STIMA DI N_* : CHEBYSHEV, POISSON, APPR. NORMALE

1) $S(\omega) = \sum_{i}^{1000} X_i(\omega)$ $\quad N_* = \min\{k \in \mathbb{N} : P(S \leq k) \geq 0{,}98\}$

$p = 1/500$ $\quad$ distribuzione di Bernoulli

CHEBYSHEV

$$P(|X - E[X]|) \geq \varepsilon \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}$$

Bernoulli $\quad E[X] = p \quad var(X) = p(1-p)$

$Be(p) \sim Bin(n, p)$

$E[S] = np \quad var(S) = np(1-p)$

$E[X] = 1/500 \quad var(X) = \frac{1}{500}\left(\frac{499}{500}\right) \approx 0{,}001996$

$E[S] = {}^{1000}/_{500} = 2 \quad var(S) = 499/250 \approx 1{,}996$

Per $k \in \mathbb{N}$ vale

$P(S \leq k) = 1 - P(S > k)$

$$\begin{aligned} P(S > k) &= P(S \geq k+1) \\ &= P(S - E[S] \geq k+1 - E[S]) \qquad \Big| E[S] = 2 \\ &\leq P(|S - E[S]| \geq k-1) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ chebyshev $\quad \frac{var(S)}{(k-1)^2} = {}^{499}/_{250} \cdot {}^{1}/_{(k-1)^2}$

$\rightsquigarrow P(S \leq k) \geq 1 - {}^{499}/_{250} \cdot {}^{1}/_{(k-1)^2}$

Scegliere k minimo tale che

$1 - {}^{499}/_{250} \cdot {}^{1}/_{(k-1)^2} \geq 0{,}98$

$\rightsquigarrow (k-1)^2 \geq {}^{499}/_{5} \quad \rightsquigarrow k \geq \sqrt{\frac{499}{5}} + 1 \approx 10{,}98$

$N_* = 11$

POISSON

Visto che $P_{Bin(n,p)} \sim P_{Pois}(\lambda)$ e

$P_{Be(p)} \sim P_{Bin(n,p)}$

$E[X] = np = \lambda$

$var(X) = np(1-p)$ dove $p = 1/500$

$\lambda = 1000/500 = 2$

$P(S \leq K) \approx F_{Pois(2)}(K)$

Quindi

$F_{Pois(2)}(K) \geq 0,98$

Tavola $\rightsquigarrow$ $N_* = 5$

APPROSSIMAZIONE NORMALE

TEOREMA LIMITE CENTRALE

$$\bar{S} = \frac{S - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \qquad E[\bar{S}] = 0 \qquad var(\bar{S}) = 1$$

La funzione di ripartizione è la funzione di ripartizione della normale standard $N(0,1)$

$$P(S \leq K) \approx \Phi\left(\frac{K - E[S]}{\sqrt{var(S)}}\right)$$

Cerchiamo $y \in \mathbb{R}$ minimo tale che

$\Phi(y) \geq 0,98$

$y \geq 2,06$ $\leftarrow$ Tavola

Cerchiamo K minimo tale che

$$\frac{K - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \geq 2,06 \rightsquigarrow K \geq 2,06 \cdot \sqrt{var(S)} + E[S]$$

$\geq 4,91$ $\quad N_* = 5$

2) $S(\omega) = \sum_{1}^{125} X_i(\omega)$ $\qquad N = \min\{k \in \mathbb{N} : P(S \leq k) \geq 0{,}96\}$

$p = 1/200$, distribuzione $X \sim Bin(8, 1/200)$

Dato che $Bin(8, 1/200) \sim Be(1/200)$

$E[X] = p \qquad var(X) = p(1-p) \qquad E[X] = 1/200 \quad var(X) = \frac{1}{200}\left(\frac{199}{200}\right)$

$E[S] = np \qquad var(S) = np(1-p)$

$E[S] = 125/200 \qquad var(S) = \frac{125}{200}\left(\frac{199}{200}\right)$

CHEBYSHEV

$P(|X - E[X]|) \geq \varepsilon \leq var(X)/\varepsilon^2$

Per $k \in \mathbb{R}$ vale

$P(S \leq k) = 1 - P(S > k)$

$P(S > k) = P(S \geq k+1)$

$\quad = P(S - E[S] \geq k+1 - E[S])$

$\quad \leq P(|S - E[S]| \geq k+1 - 125/200)$

Chebyshev : $var(S)/(k+3/8)^2$

$P(S \leq k) = 1 - var(S)/(k+3/8)^2$

trovare k minimo tale che

$1 - \left[var(S)/(k+3/8)^2\right] \geq 0{,}96$

$(k+3/8)^2 \geq \frac{var(S)}{0{,}04}$

$\geq 15{,}54$

dove essere sbagliato

$\cancel{N_* = 16}$

$k \geq \sqrt{15{,}54} - 3/8$

$k \geq 3{,}94 - \frac{3}{8} \geq 3{,}56 \qquad N^* = 4$

POISSON

Visto che $P_{Bin(n,p)} \sim P_{Pois}(\lambda)$

$E[X] = np = \lambda$

$var(x) = np(1-p)$ dove $p = 1/200$

$\lambda = {}^{125}/_{200} = 0{,}625$

$P(S \leq K) \approx F_{Pois(0,625)}(K)$

Quindi

$F_{Pois(0,625)}(K) \geq 0{,}96$

$\rightsquigarrow$ Tavola $N = 2$

APPROSSIMAZIONE NORMALE

TEOREMA LIMITE CENTRALE

$$\bar{S} = \frac{S - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \qquad E[\bar{S}] = 0 \qquad var(\bar{S}) = 1$$

La funzione di ripartizione è la funzione di ripartizione della normale standard $N(0,1)$

$$P(S \leq K) \approx \Phi\left(\frac{K - E[S]}{\sqrt{var(S)}}\right)$$

Cerchiamo y minimo tale che

$\Phi(y) \geq 0{,}96 \overset{\text{Tavola}}{\rightsquigarrow} 1{,}76$

$y \geq 1{,}76$

Cercare K minimo tale che

$$\frac{K - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \geq 1{,}76 \rightsquigarrow K \geq 1{,}76 \cdot \sqrt{var(S)} + E[S]$$

$K \geq 2{,}0$

$N_* = 2$

3) $S(\omega) = \sum_{1}^{1000} x_i(\omega)$ $\quad N = \min \{ k \in \mathbb{N} \ P(S \le k) \geq 0,99 \}$

$p = 1/400$, distribuzione $Be(p) \sim x_i$

$E[X] = p = 1/400 \qquad var(x) = p(1-p) = \frac{1}{400}\left(\frac{399}{400}\right) \sim 0,002493$

Siccome $Be(p) \sim Bn(1,p)$

$E[S] = np = 1000/400 \qquad var(S) = np(1-p) = 2,49375$

CHEBYSHEV

$P(|X - E[X]|) \geq \varepsilon \leq var(X)/\varepsilon^2$

Per $K \in \mathbb{N}$ vale

$P(S \le K) = 1 - P(S > K)$

$P(S > K) = P(S \geq K+1)$

$\qquad \overset{!}{=} P(S - E[S] \geq K+1 - E[S])$

$\qquad \leq P(|S - E[S]| \geq K - 1,49375)$

$P(S \le K) = 1 - var(S)/(K - 1,49375)^2$ ← chebyshev

trovare K minimo tale che

$1 - var(S)/(K - 1,49375)^2 \geq 0,99$

$(K - 1,49375)^2 \geq \frac{var(S)}{0,01}$

$K \geq \sqrt{\frac{var(S)}{0,01}} + 1,49375$

$K \geq 17,28 \qquad N_* = 18$

Poisson

Visto che $Be(p) \sim Bin(n, p)$
e $Bin(n,p) \sim Pois(\lambda) f(k)$

$E[X] = \lambda = np = {}^{1000}/_{400}$

$var(X) = np(1-p) = 2,49375$

$P(S \leq k) \approx F_{Pois(1000/400)}(k)$

Quindi $F_{Pois}(1000/400) \geq 0,99$

tavola $\rightsquigarrow$ $N = 7$

APPROSSIMAZIONE NORMALE

Per il teorema del limite centrale

$\bar{S} = \dfrac{S - E[S]}{\sqrt{var(S)}}$ e $E[\bar{S}] = 0$ $var(\bar{S}) = 1$

La funzione di ripartizione è uguale alla funzione di ripartizione della normale standard $N(0,1)$
Quindi

$$P(S \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - E[S]}{\sqrt{var(S)}}\right)$$

trovare y minimo tale che

$\Phi(y) \geq 0,99$
$y \geq 2,33$ ← tavola

Trovare k minimo tale che

$\dfrac{k - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \geq 2,33 \rightarrow k \geq 2,33 \cdot \sqrt{var(S)} + E[S]$

$k \geq 2,33 \cdot \sqrt{2,49375} + 2,5$

$k \geq 6,17$ $N = 7$

4)

$S(\omega) = \sum_{1}^{800} X_i(\omega)$ $\quad N = \min \{ K \in \mathbb{N} \quad P(S \leq K) \geq 0,99 \}$

$p = 1/400$ $\quad X_i \sim Be(p)$

Visto che $Be(p) \sim Bn(1, p)$ avremo

$E[X] = p = 1/400$ $\quad var(X) = p(1-p) = 1/400 \left(\frac{399}{400} \right)$

$E[S] = np = 800/400 = 2$ $\quad var(S) = np(1-p) = 2 \left(\frac{399}{400} \right) = \frac{399}{200}$

CHEBYSHEV

$P(|X - E[X]|) \geq \varepsilon \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}$

Per $K \in \mathbb{N}$ vale

$P(S \leq K) = 1 - P(S > K)$

$P(S > K) = P(S \geq K+1)$

$\stackrel{!}{=} P(S - E[S] \geq K+1 - E[S])$ $\quad / E[S] = 2$

$\leq P(|S - E[S]| \geq K-1)$

$\rightsquigarrow$ Chebyshev : $var(S) / (K-1)^2$

$P(S \leq K) = 1 - var(S) / (K-1)^2$

Trovare K minimo tale che

$1 - \frac{var(S)}{(K-1)^2} \geq 0,99$

$(K-1)^2 \geq \frac{var(S)}{0,01}$

$K \geq \sqrt{\frac{var(S)}{0,01}} + 1 \rightsquigarrow K \geq 15,12 \qquad N = 16$

Poisson

Poichè $Be(p) \sim Bin(n,p)$
e $Bin(n,p) \sim Pois(\lambda)(K)$

avremo

$E[X] = \lambda = np$ $\quad var(X) = np(1-p)$

$\lambda = 2 = 800/400$

$P(S \leq K) \approx F_{Pois(\lambda)}(K)$

$P(S \leq K) \approx F_{Pois(2)}(K)$

Trovare

$F_{Pois(2)}(K) \geq 0{,}99 \leadsto$ tavola $N = 6$

APPROSSIMAZIONE NORMALE

Per il teorema del limite centrale

$\bar{S} = \dfrac{S - E[S]}{\sqrt{var(S)}}$ e $E[\bar{S}] = 0 \quad var(\bar{S}) = 1$

la funzione di ripartizione è la funzione di ripartizione della normale standard $N(0,1)$ Quindi

$P(S \leq K) \approx \Phi\left(\dfrac{K - E[S]}{\sqrt{var(S)}}\right)$

Trovare y minimo tale che

$\Phi(y) \geq 0{,}99$

$\leadsto$ tavola $y \geq 2{,}33$

Trovare K minimo tale che

$\dfrac{K - E[S]}{\sqrt{var(S)}} \geq 2{,}33 \leadsto K \geq 2{,}33 \cdot \sqrt{\dfrac{399}{200}} + 2$

$K \geq 5{,}29$

$N = 6$