SPAZIO DI PROBABILITÀ

Sp. prob. è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove

- Ω insieme
- $\mathcal{F}$ famiglia di sottoins. di Ω con struttura di σ-algebra
- $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ misura positiva e normalizzata

1. LO SPAZIO CAMPIONARIO Ω

Insieme degli esiti dell'esperimento aleatorio.

Esempi

1. Lancio di 1 moneta e osservo la faccia uscita: $\Omega = \{T, C\}$

2. Lancio 1 moneta 3 volte e contiamo il numero di teste uscite: $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

3. Lancio 1 moneta 3 volte e osservo la sequenza delle facce ottenute:
$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$

4. Lancio 1 moneta fino a che non ottengo testa e conto il numero dei lanci effettuati: $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

5. Considero il tempo di vita di un hard disk: $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

<u>Oss 1.</u> La scelta dello sp. camp. non e' univoca.

<u>Oss 2.</u>
- Se $|\Omega| \leq |\mathbb{N}|$, si dice che lo sp. camp. è discreto
- Se $|\Omega| \geq |\mathbb{R}|$, si dice che lo sp. camp è continuo.

ESITI ED EVENTI

- $\omega \in \Omega$ (elemento) si dice esito (o evento elementare)

- $E \subseteq \Omega$ (sottoinsieme) si dice evento

Se l'esecuzione dell'esperimento dà come risultato $\omega \in \Omega$, diremo che si è verificato ω.
Per ogni E tale che $\omega \in E$, diremo che si è verificato E.

Esempio

Lo sp. camp. che rappresenta i possibili risultati di 3 lanci di una moneta è:

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$$

Possibili eventi:

E_K = "ottengo K croci", con $K = 0, 1, 2, 3$

$$E_0 = \{TTT\}$$
$$E_1 = \{TCT, CTT, TTC\}$$
$$E_2 = \{TCC, CTC, CCT\}$$
$$E_3 = \{CCC\}$$

Supponiamo di aver eseguito i 3 lanci e aver ottenuto CTC. Quindi si verifica E_2, ma non verificano E_0, E_1 ed E_3.

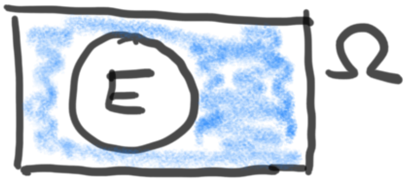
Ricordiamo che ci sono 2 eventi banali ed onnipresenti:

- Ω evento certo
- $\emptyset$ evento impossibile

OPERAZIONI ELEMENTARI SUGLI EVENTI

Siano $E, F \subseteq \Omega$ eventi. Abbiamo:

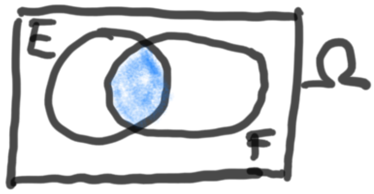
- <u>complementare di E</u>



$$E^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin E\}$$

Probabilisticamente: E^c si verifica quando non si verifica E.

- <u>intersezione di E col F</u>

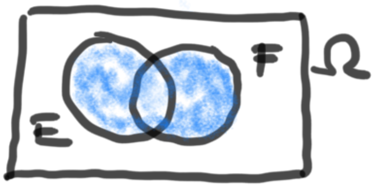


$$E \cap F = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in E \text{ e } \omega \in F \}$$

Probabilisticamente: $E \cap F$ si verificano se si verificano sia E che F.

Se E, F sono tali che $E \cap F = \emptyset$, allora si dice che E ed F sono <u>incompatibili</u> (o <u>disgiunti</u>), cioè E ed F non si possono verificare allo stesso tempo.

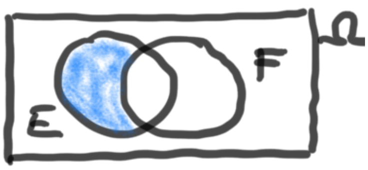
- <u>unione di E col F</u>



$$E \cup F = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in E \text{ o } \omega \in F \}$$

Probabilisticamente: $E \cup F$ si verifica se almeno uno tra E ed F si verifica (corrisponde ad una 'o' inclusiva).

- <u>differenza $E \setminus F$</u> (questa operazione non è simmetrica e quindi $F \setminus E \neq E \setminus F$)

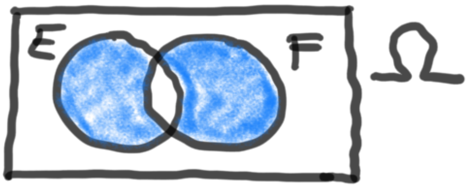


$$E \setminus F = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in E \text{ e } \omega \notin F \}$$

Probabilisticamente: $E \setminus F$ si verifica se si verifica E, ma non si verifica F.

- <u>differenza simmetrica di E ed F</u>

$$E \Delta F = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in E \setminus F \text{ o } \omega \in F \setminus E\}$$



Probabilisticamente: $E \Delta F$ si verifica se esattamente uno fra E ed F si verifica (corrisponde ad una "o" esclusiva).

<u>Esempio</u>

Es. dei 3 lanci di una moneta. Abbiamo E_k = "ottengo K croci", con $K = 0, 1, 2, 3$.
Possiamo scrivere

E = "esce almeno una testa" $= E_3^c$

F = "escono almeno 2 croci" $= E_2 \cup E_3$

G = "escono almeno 2 teste" $= (E_2 \cup E_3)^c$

Proprietà fondamentali di unione ed intersezione

- Leggi commutative $\quad E \cup F = F \cup E$
  $\quad E \cap F = F \cap E$

- Leggi associative $\quad (E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$
  $\quad (E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

- Leggi distributive $\quad E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
  $\quad E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

- Leggi di De Morgan $\quad (E \cup F)^c = E^c \cap F^c$
  $\quad (E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

DECOMPOSIZIONI IN UNIONI DISGIUNTE

(a) Partizione di Ω

Famiglia $\{E_n\}_{n \geq 1}$ di eventi a 2 a 2 disgiunti la cui unione è Ω. Cioè,

- $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

- $\bigcup_{n \geq 1} E_n = \Omega$

Esempi

1. Se $E \subseteq \Omega$ evento, allora la famiglia $\{E, E^c\}$ è una partizione di Ω.

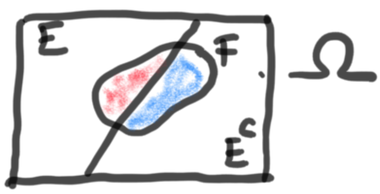
2. Riconsideriamo l'es. dei 3 lanci di una moneta. La famiglia $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ è una partizione di Ω.

(b) Decomposizione di un evento rispetto ad una partizione

Siano F evento e $\{E, E^c\}$ una partizione di Ω. Allora

$$F = \underbrace{(F \cap E)}\cup\underbrace{(F \cap E^c)}$$

disgiunti!



In generale, se $\{E_n\}_{n \geq 1}$ è una partizione di Ω, abbiamo

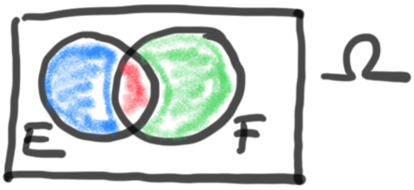
$$F = \bigcup_{n \geq 1} (F \cap E_n).$$

(c) Decomposizione dell'unione di due eventi

Siano $E, F \subseteq \Omega$ eventi. Si ha

$$E \cup F = (E \setminus F) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus E)$$

disgiunti



oppure

$$E \cup F = E \cup (F \setminus E)$$

disgiunti