Valor medio per variabili aleatorie reali generali

Def.: Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Se $X \geq 0$, allora il valor medio (valor atteso) di X è dato da

$$E[X] \doteq \sup\{ E[Y] : Y \text{ v.a. discreta con } 0 \leq Y \leq X \}$$

definito come prima

2) Se $X = X^+ - X^-$ con $X^+ \doteq \max\{0, X\}$, $X^- \doteq \max\{0, -X\}$,

allora si dice che X ammette valor medio se $E[X^+] < \infty$ o $E[X^-] < \infty$.

In questo caso, il valor medio di X è dato da

$$E[X] \doteq E[X^+] - E[X^-]$$

Si dice che X ammette valor medio finito se $E[X^+] < \infty$ e $E[X^-] < \infty$.

Osservazioni:

1) Se $X \geq 0$ P-q.c., allora X ammette valor medio e $E[X]$ esiste in $[0, \infty]$.

2) X ammette valor finito se e solo se $E[|X|] < \infty$.

3) Le v.a. (P-q.c.) limitate ammettono valor medio finito.

! 4) Per $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = E[\mathbb{1}_A]$.

5) Se $X = c$ P-q.c. per una costante $c \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $E[X] = c$.

Teorema (proprietà del valor medio):

Siano $X, Y, X_n, n \in \mathbb{N}$, v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valori in $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

1) Se X, Y sono non-negative, allora:

a) $E[\alpha \cdot X + \beta \cdot Y] = \alpha \cdot E[X] + \beta \cdot E[Y] \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$;

b) se $X \leq Y$, allora $E[X] \leq E[Y]$;

c) se $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di v.a. non-negative tale che $Y_n \overset{n \to \infty}{\nearrow} Y$ P-q.c., allora

$$E[Y_n] \overset{n \to \infty}{\nearrow} E[Y];$$

d) $E[X] = 0$ se e solo se $P(X > 0) = 0$;

e) se $E[X] < \infty$, allora $P(X = \infty) = 0$.

2) Se $\exists\, c \in (0, \infty)$: $|X| \leq c$ P-q.c., allora X ammette valor medio finito.

3) Se X ammette valor medio finito e $X = Y$ P-q.c., allora anche Y ammette valor medio finito e $E[X] = E[Y]$.

4) X ammette valor medio finito se e solo se $E[|X|] < \infty$.

5) Se X, Y ammettono valor medio finito, allora:

a) $E[\alpha \cdot X + \beta \cdot Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) se $X \leq Y$ P-q.c., allora $E[X] \leq E[Y]$;

c) $|E[X]| \leq E[|X|]$.

6) Se $X_n \overset{n\to\infty}{\nearrow} X$ P-q.c. e X_{n_0} ammette valor medio finito per un $n_0 \in \mathbb{N}$, allora X ammette valor medio e $E[X_n] \overset{n\to\infty}{\nearrow} E[X]$ conv. in $(-\infty, \infty]$.

Dim. dalle proprietà dell'integrale. //

Def.: Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, e sia $p > 0$. L'insieme

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \doteq \{ X : \Omega \to \mathbb{R} : X \ \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-misurabile e tale che } E[|X|^p] < \infty \}$$

si dice spazio delle v.a. aventi <u>momento assoluto p-esimo finito</u> o, più brevemente, <u>spazio L^p</u>.

Osservazioni:

1) Casi più importanti: $\mathcal{L}^p$ con $p \in \{1,2\}$.

2) Una v.a. reale X ammette valor medio finito se e solo se $X \in \mathcal{L}^1$.

3) Se $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, allora $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

In particolare, $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

In generale, "$\subsetneq$" ; uguaglianza se $|\Omega| < \infty$.

Per v.a. in $\mathcal{L}^2$ si possono definire varianza e covarianza:

Def. Sia $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si dice varianza di X la quantità

$$\text{var}(X) \doteq E[(X - E[X])^2].$$

La quantità $\sqrt{\text{var}(X)}$ si dice deviazione standard di X.

Def.: Siano $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si dice covarianza di X e Y la quantità

$$\text{cov}(X,Y) \doteq E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])].$$

Osservazioni :

1) Per $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si ha $var(X) \in [0,\infty)$.

La varianza si può anche definire per $X \in L^1$; in questo caso, $var(X) \in [0,\infty]$.

2) Per $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si ha $cov(X,Y) \in \mathbb{R}$.

3) La varianza di X dipende solo dalla legge di X:

$$var(X) = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \int_{\mathbb{R}} y \, P_X(dy)\right)^2 P_X(dx).$$

! La covarianza di X e Y dipende invece dalla legge congiunta di X e Y:

$$cov(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(x - \int_{\mathbb{R}} z \, P_X(dz)\right) \cdot \left(y - \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \, P_Y(d\tilde{z})\right) P_{(X,Y)}(dx,dy).$$

Proprietà di varianza e covarianza:

Siano $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) $\quad var(X) = cov(X, X)$.

2) $\quad cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$;

in particolare $\quad var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

3) $\quad cov(\cdot,\cdot)$ è un operatore $L^2(\Omega,\mathcal{F},P) \times L^2(\Omega,\mathcal{F},P) \to \mathbb{R}$
è un operatore bilineare simmetrico :

- $cov(X, Y) = cov(Y, X)$;
- $cov(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha \, cov(X,Y) + \beta \, cov(X,Z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

in particolare $\quad var(\alpha \cdot X) = \alpha^2 \cdot var(X)$.

4) $\quad var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + 2 \sum_{\underline{i<j}} cov(X_i, X_j)$.

! 5) $\quad$ Se $var(X) = 0$, allora $X = E[X]$ P-q.c.,
quindi $P_X = \delta_{E[X]}$.

Se $cov(X,Y) = 0$, allora X, Y si dicono <u>incorrelate</u>.

Prop.: (valor atteso e v.a. indipendenti)

Siano X, Y v.a. reali su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Se X, Y sono non-negative e indipendenti, allora

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$ valori in $[0,\infty]$

2) Se X, Y sono in L^1 e indipendenti, allora

$X \cdot Y$ in L^1 e $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$
valori in $\mathbb{R}$

Idea della dim.:
2) dalla 1)

1) seguendo i passi nella def. dell'integrale:

a) $X = \mathbb{1}_A$, $Y = \mathbb{1}_B$ per eventi $A, B \in \mathcal{F}$ indipendenti.

$$\rightsquigarrow E[X \cdot Y] = E[\mathbb{1}_{A \cap B}] = P(A \cap B)$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} P(A) \cdot P(B) = E[\mathbb{1}_A] \cdot E[\mathbb{1}_B] = E[X] \cdot E[Y].$$

b) Linearità del valor medio + a) implicano l'affermazione per v.a. semplici non-negative.

c) Convergenza monotona + b) implicano l'affermazione per v.a. non-negative.

//

Applicazione a varianza e covarianza:

1) Se $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sono <u>indipendenti</u>, allora

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E[(X-E[X])\cdot(Y-E[Y])] \\ &\overset{\text{indip.}}{=} E[X-E[X]]\cdot E[Y-E[Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) Se $X_1, \dots, X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sono <u>indipendenti</u>, allora

$$var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n var(X_i).$$

Attenzione: X, Y indipendenti (e in L^1) implica X, Y incorrelate.

! In generale, <u>non</u> vale l'implicazione inversa.

(Contro-)Esempio:

Sia Z una v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valori in $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ con $P_Z = Unif(\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\})$.

Poniamo $X \doteq \cos(Z)$, $Y \doteq \sin(Z)$.

$\rightsquigarrow$ $cov(X,Y) = 0$, ma X, Y <u>non</u> indipendenti

(ad esempio, $P(X=1, Y=1) = 0$, mentre $P(X=1)>0$, $P(Y=1)>0$)

Teorema (disuguaglianza di Markov-Chebyshev):

Sia X v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Se $X \geq 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$

Markov
$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}.$$

2) Sia $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione crescente con $f(x) > 0$ per $x > 0$.
Se $X \geq 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$,

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\varepsilon)}.$$

3) Se $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dim.: 3) segue da 2) con $f(x) = x^2$.

2) e 1) sono equivalenti:

$$\{X \geq \varepsilon\} = \{f(X) \geq f(\varepsilon)\}$$ poiché f crescente

1): Sia $\varepsilon > 0$. $P(X \geq \varepsilon) = E[\mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}(X)]$

$$\leq E\left[\frac{X}{\varepsilon}\right] = \frac{E[X]}{\varepsilon}.$$

//

Osservazione:

La disuguaglianza di Chebyshev (parte 3) del Teorema) dà un significato alla deviazione standard:

Sia $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Poniamo $\sigma^2 \doteq var(X)$

$\rightsquigarrow$ σ deviazione standard.

Supponiamo $\sigma^2 > 0$. Allora per la disuguaglianza di Chebyshev con $\varepsilon = c \cdot \sigma$, dove $c > 0$:

$$P(|X - E[X]| \geq c \cdot \sigma) \leq \frac{var(X)}{c^2 \cdot \sigma^2} = \frac{1}{c^2}.$$

In particolare,

deviazioni dal valor medio $\leq \sigma$ sono "da aspettarsi";

deviazioni più grandi di $5 \cdot \sigma$ hanno probabilità $\leq 4\%$.