Probabilità e Statistica – Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2020/2021

ESERCITAZIONE 8

E8.1 (video). Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con densità congiunta p_{XY} illustrata dalla tabella

$\boldsymbol{p_{XY}}$		$Y=0$	$Y=1$
X	0	$\frac{1}{4}-\epsilon$	$\frac{1}{4}+\epsilon$
	1	$\frac{1}{4}+\epsilon$	$\frac{1}{4}-\epsilon$

con ϵ costante arbitraria, compresa tra $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$. Per quale valore di ϵ le variabili X e Y risultano indipendenti?

Soluzione. Le variabili aleatorie X e Y hanno alfabeto $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0,1\}$ e densità marginali date da $p_X(0) = p_X(1) = \frac{1}{2}$ e $p_Y(0) = p_Y(1) = \frac{1}{2}$. Ora, X e Y sono indipendenti se e solo se, per ogni $h,k \in \{0,1\}$, vale $p_{XY}(h,k) = p_X(h)p_Y(k)$. In particolare, se prendiamo $h = k = 0$, dovremmo avere

$$\frac{1}{4} - \epsilon = p_{XY}(0,0) = p_X(0)p_Y(0) = \frac{1}{4},$$

che è soddisfatta se $\epsilon = 0$. È facile verificare che, se $\epsilon = 0$, allora valgono anche le uguaglianze $p_{XY}(0,1) = p_X(0)p_Y(1)$, $p_{XY}(1,0) = p_X(1)p_Y(0)$ e $p_{XY}(1,1) = p_X(1)p_Y(1)$. Pertanto, le variabili X e Y sono indipendenti se $\epsilon = 0$.

E8.2. Dire se i vettori aleatori (X,Y) degli esercizi 7.3 e 7.6 sono coppie di variabili indipendenti.

Soluzione.

- Vettore aleatorio (X,Y) dell'esercizio 7.3. Poiché si ha

  $$p_{XY}(0,1) = \frac{1}{56} \quad \neq \quad \frac{1}{112} = p_X(0)p_Y(1),$$

  le variabili X e Y non possono essere indipendenti.

- Vettore aleatorio (X,Y) dell'esercizio 7.6. In quanto correlate (cioè $C\text{ov}(X,Y) \neq 0$), le variabili aleatorie X e Y non possono essere indipendenti.

E8.3 (difficile; video). Si lancia 5 volte un dado a sei facce. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui esce il punteggio 4.

(a) Determinare alfabeto e densità discreta di X.

(b) Calcolare il valor medio e la varianza di X.

Consideriamo $Y \sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{6}\right)$ *indipendente* da X e definiamo la variabile aleatoria $Z = X + Y$.

(c) Determinare la probabilità dell'evento $\{Z = 2\}$.

(d) Calcolare il valor medio di Z, la covarianza fra X e Z e la varianza di $Y+Z$.

Soluzione.

(a) La variabile aleatoria X ha alfabeto $\mathcal{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$ e distribuzione $\text{Bin}\left(5, \frac{1}{6}\right)$. Infatti, possiamo scrivere $X = \sum_{i=1}^{5} X_i$, dove le variabili aleatorie

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce il punteggio 4} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

sono indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $\text{Be}\left(\frac{1}{6}\right)$.

(b) Usando quanto sappiamo sui parametri riassuntivi delle variabili aleatorie binomiali, otteniamo $E(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ e $Var(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

(c) L'evento $\{Z = 2\}$ si verifica, se uno dei seguenti eventi (che sono tra loro disgiunti) si verifica: $\{X = 0, Y = 2\}$, $\{X = 1, Y = 1\}$ oppure $\{X = 2, Y = 0\}$. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} P(Z = 2) &= p_{XY}(0,2) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,0) \\ &= p_X(2)p_Y(0) + p_X(1)p_Y(1) + p_X(0)p_Y(2) && \text{(poiché le variabili aleatorie } X \text{ e } Y \text{ sono indipendenti)} \\ &= \left[\binom{5}{2} + \binom{5}{1}\binom{2}{1} + 1\right]\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 && \text{(usando il fatto che } X \sim \text{Bin}\left(5, \tfrac{1}{6}\right), Y \sim \text{Bin}\left(2, \tfrac{1}{6}\right) \text{ e un po' di algebra)} \\ &= 21\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5. \end{aligned}$$

(d) Sfruttando la linearità del valor medio e il fatto che $X \sim \text{Bin}\left(5, \frac{1}{6}\right)$ e $Y \sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{6}\right)$, otteniamo

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 5 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

Passiamo ora al calcolo della covarianza. Si ha

$$\begin{aligned} Cov(X,Z) &= E(XZ) - E(X)E(Z) \\ &= E[X(X+Y)] - E(X)E(X+Y) \\ &= E(X^2) + E(XY) - E(X)^2 - E(X)E(Y) && \text{(per la linearità del valor medio)} \\ &= E(X^2) + E(X)E(Y) - E(X)^2 - E(X)E(Y) && \text{(poiché } X \text{ e } Y \text{ sono indipendenti)} \\ &= Var(X) \\ &= \frac{25}{36}. && \text{(usando quanto calcolato in b)} \end{aligned}$$

Per finire, abbiamo

$$
\begin{aligned}
Var(Y+Z) &= Var(X+2Y) \\
&= Var(X) + Var(2Y) + 2Cov(X,2Y) \\
&= Var(X) + Var(2Y) && \text{(poiché } Cov(X,2Y)=0\text{, dal momento che } X \text{ e } Y \text{ sono indipendenti)} \\
&= Var(X) + 4Var(Y) && \text{(per le proprietà della varianza)} \\
&= \frac{25}{36} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} && \text{(usando quanto calcolato in b e il fatto che } Y \sim \text{Bin}\left(2, \tfrac{1}{6}\right)\text{)} \\
&= \frac{65}{36}.
\end{aligned}
$$

E8.4. Un dado a sei facce viene lanciato due volte. Siano X e Y i punteggi ottenuti nei due lanci. Definiamo le variabili aleatorie $Z := XY$ e $W := X - Y$.

(a) Calcolare le densità discrete di Z e di W.

(b) Dire se Z e W sono indipendenti.

Soluzione. Si noti che le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti e quindi, per ogni $x, y \in \{1, 2, \dots, 6\}$, si ha

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Tenendo questo in mente, caratterizziamo le variabili Z e W.

(a) La variabile aleatoria Z ha alfabeto $\mathcal{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$, cioè l'insieme di tutti i valori che possiamo ottenere come prodotti xy con $x, y \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Determiniamo la densità discreta di Z. Otteniamo

$$
\begin{aligned}
&p_Z(1) = p_{XY}(1,1) = \tfrac{1}{36} \\
&p_Z(2) = p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,1) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(3) = p_{XY}(1,3) + p_{XY}(3,1) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(4) = p_{XY}(1,4) + p_{XY}(2,2) + p_{XY}(4,1) = \tfrac{1}{12} \\
&p_Z(5) = p_{XY}(1,5) + p_{XY}(5,1) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(6) = p_{XY}(1,6) + p_{XY}(2,3) + p_{XY}(3,2) + p_{XY}(6,1) = \tfrac{1}{9} \\
&p_Z(8) = p_{XY}(2,4) + p_{XY}(4,2) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(9) = p_{XY}(3,3) = \tfrac{1}{36} \\
&p_Z(10) = p_{XY}(2,5) + p_{XY}(5,2) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(12) = p_{XY}(2,6) + p_{XY}(3,4) + p_{XY}(4,3) + p_{XY}(6,2) = \tfrac{1}{9} \\
&p_Z(15) = p_{XY}(3,5) + p_{XY}(5,3) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(16) = p_{XY}(4,4) = \tfrac{1}{36} \\
&p_Z(18) = p_{XY}(3,6) + p_{XY}(6,3) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(20) = p_{XY}(4,5) + p_{XY}(5,4) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(24) = p_{XY}(4,6) + p_{XY}(6,4) = \tfrac{1}{18} \\
&p_Z(25) = p_{XY}(5,5) = \tfrac{1}{36}
\end{aligned}
$$

$$p_Z(30) = p_{XY}(5,6) + p_{XY}(6,5) = \frac{1}{18}$$
$$p_Z(36) = p_{XY}(6,6) = \frac{1}{36}$$

La variabile aleatoria W ha alfabeto $\mathcal{W} = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, cioè l'insieme di tutti i valori che possiamo ottenere come differenze $x - y$ con $x, y \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Determiniamo la densità discreta di W. Otteniamo

$$\begin{aligned}
&p_W(-5) = p_{XY}(1,6) = \tfrac{1}{36}\\
&p_W(-4) = p_{XY}(1,5) + p_{XY}(2,6) = \tfrac{1}{18}\\
&p_W(-3) = p_{XY}(1,4) + p_{XY}(2,5) + p_{XY}(3,6) = \tfrac{1}{12}\\
&p_W(-2) = p_{XY}(1,3) + p_{XY}(2,4) + p_{XY}(3,5) + p_{XY}(4,6) = \tfrac{1}{9}\\
&p_W(-1) = p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,3) + p_{XY}(3,4) + p_{XY}(4,5) + p_{XY}(5,6) = \tfrac{5}{36}\\
&p_W(0) = p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,2) + p_{XY}(3,3) + p_{XY}(4,4) + p_{XY}(5,5) + p_{XY}(6,6) = \tfrac{1}{6}\\
&p_W(1) = p_{XY}(2,1) + p_{XY}(3,2) + p_{XY}(4,3) + p_{XY}(5,4) + p_{XY}(6,5) = \tfrac{5}{36}\\
&p_W(2) = p_{XY}(3,1) + p_{XY}(4,2) + p_{XY}(5,3) + p_{XY}(6,4) = \tfrac{1}{9}\\
&p_W(3) = p_{XY}(4,1) + p_{XY}(5,2) + p_{XY}(6,3) = \tfrac{1}{12}\\
&p_W(4) = p_{XY}(5,1) + p_{XY}(6,2) = \tfrac{1}{18}\\
&p_W(5) = p_{XY}(6,1) = \tfrac{1}{36}.
\end{aligned}$$

(b) Le variabili Z e W non sono indipendenti. Consideriamo, ad esempio, $p_{ZW}(36,5)$. Abbiamo

$$p_{ZW}(36,5) = P(Z = 36, W = 5) = P(\{X = Y = 6)\} \cap \{X = 6, Y = 1\}) = P(\varnothing) = 0,$$

ma $p_Z(36)p_W(5) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \neq 0$, da cui segue la dipendenza delle due variabili aleatorie.

E8.5 (⚑ tratto da appello; 🎞 video). Si lanciano 3 monete: ①, ② e ③. Le prime due monete sono equilibrate, mentre la terza è truccata in modo che la probabilità di ottenere testa sia 4 volte quella di ottenere croce.

Siano U il numero di teste ottenute dal lancio delle monete ① e ②; V il numero di teste ottenute dal lancio delle monete ② e ③; e Z l'esito del lancio della moneta ③.

Determinare:

(a) la densità della variabile aleatoria Z;

(b) la densità della variabile aleatoria U;

(c) la densità congiunta del vettore aleatorio (U, Z);

(d) la densità congiunta del vettore aleatorio (U, V) e la densità marginale di V;

(e) la covarianza tra U e V. Le variabili U e V sono indipendenti?

Soluzione.

(a) Indichiamo con 1 (risp. 0) l'esito "testa" (risp. "croce"). La variabile Z è una variabile aleatoria di Bernoulli. Dobbiamo determinarne il parametro. Se poniamo $P(Z = 0) = x$, allora $P(Z = 1) = 4x$. Per la condizione di normalizzazione deve valere $x + 4x = 1$, da cui segue $x = \frac{1}{5}$. Pertanto otteniamo $Z \sim \text{Be}\left(\frac{4}{5}\right)$.

(b) La variabile aleatoria U ha alfabeto $\mathcal{U} = \{0, 1, 2\}$ e densità Bin $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Infatti, abbiamo $U = X_1 + X_2$, dove le variabili aleatorie

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'esito dell'}i\text{-esimo lancio è testa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, 2) \qquad (\bullet)$$

sono indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione Be $\left(\frac{1}{2}\right)$.

(c) Gli esiti dei tre lanci sono indipendenti. Quindi U, che è funzione solamente degli esiti dei lanci delle monete ① e ②, è indipendente da Z. Pertanto, la densità congiunta del vettore aleatorio (U, Z) è il prodotto delle densità marginali di U e Z. Poiché $U \sim$ Bin $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e $Z \sim$ Be $\left(\frac{4}{5}\right)$, otteniamo

$$p_{UZ}(i, j) = p_U(i) p_Z(j) = \begin{cases} \binom{2}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{5} & \text{se } i \in \mathcal{U} \text{ e } j = 0 \\ \binom{2}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} & \text{se } i \in \mathcal{U} \text{ e } j = 1. \end{cases}$$

(d) Il vettore aleatorio (U, V) assume valori in $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, con $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{0, 1, 2\}$. Usando, per chiarezza, le definizioni introdotte in $(\bullet)$, determiniamo la densità congiunta

$$p_{UV}(0,0) = P(X_1 = X_2 = Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$p_{UV}(0,1) = P(X_1 = X_2 = 0, Z = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$p_{UV}(0,2) = P(X_1 = X_2 = 0, X_2 = Z = 1) = 0$$

$$p_{UV}(1,0) = P(X_1 = 1, X_2 = Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$p_{UV}(1,1) = P(X_1 = Z = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = Z = 0, X_2 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$$

$$p_{UV}(1,2) = P(X_1 = 0, X_2 = Z = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$p_{UV}(2,0) = P(X_1 = X_2 = 1, X_2 = Z = 0) = 0$$

$$p_{UV}(2,1) = P(X_1 = X_2 = 1, Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$p_{UV}(2,2) = P(X_1 = X_2 = Z = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Inoltre, la densità marginale di V è data da

$$p_V(0) = p_{UV}(0,0) + p_{UV}(1,0) + p_{UV}(2,0) = \frac{1}{10}$$

$$p_V(1) = p_{UV}(0,1) + p_{UV}(1,1) + p_{UV}(2,1) = \frac{1}{2}$$

$$p_V(2) = p_{UV}(0,2) + p_{UV}(1,2) + p_{UV}(2,2) = \frac{2}{5}.$$

(e) Ricordiamo che $Cov(U,V) = E(UV) - E(U)E(V)$. Poiché $U \sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right)$, si ha $E(U) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Calcoliamo

$$E(UV) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{31}{20}$$

e

$$E(V) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{10}.$$

Quindi $Cov(U,V) = \frac{31}{20} - 1 \cdot \frac{13}{10} = \frac{1}{4}$. In quanto correlate, le variabili U e V non possono essere indipendenti.

E8.6 (⚑ tratto da appello e parzialmente svolto durante la lezione 14). Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con densità congiunta p_{XY} illustrata dalla seguente tabella.

p_{XY}		$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
X	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{48}$
	2	$\frac{3}{16}$	?	$\frac{1}{16}$

(a) Determinare il valore di $p_{XY}(2,2)$.

(b) Calcolare $P(X < Y)$ e $P(X = Y \,|\, Y = 3)$.

(c) Determinare le densità marginali di X e Y.

(d) Calcolare il valor medio e la varianza di X e di Y.

(e) Dire se X e Y sono indipendenti.

(f) Calcolare $Var(X - Y)$.

Soluzione.

(a) Sfruttiamo la proprietà di normalizzazione. Affinché la densità congiunta sia una densità si deve avere $\sum_{j\in\{0,2\}} \sum_{k\in\{1,2,3\}} p_{XY}(j,k) = 1$, cioè

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{3}{16} + p_{XY}(2,2) + \frac{1}{16} = 1,$$

da cui si ricava $p_{XY}(2,2) = \frac{1}{2}$.

(b) Si ha

$$P(X < Y) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) + p_{XY}(0,3) + p_{XY}(2,3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

e, usando la definizione di probabilità condizionata,

$$P(X = Y \,|\, Y = 3) = \frac{P(X = Y, Y = 3)}{P(Y = 3)} = \frac{P(X = Y = 3)}{P(Y = 3)} = 0.$$

(c) Le variabili aleatorie X e Y hanno alfabeto $\mathcal{X} = \{0, 2\}$ e $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$, rispettivamente. Ricaviamo le loro densità discrete. Abbiamo

$$\text{marginale di } X \left[\begin{array}{l} p_X(0) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) + p_{XY}(0,3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{1}{4} \\ \\ p_X(2) = p_{XY}(2,1) + p_{XY}(2,2) + p_{XY}(2,3) = \frac{3}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

e

$$\text{marginale di } Y \left[\begin{array}{l} p_Y(1) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(2,1) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4} \\ \\ p_Y(2) = p_{XY}(0,2) + p_{XY}(2,2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ \\ p_Y(3) = p_{XY}(0,3) + p_{XY}(2,3) = \frac{1}{48} + \frac{1}{16} = \frac{1}{12}. \end{array}\right.$$

(d) Variabile aleatoria X. Calcoliamo

$$E(X) = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad E(X^2) = 2^2 \cdot \frac{3}{4} = 3.$$

Pertanto, si ha $Var(X) = 3 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Variabile aleatoria Y. Calcoliamo

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6} \quad \text{e} \quad E(Y^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{2}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{3}.$$

Pertanto, si ha $Var(Y) = \frac{11}{3} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$.

(e) È facile vedere che si ha $p_{XY}(j,k) = p_X(j)p_Y(k)$ *per ogni $j \in \mathcal{X}$ e $k \in \mathcal{Y}$*. Pertanto, le variabili X e Y sono indipendenti.

(f) Poiché X e Y sono indipendenti, risultano esserlo anche le variabili aleatorie X e $-Y$. Di conseguenza, otteniamo

$$Var(X-Y) \overset{\text{(additività)}}{=} Var(X) + Var(-Y) = Var(X) + (-1)^2 Var(Y) = \frac{3}{4} + \frac{11}{36} = \frac{19}{18}.$$

E8.7 (difficile). Mostrare che, se $X \sim \text{Po}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Po}(\mu)$ sono due variabili aleatorie di Poisson indipendenti, allora si ha $X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$.

Soluzione. La variabile aleatoria $X+Y$ assume valori in $\mathbb{N}_0$. Determiniamo la sua densità discreta. Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, si ha

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{h=0}^{k} P(X+Y=k|Y=h)P(Y=h) && \text{(per la formula delle probabilità totali)} \\
&= \sum_{h=0}^{k} P(X=k-h|Y=h)P(Y=h) && \text{(poiché sappiamo che } Y=h) \\
&= \sum_{h=0}^{k} P(X=k-h)P(Y=h) && \text{(poiché gli eventi } \{X=k-h\} \text{ e } \{Y=h\} \text{ sono indipendenti)} \\
&= \sum_{h=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-h}}{(k-h)!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^h}{h!} && \text{(usando il fatto che } X \sim \text{Po}(\lambda) \text{ e } Y \sim \text{Po}(\mu)) \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \lambda^{k-h}\mu^h && \text{(moltiplicando e dividendo per } k!) \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}, && \text{(usando la formula del binomio di Newton)}
\end{aligned}$$

da cui segue $X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda + \mu)$, come si voleva.

E8.8. Se $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ e $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ sono *indipendenti*, allora $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m, p)$. Perché? Rispondere senza fare alcun conto.

Soluzione. Osserviamo che $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ con $(X_i)_{i=1}^{n}$ variabili aleatorie $\mathrm{Be}(p)$ indipendenti e, analogamente, $Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i$ con $(Y_i)_{i=1}^{n}$ variabili aleatorie $\mathrm{Be}(p)$ indipendenti. Inoltre, poiché X e Y sono indipendenti, anche la famiglia $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\}$ risulta indipendente. Pertanto, $X + Y = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i$, cioè $X + Y$ è la somma di $n + m$ variabili $\mathrm{Be}(p)$ indipendenti, e di conseguenza $X + Y \sim \mathrm{Bin}(n + m, p)$.

E8.9. In virtù di quanto enunciato nell'esercizio precedente, verificare la risposta data alla domanda (c) dell'esercizio 8.3.

Soluzione. Poiché $X \sim \mathrm{Bin}\left(5, \frac{1}{6}\right)$ e $Y \sim \mathrm{Bin}\left(2, \frac{1}{6}\right)$ sono variabili aleatorie binomiali indipendenti, si ha $Z = X + Y \sim \mathrm{Bin}\left(7, \frac{1}{6}\right)$. Pertanto, risulta

$$P(Z = 2) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 21 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5,$$

che coincide con quanto abbiamo ottenuto al punto (c) dell'esercizio 8.3.