Probabilità e Statistica (Informatica) 2021/22, Foglio III

23 novembre 2021 (aggiornato al 30 novembre 2021)

Esercizio 1. Siano X, Y, Z, ξ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X, Y, Z sono a valori in $\mathbb{Z}$;
- ξ è di Bernoulli di parametro $1/2$;
- $\mathbf{P}(X < Y) = 1$;
- (X, Y), Z, ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria M tramite

$$M(\omega) \doteq \begin{cases} Y(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ X(\omega) & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

e introduciamo l'evento

$$A \doteq \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}.$$

(i) Si calcoli la probabilità di A in termini delle distribuzioni marginali di X, Y, Z.

(ii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) \geq 1/2$.

(iii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) > 1/2$ se $\mathbf{P}(Z = k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

La densità discreta viene data dalla somma delle densità discrete di X e Y
singolarmente prese. Essendo in termini discreti, si ha che la densità è data dalla somma
data dal discreto. Possiamo porre ad esempio p(x)=1/2 e p(y)=1/3, a quel punto la legge di x è
data dalla p(x)*X, per esempio X=2 e Y=3. Posti dei valori di esempio, l'esercizio viene risolto.

Esercizio 2. Siano X, Y variabili aleatorie reali su $(\Omega, \mathbf{P})$ discreto. Supponiamo che X, Y siano indipendenti. Si calcoli allora la densità discreta di $X + Y$ in termini delle densità discrete di X e Y.

Esercizio 3. Sia Ω l'insieme delle permutazioni dei numeri da 1 a 52:

$$\Omega \doteq \{\sigma \colon N_{52} \to N_{52} : \sigma \text{ biiettiva}\},$$

dove $N_{52} \doteq \{1, \ldots, 52\}$. Sia $\mathbf{P}$ la distribuzione uniforme discreta su Ω. Sia E l'insieme dei sottoinsiemi di N_{52} di cardinalità uguale a 13:

$$E \doteq \{A \subset N_{52} : |A| = 13\}.$$

Definiamo variabili aleatorie X_i, Y_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, a valori in E mediante

$$X_i(\sigma) \doteq \big\{\sigma(13(i-1)+j) : j \in \{1, \dots, 13\}\big\},$$
$$Y_i(\sigma) \doteq \big\{\sigma(i+4(j-1)) : j \in \{1, \dots, 13\}\big\}.$$

Si calcolino la distribuzione congiunta di $X_1, \dots, X_4$ e quella di $Y_1, \dots, Y_4$. Come si può interpretare il risultato?

Valgono le regole della disuguaglianza triangolare. In poche parole è metrica se valgono le 3 proprietà della dis. triang.
Si vede analiticamente. Essendo al più numerabile, quindi discreta, per il secondo punto viene ottenuto andando a prendere i due valori (p maggiore rispetto a q) e dimostrando sempre con la dis. triangolare che vale la cosa detta

Esercizio 4. Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile, e sia $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ l'insieme delle misure di probabilità su $\mathcal{F}$. Definiamo una funzione $\mathrm{d}_{TV} : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to [0, \infty)$ tramite

$$\mathrm{d}_{TV}(P, Q) \doteq \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(A) - Q(A)|.$$

(a) Si mostri che d_{TV} è una metrica su $\mathcal{M}_1$.

(b) Supponiamo ora che Ω sia al più numerabile e che $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Si mostri allora che

$$\mathrm{d}_{TV}(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |p(\omega) - q(\omega)|,$$

dove p, q sono le densità discrete rispettivamente di P e di Q. [Suggerimento: considerare l'evento $B \doteq \{\omega \in \Omega \ : \ p(\omega) \geq q(\omega)\}$.]

In poche parole si usa l'approssimazione di Poisson alla binomiale e si approssimano i singoli limiti.
Con questo si vede che la probabilità è positiva e tende a 0. Si deve usare la dis. triangolare
applicata ai limiti e si verifica che ogni limite è minore/uguale ai precedenti, per questo tende a 0 perché più piccolo

Esercizio 5. Consideriamo la situazione dell'Esercizio 4. Sia $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ una successione tale che $\lim_{n \to \infty} n \cdot p_n = \lambda$ per un $\lambda \in (0, \infty)$. Per $n \in \mathbb{N}$, sia P_n la distribuzione binomiale di parametri n e p_n, e sia Q_n la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_n \doteq n \cdot p_n$. Sia infine Q la distribuzione di Poisson di parametro λ. Possiamo interpretare tutte queste misure come elementi di $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ con $\Omega \doteq \mathbb{N}_0$, $\mathcal{F} \doteq \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$.

(i) Si mostri che $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}_{TV}(P_n, Q_n) = 0$.

(ii) Si mostri che $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}_{TV}(Q_n, Q) = 0$.

(iii) Si concluda che $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}_{TV}(P_n, Q) = 0$.

Esercizio 6. Siano N, X_i, $i \in \mathbb{N}$, variabili aleatorie *indipendenti* su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con N poissoniana di parametro $\lambda > 0$ e le X_i bernoulliane di parametro $p \in [0, 1]$. Poniamo

$$Y \doteq \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

cioè

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } N(\omega) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) & \text{se } N(\omega) = n \text{ per un } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Si determini la distribuzione di Y.

Per dimostrare (a) si deve usare l'integrale tra 0 ed inf di (x-lambda)*e^-lambda(x),
per esempio con lambda=1, 2, ecc. A quel punto possiede questi momenti perché minore di infinito

A quel punto, si risolve la seconda con Markov/Chebyshev (quindi X>=c <= E(x)/c)

Esercizio 7. Sia X una variabile aleatoria non-negativa definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tale che, per un $\lambda > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{\lambda X}\right] < \infty$.

a) Si mostri che X possiede momenti di ogni ordine, cioè $\mathbf{E}\left[X^k\right] < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

b) Si mostri che esiste una costante $K \in (0, \infty)$ tale che

$$\mathbf{P}(X \geq c) \leq K \cdot e^{-\lambda c} \text{ per ogni } c > 0.$$

[Suggerimento: disuguaglianza di Markov-Chebyshev.]

Qui si usa il magico Markov-Chebyshev, andando a porre:
P(X >= C+1) <= E(X)/(C+1)

Esercizio 8. Un'azienda offre un servizio di manutenzione di frigoriferi industriali. Si osserva che di un certo pezzo di ricambio costoso e ingombrante ne servono in media quattro unità alla settimana. L'azienda può rifornirsi di quel pezzo di ricambio solo a inizio settimana. Quante unità ne deve avere il lunedì per non trovarsi sprovvista nel corso della settimana con probabilità maggiore del 95%?

Esercizio 9. Siano $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\text{var}(X) > 0$, $\text{var}(Y) > 0$. Si dimostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\left[(Y - (a \cdot X + b))^2\right] \geq \text{var}(Y)\left(1 - \rho(X,Y)^2\right),$$

dove $\rho(X, Y)$ indica il coefficiente di correlazione tra X e Y:

$$\rho(X,Y) \doteq \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)} \cdot \sqrt{\text{var}(Y)}}.$$

Suggerimento: Si definisca una funzione $\phi \colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ mediante

$$\phi(a,b) \doteq \mathbf{E}\left[(Y - (a \cdot X + b))^2\right],$$

e si mostri che il minimo di ϕ viene assunto in (a_*, b_*) con

$$a_* = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}, \qquad b_* = \mathbf{E}[Y] - \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}\mathbf{E}[X].$$

Esercizio 10. Siano $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Supponiamo che X, Y siano indipendenti e identicamente distribuite. Si mostri che allora

$$\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[(X - Y)^2\right].$$

Esercizio 11. Sia ξ una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione uniforme continua su $[0,1]$. Si trovia una funzione misurabile $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{N}$ tale che la variabile aleatoria $Y \doteq \phi(\xi)$ abbia la seguente distribuzione discreta:

$$\mathbf{P}\left(Y = n\right) = \begin{cases} 1/12 & \text{se } n = 1, \\ 1/6 & \text{se } n = 2, \\ 1/4 & \text{se } n = 3, \\ 1/12 & \text{se } n = 4, \\ 1/4 & \text{se } n = 5, \\ 1/6 & \text{se } n = 6, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 12 (Esercizio 3.9 in CD)**.** Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per $n \in \mathbb{N}$, sia X_n una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $\{1, \ldots, n\}$. Poniamo

$$m_n \doteq \mathbf{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right].$$

Si identifichi il limite

$$\lim_{n\to\infty} m_n.$$

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)