DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Scopo: contare le k-uple ordinate che posso creare scegliendo ogni entrata da n oggetti con la possibilità di ripetizione.

Ogni entrata può essere scelta tra n alternative (ci può essere ripetizione!) e faccio k scelte in totale. Quindi

$$\overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k \text{ volte}} = n^k$$

nr. disposizioni di k oggetti scelti da n con ripetizione

Esempi:

1. Una cassaforte con codice a 7 cifre ha 10^7 codici possibili.

2. Se E è un insieme finito con cardinalità k, allora i possibili sottoinsiemi di E sono 2^k.

Infatti, possiamo specificare un sottoinsieme F di E nel modo seguente:
ad ogni elemento di E associamo il valore 1 se sta in F e il valore 0 se non ci sta.

Ogni stringa di bit $\{0, 1\}$ di lunghezza K codifica un sottoinsieme di E.

Ad esempio: $E = \{+, -, \times, :\}$, $|E| = 4$

Stringa: 0101

$$\xrightarrow{\text{genera sottoinsieme}} \{-, :\}$$

Per contare i sottoinsiemi devo contare le stringhe. Quante stringhe di lunghezza K posso formare scegliendo le entrate in $\{0, 1\}$? 2^K.

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE

__Scopo__: contare le K-uple __ordinate__ che posso creare scegliendo ciascuna entrata da n oggetti senza la possibilità di ripetizione.

La prima entrate può essere scelta tra n alternative, la seconda tra $n-1$ alternative e così via fino alla K-esima che può essere scelta tra

$n-k+1$ alternative.

$$\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}$$

nr. disposizioni di k oggetti scelti da n senza ripetizioni

Se $k=n$ ottengo permutazioni che contano tutti i modi possibili di ordinare n oggetti. In particolare si ottiene che il numero di possibili permutazioni è $n!$.

Esempio

Cinque amici fanno una gara di nuoto. Le possibili classifiche sono $5! = 120$, mentre i possibili podii sono $5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

COMBINAZIONI (SENZA RIPETIZIONE)

Scopo: contare il numero di sottoinsiemi di k elementi che possiamo formare scegliendo tra n oggetti (senza ripetizione).

è un concetto che non tiene conto dell'ordine degli elementi!

Dobbiamo usare gli strumenti di conteggio che abbiamo e cercare di "togliere l'ordinamento". Per esempio, quanti insiemi di 3 lettere possiamo formare con le lettere A, B, C, D, E ?
Ho $5 \cdot 4 \cdot 3$ modi per scegliere le 3 lettere se tengo conto dell'ordine. Tuttavia, così ogni insieme viene contato $3! = 6$ volte (quante sono le possibili permutazioni delle 3 lettere scelte).

ABC ACB BAC BCA CAB CBA (con ordine)

corrispondono a

$\{A, B, C\}$ (senza ordine)

Quindi il numero totale di insiemi di 3 elementi che posso formare è $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$. In generale,

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

nr. combinazioni di k oggetti scelti da n senza ripetizione

con la convenzione $0! = 1$.

<u>Esempio</u>

Il maître chocolatier Foncé ha un assortimento di 50 tipi di cioccolatini. Sta preparando delle confezioni degustazione da 10 pezzi distinti ciascuna.
È possibile creare $\binom{50}{10} = 10\ 272\ 278\ 170$ degustazioni distinte!

I problemi di conteggio reale sono tipicamente misture dei tipi di problemi fondamentali visti finora.

<u>Esempio</u>

Gli anagrammi della parola CRICETO sono 2520.
Se le lettere da permutare fossero distinte avrei $7!$ ordinamenti possibili. Tuttavia le lettere non sono tutte distinte, ogni volta che permuto le C tra loro ottengo la stessa parola. Tenendo conto di questo fatto, ottengo $\frac{7!}{2!} = 2520$ anagrammi.

Analogamente, gli anagrammi della parola TRICERATOPO sono $\frac{11!}{2!\,2!\,2!} = 4\ 989\ 600$.

ESERCIZI

1. Un'urna contiene palline numerate da 1 a 50. Si estraggono contemporaneamente due palline. Calcolare la probabilità di ottenere:
   (a) due numeri dispari;
   (b) un numero divisibile per 5 e uno non divisibile per 5;
   (c) due numeri la cui somma è 50.

<u>Soluzione</u>. Considero Ω ins. comb. di 2 palline scelte tra le 50 nell'urna (non tengo conto dell'ordine). Si ha $|\Omega| = \binom{50}{2} = 1225$.

(a) Sia A l'evento "estraggo 2 nr. dispari". Ottengo

$$P(A) = \frac{\binom{25}{2}}{1225} = \frac{12}{49}.$$

(b) Sia B l'evento "estraggo un nr. divisibile per 5 e un nr. non divisibile per 5". Ottengo

$$P(B) = \frac{10 \cdot 40}{1225} = \frac{16}{49}.$$

(c) Sia C l'evento "estraggo 2 numeri che sommano a 50". Le coppie di nr. che hanno somma 50 sono $\{1,49\}, \{2,48\}, \dots, \{24,26\}$. Ho quindi 24 casi favorevoli. Pertanto si ha

$$P(C) = \frac{24}{1225}.$$

Alternativamente... Considero $\overline{\Omega}$ ins. delle disp. di 2 palline scelte dalle 50 nell'urna (tengo conto dell'ordine). Si ha $|\overline{\Omega}| = 50 \cdot 49$.

(a) $P(A) = \dfrac{25 \cdot 24}{50 \cdot 49} = \dfrac{12}{49}$.

(b) L'evento B è l'unione disgiunta di due eventi:

B_1 = "il primo nr. è divisibile per 5 e il secondo no" e

B_2 = "il primo nr. non è divisibile per 5 e il secondo sì".

Ottengo

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$$

$$= \frac{10 \cdot 40}{50 \cdot 49} + \frac{40 \cdot 10}{50 \cdot 49} = \frac{16}{49}.$$

(c) Le coppie ordinate che sommano a 50 sono $(1,49), (49,1), (2,48), (48,2), \ldots, (24,26), (26,24)$. Si hanno 48 casi favorevoli e quindi

$$P(C) = \frac{48}{50 \cdot 49} = \frac{24}{1225}.$$

2. Lanciamo 3 dadi equilibrati. Calcolare la probabilità di ottenere:

(a) tre numeri dispari;

(b) due numeri pari e uno dispari;

(c) tre numeri la cui somma è 5;

(d) almeno due 1.

<u>Soluzione</u>. Considero $\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k \in \{1,\dots,6\}\}$ (tengo conto dell'ordine). Si ha $|\Omega| = 6^3 = 216$.

(a) Sia A l'evento "ottengo 3 nr. dispari". Si ha

$$P(A) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{216} = \frac{1}{8}.$$

(b) Sia B l'evento "ottengo 2 nr. pari e uno dispari". Si ha

$$P(B) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{216} = \frac{3}{8}.$$

(c) Sia C l'evento "ottengo 3 nr. la cui somma è 5". Le terne possibili 1 1 3 e 2 2 1 e per ognuna di queste dobbiamo considerare gli ordinamenti. Si ha

$$P(C) = \frac{2 \cdot 3}{216} = \frac{1}{36}.$$

(d) Sia D l'evento "ottengo almeno due 1".
L'evento D è l'unione disgiunta di due eventi:
D_2 = "ottengo esattamente due 1"
e
D_3 = "ottengo tre 1".
Si ha

$$P(D) = P(D_2 \cup D_3) = P(D_2) + P(D_3)$$

$$= \frac{3 \cdot 5}{216} + \frac{1}{216} = \frac{2}{27}.$$

<u>Esempio</u> [Birthday problem]

Consiste nel calcolare la prob. dell'evento

E_n = "in una classe di n bambini almeno 2 hanno lo stesso compleanno" $(n \leq 365)$

Anno composto da 365 giorni, che identifico coi numeri da 1 a 365. Lo spazio campionario è

$$\Omega_n = \{1, \dots, 365\}^n$$

e ci mettiamo la misura di prob. uniforme.
Quindi

$$P(E_n) = \frac{|E_n|}{|\Omega_n|} = \frac{|E_n|}{365^n}$$

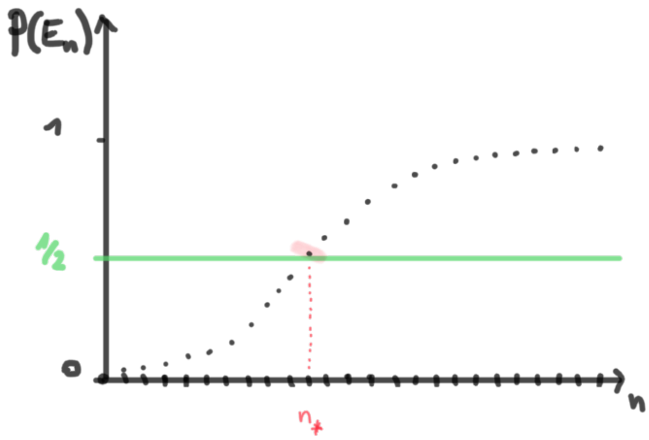
Il calcolo di $|E_n|$ è complicato, passo all'evento complementare

E_n^c = "in una classe di n bambini tutti i compleanni avvengono in giorni distinti"

Si ha

$$P(E_n) = 1 - P(E_n^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

Graficamente:



Ci interessa calcolare n_* definito come il primo n per cui $P(E_n) \geq 1/2$, cioè

$$n_* = \min\{n \mid P(E_n) \geq 1/2\}.$$

Si trova $n_* = 23$.