VETTORI ALEATORI DISCRETI

Gli strumenti probabilistici acquisiti finora non ci permettono nemmeno di calcolare i parametri riassuntivi di tutte le funzioni (anche semplici) di variabili aleatorie come, ad esempio, XY o $X+Y$. Cerchiamo di capire il perché; calcoliamo $Var(X+Y)$.

$$Var(X+Y) = E[(X+Y-E(X+Y))^2]$$

$$= E[(X-E(X))^2] + E[(Y-E(Y))^2] + 2\underbrace{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}_{=:\, Cov(X,Y) \text{ COVARIANZA}}$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

Analizziamo più in dettaglio la covarianza:

i. $Cov(X,X) = Var(X)$

ii. $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
$$= \boxed{E(XY)} - E(X)E(Y)$$

Non lo sappiamo calcolare nemmeno se conosciamo p_X e p_Y. Che densità usiamo nel calcolo del valor medio?

Proviamo a calcolare $E(XY)$:

$$E(XY) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} x_i y_j \underbrace{P(X = x_i, Y = y_j)}$$

IN GENERALE NON È NOTA
anche se p_X e p_Y lo sono.

Al momento sappiamo ricavare $P(X = x_i, Y = y_j)$ solo in un caso, cioè quando gli eventi $\{X = x_i\}$ e $\{Y = y_j\}$ sono indipendenti per ogni $x_i \in \mathcal{X}$ e $y_j \in \mathcal{Y}$. Altrimenti non sappiamo come fare.

<u>Osservazione fondamentale</u>. La $P(X = x_i, Y = y_j)$ contiene le informazioni sulla **"dipendenza"** tra X e Y che ovviamente non possono essere ricavate dalle informazioni che abbiamo sulle singole variabili X e Y, cioè dalla conoscenza di p_X e p_Y.

<u>DEFINIZIONE DI VETTORE ALEATORIO DISCRETO</u>. Sia $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ uno sp. di prob. discreto. Ogni mappa

$$\underline{V} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

è detta vettore aleatorio discreto n-dimensionale.

Per semplicità ci ridurremo al caso $n=2$. Quindi ci interesseremo solo a vettori aleatori bidimensionali.

$$\begin{aligned} \underline{V} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

dove X, Y sono v.al. con alfabeto $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ rispettivamente e densità discrete p_X e p_Y.

Caratterizziamo $\underline{V}$.

<u>ALFABETO</u>. Siano $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ e $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}$ gli alfabeti di X e Y. Allora per l'alfabeto $\mathcal{V}$ di $\underline{V} = (X, Y)$ si ha $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

<u>Esempi</u>

Consideriamo due lanci sequenziali di una moneta. Indichiamo con 1 l'esito testa e con 0 l'esito croce.

- $\omega \longmapsto \underline{V}_1(\omega) = (X_1(\omega), Y(\omega))$ con $X_1(\omega) =$ esito 1° lancio
  $Y(\omega) =$ esito 2° lancio

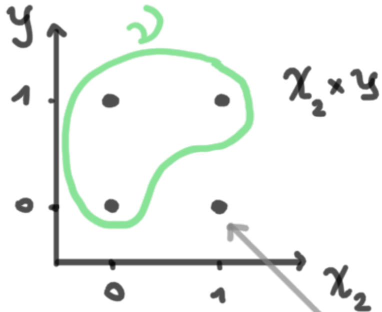
Allora $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}$.

- $\omega \longmapsto \underline{V}_2(\omega) = (X_2(\omega), Y(\omega))$ con $X_2(\omega) =$ minimo esiti dei due lanci

$Y(\omega) =$ esito 2° lancio

Allora $\mathcal{X}_2 = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$, ma $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}$

$\mathcal{D} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$



non permesso: non posso avere minimo 1 se uno dei due lanci ha esito 0.

DEFINIZIONE DI DENSITÀ DISCRETA CONGIUNTA. La mappa

$$p_{XY} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow [0, 1]$$
$$(x_i, y_j) \longmapsto p_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

è detta densità discreta congiunta del vettore (X, Y) o (più usato) densità discreta congiunta delle variabili X e Y.

Oss. Per comodità si prende come dominio $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, anziché $\mathcal{D}$. Si ha, per i punti $(x_i, y_j) \notin \mathcal{D}$, $p_{XY}(x_i, y_j) = 0$, poiché $\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\} = \emptyset$.

PROPRIETÀ DELLA DENSITÀ CONGIUNTA

- $p_{XY}(x_i, y_j) \geq 0$ per ogni $x_i \in \mathcal{X}$ e $y_j \in \mathcal{Y}$ (positività)

- $\displaystyle\sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} p_{XY}(x_i, y_j) = 1$ (normalizzazione)

Esempio

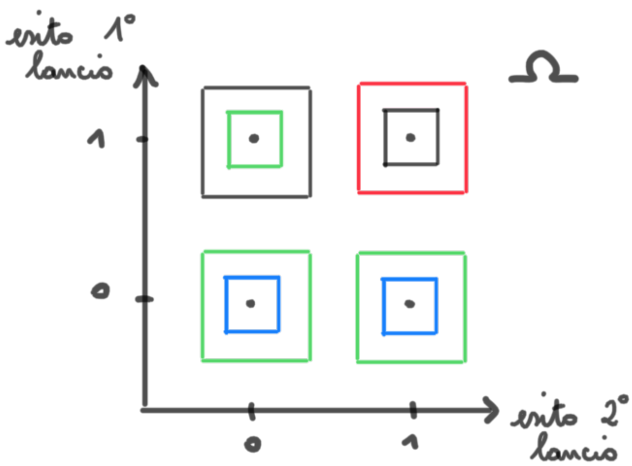
Consideriamo due lanci sequenziali di una moneta. Indichiamo con 1 l'esito testa e con 0 l'esito croce. Sia $\underline{V}_2(\omega)$ il vettore aleatorio definito nell'esempio precedente. Determiniamo la densità congiunta di X_2 e Y.

$\mathcal{Y}$

X_2 \ Y	0	1
0	2/4	1/4
1	0	1/4

$\mathcal{X}_2$

Corrisponde al punto che non sta in $\mathcal{D}$.



$p_{X_2 Y}(0,0) = P(\underline{X_2 = 0}, \underline{Y = 0}) = 2/4$

$p_{X_2 Y}(0,1) = P(\underline{X_2 = 0}, \underline{Y = 1}) = 1/4$

$p_{X_2 Y}(1,0) = P(\underline{X_2 = 1}, \underline{Y = 0}) = P(\emptyset) = 0$

$p_{X_2 Y}(1,1) = 1 - p_{X_2 Y}(0,0) - p_{X_2 Y}(0,1) - p_{X_2 Y}(1,0) = 1/4.$

Qual è la relazione tra p_X, p_Y e p_{XY}?

<u>Lemma</u>. Le densità p_X e p_Y delle v. al. componenti del vettore (X,Y), dette <u>densità marginali</u> del vettore, si possono ricavare dalla densità congiunta p_{XY} come

$$p_X(x_i) = \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} p_{XY}(x_i, y_j) \quad \text{per ogni } x_i \in \mathcal{X}$$

$$p_Y(y_j) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} p_{XY}(x_i, y_j) \quad \text{per ogni } y_j \in \mathcal{Y}.$$

<u>RICORDA</u>: dens. congiunta $\xrightarrow{\text{RICAVO}}$ dens. marginali

non ho info sulla dipendenza

DEFINIZIONE DI VALOR MEDIO. Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità congiunta p_{XY} e sia $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora, si ha

$$E(g(X,Y)) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} g(x_i, y_j)\, p_{XY}(x_i, y_j).$$

Esempi

- Possiamo mostrare la linearità del valor medio senza usare il teorema fondamentale del valor medio. Si ha

$$E(X+Y) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} (x_i + y_j)\, p_{XY}(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} x_i\, p_{XY}(x_i, y_j) + \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} y_j\, p_{XY}(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{x_i \in \mathcal{X}} x_i \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} p_{XY}(x_i, y_j) + \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} y_j \sum_{x_i \in \mathcal{X}} p_{XY}(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{x_i \in \mathcal{X}} x_i \; p_X(x_i) + \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} y_j \; p_Y(y_j)$$

$$= E(X) + E(Y).$$

- Possiamo calcolare (cosa che non sapevamo fare all'inizio della lezione)

$$E(XY) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}} x_i \, y_j \; p_{XY}(x_i, y_j).$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

Si considerino le variabili aleatorie X e Y con densità congiunta illustrata nella tabella

X \ Y	0	1	2
-1	1/4	1/8	1/4
0	1/4	1/8	0

Calcoliamo $Var(X+Y)$.

<u>Soluzione</u>. Si ha $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
Calcoliamo tutti i termini separatamente.
Cominciamo col calcolare le densità marginali.

$$X \begin{cases} p_X(-1) = p_{XY}(-1,0) + p_{XY}(-1,1) + p_{XY}(-1,2) \\ \quad = 1/4 + 1/8 + 1/4 = 5/8 \\ \\ p_X(0) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) \\ \quad = 1/4 + 1/8 + 0 = 3/8 \end{cases}$$

$$Y \begin{cases} p_Y(0) = p_{XY}(-1,0) + p_{XY}(0,0) \\ \quad = 1/4 + 1/4 = 1/2 \\ \\ p_Y(1) = p_{XY}(-1,1) + p_{XY}(0,1) \\ \quad = 1/8 + 1/8 = 1/4 \\ \\ p_Y(2) = p_{XY}(-1,2) + p_{XY}(0,2) \\ \quad = 1/4 + 0 = 1/4 \end{cases}$$

Calcoliamo

$$E(X) = (-1) \cdot 5/8 = -5/8$$

$$E(Y) = 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 = 3/4$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (-1)^2 \cdot 5/8 - 25/64 = 15/64$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1^2 \cdot 1/4 + 2^2 \cdot 1/4 - 9/16 = 11/16$$

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot 1/8 + (-1) \cdot 2 \cdot 1/4 - (-5/8)(3/4) = -5/32 \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, otteniamo

$$\underline{Var(X+Y)} = 15/64 + 11/16 - 10/32 = 39/64 .$$