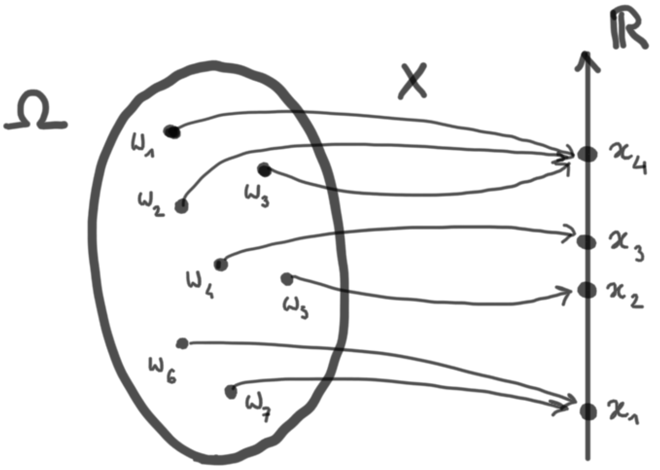
VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Sia $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega), P)$ uno sp. di prob. discreto. Ogni mappa $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta <u>variabile aleatoria</u> (o casuale) discreta su $\mathbb{R}$.



$\mathcal{X}$ ALFABETO DI X

L'alfabeto è l'immagine di X, cioè

$$\mathcal{X} = X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : X(\omega) = x \text{ per qualche } \omega \in \Omega\}$$

In particolare (importante!), $\mathcal{X}$ è un <u>insieme discreto</u> e $|\mathcal{X}| \leq |\Omega| \leq |\mathbb{N}|$.

<u>Esempi</u>

1. Sia $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega), P)$ uno sp. di prob. discreto. Sia $E \in \mathbb{P}(\Omega)$ un qualsiasi evento. Possiamo definire la v.al. $\mathbb{1}_E(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$\mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(INDICATRICE) e con alfabeto $\{0,1\}$.

2. Sia $\Omega = \{(d_1, d_2) : d_1, d_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$ lo sp. camp. relativo al lancio di una coppia di dadi (d_i indica il punteggio dell'i-esimo dado, con $i = 1, 2$). Possiamo costruire diverse v. al.:

- $\omega = (d_1, d_2) \longmapsto X_1(\omega) = d_1$ con $\mathcal{X}_1 = \{1, \dots, 6\}$
- $\omega = (d_1, d_2) \longmapsto X_2(\omega) = d_2$ con $\mathcal{X}_2 = \{1, \dots, 6\}$
- $\omega = (d_1, d_2) \longmapsto X_3(\omega) = \min\{d_1, d_2\}$ con $\mathcal{X}_3 = \{1, \dots, 6\}$
- $\omega = (d_1, d_2) \longmapsto X_4(\omega) = \max\{d_1, d_2\}$ con $\mathcal{X}_4 = \{1, \dots, 6\}$
- $\omega = (d_1, d_2) \longmapsto X_5(\omega) = d_1 + d_2$ con $\mathcal{X}_5 = \{2, 3, \dots, 12\}$

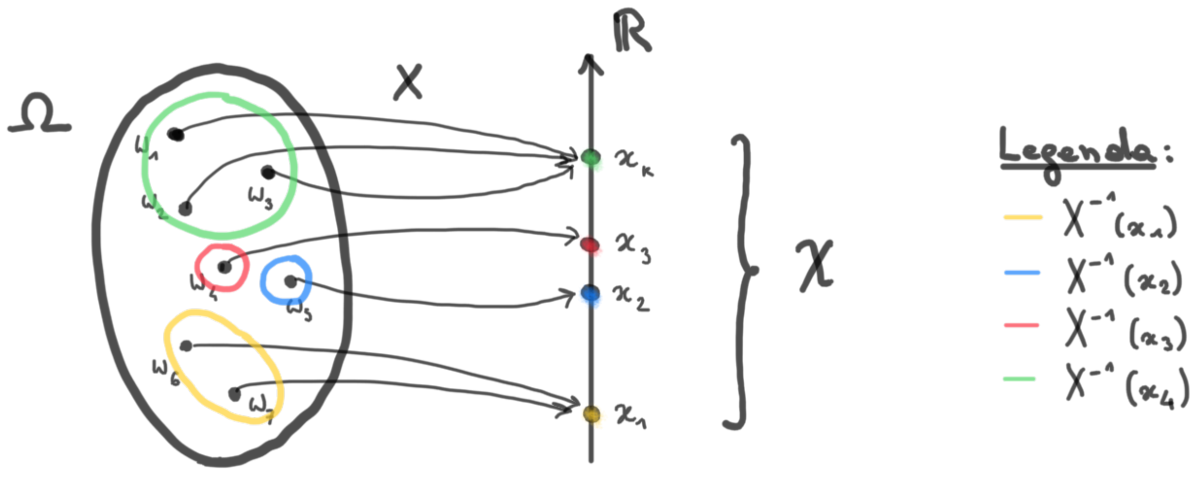
<u>Oss.</u> Le v. al. sono funzioni, pertanto se definite sullo stesso dominio/sp. camp. si possono combinare attraverso operazioni. Quindi $X \pm Y$, XY, X/Y, $\min\{X, Y\}$, $\max\{X, Y\}$, ... sono ancora variabili aleatorie.

Esempio

In riferimento all'esempio 2, abbiamo $X_3 = \min\{X_1, X_2\}$, $X_4 = \max\{X_1, X_2\}$ e $X_5 = X_1 + X_2$.

La mappa X, benché chiamata aleatoria, non ha nulla di aleatorio: associa deterministicamente, ad ogni valore $\omega \in \Omega$, il valore $X(\omega)$. La variabile X è detta aleatoria con riferimento all'incertezza con cui i valori $X(\omega)$ possono essere presi, incertezza ereditata dall'argomento $\omega \in \Omega$.

COME ASSEGNO UNA PROBABILITÀ SU $\mathcal{X}$?



$\mathcal{X}$ è un insieme discreto, quindi basta assegnare una prob. P^X ad ogni singoletto di $\mathcal{X}$, compatibilmente con la prob. P dello spazio di prob. $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega), P)$ di partenza, dove X

è definita.

DEFINIZIONE DI MISURA DI PROBABILITÀ INDOTTA

$$\boxed{P^X(x_k) := P(X^{-1}(x_k))} \quad \text{per ogni } x_k \in \mathcal{X}$$

$$\left[= P(X = x_k) \ \text{notazione} \right]$$

<u>Lemma</u>. P^X è una probabilità su $\mathcal{X}$.

<u>Dimostrazione</u>. Poiché $\mathcal{X}$ è discreto basta verificare:

(i) $P^X(x_k) \geq 0$ per ogni $x_k \in \mathcal{X}$ (positività);

(ii) $\sum_{x_k \in \mathcal{X}} P^X(x_k) = 1$ (normalizzazione).

La (i) è facile: $P^X(x_k) = P(X^{-1}(x_k))$, ma P è una misura di prob. e quindi è positiva.

Per (ii), osserviamo che il fatto che X sia una funzione implica che la famiglia delle anti-immagini $\{X^{-1}(x_k)\}_{x_k \in \mathcal{X}}$ sia una <u>partizione</u> di Ω, cioè

- $X^{-1}(x_k) \cap X^{-1}(x_j) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$;
- $\bigcup_{x_k \in \mathcal{X}} X^{-1}(x_k) = \Omega$.

Quindi otteniamo

$$\sum_{x_k \in \mathcal{X}} P^X(x_k) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} P(X^{-1}(x_k))$$

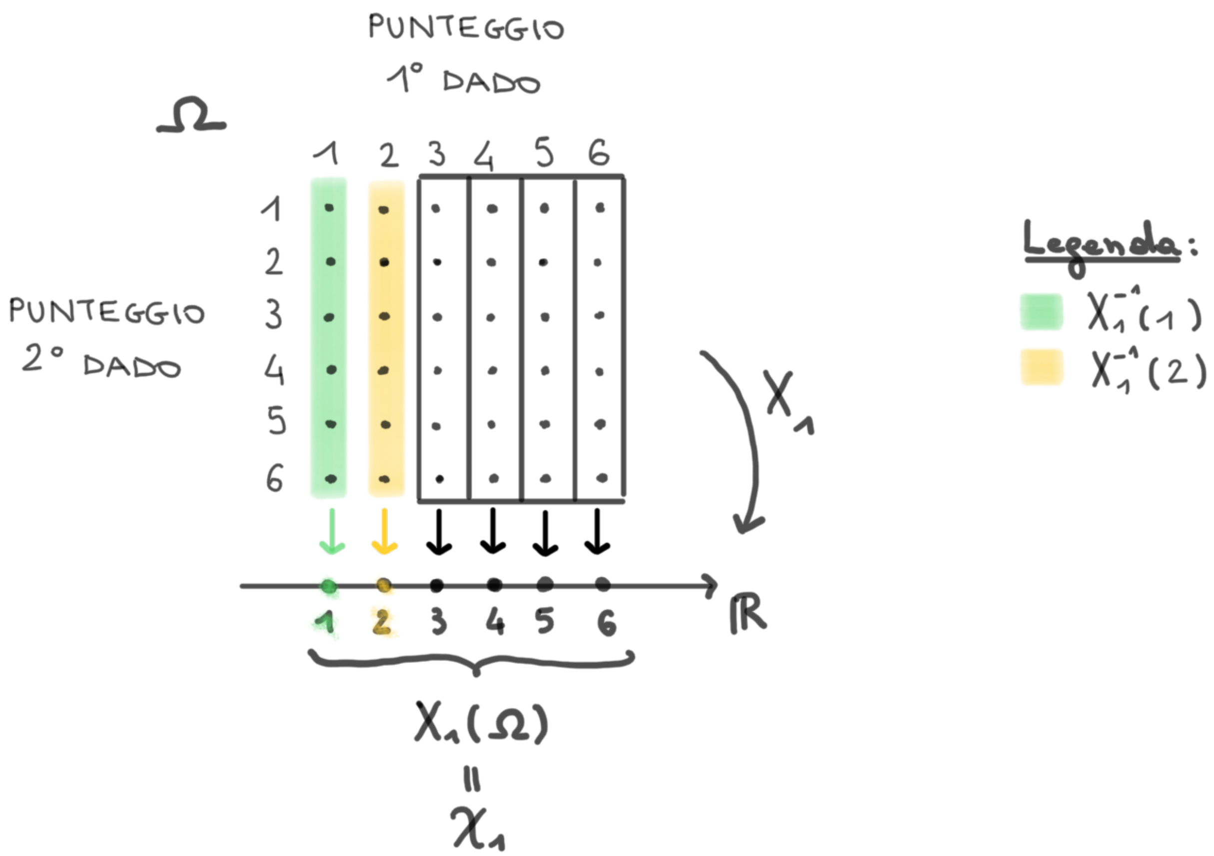
$$= P\Big(\bigcup_{x_k \in \mathcal{X}} X^{-1}(x_k)\Big) = P(\Omega) = 1.$$

$\blacksquare$

Esempi

1. Ritorniamo all'esempio del lancio di 2 dadi e consideriamo la v.al. $X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $(d_1, d_2) \longmapsto d_1$.

Come assegniamo una prob. su $\mathcal{X}_1 = \{1, \dots, 6\}$?



$$P^{X_1}(1) = P(X_1^{-1}(1)) = P(X_1 = 1) = P(\{(1,1), \dots, (1,6)\}) = 1/6$$

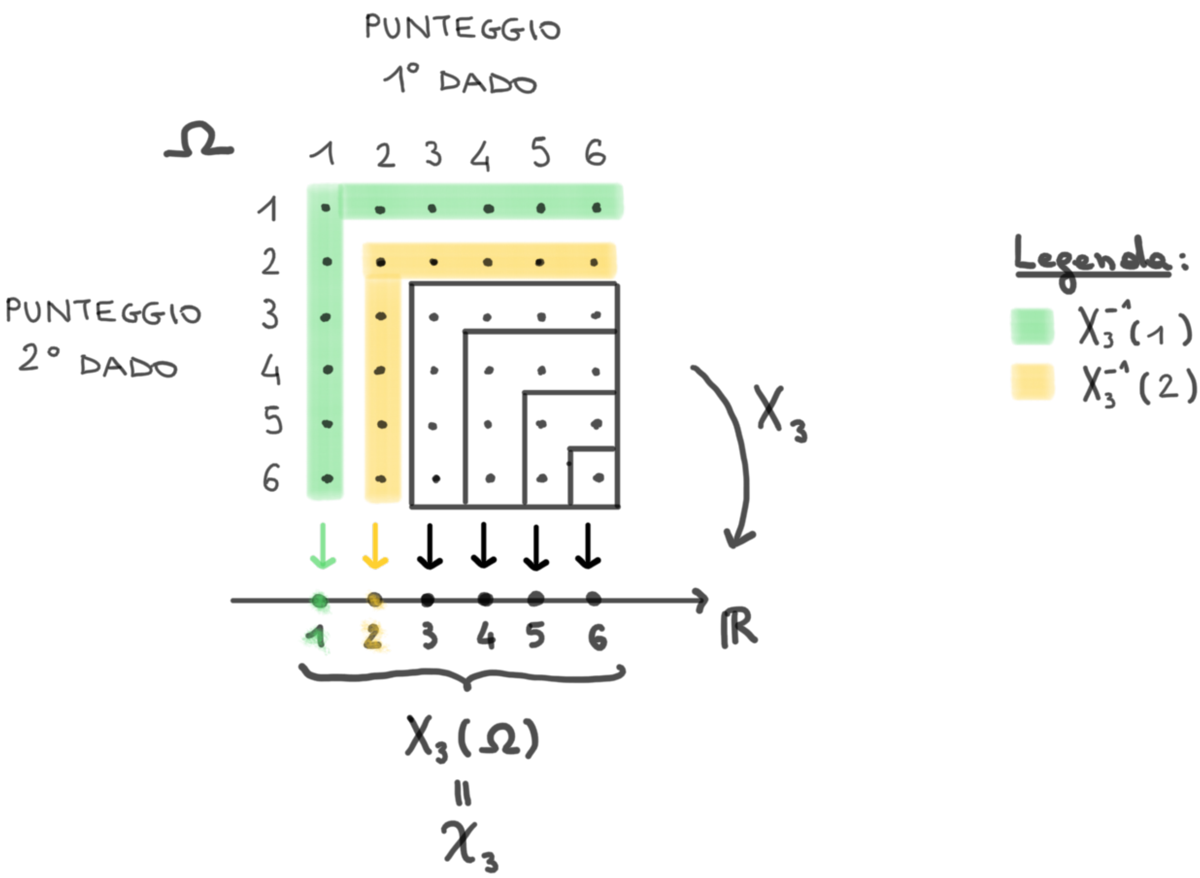
$$P^{X_1}(2) = P(X_1^{-1}(2)) = P(X_1 = 2) = P(\{(2,1), \dots, (2,6)\}) = 1/6$$

Analogamente, si trova $P^{X_1}(3) = P^{X_1}(4) = P^{X_1}(5) = P^{X_1}(6) = 1/6$.

2. Sempre dall'esempio del lancio dei 2 dadi.

Consideriamo
$$X_3 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(d_1, d_2) \longmapsto \min\{d_1, d_2\}$$

Come assegniamo una prob. su $\mathcal{X}_3 = \{1, \dots, 6\}$?



$$p^{X_3}(1) = P(X_3^{-1}(1)) = P(X=1) = P(\quad) = 11/36$$

$$p^{X_3}(2) = P(X_3^{-1}(2)) = P(X=2) = P(\quad) = 1/4$$

e così via per tutti i valori dell'alfabeto $\mathcal{X}_3$.

DESCRIZIONE PROBABILISTICA DELLA VARIABILE ALEATORIA

X v.al. discreta

$\mathcal{X}$ alfabeto

$\oplus$

$$p_X : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$$
$$x_k \longmapsto p_X(x_k) = P(X = x_k)$$

con proprietà: (1) $p_X(x_k) \geq 0, \ \forall x_k \in \mathcal{X}$

(2) $\displaystyle\sum_{x_k \in \mathcal{X}} p_X(x_k) = 1$

p_X si chiama <u>densità discreta di probabilità</u> (o <u>legge</u>) della v. al. X.

<u>Esempio</u>

Sia X una v. al. discreta con alfabeto $\mathcal{X} = \{0, \sqrt{2}, \pi\}$ e densità discreta $p_X(0) = 2/3$, $p_X(\sqrt{2}) = p_X(\pi) = 1/6$.

Calcoliamo $P(1 < X < 4)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(1 < X < 4) &= P(X \in \{\sqrt{2}, \pi\}) \\ &= P(\{X = \sqrt{2}\} \cup \{X = \pi\}) \\ &= P(X = \sqrt{2}) + P(X = \pi) \\ &= 1/3 . \end{aligned}$$
