

Probabilità e Statistica (Informatica) 2021/22	Nome:
Prova scritta	Cognome:
20 luglio 2022	Matricola:

Esercizio 1. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza della variabile aleatoria reale X :

(i) X tale che

$$\mathbf{P}(X = -3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}(X = 6) = \frac{1}{3}.$$

(ii) $X = U^2$ per una variabile aleatoria U uniforme continua su $(0, 1)$;

(iii) $X = 1 - Y$ per una variabile aleatoria Y esponenziale di parametro due.

Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/2$. Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) - \xi_2(\omega), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y .

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y .

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \dots, X_{1200}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/600$. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{1200} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad N \doteq \min \{n \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(S \leq n) \geq 0.98\}.$$

Sia dia una stima per N in tre modi diversi, usando

- a) la disuguaglianza di Chebyshev;
- b) l'approssimazione di Poisson;
- c) l'approssimazione normale.

Esercizio 4. Si trovino variabili aleatorie non-negative X e Y tali che

$$\mathbf{P}(X \leq Y \leq 4X) = 1, \quad \mathbf{E}[Y] = 2\mathbf{E}[X], \quad \mathbf{E}[Y^2] \neq 4\mathbf{E}[X^2].$$