Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2019/2020

ESERCITAZIONE 1

E1.1. Un'urna contiene due palline nere e una rossa. Una seconda urna ne contiene una blu e due rosse. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Descrivere uno spazio campionario per questo esperimento e calcolarne la cardinalità.

Soluzione. Se consideriamo le palline *distinguibili* (per esempio, oltre ad essere colorate sono anche numerate), allora le urne hanno composizione

$$\underbrace{\text{❶}\ \text{❷}\ \textcolor{red}{\bullet}}_{U_1} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{\textcolor{blue}{\bullet}\ \textcolor{red}{\text{❶}}\ \textcolor{red}{\text{❷}}}_{U_2}$$

(con ovvio significato dei simboli). Uno spazio campionario è dato dall'insieme delle coppie in cui le coordinate rappresentano nell'ordine la pallina estratta dalla prima urna e quella estratta dalla seconda, cioè

$$\Omega = \big\{(x,y) : x \in \{\text{❶}, \text{❷}, \textcolor{red}{\bullet}\} \text{ e } y \in \{\textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{red}{\text{❶}}, \textcolor{red}{\text{❷}}\}\big\}.$$

Inoltre Ω ha cardinalità $|\Omega| = 3 \cdot 3 = 9$.

Un'altra possibilità è quella di considerare palline *indistinguibili.* In questo caso le urne hanno composizione

$$\underbrace{\bullet\ \textcolor{red}{\bullet}}_{U_1} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{\textcolor{blue}{\bullet}\ \textcolor{red}{\bullet}}_{U_2}$$

e si ottiene

$$\Omega = \big\{(x,y) : x \in \{\bullet, \textcolor{red}{\bullet}\} \text{ e } y \in \{\textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{red}{\bullet}\}\big\}.$$

con cardinalità $|\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$.

—— • ——

Morale dell'esercizio 1.1: la scelta dello spazio campionario relativo ad un esperimento aleatorio può non essere unica!! Per non incorrere in errori nel calcolo delle probabilità di eventi, è importante mantenere la scelta adottata per la descrizione dello spazio campionario quando si vanno poi a contare gli esiti favorevoli ad un evento.

—— • ——

E1.2. Lanciamo un dado a sei facce e due monete. Descrivere uno spazio campionario per questo esperimento e calcolarne la cardinalità.

Soluzione. Un possibile spazio campionario è

$$\Omega = \big\{(x,y,z) : x \in \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\} \text{ e } y, z \in \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}\big\}$$

(con ovvio significato dei simboli) ed ha cardinalità $|\Omega| = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

E1.3. Una busta contiene 3 carte: due carte hanno entrambe le facce rosse mentre una carta ha una faccia rossa e una faccia nera. Peschiamo una carta a caso e la appoggiamo sul tavolo. Descrivere uno spazio campionario per questo esperimento e calcolarne la cardinalità.

Soluzione. Supponiamo di considerare sia le carte che le facce tra loro *indistinguibili*. Allora otteniamo $\Omega = \{▮, ▮\}$ e $|\Omega| = 2$.

E1.4. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e siano $A, B, C \in \mathcal{F}$ eventi. Esprimere in termini di operazioni insiemistiche su A, B e C i seguenti eventi: (a) tutti gli eventi si verificano; (b) nessun evento si verifica; (c) si verifica esattamente un evento; (d) due eventi su tre si verificano; (e) almeno un evento si verifica; (f) al più un evento si verifica; (g) o si verifica A, oppure, se non si verifica A, neppure B si verifica.

Soluzione. (a) $A \cap B \cap C$; (b) $A^c \cap B^c \cap C^c$; (c) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$; (d) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$; (e) $A \cup B \cup C$; (f) $(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$; (g) $A \cup (A^c \cap B^c)$.

E1.5. Si considerino gli eventi $A =$ "nessuno studente ha superato l'esame" e $B =$ "nessuno studente extra-terrestre ha superato l'esame". A cosa corrisponde l'evento $A^c \cap B$?

Soluzione. L'evento $A^c \cap B$ corrisponde a "nessuno studente extra-terrestre ha superato l'esame, ma almeno uno studente terrestre sì".

E1.6. Sia Ω l'insieme delle possibili scelte di tre carte da un mazzo di 52. Si considerino gli eventi $A =$ "le prime due carte sono di cuori" e $B =$ "la seconda e la terza carta non sono dello stesso seme". A cosa corrisponde l'evento $A \cap B^c$?

Soluzione. L'evento $A \cap B^c$ corrisponde a "le tre carte sono di cuori".

E1.7. L'amministratore di un ospedale americano classifica i pazienti ricoverati per una ferita da arma da fuoco nel seguente modo: se hanno un'assicurazione li contraddistingue con 1, e in caso contrario con 0; inoltre, in accordo con lo stato di salute al momento del ricovero, li classifica con b (buono), m (medio) oppure s (serio). Si consideri l'esperimento che consiste nel classificare questi pazienti.

(a) Si descriva un opportuno spazio campionario.

(b) Sia A l'evento che il paziente è in condizioni serie. Si descrivano gli esiti di A.

(c) Sia B l'evento che il paziente non sia assicurato. Si descrivano gli esiti di B.

(d) Si descrivano tutti gli esiti in $B^c \cup A$.

Soluzione. (a) Uno spazio campionario è dato da $\Omega = \big\{(x, y) : x \in \{0, 1\} \text{ e } y \in \{b, m, s\}\big\}$. (b,c) Abbiamo $A = \big\{(x, s) : x \in \{0, 1\}\big\}$ e $B = \big\{(0, y) : y \in \{b, m, s\}\big\}$. (d) Poiché $B^c = \big\{(1, y) : y \in \{b, m, s\}\big\}$, considerato l'evento A ottenuto nel punto (b), abbiamo

$$B^c \cup A = \{(0, s), (1, b), (1, m), (1, s)\}.$$

E1.8. Siano $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $A, B, C \in \mathcal{F}$ eventi. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze: (a) $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$; (b) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Soluzione.

(a) Per le leggi di De Morgan si ha $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ (vedi pag. 9 del libro di testo). Quindi, applicando la formula per la probabilità del complementare, possiamo concludere

$$P(A^c \cup B^c) = P\left[(A \cap B)^c\right] = 1 - P(A \cap B).$$

(b) Osserviamo che per la differenza di eventi vale la rappresentazione $A \setminus B = A \cap B^c$ (ripassare la definizione a pag. 8 del libro di testo e convincersene con un disegno). Di conseguenza vale l'identità $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ e, in particolare, gli eventi $A \setminus B$ e $A \cap B$ sono disgiunti. Pertanto otteniamo
$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$
da cui si ricava quanto voluto.

E1.9. Siano $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $A, B \in \mathcal{F}$ eventi. Sapendo che $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A^c) = 2/3$ e $P(A \cap B) = 1/4$, determinare: $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B^c)$.

Soluzione.

- Poiché $A = (A^c)^c$, per la formula della probabilità del complementare otteniamo
$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$
- Dalla proprietà di inclusione/esclusione ricaviamo
$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$
- Osserviamo che $A \cap B^c = A \setminus B$. Quindi, usando il punto (b) dell'esercizio precedente e quanto calcolato sopra, otteniamo
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

E1.10. In una moneta truccata la probabilità di ottenere testa è $\frac{2}{3}$ della probabilità di ottenere croce. Calcolare la probabilità di ciascuna faccia.

Soluzione. Sia $\Omega = \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}$ lo spazio campionario relativo al lancio della moneta. Se poniamo $P(\mathsf{C}) = x$, allora $P(\mathsf{T}) = \frac{2}{3}\,x$. Quindi si ha
$$1 = P(\Omega) = P(\mathsf{T} \cup \mathsf{C}) \overset{(\mathsf{T}\text{ e }\mathsf{C}\text{ disgiunti!})}{=} P(\mathsf{T}) + P(\mathsf{C}) = \frac{2}{3}\,x + x = \frac{5}{3}\,x\,,$$
da cui otteniamo $P(\mathsf{C}) = \frac{3}{5}$ a $P(\mathsf{T}) = \frac{2}{5}$.