MATRICI DI HADAMARD

Kit di sopravvivenza alle matrici *H*
di Leonardo Calconi
26.10.07

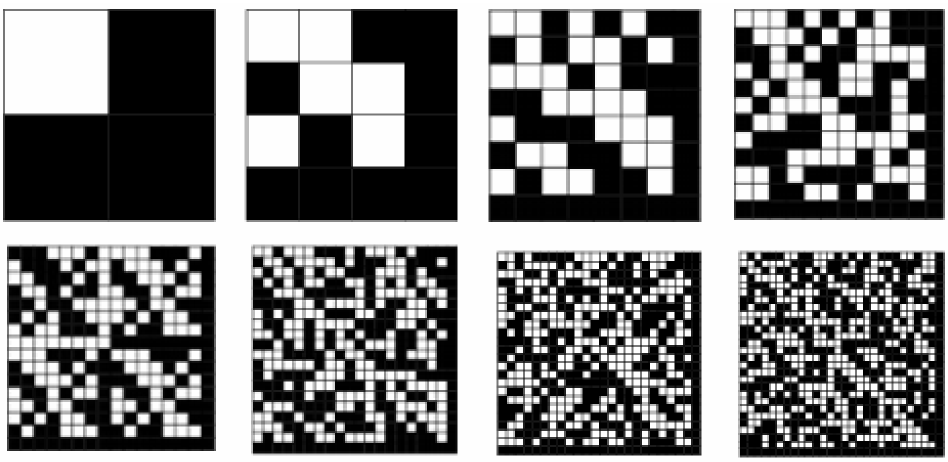
Il mio primo incontro con le matrici *H* avvenne a pagina 167 del secondo libro di calcolo di Tom Apostol: appena mezza pagina in caratteri piccoli, con la definizione ed alcune nozioni elementari. La cosa sarebbe potuta finire lì se undici pagine dopo il buon Apostol non avesse proposto tra gli esercizi due strane matrici quadrate, una di ordine 4 e una di ordine 6 composte soltanto da 1 e da -1, delle quali invitava a calcolare i determinanti.
Sembrava una provocazione escogitata a bella posta, perchè il calcolo dei due determinanti era molto semplice e probabilmente non era il fine unico dell'esercizio, e così iniziai un ping-pong tra pagina 167 e pagina 178 perchè qualcosa non mi tornava in merito all'ordine delle matrici...

Incontrare le matrici di Hadamart e decidere di volerne approfondire lo studio è come trovare il Vaso di Pandora e scoperchiarlo, con tutti i mali del mondo che ne fuoriescono e la speranza che rimane imprigionata sul fondo quando si decide di richiuderlo.
Matrici enormi, codici e crittografia, segnali binari e correzioni d'errori, design, telefonini, satelliti. Una follia.
Un ambito in prima istanza apparentemente (e proditoriamente...) semplice che si accomuna in modo straordinario ad un altro ambito ingannevolmente modesto all'approccio: quello dei numeri primi, con una congettura di esistenza per ambedue non ancora dimostrata.

In questo lavoro ho quindi approfondito solo le nozioni elementari, cercando di assemblare un kit di sopravvivenza alle matrici *H* ed evitando accuratamente di farmi prendere la mano da una ricerca che altrimenti si sarebbe rivelata, senza alcun dubbio, al di sopra delle mie capacità.

Jacques Salomon Hadamard è nato nella seconda metà dell'800, nell'epoca della macchina a vapore, quando Charles Babbage aveva già progettato ma non realizzato il Difference Engine ed Herman Hollerith doveva ancora costruire la prima calcolatrice a schede perforate, ed è morto novantottenne nel 1963, sei anni prima dello sbarco sulla Luna e una dozzina di anni prima che Seymour Cray premesse per la prima volta il pulsante "Power On" dell'omonimo "One".
La matematica allunga la vita ?
Per i più curiosi, la biografia completa su
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hadamard.html

Sommario



Ho tratto questa illustrazione da:
Weisstein, Eric W. "Hadamard Matrix" From MathWorld--A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/HadamardMatrix.htm

1 – Definizione

Sia H una matrice quadrata di ordine *n* ed $X = (x_{i,j})$ un suo vettore-riga tale che per tutte le sue coordinate sia $x_{i,j} = \pm 1$. Se è

(1.1)► $HH^T = nI$

la matrice è di Hadamard. In base a questa definizione la matrice *H* è non singolare ed invertibile e quindi il prodotto (1.1) è commutativo.

Ad esempio, per la matrice simmetrica

$$H = \begin{pmatrix} - & + & + & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{pmatrix}$$

> *Notazione:*
> $+ = +1$
> $- = -1$
> *H = (matrice) di Hadamart*

si ha

$$HH^T = H^T H = HH = \begin{pmatrix} - & + & + & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} - & + & + & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I$$

2 – Proprietà

Le proprietà seguenti sono sempre verificate in una matrice *H*.

1. *Il prodotto scalare di due vettori-riga è nullo, quindi essi sono ortogonali.*
2. *Il prodotto scalare di un vettore-riga per se stesso è uguale all'ordine della matrice, quindi la norma di tale vettore è data da* $\sqrt{n}$.
3. *L'ordine di una matrice H può essere 1 o 2 o* $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$.

3 – Prodotto di Kronecker

Date due matrici $A_{n,m} = a_{i,j}, B_{p,q} = b_{i,j}$ si definisce *prodotto di Kronecker*

(3.1)► $A \otimes B = C$ la matrice $C_{np,mq} = a_{i,j} B$.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} & 5\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \\ 2\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} & 9\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 5 & 30 \\ -14 & 8 & -35 & 20 \\ 2 & 12 & 9 & 54 \\ -14 & 8 & -63 & 36 \end{pmatrix} = C$$

Se le matrici *A* e *B* sono matrici *H*, la matrice *C* è una matrice *H*.
Il prodotto di Kronecker è fondamentale nello studio delle matrici *H*.

4 – Costruzione di Sylvester

Consideriamo la matrice seguente detta *matrice normalizzata H* di ordine 2 (per *normalizzata* si intende una matrice *H* di ordine qualunque con $a_{1,j} = a_{i,1} = 1$):

(4.1)► $H_{2+} = \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$

Eseguiamo su di essa il prodotto di Kronecker per ottenere la matrice *H* normalizzata di ordine 4:

(4.2)► $H_{4+} = H_{2+} \otimes H_{2+} = \begin{pmatrix} +H_{2+} & +H_{2+} \\ +H_{2+} & -H_{2+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{2+} & H_{2+} \\ H_{2+} & H_{2-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix}$

Si vede subito che possiamo generare ricorsivamente la matrice normalizzata *H* di ordine 8 utilizzando la normalizzata di ordine 4

(4.3)► $H_{8+} = H_{4+} \otimes H_{4+} = \begin{pmatrix} H_{4+} & H_{4+} \\ H_{4+} & H_{4-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{2+} & H_{2+} & H_{2+} & H_{2+} \\ H_{2+} & H_{2-} & H_{2+} & H_{2-} \\ H_{2+} & H_{2+} & H_{2-} & H_{2-} \\ H_{2+} & H_{2-} & H_{2-} & H_{2+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}$

per cui in generale si ha la *costruzione ricorsiva di Sylvester*

(4.4)► $H_{2S+} = \begin{pmatrix} H_{S+} & H_{S+} \\ H_{S+} & H_{S-} \end{pmatrix}, S = 2^k, k = 0,1,2,3...$

con la quale si possono ottenere matrici *H* di ordine 2^k e poiché la costruzione di Sylvester (1867) produce solo matrici simmetriche a traccia nulla, sembra plausibile chiamarle diversamente come *matrici di Sylvester*.

Possiamo naturalmente ottenere matrici *H* anche ricorrendo al prodotto di Kronecker tra matrici di indici diversi:

$H_2 \otimes H_4 = H_8$
$H_4 \oplus H_8 = H_{32}$

ma *non tutte* le matrici *H*, mancando quelle di ordine $\{n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\} - \{2^k\}$ per le quali bisogna ricorrere a costruzioni diverse.

5 – Equivalenza e non equivalenza

→Equivalenza di matrici *M*.

Ricordiamo che su una matrice quadrata *M* possiamo eseguire le operazioni elementari sulle righe per trasformarla in una equivalente.

Operazioni elementari:
- *Scambiare tra loro due righe.*
- *Sommare o sottrarre ad una riga un'altra riga.*
- *Moltiplicare una riga per uno scalare diverso da zero.*

Operazioni elementari combinate:
- *Sommare o sottrarre ad una riga un'altra riga moltiplicata per uno scalare diverso da zero.*
- *Sommare o sottrarre ad una riga la somma di due o più righe.*

E poiché è det(*M*) = det(M^T) le stesse operazioni possono essere eseguite sulle colonne.

→Equivalenza di matrici *H*.

Sulle matrici *H* possiamo invece eseguire solo un numero limitato di queste operazioni per ottenere una matrice equivalente.

Operazioni consentite:
- *scambiare tra loro due righe o due colonne*
- *moltiplicare gli elementi di una riga o di una colonna per -1 (negazione di riga o di colonna)*
- *effettuare una trasposizione (operazione che combina le due precedenti)*

Se consideriamo la matrice utilizzata nel paragrafo 1 per la definizione ed operiamo su di essa delle operazioni consentite, otteniamo la matrice H_4 normalizzata costruita col metodo Sylvester:

$$H_4 = \begin{pmatrix} - & + & + & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{pmatrix} - R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} + & - & - & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{pmatrix} R_1 \rightleftarrows R_4 \begin{pmatrix} + & + & + & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & - & - & - \end{pmatrix} - C_4 \rightleftarrows \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{2+} & H_{2+} \\ H_{2+} & H_{2-} \end{pmatrix}$$

Proponiamoci di quantificare il numero di matrici *H* equivalenti di ordine 2, per il quale ordine il lavoro da fare è molto semplice.

Le permutazioni distinte della matrice (4.1) (scambio di righe tra loro e di colonne tra loro) sono quattro

$$\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+&+\\-&+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-&+\\+&+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+&-\\+&+\end{pmatrix}$$

mentre le negazioni distinte su ciascuna permutazione sono otto.
Ma come si vede quattro di queste negazioni sono ripetizioni delle permutazioni

$$\begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-&-\\+&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-&+\\-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+&+\\-&+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-&+\\+&+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+&-\\+&+\end{pmatrix}$$

Inoltre per ciascuna permutazione le otto negazioni possibili sono sempre le stesse.
Pertanto si conclude che per l'ordine 2 le matrici *H* equivalenti sono otto, quattro dovute alle permutazioni e quattro dovute alle negazioni.
E' possibile ottenere lo stesso risultato considerando una qualsiasi delle matrici equivalenti e la sua negazione totale e poi ruotarle ambedue per tre volte di 90°.
Per $4 \le n \le 12$ non esistono metodi o formule per il calcolo del numero delle matrici equivalenti e stabilire l'equivalenza o meno di una matrice per $n > 12$ può essere un'impresa assai ardua.

→Non equivalenza di matrici *H*

Per tutti gli ordini successivi al 12 fino ad ora esplorati le matrici *H* non sono più uniche, nel senso che per ciascuno di questi ordini esistono *più matrici H non equivalenti tra loro*.
Ad esempio esistono 5 matrici *H* non equivalenti di ordine 16 che differiscono tra loro solo per alcune righe

++++++++++++++++	++++++++++++++++	++++++++++++++++	++++++++++++++++	++++++++++++++++
+-+-+-+-+-+-+-+-	+-+-+-+-+-+-+-+-	+-+-+-+-+-+-+-+-	+-+-+-+-+-+-+-+-	+-+-+-+-++++----
++--++--++--++--	++--++--++--++--	++--++--++--++--	++--++--++--++--	++--++--++--++--
+--++--++--++--+	+--++--++--++--+	+--++--++--++--+	+--++--++--++--+	+--++--++-+-+-+-
++++----++++----	++++----++++----	++++----++++----	++++----++++----	++++----++----++
+-+--+-++-+--+-+	+-+--+-++-+--+-+	+-+--+-++-+--+-+	+-+--+-++-+--+-+	+-+--+-++--++--+
++----++++----++	++----++++----++	++----++++----++	++----++++----++	++----+++--+-++-
+--+-++-+--+-++-	+--+-++-+--+-++-	+--+-++-+--+-++-	+--+-++-+--+-++-	+--+-++-+-+--+-+
++++++++--------	++++++++--------	++++++++--------	++++++++--------	++++++++--------
+-+-+-+--+-+-+-+	+-+-+--+-+-+-++-	++++--------++++	+++-+------+-+++	+-+-+-+-----++++
++--++----++--++	++--++----++--++	++--+-+---++-+-+	++-+---+--+-+++-	++--++----++--++
+--++--+-++--++-	+--++-+--++--+-+	++---+-+--+++-+-	++---++---+++--+	+--++--+-+-+-+-+
++++--------++++	++++--------++++	+-+-+--+-+-+-++-	+-++-+---+--+-++	++++------++++--
+-+--+-+-+-++-+-	+-+--++--+-++--+	+-+--++--+-++--+	+-+---++-+-+++--	+-+--+-+-++--++-
++----++--++++--	++----++--++++--	+--+++---++---++	+--++-+--++--+-+	++----++-++-+--+
+--+-++--++-+--+	+--+-+-+-++-+-+-	+--+--++-++-++--	+---++-+-+++--+-	+--+-++--+-++-+-

e per gli ordini successivi ne abbiamo
3 di ordine 20
60 di ordine 24
487 di ordine 28.

Le cinque matrici di ordine 16 le ho prelevate da: http://www.uow.edu.au/~jennie/hadamard.html

Per ordini ancora successivi non è possibile sapere quante siano le matrici *H* non equivalenti e si è certi della loro esistenza solo fino all'ordine 428.

6 – Ordine e congettura di Hadamard

Mostriamo che l'ordine delle matrici *H* può essere solo **1**, **2** o **4k**.

a) Ordine **1**

La matrice *H* di ordine 1 esiste con due equivalenti: $(+),(-)$.

b) Ordine **2**

Abbiamo visto che anche la matrice *H* di ordine 2 esiste, con otto equivalenti.

c) Ordine **4k**.

Poiché la matrice *H* è ortogonale, il prodotto di due righe o due colonne deve essere zero essendo i due vettori-riga o i due vettori-colonna ortogonali. Ciò può verificarsi solo se *la metà degli elementi corrispondenti* per colonne o per righe ha lo stesso segno e l'altra metà segno opposto.

$$(+\ +\ +\ +\ +\ +\ -\ -\ -\ -\ -\ -)\cdot$$
$$(+\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -)=0$$

Questa condizione è necessaria e dimostra che l'ordine di una matrice *H* non può essere dispari ma, in ogni caso, non è sufficiente perchè la matrice sia *H*, come si vede da queste due righe appartenenti ad una matrice di ordine 10:

$$(+\ +\ +\ +\ +\ -\ -\ -\ -\ -)\cdot$$
$$(+\ -\ +\ -\ +\ +\ -\ +\ -\ +)=0$$

Si faccia attenzione a *non ritenere necessaria* la condizione per la quale perchè il prodotto di due righe di una matrice *H* sia nullo le due righe debbano avere *ciascuna* metà degli elementi di un segno e metà del segno opposto, condizione ben diversa dalla precedente.
Confrontare a tal proposito la matrice (9.11).
Possiamo dimostrare l'assunto $n = 4k$ con un sistema generato, ad esempio, da una matrice H_4 normalizzata:

$$(6.1)\blacktriangleright\ H_4=\begin{pmatrix}+&+&+&+\\+&+&-&-\\+&-&+&-\\+&-&-&+\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c+d=n\\a+b-c-d=0\\a-b+c-d=0\\a-b-c+d=0\end{cases}$$

Poiché i quattro vettori-riga danno luogo ad un insieme L.I. ($\det(H_4)\neq 0$), la matrice è *H*.
Sommando le quattro equazioni si ottiene $4a=n\Rightarrow n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$.
Avendo dimostrato che una matrice *H* deve avere ordine multiplo di 4 non abbiamo affatto dimostrato che esiste almeno una matrice *H* per *ogni ordine* multiplo di 4.
Questa è infatti la *congettura di Hadamard* che come tale attualmente è stata verificata (ma non dimostrata come teorema...) solo per ordini fino a 428.

7 – Determinante

Una matrice *H* è soluzione del *problema del massimo determinante*, nel quale la *disuguaglianza di Hadamard* afferma che se C_n è una matrice quadrata complessa di ordine n con $c_{i,j}\le 1$ si ha

$$(7.1)\blacktriangleright\ |\det(C)|\le n^{n/2}$$

Se *C* è una matrice *H* allora vale il segno di uguaglianza.
Ma non è vero il contrario !
Infatti se consideriamo la matrice (6.1) come matrice reale *M* allora su di essa possiamo eseguire non solo le operazioni consentite su righe e su colonne di *H* ma tutte le operazioni elementari su righe e su colonne, trasformandola in una matrice equivalente a blocchi

$$\Rightarrow R:I=I-II\begin{pmatrix}0&0&2&2\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}R:II\rightleftarrows IV\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&2&2\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}R:II=II-III\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&2&2\\0&0&-2&2\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

da cui abbiamo $|\det(M)|=\begin{vmatrix}2&2\\-2&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=8\cdot 2=16=n^{n/2}$

e pertanto non è vero che se nella disuguaglianza di Hadamard vale il segno di uguaglianza allora la matrice è *H*. Ecco i determinanti delle matrici *H* uniche:

$$|\det(H_1)|=1^{1/2}=1$$
$$|\det(H_2)|=2^1=2$$
$$|\det(H_4)|=4^2=16$$
$$|\det(H_8)|=8^4=4096$$
$$|\det(H_{12})|=12^6=2985984$$

8 – Diagonali
Cos'è una matrice *H diagonale* ?
Una matrice *H* è diagonale se $H + H^T = 2I$
La più semplice di esse è una delle matrici equivalenti di ordine 2

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} + & + \\ - & + \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ed eccone una di ordine 8:

$$\begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ - & + & + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & + & + & - & + & - \\ - & - & - & + & + & + & - & + \\ - & + & - & - & + & + & + & - \\ - & - & + & - & - & + & + & + \\ - & + & - & + & - & - & + & + \\ - & + & + & - & + & - & - & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} + & - & - & - & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & - & + & + \\ + & + & + & - & - & + & - & + \\ + & + & + & + & - & - & + & - \\ + & - & + & + & + & - & - & + \\ + & + & - & + & + & + & - & - \\ + & - & + & - & + & + & + & - \\ + & - & - & + & - & + & + & + \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E' evidente che una matrice *H* diagonale deve avere la diagonale interamente positiva.

9 – Costruzione di Paley
Esistono diversi altri metodi per la costruzione di matrici *H* che, non utilizzando la ricorsività, permettono di ottenerne con ordini non previsti dalla costruzione di Sylvester.
Il più noto e il più accessibile è la *costruzione di Paley*, per la quale sono necessarie alcune cognizioni che non diamo per acquisite e che riassumiamo brevemente.

→**T*eoremi di Paley***
sull'esistenza delle matrici *H* (1933).

1. Esiste una matrice *H* di ordine *n* se $n \equiv 0(\bmod 4)$ ed è della forma $n = (p^k + 1)$ con p^k potenza prima: $12 \equiv 0(\bmod 4)$ e $12 = 11^1 + 1$.
2. Esiste una matrice *H* di ordine *n* se è della forma $n = 2(p^k + 1)$ e $(p^k + 1) \equiv 2(\bmod 4)$ con p^k potenza prima: $12 = 2(5^1 + 1)$ e $6 \equiv 2(\bmod 4)$.

Possiamo ottenere H_{12} con la costruzione di Paley ma non con la Sylvester.

→**Residui quadratici**
Rappresentano le soluzioni *x* dell'equazione quadratica
(9.1)► $y^2 \equiv x(\bmod p)$ con *p* primo.
Ad esempio se *p* = 5 abbiamo

$1^2 \equiv 1(\bmod 5)$

$2^2 \equiv 4(\bmod 5)$

$3^2 \equiv 4(\bmod 5)$

$4^2 \equiv 1(\bmod 5)$

$5^2 \equiv 0(\bmod 5)$

Continuando si ripete la sequenza 14410 e quindi si conclude che (1,4) sono soluzioni non nulle dell'equazione (9.1).
Residui quadratici, non residui quadratici ed elementi nulli appartengono al campo finito $GF\left(p\right)$.

→**Simbolo di Legendre**
Definiamo il simbolo di Legendre (o funzione di Legendre) come carattere quadratico di $GF\left(p\right)$:

(9.2)► $\chi(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x \text{ è residuo quadratico} \\ -1 \text{ se } x \text{ è non residuo quadratico} \end{cases}$

→Matrice di Jakobsthal

Definiamo come *matrice di Jakobsthal* una matrice quadrata J di ordine p

(9.3)► $J_p = a_{i,j} = \chi(i - j)$

oppure con

(9.4)► $J_p = a_{i,j} = \chi(j - i)$ grazie all'antisimmetria che vedremo.

→Costruzione di H_{12} col teorema (1)

Tenendo presente che 12 = 11 +1 e che i residui quadratici di $GF(11)$ sono (1,4,9,5,3), proviamo a costruire la matrice J di ordine p = 11 con la (9.3) e indicizzazione a base zero.

La matrice costruita sarà una matrice antisimmetrica ($J^T = -J$)

$$J_{11} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In una matrice di Jakobsthal la somma degli elementi di una riga è un numero di Jakobsthal.
La successione di Jakobsthal è data da
a(n) = a(n-1) + 2a(n-2).
I primi termini sono:
0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, ...
Come si vede ogni riga o colonna di J ha la metà degli elementi non zero positivi e l'altra metà negativi, pertanto la somma degli elementi di una riga o colonna è zero, ovvero un numero di Jakobsthal.

Da J_{11} ricaviamo la matrice S_{12}

$$S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & j_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice H_{12} sarà data da

(9.5)► $H_{12} = S_{12} + I_{12}$

o anche dall'espressione compatta

(9.6)► $H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & J_{11} + I_{11} \end{pmatrix}$

Quindi, tenendo conto che nella (9.5) la somma con I_{12} trasforma in S_{12} la diagonale di zeri in diagonale di unità positive, avremo

$$(9.7)\blacktriangleright\ H_{12}=\begin{pmatrix}
+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+\\
-&+&-&+&-&-&-&+&+&+&-&+\\
-&+&+&-&+&-&-&-&+&+&+&-\\
-&-&+&+&-&+&-&-&-&+&+&+\\
-&+&-&+&+&-&+&-&-&-&+&+\\
-&+&+&-&+&+&-&+&-&-&-&+\\
-&+&+&+&-&+&+&-&+&-&-&-\\
-&-&+&+&+&-&+&+&-&+&-&-\\
-&-&-&+&+&+&-&+&+&-&+&-\\
-&-&-&-&+&+&+&-&+&+&-&+\\
-&+&-&-&-&+&+&+&-&+&+&-\\
-&-&+&-&-&-&+&+&+&-&+&+
\end{pmatrix}$$

Una variante diretta di questa costruzione si ottiene ricavando la matrice S_{12} con

$$S_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\1&j_{11}\end{pmatrix}$$

e quindi mediante una delle due espressioni

$$H_{12}=S_{12}-I_{12},\quad H_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\1&J_{11}-I_{11}\end{pmatrix}$$

la matrice H_{12} equivalente

$$(9.8)\blacktriangleright\ H_{12}=\begin{pmatrix}
+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+\\
+&-&-&+&-&-&-&+&+&+&-&+\\
+&+&-&-&+&-&-&-&+&+&+&-\\
+&-&+&-&-&+&-&-&-&+&+&+\\
+&+&-&+&-&-&+&-&-&-&+&+\\
+&+&+&-&+&-&-&+&-&-&-&+\\
+&+&+&+&-&+&-&-&+&-&-&-\\
+&-&+&+&+&-&+&-&-&+&-&-\\
+&-&-&+&+&+&-&+&-&-&+&-\\
+&-&-&-&+&+&+&-&+&-&-&+\\
+&+&-&-&-&+&+&+&-&+&-&-\\
+&-&+&-&-&-&+&+&+&-&+&-
\end{pmatrix}$$

→Costruzione di *H₁₂* col teorema (2)

Tenendo presente che 12 = 2(5 + 1) e che i residui quadratici di $GF(5)$ sono (1,4), costruiamo la matrice *J* di ordine *p* = 5 con la (9.3)

$$J_5=\begin{pmatrix}
0&1&-1&-1&1\\
1&0&1&-1&-1\\
-1&1&0&1&-1\\
-1&-1&1&0&1\\
1&-1&-1&1&0
\end{pmatrix}$$

Quindi ricaviamo la matrice S_6

$$S_6=\begin{pmatrix}0&1\\1&j_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
0&1&1&1&1&1\\
1&0&1&-1&-1&1\\
1&1&0&1&-1&-1\\
1&-1&1&0&1&-1\\
1&-1&-1&1&0&1\\
1&1&-1&-1&1&0
\end{pmatrix}$$

La matrice H_{12} sarà data da

$$(9.9)\blacktriangleright\ H_{12}=S_6\otimes H_{2+}+I_6\otimes H_{2-}$$

$$H_{12}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1\\1&0&1&-1&-1&1\\1&1&0&1&-1&-1\\1&-1&1&0&1&-1\\1&-1&-1&1&0&1\\1&1&-1&-1&1&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}S_6&S_6\\S_6&-S_6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-I_6&-I_6\\-I_6&I_6\end{pmatrix}$$

Si presti attenzione al fatto che i due prodotti di Kronecker a secondo membro della (9.9) non sono matrici *H*.

Eseguiamo ora il calcolo della (9.9) e ricaviamo H_{12}

$$=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&0&1&-1&-1&1&1&0&1&-1&-1&1\\1&1&0&1&-1&-1&1&1&0&1&-1&-1\\1&-1&1&0&1&-1&1&-1&1&0&1&-1\\1&-1&-1&1&0&1&1&-1&-1&1&0&1\\1&1&-1&-1&1&0&1&1&-1&-1&1&0\\\hline 0&1&1&1&1&1&0&-1&-1&-1&-1&-1\\1&0&1&-1&-1&1&-1&0&-1&1&1&-1\\1&1&0&1&-1&-1&-1&-1&0&-1&1&1\\1&-1&1&0&1&-1&-1&1&-1&0&-1&1\\1&-1&-1&1&0&1&-1&1&1&-1&0&-1\\1&1&-1&-1&1&0&-1&-1&1&1&-1&0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}-1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&-1&0\\-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&-1\\\hline 0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$(9.10)\blacktriangleright\ H_{12}=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}-&+&+&+&+&+&-&+&+&+&+&+\\+&-&+&-&-&+&+&-&+&-&-&+\\+&+&-&+&-&-&+&+&-&+&-&-\\+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-\\+&-&-&+&-&+&+&-&-&+&-&+\\+&+&-&-&+&-&+&+&-&-&+&-\\\hline -&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&-\\+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&+&-\\+&+&-&+&-&-&-&-&+&-&+&+\\+&-&+&-&+&-&-&+&-&+&-&+\\+&-&-&+&-&+&-&+&+&-&+&-\\+&+&-&-&+&-&-&-&+&+&-&+\end{array}\right)$$

Ma non è finita.

Possiamo ottenere una matrice *H* equivalente sostituendo nel secondo prodotto di Kronecker H_{2-} con la sua equivalente ottenuta con due rotazioni orarie

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\hookleftarrow\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\hookleftarrow\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

da cui, eseguendo una nuova costruzione otteniamo

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} S_6 & S_6 \\ S_6 & -S_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_6 & -I_6 \\ -I_6 & -I_6 \end{pmatrix}$$

$$(9.11)\; H_{12} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} + & + & + & + & + & + & - & + & + & + & + & + \\ + & + & + & - & - & + & + & - & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & + & + & - & + & - & - \\ + & - & + & + & + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & + & + & + & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & + & + & + & + & - & - & + & - \\ \hline - & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & - & - & + & + & - \\ + & + & - & + & - & - & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & - & + & - & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & - & + & + & - & - & - \\ + & + & - & - & + & - & - & - & + & + & - & - \end{array}\right)$$

In ciascuna riga di questa matrice esclusa la prima, sette elementi hanno lo stesso segno e cinque segno opposto, ma gli elementi corrispondenti di due righe qualsiasi hanno per metà stesso segno e per metà segno opposto. La matrice è sicuramente matrice H perchè

$$HH^T = nI$$

A questo punto abbiamo ottenuto un risultato molto importante perchè abbiamo dimostrato che non è vero che in un matrice *H* due righe debbano necessariamente avere *ciascuna* metà elementi di un segno e l'altra metà del segno opposto, mentre è vero che *metà degli elementi corrispondenti delle due righe* deve necessariamente avere stesso segno e metà segno opposto.
La costruzione di Paley, certamente più tortuosa di quella di Sylvester, permette di costruire matrici *H* che i teoremi di Paley assicurano esistere e quindi anche di ordini multipli di 4 per i quali la costruzione di Sylvester non è applicabile.
Una matrice di Paley può essere utilizzata per costruire altre matrici di Paley.
Ad esempio, ora che abbiamo la matrice H_{12} possiamo evitare la costruzione di Paley e ricorrere di nuovo al più semplice prodotto di Kronecker per ottenere

$$H_{24} = H_2 \otimes H_{12}$$

10 Costruzione di Williamson

Permette di costruire matrici *H* di grandi dimensioni e di qualunque ordine.
Definiamo *matrice circolante C* una matrice nella quale colonne e righe slittano in avanti di un elemento rispetto alle precedenti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nel contesto di questo lavoro le matrici circolanti ci interessano solo per la proprietà di essere commutative

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 28 & 26 \\ 26 & 20 & 26 & 28 \\ 28 & 26 & 20 & 26 \\ 26 & 28 & 26 & 20 \end{pmatrix}$$

$AB = BA$ è anch'essa una matrice circolante.
Con la *costruzione di Williamson* (1944) una matrice *H* è data da

$$(10.1)\blacktriangleright\ H=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}$$

Le matrici A,B,C,D sono matrici quadrate di ordine n e sono dette *matrici di Williamson*.
Devono avere le seguenti proprietà:

1. Essere simmetriche con elementi ± 1.
2. Essere commutative.
3. $A^2+B^2+C^2+D^2=4nI_n$

La proprietà 1) è semplice da verificare.
La proprietà 2) è verificata se si scelgono come matrici di Williamson matrici simmetriche circolanti.
La proprietà 3) è di difficile verifica ed è un lavoro per computer con apposito software.
Ecco un semplice esempio realizzato scegliendo come matrici di Williamson

$$A=\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}, B=C=D=\begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix}$$

Le proprietà 1),2) sono di verifica immediata.
Per la 3) abbiamo

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}=4\cdot 3\cdot I_3$$

Pertanto possiamo costruire una matrice H di ordine 12

$$H_{12}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
+ & + & + & + & - & - & + & - & - & + & - & - \\
+ & + & + & - & + & - & - & + & - & - & + & - \\
+ & + & + & - & - & + & - & - & + & - & - & + \\
\hline
- & + & + & + & + & + & + & - & - & - & + & + \\
+ & - & + & + & + & + & - & + & - & + & - & + \\
+ & + & - & + & + & + & - & - & + & + & + & - \\
\hline
- & + & + & - & + & + & + & + & + & + & - & - \\
+ & - & + & + & - & + & + & + & + & - & + & - \\
+ & + & - & + & + & - & + & + & + & - & - & + \\
\hline
- & + & + & + & - & - & - & + & + & + & + & + \\
+ & - & + & - & + & - & + & - & + & + & + & + \\
+ & + & - & - & - & + & + & + & - & + & + & +
\end{array}\right)$$

11 – Costruzione con matrici binarie

Il metodo permette di costruire matrici H di ordine $n=2^m, m\in\mathbb{N}$

Si tratta di costruire una matrice binaria $B_{n,m}$ con n righe e m colonne, ogni riga della quale rappresenta un numero binario a m bit. Proviamo per n = 8.

$$BB^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo eseguito il prodotto decimale ordinario BB^T ottenendo una matrice quadrata di ordine 8.
In questa matrice operiamo le sostituzioni

$$\begin{cases} 1 \text{ se } b_{n,m} \text{ è zero} \\ 1 \text{ se } b_{n,m} \text{ è pari} \\ -1 \text{ se } b_{n,m} \text{ è dispari} \end{cases}$$

ed otteniamo una matrice H normalizzata dello stesso ordine.

$$H = \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}$$

Come detto, poiché deve essere $n = 2^m$ con m intero, potremo costruire con questo metodo soltanto le stesse matrici H costruibili col metodo Sylvester.

12 – Codici sequenziali

Ecco una proprietà interessante delle matrici H che può accendere la fantasia.
Definiamo come *sequenze di riga* il numero di cambiamenti di segno di ogni riga e come *codice sequenziale* la sequenza di questi numeri, come spiega efficacemente questa tabella:

Righe	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
H_2	0	1						
H_4	0	3	1	2				
H_8	0	7	3	4	1	6	2	5

Nella documentazione inglese il termine è “Sequency code” e quella che ho dato mi è sembrata la traduzione più aderente.

Ogni matrice H ha quindi un suo codice sequenziale che è unico e la identifica.
Come si vede i codici sequenziali non collimano con l’ordine delle righe.
Disponendo di una stampa della matrice H si può certamente calcolarne il codice sequenziale prendendo una matita e contando i passaggi di segno di ogni riga.
Non disponendo della matrice o volendo calcolare il codice di una matrice grande certamente non si può procedere in questo modo.

Il metodo per eseguire questo calcolo per qualsiasi matrice H di ordine 2^k utilizza le matrici binarie B. Cominciamo con l’osservare che la matrice binaria ad un bit

$$B_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è esattamente il codice sequenziale di H_2. Costruiamo ora la matrice binaria successiva a 2 bit

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_1 bms \\ B_1 & \overline{B}_1 bms \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $B_1 bms$ è il bit meno significativo per riga di B_1 e $\overline{B}_1 bms$ il suo contrario.

Ora convertiamo la matrice binaria B_2 nella matrice decimale D_4

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{matrix}$$

ed ecco ottenuto il codice sequenziale di H_4.

Per ottenere B_3 a 3 bit e quindi il codice sequenziale di H_8 basta iterare il procedimento

$$B_3 = \begin{pmatrix} B_2 & B_2 bms \\ B_2 & \overline{B}_2 bms \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{matrix}$$

mentre per ottenere il codice sequenziale di H_{16} abbiamo bisogno di una matrice binaria a 4 bit:

$$B_4 = \begin{pmatrix} B_3 & B_3 bms \\ B_3 & \overline{B}_3 bms \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D_{16} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 12 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \\ 14 \\ 6 \\ 9 \\ 2 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + & + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - & + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & + & + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - & - & - & + & + & - & - & + & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - \\ + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + & + & - & + & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + & - & - & + & + & + & + & - & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - & + & - & - & + \end{matrix}$$

L'indice di B ci dice di quanti bit abbiamo bisogno per la matrice binaria.
All'indirizzo www.4dmatrix.it/math è disponibile un software per la verifica delle matrici *H*, per il calcolo dei codici sequenziali, per la costruzione delle trasposte e delle equivalenti. E' inoltre disponibile una collezione di centinaia di matrici *H* di ordini diversi anche molto grandi, incluso il 428

■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math