Probabilità e Statistica (Informatica) 2021/22	Nome:
Prova scritta	Cognome:
20 gennaio 2022	Matricola:

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono):

(i) $X \doteq Y$ per una variabile aleatoria Y uniforme continua su $[-1, 1]$;

(ii) X con funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq (x^2/4) \cdot \mathbf{1}_{(0,2)}(x) + \mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X \doteq e^Y$ per una variabile aleatoria Y esponenziale di parametro quattro.

Esercizio 2. Siano X, Y variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *indipendenti* e a valori in $\{0, 1\}$. Poniamo

$$Z \doteq \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{(0,0)\}}(X, Y) + \mathbf{1}_{\{(0,1),(1,0)\}}(X, Y) + \frac{4}{5} \cdot \mathbf{1}_{\{(1,1)\}}(X, Y).$$

(i) Si esprima $\mathbf{E}[Z]$ in termini di $p \doteq \mathbf{P}(X = 1)$, $q \doteq \mathbf{P}(Y = 1)$.

(ii) Si esprima $\mathrm{var}[Z]$ in termini di p, q.

(iii) Si calcoli $\mathbf{E}[Z]$ supponendo che $p = 5/7$.

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/400$. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{1000} X_i(\omega),\ \omega \in \Omega, \qquad M \doteq \min \left\{ m \in \mathbb{N} : \mathbf{P}\left(S \leq m\right) \geq 0.99 \right\}.$$

Sia dia una stima per M in tre modi diversi, usando

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson (legge dei piccoli numeri);

c) l'approssimazione normale.

Esercizio 4. Sia ξ una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione uniforme continua su $[0,1]$. Si trovi una funzione $\Psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che con $Y(\omega) \doteq \Psi(\xi(\omega))$, $\omega \in \Omega$, si ha

$$\mathbf{P}\left(Y = 1\right) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}\left(Y = 2\right) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}\left(Y = 4\right) = \frac{1}{6}.$$

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)