VARIABILI ALEATORIE ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Finora abbiamo considerato uno spazio campionario discreto; su questo spazio campionario abbiamo costruito in modo rigoroso la misura di probabilità e, a partire dallo spazio di probabilità così ottenuto, definito le variabili aleatorie.

Per molte applicazioni gli spazi di probabilità discreti non bastano! Pensiamo, ad esempio, ad esperimenti che coinvolgono misure di tempi o lunghezze, è naturale che il modello probabilistico scelto abbia uno spazio campionario continuo.

Costruire lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con Ω continuo, è molto più delicato e difficile di quanto abbiamo fatto finora. Non lo faremo e daremo una descrizione probabilistica delle variabili aleatorie: caratterizzeremo i valori assunti e la distribuzione disinteressandoci dello spazio campionario di partenza.

DEFINIZIONE DI V.AL. ASSOLUTAMENTE CONTINUA. Una v.al. X si dice (assolutamente) continua se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, si abbia

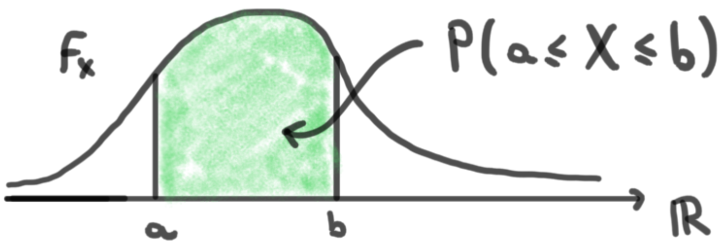
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

La funzione f_X si dice densità (o funzione di densità) della v.al. X e deve soddisfare

- positività: $f_X(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
- normalizzazione: $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$.

Oss. 1. La funzione densità f_X può non essere continua.

Oss. 2. Notiamo che la probabilità che la v.al. X appartenga ad un intervallo $[a,b]$ è pari all'area sotto la curva f_X sull'intervallo $[a,b]$.



Se l'intervallo si fa sempre più piccolo, la prob. che X ci appartenga si fa sempre più vicina a zero. In particolare, si ha

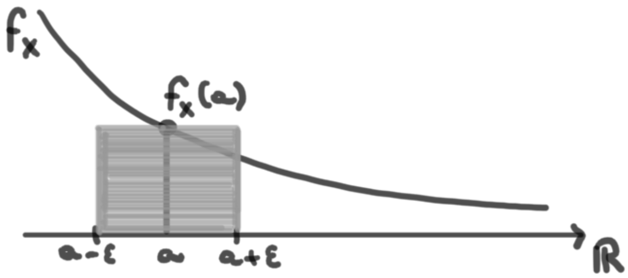
$$P(X=a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(a-\varepsilon \le X \le a+\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f_X(x)\,dx = 0 .$$

(IN NETTO CONTRASTO CON QUANTO ACCADE PER LE V. AL. DISCRETE!).

<u>Conseguenza:</u> per le v.al. continue si ottiene
$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$.

Cosa rappresenta $f_X(a)$? Osserviamo che per ε piccolo abbiamo (vedi figura)



$$P(a-\varepsilon \le X \le a+\varepsilon) = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f_X(x)\,dx$$

$$\approx 2\varepsilon \cdot f_X(a)$$

Questo significa che $f_X(a)$ è una sorta di densità (nel senso della Fisica) che mi indica quanta "massa di probabilità" si concentra in un intorno di $x=a$.

In ogni caso, <u>non pensiamo a $f_X(a)$ come ad una probabilità, in quanto il suo valore può essere arbitrariamente grande.</u>

<u>Esempio</u>

Consideriamo la v.al. X con densità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,(4x - 2x^2) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determiniamo il valore della costante c e la probabilità che X sia maggiore di 1.

Dato che f_X è una densità, deve valere che $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$. Pertanto, si ha

$$c\int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx = 1 \iff c\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 1$$

$$\iff \frac{8}{3}c = 1,$$

da cui ricaviamo $c = 3/8$. Quindi la densità f_X risulta

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoliamo

$$\underline{P(X > 1)} = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

CARATTERIZZAZIONE EQUIVALENTE DELLE VARIABILI ALEATORIE ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Tutte le informazioni probabilistiche di X, contenute nella densità f_X, sono <u>equivalentemente</u> descritte dalla FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE (o RIPARTIZIONE).

La funzione $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$x \longmapsto F_X(x) := P(X \leq x)$$

si dice funzione di distribuzione (o ripartizione) di X.

<u>Oss.</u> Se conosciamo F_X, possiamo calcolare la prob. che X appartenga ad un intervallo $(a, b]$.

Infatti, si ha

$$
\begin{aligned}
P(X \in (a,b]) &= P(a < X \leq b) \\
&= P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) \\
&= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\
&= F_X(b) - F_X(a)
\end{aligned}
$$

PROPRIETÀ

- normalizzazione: $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- monotonia: se $x \leq y$, allora $F_X(x) \leq F_X(y)$
- continuità: la funzione di distribuzione di una v. al. assolutamente continua è una funzione continua.

Legame tra F_X e f_X: dalla definizione di funzione di distribuzione segue

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

ed, inoltre, per tutti i valori $x \in \mathbb{R}$ dove f_X è continua, derivando si ottiene

$$F_X'(x) = f_X(x).$$

<u>Esempio</u> (continuazione)

Calcoliamo la funzione di distribuzione della v. al. continua X con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Otteniamo

$$F_X(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ \frac{3}{8}\int_0^y (4x - 2x^2)\,dx & \text{se } 0 < y < 2 \\ 1 & \text{se } y \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ \frac{3}{8}\left[2y^2 - \frac{2}{3}y^3\right] & \text{se } 0 < y < 2 \\ 1 & \text{se } y \geq 2\,. \end{cases}$$

Osserviamo che F_X è <u>continua</u> nei punti di <u>congiunzione</u> $y=0$ e $y=2$.

VANTAGGI (di lavorare con la funz. di distribuzione)

1. Permette di confrontare v.al. discrete e continue.
   Per le v.al. continue non ha senso parlare di $P(X=k)$, quantità che caratterizza invece la densità discreta; mentre le v.al. discrete non ammettono una funzione di densità f_X. Entrambi i tipi di v.al. ammettono però (e definita nello stesso modo) la funzione di distribuzione. Le informazioni probabilistiche di v.al. discrete e continue si possono pertanto confrontare confrontando le loro funzioni di distribuzione.

2. Permette di caratterizzare la densità di funzioni di v.al. continue. Sia X una v.al. continua con funz. di distribuzione F_X e sia $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione <u>invertibile</u>. Allora possiamo determinare la densità f_Y di $Y=g(X)$.
   Come: caratterizziamo F_Y usando F_X e poi deriviamo!

Esempio

Sia X una v.al. continua con funz. di distribuzione F_X e densità f_X. Determiniamo la densità della v. al. $Y = 2X$. Per $y \in \mathbb{R}$, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X \leq y) = P(X \leq y/2) = F_X(y/2)$$

Per ottenere la densità, deriviamo rispetto alla variabile y. Risulta

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy} F_X(y/2) = \frac{f_X(y/2)}{2}.$$