<u>RICAPITOLANDO:</u> una variabile aleatoria si può definire in due modi

(1) come funzione $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di cui si determinano alfabeto $\mathcal{X}$ e misura di prob. indotta $P^X(x_k) = P(X^{-1}(x_k))$, per ogni $x_k \in \mathcal{X}$, da cui si deduce la densità $p_X(x_k) = P^X(x_k)$, per ogni $x_k \in \mathcal{X}$, che soddisfa positività e normalizzazione.

(2) si danno direttamente alfabeto $\mathcal{X}$ e densità $p_X(\cdot)$ che soddisfa positività e normalizzazione.

FUNZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA

$$\left.\begin{array}{ll} X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} & \text{v. al.} \\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{funz.} \end{array}\right\} \quad Y = g \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{v. al.}$$

Caratterizziamo Y. L'alfabeto è $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X})$ e la densità discreta:

$$p_Y(y_\ell) = P(Y = y_\ell) = \sum_{k : g(x_k) = y_\ell} p_X(x_k), \quad \text{per ogni } y_\ell \in \mathcal{Y}$$

Esempio

Sia X una v.al. con alfabeto $\mathcal{X} = \{-1, 1, 3\}$ e densità discreta $p_X(-1) = p_X(3) = 1/4$ e $p_X(1) = 1/2$.

Caratterizziamo la v.al. $Y = X^2$.

Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, abbiamo $Y = g(X)$.

Alfabeto: $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}) = \{1, 9\}$.

Densità:
$$p_Y(1) = P(\{X=-1\} \cup \{X=1\}) = p_X(-1) + p_X(1) = 1/4 + 1/2 = 3/4$$

$$p_Y(9) = P(X=3) = p_X(3) = 1/4$$

ESERCIZI

1. Lancio una moneta e un dado. Se i risultati che ottengo hanno la stessa iniziale vinco 1 euro, altrimenti perdo 50 centesimi.
   Sia X la variabile aleatoria che descrive la

vincita/perdita. Determinare alfabeto e densità discreta di X.

<u>Soluzione</u>. Alfabeto: $\mathcal{X} = \{-1/2, 1\}$
(corrispondono alla perdita e alla vincita)

Densità discreta. Uno sp. camp. per il nostro gioco è $\Omega = \{(a,i) : a \in \{T,C\}, i \in \{1,\dots,6\}\}$.
Si ha $|\Omega| = 2 \cdot 6 = 12$. Calcoliamo la prob. indotta, che prendiamo come densità di X.

$$p_X(1) = P(X=1) = P(\text{i risultati hanno la stessa iniziale})$$

$$= P(\{(T,3),(C,5)\}) = 1/6$$

$$p_X(-1/2) = 1 - p_X(1) = 5/6.$$

2. Estraggo tre carte da un mazzo di carte da Poker. Vinco 1 euro per ogni carta di picche estratta.
Sia X la variabile aleatoria che descrive la vincita. Determinare alfabeto e densità discreta di X.

Soluzione. Alfabeto: $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$

Densità discreta:

$$p_X(0) = P(X=0) = P(\text{non pesco carte di picche}) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{703}{1700}$$

$$p_X(1) = P(X=1) = P(\text{pesco una carta di picche}) = \frac{13 \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{3}} = \frac{741}{1700}$$

$$p_X(2) = P(X=2) = P(\text{pesco due carte di picche}) = \frac{\binom{13}{2} \cdot 39}{\binom{52}{3}} = \frac{234}{1700}$$

$$p_X(3) = 1 - p_X(0) - p_X(1) - p_X(2) = \frac{11}{850}.$$

VALOR MEDIO (O ATTESO)

Sia X v.al. con alfabeto $\mathcal{X}$ e densità discreta p_X. Il valor medio di X è il numero reale

$$\boxed{E(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k \, p_X(x_k)}$$

<u>Oss.</u> Se $|\mathcal{X}| < \infty$, allora il v. medio è una somma finita ed è sempre ben definito. Se $|\mathcal{X}| = +\infty$, allora il v.medio è una serie e può non esistere (se la serie non converge).

<u>Esempi</u>

1. Sia X una v.al. con alfabeto $\mathcal{X} = \{-7, 0, \pi, 4\}$ e densità $p_X(-7) = 1/2$ e $p_X(0) = p_X(\pi) = p_X(4) = 1/6$

   Otteniamo

   $$E(X) = (-7) \cdot 1/2 + (4 + \pi) \cdot 1/6 \approx -2.31 .$$

2. Consideriamo uno sp. di prob. $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega), P)$ ed un evento $E \in \mathbb{P}(\Omega)$. Definiamo la v.al.

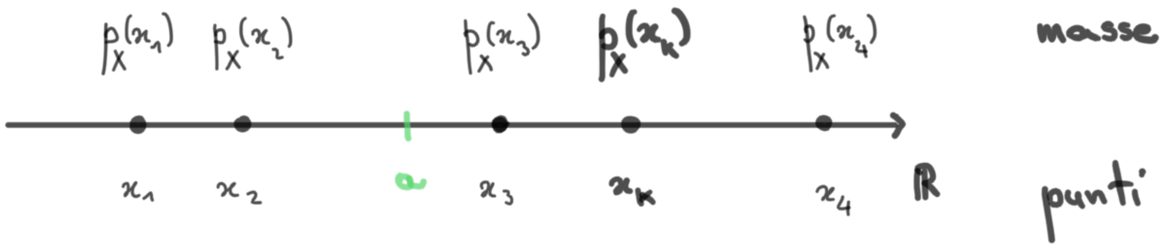
$$X(\omega) = \mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in E \\ 0 & \text{se } \omega \notin E \end{cases}$$

Allora si ha

$$\underline{E(X)} = P(X=1) = P(\{\omega : X(\omega) = 1\}) = P(E)$$

SIGNIFICATO DEL VALOR MEDIO

Indice di centralità $\longleftrightarrow$ Baricentro della distribuzione



Abbiamo dei punti $\{x_1, \dots, x_n\}$ con masse $p_X(x_1), \dots, p_X(x_n)$ e cerchiamo il baricentro $a \in \mathbb{R}$ della nuvola di punti. Cerchiamo il punto dove la risultante dei momenti è nulla (equilibrio):

$$\sum_{x_k} (x_k - a)\, p_X(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{x_k} x_k\, p_X(x_k) = a \underbrace{\sum_{x_k} p_X(x_k)}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = E(X).$$

<u>Teorema fondamentale del valor medio</u>. Sia $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una v. al. discreta, allora si ha

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, P(\{\omega\}).$$

<u>Dimostrazione</u>. Calcoliamo

$$E(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k\, p_X(x_k) = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k\, P(X^{-1}(x_k))$$

(definizione di antiimmagine)

$$= \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k\, P(\underbrace{\{\omega : X(\omega) = x_k\}}_{})$$

<u>insieme discreto</u>: ottengo la sua prob. sommando le prob. degli esiti che ci appartengono

$$= \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k \sum_{\omega : X(\omega) = x_k} P(\{\omega\})$$

$$= \underbrace{\sum_{x_k \in \mathcal{X}} \sum_{\omega : X(\omega) = x_k}}_{\text{Descrivono l'insieme:}} X(\omega) P(\{\omega\})$$

$$\bigcup_{x_k \in \mathcal{X}} \{\omega : X(\omega) = x_k\} = \Omega$$

$$\updownarrow$$

$$\{X^{-1}(x_k)\} \text{ (partizione)}$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

$\blacksquare$