Prove ripetute e indipendenti

Domanda: come ripetere un esperimento aleatorio in condizioni "analoghe e indipendenti"?

~~Risposta~~ Domanda difficile in generale. Qui soltanto:

Modello probabilistico per prove ripetute e indipendenti.

Caso più semplice: singola prova ha solo due esiti possibili: o "successo" o "fallimento"

oppure "1", "0"

Spazio campionario per una singola prova:

$$\Omega_1 = \{0, 1\}$$

Misura di probabilità P_1 su Ω_1 determinata da dalla "probabilità di successo":

$$P_1(\{1\}) \doteq q \quad \text{per un } q \in [0,1]$$

$$\rightsquigarrow P_1(\{0\}) = 1 - q.$$

Modello probabilistico per n prove ripetute e indipendenti:

Spazio campionario: $\Omega_n \doteq \{0,1\}^n$

Misura di probabilità ~~su $\mathcal{P}(\Omega_n)$~~

$\boxed{P_1 = q \cdot \delta_1 + (1-q)\delta_0}$

$$P_n(\{(\omega_1,\dots,\omega_n)\}) \doteq q^{|\{i\in\{1,\dots,n\}:\, \omega_i=1\}|} \cdot (1-q)^{|\{i\in\{1,\dots,n\}:\, \omega_i=0\}|}$$

$$= q^{s(\omega)} \cdot (1-q)^{n-s(\omega)}, \quad \omega\in\Omega_n.$$

dove $s(\omega) \doteq |\{i\in\{1,\dots,n\}:\ \omega_i = 1\}|$ numero di successi in una successione di n prove

$\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega_n$.

$\rightsquigarrow$ P_n misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega_n)$.

Eventi di interesse:

C_i = "prova i-esima dà successo"

$\rightsquigarrow$ $C_i = \{\omega\in\Omega_n:\ \omega_i = 1\}$, $i\in\{1,\dots,n\}$.

$\rightsquigarrow$ $C_1,\dots,C_n$ sono indipendenti (come famiglia) ed equiprobabili con $P_n(C_i) = q$.

Costruzione esplicita ~~del~~ ~~mo~~ di un modello per n prove ~~ind~~ ripetute e indipendenti.

In generale: $n \in \mathbb{N}$

Def.: Sia $q \in [0,1]$. Siano $C_1,\dots,C_n$ eventi in uno spazio di probabilità (discreto) (Ω, P).

Allora $C_1,\dots,C_n$ si dicono un modello per n prove ripetute e indipendenti ~~se~~ *

se $C_1,\dots,C_n$ sono indipendenti come famiglia (risp. a P)

e $P(C_i) = q$ per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$

* con probabilità di successo q

Calcolo di alcune probabilità fondamentali legate alle prove ripetute e indipendenti.

Siano $C_1, \dots, C_n$ eventi indipendenti ed equiprobabili, con $P(C_i) = q$, in uno spazio probabilità discreto (Ω, P).

$\uparrow$ probab. di successo di una singola prova

1) Probabilità che nessuna prova abbia successo:

$$P(C_1^c \cap \dots \cap C_n^c) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indip.}}}{=} (1-q)^n$$

2) Probabilità che almeno una prova abbia successo:

$$P(\underbrace{C_1 \cup \dots \cup C_n}_{= (C_1^c \cap \dots \cap C_n^c)^c}) = 1 - (1-q)^n.$$

3) Probabilità che il primo successo avvenga alla prova l-esima, $l \in \{1, \dots, n\}$:

$$P(C_1^c \cap \dots \cap C_{l-1}^c \cap C_l) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indip.}}}{=} (1-q)^{l-1} \cdot q.$$

4) Probabilità che esattamente K delle n prove abbiano successo: $K \in \{0, \dots, n\}$

Prima: probabilità che le prove $1, \dots, K$ abbiano successo, e le altre no:

$$P(C_1 \cap \dots \cap C_K \cap C_{K+1}^c \cap \dots \cap C_n^c) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indip.}}}{=} q^K \cdot (1-q)^{n-K}$$

Analogamente, probabilità che le prove $i \in I$, dove $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $|I| = K$, abbiano successo, e le altre no:

$$P\Big(\bigcap_{i \in I} C_i \cap \bigcap_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus I} C_j^c\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indip.}}}{=} q^K \cdot (1-q)^{n-K}.$$

Risposta:

$$P\Big(\bigcup_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ |I| = K}} \Big(\bigcap_{i \in I} C_i \cap \bigcap_{j \in I^c} C_j^c\Big)\Big)$$

$$\underset{\substack{\text{eventi disgiunti} \\ \text{a due a due}}}{=} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I| = K}} q^K \cdot (1-q)^{n-K} = \binom{n}{K} \cdot q^K (1-q)^{n-K}, \quad K \in \{0, \dots, n\}$$

↗ distribuzione binomiale di parametri n, q.