Variabili aleatorie esponenziali

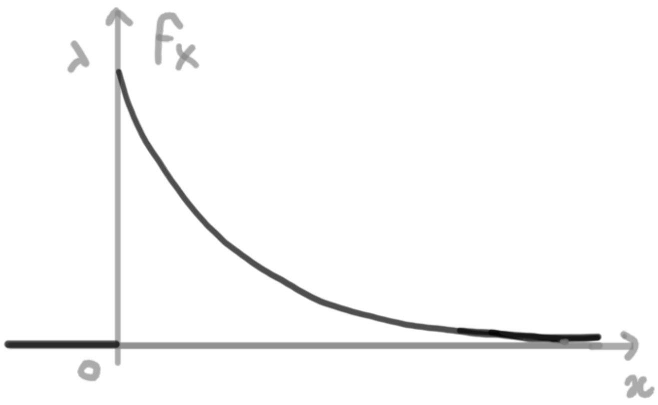
$X \sim Exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$ se ha densità

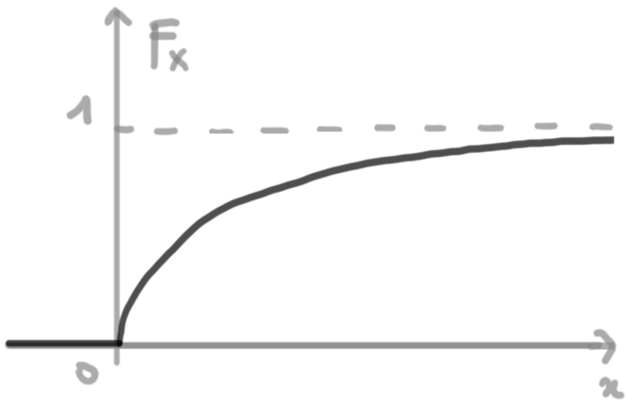
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

oppure, equivalentemente, ha funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ e $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.





Calcoliamo

<u>Funzione di distribuzione</u>: se $t \in \mathbb{R}$, la funz. di distr. di X è data da

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

- se $t < 0$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot dx = 0$$

- se $t \geq 0$, allora

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

Osserviamo che $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = \lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-\lambda t} = 1$,

come deve essere.

<u>valor medio</u>:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\,dx$$

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} x\, e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\xrightarrow[\text{per parti}]{\text{integrando}} = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \dots = \frac{1}{\lambda}$$

<u>varianza</u>: poiché abbiamo

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) \, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} \, dx$$

$= \dots$ integrando due volte consecutive per parti

$$= \frac{2}{\lambda^2},$$

si ottiene $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Variabile aleatoria esponenziale come tempo di primo arrivo/attesa

Sia N_1 la v.al. che modella il nr. di richieste di servizio ad un server per unità di tempo.
È naturale modellare N_1 con una v.al. di Poisson.
Sia dunque $N_1 \sim Po(\lambda)$, dove λ rappresenta il nr. medio di richieste nell'unità di tempo.

Il nr. di richieste in t unità di tempo diventa quindi $N_t \sim Po(\lambda t)$.

Sia W la v.al. che rappresenta il tempo di attesa fino all'arrivo della prima richiesta di servizio. Si ha

$$P(W > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$
$$\Updownarrow$$
$$P(W \leq t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

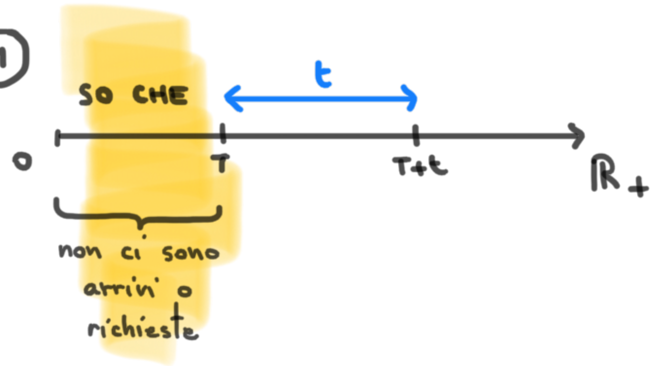
da cui segue $W \sim Exp(\lambda)$.

Proprietà di assenza di memoria

Se $X \sim Exp(\lambda)$, allora $P(X > T+t \mid X > T) = P(X > t)$.

Cosa significa?

$$P(X > T+t \mid X > T) = P(X > t)$$

① 

② MI CHIEDO, sapendo 1, qual è la prob. di dover attendere un extra tempo t prima di osservare un arrivo/richiesta

③ **RISPOSTA**: sapere di aver già aspettato T non mi dà alcuna info. La prob. è la stessa di dover aspettare un tempo t a partire da 0.

Ricaviamoci la proprietà. Si ha

$$P(X > T+t \mid X > T) = \frac{P(\{X > T+t\} \cap \{X > T\})}{P(X > T)}$$

$$= \frac{P(X > T+t)}{P(X > T)}$$

$$= \frac{1 - F_X(T+t)}{1 - F_X(T)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - F_X(t)$$

$$= P(X > t).$$

ESERCIZI

1. Supponiamo che la lunghezza di una telefonata in minuti sia una v.al. esponenziale di parametro $\lambda = 1/10$. Se qualcuno arriva immediatamente prima di voi alla cabina telefonica, determinare la probabilità di dover aspettare

   (a) più di 10 minuti;

   (b) tra 10 e 20 minuti.

<u>Soluzione</u>. Sia X la lunghezza della telefonata della persona che ci precede alla cabina telefonica. Si ha $X \sim Exp(1/10)$, quindi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 - e^{-x/10} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcoliamo

(a) $P(X > 10) = 1 - F_X(10) = e^{-1} \approx 0.368$.

(b) $P(10 < X < 20) = F_X(20) - F_X(10) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233$.

2. Si supponga che il numero di chilometri che un'auto può percorrere prima che la batteria ceda sia una v.al. esponenziale il cui valor medio è pari a 10 000 Km. Se una persona desidera fare un viaggio di 5000 Km, qual è la probabilità che effettui il viaggio senza dover sostituire la batteria dell'auto?

<u>Soluzione</u>. Sia X la durata della batteria dell'auto (in migliaia di Km). Poiché $E(X) = 10$, otteniamo $X \sim Exp(1/10)$ e quindi si ha

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 - e^{-x/10} & \text{se } x \geq 0 . \end{cases}$$

Denotiamo con T il nr. di km di anzianità della batteria. Vogliamo calcolare

$$P(X > T+5 \mid X > T) \underset{\text{assenza di memoria}}{\overset{!}{=}} P(X > 5) = 1 - F_X(5) = e^{-1/2} \approx 0.604$$

Osserviamo che se X non fosse stata una v. al. esponenziale, ci sarebbe servita un'informazione aggiuntiva per riuscire a calcolare la probabilità richiesta: il valore numerico di T.