Es. 13 FOGLIO 1

Due palline in un'urna dipinte di nero o dorato indipendenti ~~o dorato indipendenti~~ l'una dall'altra con probab. 1/2 ciascuna

A = "almeno una pallina è dorata"

B = "entrambe le palline dorate"

C = "la prima pallina che esce è dorata"

ⓐ $P(B|A) = ?$

ⓑ $P(B|C) = ?$

Modello: $\Omega \{(N,N), (D,D), (D,N), (N,D)\}$ $P = \text{Unif}(\Omega)$

$\to A = \Omega \setminus \{(N,N)\} = \{(D,D), (D,N), (N,D)\}$

$B = \{(D,D)\}$, $C = \{(D,D), (D,N)\}$

$P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ $P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(B)$

$P(C \cap B) = P(B) = \frac{1}{4}$

ⓐ $P(B|A) = \frac{1}{3}$

ⓑ $P(B|C) = \frac{1}{2}$

ES. 1 FOGLIO 2

Eventi: A = "individuo portatore del virus"

B = "test risulta positivo"

$p_v = P(B|A) = 99\%$

$p_f = P(B|A^c) = 0,5\%$

$P(A) = q = 4 \cdot 10^{-4}$

$\Omega = \{(s,p), (s,n), (v,p), (v,n)\}$

P determinata dai valori sui singoletti (densità discreta)

$\Rightarrow A = \{(v,p), (v,n)\}$ $B = \{(s,p), (v,p)\}$

$A \cap B = \{(v,p)\} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$A^c \cap B = \{(s,p)\}$

$P(A^c \cap B) = P(B|A^c) \cdot (1 - P(A))$

ES. 2 FOGLIO 2

~~M pesce~~ - ~~M~~ carpe marchiate

- n carpe di cui i marchiate

X numero di carpe nel laghetto

$$P(A^{(n)}_{m,i} | X = N) = \frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}} = f(N)$$

$M = 10, n = 20, i = 7 \rightarrow \underset{N \geq n}{\operatorname{argmax}} f(N) = \{28\}$

ES. 3 FOGLIO 2

Stima euristica

$$\frac{i}{n} = \frac{M}{N} \rightarrow N = \frac{M \cdot n}{i}$$

$A^n_0 \ldots A^n_n$ eventi indipendenti su (Ω, P) con $P(A_0^n) = p_0$

$P(A^n_i) = \frac{1}{2}, i \in \{1..n\}$

$$X_0^n(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } w \in A_0^n \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ricorsione:

$$X_i^n(w) = \begin{cases} X_{i-1}^n(w) & \text{se } w \in A_i^n \\ -X_{i-1}^n(w) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$P(C_0^n) = P(A_0^n) = p_0$

Per $i \in \{1 .. n\}$

$P(C_i^n) = P(X_i^n = 1 | X_{i-1}^n = 1) \cdot P(X_{i-1}^n = 1) + P(X_i^n = 1 | X_{i-1}^n = -1) \cdot$
$\cdot P(X_{i-1}^n = -1) \quad = P((A_i^n)^c)$

$C_i^n = \{w \in \Omega : X_i^n(w) = 1\}$

$P(A_i^n \cap \{X_{i-1}^n = 1\}) + P((A_i^n)^c \cap \{X_{i-1}^n = -1\}) \overset{\text{indipendenza}}{=}$

$P(C_i^n) = P(A_i^n) \cdot P(C_{i-1}^n) + (1 - P(A_i^n)) \cdot (1 - P(C_{i-1})^n)$

qui $1/2$

$=$

$P(A_i^n) = \frac{1}{2}$

C_0^n e C_1^n indipendenti

Qui: $P(X_i^n = 1 | X_{i-1}^n = \pm 1) = \frac{1}{2}$

$n=1 \quad P(C_1^1 \cap C_0^1) = P(A_1^1 \cap A_0^1) = P(A_1^1) \cdot P(A_0^1)$

$P(X_i^n = 1 | X_{i-1}^n = \sigma_{i-1}, \dots X_0^n = \sigma_0) = P(A_i^n \cap \{X_{i-1}^n = 1\})$
$+ P((A_i^n)^c \cap \{X_{i-1}^n = -1\})$

FOGLIO 2 ES. 3

$$P_{B..}(N,q)(k) = \begin{cases} \binom{N}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{N-k} & \text{se } k \in \{0 .. N\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_{Bin}(N,q)(k+1) = \frac{N!}{(k+1)!\,(N-k-1)!} \cdot q^{k+1} \cdot (1-q)^{N-k-1}$$

$$= \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \cdot q^k (1-q)^{N-k}$$

$$= \frac{q}{1-q} \cdot \frac{N-k}{k+1} \cdot P_{Bin(N,q)}(k)$$

$$P_{Bin}(N,q)(0) = (1-q)^N$$

ES. 4 <> SOLO UNA PROVA, CALCOLO DELLA SOMMATORIA

~~ES. 7~~

ES 8 Foglio 2 (X1)

$\xi \leftarrow X1$

X, Y, ξ v.a. su (Ω, P) discreto

ξ e (X, Y) indipendenti

X, Y a valori in $\mathbb{Z}$

ξ a valori in $\{0, 1\}$

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1 \\ Y(\omega) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare la densità discreta di Z

Per $z \in \mathbb{Z}$: $P(Z = z) = P(Z = z, \xi = 1) + P(Z = z, \xi = 0)$

formula delle prob. totali

$= P(X = z, \xi = 1) + P(Y = z, \xi = 0) = P(X = z) \cdot P(\xi = 1) +$

$P(Y = z) \cdot (1 - P(\xi = 1)) \Rightarrow q \cdot P_X + (1 - q) P_Y$