Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2019/2020

ESERCITAZIONE 3

E3.1. Si scelgono due carte a caso, senza rimpiazzo, da un mazzo di 52 carte. Sia B l'evento che entrambe le carte siano degli assi; sia $A_\spadesuit$ l'evento che sia stato estratto l'asso di picche e A l'evento che sia stato estratto almeno un asso. Determinare $P(B|A_\spadesuit)$ e $P(B|A)$.

Soluzione. Applichiamo la definizione di probabilità condizionata. Osserviamo che $B \cap A_\spadesuit =$"pesco 2 assi e uno dei due è l'asso di picche"; mentre $B \cap A = B$. Pertanto otteniamo

- $P(B|A_\spadesuit) = \dfrac{P(B \cap A_\spadesuit)}{P(A_\spadesuit)} = \dfrac{\frac{1\cdot 3}{\binom{52}{2}}}{\frac{1\cdot 51}{\binom{52}{2}}} = \dfrac{1}{17}$;
- $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{1 - P(A^c)} = \dfrac{\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}}{1 - \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}} = \dfrac{1}{33}$, dove A^c corrisponde all'evento "non viene pescato alcun asso".

E3.2. Vivo a Venezia; domani ci può essere l'acqua alta oppure no. L'acqua alta domani è annunciata con probabilità 0.3. Se c'è acqua alta arrivo a lezione in ritardo con probabilità 0.8; se non c'è l'acqua alta la probabilità che arrivi tardi a lezione è comunque 0.2. Qual è la probabilità che arrivi tardi?

Soluzione. Consideriamo gli eventi $A =$"c'è l'acqua alta" e $R =$"arrivo in ritardo a lezione". Dal testo ricaviamo $P(A) = 0.3$, $P(R|A) = 0.8$ e $P(R|A^c) = 0.2$. Per la formula delle probabilità totali otteniamo

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|A^c)P(A^c) = (0.8)(0.3) + (0.2)(1 - 0.3) = 0.38.$$

E3.3. Si pone un topo davanti a 4 labirinti. Il topo sceglie a caso un labirinto. Da esperienze precedenti si sa che la probabilità che il topo esca da ciascun labirinto in 5 minuti sono, rispettivamente, 0.5, 0.8, 0.3, 0.4. Sapendo che il topo è uscito in 5 minuti, calcolare la probabilità che abbia scelto il terzo labirinto.

Soluzione. Consideriamo gli eventi $L_i =$"il topo sceglie l'i-esimo labirinto", con $i = 1, 2, 3, 4$, e $U =$"il topo esce dal labirinto in 5 minuti". Dal testo ricaviamo $P(U|L_1) = 0.5$, $P(U|L_2) = 0.8$, $P(U|L_3) = 0.3$, $P(U|L_4) = 0.4$ e $P(L_i) = 0.25$ per $i = 1, 2, 3, 4$. Dobbiamo calcolare $P(L_3|U)$. Usando la formula di Bayes, otteniamo

$$\begin{aligned}
P(L_3|U) &= \frac{P(U|L_3)P(L_3)}{P(U)} \\
&\overset{\text{(prob. totali)}}{=} \frac{P(U|L_3)P(L_3)}{P(U|L_1)P(L_1) + P(U|L_2)P(L_2) + P(U|L_3)P(L_3) + P(U|L_4)P(L_4)} \\
&= \frac{(0.3)(0.25)}{(0.5)(0.25) + (0.8)(0.25) + (0.3)(0.25) + (0.4)(0.25)} \\
&= 0.15\,.
\end{aligned}$$

E3.4. Un'urna A contiene tre palline verdi e due rosse, un'altra urna B contiene due palline verdi e tre rosse. Si estrae una pallina dall'urna A e la si inserisce nell'urna B. Da B si estrae poi una pallina, che risulta essere rossa. Qual è la probabilità che la pallina trasferita da A a B fosse rossa?

Soluzione. Consideriamo gli eventi $E =$"la pallina trasferita dall'urna A a quella B è rossa" e $F =$"la pallina estratta dall'urna B è rossa". Dobbiamo calcolare $P(E|F)$. Usando la formula di Bayes, otteniamo

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)} \overset{\text{(prob. totali)}}{=} \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{8}{17}.$$

E3.5. Il 46% degli elettori di un comune si ritiene di centro, il 30% di sinistra e il 24% di destra. Alle ultime elezioni sono andati a votare il 35% degli elettori di centro, il 62% di quelli di sinistra e il 58% di quelli di destra. Un elettore è scelto a caso. Sapendo che l'elettore ha votato alle ultime elezioni, qual è la probabilità che si tratti di un elettore del centro? Quale percentuale di elettori ha partecipato alla scorsa elezione?

Soluzione. Consideriamo gli eventi $E_i =$"l'elettore si ritiene di i", con $i = C(entro), S(inistra), D(estra)$, e $V =$"l'elettore è andato a votare". Dal testo ricaviamo $P(E_C) = 0.46$, $P(E_S) = 0.3$, $P(E_D) = 0.24$, $P(V|E_C) = 0.35$, $P(V|E_S) = 0.62$ e $P(V|E_D) = 0.58$. Applicando la formula delle probabilità totali, calcoliamo

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|E_C)P(E_C) + P(V|E_S)P(E_S) + P(V|E_D)P(E_D) \\ &= (0.35)(0.46) + (0.62)(0.3) + (0.58)(0.24) \\ &= 0.4862 \end{aligned}$$

e quindi gli elettori che hanno partecipato alla scorsa elezione sono il 48.62%. Usando poi la formula di Bayes e quanto appena calcolato, otteniamo

$$P(E_C|V) = \frac{P(V|E_C)P(E_C)}{P(V)} = \frac{(0.35)(0.46)}{0.4862} \simeq 0.33.$$

E3.6 (⚑ tratto da appello). L'agenzia di viaggi GIRO DEL GLOBO propone ai suoi clienti due diversi pacchetti vacanza all inclusive: *Grande Lebowski* e *Indiana Jones*. Il primo dei due pacchetti viene scelto dal 60% dei clienti dell'agenzia, mentre il secondo dal restante 40%. Inoltre, il 92% dei clienti che hanno scelto il pacchetto *Grande Lebowski* e il 97% di quelli che hanno scelto il pacchetto *Indiana Jones* torna soddisfatto dalla vacanza.
Qual è la probabilità che un cliente dell'agenzia torni insoddisfatto dalle vacanze? E che un cliente insoddisfatto avesse scelto il pacchetto vacanza *Indiana Jones*?

Soluzione. Sia L (risp. J) l'evento "il cliente sceglie il pacchetto vacanza *Grande Lebowski* (risp. *Indiana Jones*)". Consideriamo inoltre l'evento $S =$"il cliente torna soddisfatto dalla vacanza". Dal testo ricaviamo $P(L) = 0.6$, $P(J) = 0.4$, $P(S|L) = 0.92$ e $P(S|J) = 0.97$.

- Dobbiamo determinare $P(S^c)$. Usando la formula delle probabilità totali, si calcola

  $$P(S) = P(S|L)P(L) + P(S|J)P(J) = (0.92)(0.6) + (0.97)(0.4) = 0.94$$

  e quindi, passando all'evento complementare, otteniamo $P(S^c) = 1 - P(S) = 0.06$.

- Dobbiamo determinare $P(J|S^c)$. Usando la formula di Bayes, calcoliamo

  $$P(J|S^c) = \frac{P(S^c|J)P(J)}{P(S^c)} \overset{\substack{\text{(probabilità}\\ \text{complementare)}}}{=} \frac{\big[1 - P(S|J)\big]P(J)}{P(S^c)} = \frac{(1-0.97)(0.4)}{0.06} = 0.2.$$

E3.7. In un piccolo villaggio di montagna il 36% delle famiglie ha un cane e il 22% di quelle che hanno un cane possiede anche un gatto. Inoltre il 30% delle famiglie ha un gatto. Calcolare la probabilità che: (a) una famiglia scelta a caso possieda sia un cane che un gatto; (b) una famiglia scelta a caso possieda un cane, sapendo che possiede un gatto.

Soluzione. Sia C (risp. G) l'evento "la famiglia possiede un cane (risp. gatto)". Dal testo ricaviamo $P(C) = 0.36$, $P(G|C) = 0.22$ e $P(G) = 0.3$. Otteniamo

(a) $P(C \cap G) \overset{\text{(def. prob. condizionata)}}{=} P(G|C)P(C) = (0.22)(0.36) = 0.0792;$

(b) $P(C|G) \overset{\text{(formula Bayes)}}{=} \dfrac{P(G|C)P(C)}{P(G)} = \dfrac{(0.22)(0.36)}{0.3} = 0.264.$

E3.8 (difficile). Uno studente ha intenzione di dare un esame universitario sostenendo tre prove di accertamento intermedie. Se una di queste prove non è superata lo studente non può effettuare la prova successiva. La probabilità che lo studente superi la prima prova è 0.9. Se egli supera la prima, la probabilità condizionata che superi la seconda è 0.8, e se egli supera la prima e la seconda prova, la probabilità condizionata che superi la terza è pari a 0.7. Qual è la probabilità che lo studente superi tutte le tre prove intermedie? Sapendo che lo studente non ha superato una delle prove, qual è la probabilità condizionata che abbia fallito la seconda prova?

Soluzione. Consideriamo gli eventi $S_i =$"lo studente supera la prova i", con $i = 1, 2, 3$. Dal testo ricaviamo $P(S_1) = 0.9$, $P(S_2|S_1) = 0.8$ e $P(S_3|S_1 \cap S_2) = 0.7$.

- L'evento "lo studente supera tutte le tre prove intermedie" corrisponde a $S_1 \cap S_2 \cap S_3$. Quindi otteniamo

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \overset{\substack{\text{(def. prob.}\\ \text{condizionata}\\ \text{2 volte)}}}{=} P(S_3|S_1 \cap S_2) \underbrace{P(S_2|S_1)P(S_1)}_{=P(S_1 \cap S_2)} = (0.7)(0.8)(0.9) = 0.504.$$

- Innanzitutto osserviamo che l'evento rispetto al quale dobbiamo condizionare, cioè "lo studente non ha superato una delle prove", corrisponde a $(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c$. Questo è dovuto al fatto che al massimo lo studente può fallire una sola prova; quindi o ne fallisce una oppure nessuna. L'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità condizionata è $S_1 \cap S_2^c$ (per poter fallire la seconda prova, lo studente deve superare la prima, altrimenti alla seconda nemmeno è ammesso). Abbiamo

$$\begin{aligned} P\left[S_1 \cap S_2^c | (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c\right] &\overset{\substack{\text{(def. prob.}\\ \text{condizionata}\\ \text{e ❶)}}}{=} \frac{P(S_1 \cap S_2^c)}{P\left[(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c\right]} \\ &\overset{\substack{\text{(def. prob.}\\ \text{condizionata}}}{=} \frac{P(S_2^c|S_1)P(S_1)}{P\left[(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c\right]}. \end{aligned}$$

Ora usiamo quanto sappiamo sugli eventi complementari: $P(S_2^c|S_1) = 1 - P(S_2|S_1) = 1 - 0.8 = 0.2$ e $P\left[(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c\right] = 1 - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 1 - 0.504 = 0.496$. Sostituendo, otteniamo

$$P\left[S_1 \cap S_2^c | (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c\right] = \frac{(0.2)(0.9)}{0.496} \approx 0.363.$$

ℹ Dimostriamo la seguente uguaglianza di insiemi: $(S_1 \cap S_2^c) \cap (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c = S_1 \cap S_2^c$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}(S_1 \cap S_2^c) \cap (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c &\overset{\text{(De Morgan)}}{=} (S_1 \cap S_2^c) \cap (S_1^c \cup S_2^c \cup S_3^c) \\ &\overset{\text{(distr.)}}{=} \underbrace{(S_1 \cap S_2^c \cap S_1^c)}_{\substack{= \varnothing \\ \text{(perché } S_1 \cap S_1^c = \varnothing)}} \cup (S_1 \cap S_2^c \cap S_2^c) \cup \underbrace{(S_1 \cap S_2^c \cap S_3^c)}_{\substack{= \varnothing \\ \text{(si può fallire una sola} \\ \text{prova, quindi } S_2^c \cap S_3^c = \varnothing)}} ,\end{aligned}$$

da cui la conclusione segue. □

E3.9. Siano $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $A, B, C \in \mathcal{F}$ eventi indipendenti. Mostrare che (A) $A \cap B$ è indipendente da C^c; (b) $A \cup B$ è indipendente da C.

Soluzione.

(a) Dobbiamo verificare che $P\big((A \cap B) \cap C^c\big) = P(A \cap B)P(C^c)$. Osserviamo che $(A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$ e quindi

$$\begin{aligned}P\big((A \cap B) \cap C^c\big) = P\big((A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)\big) &\overset{\text{(es. E1.8)}}{=} P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\ &\overset{\text{(indip.)}}{=} P(A)P(B) - P(A)P(B)P(C) = P(A)P(B)[1 - P(C)] \\ &= \underbrace{P(A)P(B)}_{\substack{= P(A \cap B) \\ \text{per indipendenza}}} P(C^c) = P(A \cap B)P(C^c) \quad ✓\end{aligned}$$

(b) Dobbiamo verificare che $P\big((A \cup B) \cap C\big) = P(A \cup B)P(C)$. Si ha

$$\begin{aligned}P\big((A \cup B) \cap C\big) &\overset{\text{(distr.)}}{=} P\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &\overset{\text{(indip.)}}{=} P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= P(C)[P(A) + P(B) - \underbrace{P(A)P(B)}_{\substack{= P(A \cap B) \\ \text{per indipendenza}}}] = P(C)P(A \cup B) \quad ✓\end{aligned}$$

E3.10. I componenti prodotti da una certa ditta possono presentare due tipi di difetti, con percentuali 3% e 7% rispettivamente. I due tipi di difettosità si possono produrre in momenti diversi della produzione per cui si può assumere che le presenze dell'uno o dell'altro siano indipendenti tra loro. Qual è la probabilità che un componente presenti entrambi i difetti? Qual è la probabilità che un componente presenti almeno uno dei difetti?

Soluzione. Sia E_i, con $i = 1, 2$, l'evento "il componente presenta il difetto i". Dal testo ricaviamo $P(E_1) = 0.03$ e $P(E_2) = 0.07$. Otteniamo

- $P(E_1 \cap E_2) \overset{\text{(indip.)}}{=} P(E_1)P(E_2) = (0.03)(0.07) = 0.0021$;
- $P(E_1 \cup E_2) \overset{\text{(incl./escl.)}}{=} P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.03 + 0.07 - 0.0021 = 0.0979$.

E3.11 (⚑ tratto da appello). In una scuola ci sono due classi di allievi (prima e seconda). Nella classe prima ci sono 6 femmine e 4 maschi, nella classe seconda ci sono n femmine e 6 maschi, con $n \in \mathbb{N}$. Si estrae a caso un allievo della scuola.

(a) Calcolare le probabilità degli eventi $F =$"l'allievo estratto è femmina" e $Q =$"l'allievo estratto è nella classe prima". Per quale valore di n gli eventi F e Q sono indipendenti?

(b) Calcolare la probabilità che l'allievo estratto sia maschio sapendo che frequenta la classe seconda.

(c) All'esame di fine anno, un allievo maschio ha probabilità 40% di essere promosso, mentre un'allieva femmina ha probabilità 60% di essere promossa. Calcolare la probabilità che un allievo estratto a caso venga promosso a fine anno.

Soluzione.

(a) Calcoliamo le probabilità richieste come "casi favorevoli su casi possibili". Nella scuola ci sono $6 + 4 + n + 6 = 16 + n$ allievi in totale, di cui $6 + n$ femmine e $6 + 4 = 10$ di classe prima. Quindi, otteniamo

$$P(F) = \frac{6+n}{16+n} \quad \text{e} \quad P(Q) = \frac{10}{16+n}. \tag{1}$$

Ora, per rispondere alla domanda sull'indipendenza, dobbiamo verificare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ è valida l'uguaglianza $P(F \cap Q) = P(F)P(Q)$. Innanzitutto osserviamo che $F \cap Q =$"l'allievo estratto è una femmina della classe prima" e pertanto

$$P(F \cap Q) = \frac{6}{16+n}. \tag{2}$$

Usando la definizione di indipendenza e quanto ottenuto in (1) e (2), troviamo l'equazione

$$\frac{6}{16+n} = \frac{6+n}{16+n} \cdot \frac{10}{16+n},$$

da cui ricaviamo $n = 9$. Concludiamo, quindi, che gli eventi F e Q sono indipendenti solo se prendiamo $n = 9$.

(b) Se definiamo gli eventi $F^c =$"l'allievo estratto è maschio" e $Q^c =$"l'allievo estratto è nella classe seconda", dobbiamo calcolare la probabilità condizionata $P(F^c|Q^c)$. Per definizione otteniamo

$$P(F^c|Q^c) = \frac{P(F^c \cap Q^c)}{P(Q^c)} = \frac{6}{16+n} \cdot \frac{16+n}{6+n} = \frac{6}{6+n},$$

dove si è usato il fatto che $F^c \cap Q^c =$"l'allievo estratto è un maschio della classe seconda".

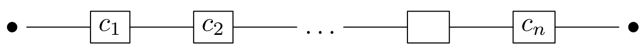
(c) Consideriamo l'evento $S =$"l'allievo estratto viene promosso a fine anno". Dal testo possiamo ricavare $P(S|F^c) = \frac{4}{10}$ e $P(S|F) = \frac{6}{10}$. Ci viene richiesto di calcolare $P(S)$. Applicando la formula delle probabilità totali otteniamo

$$P(S) = P(S|F^c)P(F^c) + P(S|F)P(F) = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{16+n} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6+n}{16+n} = \cdots = \frac{38+3n}{5(16+n)}.$$

E3.12 (Affidabilità dei sistemi). Per affidabilità di un sistema (notazione `Aff`) si intende la probabilità che un sistema costituito di varie componenti funzioni. L'affidabilità di un sistema dipende dall'affidabilità delle sue componenti e dal modo in cui queste sono collegate tra loro.

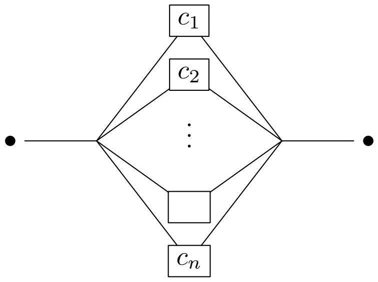
Supponiamo che ogni componente funzioni *indipendentemente* da tutte le altre. Sia inoltre p_i la probabilità che la componente c_i funzioni.

(a) *Sistema in serie.* Un sistema in serie è un sistema in cui tutte le componenti sono collegate in serie (vedi figura). Il sistema funziona se *tutte* le componenti funzionano.



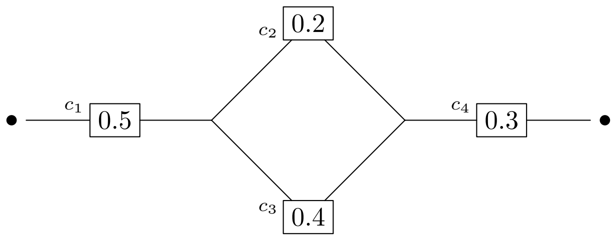
Calcolare l'affidabilità di un sistema in serie.

(b) *Sistema in parallelo.* Un sistema in parallelo è un sistema in cui tutte le componenti sono collegate in parallelo (vedi figura). Il sistema funziona se *almeno una* componente funziona.

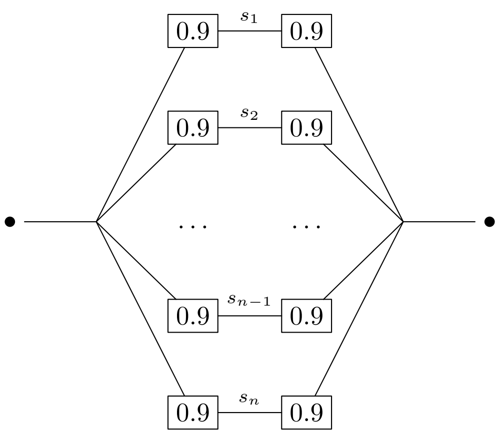


Calcolare l'affidabilità di un sistema in parallelo.

(c) *Sistema misto.* La maggior parte dei sistemi sono combinazioni di sistemi in serie e in parallelo: diversi sistemi in serie sono collegati tra loro in parallelo. Utilizzando quanto visto nei punti (a) e (b), calcolare l'affidabilità del sistema misto in figura. Ogni etichetta numerica rappresenta la probabilità di funzionamento della componente corrispondente.



(d) Solitamente si costruisce un sistema in modo che abbia un certo livello di affidabilità. Il sistema in figura è composto da n sotto-sistemi identici (s_i) collegati in parallelo, ciascuno dei quali ha due componenti connesse in serie. Determinare quanti sotto-sistemi devo collegare in parallelo per avere almeno il 99% di affidabilità. Ogni etichetta numerica rappresenta la probabilità di funzionamento della componente corrispondente.



Soluzione. Consideriamo gli eventi $F_i =$"la componente i-esima funziona" e le relative probabilità $p_i = P(F_i)$.

(a) Un sistema in serie funziona se tutte le sue componenti funzionano, cioè se si verifica l'evento $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$. Allora la sua affidabilità vale

$$\texttt{Aff} = P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \overset{\text{(indip.)}}{=} p_1 p_2 \dots p_n.$$

(b) Un sistema in parallelo funziona se almeno una delle sue componenti funzionano, cioè se si verifica l'evento $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$. Allora la sua affidabilità vale

$$\begin{aligned}\texttt{Aff} = P(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n) &\overset{\text{(evento compl.)}}{=} 1 - P\big((F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n)^c\big) \\ &\overset{\text{(De Morgan)}}{=} 1 - P(F_1^c \cap F_2^c \cap \cdots \cap F_n^c) \\ &\overset{\text{(indip.)}}{=} 1 - (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n).\end{aligned}$$

(c) Il sistema funziona se si verifica l'evento $F_1 \cap (F_2 \cup F_3) \cap F_4$. Quindi, poiché si ha $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.4$ e $p_4 = 0.3$, la sua affidabilità vale

$$\texttt{Aff} = P\big(F_1 \cap (F_2 \cup F_3) \cap F_4\big) \overset{\text{(indip., }\mathbf{E3.9}\text{b)}}{=} p_1\big(1 - (1-p_2)(1-p_3)\big)p_4 = 0.078.$$

(d) Consideriamo gli eventi $G_i =$"l'i-esimo sotto-sistema funziona". Poiché ogni sotto-sistema s_i è un sistema in serie si ha $P(G_i) = (0.9)(0.9) = 0.81$. Il sistema complessivo, dove i sotto-sistemi sono connessi in parallelo, funziona se si verifica l'evento $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$. Allora la sua affidabilità vale

$$\texttt{Aff} = 1 - (1-0.81)^n.$$

Dobbiamo trovare il valore di n per cui vale $1 - (1-0.81)^n = 0.99$. Risolvendo l'equazione si trova $n \approx 2.773$. Pertanto, dobbiamo collegare 3 sotto-sistemi come quelli descritti sopra per ottenere l'affidabilità richiesta.