C. Spazi metrici

Obiettivo: misurare la distanza tra gli elementi di un insieme

Distanze che godono di certe proprietà "naturali" si dicono metriche:

Def.: Sia $X \neq \emptyset$ un insieme non-vuoto.

Una coppia (X, d) si dice spazio metrico se d è una mappa $X \times X \to [0, \infty)$ tale che

(i) $d(x,x) = 0$ per ogni $x \in X$;

"identità" (ii) se $d(x,y) = 0$, allora $x = y$;

"simmetria" (iii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall\, x,y \in X$;

"disuguaglianza triangolare" (iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall\, x,y,z \in X$.

In questo caso, d si dice metrica (su X).

Se la mappa d ~~soddisfa~~ soddisfa a (i), (iii), (iv), allora d si dice una semimetrica (pseudometrica).

Osservazioni:

1) Le proprietà (i) + (ii) di una metrica d diventano: $\forall\, x, y \in \mathcal{X}$

$$d(x,y) = 0 \iff x = y.$$

2) Se d è una semimetrica su $\mathcal{X}$, allora induce una metrica sull'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla relazione

$$x \sim y \;:\!\iff d(x,y) = 0.$$

3) Se $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ è un sottoinsieme non-vuoto, e $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio (semi-)metrico, allora $(\mathcal{Y}, \tilde{d})$ è uno spazio (semi-)metrico con $\tilde{d} = d_{|\mathcal{Y}}$.

4) Ci sono distanze non-metriche importanti (ad esempio, la distanza di Kullback-Leibler / entropia relativa fra misure di probabilità), ma le distanze metriche sono quelle più "naturali".

Esempi:

1) La retta reale $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico con la distanza

$$d(x,y) \doteq |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Questa è la metrica standard su $\mathbb{R}$.

2) Lo spazio euclideo d-dimensionale $\mathbb{R}^d$ è uno spazio metrico con la distanza

$$d_2(x,y) \doteq \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \|x-y\|_2$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^d$$

Questa è la metrica standard su $\mathbb{R}^d$.

Esistono altre metriche (indotte da norme) su $\mathbb{R}^d$; ad esempio,

$$d_1(x,y) \doteq \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x,y) \doteq \max_{i\in\{1,\dots,d\}} |x_i - y_i|$$ metrica della sup / max

$$d_p(x,y) \doteq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p}.$$

3) Sia $\mathcal{X} \neq \emptyset$. La mappa

$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$ definita da

$$d(x,y) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

è una metrica su $\mathcal{X}$,

la metrica discreta su $\mathcal{X}$.

Questa è la metrica standard se $\mathcal{X}$ è finito.

4) Sia $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Poniamo

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) \doteq \{ f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : f \text{ limitata} \}$$

f limitata nel senso che $\exists\, C \in [0, \infty) : \forall x \in \mathcal{X} :$
$|f(x)| \leq C$.

Definiamo una mappa $d : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0, \infty)$

tramite
$$d(f,g) \doteq \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x) - g(x)|$$
$$= \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in \mathcal{X} \}$$

$\rightsquigarrow$ d è una metrica su $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, la metrica del sup.

5) Sia $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Supponiamo di avere una mappa $\mu : \wp(\mathcal{X}) \to [0,\infty)$ definita sul sistema delle parti di $\mathcal{X}$ tale che

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad e \quad \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

per ogni $A, B \subseteq \mathcal{X}$.

Definiamo $d : \wp(\mathcal{X}) \times \wp(\mathcal{X}) \to [0,\infty)$ tramite

$$d(A,B) \doteq \mu(\underbrace{A \,\Delta\, B}_{\text{differenza simmetrica}}), \quad A, B \subseteq \mathcal{X}.$$

$\rightsquigarrow$ d è una semimetrica su $\wp(\mathcal{X})$.

(verificare: disuguaglianza triangolare)

Una (semi)metrica genera insiemi "aperti" (e "chiusi"), quindi una topologia, e una nozione di convergenza.

Sia $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio (semi)metrico.

Per $x \in \mathcal{X}$, $r > 0$, poniamo

$$B_r(x) \doteq \{ y \in \mathcal{X} : d(x,y) < r \}$$

__palla aperta__ di raggio r intorno a x;

$$\overline{B_r(x)} \doteq \{ y \in \mathcal{X} : d(x,y) \leq r \}$$

__palla chiusa__ di raggio r intorno a x.

Def.: Un sottoinsieme $A \subseteq \mathcal{X}$ si dice __aperto__ (risp. a d) se

$$\forall x \in A : \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A.$$

Nota: $\emptyset$ è aperto,
$\mathcal{X}$ è aperto.

Def.: Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice <u>chiuso</u> se A^c è aperto.

Nota: $\emptyset, X$ sono sia aperti che chiusi.

Def.: Il sistema dei sottoinsiemi aperti (risp. a d)

$$\tau_d \doteq \{ A : A \subseteq X \text{ aperto (risp. a } d) \}$$

si dice la <u>topologia indotta</u> da d.

Nota: τ_d è davvero una topologia:

$\emptyset \in \tau_d$, $X \in \tau_d$,

τ_d contiene ~~tutte le~~ unioni <u>arbitrarie</u> e intersezioni <u>finite</u> di aperti

nel senso che se $(A_i)_{i \in I} \subset \tau_d$ allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_d ;$$

se $(A_i)_{i \in I} \subset \tau_d$ e $|I| < \infty$, allora

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau_d$$

Convergenza rispetto a una (semi-)metrica:

Def.: Sia $\mathcal{X} \neq \emptyset$, e sia d una semimetrica su $\mathcal{X}$.

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ una successione, e sia $x \in \mathcal{X}$.

Si dice che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge</u> a x,

in simboli $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0: \ d(x_n, x) \leq \varepsilon.$

Questa nozione di convergenza è compatibile con la convergenza rispetto alla topologia indotta:

Sono equivalenti:

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x;

(ii) $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (in $\mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$)

(iii) per ogni $A \in \tau_d$ (cioè $A \subseteq \mathcal{X}$ aperto):

se $x \in A$ allora $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$:

$x_n \in A$.

Se d è una metrica vera e propria su $\mathcal{X}$, allora il limite di una successione convergente è univocamente determinato. In questo caso, si scrive anche $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ al posto di $x_n \to x$.

– – –

Sia d una semimetrica su $\mathcal{X} \neq \emptyset$.

Per un sottoinsieme $D \subseteq \mathcal{X}$ definiamo

- $\operatorname{int}(D) \doteq \{x \in D : \exists\, A \subseteq \mathcal{X} \text{ aperto: } x \in A \text{ e } A \subseteq D\}$

  l'<u>interno</u> di D;

- $cl(D) \doteq \bigcap_{\substack{G \subseteq \mathcal{X} \text{ chiuso:} \\ D \subseteq G}} G$ la <u>chiusura</u> di D

  (nota: $cl(D)$ è chiuso!)

- $\partial D \doteq \{x \in \mathcal{X} : \forall\, A \subseteq \mathcal{X} \text{ aperto: se } x \in A, \text{ allora } A \cap D \neq \emptyset \text{ e } A \cap D^c \neq \emptyset\}$

  il <u>bordo</u> di D.

Sia $D \subseteq \mathcal{X}$, $(\mathcal{X}, \tau)$ spazio topologico

Allora

- $int(D) \doteq \{x \in D : \exists\ A \subset \mathcal{X}$ aperto: $x \in A$ e $A \subset D\}$

$$= \bigcup_{\substack{A \text{ aperto:} \\ A \subseteq D}} A$$

Notazione: $int(D) = \mathring{D}$

si dice <u>interno</u> di D;

- $$cl(D) \doteq \bigcap_{\substack{G \text{ chiuso:} \\ G \supseteq D}} G$$

Notazione: $cl(D) = \overline{D}$

$= D \cup \{x \in D^c : \forall\ A \subset \mathcal{X}$ aperto: se $x \in A$ allora $A \cap D \neq \emptyset\}$

si dice <u>chiusura</u> di D;

- $\partial D \doteq \{x \in \mathcal{X} : \forall\ A \subset \mathcal{X}$ aperto: se $x \in A$ allora $A \cap D \neq \emptyset$ e $A \cap D^c \neq \emptyset\}$

si dice <u>bordo</u> o <u>frontiera</u> di D.

Relazioni tra $int(D)$, $cl(D)$, ∂D:

1) $\partial D = cl(D) \setminus int(D)$;

2) ∂D è chiuso;

3) $D \setminus \partial D = int(D)$, che è aperto;

4) $D \cup \partial D = cl(D)$, che è chiuso;

5) D è aperto se e solo se $D \cap \partial D = \emptyset$;

6) D è chiuso se e solo se $\partial D \subseteq D$;

7) se D è chiuso e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$
è successione convergente con limite $x \in \mathcal{X}$,
allora $x \in D$;

8) ~~per ogni~~ se $\tau = \tau_d$ topologia generata
da una (semi)metrica:
$\forall r > 0 \ \forall x \in \mathcal{X}$:

$$B_r(x) \subseteq cl(B_r(x)) \subseteq \overline{B}_r(x)$$

può essere $\subsetneq$;
ad esempio se d è la metrica discreta

Per un sottoinsieme $D \subseteq \mathcal{X}$ di uno spazio (semi-)metrico $(\mathcal{X}, d)$ definiamo il <u>diametro</u> di D (risp. a d) mediante

$$\operatorname{diam}(D) \doteq \sup \{ d(x, y) : x, y \in D \}$$

$\operatorname{diam}(D)$ è ben definito in $[0, \infty]$.

Un sottoinsieme D tale che $\operatorname{diam}(D) < \infty$ si dice <u>limitato</u>.

Esempi:
- Per $r > 0$, $x \in \mathcal{X}$:

$$\operatorname{diam}(B_r(x)) \leq \operatorname{diam}(\overline{B}_r(x)) \leq 2r.$$

- Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ è una successione convergente con $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$, allora

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

sono insiemi limitati.

Concetto importante: funzioni continue

Def.: Siano $(\mathcal{X}, d)$, $(\mathcal{Y}, \tilde{d})$ spazi metrici.

Una funzione $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ si dice

continua in $x \in \mathcal{X}$ se

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ implica $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$.

La funzione f si dice *continua* se

f è continua in x per ogni $x \in \mathcal{X}$.

Caratterizzazione equivalente:

$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è continua se e solo se

$f^{-1}(B)$ è aperto (in $\mathcal{X}$ risp. a τ_d)

per ogni aperto $B \subseteq \mathcal{Y}$ (risp. a $\tau_{\tilde{d}}$).

$f^{-1}(B)$ indica la *controimmagine* di B sotto f:

$$f^{-1}(B) \doteq \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in B\}.$$

Esempi:

1) Distanza da un punto:

Sia $(\mathcal{X}, d)$ spazio metrico, sia $\mathcal{Y} \doteq \mathbb{R}$ con la metrica standard

Sia $x_0 \in \mathcal{X}$. Definiamo $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tramite

$$f(x) \doteq d(x, x_0), \quad x \in \mathcal{X}$$

Allora f è continua.

2) Distanza da un insieme: $(\mathcal{X}, d)$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ come in 1)

Sia $A \subset \mathcal{X}$. Definiamo

$\tilde{f} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tramite

$$\tilde{f}(x) \doteq \inf \{ d(x, y) : y \in A \}$$

distanza tra x, y

Allora $\tilde{f}$ è continua.

Nota: $\tilde{f}(x) = 0$ se $x \in cl(A)$.

Esempi (cont.)

3) Situazione: $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ con la metrica standard

Allora sono continue

- le funzioni costanti $x \mapsto x$
- i polinomi
- le funzioni "elementari": sin, cos, exp
- alcune funzioni razionali come

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Inoltre, sono continue le combinazioni lineari di funzioni continue.

! 4) Composizione di funzioni continue:

Siano $(\mathcal{X}, d)$, $(\mathcal{Y}, \tilde{d})$, $(\mathcal{Z}, \hat{d})$ spazi metrici,

e siano $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g: \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$.

Se f, g sono continue, allora lo è anche

la composizione $g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in \mathcal{X}.$$