Probabilità e Statistica (Informatica) 2021/22	Nome:
Prova scritta zero	Cognome
dicembre 2021	Matricola

Si tratta di calcolare tutto rispettando queste proprietà; non molto difficile.
Attenzione a ricordarsele più che altro.
V. a uniforme intende distrib. uniforme (integrale quindi)

Esercizio 1. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza della variabile aleatoria reale X definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

(i) X tale che $\mathbf{P}(X=0)=1/6$, $\mathbf{P}(X=1)=1/3$, $\mathbf{P}(X=2)=1/2$;

(ii) $X=\sin(2\pi U)$ con U una variabile aleatoria uniforme su $[0,1]$;

(iii) $X=\exp(Y)$ con Y una esponenziale di parametro tre.

Se non sbaglio (!): per Y diventa 0, pertanto non serve calcolare media e varianza, che è sempre 0 e anche per quanto riguarda la cov. risulta 0. Ciò indica che sono indipendenti.

Per la d.congiunta basta sommare le distr. di x e y, quindi 1/4.

Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione di Rademacher di parametro $1/2$ (cioè $\mathbf{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$). Poniamo

px(z)
q se z=1
1 - q se z=-1

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega)\cdot\xi_2(\omega), \quad Y(\omega) \doteq \xi_1(\omega)\cdot(\xi_2(\omega)-\xi_3(\omega)), \quad \omega\in\Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

Ad esempio nel primo, X(omega)=1/2*1/2=1/4 e si applica la formula sopra per trovare la probabilità.
Poi si calcola valor medio come p(x) * x(omega)=
1/4*1/4=1/16 se z=1
1/4^3/4=3//16 se z=-1 (caso valor medio)
Per la varianza sarà la stessa roba, ricordando che:
e(x^2)*[e(x)]^2

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/500$. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{1000} X_i(\omega),\ \omega\in\Omega, \qquad N_* \doteq \min\left\{k\in\mathbb{N} : \mathbf{P}(S\leq k)\geq 0.98\right\}.$$

Sia dia una stima per N_* in tre modi diversi, usando

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

Si può ricavare il v. medio e la varianza essendo una binomiale (quindi E[x]= 2 che è n*p (n=1000, p=500), mentre var[x]=np(1-p)

b) l'approssimazione di Poisson;

Approssimazione della binomiale a Poisson con il limite e poi 0,98 <= P(S<=K) che è circa F(Poiss)[k]

c) l'approssimazione normale.

Una volta calcolate valor medio e varianza da a)
si può fare questa ultima, che è solo un calcolo

Esercizio 4. Siano X_1, X_2, X_3 variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{1, \ldots, 6\}$. Scriviamo, per $i \neq j$, $X_i \succ X_j$ se $\mathbf{P}(X_i > X_j) > \mathbf{P}(X_i < X_j)$. Si trovino distribuzioni marginali per X_1, X_2, X_3 in modo che

$$X_1 \succ X_2, \qquad X_2 \succ X_3, \qquad X_3 \succ X_1.$$

Risoluzione: Si considerano le dette relazioni tra i numeri come sopra.
Si nota che x1 < x3 < x2.

A questo punto si può anche notare che x1 appaia 1/3 delle volte
rispetto ad x2, da cui, avendo ciascuno equiprobabilità 1/6 secondo
i valori descritti dall'esercizio, si ha che 1/6 è x1, 1/2 è z2 (per quanto appena
descritto), e x3 assumerà un valore "in mezzo", per esempio 1/4.

Date queste considerazioni, si può risolvere l'esercizio, dimostrando che
tutto ciò vale.
Le relazioni sono:
1) P(x1 > x2) > P(x1 < x2)
2) P(x2 > x3) > P(x2 < x3)
3) P(x3 > x1) > P(x3 < x1)

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)