EVENTI INDIPENDENTI

INDIPENDENZA DI DUE EVENTI

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sp. di prob. Gli eventi $E, F \in \mathcal{F}$ si dicono indipendenti se

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

e si scrive $E \perp\!\!\!\perp F$ o $\{E, F\}$ indipendente.

Attenzione! Non confondere indipendenza (nozione probabilistica: dipende da E, F e dalla misura P) e incompatibilità (nozione insiemistica).

In particolare, se $E, F \in \mathcal{F}$ di prob. strettamente positiva sono incompatibili, allora non possono essere indipendenti. Infatti:

se $E \cap F = \emptyset$, allora $P(E \cap F) = 0$. Ma $P(E) > 0$, $P(F) > 0$ e quindi $0 = P(E \cap F) \neq P(E)P(F) \neq 0$.

Esempio (banale)

Qualunque sia $E \in \mathcal{F}$, allora $E \perp\!\!\!\perp \emptyset$ e $E \perp\!\!\!\perp \Omega$.
Infatti, si ha

- $P(E \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} P(E)$

- $P(E \cap \Omega) = P(E) = P(E) \underbrace{P(\Omega)}_{=1}$

Esempi

1. Lanciamo una moneta e un dado. Sp. camp. naturale
$$\Omega = \{(a,i) : a \in \{T,C\},\ i \in \{1,\dots,6\}\}$$
con la misura uniforme.
Osserviamo che $|\Omega| = 2 \cdot 6 = 12$.

Gli eventi $E =$ "esce testa" e $F =$ "esce 4" sono indipendenti. Infatti, se calcoliamo

$$P(E) = P(\{(T,i) : i \in \{1,\dots,6\}\}) = 1/2$$
$$P(F) = P(\{(a,4) : a \in \{T,C\}\}) = 1/6$$

$$P(E \cap F) = P(\{(T,4)\}) = 1/12$$

ottieniamo $1/12 = P(E \cap F) = P(E)P(F) = 1/2 \cdot 1/6$.

2. Lanciamo un dado due volte. Sp. camp. naturale

$$\Omega = \{(i,j) : i, j \in \{1, \dots, 6\}\}$$

con la mis. prob. uniforme.
Osserviamo che $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Gli eventi E = "la prima faccia è 4" e F = "la somma dei 2 punteggi è 9" <u>non</u> sono indipendenti. Infatti, se calcoliamo

$$P(E) = P(\{(4,j) : j \in \{1, \dots, 6\}\}) = 1/6$$
$$P(F) = P(\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = 1/9$$
$$P(E \cap F) = P(\{(4,5)\}) = 1/36$$

ottieniamo $1/36 = P(E \cap F) \neq P(E)P(F) = 1/6 \cdot 1/9$.

Però se prendessimo l'evento G = "la somma dei punteggi è 7", gli eventi E e G sarebbero indipendenti (verificarlo per casa!).

Conseguenze elementari dell'indipendenza:

<u>Proposizione 1</u>. Siano $E, F \in \mathcal{F}$ con $P(E) > 0$ e $P(F) > 0$. Allora le seguenti affermazioni

(i) $E \perp\!\!\!\perp F$ (ii) $P(E|F) = P(E)$ (iii) $P(F|E) = P(F)$

sono equivalenti.

Come lo vedo?

(i) $\Rightarrow$ (ii): $E \perp\!\!\!\perp F \Rightarrow$

$$P(E \cap F) = P(E)\cancel{P(F)}$$
$$\parallel$$
$$P(E|F)\cancel{P(F)}$$

(perché $P(F) > 0$)

$$\Rightarrow P(E|F) = P(E).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $P(E|F) = P(E) \Rightarrow$

(perché $P(E) > 0$)

$$\frac{P(F|E)\cancel{P(E)}}{P(F)} = \cancel{P(E)}$$

$$\Rightarrow P(F|E) = P(F).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): $P(F|E) = P(F) \Rightarrow \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = P(F)$

$$\Rightarrow P(E \cap F) = P(F)P(E) \Rightarrow E \perp\!\!\!\perp F.$$

$\blacksquare$

<u>Oss.</u> La prop. dice che gli eventi di prob. strettamente positiva E ed F sono indipendenti solo se $P(E)$ non è modificata dal verificarsi di F. Avevamo osservato che, in generale, $P(E|F)$ può essere minore, uguale o maggiore di $P(E)$, la prop. evidenzia che il caso $P(E)=P(E|F)$ corrisponde ad eventi E, F indipendenti.

<u>Proposizione 2</u>. Le seguenti affermazioni

(i) $E \perp\!\!\!\perp F$ (ii) $E^c \perp\!\!\!\perp F$ (iii) $E^c \perp\!\!\!\perp F^c$ (iv) $E \perp\!\!\!\perp F^c$

sono equivalenti.

Come lo vedo?

(i) ⇒ (ii): dobbiamo mostrare che $P(E^c \cap F) = P(E^c)P(F)$. Si ha $E^c \cap F = F \setminus (E \cap F)$ e inoltre $E \cap F \subseteq F$. Quindi $P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$. Ora usiamo l'ipotesi (i) e otteniamo

$$\begin{aligned} P(E^c \cap F) &= P(F) - P(E)P(F) \\ &= P(F)\big(1 - P(E)\big) = P(F)P(E^c). \end{aligned}$$

Per concludere bisogna mostrare (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i). La verifica è analoga a quanto appena fatto (esercizio).

INDIPENDENZA DI TRE EVENTI

Gli eventi E_1, E_2, E_3 sono indipendenti se le seguenti due condizioni sono entrambe soddisfatte:

(i) $E_1 \perp\!\!\!\perp E_2$, $E_1 \perp\!\!\!\perp E_3$, $E_2 \perp\!\!\!\perp E_3$

(ii) $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$.

Oss. Le condizioni (i) e (ii) non sono ridondanti! Sono logicamente indipendenti e quindi entrambe necessarie.

Esempi

1. Lancio due volte una moneta e considero gli eventi A="al primo lancio ottengo testa", B="al secondo lancio ottengo testa" e C="ottengo due facce uguali". Mostriamo che gli eventi sono a 2 a 2 indip. (vale (i)), ma $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$ (non vale (ii))

   Sp. camp. $\Omega = \{(\ell_1, \ell_2) : \ell_1, \ell_2 \in \{T, C\}\}$ e $|\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$.

Calcoliamo

$$P(A) = P(\{(T, \ell_2) : \ell_2 \in \{T, C\}\}) = 1/2$$
$$P(B) = P(\{(\ell_1, T) : \ell_1 \in \{T, C\}\}) = 1/2$$
$$P(C) = P(\{(T,T), (C,C)\}) = 1/2$$

Inoltre, si ha

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(\{(T,T)\}) = 1/4.$$

Si vede facilmente che le coppie $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$ sono indipendenti. Prendiamo, ad esempio, $\{A, B\}$. Si ha $1/4 = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/2 \cdot 1/2$ (analogo per le altre coppie).

Mostriamo ora che $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$. Per quanto visto sopra $P(A)P(B)P(C) = 1/8$, mentre $P(A \cap B \cap C) = P(\{(T,T)\}) = 1/4$.

2. Lancio due volte un dado. Considero gli eventi $A =$ "punteggio del 1° lancio $\in \{1, 2, 3\}$", $B =$ "punteggio del 1° lancio $\in \{3, 4, 5\}$" e $C =$ "la somma dei due punteggi $= 9$".

Mostriamo che vale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ (vale (ii)), ma gli eventi non sono a 2 a 2 indip. (non vale (i)).

Sp. camp. $\Omega = \{(d_1, d_2) : d_1, d_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$ e $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

Calcoliamo

$$P(A) = P(\{(d_1, d_2) : d_1 \in \{1, 2, 3\} \text{ e } d_2 \in \{1, \dots, 6\}\})$$
$$= \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{1}{2}$$

Analogamente $P(B) = 1/2$. Inoltre, si ha

$$P(C) = P(\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = 1/9$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(\{(3,6)\}) = 1/36$$

Quindi $1/36 = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/9$.

Consideriamo ora la coppia $\{A, C\}$ e mostriamo che non è indipendente. Per quanto visto sopra sappiamo che $P(A)P(C) = 1/18$, mentre $P(A \cap C) = P(\{(3,6)\}) = 1/36$. Analogamente si può procedere per le coppie $\{A, B\}$ e $\{B, C\}$.

IN GENERALE

La famiglia $\{E_1, \dots, E_n\}$ di eventi è indipendente se per ogni r $(2 \leq r \leq n)$ e per ogni possibile scelta di r eventi distinti degli n eventi della famiglia, la probabilità dell'intersezione degli r eventi scelti è pari al prodotto delle loro probabilità.

Oss. Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ è una famiglia di eventi indipendenti, quando sostituisco qualche E_i (non importa quanti e quali) con E_i^c ottengo ancora una famiglia di eventi indipendenti.

La famiglia numerabile di eventi $\{E_1, E_2, \dots\}$ è indipendente se ogni sottofamiglia finita lo è.