Def.: Una funzione $p : \Omega \to [0,1]$ si dice <u>densità discreta</u> su Ω $\cancel{\Sigma}$ se

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Prop.: Sia $\Omega \neq \emptyset$ al più numerabile. Allora:

Le misure di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ sono in corrispondenza biunivoca con le densità discrete su Ω; la corrispondenza è data da

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad A \subseteq \Omega, \text{ ~~dove~~ dove}$$

$$p(\omega) = P(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega.$$

Nota: Se $|\Omega| < \infty$, allora $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$;

se Ω è numerabile infinito, allora $\mathcal{P}(\Omega)$ più che numerabile.

Esempi:

1) Sia $\Omega \neq \emptyset$ finito, P la distribuzione uniforme discreta. Allora

$$\leadsto \quad p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \omega \in \Omega.$$

è la densità discreta associata a P.

2) Sia P la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$, quindi $\Omega = \mathbb{N}_0$. Allora

$$p(\omega) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\omega}}{\omega!} \qquad \omega \in \mathbb{N}_0.$$

è la densità discreta associata a P.

3) Sia $\Omega = \{0, \dots, n\}$ per un $n \in \mathbb{N}$. Sia $q \in [0,1]$. Definiamo $p : \Omega \to [0,1]$ mediante

$$p(\omega) = \binom{n}{\omega} \cdot q^{\omega} \cdot (1-q)^{n-\omega}, \quad \omega \in \{0, \dots, n\}.$$

Allora p è una densità discreta; infatti, p è la densità discreta della distribuzione binomiale di parametri n e q.

Ancora l'esempio della uniforme discreta:

Sia $\Omega \neq \emptyset$ finito, P la distribuzione uniforme discreta su Ω $\rightsquigarrow$ $p(\omega) \equiv \frac{1}{|\Omega|}$, $\omega \in \Omega$, densità discreta.

Abbiamo
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \cdot |A|$$

$\rightsquigarrow$ calcolare la probabilità di un evento in questo caso si riduce al conteggio di elementi.

Applicazione: Estrazioni di palline da un'urna:

L'esperimento aleatorio: estrazione di n palline da un'urna con N palline di cui M rosse e $N-M$ verdi.

Osservazione di ~~Obiettivo:~~ interesse ~~Esito:~~ numero di palline rosse estratte

Estrazioni secondo due schemi:

a) – con ~~non~~ reinserimento;

b) – senza reinserimento.

Estrazioni secondo lo schema a):

con reinserimento

Modello per l'esperimento:

numerare le palline da 1 a N; prime M corrispondono a palline rosse.

Spazio campionario per n estrazioni con reinserimento:

$$\Omega \doteq \{1,\dots,N\}^n = \{\omega : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,N\}\}$$

Misura di probabilità $P \doteq$ uniforme discreta su Ω.

L'evento $A_K \doteq$ "esattamente K delle n palline estratte sono rosse"

si esprime come

$$A_K \doteq \{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1,\dots,M\}}(\omega_i) = K\} \quad , \; K \in \{0,\dots,n\}$$

$$|A_K| \doteq ?$$

$$P(A_K) = \frac{|A_K|}{|\Omega|}$$

Nota: $|\Omega| = N^n$

Calcolare $|A_K|$:

Gli elementi di A_K sono determinati da

tre scelte successive :

(i) si scelgono le posizioni delle K palline rosse nella successione di lunghezza n ;

(ii) si scelgono le identità delle K palline rosse (cioè numeri tra $1,\ldots,M$, con ripetizione);

(iii) si scelgono le identità delle $n-K$ palline verdi (cioè numeri tra $M+1,\ldots,N$).

Per la prima scelta si hanno $\binom{n}{K}$ alternative (scelta di sottoinsiemi di cardinalità K da un insieme con n elementi).

Per la seconda scelta si hanno M^K alternative.

Per la terza scelta si hanno $(N-M)^{n-K}$ alternative.

principio fondamentale $\rightsquigarrow$ $$|A_K| = \binom{n}{K} \cdot M^K \cdot (N-M)^{n-K}$$

$$\rightsquigarrow \quad P(A_K) = \frac{|A_K|}{|\Omega|} = \binom{n}{K} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^K \cdot \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-K}$$

$\leftarrow$ prop. di verdi

$\uparrow$ proporzione di palline rosse

Osservazione: Poniamo

$$p(k) \doteq P(A_k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k},$$

$$k \in \{0, \ldots, n\}$$

$\rightsquigarrow$ p è una densità discreta su $\{0, \ldots, n\}$, corrisponde alla distribuzione binomiale di parametri n e $\frac{M}{N}$.

Estrazioni secondo schema b): senza reinserimento

$\Omega \doteq \{1, \ldots, N\}^n$ come prima, P come prima uniforme discreta

Poniamo $\tilde{\Omega} \doteq \{\omega \in \Omega : \omega : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, N\}$ è iniettiva$\}$

Definiamo una nuova misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ tramite

$$\tilde{P}(A) \doteq \frac{P(A \cap \tilde{\Omega})}{P(\tilde{\Omega})}, \quad A \subseteq \Omega.$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{P}(A) = \frac{|A \cap \tilde{\Omega}|}{|\tilde{\Omega}|}, \quad A \subseteq \Omega$$

Ci chiediamo:

$$\tilde{P}(A_K) = ?$$

Abbiamo $\tilde{P}(A_K) = \frac{|A_K \cap \tilde{\Omega}|}{|\tilde{\Omega}|}$

Nota: $|\tilde{\Omega}| = \frac{N!}{(N-n)!}$ numero di disposizioni semplici (senza ripetizione) di n elementi estratti da un insieme di N elementi

Nota: $A_K \cap \tilde{\Omega} = \{\omega \in \tilde{\Omega} : \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1,\dots,M\}}(\omega_i) = K\}$.

Gli elementi si possono determinare attraverso tre scelte successive:

(i) posizione delle K palline rosse nella successione di lunghezza n;

(ii) identità delle palline rosse (numeri tra $1,\dots,M$ senza ripetizione);

(iii) identità delle palline verdi (numeri tra $M+1,\dots,N$ senza ripetezione).

Per la prima scelta, $\binom{n}{k}$ alternative come prima.

Per la seconda scelta, $\frac{M!}{(M-k)!}$ alternative

(↗ disposizioni semplici)

Per la terza scelta, $\frac{(N-M)!}{(N-M-(n-k))!}$ alternative

(↗ disposizioni semplici)

$$\leadsto \quad \tilde{P}(A_k) = \frac{(N-n)!}{N!} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{M!}{(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-(n-k))!}$$

$$= \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} .$$

Poniamo $\tilde{p}(k) \doteq \tilde{P}(A_k)$, $k \in \{0, \ldots, n\}$.

$\leadsto$ $\tilde{p}$ è una densità discreta ;

$\tilde{p}$ è la densità discreta della distribuzione ipergeometrica

di parametri N, M, n.