Concetto fondamentale legato alle probabilità condizionali: l'indipendenza di eventi

Indipendenza di due eventi

Def.: Siano A, B eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Allora

A, B si dicono indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Osservazioni:

1) L'indipendenza di due eventi, in generale, dipende dalla misura di probabilità P.

2) Se $P(A) \in \{0, 1\}$ (o $P(B) \in \{0,1\}$) allora A, B sono indipendenti.

3) Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ e $A \cap B = \emptyset$, allora A, B __non__ indipendenti

Osservazioni (cont.)

4) Se A, B sono indipendenti, allora lo sono anche A, B^c, quindi anche A^c, B, A^c, B^c.

! 5) Se $P(B) > 0$, allora:

A, B sono indipendenti se e solo se

$$P(A \mid B) = P(A).$$

In particolare, se A, B indipendenti e $P(B) > 0$, allora sapere se si è verificato o meno B <u>non</u> cambia la valutazione di A.

Esempio: lancio di tre dadi regolari da sei facce

Osservazione: numeri segnati dai tre dadi

Modello: $\Omega \doteq \{1, \ldots, 6\}^3$

$P \doteq$ uniforme discreta su Ω

Consideriamo gli eventi

$E_1 \doteq$ "il primo dado segna "3"

$E_2 \doteq$ "il secondo " " 2"

$E_3 \doteq$ "il terzo ~~da~~" " 4"

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$

$\rightsquigarrow$ $E_1 = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 3\}$

$E_2 = \{\omega \in \Omega : \omega_2 = 2\}$

$E_3 = \{\omega \in \Omega : \omega_3 = 4\}$

$$\rightsquigarrow \quad P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6} = P(E_2) = P(E_3),$$

mentre $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{|\{\omega \in \Omega : \omega_1 = 3, \omega_2 = 2\}|}{|\Omega|} = \dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$

$\rightsquigarrow$ $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$ $\quad E_1, E_2$ sono indipendenti.

Esempio (cont.)

Analogamente, $P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{36} = P(E_2 \cap E_3)$

$\rightsquigarrow$ E_1, E_2 sono indipendenti

E_1, E_3 " " "

E_2, E_3 " " "

$\rightsquigarrow$ E_1, E_2, E_3 sono indipendenti a due a due.

Consideriamo anche

$E_4 \doteq$ "il terzo dado dà un numero dispari"

$\rightsquigarrow$ $E_4 = \{\omega \in \Omega : \omega_3 \in \{1,3,5\}\}$

$\rightsquigarrow$ $P(E_4) = \frac{|E_4|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 6^2}{6^3} = \frac{1}{2}$

$$P(E_1 \cap E_4) = \frac{|\{\omega \in \Omega : \omega_1 = 3,\ \omega_3 \in \{1,3,5\}\}|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{12}$$

$\rightsquigarrow$ $P(E_1 \cap E_4) = P(E_1) \cdot P(E_4)$ $\rightsquigarrow$ E_1, E_4 sono indipendenti

lo sono anche E_2, E_4 ?.

Invece: $P(E_3 \cap E_4) = P(\emptyset) = 0 \neq P(E_3) \cdot P(E_4)$

$\rightsquigarrow$ E_3, E_4 non indipendenti

Indipendenza di più di due eventi:

Nella situazione del lancio di tre dadi regolari (come prima) consideriamo

$A \doteq$ "1° e 2° dado segnano lo stesso numero"

$B \doteq$ "2° e 3° " " " " " "

$C \doteq$ "3° e 1° " " " " " "

Nel modello: $A = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \omega_2\}$,

$B = \{\omega \in \Omega : \omega_2 = \omega_3\}$.

$C = \{\omega \in \Omega : \omega_3 = \omega_1\}$.

$$\xrightarrow[\text{P uniforme}]{\text{simmetria}} \quad P(A) = P(B) = P(C) = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6},$$

$$\& \quad P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{|\{\omega \in \Omega : \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\}|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

$\rightsquigarrow$ A, B, C sono indipendenti a due a due

Invece, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$ poiché $A \cap B \cap C = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\}$

$\neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ $\rightsquigarrow$ A, B, C **non** si devono dire indipendenti

Def.: Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto. Una famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di eventi, $I \neq \emptyset$, si dice <u>indipendente</u> se per ogni scelta di $J \subset I$ <u>finito</u> si ha

$$(*) \qquad P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Nota: $(*)$ si verifica solo per sottofamiglie finite di eventi, e per tutte le sottofamiglie finite.

~~In particolare~~ L'indipendenza di una famiglia di eventi garantisce l'indipendenza anche di ogni sua sottofamiglia (finita o infinita).

In particolare, se A, B, C sono indipendenti come famiglia, allora sono indipendenti anche a due a due.

L'indipendenza a due a due (nel caso di più di due eventi) <u>non</u> è sufficiente per l'indipendenza come famiglia ($\nearrow$ esempio di prima).

Nell'esempio del lancio dei tre dadi:

Gli eventi E_1, E_2, E_3 sono indipendenti come famiglia,

mentre gli eventi A, B, C sono indipendenti a due a due, ma **non** indipendenti come famiglia.

Caratterizzazione equivalente per l'indipendenza di un numero finito di eventi:

Prop.: Siano $A_1, \ldots, A_n$ eventi in (Ω, P). ~~Le seguenti~~ Allora sono equivalenti:

(i) $A_1, \ldots, A_n$ sono indipendenti come famiglia;

(ii) per ogni scelta di eventi $B_1, \ldots, B_n$ con $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, si ha

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i).$$

Dim.: per induzione su n.

Corollario:

Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di eventi in (Ω, P),

e sia $\tilde{I} \subseteq I$ un sottoinsieme di indici.

Poniamo

$$B_i \doteq \begin{cases} A_i^c & \text{se } i \in \tilde{I}, \\ A_i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

~~Allora~~ Se $(A_i)_{i \in I}$ è indipendente, allora

anche $(B_i)_{i \in I}$ indipendente. //