Dualità e Programmazione Lineare

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Problemi di programmazione lineare: punti di vista

1. ipotizza vettore x
2. verifica $x \in P$ e calcola $c^T x$
3. z^* è il *minimo* tra tutti

1. ipotizza valore funzione obiettivo w
2. verifica $w \leq c^T x$ su P (o vertici)
3. w^* è il *massimo* tra tutti

$$(PL_1) \qquad \begin{aligned} z^* = \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$(PL_2) \qquad \begin{aligned} w^* = \max \quad & w \\ \text{s.t.} \quad & w \leq c^T x \quad \forall x \in P \\ & w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

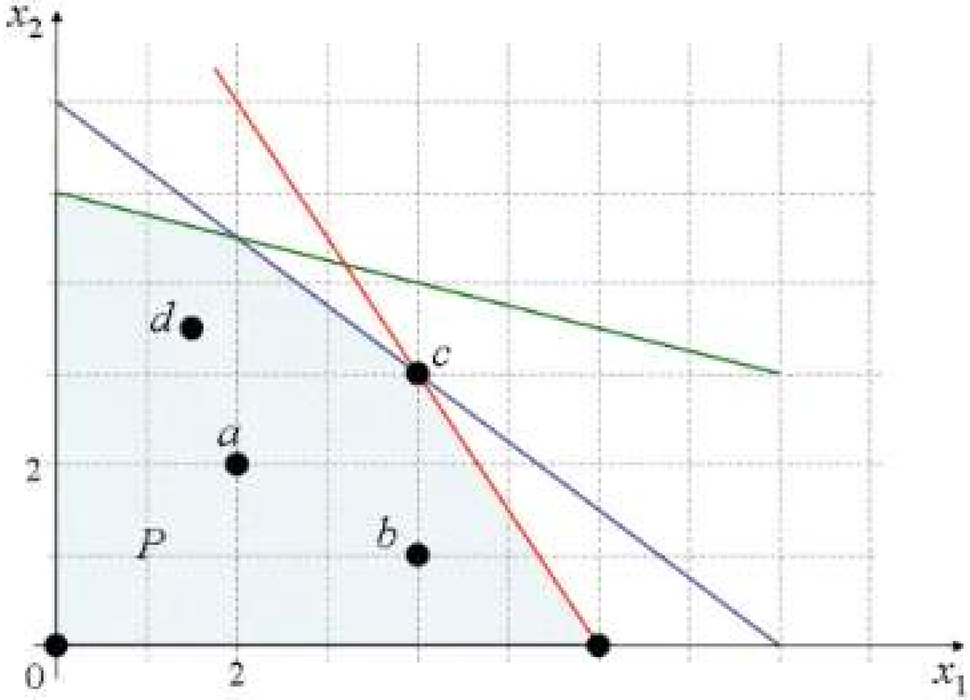
Se z^* esiste finito, $z^* = w^*$

- n variabili
- m vincoli

- 1 sola variabile (w)
- **molti** (esponenzialmente) vincoli

Esempio

$$\begin{array}{rrcrcr}
\min & -x_1 & - & x_2 & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$



$$\begin{array}{llcrl}
\max & w & & & \\
s.t. & w & \leq & -4 & (= c^T x \,|_{x=a=(2,2)}) \\
 & w & \leq & 0 & (= c^T x \,|_{x=0=(0,0)}) \\
 & w & \leq & -5 & (= c^T x \,|_{x=b=(4,1)}) \\
 & w & \leq & -7 & (= c^T x \,|_{x=c=(4,3)}) \\
 & w & \leq & -5 & (= c^T x \,|_{x=d=(3/2,7/2)}) \\
 & \dots & & & \\
 & w & \text{libera} & &
\end{array}$$

Nota:
possiamo limitare i vincoli alle sole soluzioni di base: $O\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ *vincoli*

Condizioni equivalenti di ammissibilità per PL_2

Obiettivo: riscrivere PL_2 in forma *maneggevole* (meno vincoli)

- Assunzione "tecnica": PL_1 ammette ottimo limitato
- Vogliamo trovare condizioni tali che

$$\boxed{\begin{cases} w \leq c^T x, \ \forall\, x \in P \\ P \neq \emptyset \\ z^* > -\infty \end{cases}} \iff \boxed{\text{??? condizioni ???}}$$

$\Rightarrow \exists B \quad \bar{c} \geq 0$

- Cominciamo deducendo delle condizioni necessarie ($\Longrightarrow$)

Espressione dei costi ridotti

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad Bx_B + Fx_F = b \quad \Rightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$

- $z = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Fx_F) + c_F^T x_F$
$$\Rightarrow z = \underbrace{c_B^T B^{-1} b}_{\bar{z}_B} + \underbrace{(c_F^T - c_B^T B^{-1} F)}_{\bar{c}_F^T} x_F$$

- $\bar{c}^T = [\bar{c}_B^T \mid \bar{c}_F^T] = [0^T \mid c_F^T - c_B^T B^{-1} F] =$
$= [c_B^T - c_B^T B^{-1} B \mid c_F^T - c_B^T B^{-1} F] =$
$= [c_B^T \mid c_F^T] - [c_B^T B^{-1} B \mid c_B^T B^{-1} F] =$
$= \quad c^T \quad - c_B^T B^{-1} [B \mid F] =$
$= \quad c^T \quad - c_B^T B^{-1} A$

Condizioni necessarie

- $P \neq \emptyset \ \wedge \ z^* > -\infty \Rightarrow \exists$ base $B : c^T \geq \ c_B^T B^{-1} A$
- $w \leq c^T x, \ \ \forall\, x \in P \Rightarrow \exists$ base $B : w \ \ \leq \ c_B^T B^{-1} b$

- $\exists$ base $B \Rightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^m \ : \ c_B^T B^{-1} = u^T$

- Riassumendo:

$$\begin{cases} w \leq c^T x, \forall\, x \in P \\ P \neq \emptyset \ \wedge \ z^* > -\infty \end{cases} \Longrightarrow \quad \exists\, u \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} u^T A \leq c^T \\ w \leq u^T b \end{cases}$$

Condizioni equivalenti!

Le condizioni sono **anche sufficienti**: $\forall\, x \in P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$:

- $\exists\, u \in \mathbb{R}^m : u^T A \leq c^T \Rightarrow u^T Ax \leq c^T x \Rightarrow u^T b \leq c^T x$
- $\exists\, u \in \mathbb{R}^m : w \leq u^T b \Rightarrow w \leq u^T b \leq c^T x$

Dato un problema di programmazione lineare

$$z^* = \min\{c^T x : x \in P\} \text{ con } P = \{x : Ax = b, x \geq 0\},$$

$$P \neq \emptyset \text{ e } z^* \text{ limitato,}$$

valgono le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

$$w \leq c^T x,\ \forall\, x \in P \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, u \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} u^T A \leq c^T \\ w \leq u^T b \end{cases}$$

Forma equivalente per PL_2

$$\min c^T x = z^*$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
w^* = \max \quad & w \\
\text{s.t.} \quad & w \leq c^T x \quad \forall\, x \in P \\
& w \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w^* = \max \quad & w \\
\text{s.t.} \quad & w \leq u^T b && \text{(un vincolo)} \\
& u^T A \leq c^T && (n \text{ vincoli}) \\
& u \in \mathbb{R}^m && (m \text{ variabili})
\end{aligned}
$$

[all'ottimo, $w = u^T b$]

$$
(PL_2) \qquad
\begin{aligned}
w^* = \max \quad & u^T b \\
\text{s.t.} \quad & u^T A \leq c^T && (n \text{ vincoli}) \\
& u \in \mathbb{R}^m && (m \text{ variabili})
\end{aligned}
$$

Coppie di problemi primale-duale

(PL_1)	(PL_2)
$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} w^* = \max \quad & u^T b \\ \text{s.t.} \quad & u^T A \leq c^T \\ & u \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$
– n variabili x	– n vincoli
– m vincoli	– m variabili u

Teorema: dualità forte

Se PL_1 ammette ottimo finito, $z^* = w^*$

Il problema duale

- vincolo primale $\leftrightarrow$ variabile duale

$$u^T b = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \ \dots \ + u_m b_m$$

- variabile primale $\leftrightarrow$ vincolo duale

$$u^T A \leq c^T \equiv \begin{cases} u^T A_1 \leq c_1 \\ u^T A_2 \leq c_2 \\ \dots \\ u^T A_j \leq c_j \\ \dots \\ u^T A_n \leq c_n \end{cases} \equiv u^T A_j \leq c_j, \ \forall \, j = 1 \dots n$$

Esempio

$\max u^T b =$

$= [u_1\ u_2] \begin{bmatrix} 22 \\ 15 \end{bmatrix}$

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 22 \quad u_1 \\
 & x_1 & - & 7x_2 & & & = & 15 \quad u_2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$u^T A \leq c^T =$

$\max 22u_1 + 15u_2$

$u^T A = [u_1\ u_2] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} =$

$[2u_1 + u_2 \mid 4u_1 - 7u_2 \mid 3u_1] \leq$

$\leq [\ 2 \mid -3 \mid -1$

$$
\begin{cases}
2u_1 + u_2 \leq 2 \\
4u_1 - 7u_2 \leq -3 \\
3u_1 \leq -1 \\
u_1, u_2 \text{ libere}
\end{cases}
$$

Esempio

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\min & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & - & x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 22 \quad u_1 \\
 & x_1 & - & 7\,x_2 & & & = & 15 \quad u_2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 22\,u_1 & + & 15\,u_2 & & \\
\text{s.t.} & 2\,u_1 & + & u_2 & \leq & 2 \\
 & 4\,u_1 & - & 7\,u_2 & \leq & -3 \\
 & 3\,u_1 & & & \leq & -1 \\
 & u_1 & , & u_2 & & \text{libere}
\end{array}
$$

Esempio

$z^* = 38$

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & - & x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 22 \\
 & x_1 & - & 7\,x_2 & & & = & 15 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 22\,u_1 & + & 15\,u_2 & & \\
\text{s.t.} & 2\,u_1 & + & u_2 & \leq & 2 \\
 & 4\,u_1 & - & 7\,u_2 & \leq & -3 \\
 & 3\,u_1 & & & \leq & -1 \\
 & u_1 & , & u_2 & & \text{libere}
\end{array}
$$

$w^* = 38$

Duali di PL in forma generica

- Per la **sufficienza**, definire $u^T A \sim c^T$ e u per **mantenere**

$$c^T x \quad \underbrace{\quad \geq \quad}_{\substack{\textit{siccome } x \geq 0 \\ \textit{serve } u^T A \leq c^T}} \quad u^T A x \quad \underbrace{\quad \color{red}{\geq} \quad}_{\substack{\textit{siccome } Ax = b \\ \textit{vale con } u \textit{ qualsiasi}}} \quad u^T b \;\geq\; w,\ \forall\, x \in P$$

- Consideriamo $c^T x \geq u^T A\, x$:

$$u^T A x = \quad [u^T A_1 | u^T A_2 | \ldots | u^T A_j | \ldots | u^T A_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_j \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= u^T A_1 x_1 + u^T A_2 x_2 + \ldots + \color{red}{u^T A_j x_j} + \ldots + u^T A_n x_n$$

$$c^T x \;=\; c_1 x_1 \;+\; c_2 x_2 \;+ \ldots +\; c_j x_j \;+ \ldots +\; c_n x_n$$

Duali di PL in forma generica (cont.)

- Affinché $u^T A x \leq c^T x$, è sufficiente

$$u^T A_j x_j \leq c_j x_j, \quad \forall j = 1 \dots n$$

$$u^T A_j x_j \overset{\leq}{=} c_j x_j$$

- Pertanto:

  se $x_j \geq 0$, la condizione sufficiente è che $u^T A_j \leq c_j$

  se $x_j \leq 0$, la condizione sufficiente è che $u^T A_j \geq c_j$

  se x_j libera, la condizione sufficiente è che $u^T A_j = c_j$

- variabile primale ≥ 0 / ≤ 0 / *libera* $\quad \rightsquigarrow \quad$ vincolo duale $\leq$ / $\geq$ / $=$

Duali di PL in forma generica (cont.)

- Manteniamo adesso la seconda disugualianza della catena

$$c^T x \underbrace{\geq}_{x \geq 0} u^T A x \underbrace{\geq}_{Ax=b} u^T b \geq w, \forall x \in P$$

- Consideriamo $u^T A x \geq u^T b$:

$$u^T A x = [u_1|u_2|\ldots|u_i|\ldots|u_n] \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \ldots \\ a_i^T x \\ \ldots \\ a_m^T x \end{bmatrix} =$$

$$= u_1 a_1^T x + u_2 a_2^T x + \ldots + u_i a_i^T x + \ldots + u_m a_m^T x$$

$$u^T b = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \ldots + u_i b_i + \ldots + u_m b_m$$

Duali di PL in forma generica (cont.)

- Affinché $u^T A x \geq u^T b$, è sufficiente

$$u_i\, a_i^T\, x \geq u_i\, b_i,\ \forall\ i = 1 \ldots m$$

- Pertanto:

se $a_i^T x \ \geq \ b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \ \geq \ 0$

se $a_i^T x \ \leq \ b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \ \leq \ 0$

se $a_i^T x \ = \ b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \ \in \ \mathbb{R}$ (sempre!)

- vincolo primale $\geq$ / $\leq$ / $=$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ variabile duale ≥ 0 / ≤ 0 / *libera*

Si può dimostrare che le condizioni sono anche necessarie.

Duali di PL in forma generica: conversione

- Considerare singolarmente variabili e vincoli primali

Primale ($\min c^T x$)	**Duale** ($\max u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

- Per problemi di max, partire dalla colonna di destra

Esempio 1

$u^T A \sim c^T \qquad u^T A_1 \quad c_1$

$u^T A_2 \sim c_2$

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 10x_1 & +20x_2 & +0\cdot x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & -x_2 & & \geq 1 & u_1 \\
 & & x_2 & +x_3 & \leq 2 & u_2 \\
 & x_1 & & -2x_3 & = 3 & u_3 \\
 & & 3x_2 & -x_3 & \geq 4 & u_4 \\
 & x_1 & & & \geq 0 & \\
 & & x_2 & & \leq 0 & \\
 & & & x_3 & \text{libera} &
\end{array}
$$

Primale ($\min c^T x$)	**Duale** ($\max u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

$$\max\ 1\cdot u_1 + 2\cdot u_2 \cdot 3u_3 \cdot 4 \cdot u_4$$

$$2\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 1\cdot u_3 + 0\cdot u_4 \leq 10$$

$$-u_1 + u_2 + 3u_4 \geq 20$$

$$+u_2 - 2u_3 - u_4 = 0$$

$u_1 \geq 0 \quad u_2 \leq 0 \quad u_3$ libera $\quad u_4 \geq 0$

Esempio 1

$$\begin{array}{llllll}
\min & 10x_1 & +20x_2 & & & \\
s.t. & 2x_1 & -x_2 & & \geq 1 \\
 & & x_2 & +x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & & -2x_3 & = 3 \\
 & & 3x_2 & -x_3 & \geq 4 \\
 & x_1 & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & \text{libera}
\end{array}$$

Primale ($\min c^T x$)	**Duale** ($\max u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

$$\begin{array}{llllll}
\max & u_1 & +2u_2 & +3u_3 & +4u_4 & \\
s.t. & u_1 & & & & \geq 0 \\
 & & u_2 & & & \leq 0 \\
 & & & u_3 & & \text{libera} \\
 & & & & u_4 & \geq 0 \\
 & 2u_1 & & +u_3 & & \leq 10 \\
 & -u_1 & +u_2 & & +3u_4 & \geq 20 \\
 & & u_2 & -2u_3 & -u_4 & = 0
\end{array}$$

Esempio 2

$$
\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \\
s.t. & 2x_1 & & +x_3 & & \leq 10 \quad y_1 \\
 & -x_1 & +x_2 & & +3x_4 & \geq 20 \quad y_2 \\
 & & x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0 \quad y_3 \\
 & x_1 & & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & & \text{libera} \\
 & & & & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Primale ($\min c^T x$)	**Duale** ($\max u^T$
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \leq 0$

y_3 libera

$$
\begin{array}{llll}
\min & 10y_1 + 20y_2 & & \\
s.t. & 2y_1 - y_2 & \geq & 1 \\
 & y_2 + y_3 & \leq & 2 \\
 & y_1 - 2y_3 & = & 3 \\
 & 3y_2 - y_3 & \geq & 4
\end{array}
$$

Esempio 2

$$
\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \\
s.t. & 2x_1 & & +x_3 & & \leq 10 \\
 & -x_1 & +x_2 & & +3x_4 & \geq 20 \\
 & & x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0 \\
 & x_1 & & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & & \text{libera} \\
 & & & & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Primale ($\min c^T x$)	**Duale** ($\max u^T$
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

$$
\begin{array}{lllll}
\min & 10u_1 & +20u_2 & & \\
s.t. & u_1 & & & \geq 0 \\
 & & u_2 & & \leq 0 \\
 & & & u_3 & \text{libera} \\
 & 2u_1 & -u_2 & & \geq 1 \\
 & & u_2 & +u_3 & \leq 2 \\
 & u_1 & & -2u_3 & = 3 \\
 & & 3u_2 & -u_3 & \geq 4
\end{array}
$$

Teoremi della dualità

$x\,y = (y^T x^T)^T$

Teorema: trasformazione duale doppia

Il duale del duale è il primale

Dimostrazione:

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ s.t. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max & u^T b \\ s.t. & u^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \max & b^T u \\ s.t. & A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \min & c^T y \\ s.t. & y^T A^T \geq b^T \\ & y \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \min & c^T y \\ s.t. & Ay \geq b \\ & y \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \min & c^T x \\ s.t. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Teorema della dualità **forte**

Data coppia (PL) e (DL)

$$\text{(PL) ammette } \textbf{ottimo finito } z^* \iff \text{(DL) ammette } \textbf{ottimo finito } w^*$$
$$\text{e, inoltre, } z^* = w^*$$

Dimostrazione:

- $\Rightarrow$ per costruzione, $z^* = w^*$
- $\Leftarrow$ per costruzione del duale applicata al duale, visto che il duale del duale è il primale ■

Teorema della dualità **debole**

Ricordando che i **risultati possono essere generalizzati**, fissiamo le idee:

$$(PL)\quad \begin{array}{rrl} z^* = \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (DL)\quad \begin{array}{rrl} w^* = \max & u^T b & \\ \text{s.t.} & u^T A & \leq c^T \\ & u & \geq 0 \end{array}$$

Siano $P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ e $D = \{u \geq 0 : u^T A \leq c^T\}$

Se $P \neq \emptyset$ e $D \neq \emptyset$, allora $\forall\, x \in P, u \in D$ si ha $u^T b \leq c^T x$

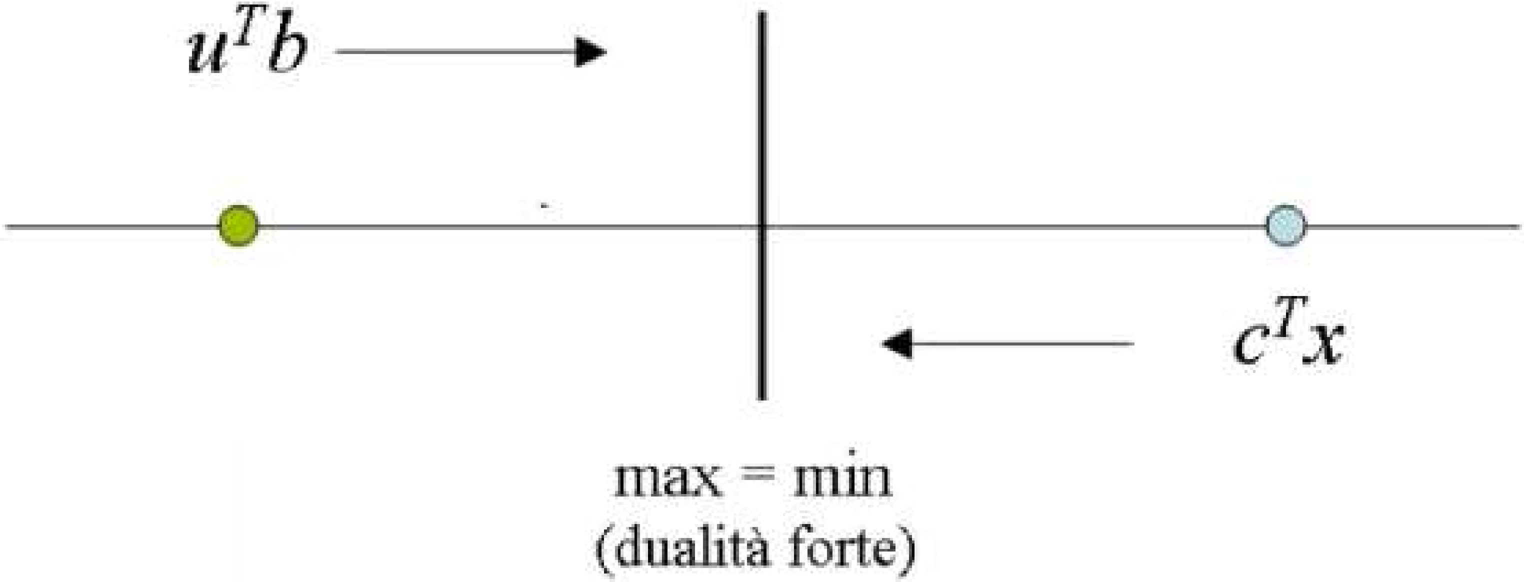
Dimostrazione:

$$u^T b \underset{\substack{u^T \geq 0 \\ b \leq Ax}}{\leq} u^T Ax \underset{\substack{x \geq 0 \\ u^T A \leq c^T}}{\leq} c^T x$$

[Nota: per costruzione del duale, maggiorazioni **sempre** rispettate!] ■

Dualità debole: rappresentazione

- I valori delle soluzioni primale e duale si limitano a vicenda



- valori ammissibili del duale sono un *lower bound* per il primale
- valori ammissibili del primale sono un *upper bound* per il duale

Corollario: condizione di ottimalità

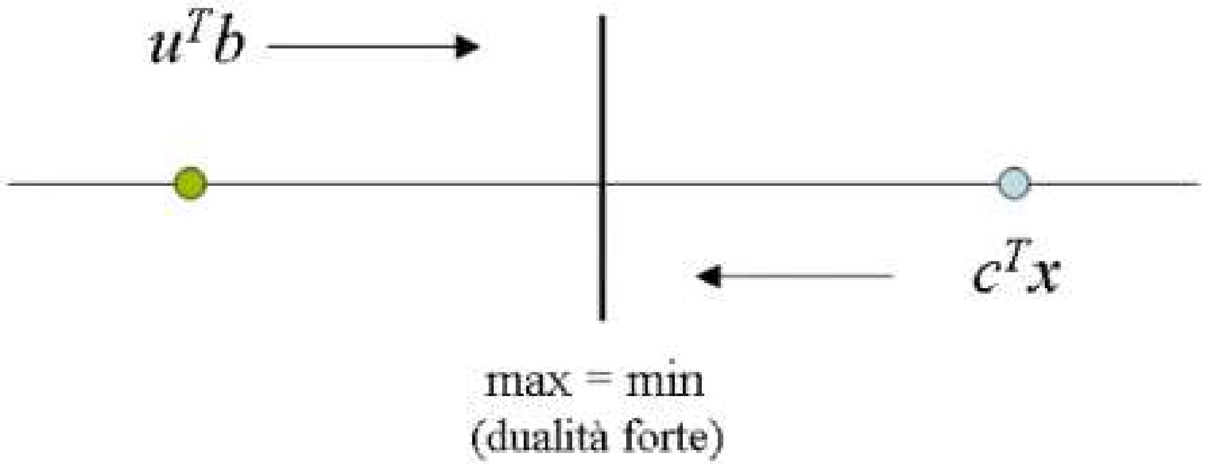
Date soluzioni x ammissibile primale e u ammissibile duale

$$c^T x = u^T b \iff x \text{ e } u \text{ ottime primale e duale risp.}$$

Dimostrazione:

$\Rightarrow$ soluzioni migliori violerebbero il teorema della dualità debole

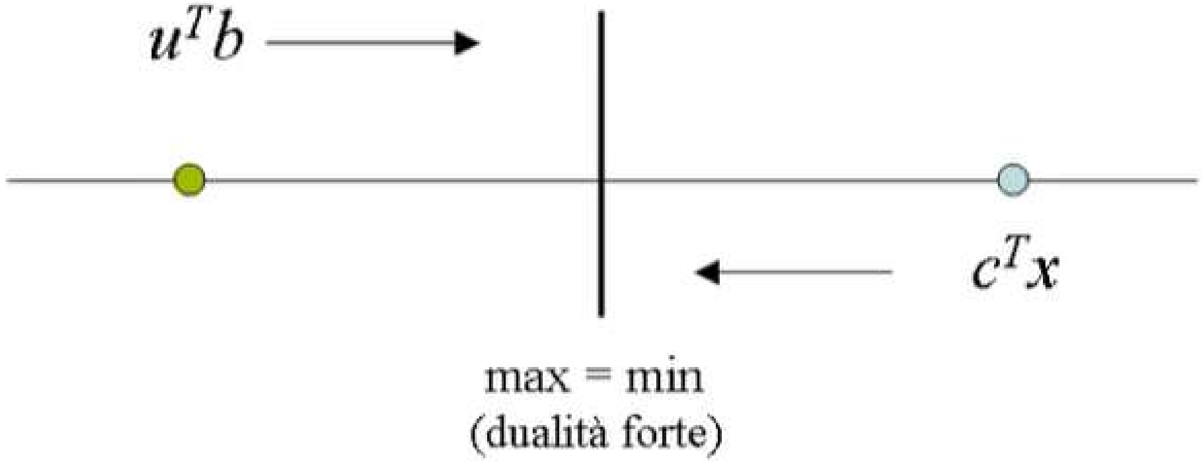
$\Leftarrow$ per il Teorema della dualità forte ■



Corollario: caso illimitato

(i) (PL) illimitato $\Longrightarrow$ (DL) inammissibile
(ii) (DL) illimitato $\Longrightarrow$ (PL) inammissibile

Dimostrazione: per assurdo, una soluzione ammissibile duale $\bar{u}$ imporrebbe $c^T x \geq \bar{u}^T b$, limitando il primale. ∎



Attenzione: vale solo nella direzione data!

Dualità: riassunto dei risultati

		(DL)		
		Finito	Illimitato	Inammissibile
(PL)	Finito	SI (e $z^* = \omega^*$)	NO	NO
	Illimitato	NO	NO	SI (corollario)
	Inammissibile	NO	SI (corollario)	SI (*)

* Esempio di coppia di problemi primale e duale inammissibili

$$
\begin{array}{llll}
\min & x_1 & \qquad & \\
s.t. & x_1 + x_2 \geq 1 & u_1 & \\
 & -x_1 - x_2 \geq 1 & u_2 & \\
 & x_1, x_2 \text{ libere} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\max & u_1 + u_2 \\
s.t. & u_1 - u_2 = 1 \\
 & u_1 - u_2 = 0 \\
 & u_1, u_2 \geq 0
\end{array}
$$

$\square \geq 1$

$-\square \geq 1$

$\square \leq -1$

IN.

Dualità e condizioni di ottimalità

$$(PP) \quad \min \; c^T x \quad \text{s.t.} \; Ax \geq b, \; x \geq 0 \qquad\qquad (PD) \quad \max \; u^T b \quad \text{s.t.} \; u^T A \leq c^T, \; u \geq 0$$

$\bar{x}$ e $\bar{u}$ **ottime**	$\Longleftrightarrow$	$\bar{x}$ è **amm. primale**:	$A\bar{x} \geq b \wedge \bar{x} \geq 0$
		$\bar{u}$ è **amm. duale**:	$\bar{u}^T A \leq c^T \wedge \bar{u} \geq 0$
		vale **dualità forte**:	$c^T \bar{x} = \bar{u}^T b$

- a partire da primale in **qualsiasi forma**
- anche se $\bar{x}$ NON è soluzione di base
- applicazione: trovare l'ottimo di un problema nella forma $\{\min / \max \; c^T x : Ax = b, \; x \in \mathbb{R}\}$

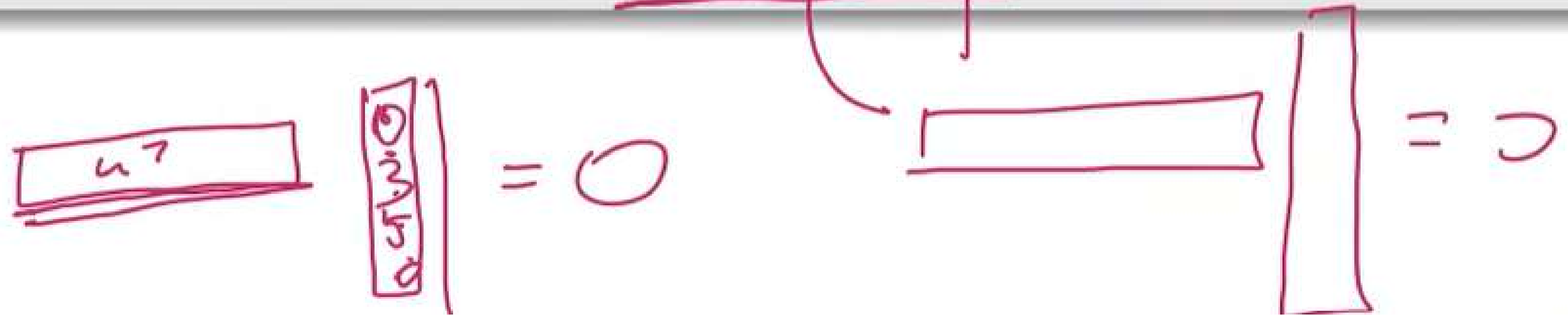
Complementarietà primale-duale (ortogonalità)

SCARTI COMPLEMENTARI

$$
(PP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}
\qquad\qquad
(PD) \quad \begin{array}{ll} \max & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \end{array}
$$

Teorema

$$
x \text{ e } u \text{ ottime} \iff
\begin{array}{ll}
Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \text{(ammissibilità primale)} \\
u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \text{(ammissibilità duale)} \\
\left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \text{(ortogonalità)}
\end{array}
$$



Dimostrazione: $\Rightarrow$

- x, u ottime $\Rightarrow$ x, u ammissibili $\Rightarrow$

$$u^T b \underset{\substack{u^T \geq 0 \\ b \leq Ax}}{\leq} u^T A x \underset{\substack{x \geq 0 \\ u^T A \leq c^T}}{\leq} c^T x$$

sempre!

per costruzione

- ottime $\Rightarrow$ $u^T b = c^T x$ (dualità forte) $\Rightarrow$ $u^T b = u^T A x = c^T x$

- $u^T A x = u^T b \quad \Rightarrow \quad u^T (Ax - b) = 0$
- $c^T x = u^T A x \quad \Rightarrow \quad (c^T - u^T A) x = 0$

$\blacksquare$

- vale per coppie primale-duale in **qualsiasi forma**

Dimostrazione: $\Leftarrow$

- $u^T(Ax - b) = 0 \quad \Rightarrow \quad u^T b = u^T Ax$
- $(c^T - u^T A)x = 0 \quad \Rightarrow \quad c^T x = u^T Ax$

$$\Rightarrow \quad u^T b = c^T x$$

- x e u ammissibili (per hp) con stesso valore della funzione obiettivo

  $\Rightarrow$ ottime! (dualità forte)

$\blacksquare$

- vale per coppie primale-duale in **qualsiasi forma**

Ancora più informazioni

$$\geq 0 \quad \geq 0 \qquad \geq 0$$
$$D_1 + D_2 \cdots D_m = 0$$

- Sviluppando i prodotti

$$u^T(Ax - b) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} u_i(a_i^T x - b_i) = 0 \in \mathbb{R}$$

$$(c^T - u^T A)x \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (c_j - u^T A_j)x_j = 0 \in \mathbb{R}$$

- **Ogni addendo è concorde in segno** (per costruz., in **ogni** forma) $\Rightarrow$

$$\left.\boxed{u_i(a_i^T x - b_i) \quad = 0, \quad \boxed{\forall}\ i = 1 \ldots m}\right\} m$$

$$\left.\boxed{(c_j - u^T A_j)x_j \quad = 0, \quad \boxed{\forall}\ j = 1 \ldots n}\right\} n$$

Condizioni di complementarietà primale duale

Teorema (condizioni "estese")

Data **qualsiasi** coppia di problemi primale duale e $x \in \mathbb{R}^n$ $u \in \mathbb{R}^m$

$$x \text{ e } u \text{ ottime} \iff \begin{cases} x \text{ ammissibile primale} \\ u \text{ ammissibile duale} \\ u_i\,(a_i^T x - b_i) = 0\,,\ \forall\, i = 1 \ldots m \\ (c_j - u^T A_j)\, x_j = 0\,,\ \forall\, j = 1 \ldots n \end{cases}$$

- Esempio: (PP) $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$
  (PD) $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$

1) variabile primale $\neq 0$	$x_j > 0$	$\Rightarrow\ u^T A_j = c_j$	vincolo duale *saturo*
2) vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow\ x_j = 0$	variabile primale nulla
3) variabile duale $\neq 0$	$u_i > 0$	$\Rightarrow\ a_i^T x = b_i$	vincolo primale *saturo*
4) vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow\ u_i = 0$	variabile duale nulla

solo nel verso $\Rightarrow$!