Distribuzioni gaussiane e teorema del limite centrale

Ricorda: Una v.a. reale X su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si dice normale standard (gaussiana di media zero e varianza uno) se X è assolutamente continua

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad F_X(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx = \Phi(z)$$ ← RIPARTIZIONE NORMALE STANDARD

Nota: $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ $\quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Siano $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, X normale standard

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2}\,dx = \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2/2}\,dx$$

Poniamo $Y = \mu + \sigma \cdot X \rightarrow E[Y] = \mu + \sigma \cdot E[X] = \mu$

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(\sigma \cdot X) = \sigma^2 \,\mathrm{var}(X) = \sigma^2$$

Y è assolutamente continua

Funzione di ripartizione $\forall z \in \mathbb{R}$

$F_Y(z) = P(Y \leq z) = P\left(X \leq \frac{z-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}} e^{-x^2/2} \, dx$ $\quad \Big| \; x = \frac{z-\mu}{\sigma}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} \frac{1}{\sigma} \, dy \rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; y \in \mathbb{R}$

<u>Def.</u> Una v.a. reale Y si dice gaussiana di media μ e varianza $\sigma^2 > 0$

Y è assolut. continua con densità data da $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Osservazioni

① Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 > 0$ allora $X = \frac{1}{\sigma}(Y-\mu)$ è normale standard

② Sia $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Allora $Z = \tilde{\mu} + \tilde{\sigma} Y$ è gaussiana di media $\tilde{\mu} + \tilde{\sigma}\mu$ e varianza $\tilde{\sigma}^2 \cdot \sigma^2$

Prop.

Siano $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ e X e Y sono indipendenti allora
$X+Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Attenzione:

La somma di v.a. gaussiane dipendenti non è necessariamente gaussiana.

Esempio:

Siano $Z \sim N(0,1)$ $\quad \varepsilon = \text{Rad}(\frac{1}{2})$, $(P(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}, P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2})$,
supponendo ε, Z indipendenti.

Poniamo $Y = \varepsilon Z \rightarrow Y(\omega) = \begin{cases} Z(\omega) & \text{se } \varepsilon(\omega) = 1 \\ -Z(\omega) & \text{se } \varepsilon(\omega) = -1 \end{cases}$

allora $Y \sim N(0,1)$ ma $Z+Y$ non è gaussiana

$$Z+Y = \begin{cases} 2Z & \text{se } \varepsilon = 1 \\ 0 & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

In particolare se $Z+Y$ non è né discreta né assolutamente continua

Siano X_i e $\mathbb{N}$, v.a. in L^2 i.i.d con $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = var(X_i)$

Supponiamo $\sigma^2 > 0$, Poniamo $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ media empirica

Per la legge debole dei grandi numeri $\bar{S}_n \to m$ in probabilità per $n \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|\bar{S}_n - m| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Infatti $\to$ $P(|\bar{S}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(\bar{S}_n)}{\varepsilon^2} \overset{i.i.d}{=} \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Nota $\to$ $E[\bar{S}_n - m] = E[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i - m] = 0$

$var(\bar{S}_n - m) = var(\bar{S}_n) \to \frac{var(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

06/07/2021 Sollecitato 2^ rata Pigioni 2021

Poniamo $Z_n = \sqrt{n}\,(\bar{S}_n - m) \rightarrow E[Z_n] = 0$

$var(Z_n) = n \cdot var(\bar{S}_n) = \sigma^2$

$Z = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right) \rightarrow$ Infatti $(P(|\bar{S}_n - m| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Comportamento di Z_n per $n \to \infty$

Convergenza delle funzioni di ripartizione

Poniamo $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right), n \in N$

dove $m = E(X)$

Sia F_Z la f. di ripartizione di $Z_n \rightarrow \forall z \in R \quad F_{Z_n}(z) \xrightarrow{n\to\infty} F(z) \quad N(0, \sigma^2)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$

Analogamente $\rightarrow \bar{Z}_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right) = \frac{1}{\sigma} Z_n \quad (var(\bar{Z}_n) = 1, E(\bar{Z}_n) = 0$

Teorema del limite centrale

Sia $(X_n)_{n \in N}$ in (Ω, F, P) in L^2 una successione di v.a. i.i.d

Poniamo $\rightarrow Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - m \right)$, $n \in N$, dove $m = E(X_i)$

F_Z la f. di ripartizione di Z_n

Perché la distr. gaussiana?

Siano $X_1, \dots X_n$ v.a. i.i.d

$X_i - \mu \rightarrow N(0, \sigma^2)$ per la gaussiana e l'indipendenza $\sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \mu) \sim N(0, n, \sigma^2)$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i - \mu \right) \sim N(0,1)$ ~~con Z~N~~

con $Z \sim N(0, \sigma^2)$