SCELTA DELLA MISURA DI PROBABILITÀ $\mathbb{P}$

SCELTA DI $\mathbb{P}$ NEL CASO DI Ω DISCRETO

Consideriamo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con Ω discreto e $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$. Come assegnare $\mathbb{P}$ su $\mathcal{F}$?

Se $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ è discreto allora ogni evento $E \subseteq \Omega$ (o $E \in \mathcal{F}$) può essere scritto come unione numerabile (o finita) di elementi di Ω, cioè

$$E = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}, \dots\} = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \{\omega_{i_3}\} \cup \dots$$

(unione disgiunta di singoletti).

Se $\mathbb{P}$ fosse la prob. a cui siamo interessati, allora avremmo che

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \mathbb{P}(\{\omega_{i_2}\}) + \mathbb{P}(\{\omega_{i_3}\}) + \dots$$

Se leggiamo la cosa dal punto di vista opposto, abbiamo: è sufficiente assegnare

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i \quad , \text{ con } i = 1, 2, \dots ,$$

(cioè assegno una probabilità ad ogni elemento di Ω)

tali che

- $p_i \in [0, 1]$ (positività)
- $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$ (normalizzazione)

per assegnare una misura di probabilità P su $\mathcal{F}$.

MORALE: in uno sp. di prob. discreto la misura di prob. è completamente caratterizzata dai valori che assume sui singoletti.

<u>Esempio</u>

Consideriamo $\Omega = \mathbb{N}$ e definiamo $P(\{i\}) = 1/2^i$, per ogni $i \in \mathbb{N}$. Questa è una mis. di probabilità. Infatti valgono gli assiomi:

- $0 < 1/2^i \leq 1$
- $\underbrace{\sum_{i \geq 1} 1/2^i}_{\text{serie geom. senza termine per } i=0} = -1 + \sum_{i \geq 0} 1/2^i = -1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$

Parentesi sulla serie geometrica: $\sum_{k \geq 0} x^k$

Carattere della serie: convergente se $0 < x < 1$;
divergente se $x \geq 1$.

Se converge, si ha $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Possiamo usare questa misura di prob. per calcolare la prob. dell'insieme dei multipli di 3. Si ha

$$P(\{3, 6, 9, \dots\}) = P(\{3 \cdot i, \text{ con } i \in \mathbb{N}\})$$

$$= \sum_{i \geq 1} 1/2^{3i} = \underbrace{\sum_{i \geq 1} 1/8^i}_{\text{serie geom. senza termine per } i=0}$$

$$= -1 + \frac{1}{1 - 1/8} = 1/7.$$

SCELTA DI P NEL CASO Ω FINITO

Se $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ ha card. finita N, possiamo scegliere la mis. di prob. uniforme, che assegna a tutti gli esiti la stessa prob., ovvero

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}$$

(tutti gli esiti sono equiprobabili).

Allora, per ogni evento $E \in \mathcal{F}$, si ha

$$P(E) = \sum_{\omega_i \in E} P(\{\omega_i\}) = |E| \cdot \frac{1}{N} = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

$$\text{“} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} \text{”}$$

Esempio

Consideriamo un mazzo di carte da Poker (52 carte) e peschiamo una carta.
La probabilità di estrarre una regina è $4/52$; la probabilità di estrarre una carta di cuori è $13/52$ e la probabilità di estrarre la regina di cuori è $1/52$.

Qual è la probabilità di pescare il Bianconiglio? :)

ESERCIZIO

Lanciamo due dadi equilibrati. Qual è la probabilità che la somma dei punteggi sia 8? Quella che escano due punteggi uguali? E di ottenere 8 con due dadi con lo stesso punteggio?

<u>Soluzione.</u> Lo spazio campionario è $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$ (insieme delle coppie dei punteggi ottenuti sui due dadi).
Si ha $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

- Consideriamo l'evento

$$E = \text{"la somma dei punteggi è 8"} = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

Si ha $P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{36}$.

- Consideriamo l'evento

$$F = \text{"otteniamo due punteggi uguali"} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

Si ha $P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{6}{36}$.

- Consideriamo l'evento $G = E \cap F = \{(4,4)\}$.
  Si ha $P(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$.

Punto chiave: contare gli elementi di un insieme!

COMBINATORIA ELEMENTARE

PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CONTEGGIO. Sia E un insieme. Supponiamo che ogni elemento di E si possa determinare univocamente mediante k scelte successive tali che

la prima scelta ha n_1 esiti possibili
la seconda " " n_2 " "
⋮
la k-esima " " n_k " "

Allora $|E| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Esempio

Contiamo le carte in un mazzo da Poker usando il PFC. Ogni carta del mazzo è individuata da un seme (C, Q, F, P) e da un valore (A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K).

1. Scelgo il seme: ho 4 esiti possibili

2. Scelgo il valore: ho 13 esiti possibili

Quindi otteniamo che il nr. di carte nel mazzo è $4 \cdot 13 = 52$.

Oss. Cosa vuol dire "determinare univocamente"? Vuol dire che sequenze distinte di scelte individuano elementi diversi di E.
È importante! Se non viene soddisfatta il PFC non vale.

Esempio

Si deve formare un comitato di 2 persone da scegliersi dal gruppo $\{U, D_1, D_2\}$.
Ovviamente i possibili comitati sono 3: $\{U, D_1\}$, $\{U, D_2\}$, $\{D_1, D_2\}$.

Ora ragioniamo come segue. Scegliere un comitato equivale a fare le scelte:

1. Scelgo una delle 2 donne: ho 2 esiti possibili

2. Scelgo la seconda persona del comitato tra le 2 persone rimanenti: ho 2 esiti possibili.

Applico PFC ottengo nr. comitati $= 2 \cdot 2 = 4$.
Ma i comitati possono in realtà essere solo 3...

Dove sta l'errore? Nel fatto che ci sono 2 distinte sequenze di scelte che mi danno come risultato il comitato $\{D_1, D_2\}$.
