PROPRIETÀ DEL VALOR MEDIO

1. LINEARITÀ

(i) X v.al., $a \in \mathbb{R}$. Allora $E(aX) = aE(X)$.

Come lo vedo?

aX è la v.al. $\omega \mapsto aX(\omega)$, allora per il teor. Fond. otteniamo

$$E(aX) = \sum_{\omega \in \Omega} aX(\omega)P(\{\omega\})$$
$$= a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = aE(X).$$

$\blacksquare$

(ii) Siano X, Y v.al. definite sullo stesso sp. camp. Ω. Allora $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Come lo vedo?

$X+Y$ è la v.al. $\omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$, allora per il teor. Fond. otteniamo

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega))P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\})$$

$$= E(X) + E(Y).$$

$\blacksquare$

Perché non posso dimostrare la proprietà (ii) usando la definizione di valor medio?

?!?!

$$E(X+Y) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} \sum_{y_\ell \in \mathcal{Y}} (x_k + y_\ell)\, p_{X+Y}(x_k + y_\ell)$$

dobbiamo aspettare la settimana 8 per dare un senso a questa scrittura

Mettiamo insieme (i) e (ii) e otteniamo:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

2. POSITIVITÀ

Sia X v.al. positiva (cioe $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}_+$), allora $E(X) \geq 0$.

3. MONOTONIA

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.al. tali che $X \geq Y$.
Allora $E(X) \geq E(Y)$.

Come lo vedo?

$X \geq Y \iff X - Y \geq 0$. Per positività si ha $E(X-Y) \geq 0$. Per linearità si ottiene $E(X) - E(Y) \geq 0$, da cui concludo.

$\blacksquare$

4. LIMITI INFERIORE E SUPERIORE

Sia X v.al. con alfabeto $\mathcal{X}$ e siano $\underline{x} = \inf \mathcal{X}$ e $\overline{x} = \sup \mathcal{X}$. Allora si ha

$$\underline{x} \leq E(X) \leq \overline{x}$$

<u>Oss.</u> Se $b \in \mathbb{R}$, allora $E(b) = b$.

Possiamo vedere $b \in \mathbb{R}$ come una v.al. costante, cioè

X v.al. con alfabeto $\mathcal{X}=\{b\}$ e densità discreta $p_X(b)=1$ e $p_X(i)=0 \quad \forall i \neq b$.

Segue dalla def. di v. medio che $E(X)=b$.

<u>Teorema (valor medio di funzioni di v.al.)</u>. Siano $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.al. e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione. Si ha

$$E(g(X)) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} g(x_k)\, p_X(x_k).$$

<u>Esempio</u>

Sia X v.al. con alfabeto $\mathcal{X}=\{-1,1,3\}$ e densità discreta $p_X(3)=p_X(-1)=1/4$ e $p_X(1)=1/2$.

Sia inoltre $Y=X^2$. Calcoliamo $E(Y)$.

<u>Metodo 1</u>. Caratterizzo Y (alfab. + densità) e uso la def. di valor medio.
Abbiamo $\mathcal{Y}=\{1,9\}$ e $p_Y(1)=3/4$ e $p_Y(9)=1/4$.

Quindi $E(Y) = 1 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = 3$.

<u>Metodo 2</u>. Applico direttamente il teorema.

$$E(Y) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = 3.$$

ESERCIZI

1. Un'urna contiene 8 palline nere e 6 bianche. Si fanno due estrazioni senza reinserimento. Per ogni pallina nera estratta si vince 1 euro. Per ogni pallina bianca estratta si perde 1 euro. Sia X la variabile aleatoria che descrive la vincita/perdita del gioco. Calcolare E(X).

<u>Soluzione</u>. Alfabeto: $\mathcal{X} = \{-2, 0, 2\}$
(corrisponde a: estraggo 2 bianche, estraggo 1 nera e 1 bianca, estraggo 2 nere)

Densità: $p_X(-2) = P(\text{estraggo 2 bianche})$

$$= \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{15}{91}$$

$$p_X(0) = \frac{8 \cdot 6}{\binom{14}{2}} = \frac{48}{91}$$

$$p_X(2) = 1 - p_X(0) - p_X(-2) = \frac{4}{13}$$

Media: $E(X) = (-2) \cdot \frac{15}{91} + 2 \cdot \frac{4}{13} = \frac{2}{7} \approx 0.286.$

2. Due dadi sono truccati in modo che la probabilità di ottenere 6 sia il doppio di quella di ottenere ogni altro punteggio. Qual è la media del punteggio ottenuto lanciando i due dadi?

<u>Soluzione</u>. Siano X_1 (risp. X_2) le v. al. che corrispondono al punteggio del primo (risp. secondo) dado. Le 2 v. al. hanno lo stesso alfabeto $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ e la stessa densità discreta che ora determiniamo:

si ha $p_{X_i}(6) = 2p$

$$p_{X_i}(j) = p \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, 5$$

da cui ricavo $2p + 5p = 1 \iff p = 1/7$.

Quindi la densità è $p_{X_i}(1) = \dots = p_{X_i}(5) = 1/7$ e $p_{X_i}(6) = 2/7$.

Ora sia $Y = X_1 + X_2$ la v. al. che corrisponde alla somma dei due punteggi. Abbiamo

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1) + E(X_2) \\ &= (1+2+3+4+5) \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{2}{7} + \frac{15}{7} + \frac{12}{7} \\ &= \frac{54}{7} \approx 7.7 \end{aligned}$$

Se i dadi non fossero stati truccati si avrebbe $E(Y) = 7$.

VARIANZA

Sia X v.al. con alfabeto $\mathcal{X}$ e densità discreta p_X. La varianza è il nr. reale positivo (!)

$$\boxed{Var(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} (x_k - E(X))^2 \, p_X(x_k)}$$

Esempio

Consideriamo $X_1 \in \{-1, 1/4, 3/4\}$ con densità discreta $p_{X_1}(-1) = p_{X_1}(1/4) = p_{X_1}(3/4) = 1/3$ e $X_2 \in \{-10, 10\}$ con densità discreta $p_{X_2}(-10) = p_{X_2}(10) = 1/2$.

Abbiamo $E(X_1) = E(X_2) = 0$, ma

$$Var(X_1) = \frac{1}{3} \cdot \left[(-1-0)^2 + (1/4 - 0)^2 + (3/4 - 0)^2 \right] \approx 0.524$$

$$Var(X_2) = \frac{1}{2} \cdot \left[(-10-0)^2 + (10-0)^2 \right] = 100.$$

I valori di X_2 sono tanto dispersi, cioè lontani dalla media.

PROPRIETÀ DELLA VARIANZA

1. $Var(X) = E\left[(X - E(X))^2 \right]$

(media di una funz. della v.al. X; usiamo $g(x) = (x - E(X))^2$).

2. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ e, in particolare, $\mathrm{Var}(X) = 0 \iff X \equiv \text{costante}$

Come lo vedo?

$$\mathrm{Var}(X) = 0 \iff \sum_{x_k \in \mathcal{X}} (x_k - E(X))^2 \underbrace{p_X(x_k)}_{>0} = 0$$

$$\iff x_k - E(X) = 0, \quad \forall x_k \in \mathcal{X}$$

$$\iff x_k = E(X), \quad \forall x_k \in \mathcal{X}.$$

$\blacksquare$

3. $\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$, $a \in \mathbb{R}$

Come lo vedo?

$$\mathrm{Var}(aX) = E\left[(aX - E(aX))^2\right]$$

$$= E\left[(aX - aE(X))^2\right]$$

linearità del valor medio

$$= a^2 E\left[(X - E(X))^2\right] = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

$\blacksquare$

4. $Var(X+c) = Var(X), \quad c \in \mathbb{R}$

Oss. importante. 3 e 4 mostrano che la varianza NON è LINEARE!

5. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Come lo vedo?

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

$$= E[X^2 - 2X\,E(X) + E(X)^2]$$

$$\xrightarrow[\text{valor medio}]{E(X) \in \mathbb{R} \;+\; \text{linearità del}} = E(X^2) - E(X)^2$$

$\blacksquare$

ESERCIZIO

L'urna 1 ha composizione: 1 pallina dorata, 4 palline verdi, 15 palline bianche. L'urna 2 invece contiene: 4 palline verdi e 25 palline

bianche. Una pallina a caso viene spostata dall'urna 1 all'urna 2; quindi mi viene chiesto di estrarre una pallina dall'urna 2.
Se estraggo la pallina dorata vinco 50€, se estraggo una pallina verde perdo 1€, altrimenti non vinco e non perdo.
Sia X la variabile aleatoria che corrisponde alla vincita / perdita. Si calcoli la varianza di X.

Soluzione. Alfabeto $\mathcal{X} = \{-1, 0, 50\}$

Densità discreta. Considero gli eventi T_i = "trasferisco una pallina i" con $i = O(ro), V(erde), B(ianca)$ e E_i = "estraggo una pallina i" con $i = O, V, B$.

Otteniamo

$$P(X=-1) = P(E_V) = P(E_V|T_B)P(T_B) + P(E_V|T_V)P(T_V) + P(E_V|T_O)P(T_O)$$

$$= \frac{4}{30} \cdot \frac{15}{20} + \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{20} + \frac{4}{30} \cdot \frac{1}{20} = \frac{7}{50}.$$

$$P(X=50) = P(E_O) = P(T_O \cap E_O) = P(E_O|T_O)P(T_O)$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{600}.$$

$$P(X=0) = 1 - P(X=-1) - P(X=50) = \frac{103}{120}$$

Varianza:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= (-1)^2 \cdot \frac{7}{50} + (50)^2 \cdot \frac{1}{600} - \left[(-1) \cdot \frac{7}{50} + 50 \cdot \frac{1}{600} \right]^2$$
$$\approx 4.3.$$