Probabilità e Statistica (Informatica) 2021/22	Nome:
Prova scritta zero	Cognome
dicembre 2021	Matricola

Esercizio 1. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza della variabile aleatoria reale X definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

(i) X tale che $\mathbf{P}(X = 0) = 1/6$, $\mathbf{P}(X = 1) = 1/3$, $\mathbf{P}(X = 2) = 1/2$;

(ii) $X = \sin(2\pi U)$ con U una variabile aleatoria uniforme su $[0, 1]$;

(iii) $X = \exp(Y)$ con Y una esponenziale di parametro tre.

Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2 (cioè $\mathbf{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$). Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) \cdot \xi_2(\omega), \quad Y(\omega) \doteq \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) - \xi_3(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro 1/500. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{1000} X_i(\omega),\ \omega \in \Omega, \qquad N_* \doteq \min\{k \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(S \le k) \ge 0.98\}.$$

Sia dia una stima per N_* in tre modi diversi, usando

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson;

c) l'approssimazione normale.

Esercizio 4. Siano X_1, X_2, X_3 variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{1, \ldots, 6\}$. Scriviamo, per $i \neq j$, $X_i \succ X_j$ se $\mathbf{P}(X_i > X_j) > \mathbf{P}(X_i < X_j)$. Si trovino distribuzioni marginali per X_1, X_2, X_3 in modo che

$$X_1 \succ X_2, \qquad X_2 \succ X_3, \qquad X_3 \succ X_1.$$

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)