0\}$, pertanto $\mathrm{P}(A_k^{(n)}) = \mathrm{P}(Z_k = 0) = \mu_{Z_k}(\{0\})$, indicando con μ_{Z_k} la distribuzione di Z_k. Ci basta allora mostrare che le variabili aleatorie Z_k e $Z_{k'}$, per ogni scelta di $k, k' \in \{0,1,\dots,n\}$, hanno la stessa distribuzione. Ponendo $Y := \max_{0\le i\le n} X_i$ e $f(x,y) := x - y$, possiamo scrivere $Z_k = f(X_k, Y)$ e $Z_{k'} = f(X_{k'}, Y)$, pertanto ci basta mostrare che i vettori aleatori bidimensionali (X_k, Y) e $(X_{k'}, Y)$ hanno la stessa distribuzione, grazie alla Proposizione 3.15 (conservazione della distribuzione). Infine, introducendo la funzione $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(x_0, x_1, \dots, x_n) := (x_0, \max_{0\le i\le n} x_i)$ e la permutazione (trasposizione) $\pi_k : \{0,1,\dots,n\} \to \{0,1,\dots,n\}$ definita da $\pi_k(0) := k$, $\pi_k(k) = 0$ e $\pi_k(i) = i$ se $i \neq 0$, $i \neq k$, possiamo scrivere $(X_k, Y) = g(\pi_k(X_0,\dots,X_n))$ e $(X_{k'}, Y) = g(\pi_{k'}(X_0,\dots,X_n))$; ancora per conservazione della distribuzione, ci basta mostrare che i vettori aleatori $(n+1)$-dimensionali $\pi_k(X_0,\dots,X_n)$ e $\pi_{k'}(X_0,\dots,X_n)$ hanno la stessa distribuzione, e ciò segue dal fatto che entrambi i vettori hanno componenti indipendenti e con la stessa densità.

(ii) Per $i \neq j$, le variabili aleatorie X_i e $-X_j$ sono indipendenti e assolutamente continue, pertanto la loro somma $X_i - X_j$ è una variabile aleatoria assolutamente continua (Proposizione 6.25). Di conseguenza, $\mathrm{P}(X_i - X_j = 0) = 0$.

(iii) Se $\omega \in A_i^{(n)}$, allora per definizione $X_i(\omega) = \max_{0\le \ell\le n} X_\ell(\omega)$; analogamente, se $\omega \in A_j^{(n)}$, si ha $X_j(\omega) = \max_{0\le \ell\le n} X_\ell(\omega)$. In particolare, se $\omega \in A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}$, si ha $X_i(\omega) = X_j(\omega)$. Questo mostra l'inclusione $A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} \subseteq \{X_i = X_j\}$, da cui segue che

$$\mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right) \le \mathrm{P}(X_i = X_j) = 0 .$$

Pertanto $\mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right) = 0$ per $i \neq j$.

(iv) Per ogni $\omega \in \Omega$, i numeri reali $\{X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$ hanno un massimo, che indichiamo con $X_{\bar{k}}(\omega)$, dove l'indice $\bar{k} = \bar{k}(\omega) \in \{0,1,\dots,n\}$ è definito come il più piccolo per cui viene assunto il massimo (nel caso in cui venga assunto da più di un numero). In particolare, $X_{\bar{k}}(\omega) = \max_{0\le i\le n} X_i(\omega)$, il che significa che $\omega \in A_{\bar{k}}^{(n)}$. Abbiamo dunque mostrato che ogni $\omega \in \Omega$ appartiene a un insieme $A_k^{(n)}$, per un'opportuna scelta di $k \in \{0,\dots,n\}$, ossia $\bigcup_{k=0}^n A_k^{(n)} = \Omega$. Da questa relazione, per subadditività, segue che

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) \le \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right) .$$

Applicando la disuguaglianza di Bonferroni (Esercizio 1.4), otteniamo

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) \ge \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right) - \sum_{0\le i<j\le n} \mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right) .$$

Ma abbiamo già mostrato che $\mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right)$ se $i < j$. Segue dunque dalle relazioni precedenti che

$$1 \,=\, \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right).$$

Infine, dato che gli eventi $\mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right)$ hanno tutti la stessa probabilità al variare di k, segue che $\mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right) = \frac{1}{n+1}$, come richiesto.

(v) Per definizione, si ha $\omega \in \{T > n\}$ se e solo se $T(\omega) > n$, ossia $X_k(\omega) \le X_0(\omega)$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$; in altri termini, $\omega \in \{T > n\}$ se e solo se $X_0(\omega) = \max_{0 \le i \le n} X_i(\omega)$, cioè se e solo se $\omega \in A_0^{(n)}$. Questo mostra che $\{T > n\} = A_0^{(n)}$, da cui segue che $\mathrm{P}(T > n) = \mathrm{P}(A_0^{(n)}) = \frac{1}{n+1}$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(T = k) \,=\, \mathrm{P}(T > k-1) - \mathrm{P}(T > k) \,=\, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \,=\, \frac{1}{k(k+1)},$$

ottenendo la formula (6.96). Segue in particolare che

$$\mathrm{E}(T) \,=\, \sum_{k \in \mathbb{N}} k\, \mathrm{P}(T = k) \,=\, \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \,=\, +\infty.$$

Esercizio 6.28. Siano $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $\mathrm{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(i) Si mostri che le variabili aleatorie $(Y_n := X_n + \frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}}$ sono i.i.d. $\mathrm{U}(0,1)$.

(ii) Applicando l'Esercizio 6.23, si deduca che per ogni $r > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{r}{n}\right) \,=\, 1 - e^{-r}.$$

Si deduca che esistono $\bar{r} > 0$ e $n_0 < \infty$ tale che per ogni $n > n_0$

$$\mathrm{P}\bigg(\min\{X_1, \ldots, X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\bar{r}}{n}\bigg) \,\ge\, 0.99.$$

(iii) Introduciamo per $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ il sottoinsieme $C_n(\delta) \subseteq \mathbb{R}^n$ definito da

$$C_n(\delta) \,:=\, \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)^n \setminus \left(-\tfrac{1}{2} + \delta, \tfrac{1}{2} - \delta\right)^n,$$

che rappresenta la "buccia interna" di spessore δ del cubo n-dimensionale $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$. Si mostri che per $n > n_0$

$$\mathrm{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in C_n\left(\tfrac{\bar{r}}{n}\right)\right) \,\ge\, 0.99.$$

(iv) (*) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il vettore aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ ha distribuzione uniforme continua nell'insieme $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n \subseteq \mathbb{R}^n$ (si ricordi l'Esempio 6.39). Ricordando la definizione (6.46) di misura n-dimensionale, si osservi che $\mathrm{mis}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n) = 1$ e si deduca che per $n > n_0$

$$\mathrm{mis}\left(C_n\left(\tfrac{\bar{r}}{n}\right)\right) \,\ge\, 99\%.$$

In altre parole, per n grande, "quasi tutto il volume di un cubo n-dimensionale è contenuto in una buccia sottile", il cui spessore $\bar{r}/n$ tende a zero per $n \to \infty$!

Soluzione 6.28. (i) Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d. perché sono ottenute a partire da variabili aleatorie indipendenti applicando la stessa funzione $x \mapsto x+\frac{1}{2}$, per le Proposizioni 3.15 e 3.40. La verifica che siano Unif$(0,1)$ è facile: chiaramente Y_n assume valori in $(0,1)$, visto che X_n assume valori in $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, e per $y \in (0,1)$ si ha

$$F_{Y_n}(y) = \mathrm{P}(Y_n \le y) = \mathrm{P}(X_n \le y - \tfrac{1}{2}) = F_{X_n}(y-\tfrac{1}{2}) = (y-\tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{2}) = y\,.$$

(ii) Basta notare che

$$\big\{\min\{X_1,\ldots,X_n\} < -\tfrac{1}{2}+\tfrac{r}{n}\big\}^c = \big\{\min\{Y_1,\ldots,Y_n\} < \tfrac{r}{n}\big\}^c = \big\{Y_1 \ge \tfrac{r}{n},\ldots,Y_n \ge \tfrac{r}{n}\big\}\,,$$

da cui segue che

$$\mathrm{P}\big(\min\{X_1,\ldots,X_n\} < -\tfrac{1}{2}+\tfrac{r}{n}\big) = 1-\big(1-\tfrac{r}{n}\big)^n \to 1-e^{-r} \qquad \text{per } n\to\infty\,.$$

Scelto $\bar{r}$ tale che $e^{-\bar{r}} < 0.01$, si ha $1-e^{-\bar{r}} > 0.99$ e, per definizione di limite, esiste $n_0 < \infty$ con la proprietà richiesta.

(iii) Basta osservare che vale l'inclusione di eventi

$$\Big\{\min\{X_1,\ldots,X_n\} < -\tfrac{1}{2}+\tfrac{\bar{r}}{n}\Big\} \subseteq \big\{(X_1,\ldots,X_n) \in C_n\big(\tfrac{\bar{r}}{n}\big)\big\}\,,$$

perché un vettore $x=(x_1,\ldots,x_n)$ con componenti in $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è tale che $\min\{x_1,\ldots,x_n\} - \frac{1}{2}+\delta$ se e solo se esiste $x_i \in (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\delta)$, e in questo caso chiaramente $x \in C_n(\delta)$. La conclusione segue dalla monotonia della probabilità.

(iv) La densità di ciascuna variabile aleatoria X_i vale $f_{X_i}(x) = \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$, e per l'indipendenza si ottiene che il vettore aleatorio $X=(X_1,\ldots,X_n)$ ha densità

$$\begin{aligned} f_X(x_1,\ldots,x_n) &= f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n) = \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x_1)\cdots\mathbb{1}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x_n) \\ &= \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^n}(x_1,\ldots,x_n)\,, \end{aligned}$$

quindi, per definizione, $X \sim \mathrm{Unif}((-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^n)$. Segue che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile

$$\mathrm{P}(X\in A) = \frac{\mathrm{mis}(A\cap(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^n)}{\mathrm{mis}((-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^n)} = \mathrm{mis}(A\cap(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^n))\,. \tag{S6.13}$$

Scegliendo $A = C_n(\frac{\bar{r}}{n})$ si ottiene la conclusione.

Esercizio 6.29 (*). Sia (X,Y) un vettore aleatorio bidimensionale assolutamente continuo, con densità

$$f_{X,Y}(x,y) \,=\, \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1+x+y)^{2+\alpha}}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\,,$$

dove $\alpha \in (0,\infty)$ è una costante fissata.

(i) Senza fare conti, si spieghi perché le componenti X e Y hanno la stessa densità.

(ii) Si mostri che la funzione di ripartizione di X (e di Y) è data da

$$F_X(t) \,=\, \left(1-\frac{1}{(1+t)^{\alpha}}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\,.$$

(iii) Per quali valori di $p \in [1,\infty)$ si ha che $X \in L^p$?

Soluzione 6.29. (i) La funzione $f_{X,Y}(x,y)$ è simmetrica in x,y, quindi le densità marginali di X e Y, ottenute integrando la funzione $f_{X,Y}$ rispetto a ciascuna variabile, coincidono. Si ha inoltre

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \alpha\left[\frac{-1}{(1+x+y)^{1+\alpha}}\right]_{y=0}^{y=\infty}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{1+\alpha}}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,.$$

(ii) Con una semplice integrazione, a partire dalla densità $f_X(x)$ già ricavata, si ottiene la formula per $F_X(x)$.

(iii) Si ha

$$\mathrm{E}(|X|^p) \,=\, \int_{\mathbb{R}} |x|^p\,f_X(x)\,\mathrm{d}x \,=\, \int_0^{\infty}\alpha\,\frac{x^p}{(1+x)^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dato che l'integrando è asintoticamente equivalente a $\alpha\,\frac{1}{x^{1+\alpha-p}}$ per $x \to +\infty$, l'integrale è finito — e dunque $X \in L^p$ — se e solo se $p < \alpha$.

Esercizio 6.30 (*). Sia (X,Y) un vettore aleatorio a valori in $\mathbb{R}^2$, con densità

$$f_{X,Y}(x,y) \,:=\, \begin{cases} c\,e^{-x} & \text{se } 0<x<y<x+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una opportuna costante.

(i) Si mostri che X è una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$ e si calcoli il valore della costante c.

(ii) Si mostri che $Z := \log(X)$ è una variabile aleatoria assolutamente continua e se ne determini la densità. Per quali valori di p si ha $Z \in L^p$?

(iii) Si determini la densità di Y. Si calcoli $\mathrm{E}(e^{X-Y})$.

Soluzione 6.30. (i) Si ha

$$f_X(x) \,=\, \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \,=\, \int_x^{x+1} c\,e^{-x}\,\mathrm{d}y \,=\, c\,e^{-x}\int_x^{x+1} 1\,\mathrm{d}y \,=\, c\,e^{-x}\,,$$

da cui segue che $c=1$ e $X \sim \mathrm{Exp}(1)$.

(ii) Ricordando che $F_X(x) = e^{-x}$ per $x \geq 0$, si ottiene

$$F_Z(t) = \mathrm{P}(\log(X) \leq t) = \mathrm{P}(X \leq e^t) = F_X(e^t) \,=\, 1 - e^{-e^t}\,.$$

Dato che F_X è una funzione $\mathscr{C}^1$ a tratti, la variabile aleatoria Z è assolutamente continua con densità

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = e^{z - e^z}\,.$$

Si ha

$$\mathrm{E}(|Z|^p) = \int_{\mathbb{R}} |z|^p\, f_Z(z)\,\mathrm{d}z < \infty\,,$$

per ogni $p > 0$: l'integrale converge a $-\infty$ perché $f_Z(z) \leq e^z$, mentre la convergenza a $+\infty$ è assicurata dal fatto che per z grande e positivo $e^z - z > z$, dunque $f_Z(z) \leq e^{-z}$.

(iii) Per $y > 1$ si ha

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{y-1}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = e^{-(y-1)} - e^{-y} = (e-1)e^{-y}\,.$$

Per $0 < y \leq 1$ si ha

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{y} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-y}\,.$$

Infine, per $y \leq 0$ si ha $f_Y(y) = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(e^{X-Y}) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^2} e^{x-y}\, f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{x+1} e^{-y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &=\; \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-x-1})\mathrm{d}x \;=\; 1 - e^{-1}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 6.31 (*). Sia (X,Y) un vettore aleatorio bidimensionale con densità f data da

$$f(x,y) \;=\; c\, y\, e^{-xy}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)\times[0,2]}(x,y)\,.$$

(i) Si determini il valore di $c \in \mathbb{R}$ affinché f sia effettivamente una densità.

(ii) Si determinino le densità marginali di X e Y e si riconosca la distribuzione di Y. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

(iii) Si mostri che $V := \max(X,Y)$ è una variabile aleatoria reale assolutamente continua e se ne determini la densità.

(iv) Posto $U := X + Y$, si dica se U e V sono indipendenti.

[*Sugg.* Non è necessario calcolare la densità congiunta di (U,V).]

Soluzione 6.31. (i) Per $y > 0$ fissato, la funzione $h(x) := y\, e^{-xy}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ è la densità di una variabile aleatoria $\mathrm{Exp}(y)$, quindi $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= c\int_0^2\left(\int_0^\infty y\,e^{-xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = c\int_0^2\left(\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= c\int_0^2 1\,\mathrm{d}y = 2c\,,\end{aligned}$$

da cui $c = \frac{1}{2}$.

(ii) Per $x < 0$ chiaramente $f_X(x) = 0$. Per $x > 0$ si ha

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^2 y\,e^{-xy}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[y\,\frac{-e^{-xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=2} + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{e^{-xy}}{x}\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{e^{-2x}}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}(1-e^{-2x}) = \frac{1-e^{-2x}-2x\,e^{-2x}}{2x^2}\,.\end{aligned}$$

(Il valore $f_X(0)$ non è rilevante.)

Si noti che f_X è continua in $(0,\infty)$ e $f_X(x) \sim 1/(2x^2)$ per $x \to +\infty$, mentre per $x \downarrow 0$ sviluppando il numeratore si ha

$$\begin{aligned}1-e^{-2x}-2x\,e^{-2x} &= 1-\left(1-2x+\frac{(2x)^2}{2}+O(x^3)\right)-2x(1-2x+O(x^2))\\ &= 2x-2x^2+O(x^3)-2x+4x^2+O(x^3) = 2x^2+O(x^3)\,,\end{aligned}$$

da cui $f_X(x) \to 1$ per $x \downarrow 0$.

Passando a Y, si ha $f_Y(y) = 0$ per $y \notin [0,2]$, mentre per $y \in (0,2]$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty y\,e^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Si ha dunque $f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(0,2]}(y)$, cioè $Y \sim \mathrm{U}[0,2]$.
X e Y non sono indipendenti perché la densità congiunta $f(x,y)$ non coincide con il prodotto delle densità marginali $g(x,y) := f_X(x)\,f_Y(y)$, a meno di un insieme di $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ di misura nulla. Per mostrarlo precisamente, si noti che le funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono entrambe continue nell'aperto $(0,\infty)\times(0,2)$, dunque basta mostrare che esiste un punto in tale aperto in cui differiscono (infatti in tale caso differiscono necessariamente in un intorno del punto). Si ha $f(x,1) = \frac{1}{2}e^{-x}$ e

$$g(x,1) = f_X(x)\,f_Y(1) = \frac{1}{2}\,f_X(x) \sim \frac{1}{4x^2} \qquad \text{per } x \to +\infty\,.$$

Di conseguenza $\lim_{x\to+\infty} f(x,1)/g(x,1) = 0$ e dunque $f(x,1)/g(x,1) < \frac{1}{2}$ per x sufficientemente grande; in particolare, per tali x si ha $f(x,1) \neq g(x,1)$.

(iii) La funzione di ripartizione di V è data da $F_V(v) = 0$ se $v \leq 0$, mentre per $v > 0$

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \mathrm{P}(V \le v) = \mathrm{P}(X \le v, Y \le v) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x \le v,\ y \le v\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\min(2,v)} \left(\int_0^v y e^{-xy}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\min(2,v)} \mathrm{P}(\mathrm{Exp}(y) \le v)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\min(2,v)} (1 - e^{-vy})\mathrm{d}y = \frac{\min(2,v)}{2} - \frac{1 - e^{-v \cdot \min(2,v)}}{2v}\,. \end{aligned}$$

In definitiva

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \le 0 \\ \dfrac{v}{2} - \dfrac{1 - e^{-v^2}}{2v} & \text{se } 0 < v < 2 \\ 1 - \dfrac{1 - e^{-2v}}{2v} & \text{se } v \ge 2 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che F_V è C^1 a tratti, dunque V è assolutamente continua con densità data da $f_V(v) = F_V'(v)$, ossia

$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \le 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 - (2v^2 + 1)\,e^{-v^2}}{2v^2} & \text{se } 0 < v < 2 \\ \dfrac{1 - (1 + 2v)\,e^{-2v}}{2v^2} & \text{se } v \ge 2 \end{cases}.$$

Si noti che per $v > 2$ si ha $f_V(v) = f_X(v)$, come deve essere poiché $F_V(v) = \mathrm{P}(X \le v, Y \le v) = \mathrm{P}(X \le v) = F_X(v)$ se $v > 2$, dato che $Y \le 2$.

(iv) Le variabili aleatorie U e V *non* sono indipendenti. Intuitivamente, conoscere il valore di $V := \max\{X, Y\}$ dà informazioni sulla somma $U := X + Y$. Più precisamente, se $V \le 1$ si ha che $X \le 1$ e $Y \le 1$, pertanto $U \le 2$; in altri termini, vale l'inclusione di eventi $\{V \le 1\} \subseteq \{U \le 2\}$ e pertanto

$$\mathrm{P}(V \le 1, U > 2) = 0\,.$$

Se mostriamo che $\mathrm{P}(V \le 1) > 0$ e $\mathrm{P}(U > 2) > 0$, segue che $\mathrm{P}(V \le 1, U > 2) \ne \mathrm{P}(V \le 1)\,\mathrm{P}(U > 2)$ e dunque, per definizione, U e V non sono indipendenti.

Per il punto precedente $\mathrm{P}(V \le 1) = F_V(1) = \frac{1}{2} - \frac{1-e^{-1}}{2} = \frac{e^{-1}}{2} > 0$. Inoltre, essendo la densità $f_X(x)$ di X strettamente positiva per $x > 0$, si ha

$$\mathrm{P}(X > 2) = \int_2^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x > 0\,.$$

Dato che $Y \ge 0$, si ha $\mathrm{P}(U > 2) \ge \mathrm{P}(X > 2) > 0$.

Esercizio 6.32 (*). Sia $Z := (X, Y)$ un vettore aleatorio bidimensionale con distribuzione uniforme nel sottoinsieme $C := ([0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]) \cup ([\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1])$. Si determinino le distribuzioni delle variabili aleatorie reali X e Y. Esse sono indipendenti?

Soluzione 6.32. L'insieme C è rappresentato nella Figura S6.1.

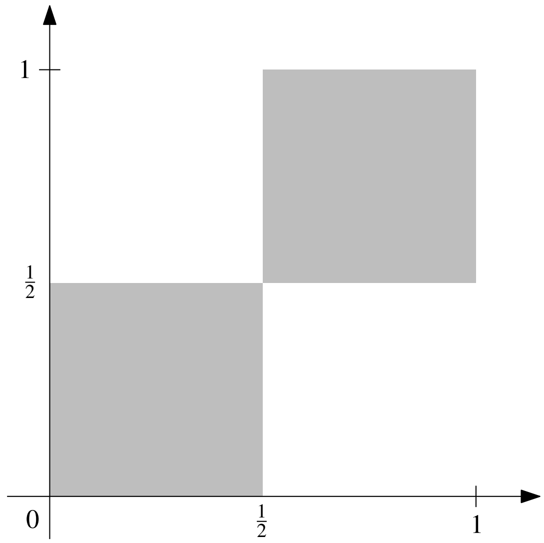

Figura S6.1 L'insieme $C = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ dell'Esercizio 6.32

Per ipotesi, (X,Y) è un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\,\mathbb{1}_C(x,y)\,.$$

Segue che le variabili aleatorie X e Y sono assolutamente continue con densità

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,, \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se $x \in (0, \frac{1}{2})$ si ha $f_{X,Y}(x,y) = 2\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(y)$, pertanto

$$f_X(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,\mathrm{d}y \;=\; 1\,.$$

Analogamente, se $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ si ha $f_{X,Y}(x,y) = 2\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(y)$, pertanto

$$f_X(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\,\mathrm{d}y \;=\; 1\,.$$

Dato che $f_{X,Y}(x,y) = 0$ se $x \notin [0,1]$, e il valore di f_X nel singolo punto $x = \frac{1}{2}$ non è rilevante, possiamo scrivere $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, dunque $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Con analoghi conti si mostra che $Y \sim \mathrm{U}(0,1)$.

Dato che $f_{X,Y}(x,y) = 0$ per ogni (x,y) nel quadrato aperto $(0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1)$, che ha misura pari a $\frac{1}{4}$, mentre $f_X(x) f_Y(y) = 1$ per tali valori di (x,y), segue che $f_{X,Y}(x,y)$

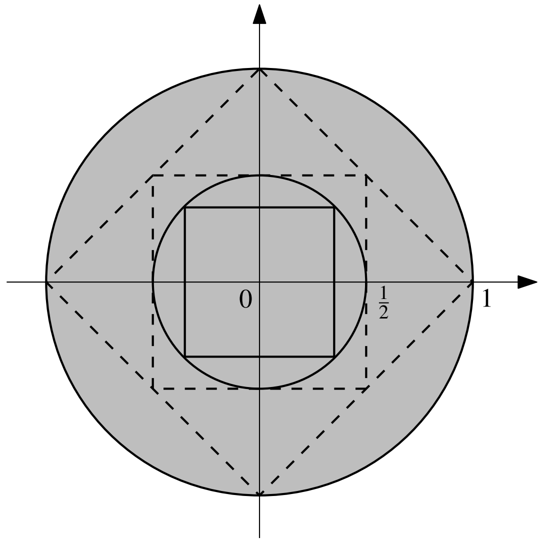

Figura S6.2 I cerchi $C_1 := \{x^2+y^2 \le 1\}$ e $C_2 := \{x^2+y^2 \le \frac{1}{4}\}$ e i quadrati $Q_1 := \{|x|+|y| \le 1\}$, $Q_2 := \{\max(|x|,|y|) \le \frac{1}{2}\}$ e $Q_3 := \{\max(|x|,|y|) \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\}$ (si veda l'Esercizio 6.33)

non coincide con $f_X(x)f_Y(y)$ a meno di un insieme di (x,y) di misura nulla, e dunque X e Y non sono indipendenti. In alternativa, basta notare che

$$0 = \mathrm{P}(X \in (0,\tfrac{1}{2}), Y \in (\tfrac{1}{2},1)) \neq \mathrm{P}(X \in (0,\tfrac{1}{2}))\,\mathrm{P}(Y \in (\tfrac{1}{2},1)) = \frac{1}{4}\,.$$

Esercizio 6.33 (*). Sia (X,Y) un vettore aleatorio bidimensionale con distribuzione uniforme sul cerchio di raggio unitario centrato nell'origine. Si determinino, possibilmente senza fare calcoli, le seguenti probabilità condizionali:

$$\mathrm{P}\left(\max(|X|,|Y|) \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \,\middle|\, X^2+Y^2 \le \frac{1}{4}\right), \quad \mathrm{P}\left(\max(|X|,|Y|) \le \frac{1}{2} \,\middle|\, |X|+|Y| \le 1\right).$$

[*Sugg.* Fare un disegno.]

Soluzione 6.33. Se indichiamo con $C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1\}$ il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine di $\mathbb{R}^2$, il vettore aleatorio (X,Y) ha distribuzione $\mathrm{U}(C_1)$, ossia assolutamente continua con densità

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; \frac{1}{\mathrm{mis}(C_1)}\,\mathbb{1}_{C_1}(x,y)\,,$$

pertanto per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (la cui indicatrice $\mathbb{1}_A$ è integrabile) si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P}((X,Y)\in A) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mathrm{mis}(C_1)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x,y)\,\mathbb{1}_{C_1}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{mis}(A\cap C_1)}{\mathrm{mis}(C_1)}\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni scelta di A, B si ha

$$\mathrm{P}((X,Y)\in A \,|\, (X,Y)\in B) = \frac{\mathrm{mis}(A\cap C_1)}{\mathrm{mis}(B\cap C_1)}\,.$$

Introducendo il cerchio $C_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le \frac{1}{4}\}$ e i quadrati $Q_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ |x|+|y|\le 1\}$, $Q_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \max(|x|,|y|)\le \frac{1}{2}\}$ e $Q_3 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \max(|x|,|y|)\le \frac{1}{2\sqrt{2}}\}$, le probabilità richieste sono pertanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\max(|X|,|Y|)\le \frac{1}{2\sqrt{2}} \,\middle|\, X^2+Y^2\le \frac{1}{4}\right) &= \mathrm{P}\big((X,Y)\in Q_3 \,|\, (X,Y)\in C_2\big) \\ &= \frac{\mathrm{mis}(Q_3)}{\mathrm{mis}(C_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\pi\frac{1}{4}} = \frac{2}{\pi}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\max(|X|,|Y|)\le \frac{1}{2} \,\middle|\, |X|+|Y|\le 1\right) &= \mathrm{P}\big((X,Y)\in Q_2 \,|\, (X,Y)\in Q_1\big) \\ &= \frac{\mathrm{mis}(Q_2)}{\mathrm{mis}(Q_1)} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 6.34 (*). Un segnale viene trasmesso in un istante aleatorio X. Il ricevitore viene acceso in un istante aleatorio Y e resta acceso per un intervallo di tempo aleatorio Z. Supponendo che X,Y,Z siano variabili aleatorie indipendenti con $X \sim \mathrm{U}[0,2]$ e $Y,Z \sim \mathrm{U}[0,1]$, qual è la probabilità che il segnale venga ricevuto?

Soluzione 6.34. Il ricevitore resta acceso durante l'intervallo di tempo (aleatorio) $[Y, Y+Z]$, dunque occorre calcolare

$$\mathrm{P}(X\in[Y,Y+Z]) = \mathrm{P}(X\ge Y,\, X\le Y+Z) = \mathrm{P}((X,Y,Z)\in C)\,,$$

dove

$$C := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x\ge y,\ x\le y+z\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x\in[y,y+z]\}\,.$$

La densità del vettore aleatorio (X,Y,Z) è

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = f_X(x)\, f_Y(y)\, f_Z(z) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[0,2]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(z)\,.$$

Applicando il teorema di Fubini, la probabilità richiesta è pari a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \in [Y, Y+Z]) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_C(x,y,z)\, f_{X,Y,Z}(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 \mathbb{1}_{\{x \in [y, y+z]\}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 z\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \int_0^1 z\, \mathrm{d}z = \frac{1}{4} .
\end{aligned}
$$

Esercizio 6.35 (*). Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ variabili aleatorie reali i.i.d. $\mathrm{Exp}(1)$. Definiamo per $n \in \mathbb{N}$

$$
U_n := \frac{X_0}{X_1 + \ldots + X_n} .
$$

(i) Si mostri che la funzione di ripartizione di U_n è data, per $t \geq 0$, da

$$
F_{U_n}(t) = 1 - \frac{1}{(1+t)^n} .
$$

[*Sugg.* Si osservi che $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$ ha distribuzione ... ed è indipendente da ...]

(ii) Si deduca che la variabile aleatoria U_n è assolutamente continua e, per ogni n fissato, si determini per quali valori di $p > 0$ si ha $U_n \in L^p$.

Soluzione 6.35. (i) Chiaramente $F_{U_n}(t) = 0$ per $t \leq 0$. Introduciamo la variabile aleatoria $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$, che ha distribuzione $\mathrm{Gamma}(n,1)$, grazie alla Proposizione 6.29. Si noti che possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
F_{U_n}(t) &= \mathrm{P}(U_n \leq t) = \mathrm{P}\left(\frac{X_0}{Y_n} \leq t \right) = \mathrm{P}\big(X_0 \leq t Y_n\big) \\
&= \mathrm{P}\big((X_0, Y_n) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \leq t y\}\big) .
\end{aligned}
$$

Dato che le variabili X_0 e Y_n sono indipendenti, il vettore aleatorio (X_0, Y_n) è assolutamente continuo, con densità

$$
f_{X_0,Y_n}(x,y) = f_{X_0}(x)\, f_{Y_n}(y) = e^{-x}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-y}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) .
$$

Per $t > 0$ possiamo dunque scrivere

$$
\begin{aligned}
F_{U_n}(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \, x \leq ty\}}\, f_{X_0,Y_n}(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \mathbb{1}_{\{x \leq ty\}}\, e^{-x}\, \frac{y^{n-1}\, e^{-y}}{(n-1)!} = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}\, e^{-y}}{(n-1)!} \left(\int_0^{ty} e^{-x}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \frac{y^{n-1}\, e^{-y}}{(n-1)!} \left(1 - e^{-ty}\right) \mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{(1+t)^n} \int_0^\infty \mathrm{d}y\, (1+t)^n\, \frac{y^{n-1}\, e^{-(1+t)y}}{(n-1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+t)^n} ,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo fatto apparire nell'ultimo integrale la densità di una variabile aleatoria Gamma$(n, 1+t)$.

(ii) Essendo F_{U_n} una funzione C^1 a tratti, segue che U_n è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_{U_n}(t) = F'_{U_n}(t) = \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Di conseguenza

$$\mathrm{E}(|U_n|^p) = \int_0^\infty \frac{t^p}{(1+t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad p < n,$$

perché $t^p/(1+t)^{n+1} \sim t^{p-n-1}$ per $t \to +\infty$.

Esercizio 6.36 (*). Siano $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ e $T \sim \mathrm{Exp}(1/2)$ variabili aleatorie indipendenti. Si definiscano $Y = X/\sqrt{T}$ e $S = X^2 + T$.

(i) Determinare la densità congiunta di (Y,S).

(ii) Y e S sono variabili aleatorie indipendenti?

Soluzione 6.36. (i) Posto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, si consideri la trasformazione $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ data da

$$\varphi(x,t) = \left(\frac{x}{\sqrt{t}}, x^2 + t \right).$$

Si tratta di un diffeomorfismo, la cui funzione inversa è data da

$$\varphi^{-1}(y,s) = \left(y\sqrt{\frac{s}{1+y^2}}, \frac{s}{1+y^2} \right).$$

La matrice Jacobiana di φ^{-1} é

$$D\varphi^{-1}(y,s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{s}{1+y^2}} - \frac{y^2\sqrt{s}}{(1+y^2)^{3/2}} & \frac{y}{2\sqrt{s}\sqrt{1+y^2}} \\ -\frac{2ys}{(1+y^2)^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

sicché

$$\det D\varphi^{-1}(y,s) = \frac{\sqrt{s}}{(1+y^2)^{3/2}}.$$

Dato che X e T sono variabili aleatorie indipendenti assolutamente continue, il vettore aleatorio (X,T) è assolutamente continuo, con densità

$$f_{X,T}(x,t) = f_X(x)\, f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t).$$

Applicando la Proposizione 6.49, segue che $(Y,S) = \varphi(X,T)$ è un vettore aleatorio assolutamente continuo, con densità

$$f_{Y,S}(y,s) = f_{X,T}(\varphi^{-1}(y,s)) \det D\varphi^{-1}(y,s) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s} \frac{\sqrt{s}}{(1+y^2)^{3/2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s) .$$

(ii) Le variabili aleatorie Y e S sono indipendenti perché la loro densità congiunta $f_{Y,S}(y,s)$ si fattorizza come prodotto di una funzione di y per una funzione di s (si ricordi l'Esercizio 6.4).

Esercizio 6.37 (*). Siano X e Y variabili aleatorie reali indipendenti, in cui Y ha distribuzione $\mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$ mentre X è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} 1_{[0,+\infty)}(x).$$

Si determinino la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali delle variabili aleatorie Z e W, definite da

$$Z := X \cos Y , \qquad W := X \sin Y .$$

[*Sugg.* Si osservi che $X = \sqrt{Z^2 + W^2}$ e $Y = \arctan(W/Z)$.]

Soluzione 6.37. Si consideri la funzione $\varphi : (0,+\infty) \times (-\pi/2, \pi/2) \to (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x,y) = (x\cos y, x \sin y)$. Si ha $\varphi^{-1}(z,w) = (\sqrt{z^2+w^2}, \arctan(w/z))$, perciò

$$D\varphi^{-1}(z,w) = \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{z^2+w^2}} & \frac{w}{\sqrt{z^2+w^2}} \\ -\frac{w}{z^2}\frac{1}{1+(w/z)^2} & \frac{1}{z}\frac{1}{1+(w/z)^2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det D\varphi^{-1}(z,w) = \frac{1}{\sqrt{z^2+w^2}} .$$

Dato che X e Y sono variabili aleatorie indipendenti assolutamente continue, il vettore aleatorio (X,Y) è assolutamente continuo, con densità

$$f_{X,Y}(x,y) \,=\, f_X(x)\, f_Y(y) \,=\, x e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(y) .$$

Segue allora dalla Proposizione 6.49 che (Z,W) è un vettore aleatorio assolutamente continuo, con densità

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(z,w)) |\det D\varphi^{-1}(z,w)| = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(z^2+w^2)} 1_{(0,+\infty)}(z).$$

Da ciò segue che Z e W sono indipendenti, $W \sim \mathrm{N}(0,1)$ e Z ha densità

$$f_Z(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} 1_{(0,+\infty)}(z) .$$

Capitolo 7
Teoremi limite

7.1 La legge dei grandi numeri

Esercizio 7.1. Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, con valor medio μ finito, che soddisfa la legge debole dei grandi numeri (si veda (7.2)). Si mostri che per ogni funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ limitata e continua nel punto μ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}[f(\overline{X}_n)] = f(\mu).$$

Soluzione 7.1. Sia $C\in(0,\infty)$ tale che

$$|f(x)|\le C\,, \qquad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Inoltre, per ogni $\varepsilon>0$, sia $\delta>0$ tale che

$$|x-\mu|\le\delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-f(\mu)|\le\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Per la legge dei grandi numeri, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(|\overline{X}_n-\mu|>\delta)=0$, quindi

$$\exists n_0<\infty: \quad \forall n\ge n_0 \quad \mathrm{P}(|\overline{X}_n-\mu|>\delta)\le\frac{\varepsilon}{4C}\,.$$

Mettendo insieme queste relazioni, per $n\ge n_0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\big|\mathrm{E}[f(\overline{X}_n)]-f(\mu)\big| &= \big|\mathrm{E}\left[f(\overline{X}_n)-f(\mu)\right]\big| \le \mathrm{E}\left[|f(\overline{X}_n)-f(\mu)|\right] \\
&= \mathrm{E}\left[|f(\overline{X}_n)-f(\mu)|\,\mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n-\mu|\le\delta\}}\right]+\mathrm{E}\left[|f(\overline{X}_n)-f(\mu)|\,\mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n-\mu|>\delta\}}\right] \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\,\mathbb{P}\big(|\overline{X}_n-\mu|\le\delta\big)+\mathrm{E}\left[\big(|f(\overline{X}_n)|+|f(\mu)|\big)\,\mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n-\mu|>\delta\}}\right] \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+(2C)\,\mathrm{P}(|\overline{X}_n-\mu|>\delta\big) \le \frac{\varepsilon}{2}+(2C)\frac{\varepsilon}{4C}=\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$, abbiamo mostrato che $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[f(\overline{X}_n)]=f(\mu)$.

7.2 Il teorema limite centrale

Esercizio 7.2. Si mostri che il limite (7.34) segue dalla Proposizione 7.15.

Soluzione 7.2. Sia $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Introducendo la quantità

$$\delta_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} \big| \mathrm{P}(Z_n \le x) - \mathrm{P}(Z \le x) \big| \,,$$

sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, per la Proposizione 7.15. Per definizione,

$$\big| \mathrm{P}(Z_n \le x) - \mathrm{P}(Z \le x) \big| \le \delta_n \,, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \,,$$

e analogamente $|\mathrm{P}(Z_n < x) - \mathrm{P}(Z < x)| \le \delta_n$, poiché $\mathrm{P}(Z_n < x) = \lim_{y \uparrow x} \mathrm{P}(Z_n \le y)$ mentre $\mathrm{P}(Z \le x) = \mathrm{P}(Z < x)$. Notiamo che per ogni intervallo $I = (a,b] \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \big| \mathrm{P}(Z_n \in I) - \mathrm{P}(Z \in I) \big| &= \big| \mathrm{P}(Z_n \le b) - \mathrm{P}(Z_n \le a) - \mathrm{P}(Z \le b) + \mathrm{P}(Z \le a) \big| \\ &\le \big| \mathrm{P}(Z_n \le b) - \mathrm{P}(Z \le b) \big| + \big| \mathrm{P}(Z_n \le a) - \mathrm{P}(Z \le a) \big| \\ &\le 2\delta_n \,. \end{aligned}$$

Con argomenti analoghi, si mostra la stessa disuguaglianza per intervalli del tipo (a,b), $[a,b)$ o $[a,b]$. Da ciò segue il limite (7.34).

Esercizio 7.3. Con riferimento al Teorema 7.16, si dimostri che $\rho \ge \sigma^3$.

Soluzione 7.3. Ricordiamo che $\rho = \mathrm{E}(|X_1 - \mu|^3)$ e $\sigma^2 = \mathrm{E}(|X_1 - \mu|^2)$. Dato che $\varphi(x) := |x|^{3/2}$ è una funzione convessa, applicando la disuguaglianza di Jensen alla variabile aleatoria $Y := |X_1 - \mu|^2$ si ottiene $\mathrm{E}(\varphi(Y)) \ge \varphi(\mathrm{E}(Y))$, ossia $\rho \ge \sigma^3$.

Esercizio 7.4. Si mostri che le quantità E_n ed $\hat{E}_n$, definite in (7.39) e (7.41), sono entrambe minori della quantità $\|F_{Z_n} - \Phi\|_\infty$ definita in (7.35).

Soluzione 7.4. Ricordando che $Z_n := (S_n - \mu n)/(\sigma\sqrt{n})$, la relazione (7.39) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} E_n :=& \sup_{m \in \mathbb{Z}} \left| \mathrm{P}\big(S_n \le m\big) - \Phi\left(Z_n \le \frac{m - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| \\ =& \sup_{m \in \mathbb{Z}} \left| \mathrm{P}\left(Z_n \le \frac{m - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(Z_n \le \frac{m - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| \\ =& \sup_{m \in \mathbb{Z}} \left| F_{Z_n}\left(\frac{m - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(Z_n \le \frac{m - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| \\ \le& \sup_{x \in \mathbb{R}} \big| F_{Z_n}(x) - \Phi(x) \big| =: \|F_{Z_n} - \Phi\|_\infty \,. \end{aligned}$$

Un discorso del tutto analogo vale per la quantità $\hat{E}_n$ in (7.41), notando che

$$\mathrm{P}\big(S_n \le m\big) = \mathrm{P}\left(S_n \le m + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}\left(Z_n \le \frac{m + \frac{1}{2} - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

7.3 Esercizi di riepilogo

Esercizio 7.5. Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30 000 firme, quante persone è necessario interpellare affinchè la soglia delle 30 000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno 0.95?

Soluzione 7.5. Indichiamo con X_i la variabile aleatoria che vale 1 se l'i-esima persona interpellata è disposta a firmare per il referendum e 0 altrimenti. Assumiamo che $X_1, X_2, \ldots$ siano variabili aleatorie i.i.d. con $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$ con $p = 0.6$, che dunque hanno media μ e deviazione standard σ date da

$$\mu = p = 0.6\,, \qquad \sigma = \sqrt{p(1-p)} \approx 0.49\,. \tag{S7.1}$$

Se si interpellano n persone, il numero di persone disposte a firmare è dato dalla variabile aleatoria $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. La condizione da soddisfare è dunque

$$\mathrm{P}(S_n \geq N_0) \geq 0.95\,, \qquad \text{dove} \quad N_0 := 30\,000\,. \tag{S7.2}$$

Per applicare il metodo dell'approssimazione normale, riconduciamoci alla variabile aleatoria $Z_n := (S_n - \mu n)/(\sigma\sqrt{n}) \approx Z$, dove Z indica come al solito una variabile aleatoria $\mathrm{N}(0,1)$. Detta Φ la sua funzione di ripartizione, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_n \geq N_0) &= \mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{N_0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{N_0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi(z)\,, \qquad \text{avendo posto} \quad z := \frac{N_0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\,, \end{aligned} \tag{S7.3}$$

e la relazione (S7.2) diventa (approssimativamente)

$$1 - \Phi(z) \geq 0.95 \quad \Longleftrightarrow \quad z \leq \Phi^{-1}(0.05)\,. \tag{S7.4}$$

Il valore $\Phi^{-1}(0.05)$ non può essere direttamente ricavato dalla tavola a pagina S-113, in cui compaiono solo numeri maggiori di 0.5. Tuttavia, ricordando che $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (cf. la relazione (7.28)), possiamo scrivere

$$1 - \Phi(z) \geq 0.95 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(-z) \geq 0.95 \quad \Longleftrightarrow \quad (-z) \geq \Phi^{-1}(0.95)\,,$$

e il valore $\Phi^{-1}(0.95)$ può essere facilmente ricavato. Infatti, nella tavola a pagina S-113 leggiamo $\Phi(1.64) = 0.9495$ e $\Phi(1.65) = 0.9505$, da cui segue che

$$\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645\,. \tag{S7.5}$$

Ricordando (S7.3), la condizione $(-z) \geq \Phi^{-1}(0.95)$ si traduce in

$$\frac{N_0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le -\Phi^{-1}(0.95) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(\sqrt{n})^2 - \sigma\Phi^{-1}(0.95)\sqrt{n} - N_0 \ge 0\,.$$

Questa è una disequazione di secondo grado in $\sqrt{n}$, le cui soluzioni positive sono date dalla formula seguente (sostituiamo il valori numerici per μ, σ, N_0 e $\Phi^{-1}(0.95)$ presi da (S7.1), (S7.2) e (S7.5)):

$$\sqrt{n} \ge \frac{1}{2\mu}\left(\sigma\Phi^{-1}(0.95) + \sqrt{\sigma^2\Phi^{-1}(0.95)^2 - 4\mu\cdot N_0}\right) \approx 224.28\,. \qquad \text{(S7.6)}$$

In definitiva, il numero di persone richiesto è dato da

$$n \ge (224.28)^2 \approx 50\,302\,.$$

(Se si volesse applicare la correzione di continuità, basterebbe sostituire N_0 con 29 999.5, ma il risultato cambierebbe di pochissimo.)

Esercizio 7.6. Un grande studio fotografico riceve l'incarico di eseguire un servizio che prevede l'uso di speciali lampade ad alta luminosità. La durata di tali lampade ha distribuzione esponenziale di media uguale a 100 ore, e costano 100 Euro l'una. Le durate di lampade distinte si possono considerare indipendenti. Per il servizio si prevede siano necessarie 10 000 ore di luce prodotta da tali lampade. Inoltre, a causa degli elevati costi di trasporto, è conveniente acquistare le lampade necessarie in un unico ordine.

(i) Usando l'approssimazione normale, si determini il minimo numero di lampade che è necessario acquistare affinché le 10000 ore di luce siano garantite con probabilità 0.95.

(ii) Un'altra ditta di lampade propone un prodotto la cui durata ha distribuzione esponenziale di media 200 ore, al costo di 190 Euro per lampada. Ritenete sia conveniente acquistare da questa ditta anziché da quella del punto precedente? (Anche in questo caso le lampade vengono acquistate nel numero minimo necessario a garantire 10000 ore di luce con probabilità 0.95).

Soluzione 7.6. (i) Indicando con X_i la durata in ore dell'i-esima lampadina, assumiamo che $X_1, X_2, \ldots$ siano variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$, dove $\lambda := 1/\mu = 1/100$ (si ricordi che $\mathrm{E}(\mathrm{Exp}(\lambda)) = 1/\lambda$). Ricordando la relazione (6.40), la deviazione standard delle X_i vale

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mu = 100\,.$$

Posto $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, la condizione da verificare è dunque

$$\mathrm{P}(S_n \ge N_0) \ge 0.95\,, \qquad \text{dove} \quad N_0 := 10\,000\,.$$

Si noti che il problema impostato è formalmente identico a quello della Soluzione 7.5: cambiano solo i valori di μ, σ, N_0 (e la distribuzione delle X_i, i cui dettagli non giocano alcun ruolo nell'approssimazione normale). Senza ripercorrere i calcoli, applichiamo direttamente la formula finale (S7.6): il numero minimo di lampade da acquistare è dato da

$$\sqrt{n} \geq \frac{1}{2\mu}\left(\sigma\Phi^{-1}(0.95) + \sqrt{\sigma^2\Phi^{-1}(0.95)^2 - 4\mu \cdot N_0}\right) \approx 10.86\,, \qquad \text{(S7.7)}$$

ovvero

$$n \geq (10.86)^2 \approx 118\,.$$

(ii) Dato che ogni lampada considerata nel primo punto ha un costo 100 euro, il prezzo totale per acquistare 118 lampade è pari a 11 800 euro. Determiniamo ora il numero di lampade della seconda ditta che sarebbe necessario acquistare: applicando la formula (S7.7) con i nuovi dati $\mu = 200$, $\sigma = 200$ (e ancora $N_0 = 10\,000$) si ottiene

$$\sqrt{n} \geq 7.94\,, \qquad \text{ossia} \qquad n \geq (7.94)^2 \approx 64\,,$$

per un costo totale di $64 \cdot 190 = 12\,160$ euro. Le lampade della seconda ditta sono dunque meno convenienti, nonostante durino il doppio costando meno del doppio!

Esercizio 7.7. Un gioco consiste nell'estrarre a caso due carte da un mazzo di carte da Poker (52 carte, 4 semi); si vince se nessuna delle carte estratte è di quadri.

(i) Si determini la probabilità di successo in questo gioco.

(ii) Per $n \geq 1$, sia p_n la probabilità che in $2n$ ripetizioni del gioco il numero di successi sia almeno n. Si determini, approssimativamente, il valore p_{50}.

(iii) Si determini il minimo valore di n per cui $p_n \geq 1 - 10^{-3}$.

Soluzione 7.7. (i) Essendoci 39 carte non di quadri, la probabilità di successo vale

$$p = \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{19}{34} \approx 0.559\,.$$

(ii) Indicando con X_i la variabile aleatoria che vale 1 se l'i-esima ripetizione del gioco ha successo e 0 altrimenti, le variabili $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con distribuzioni marginali $\mathrm{Be}(p)$, dunque media e deviazione standard valgono

$$\mu = p \approx 0.559\,, \qquad \sigma = \sqrt{p(1-p)} \approx 0.497\,.$$

Ponendo $S_n := X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, usando l'approssimazione normale e trascurando la correzione di continuità, si ottiene

$$\begin{aligned} p_n = \mathrm{P}(S_{2n} \geq n) &= \mathrm{P}\left(\frac{S_{2n} - 2n\mu}{\sigma\sqrt{2n}} \geq \frac{n - 2n\mu}{\sigma\sqrt{2n}}\right) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{n-2n\mu}{\sigma\sqrt{2n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{n-2n\mu}{\sigma\sqrt{2n}}\right) = \Phi\left(\frac{2n\mu - n}{\sigma\sqrt{2n}}\right), \end{aligned} \qquad \text{(S7.8)}$$

avendo usato il fatto che $1-\Phi(z)=\Phi(-z)$ (cf. la relazione (7.28)). Per $n=50$, sostituendo i valori di μ,σ,n e consultando la tavola a pagina S-113, si ottiene

$$p_n \approx \Phi\left(\frac{100\cdot 0.559-50}{0.497\sqrt{100}}\right) \approx \Phi(1.19) \approx 0.88\,.$$

(iii) Usando la formula (S7.8) si ottiene

$$p_n \geq 1-10^{-3} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2n\mu-n}{\sigma\sqrt{2n}} \geq \Phi^{-1}\big(0.999\big) \quad\Longleftrightarrow$$
$$\frac{2\mu-1}{\sigma\sqrt{2}}\sqrt{n} \geq \Phi^{-1}\big(0.999\big) \quad\Longleftrightarrow\quad n \geq \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\mu-1}\Phi^{-1}\big(0.999\big)\right)^2.$$

Dalla tavola a pagina S-113 si leggono i valori $\Phi(3.07)\approx 0.9989$ e $\Phi(3.08)\approx 0.9990$, quindi $\Phi^{-1}\big(0.999\big)\approx 3.075$. Sostituendo i valori numerici di tutte le costanti, si ha

$$n \geq n_0 := \left(\frac{\sqrt{2}\cdot 0.497}{2\cdot 0.559-1}3.075\right)^2 \approx 336\,.$$

Esercizio 7.8. Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1,T_2,\ldots,T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T=T_1+T_2+\cdots+T_n$. Si supponga che $T_i\sim\mathrm{Exp}(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale, si calcolino:

(i) se $n=100$ la probabilità $\mathrm{P}(T<90)$;
(ii) il valore minimo di n per cui $\mathrm{P}(T<90)\leq 0.05$.

Soluzione 7.8. (i) Ricordando che media e deviazione standard di una variabile aleatoria $\mathrm{Exp}(\lambda)$ valgono entrambe $1/\lambda$, le variabili T_i hanno media e deviazione standard pari a

$$\mu=1\,,\qquad \sigma=1\,.$$

Usando l'approssimazione normale, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T<90) &= \mathrm{P}\left(\frac{T-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}<\frac{90-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\approx \mathrm{P}\left(Z<\frac{90-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{90-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{90-100}{\sqrt{100}}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)\approx 1-0.8413\approx 0.1587\,.\end{aligned}$$

(ii) Usando i calcoli del punto precedente, otteniamo

$$\mathrm{P}(T < 90) \approx \Phi\left(\frac{90-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \le 0.05 \quad \Longleftrightarrow \quad 1-\Phi\left(\frac{90-n}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$$
$$\Longleftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{n-90}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n-90}{\sqrt{n}} \ge \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645\,,\,,$$

dove osserviamo che il valore $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645$ è stato già ricavato in (S7.5), usando la tavola a pagina S-113. Otteniamo quindi una disequazione di secondo grado nella variabile $\sqrt{n}$:

$$(\sqrt{n})^2 - 1.645\sqrt{n} - 90 \ge 0\,,$$

le cui soluzioni positive sono date da

$$\sqrt{n} \ge \frac{1}{2}\big(1.645 + \sqrt{1.645^2 + 4 \cdot 90}\big) \approx 10.345\,,$$

ossia $n \ge (10.345)^2 \approx 108$.

Esercizio 7.9. La lunghezza dei chiodini prodotti da una certa ditta ha una distribuzione incognita, la cui media e varianza indichiamo con μ e σ^2. Il valore di σ^2 è noto e pari a $0.25\,\mathrm{mm}^2$, mentre il valore di μ (espresso in mm) è incognito e vogliamo stimarlo empiricamente.

A tal fine, misuriamo le lunghezze $X_1, \ldots, X_n$ di n chiodini scelti a caso e ne indichiamo la media aritmetica con $\overline{X}_n := (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Se n è grande, per la legge dei grandi numeri sappiamo che $\overline{X}_n$ sarà vicino a μ. Per rendere più quantitativa questa affermazione, scegliamo un numero reale $\delta > 0$ e consideriamo l'intervallo I_δ di ampiezza δ centrato in $\overline{X}_n$, vale a dire

$$I_\delta := \big(\overline{X}_n - \delta\,, \overline{X}_n + \delta\big)\,.$$

Si determini δ_n in modo che la probabilità che l'intervallo I_{δ_n} contenga μ valga approssimativamente 0.95 per n grande.

[*Sugg.* Si esprima l'evento $\{\mu \in I_{\delta_n}\}$ nella forma $\{a < \overline{X}_n < b\}$ per opportuni a, b.]

Soluzione 7.9. Si noti che valgono le uguaglianze di eventi

$$\big\{\mu \in I_\delta\big\} = \big\{\overline{X}_n - \delta \le \mu \le \overline{X}_n + \delta\big\} = \big\{-\delta \le \big(\overline{X}_n - \mu\big) \le \delta\big\}\,,$$

pertanto, indicando con Z una variabile aleatoria normale standard,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mu \in I_\delta) &= \mathrm{P}\left(-\sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma} \le \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma}\right) \approx \mathrm{P}\left(-\sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma} \le Z \le \sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1\,,\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (cf. la relazione (7.28)). La condizione su δ_n richiesta è dunque

$$\mathrm{P}(\mu \in I_{\delta_n}) = 0.95 \iff 2\Phi\left(\sqrt{n}\frac{\delta_n}{\sigma}\right) - 1 = 0.95 \iff$$
$$\Phi\left(\sqrt{n}\frac{\delta_n}{\sigma}\right) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \iff \delta_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(0.975)\,.$$

Dalla tavola a pagina S-113 ricaviamo che $\Phi(1.96) = 0.9750$, dunque $\Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$. Sostituendo il valore $\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5$, otteniamo infine

$$\delta_n = \frac{0.5 \cdot 1.96}{\sqrt{n}} = \frac{0.975}{\sqrt{n}}\,.$$

Si noti che $\delta_n \to 0$ per $n \to \infty$, quindi per n grande abbiamo un intervallo (aleatorio) I_{δ_n} molto stretto che con grande probabilità contiene il valore incognito μ.

Esercizio 7.10. In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B. Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantisce che essi votino per il candidato A. Tutti gli altri elettori votano “a caso”, scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

(i) Supponiamo che l’organizzazione malavitosa controlli $n = 2\,000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?

(ii) Qual è il numero minimo n di individui che l’organizzazione malavitosa deve controllare, per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?

Soluzione 7.10. (i) Sia X il numero di voti ricevuti da A tra i $998\,000$ elettori non controllati. Per ipotesi $X \sim \mathrm{Bin}(998\,000, \frac{1}{2})$. Si noti che il candidato A vince se e solo se $X > 498\,000$. Usando l’approssimazione normale (senza correzione di continuità, che visti i numeri elevati non è rilevante) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > 498\,000) &= \mathrm{P}\left(\frac{X - 998\,000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{998\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} > \frac{498\,000 - 998\,000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{998\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) \\ &\approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{-1\,000}{499.5}\right) \approx 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) \approx 0.9772\,.\end{aligned}$$

(ii) Sia ora X il numero di voti ricevuti da A tra i $1\,000\,000 - n$ elettori non controllati. Per ipotesi $X \sim \mathrm{Bin}(1\,000\,000 - n, \frac{1}{2})$ e il candidato A vince se e solo se $X > 500\,000 - n$, pertanto

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X > 500\,000 - n) \\ &\quad = \mathrm{P}\left(\frac{X - (1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{(1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} > \frac{500\,000 - n - (1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{(1\,000\,000 - n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) \\ &\quad \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{-n}{\sqrt{1\,000\,000 - n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000 - n}}\right).\end{aligned}$$

Imponendo che $\mathrm{P}(X > 500\,000 - n) \geq 0.99$ si ottiene dunque

$$\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000 - n}} \geq \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.325\,,$$

avendo usato la tavola a pagina S-113 per ricavare $\Phi^{-1}(0.99)$ (si noti infatti che $\Phi(2.32) = 0.9898$ e $\Phi(2.33) = 0.9901$). Elevando al quadrato la relazione precedente si ottiene

$$\frac{n^2}{1\,000\,000 - n} \geq (2.325)^2 \approx 5.406\,,$$

ossia $n^2 + 5.406\,n - 5\,406\,000 \geq 0$, le cui soluzioni positive sono

$$n \geq \frac{1}{2}\Big(- 5.406 + \sqrt{(5.406)^2 + 4 \cdot 5\,406\,000}\Big) \approx 2\,323\,.$$

Esercizio 7.11. Indicando con $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. con distribuzioni marginali $X_n \sim \mathrm{U}[-1,1]$, si determini per ogni $t \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n} > t \right).$$

Soluzione 7.11. Si noti che $\mu := \mathrm{E}(X_n) = 0$ e $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_n) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$, dunque $\sigma = \sqrt{1/3} \approx 0.577$ (abbiamo applicato le formule notevoli per media e varianza di una variabile aleatoria uniforme, ricavate nel Paragrafo 6.3.1). Possiamo allora riscrivere la probabilità di interesse facendo apparire la variabile aleatoria standardizzata

$$Z_n := \frac{(X_1 + \ldots + X_n) - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}\,,$$

nel modo seguente:

$$\mathrm{P}\left(\frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n} > t \right) = \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} > \sqrt{t} \right) = \mathrm{P}\big(Z_n > \sigma\sqrt{t}\big)\,.$$

Per il teorema limite centrale, indicando con Z una variabile aleatoria normale standard, otteniamo dunque

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n} > t \right) = \mathrm{P}\big(Z > \sigma\sqrt{t}\big) = 1 - \Phi(\sigma\sqrt{t}) = 1 - \Phi(0.577\,\sqrt{t})\,.$$

Si noti che il limite è espresso in termini della funzione “notevole” Φ, i cui valori possono essere calcolati usando la tavola a pagina S-113.

Esercizio 7.12. Usando opportunamente il teorema limite centrale, si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!}. \tag{7.56}$$

[*Sugg.* Date $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $\mathrm{Pois}(1)$, si esprima la somma in (7.56) in funzione di tali variabili aleatorie.]

Soluzione 7.12. Date $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $\mathrm{Pois}(1)$, la somma $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ ha distribuzione $\mathrm{Pois}(n)$, per la Proposizione 3.109, pertanto

$$\mathrm{P}(S_n = k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Di conseguenza possiamo scrivere

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{P}(S_n \le n+\sqrt{n}) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 1\right).$$

Per il teorema limite centrale, la distribuzione della variabile aleatoria $Z_n := \frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ converge verso la distribuzione $\mathrm{N}(0,1)$ (nel senso della convergenza puntuale della funzione di ripartizione), pertanto, indicando con Z una variabile normale standard,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(Z_n \le 1) = \mathrm{P}(Z \le 1) = \Phi(1) \approx 0.8413,$$

avendo ricavato il valore di $\Phi(1)$ dalla tavola a pagina S-113.

Esercizio 7.13. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $\mathrm{U}(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$. Indichiamo con $B_n(r,\delta)$ la "buccia" di spessore 2δ della palla di raggio r centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$:

$$B_n(r,\delta) = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n :\ r-\delta \le \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} \le r+\delta\right\}.$$

(i) Si spieghi perché le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definite da $Y_n := X_n^2$, sono i.i.d., con valor medio $\mu = \frac{1}{12}$ e deviazione standard $\sigma = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

(ii) Applicando il teorema limite centrale alla successione $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si deduca che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big((X_1,\ldots,X_n) \in B_n\Big(\sqrt{\tfrac{n}{12}},\delta\Big)\Big) = \mathrm{P}\big(-\delta\sqrt{60} \le Z \le \delta\sqrt{60}\big),$$

per ogni $\delta > 0$, dove $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. In particolare, usando la tavola a pagina 389, si mostri che per $\delta = \frac{1}{3}$ il valore del limite è ≥ 0.99.

(iii) (*) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il vettore aleatorio $(X_1,\ldots,X_n)$ ha distribuzione uniforme continua nell'insieme $(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2})^n \subseteq \mathbb{R}^n$ (si ricordi l'Esempio 6.39) Ricordando la definizione (6.46) di misura n-dimensionale, si osservi che $\mathrm{mis}((-\frac{1}{2},+\frac{1}{2})^n) = 1$ e si deduca che per n sufficientemente grande

$$\mathrm{mis}\Big(B_n\Big(\sqrt{\tfrac{n}{12}},\tfrac{1}{3}\Big) \cap \big(-\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\big)^n\Big) \ge 99\%.$$

Possiamo dunque affermare che, per n grande, "quasi tutto il volume di un cubo n-dimensionale è contenuto nella buccia sottile di una palla", visto che lo spessore $2\delta = \frac{2}{3}$ è costante, mentre il raggio $r = \sqrt{\frac{n}{12}}$ diverge per $n \to +\infty$!

Soluzione 7.13. (i) Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d. perché ottenute dalla successione i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ applicando a ogni variabile la stessa funzione (misurabile), per le Proposizioni 3.15 e 3.40. Si ha per q pari

$$\mathrm{E}(X_n^q) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^q \,\mathrm{d}x = \frac{x^{q+1}}{q+1}\bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2\,\frac{(\frac{1}{2})^{q+1}}{q+1} = \frac{1}{2^q(q+1)}\,,$$

in particolare $\mu = \mathrm{E}(X_n^2) = \frac{1}{12}$ e $\mathrm{E}(X_n^4) = \frac{1}{80}$, quindi $\mathrm{Var}(X_n^2) = \mathrm{E}(X_n^4) - \mathrm{E}(X_n^2)^2 = \frac{1}{80} - \frac{1}{144} = \frac{1}{180}$ e dunque $\sigma = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}} \simeq 0.075$.

(ii) Dato che $Y_n = X_n^2$, valgono le uguaglianze di eventi

$$\begin{aligned}
&\Big\{(X_1,\ldots,X_n) \in B_n\Big(\sqrt{\tfrac{n}{12}},\delta\Big)\Big\} = \bigg\{\Big(\sqrt{\tfrac{n}{12}}-\delta\Big)^2 \le Y_1+\ldots+Y_n \le \Big(\sqrt{\tfrac{n}{12}}+\delta\Big)^2\bigg\} \\
&\quad = \Big\{\tfrac{n}{12} - \delta\sqrt{\tfrac{n}{3}} + \delta^2 \le Y_1+\ldots+Y_n \le \tfrac{n}{12} + \delta\sqrt{\tfrac{n}{3}} + \delta^2\Big\} \\
&\quad = \bigg\{ -\delta\sqrt{60} + 6\sqrt{5}\,\frac{\delta^2}{\sqrt{n}} \le \frac{(Y_1+\ldots+Y_n) - n\frac{1}{12}}{\frac{1}{6\sqrt{5}}\sqrt{n}} \le \delta\sqrt{60} + 6\sqrt{5}\,\frac{\delta^2}{\sqrt{n}} \bigg\} \\
&\quad = \Big\{ -\delta\sqrt{60} + \varepsilon_n \le Z_n \le \delta\sqrt{60} + \varepsilon_n \Big\},
\end{aligned}$$

dove $Z_n := \frac{(Y_1+\ldots+Y_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ è proprio la quantità che compare nel teorema limite centrale, mentre $\varepsilon_n := 6\sqrt{5}\frac{\delta^2}{\sqrt{n}} \to 0$ per $n \to \infty$. Per il teorema limite centrale, o più precisamente per la sua versione rafforzata (7.34), otteniamo dunque la relazione richiesta. Per $\delta = \frac{1}{3}$ si ha

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\big(-\delta\sqrt{60} \le Z \le \delta\sqrt{60}\big) \simeq \mathrm{P}\big(-2.58 \le Z \le 2.58\big) \\
&\quad = \mathrm{P}(Z \le 2.58) - \mathrm{P}(Z \le -2.58) = \Phi(2.58) - \Phi(-2.58) \\
&\quad = \Phi(2.58) - (1-\Phi(2.58)) = 2\,\Phi(2.58) - 1 \simeq 2\cdot 0.9951 - 1 \simeq 0.9902\,.
\end{aligned}$$

(iii) Si veda la soluzione dell'Esercizio 6.28 per il fatto che $X = (X_1,\ldots,X_n) \sim \mathrm{Unif}((-\frac{1}{2},+\frac{1}{2})^n)$ e per la conseguente relazione (S6.13). La conclusione segue immediatamente.

Capitolo 8
Applicazioni alla statistica matematica

8.1 Modelli statistici parametrici

Esercizio 8.1. Si mostri che $Y_n := \overline{X}_n$ fornisce uno stimatore corretto e efficiente per θ per i modelli statistici determinati da:

(i) $\mathrm{p}(x;\theta) := e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}$, con $x \in \mathbb{N}_0$ e $\theta \in \Theta = (0,+\infty)$;

(ii) $f(x;\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp[-(x-\theta)^2/2\sigma^2]$, dove $\theta \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ è una costante che viene assunta nota.

Soluzione 8.1. (i) Se $\mathrm{p}(x;\theta)$ è la densità discreta delle X_n, allora $X_n \sim \mathrm{Pois}(\theta)$. In particolare $\mathrm{E}_\theta(X_n) = \theta$, e pertanto anche $\mathrm{E}_\theta\left(\overline{X}_n\right) = \theta$. Quindi Y_n è uno stimatore corretto. Ricordiamo che uno stimatore corretto è efficiente se la disuguaglianza (8.5) è verificata come uguaglianza. In questo caso $h(\theta) = \theta$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log \mathrm{p}(x;\theta) = \frac{x}{\theta} - 1,$$

da cui

$$\mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log \mathrm{p}(X_1;\theta)\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^2}\mathrm{Var}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta}.$$

Quindi $V_n(\theta) = \frac{\theta}{n}$, che coincide con $\mathrm{Var}_\theta(Y_n)$.

(ii) La correttezza è analoga al punto precedente, dato che $X_n \sim N(\theta,\sigma^2)$. Inoltre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log \mathrm{p}(x;\theta) = \frac{x-\theta}{\sigma^2},$$

da cui

$$\mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log f(X_1;\theta)\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^4}\mathrm{Var}_\theta(X_1) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Quindi $V_n(\theta) = \frac{\sigma^2}{n}$, che coincide con $\mathrm{Var}_\theta(Y_n)$.

Esercizio 8.2. Si consideri il modello statistico per cui

$$f(x;\theta) := \theta\, e^{-\theta x}\, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x),$$

per $\theta \in \Theta = (0,+\infty)$.

(i) Si mostri che $Y_n := \overline{X}_n$ è uno stimatore corretto ed efficiente per $h(\theta) = 1/\theta$.

(ii) Si mostri che $Y_n := \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ è uno stimatore corretto, ma non efficiente, per θ.

Soluzione 8.2. (i) Notando che $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, si ha che $E_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta}$, da cui la correttezza di Y_n segue immediatamente. Inoltre, poiché $\mathrm{Var}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta^2}$, si ha subito

$$\mathrm{Var}_\theta(Y_n) = \frac{1}{n\theta^2}.$$

Calcoliamo ora il limite inferiore di Rao-Cramer $V_n(\theta)$ (vedi (8.5)). Osservando che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} - x,$$

si calcola subito

$$\mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log f(X_1;\theta)\right)^2\right] = \mathrm{E}_\theta\left[\left(X - \frac{1}{\theta}\right)^2\right] = \mathrm{Var}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Essendo, inoltre $h'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}$, si ha

$$V_n(\theta) = \frac{1/\theta^4}{n/\theta^2} = \frac{1}{n\theta^2} = \mathrm{Var}_\theta(Y_n),$$

che dimostra l'efficienza di Y_n.

(ii) Si noti che $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}(n,\theta)$ (si ricordi la Proposizione 6.29). Perciò, grazie anche alla Proposizione 6.20,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\theta(Y_n) &= (n-1)\,\mathrm{E}_\theta\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = (n-1)\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}\frac{\theta^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\theta y}dy\\ &= \frac{\theta^n}{(n-2)!}\int_0^{+\infty} y^{n-2}e^{-\theta y}dy = \frac{\theta^n}{(n-2)!}\,\frac{(n-2)!}{\theta^{n-1}} = \theta,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty}\lambda^\alpha\, t^{\alpha-1}\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Quindi Y_n è corretto. In modo analogo calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\theta(Y_n^2) &= (n-1)^2\,\mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^2\right] = (n-1)^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2}\frac{\theta^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\theta y}dy\\ &= \frac{(n-1)\theta^n}{(n-2)!}\int_0^{+\infty}y^{n-3}e^{-\theta y}dy = \frac{(n-1)\theta^n}{(n-2)!}\,\frac{(n-3)!}{\theta^{n-2}} = \frac{(n-1)\theta^2}{n-2},\end{aligned}$$

da cui segue

$$\mathrm{Var}_\theta(Y_n) = \frac{\theta^2}{n-2}.$$

Inoltre

$$V_n(\theta) = \frac{1}{n\,\mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log f(X_1;\theta)\right)^2\right]} = \frac{1}{n\,\mathrm{E}_\theta\left[\left(X-\frac{1}{\theta}\right)^2\right]} = \frac{\theta^2}{n}.$$

Pertanto $\mathrm{Var}_\theta(Y_n) > V_n(\theta)$, cioè Y_n non è uno stimatore efficiente per θ.

8.3 Proprietà asintotiche

Esercizio 8.3. Si consideri il modello statistico in cui $\mathrm{p}(x;\theta)$ è la densità di una variabile di Bernoulli di parametro $\theta \in \Theta = (0,1)$. Si mostri che lo stimatore $Y_n := \overline{X}_n$ è asintoticamente normale, e si determini un intervallo di confidenza asintotico per $h(\theta) = \theta$.

Soluzione 8.3. Per il Teorema Limite Centrale, $\sqrt{n}\frac{Y_n-\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$. Quindi la condizione (8.14) è verificata con $\sigma(\theta) := \sqrt{\theta(1-\theta)} \le \overline{\sigma} = 1/2$, per ogni $\theta \in \Theta$, perché la funzione $x \mapsto x(1-x)$ assume massimo per $x = \frac{1}{2}$. Abbiamo quindi la normalità asintotica di Y_n, e un intervallo di confidenza asintotico è dato da

$$\left[Y_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, Y_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right].$$

8.4 Stimatori di massima verosimiglianza

Esercizio 8.4. Si consideri il seguente modello statistico:

$$f(x;\theta) = (\theta+1)x^\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

dove $\theta \in \Theta = (-1,+\infty)$. Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza, si mostri che è asintoticamente normale e si calcoli la varianza asintotica $\sigma^2(t)$.

Soluzione 8.4. Verifichiamo che le ipotesi (A)–(G) sono soddisfatte, e calcoliamo la varianza asintotica con la formula (8.25). Ci sarà utile osservare subito che se X è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $f(x;\theta)$, allora $Y := \log X \sim \mathrm{Exp}(\theta+1)$. Infatti, per $y > 0$,

$$\mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(X \ge e^{-y}).$$

Derivando questa uguaglianza si ottiene $f_Y(y) = e^{-y} f(e^{-y}; \theta)$, da cui la conclusione segue facilmente.

Consideriamo ora le ipotesi (A)–(G). Le ipotesi (A) e (B) sono verificate banalmente. Riguardo alla (C), si osservi che, per $x_1, \ldots, x_n \in (0,1)$,

$$L_n(\underline{x}, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i; \theta) = n \log(\theta + 1) + \theta \sum_{i=1}^{n} \log x_i,$$

che ammette un unico punto di massimo

$$\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) = -1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(-\log x_i)}.$$

Lo stimatore MV è dunque dato da

$$Y_n = -1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(-\log X_i)}.$$

La condizione (D) segue dal fatto che $-\log X_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta + 1)$. Cambiando il valore di $\theta \in \Theta$, la distribuzione di $-\log X_1$ (e quindi di X_1) cambia, come si vede, per esempio, osservando che $E_\theta(-\log X_1)$ è una funzione iniettiva di θ.

Per l'ipotesi (E), si osservi che $\log f(X_1, t) = n \log(\theta + 1) + \theta \log(X_1)$. Dunque (E) segue subito dal fatto che $-\log(X_1)$ ammette momento secondo finito, essendo una variabile esponenziale.

Passiamo ora all'ipotesi (F). La (F) (i) è immediata. Per la (F) (ii), è sufficiente osservare che

$$B(x, \theta) := \frac{\mathrm{d}^2 \log f(x; \theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{1}{(\theta + 1)^2}.$$

Tale funzione è continua in θ e non dipende da x, quindi è necessariamente continua in θ uniformemente in x. Per la (F) (iii), verifichiamo che vale per $k = 1$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(x; \theta) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^\theta + (\theta + 1) x^\theta \log x \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^{\theta+1} \log x \right) \mathrm{d}x = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Il caso $k = 2$ è analogo, essendo, come da verifica diretta,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} f(x; \theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x^{\theta+1} \log^2 x \right).$$

Va notato che la verifica di (F) (iii) può essere fatta utilizzando un risultato classico sulla derivazione di integrali dipendenti da parametro, ad esempio il Teorema 2.27 in [25]. Tuttavia tale metodo presuppone conoscenze più avanzate di Analisi Reale.

Infine, è verificata anche l'ipotesi (G) in quanto, come già osservato, $B(x, \theta)$ non dipende da x.

La normalità asintotica dello stimatore MV Y_n segue allora dal Teorema 8.32, che inoltre fornisce

$$\frac{1}{\sigma^2(\theta)} := -\mathrm{E}_\theta[B(X_1,\theta)] = \frac{1}{(\theta+1)^2},$$

da cui $\sigma^2(\theta) = (\theta+1)^2$.

Esercizio 8.5. Si mostri che il modello statistico

$$f(x;\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\pi}\frac{1}{1+\theta x^2},$$

dove $\theta \in \Theta = (0,+\infty)$, soddisfa le ipotesi (A)–(G), e calcolare la varianza asintotica $\sigma(\theta)$ del corrispondente stimatore MV.

Soluzione 8.5. Le ipotesi (A) e (B) sono verificate facilmente, con $I := \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (la ragione di tale scelta per I sarà chiara tra poco). Meno banale è la condizione (C). Mostriamo che per ogni fissato $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, la funzione

$$L_n(\underline{x},\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log f(x_i;\theta) = \frac{1}{2}\log\theta - \log\pi - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log\left(1+\theta x_i^2\right)$$

ammette un unico massimo locale proprio in Θ. Si noti che $\theta \mapsto L_n(\underline{x},\theta)$ è una funzione derivabile, con

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}L_n(\underline{x},\theta) = \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1+\theta x_i^2} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\theta x_i^2}{1+\theta x_i^2}\right].$$

La mappa $\theta \mapsto \alpha(\theta) := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\theta x_i^2}{1+\theta x_i^2}$ è continua e tale che $\alpha(0) = \frac{1}{2}$. Inoltre, usando l'ipotesi che $x_i \neq 0$, per definizione di I, la funzione α è strettamente decrescente e $\alpha(+\infty) = -\frac{1}{2}$. Per continuità, esiste un unico $\hat{\theta}$ per cui $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}L_n(\underline{x},\hat{\theta}) = 0$. Inoltre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}L_n(\underline{x},\theta) > 0$ per $\theta < \hat{\theta}$ e $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}L_n(\underline{x},\theta) < 0$ per $\theta > \hat{\theta}$, il che implica che $\hat{\theta}$ è un massimo locale proprio per $\theta \mapsto L_n(\underline{x},\theta)$, ed è l'unico.

Consideriamo ora l'ipotesi (D). Essa segue dall'osservazione:

$$\mathrm{P}_\theta(X_1 \le x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(\sqrt{\theta}x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

che, per $x \neq 0$, è una funzione iniettiva di θ.

Per la condizione (E), si noti che

$$\mathrm{E}_\theta\left[(\log \mathrm{p}(X_1,t))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\theta}}{\pi}\frac{1}{1+\theta x^2}\log^2\left(\frac{\sqrt{\theta}}{\pi}\frac{1}{1+\theta x^2}\right)\mathrm{d}x < +\infty,$$

dove la finitezza di quest'ultimo integrale segue, ad esempio, dal fatto che l'integrando va a zero per $|x| \to +\infty$ più velocemente della funzione $1/(1+|x|)^{3/2}$, che è integrabile su $\mathbb{R}$.

Passiamo ora all'ipotesi (F). La (F) (i) è immediata. Per la (F) (ii), si ottiene

$$B(x,\theta) := \frac{\mathrm{d}^2 \log f(x;\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{x^4}{(1+\theta x^2)^2}. \tag{S8.1}$$

Si noti che

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} B(x,\theta)\right| = \left|\frac{1}{\theta^3} - \frac{2x^6}{(1+\theta x^2)^3}\right| \le \frac{1}{\theta^3} + \frac{2x^6}{(1+\theta x^2)^3} \le \frac{3}{\theta^3},$$

avendo maggiorato il denominatore $(1+\theta x^2)^3 \ge (\theta x^2)^3 = \theta^3 x^6$. Dunque, per $0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$, applicando il teorema di Lagrange si ottiene

$$|B(x,\theta_2) - B(x,\theta_1)| \le \sup_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} B(x,\theta)\right| (\theta_2 - \theta_1) \le \frac{3(\theta_2-\theta_1)}{\theta_1^2},$$

da cui segue il fatto che $B(x,\theta)$ è continua in θ uniformemente in x.

Verifichiamo ora la condizione (F) (iii). Come nell'Esercizio 8.4, si potrebbe usare il Teorema 2.27 in [25]. Usiamo qui una verifica più diretta ed elementare del fatto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\theta^k} f(x;\theta)\mathrm{d}x = 0 \tag{S8.2}$$

per $k = 1,2$. Per comodità, introduciamo la notazione $h(x) := f(x;1)$. Ne segue che

$$f(x;\theta) = \sqrt{\theta} h(\sqrt{\theta} x),$$

Si vede allora che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(x;\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} h(\sqrt{\theta}x) + \frac{x}{2} h'(\sqrt{\theta}x). \tag{S8.3}$$

Si verifica facilmente che quest'ultima funzione è integrabile su $\mathbb{R}$ (decade a 0 per $x \to \pm\infty$ come $1/x^2$) e che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(x;\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{2\sqrt{\theta}} h(\sqrt{\theta}x)\right].$$

Quindi, applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(x;\theta)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2\sqrt{\theta}} h(\sqrt{\theta}x) - \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2\sqrt{\theta}} h(\sqrt{\theta}x) = 0,$$

che dimostra (S8.2) per $k = 1$. Il caso $k = 2$ è un po' più complicato. Derivando ulteriormente (S8.3), si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} f(x;\theta) = -\frac{1}{4\theta^{3/2}} h(\sqrt{\theta}x) + \frac{x}{4\theta} h'(\sqrt{\theta}x) + \frac{x^2}{4\sqrt{\theta}} h''(\sqrt{\theta}x). \tag{S8.4}$$

Consideriamo ora, uno ad uno, i tre addendi del membro destro di (S8.4). Si verifica facilmente che tutti e tre decadono a 0 per $x \to \pm\infty$ come $1/x^2$, e quindi sono integrabili su $\mathbb{R}$. Usando il fatto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sqrt{\theta}x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\theta)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\theta}},$$

si ha

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\theta^{3/2}} h(\sqrt{\theta}x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\theta^2}.$$

Inoltre, integrando per parti,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4\theta} h'(\sqrt{\theta}x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\theta^{3/2}} h(\sqrt{\theta}x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\theta^2}.$$

Infine, con una doppia integrazione per parti, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4\sqrt{\theta}} h''(\sqrt{\theta}x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\theta^{3/2}} h(\sqrt{\theta}x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\theta^2}.$$

Con questi ultimi tre risultati, da (S8.4) otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} f(x;\theta)\mathrm{d}x = 0,$$

che completa la dimostrazione di (F) (iii).

Infine, la condizione (G) segue dal fatto che, come si vede da (S8.1), $B(x;\theta)$ è una funzione limitata in x per ogni fissato $\theta \in \Theta$.

Non resta dunque che calcolare la varianza asintotica $s(\theta)$, per la quale usiamo (8.32). Grazie a (S8.1),

$$-\frac{1}{\sigma^2(\theta)} = \mathrm{E}_\theta[B(X_1,\theta)] = -\frac{1}{2\theta^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(1+\theta x^2)^2} f(x;\theta)\mathrm{d}x. \tag{S8.5}$$

D'altra parte, usando prima il cambiamento di variabile $y = \sqrt{\theta}x$ e poi due integrazioni per parti, otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(1+\theta x^2)^2} f(x;\theta)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(1+\theta x^2)^2} \frac{\sqrt{\theta}}{\pi} \frac{1}{1+\theta x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi\theta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^4}{(1+y^2)^3}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{\pi\theta^2}\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} y^3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{(1+y^2)^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi\theta^2}\frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{\pi\theta^2}\frac{3}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi\theta^2}\frac{3}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{8\theta^2}.
\end{aligned}
$$

Inserendo tale risultato in (S8.5), abbiamo

$$
-\frac{1}{\sigma^2(\theta)} = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{3}{8\theta^2} = -\frac{1}{8\theta^2},
$$

da cui

$$
\sigma^2(\theta) = 8\theta^2.
$$

Esercizio 8.6. Si dimostri la seguente affermazione, deducendo poi da essa l'equivalenza fra (8.40) e (8.41): se $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione di variabili aleatorie reali per cui esiste $c > 0$ tale che

$$
\lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}(|X_i - c| \leq \varepsilon) = 1,
$$

per ogni $\varepsilon > 0$, allora

$$
\lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|1 - \frac{c}{X_i}\right| \leq \varepsilon\right) = 1.
$$

Soluzione 8.6. Dimostriamo dunque che se

$$
\lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}(|X_i - c| \leq \varepsilon) = 1 \tag{S8.6}
$$

per ogni $\varepsilon > 0$ allora

$$
\lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|1 - \frac{c}{X_i}\right| \leq \varepsilon\right) = 1 \tag{S8.7}
$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Essendo $\mathrm{P}\left(\left|1 - \frac{c}{X_i}\right| \leq \varepsilon\right)$ crescente in ε, è sufficiente dimostrare l'asserto per $\varepsilon < \varepsilon_0$ per qualche $\varepsilon_0 > 0$. In particolare, poniamo $\varepsilon_0 := c$. Per $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $x \in \mathbb{R}$ con $|x - c| \leq \varepsilon$, abbiamo

$$\left|1-\frac{c}{x}\right| = \frac{|x-c|}{|x|} \leq \frac{|x-c|}{c-|x-c|}$$

dove abbiamo usato il fatto che $|x| \geq c - |x-c| > 0$, che segue dalla disuguaglianza triangolare e da e $|x-c| \leq \varepsilon < c$. Notiamo che

$$\frac{|x-c|}{c-|x-c|} \leq \varepsilon \iff |x-c| \leq \frac{c\varepsilon}{1+\varepsilon}\,.$$

Definendo $\varepsilon' := \frac{c\varepsilon}{1+\varepsilon}$, abbiamo dunque mostrato la seguente implicazione:

$$|x-c| \leq \varepsilon' \implies \left|1-\frac{c}{x}\right| \leq \varepsilon,$$

pertanto

$$\left\{\left|1-\frac{c}{X_i}\right| \leq \varepsilon\right\} \supseteq \left\{|X_i - c| \leq \varepsilon'\right\}.$$

In definitiva, per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\liminf_{i\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|1-\frac{c}{X_i}\right| \leq \varepsilon\right) \geq \lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}(|X_i - c| \leq \varepsilon') = 1,$$

e quindi (S8.6) implica (S8.7). Ci è utile osservare che vale anche l'implicazione inversa. Infatti, assumendo (S8.7), si ha, ponendo $\tilde{X}_i := \frac{c}{X_i}$

$$\lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\tilde{X}_i - 1\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi, usando l'implicazione (S8.6) $\Rightarrow$ (S8.7) per $\tilde{X}_i$ e $\tilde{c} = 1$, si ottiene

$$\lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|1-\frac{1}{\tilde{X}_i}\right| \leq \varepsilon\right) = \lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}(|X_i - c| \leq c\varepsilon) = 1$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Rimpiazzando $\varepsilon \to \varepsilon/c$, abbiamo mostrato che (S8.6) $\iff$ (S8.7).

L'equivalenza fra (8.40) e (8.41) segue ora dall'equivalenza precedente, con $B_i(\underline{X}, Y_i, \theta)$ in luogo di X_i e $-1/\sigma^2(\theta)$ in luogo di c.

Tavola della distribuzione normale

La tavola seguente riporta i valori della funzione di ripartizione $\Phi(z)$ della distribuzione normale standard $\mathrm{N}(0,1)$, per $0 \leq z \leq 3.5$. Ricordiamo che

$$\Phi(z) := \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x\,.$$

I valori di $\Phi(z)$ per $z < 0$ possono essere ricavati grazie alla formula

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)\,.$$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Principali distribuzioni notevoli su $\mathbb{R}$

Distribuzioni notevoli discrete

	Densità discreta $\mathrm{p}_X(k)$	*Media* $\mathrm{E}(X)$	*Varianza* $\mathrm{Var}(X)$	*Funzione generatrice dei momenti* $\mathrm{M}_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})$
Binomiale $\mathrm{Bin}(n,p)$ $n \in \{1,2,\dots\}$ $p \in [0,1]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k \in \{0,1,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$	$\big(pe^t + (1-p)\big)^n$
Bernoulli $\mathrm{Be}(p)$ $\mathrm{Bin}(1,p)$ $p \in [0,1]$	$\begin{cases} p & \text{se } k=1 \\ 1-p & \text{se } k=0 \end{cases}$ $k \in \{0,1\}$	p	$p(1-p)$	$pe^t + (1-p)$
Poisson $\mathrm{Pois}(\lambda)$ $\lambda \in (0,\infty)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $k \in \{0,1,\dots\}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Geometrica $\mathrm{Geo}(p)$ $p \in (0,1]$	$p(1-p)^{k-1}$ $k \in \{1,2,\dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\begin{cases} \frac{p}{e^{-t}-(1-p)} & \text{se } t < \log \frac{1}{1-p} \\ +\infty & \text{se } t \geq \log \frac{1}{1-p} \end{cases}$

Distribuzioni notevoli assolutamente continue

	Densità $f_X(x)$	*Media* $\mathrm{E}(X)$	*Varianza* $\mathrm{Var}(X)$	*Funzione generatrice dei momenti* $\mathrm{M}_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})$
Uniforme continua $\mathrm{U}(a,b)$ $a,b \in \mathbb{R},\ a<b$	$\frac{1}{b-a}$ $x \in (a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Gamma $\mathrm{Gamma}(\alpha,\lambda)$ $\alpha,\lambda \in (0,\infty)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ $x \in (0,\infty)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha & \text{se } t<\lambda \\ +\infty & \text{se } t \geq \lambda \end{cases}$
Esponenziale $\mathrm{Exp}(\lambda)$ $\mathrm{Gamma}(1,\lambda)$ $\lambda \in (0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$ $x \in (0,\infty)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-t} & \text{se } t<\lambda \\ +\infty & \text{se } t \geq \lambda \end{cases}$
Normale $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma \in (0,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$

Riferimenti bibliografici

1. Aigner, M., Ziegler, G.M.: Proofs from The Book. Edizione italiana a cura di Alfio Quarteroni. Springer-Verlag Italia, Milano (2006)
2. Aldous, D., Diaconis, P.: Shuffling cards and stopping times. Amer. Math. Monthly **93**(5), 333–348 (1986)
3. Baxter, R.J.: Exactly solved models in statistical mechanics. Academic Press, London (1989). Ristampa dell'originale edito nel 1982
4. Bernoulli, J.: Ars conjectandi. Impensis Thurnisiorum, Fratrum (1713)
5. Berry, A.C.: The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 122–136 (1941)
6. Billingsley, P.: Probability and measure. 3rd ed. John Wiley & Sons, New York (1995).
7. Black, F., Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy **81**(3), 637–654 (1973)
8. Borovkov, A.A.: Mathematical Statistics. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam (1998)
9. von Bortkiewicz, L.: Das Gesetz der Kleinen Zahlen. B.G. Teubner, Leipzig (1898)
10. Bose, S.: Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. Z. phys **26**(3), 178 (1924)
11. Brémaud, P.: Point processes and queues. Springer-Verlag, New York (1981)
12. Brémaud, P.: Markov chains. Springer-Verlag, New York (1999)
13. Clarke, R.: An application of the Poisson distribution. Journal of the Institute of the Actuaries **72**, 48 (1946)
14. Cox, J., Ross, S., Rubinstein, M.: Option pricing: A simplified approach. Journal of financial Economics **7**(3), 229–263 (1979)
15. Dalang, R.C.: Une démonstration élémentaire du théorème central limite. Elem. Math. **61**(2), 65–73 (2006)
16. Daley, D.J., Vere-Jones, D.: An introduction to the theory of point processes. Vol. I, 2nd ed. Springer-Verlag, New York (2003).
17. Daley, D.J., Vere-Jones, D.: An introduction to the theory of point processes. Vol. II, 2nd ed. Springer-Verlag, New York (2008)
18. De Moivre, A.: The doctrine of chances (1738)
19. Einstein, A.: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. **261** (1924)
20. Esseen, C.G.: On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. Ark. Mat. Astr. Fys. **28A**(9), 19 (1942)
21. Esseen, C.G.: A moment inequality with an application to the central limit theorem. Skand. Aktuarietidskr. **39**, 160–170 (1956)
22. Ewens, W.J.: Mathematical population genetics. I, Theoretical Introduction, 2nd ed. Springer-Verlag, New York (2004).

23. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. Vol. I, 3rd ed. John Wiley & Sons, New York (1968)
24. Fischer, H.: A history of the central limit theorem. Springer-Verlag, New York (2011).
25. Folland, G.B.: Real Analysis. 2nd ed. John Wiley & Sons, New York (1999)
26. Fortuin, C.M., Kasteleyn, P.W., Ginibre, J.: Correlation Inequalities on Some Partially Ordered Sets. Commun. Math. Phys. **22**(2), 89–103 (1971)
27. Gallavotti, G.: Statistical mechanics. Springer-Verlag, Berlin (1999)
28. Grimmett, G.R., Stirzaker, D.R.: Probability and random processes. 3rd ed. Oxford University Press, New York (2001)
29. Hannabuss, K.: An introduction to quantum theory. Oxford University Press, New York (1997)
30. Hodges Jr., J.L., Le Cam, L.: The Poisson approximation to the Poisson binomial distribution. Ann. Math. Statist. **31**, 737–740 (1960)
31. Hogg, R.V., Craig, A.: Introduction to mathematical statistics. 4th ed. Macmillan Publishing Co., New York (1978)
32. Kolmogorov, A.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer-Verlag, Berlin (1977). Ristampa dell'originale edito nel 1933
33. Korolev, V., Shevtsova, I.: An improvement of the Berry-Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. Scand. Actuar. J. **2012**(2), 81–105 (2012)
34. Laplace, P.: Théorie analytique des probabilités. V. Courcier (1812)
35. Lawler, G.F., Limic, V.: Random walk: a modern introduction. Cambridge University Press, Cambridge (2010)
36. Lebesgue, H.L.: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France. Cambridge University Press, Cambridge (2009). Ristampa dell'originale edito nel 1904
37. Lévy, P.: Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques. CR Acad. Sci. Paris **175**, 854–856 (1922)
38. Lévy, P.: Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, Paris (1925)
39. Lifshits, M.: Lectures on Gaussian processes. Springer-Verlag, Berlin (2012)
40. Lindeberg, J.W.: Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **15**(1), 211–225 (1922)
41. Metropolis, N.: The beginning of the Monte Carlo method. Los Alamos Science (15, Special Issue), 125–130 (1987).
42. Onsager, L.: Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. Phys. Rev. **65**, 117–149 (1944)
43. Pascucci, A., Runggaldier, W.J.: Finanza matematica. Springer-Verlag Italia, Milano (2009)
44. Paulos, J.A.: Innumeracy. Hill and Wang, New York (2001)
45. Peierls, R.: On Ising's model of ferromagnetism. Proc. Camb. Phil. Soc **32**(3), 477–481 (1936)
46. Poisson, S.: Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités. Bachelier, Paris (1837)
47. Rice, J.: Mathematical statistics and data analysis. Duxbury Press, Belmont (2007)
48. Riemann, B.: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Dieterich, Göttingen (1867)
49. vos Savant, M.: "Ask Marylin" column. Parade Magazine p. 16 (9 September 1990)
50. Selvin, S.: A problem in probability (letter to the editor). American Statistician **29**(1), 67 (1975)
51. Spitzer, F.: Principles of random walk. 2nd ed. Springer-Verlag, New York (1976)
52. Warshauer, M., Curtin, E.: The locker puzzle. The Mathematical Intelligencer **28**(1), 28–31 (2006)