

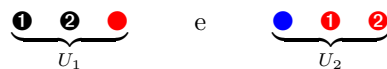
Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica  
A.A. 2019/2020

---

## ESERCITAZIONE 1

**E1.1.** Un'urna contiene due palline nere e una rossa. Una seconda urna ne contiene una blu e due rosse. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Descrivere uno spazio campionario per questo esperimento e calcolarne la cardinalità.

*Soluzione.* Se consideriamo le palline *distinguibili* (per esempio, oltre ad essere colorate sono anche numerate), allora le urne hanno composizione

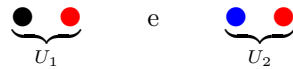


(con ovvio significato dei simboli). Uno spazio campionario è dato dall'insieme delle coppie in cui le coordinate rappresentano nell'ordine la pallina estratta dalla prima urna e quella estratta dalla seconda, cioè

$$\Omega = \{(x, y) : x \in \{\bullet, \bullet, \bullet\} \text{ e } y \in \{\bullet, \bullet, \bullet\}\}.$$

Inoltre  $\Omega$  ha cardinalità  $|\Omega| = 3 \cdot 3 = 9$ .

Un'altra possibilità è quella di considerare palline *indistinguibili*. In questo caso le urne hanno composizione



e si ottiene

$$\Omega = \{(x, y) : x \in \{\bullet, \bullet\} \text{ e } y \in \{\bullet, \bullet\}\}.$$

con cardinalità  $|\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$ .



*Morale dell'esercizio 1.1: la scelta dello spazio campionario relativo ad un esperimento aleatorio può non essere unica!! Per non incorrere in errori nel calcolo delle probabilità di eventi, è importante mantenere la scelta adottata per la descrizione dello spazio campionario quando si vanno poi a contare gli esiti favorevoli ad un evento.*



**E1.2.** Lanciamo un dado a sei facce e due monete. Descrivere uno spazio campionario per questo esperimento e calcolarne la cardinalità.

*Soluzione.* Un possibile spazio campionario è

$$\Omega = \{(x, y, z) : x \in \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\} \text{ e } y, z \in \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}\}$$

(con ovvio significato dei simboli) ed ha cardinalità  $|\Omega| = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ .


**E1.3.** Una busta contiene 3 carte: due carte hanno entrambe le facce rosse mentre una carta ha una faccia rossa e una faccia nera. Peschiamo una carta a caso e la appoggiamo sul tavolo. Descrivere uno spazio campionario per questo esperimento e calcolarne la cardinalità.

*Soluzione.* Supponiamo di considerare sia le carte che le facce tra loro *indistinguibili*. Allora otteniamo  $\Omega = \{\blacksquare, \blacktriangle\}$  e  $|\Omega| = 2$ .

**E1.4.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità e siano  $A, B, C \in \mathcal{F}$  eventi. Esprimere in termini di operazioni insiemistiche su  $A, B$  e  $C$  i seguenti eventi: (a) tutti gli eventi si verificano; (b) nessun evento si verifica; (c) si verifica esattamente un evento; (d) due eventi su tre si verificano; (e) almeno un evento si verifica; (f) al più un evento si verifica; (g) o si verifica  $A$ , oppure, se non si verifica  $A$ , neppure  $B$  si verifica.

*Soluzione.* (a)  $A \cap B \cap C$ ; (b)  $A^c \cap B^c \cap C^c$ ; (c)  $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$ ; (d)  $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$ ; (e)  $A \cup B \cup C$ ; (f)  $(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$ ; (g)  $A \cup (A^c \cap B^c)$ .

**E1.5.** Si considerino gli eventi  $A$  = “nessuno studente ha superato l’esame” e  $B$  = “nessuno studente extra-terrestre ha superato l’esame”. A cosa corrisponde l’evento  $A^c \cap B$ ?

*Soluzione.* L’evento  $A^c \cap B$  corrisponde a “nessuno studente extra-terrestre  ha superato l’esame, ma almeno uno studente terrestre sì”.

**E1.6.** Sia  $\Omega$  l’insieme delle possibili scelte di tre carte da un mazzo di 52. Si considerino gli eventi  $A$  = “le prime due carte sono di cuori” e  $B$  = “la seconda e la terza carta non sono dello stesso seme”. A cosa corrisponde l’evento  $A \cap B^c$ ?

*Soluzione.* L’evento  $A \cap B^c$  corrisponde a “le tre carte sono di cuori”.

**E1.7.** L’amministratore di un ospedale americano classifica i pazienti ricoverati per una ferita da arma da fuoco nel seguente modo: se hanno un’assicurazione li contraddistingue con 1, e in caso contrario con 0; inoltre, in accordo con lo stato di salute al momento del ricovero, li classifica con  $b$  (buono),  $m$  (medio) oppure  $s$  (serio). Si consideri l’esperimento che consiste nel classificare questi pazienti.

- (a) Si descriva un opportuno spazio campionario.
- (b) Sia  $A$  l’evento che il paziente è in condizioni serie. Si descrivano gli esiti di  $A$ .
- (c) Sia  $B$  l’evento che il paziente non sia assicurato. Si descrivano gli esiti di  $B$ .
- (d) Si descrivano tutti gli esiti in  $B^c \cup A$ .

*Soluzione.* (a) Uno spazio campionario è dato da  $\Omega = \{(x, y) : x \in \{0, 1\} \text{ e } y \in \{b, m, s\}\}$ . (b,c) Abbiamo  $A = \{(x, s) : x \in \{0, 1\}\}$  e  $B = \{(0, y) : y \in \{b, m, s\}\}$ . (d) Poiché  $B^c = \{(1, y) : y \in \{b, m, s\}\}$ , considerato l’evento  $A$  ottenuto nel punto (b), abbiamo

$$B^c \cup A = \{(0, s), (1, b), (1, m), (1, s)\}.$$

**E1.8.** Siano  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità e  $A, B, C \in \mathcal{F}$  eventi. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze: (a)  $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$ ; (b)  $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

*Soluzione.*

- (a) Per le leggi di De Morgan si ha  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$  (vedi pag. 9 del libro di testo). Quindi, applicando la formula per la probabilità del complementare, possiamo concludere

$$P(A^c \cup B^c) = P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B).$$

- (b) Osserviamo che per la differenza di eventi vale la rappresentazione  $A \setminus B = A \cap B^c$  (ripassare la definizione a pag. 8 del libro di testo e convincersene con un disegno). Di conseguenza vale l'identità  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$  e, in particolare, gli eventi  $A \setminus B$  e  $A \cap B$  sono disgiunti. Pertanto otteniamo

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$

da cui si ricava quanto voluto.

**E1.9.** Siano  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità e  $A, B \in \mathcal{F}$  eventi. Sapendo che  $P(A \cup B) = 3/4$ ,  $P(A^c) = 2/3$  e  $P(A \cap B) = 1/4$ , determinare:  $P(A)$ ,  $P(B)$  e  $P(A \cap B^c)$ .

*Soluzione.*

- Poiché  $A = (A^c)^c$ , per la formula della probabilità del complementare otteniamo

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

- Dalla proprietà di inclusione/esclusione ricaviamo

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- Osserviamo che  $A \cap B^c = A \setminus B$ . Quindi, usando il punto (b) dell'esercizio precedente e quanto calcolato sopra, otteniamo

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

**E1.10.** In una moneta truccata la probabilità di ottenere testa è  $\frac{2}{3}$  della probabilità di ottenere croce. Calcolare la probabilità di ciascuna faccia.

*Soluzione.* Sia  $\Omega = \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}$  lo spazio campionario relativo al lancio della moneta. Se poniamo  $P(\mathsf{C}) = x$ , allora  $P(\mathsf{T}) = \frac{2}{3}x$ . Quindi si ha

$$1 = P(\Omega) = P(\mathsf{T} \cup \mathsf{C}) \stackrel{(\mathsf{T} \text{ e } \mathsf{C} \text{ disgiunti!})}{=} P(\mathsf{T}) + P(\mathsf{C}) = \frac{2}{3}x + x = \frac{5}{3}x,$$

da cui otteniamo  $P(\mathsf{C}) = \frac{3}{5}$  a  $P(\mathsf{T}) = \frac{2}{5}$ .