Probabilità e Statistica (Informatica) 2021/22	Nome:
Prova scritta	Cognome:
27 giugno 2022	Matricola:

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X:

(i) X è uniforme su $[-2, -1]$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da

$$F_X(x) \doteq (x^2/16) \cdot \mathbf{1}_{(0,4)}(x) + \mathbf{1}_{[4,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

(iii) $X = \exp\left(Y^2/8\right)$ per una variabile aleatoria Y normale standard.

Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2 (cioè $\mathbf{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$). Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) - \xi_2(\omega), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro 1/300. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{900} X_i(\omega), \ \omega \in \Omega, \qquad M \doteq \min\left\{m \in \mathbb{N} : \mathbf{P}\left(S \leq m\right) \geq 0.98\right\}.$$

Sia dia una stima per M in tre modi diversi, usando

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson (legge dei piccoli numeri);

c) l'approssimazione normale.

Esercizio 4. I Pescatori Padovani vogliono conoscere il peso medio dei rutili, detti anche gardon, presenti nel canale Battaglia. Ne fanno catturare e pesare 900 esemplari. Indichiamo con X_i il peso dell'esemplare i-esimo (espresso in grammi). Possiamo supporre che le X_i siano delle variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite. Indichiamo con μ il comune valor medio, con σ^2 la comune varianza, e con

$$\bar{S} \doteq \frac{1}{900} \sum_{i=1}^{900} X_i$$

la media campionaria. Mentre il valore di μ è incognito, supponiamo che la deviazione standard σ (espressa in grammi) non superi 60. Utilizzando l'approssimazione normale, si trovi $\delta > 0$ (il più piccolo possibile) tale che l'intervallo aleatorio

$$(\bar{S} - \delta, \bar{S} + \delta)$$

contenga μ con probabilità di almeno 0.95.

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)