Un mulino produce due tipi di semola normale e integrale a partire da tre tipi di granaglie: A, B e C. Per produrre un quintale di semola normale, sono necessari 0.5 quintali di granaglia A, 0.4 di granaglia B e 0.3 di granaglia C; per un quintale di semola integrale, sono necessari 0.3 quintali di granaglia A, 0.7 di B e 0.4 di C. Il mulino si serve da tre fornitori. Ciascun fornitore mette a disposizione un lotto di acquisto, le cui caratteristiche sono riportate nella seguente tabella:

Lotto	Granaglia A	Granaglia B	Granaglia C	Costo	% impurità
1	3 q	5 q	8 q	100 €	1.0 %
2	4 q	9 q	3 q	140 €	2.0 %
3	7 q	2 q	2 q	120 €	1.5 %

Il mulino dispone di 10 000 € per approvvigionarsi di granaglie e vuole massimizzare il numero di quintali di semola prodotta complessivamente, considerando che:
- si possono acquistare al massimo 5 unità di lotto 3;
- la semola normale deve essere almeno il doppio della semola integrale e non più del quadruplo;
- le granaglie del lotto 1 e del lotto 2 sono incompatibili e pertanto non possono essere contemporaneamente acquistate;
- l'impurità media delle scorte di granaglia di tipo A deve essere inferiore allo 1.6%.

Si considera l'introduzione di una variabile decisionale per il tipo di semola:
x_i: numero di quintali di semola del tipo $i \in \{N, I\}$
y_j: numero di quintali prodotti per il lotto $j \in \{1,2,3\}$

Vogliamo massimizzare la quantità di semola *prodotta* (non da produrre, quelli sono altri vincoli) e avremo:

$$\max x_N + x_I$$

Sappiamo che il mulino dispone di 10000 euro per le granaglie; queste sono valutate al quintale (dividere per 100):

$$x_N + x_I \leq \frac{10000}{100}$$

Abbiamo i vincoli di produzione: quantità di semola da produrre $\leq$ quantità di semola a disposizione:
$0.5x_N + 0.3x_I \leq 3y_1 + 4y_2 + 7y_3$ (produzione della semola dei due tipi <= disponibilità lotti di tipo 1)
$0.4x_N + 0.7x_I \leq 5y_1 + 9y_2 + 2y_3$ (produzione della semola dei due tipi <= disponibilità lotti di tipo 2)
$0.3x_N + 0.4x_I \leq 8y_1 + 3y_2 + 2y_3$ (produzione della semola dei due tipi <= disponibilità lotti di tipo 3)

Ora passiamo ai vincoli del problema:
- "si possono acquistare al massimo 5 unità di lotto 3"
$$x_3 \leq 5$$
- "la semola normale deve essere almeno il doppio della semola integrale e non più del quadruplo"
$$2x_I \leq x_N \leq 4x_I$$
- "le granaglie del lotto 1 e 2 sono incompatibili e non possono essere contemporaneamente acquistate"

Introduciamo quindi una variabile logica binaria.
z_{ij}: variabile logica che vale 1 se si effettua rifornimento dal fornitore di tipo $i \in \{1,2,3\}$ per le granaglie del tipo $j \in \{A, B, C\}$, 0 altrimenti

$$z_{1A} \leq (1 - z_{2A}), \quad z_{1B} \leq (1 - z_{2B}), \quad z_{1C} \leq (1 - z_{2C})$$

L'attivazione è come segue:

$$z_{1A} + z_{2A} \leq 1, \quad z_{1B} + z_{2B} \leq 1, \quad z_{1C} + z_{2C} \leq 1$$

Siccome non possiamo acquistare contemporaneamente, introduciamo i vincoli per fare in modo che l'acquisto dei due tipi di semola sia dei tipi N e I sia <= alla somma delle quantità prodotte dai lotti.
Ad esempio, consideriamo:
$x_N + x_I \leq 3y_1 + 5y_1 + 8y_1$

Questo vincolo garantisce che i grani del lotto 1 non possano essere acquistati contemporaneamente, perché se x_N/x_I sono maggiori di 0, il lato sinistro della disuguaglianza sarebbe maggiore del lato destro, quindi sto effettivamente comprando tutti i tipi di semola.

Similmente per il lotto 2 con stesso ragionamento, $x_N + x_I \leq 4y_2 + 9y_2 + 3y_2$

"l'impurità media delle scorte di granaglia di tipo A deve essere inferiore all'1.6%"

$$(3y_1 + 4y_2 + 7y_3) \leq 1.6(x_I + x_N)$$

Domini: $x_i \in Z_+, y_j \in Z_+, z_{ij} \in \{0,1\}$

1. Una società di navigazione effettua un servizio di trasporto merci su tre rotte 1, 2 e 3 dove la domanda è rispettivamente di 20000, 5000 e 15000 tonnellate. La società usa per questo servizio tre tipi di nave (A, B e C) e dispone di 100 navi di tipo A, 80 navi di tipo B e 150 navi di tipo C. Ciascuna nave ha capacità e costo di trasporto unitario che dipendono dal tipo e dalla rotta, come riassunto nella seguente tabella:

TIPO NAVE	*ROTTA*	*Capacità massima*	*Costo €/tonnellata*
A	1	150	60
A	2	120	30
A	3	non impiegabile	
B	1	100	45
B	2	80	25
B	3	90	30
C	1	non impiegabile	
C	2	60	50
C	3	140	35

Si scriva il modello di programmazione lineare per determinare il piano di trasporto che soddisfa la domanda sulle tre rotte minimizzando i costi complessivi, tenendo conto che:

– sulla rotta 1 ci possono essere al massimo 10 navi di tipo A;
– sulla rotta 2 può effettuare servizio un solo tipo di nave;
– se le navi di tipo B sono utilizzate sulla rotta 2, allora queste non possono essere utilizzate né sulla rotta 1, né sulla rotta 3.

Per risolvere questo problema, introduciamo due variabili che considerano come indici gli insiemi di rotte e di navi, nello specifico:

x_{ij}: numero di tonnellate per il tipo di nave $i \in \{A, B, C\}$ per la rotta $j \in \{1,2,3\}$
y_{ij}: numero di navi per il tipo di nave $i \in \{A, B, C\}$ per la rotta $j \in \{1,2,3\}$

È noto che vogliamo soddisfare la domanda sulle rotte minimizzando i costi e la funzione obiettivo assumerà la forma che segue:

$$min\ 60x_{A1} + 30x_{A2} + 45x_{B1} + 25x_{B2} + 30x_{B3} + 50x_{C2} + 35x_{C3}$$
$$s.t.$$

Andiamo a modellare i vari altri vincoli, per esempio sul numero di navi:
$y_{A1} + y_{A2} < 100$ (navi di tipo A)
$y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} < 80$ (navi di tipo B)

$y_{C1} + y_{C2} + y_{C3} < \ 150$ (navi di tipo C)

Altri vincoli da inserire sono i seguenti:

- "sulla rotta 1 ci possono essere al massimo 10 navi di tipo A";
$$y_{A1} \leq 10$$
- "sulla rotta 2 può effettuare servizio un solo tipo di nave"
Andremo ad introdurre un'apposita variabile binaria:
- z_{ij}: variabile binaria che vale 1 se utilizziamo navi del tipo $i \in \{A, B, C\}$ per la rotta $j \in \{1,2,3\}$, 0 altrimenti
$$z_{A2} + z_{B2} + z_{C2} \leq 1$$
A questa condizione, si introducono i vincoli di relazioni logica tra $y_{ij}\ e\ z_{ij}$
$$y_{A2} \leq z_{A2} \quad y_{B2} \leq z_{B2} \quad y_{C3} \leq z_{C3}$$

- "se le navi di tipo B sono utilizzate sulla rotta 2, allora queste non possono essere utilizzate né sulla rotta 1, né sulla rotta 3"
A livello logico è un vincolo del tipo $y_1 \leq (1 - y_2)$, considerando però le rotte:
$$z_{B1} + Z_{B3} \leq 2(1 - z_{B2})$$
Anche qui, per collegamento logico, vanno attivate le variabili logiche che non sono z_{B2}, in quanto è già attivata di per sé da come è scritto il vincolo (avendo che M sarebbe 1).
Quindi, diventerebbe:
$$y_{B1} \leq Mz_{B1} \quad y_{B2} \leq Mz_{B2}$$

In ultimo, consideriamo i vincoli di capacità massima, quindi "ciascuna nave del tipo X può portare fino ad un massimo di tonnellate per quel tipo X".
$$x_{A1} \leq 150y_{A1} \ x_{A2} \leq 120y_{A2} \ x_{B1} \leq 100y_{B1} \ x_{B2} \leq 80_{B2}$$
$$x_{B3} \leq 90y_{B3} \ y_{C2} \leq 60y_{C2} \ y_{C3} \leq 140y_{C3}$$

Per considerare valido quanto fatto fino ad ora, inseriamo tutti i singoli domini:
$$x_{ij} \in R_+,\ y_{ij} \in Z_+\ z_{ij} \ \in \{0,1\}, \forall \ i \ \in \{A, B, C\}\ , \}, \forall\ j \ \in \{1,2,3\}$$
($\forall i$ e $\forall j$ per ognuna delle tre variabili, messo una sola volta per sintesi)
(Similmente, x_{ij} fa parte dell'insieme reale in quanto rappresenta il numero di tonnellate)

2. Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso, a partire dalla base relativa alle variabili x_1, x_2, x_3 e applicando la regola di Bland:

$$\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & + 5\,x_2 & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & \leq & 5 \\
 & x_1 & + \ x_2 & & \geq & -1 \\
 & & x_2 & + 2\,x_3 & = & -2 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Passo alla forma standard:

1. Funzione obiettivo di minimo:
   $\min -x_1 - 5x_2$
2. vincoli di uguaglianza:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & & & -x_5 & = & -1 \\ & x_2 & +2x_3 & & & = & -2 \end{array}$$

3. variabili non negative: effettuo la sostituzione $\hat{x}_2 = -x_2$, $\hat{x}_2 \geq 0$

$$\begin{array}{lcccccccc} \min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\ & x_1 & -\hat{x}_2 & & & -x_5 & = & -1 \\ & & -\hat{x}_2 & +2x_3 & & & = & -2 \\ & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

4. termini noti non negativi

$$\begin{array}{lcccccccc} \min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\ & -x_1 & +\hat{x}_2 & & & +x_5 & = & +1 \\ & & +\hat{x}_2 & -2x_3 & & & = & +2 \\ & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Imposto il tableau del simplesso:

Attenzione che:
- la funzione obiettivo è di minimo e si cambia di segno
- Data $\widehat{x_2}$, si va a cambiare segno a x_2 quando la si introduce poi, avendo i termini noti non negativi, si va a cambiare segno alle variabili di slack (e, se ci fossero altre variabili oltre a quelle di slack, si cambia segno anche a quelle)

Per il pivot, siccome non siamo in forma canonica, scelgo di volta in volta un elemento utile per le operazioni di Gauss-Jordan. Faccio entrare in base x_1:

	$\downarrow$ x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	-1	5	0	0	0	0
?	$\boxed{1}$	0	0	1	0	5
?	-1	1	0	0	1	1
?	0	1	-2	0	0	2

	x_1	$\downarrow$ $\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	5	0	1	0	5	$R'_0 \leftarrow R_0 + R'_1$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R'_1 \leftarrow R_1$
?	0	$\boxed{1}$	0	1	1	6	$R'_2 \leftarrow R_2 + R'_1$
?	0	1	-2	0	0	2	$R'_3 \leftarrow R_3$

Faccio poi entrare in base $\widehat{x_2}$ (ho evidenziato in rosso gli elementi di pivoting):

	x_1	$\hat{x}_2$	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R'_0 \leftarrow R_0 - 5R'_2$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R'_1 \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R'_2 \leftarrow R_2$
?	0	0	$\boxed{-2}$	-1	-1	-4	$R'_3 \leftarrow R_3 - R'_2$

Si fa poi entrare in base x_3 facendo pivot sull'elemento in rosso, tale che otteniamo finalmente la forma canonica.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R'_0 \leftarrow R_0$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R'_1 \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R'_2 \leftarrow R_2$
$\leftarrow x_3$	0	0	1	$\boxed{1/2}$	$1/2$	2	$R'_3 \leftarrow -1/2R_3$

La base si compone sulle colonne dove appaiono i coefficienti della matrice identità, quindi $B = \{x_1, \widehat{x_2}, x_3\}$
Si nota che è ammissibile (avendo tutte le colonne di $\overline{b_\iota} > 0$). Non sappiamo se sia ottima (avendo costi ridotti negativi) ma non è illimitata (infatti, tutti i coefficienti sono positivi sotto colonne con costi ridotti negativi).
Partiamo con il simplesso e decidiamo la variabile che entra in base. Per la regola di Bland, scegliamo la prima variabile in ordine tra quelle con coefficienti di costo ridotto negativo (quindi, tra x_4, x_5 scelgo x_4).

La variabile che esce dalla base si capisce rispetto al rapporto $\frac{\overline{b_\iota}}{\overline{a_\iota}}$ nella posizione della variabile che entra in base, quindi x_4. Esce dalla base $\arg\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{2}{1/2}\right\} = \arg\{4\} = x_3$

Per $B = \{x_1, \overline{x_2}, x_4\}$ scegliamo come elemento di pivoting $\frac{1}{2}$ come visto nel tableau precedente.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	$\downarrow$ x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	8	0	-1	-9	$R_0' \leftarrow R_0 + 4R_3'$
x_1	1	0	-2	0	-1	1	$R_1' \leftarrow R_1 - R_3'$
$\hat{x}_2$	0	1	-2	0	0	2	$R_2' \leftarrow R_2 - R_3'$
$\leftarrow x_4$	0	0	2	1	$\boxed{1}$	4	$R_3' \leftarrow 2R_3$

- F.C.? Sì
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Non lo so → Esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0 (condizione sufficiente di ottimalità; se fossero <u>tutti</u> uguali a zero, allora sarebbe ottima)
- è illimitata? Non lo so → Vado a vedere se in corrispondenza di colonne con costi ridotti strettamente minori di 0 abbiamo sotto una colonna tutta negativa → Esiste almeno un valore strettamente positivo in corrispondenza di qualche valore negativo e quindi non possiamo concludere con certezza
- chi entra in base? → x_5
- chi esce dalla base → $\arg\min\left\{X, X, \frac{4}{1}\right\} = \arg\{4\} = x_4$

$B = \{x_1, \widehat{x_2}, x_5\}$ ed eseguo il pivoting rispetto all'elemento riquadrato poco fa.

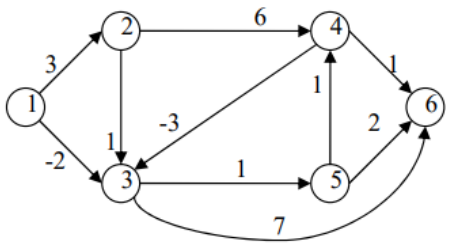
	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	10	1	0	-5	$R_0' \leftarrow R_0 + R_3'$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1 + R_3'$
$\hat{x}_2$	0	1	-2	0	0	2	$R_2' \leftarrow R_2$
x_5	0	0	2	1	1	4	$R_3' \leftarrow R_3$

- F.C.? Sì
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Si → Non esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0

La soluzione ottima del problema è $z_{MIN} = -z_{MAX} = -(-5) = 5$
Inoltre, abbiamo $x_1 = 5, \hat{x}_2 = 2, x_5 = 4, x_3 = x_4 = 0$

con vincoli x_4 saturo in quanto ha valore zero e x_5 lasco, per valore > 0 (si ricordi che lasco e saturo si va a dire sulle variabili di slack aggiunte).

- Si consideri il seguente grafo:

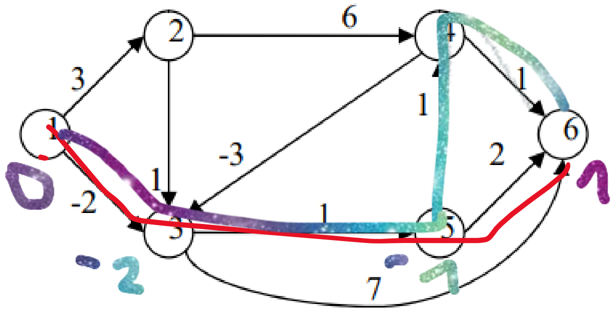


a. si scelga un algoritmo per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
b. si applichi l'algoritmo scelto (riportare e **giustificare** i passi dell'algoritmo in una tabella);
c. L'algoritmo ha individuato un ciclo negativo? Giustificare la risposta.
d. Riportare l'albero e il grafo dei cammini minimi, oppure il ciclo negativo (in ogni caso, si descriva il procedimento utilizzato).

a) In questo grafo, utilizziamo Bellman-Ford, in quanto esistono archi con costi ridotti negativi.
b) Ora, il calcolo dei cammini minimi, riportati in tabella (controllando ad ogni passo miglioramenti rispetto alla riga precedente e segnando in colonna apposita gli aggiornamenti effettuati; i predecessori sono segnati come semplici pedici senza parentesi). Dato che non siamo limitati dai max-hop, andremo a creare la tabella iterando un numero pari di volte al numero di nodi (quindi, facendoli tutti):

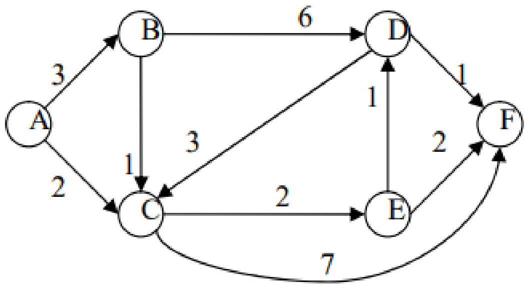
Iterazione	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Aggiornamenti
$Inizio$	0_Λ	$+\infty_\Lambda$	$+\infty_\Lambda$	$+\infty_\Lambda$	$+\infty_\Lambda$	$+\infty_\Lambda$	1
$h=1$	0_Λ	3_1	-2_1	$+\infty_\Lambda$	$+\infty_\Lambda$	$+\infty_\Lambda$	2, 3
$h=2$	0_Λ	3_1	-2_1	9_2	-1_3	5_3	4,5,6
$h=3$	0_Λ	3_1	-2_1	0_5	-1_3	1_5	4, 6
$h=4$	0_Λ	3_1	-2_1	0_5	-1_3	1_5	//
$h=5$	0_Λ	3_1	-2_1	0_5	-1_3	1_5	//
$h=6$	0_Λ	3_1	-2_1	0_5	-1_3	1_5	//

c) L'algoritmo non ha individuato un ciclo negativo in quanto non ha terminato con *flag_aggiornato=true*, cioè non ha aggiornato fino alla fine delle iterazioni.
d) Per individuare l'albero dei cammini minimi, si percorre a ritroso la catena dei predecessori partendo dall'ultima iterazione, quindi, $1-3-5-6$ con costo $0-2-1+1=-2$. Si evidenzia in rosso il cammino minimo.
Per individuare il grafo dei cammini minimi, composto da *tutti* i cammini minimi, esamino il grafo e scrivendo le etichette ottime, verifico se esistono altri cammini minimi. In effetti, esistono facendo un altro percorso, passando per 4 e per 6. Si ottiene sempre costo 1.



Legenda:
- Rosso – Albero
- Arcobaleno - Grafo

- Si consideri il seguente grafo:



a. si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati per determinare i cammini minimi dal nodo A verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
b. si applichi l'algoritmo scelto (riportare e **giustificare** i passi dell'algoritmo in una tabella);
c. si disegni l'albero e il grafo dei cammini minimi, descrivendo il procedimento usato.

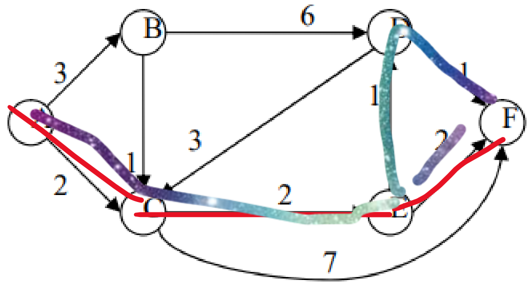
a) Il miglior algoritmo in questo contesto è Dijkstra, in quanto più efficiente e usabile in quanto tutti i costi ridotti sono positivi.
b) Ora, il calcolo dei cammini minimi, riportati in tabella. Si ricorda che:
- $\hat{v}$ rappresenta l'etichetta minima di ogni iterazione
- $\bar{S}$ rappresentano le etichette ancora da fissare
- Il segno * rappresenta l'etichetta fissata
- Il segno – rappresenta l'etichetta controllata ma non aggiornata
- Il segno x rappresenta l'etichetta non controllata perché il nodo è già fissato
- Gli spazi vuoti servono per indicare che non considero più l'etichetta nelle varie iterazioni in quanto fissata
- L'algoritmo termina quando non ci sono più nodi in $\bar{S}$

Iterazione	Nodo A	Nodo B	Nodo C	Nodo D	Nodo E	Nodo F	$\bar{S}$	$\hat{v}$
$Inizio$	$0_{\wedge}$	$+\infty_{\wedge}$	$+\infty_{\wedge}$	$+\infty_{\wedge}$	$+\infty_{\wedge}$	$+\infty_{\wedge}$	A, B, C, D, E, F	
$h = 1$	*	3_A	2_A	$+\infty_{\wedge}$	$+\infty_{\wedge}$	$+\infty_{\wedge}$	B, C, D, E, F	A
$h = 2$		-	*	9_B	4_C	9_C	B, D, E, F	C
$h = 3$		*		5_E	-	6_E	D, E, F	B
$h = 4$				-	*	-	D, F	E
$h = 5$				*		-	F	D
$h = 6$						*	$\emptyset$	F

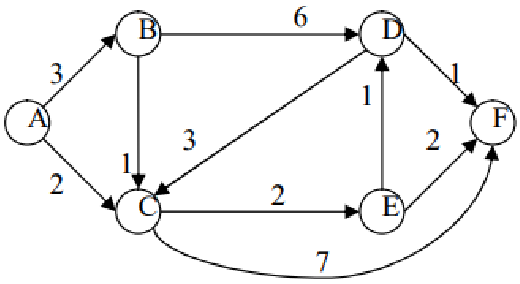
Ad ogni iterazione, percorriamo il grafo e scegliamo il percorso con costo minore. Ad ogni iterazioni, scegliamo e fissiamo un'etichetta che ha costo minore, scremando ad ogni iterazione quelle da controllare e avere sempre in mano il costo minimo. Anche in questo caso, come per gli algoritmi label correcting in caso di convergenza alla soluzione ottima, le etichette calcolate e i relativi puntatori rappresentano, rispettivamente, una soluzione duale ammissibile e i predecessori su dei cammini dall'origine ai diversi nodi. Questo funziona non avendo costi negativi.
c)
Pertanto, come abbiamo visto per gli algoritmi label correcting in caso di convergenza, è possibile derivare l'albero (risp. il grafo) dei cammini minimi attraverso i puntatori ai predecessori (risp. la verifica della saturazione dei vincoli duali sugli archi).

Concretamente, avremo che:
- In rosso riportiamo l'albero dei cammini minimi

- In arcobaleno riportiamo il grafo (composto come sempre da *tutti* i cammini minimi, quindi fissando le etichette ottime e scegliendo come cammino sia l'albero che tutte le altre etichette con costo $\leq$)



- Si consideri il seguente grafo:



a. si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati per determinare i cammini minimi CON MASSIMO 4 ARCHI dal nodo A verso tutti gli altri nodi e <u>si motivi la scelta</u>;

b. si applichi l'algoritmo scelto (<u>riportare e **giustificare** i passi dell'algoritmo in una tabella</u>);

c. si ricavi un cammino con al più 4 archi da A verso E e un cammino minimo con al più 3 archida A a F: DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.

d. è possibile, ricavare direttamente dalla tabella ottenuta albero e/o grafo dei cammini minimi? Giustificare la risposta.

a) Nella scelta dell'algoritmo, notiamo che ci viene dato un massimo numero di archi da dover rispettare, pertanto si può applicare solo l'algoritmo di Bellman – Ford, l'unico che dà la possibilità di calcolo dei cammini minimi sulla base di un massimo numero di archi. Applicheremo Bellman – Ford fermandoci alla quarta iterazioni, con un numero di archi e iterazioni pari a $k \leq 4$

b) Ora, il calcolo dei cammini minimi, riportati in tabella (controllando ad ogni passo miglioramenti rispetto alla riga precedente e segnando in colonna apposita gli aggiornamenti effettuati; i predecessori sono segnati come semplici pedici senza parentesi):

Iterazione	Nodo A	Nodo B	Nodo C	Nodo D	Nodo E	Nodo F	Aggiornamenti
$Inizio$	$0_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	A
$h = 1$	$0_\wedge$	3_A	2_A	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	B, C
$h = 2$	$0_\wedge$	3_A	2_A	9_B	4_C	9_C	D, E, F
$h = 3$	$0_\wedge$	3_A	2_A	5_E	4_C	6_E	D, F
$h = 4$	$0_\wedge$	3_A	2_A	5_E	4_C	6_E	F

Le etichette di una riga sono ottenute controllando i vincoli duali su tutti gli archi uscenti dai nodi "aggiornati" della riga (iterazione) precedente secondo la $if\ \pi_j > \pi_i' + c_{ij}\ then\ \pi_j = \pi_i' + c_{ij}\ and\ p(j) = i$ dove (i, j) è uno degli archi uscenti da un nodo i aggiornato all'iterazione precedente, π_j è l'etichetta corrente (sulla riga corrente) del nodo j, π_i' è l'etichetta del nodo i all'iterazione (riga) precedente e c_{ij} è il costo dell'arco (i, j).

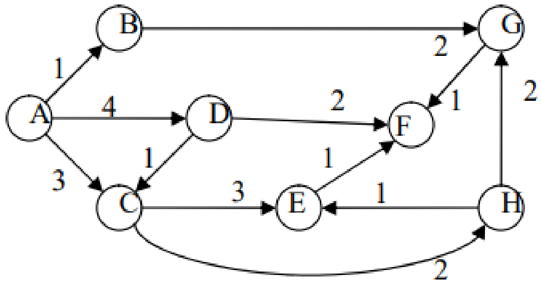
c) Un cammino minimo con al più 4 archi da A verso E, seguendo la catena dei predecessori e considerano lo stesso E, viene dato da $A \Rightarrow C \Rightarrow E$ con costo 4

Un cammino minimo con al più 3 archi da A verso F, considerando lo stesso F e seguendo la catena dei predecessori, viene dato da $A \Rightarrow C \Rightarrow E \Rightarrow F$ con costo 10. Usando solo i predecessori, non abbiamo un albero dei cammini minimi.

Per l'individuazione di entrambi i cammini minimi, seguo come detto i predecessori partendo dal nodo indicato e diminuendo h di 1, considerando la diminuzione delle iterazioni ad ogni passo e guardando la riga precedente. Infatti, nel caso si risolva un problema di cammino minimo con un massimo numero di hop, non si può parlare di albero dei cammini minimi.

d) L'albero dei cammini minimi può essere ottenuto dalla tabella seguendo la catena dei predecessori (solo nel caso della prima richiesta), mentre per quanto riguarda il grafo, questo viene dato da tutti e soli i cammini minimi; in questo caso specifico, coincide con il percorso con al più 3 archi, in quanto quello da 4 non può essere considerato dati i motivi enunciati sopra.

- Si consideri il seguente grafo:



a. si scelga un algoritmo appropriato e si motivi la scelta;
b. si calcolino i cammini minimi dal nodo A verso tutti gli altri nodi (i passi dell'algoritmo vanno riportati in una tabella e giustificati);
c. si disegni l'albero e il grafo dei cammini minimi, descrivendo il procedimento usato.

a) Il miglior algoritmo in questo contesto è Dijkstra, in quanto più efficiente e usabile in quanto tutti i costi ridotti sono positivi.

b) Ora, il calcolo dei cammini minimi, riportati in tabella. Si ricorda che:

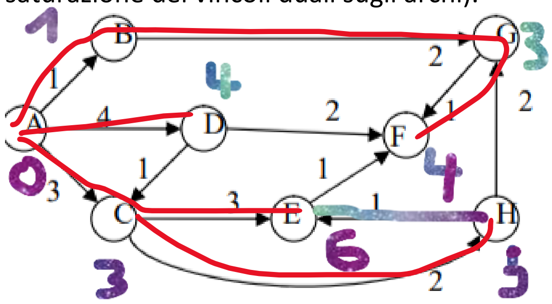
- $\hat{v}$ rappresenta l'etichetta minima di ogni iterazione
- $\bar{S}$ rappresentano le etichette ancora da fissare
- Il segno * rappresenta l'etichetta fissata
- Il segno – rappresenta l'etichetta controllata ma non aggiornata
- Il segno x rappresenta l'etichetta non controllata perché il nodo è già fissato
- Gli spazi vuoti servono per indicare che non considero più l'etichetta nelle varie iterazioni in quanto fissata
- L'algoritmo termina quando non ci sono più nodi in $\bar{S}$

Iterazione	Nodo A	Nodo B	Nodo C	Nodo D	Nodo E	Nodo F	Nodo G	Nodo H	$\bar{S}$	$\hat{v}$
$Inizio$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	A,B,C,D,E,F,G,H	
$h=1$	*	1_A	3_A	4_A					B,C,D,E,F,G,H	A
$h=2$		*					3_B		C,D,E,F,G,H	B
$h=3$			*		6_C			5_C	D,E,F,G,H	C
$h=4$						4_G	*		D,E,F,H	G
$h=5$						*			D,E,H	F
$h=6$			x	*		x			E,H	D
$h=7$					$-$				G	H

$h = 8$					$*$	x			$\emptyset$	G

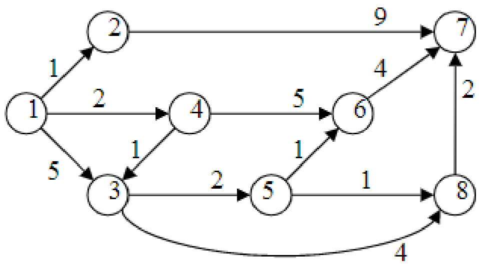
Ad ogni iterazione, percorriamo il grafo e scegliamo il percorso con costo minore. Ad ogni iterazioni, scegliamo e fissiamo un'etichetta che ha costo minore, scremando ad ogni iterazione quelle da controllare e avere sempre in mano il costo minimo. Anche in questo caso, come per gli algoritmi label correcting in caso di convergenza alla soluzione ottima, le etichette calcolate e i relativi puntatori rappresentano, rispettivamente, una soluzione duale ammissibile e i predecessori su dei cammini dall'origine ai diversi nodi. Questo funziona non avendo costi negativi.
In questo esercizio, si presentavano più etichette con lo stesso costo minimo; ho scelto in tutti i casi l'etichetta con indice inferiore.

c)
Pertanto, come abbiamo visto per gli algoritmi label correcting in caso di convergenza, è possibile derivare l'albero (risp. il grafo) dei cammini minimi attraverso i puntatori ai predecessori (risp. la verifica della saturazione dei vincoli duali sugli archi).



Concretamente, avremo che:
- In rosso riportiamo l'albero dei cammini minimi
- In arcobaleno riportiamo il grafo (composto come sempre da *tutti* i cammini minimi, quindi fissando le etichette ottime con lo stesso colore e scegliendo come cammino sia l'albero che tutte le altre etichette con costo ≤); in questo caso, grafo ed albero sono diversi.

3. Si vogliono determinare i cammini minimi composti da al più 4 archi sul seguente grafo:



- si scelga un algoritmo appropriato e si motivi la scelta;
- si calcolino i cammini minimi con al più quattro archi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi (i passi dell'algoritmo vanno riportati in una tabella e giustificati);
- si ricavi un cammino minimo di al più quattro archi da 1 a 7, descrivendo il procedimento adottato.

a) Nella scelta dell'algoritmo, notiamo che ci viene dato un massimo numero di archi da dover rispettare, pertanto si può applicare solo l'algoritmo di Bellman – Ford, l'unico che dà la possibilità di calcolo dei cammini minimi sulla base di un massimo numero di archi. Applicheremo Bellman – Ford fermandoci alla quarta iterazioni, con un numero di archi e iterazioni pari a $k \leq 4$
b) Ora, il calcolo dei cammini minimi, riportati in tabella (controllando ad ogni passo miglioramenti rispetto alla riga precedente e segnando in colonna apposita gli aggiornamenti effettuati; i predecessori sono segnati come semplici pedici senza parentesi):

Iterazione	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Nodo 7	Nodo 8	Aggiornamenti
Inizio	$0_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	1
$h = 1$	$0_\wedge$	1_1	5_1	2_1	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	$+\infty_\wedge$	2,3,4
$h = 2$	$0_\wedge$	1_1	3_4	2_1	7_3	7_4	10_2	9_3	3,5,6,7,8
$h = 3$	$0_\wedge$	1_1	3_4	2_1	5_3	7_4	10_2	7_3	5,8
$h = 4$	$0_\wedge$	1_1	3_4	2_1	5_3	6_5	9_8	6_5	6,7,8

Le etichette di una riga sono ottenute controllando i vincoli duali su tutti gli archi uscenti dai nodi "aggiornati" della riga (iterazione) precedente secondo la $if\ \pi_j > \pi_i' + c_{ij}\ then\ \pi_j = \pi_i' + c_{ij}\ and\ p(j) = i$ dove (i, j) è uno degli archi uscenti da un nodo i aggiornato all'iterazione

precedente, π_j è l'etichetta corrente (sulla riga corrente) del nodo j, π_i' è l'etichetta del nodo i all'iterazione (riga) precedente e c_{ij} è il costo dell'arco (i, j).
Grazie al fatto di utilizzare l'etichetta del nodo precedente, viene assicurata la scelta del cammino minimo con 4 archi (qua si può fare un qualsiasi esempio numerico dove si va a scegliere, prendendo ad esempio l'ultima iterazione, qui $h = 4$ un cammino che ha costo migliore considerando l'etichetta precedente e non quella corrente, qui $h = 5$, dimostrando la validità di quanto fatto).

c) Un cammino minimo con al massimo 4 archi da $1\ a\ 7$ viene fatta seguendo la catena dei predecessori, quindi, partendo dal nodo 7 (ultimo nodo in generale) con $h = 4$, si considera quindi:

$$7 \Leftarrow 8 \Leftarrow 3 \Leftarrow 4 \Leftarrow 1$$

Questo equivale al percorso 1 ⇒ 4 ⇒ 3 ⇒ 8 ⇒ 7, con costo 9.

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale. Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x1, x2, x3) = (1, 4, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & & & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\
 & & & 2x_2 & & & \geq & -3 \\
 & 2x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\
\end{array}$$
$$x_1 \text{ libera} \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$$
$$\max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}$$

$$\begin{array}{c} x \text{ e } u \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \text{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \text{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \text{(ortogonalità)} \end{array}$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \leq 1\ (OK)$$
$$-2x_1 + x_2 = 2 \leq 2\ (OK)$$
$$2x_2 = 8 \geq -3\ (OK)$$
$$2x_1 + x_3 = 2 = 2\ (OK)$$
$$x_1\ libera, x_2 = 4 \geq 0, x_3 = 0 \leq 0\ (domini\ OK)$$

2) Passaggio al duale

$$\min u_1 + 2u_2 - 3u_3 + 2u_4$$
$$s.t. -u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$$

$$-u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$$
$$2u_1 + u_4 \leq 1$$
$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0, u_4\ libera$$

3) Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale
Primo vincolo primale: $u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0$ → $u_1(-6) = 0$ → $u_1 = 0$ (prima condizione)
Secondo vincolo primale:$u_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0$ → $u_2(0)$ → 0 // (non si deducono condizioni di complementarietà su u_2)
Terzo vincolo primale: $u_3(2x_2 + 3) = 0$ → $u_3(11)$ → $u_3 = 0$ (seconda condizione)
Quarto vincolo primale di uguaglianza, pertanto non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la relativa variabile u_4
Primo vincolo duale di uguaglianza: non si impongono condizioni di complementarietà con x_1 (in quanto la condizione $(-u_1 - 2u_2 + 2u_4)x_1 = 0$ è diretta conseguenza dell'ammissibilità duale; l'equazione $-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$ sarà comunque da considerare come condizione di ammissibilità duale
Secondo vincolo duale: $(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)x_2 \Rightarrow (-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)4 \Rightarrow -u_1 + u_2 + 2u_3 - 1 = 0$ (terza condizione)
Terzo vincolo duale: $(2u_1 + u_4 - 1)x_3 = 0$ →$(2u_1 + u_4 - 1)0 = 0$ //

4) Sistema delle condizioni CCPD e ammissibilità duale trovate
$u_1 = 0$ (ccpd)
$u_3 = 0$ (ccpd)
$-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1$ (ammissibilità duale)
$-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$ (ammissibilità duale)

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0, u_4 = 1$$

5) Verifica ammissibilità duale
La soluzione duale trovata:

- Soddisfa i tre vincoli duali: $-u_1 - 2u_2 + 2u_4 \rightarrow 0 = 0, -u_1 + u_2 + 2u_3 = 1 \geq 1, 2u_1 + u_4 = 1 \leq 1$
- Soddisfa i vincoli di dominio: $u_1 = 0 \geq 0, u_2 = 1 \geq 0, u_3 = 0 \leq 0, u_4\ libera$

6) Conclusioni
Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:
• x è ammissibile primale (come da verifica);
• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).
Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale
(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe 4 e verifica il corollario della dualità forte)

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x1,x2,x3) = (3/2\ ,\ 9/4\ ,0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{lrcl} \min & -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ & -2x_1 & \geq & -3 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 & & \end{array}$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$$
$$\max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}$$

$$x \text{ e } u \text{ ottime primale e duale (risp.)} \iff \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{l} u^T(Ax-b)=0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$-2x_1 - x_2 + x_3 = -\frac{3}{4} \leq 2\ (OK)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 = 6\ (OK)$$
$$-2x_1 = -3 \geq -3\ (OK)$$
$$x_1 = \frac{3}{2} \geq 0, x_2 = \frac{9}{4} \geq 0, x_3 = 0 \leq 0\ (domini\ OK)$$

2) Passaggio al problema duale

$$\max 2u_1 + 6u_2 - 3u_3$$
$$s.t. -2u_1 + u_2 - 2u_3 \leq -2$$
$$-u_1 + 2u_2 \leq 1$$
$$u_1 + 3u_2 \geq -1$$
$$u_1 \leq 0, u_2\ libera, u_3 \geq 0$$

3) Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale

Primo vincolo primale: $(-2x_1 - x_2 + x_3 - 2)u_1$ → $\left(-\frac{29}{4}\right)u_1$ → $u_1 = 0$ (prima condizione)

Secondo vincolo primale: È vincolo di uguaglianza, non ci sono da imporre condizioni con la variabile duale u_2, visto che la condizione $(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6) = 0$ deriva dall'ammissibilità primale

Terzo vincolo primale: $(-2x_1 + 3)u_3 = 0$ → $u_3(0)$ → // (non si possono dedurre condizioni)

Primo vincolo duale: $(-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2)x_1 = 0$ → $(-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2)\frac{3}{2}$ → $-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2 = 0$ (seconda condizione)

Secondo vincolo duale: $(-u_1 + 2u_2 - 1)x_2$ → $(-u_1 + 2u_2 - 1)\frac{9}{4}$ → $(-u_1 + 2u_2 - 1 = 0)$ (terza condizione

Terzo vincolo duale: $(u_1 + 3u_2 + 1)x_3$ → $(u_1 + 3u_2 + 1)0$ → //

4) Sistema delle condizioni CCPD e ammissibilità duale trovate
$u_1 = 0$ (ccpd)
$-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2 = 0$ (ammissibilità duale)
$-u_1 + 2u_2 - 1 = 0$(ammissibilità duale)
Risolvendo → $u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = +\frac{3}{4}$
5) Verifica ammissibilità duale
La soluzione duale trovata:
soddisfa i vincoli duali ($-2u_1 + u_2 - 2u_3 = -2 \geq -2, -u_1 + 2u_2 = 1 = 1, u_1 + 3u_2 \geq -1$)
soddisfa i vincoli di dominio ($u_1 = 0 \leq 0, u_2\ libera, u_3 = \frac{3}{4} > 0$)
6) Conclusioni
Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:
• x è ammissibile primale (come da verifica);
• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).
Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale
(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe $\frac{3}{4}$ e verifica il corollario della dualità forte)

- (*4) Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x_1,x_2,x_3) = (0,4,8)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & x_1 & +x_2 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & =4 \\
& x_1 & +x_2 & & \leq 4 \\
& x_1 \leq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^Tx : x \geq 0, Ax \geq b\}$$
$$\max\{u^Tb : u \geq 0, u^TA \leq c^T\}$$

$$
\begin{array}{c} x \text{ e } u \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array}
\iff
\begin{array}{ll}
Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\
u^TA \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\
\left.\begin{array}{l} u^T(Ax-b) = 0 \\ (c^T - u^TA)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)}
\end{array}
$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^Tx : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^Tb : x \geq 0, u^TA \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^TA_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^TA_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^Tx = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^Tx > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 = 4\ (OK)$$
$$x_1 + x_2 = 4 \leq 4\ (OK)$$
$$x_1 = 0 \leq 0, x_2 = 4 \geq 0, x_3 = 8 \geq 0\ (domini\ OK)$$

2) Passaggio al duale

$$\min 4u_1 + 4u_2$$
$$s.t.\ 2u_1 + u_2 \geq 1$$
$$3u_1 + u_2 \leq 1$$
$$-u_1 = 0$$
$$u_1\ libera, u_2 \geq 0$$

3) Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale
- il primo vincolo primale è di uguaglianza; non ci sono da imporre condizioni con la relativa variabile duale u_1 (la condizione $u_1(2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4) = 0$ è diretta conseguenza dall'ammissibilità primale
- il secondo vincolo primale $u_2(x_1 + x_2 - 4) = 0 \rightarrow u_2(0) \rightarrow$ (non è possibile dedurre alcuna condizione di complementarietà su u_2)
- il primo vincolo duale $x_1(2u_1 + u_2 - 1) = 0 \rightarrow 0(2u_1 + u_2 - 1) \rightarrow 0 \rightarrow //$
- il secondo vincolo duale $x_2(3u_1 + u_2) = 0 \rightarrow 4(3u_1 + u_2 - 1) \rightarrow 3u_1 + u_2 - 1 = 0$ (prima condizione)
- il terzo vincolo duale è di uguaglianza: non ci sono condizioni da imporre sulla relative variabile primale x_3 (tuttavia, la condizione $-u_1 = 0$ sarà comunque da considerare come condizione di ammissibilità duale) $\rightarrow$ (seconda condizione)

4) Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale

1]

$$3u_1 + u_2 - 1 = 0\ (ammissibilità\ duale)$$
$$-u_1 = 0\ (ammissibilità\ duale)$$

2]

$$u_1 = 0, u_2 = 1$$

5) Verifica ammissibilità duale

La soluzione duale trovata:

- soddisfa i tre vincoli duali ($2u_1 + u_2 = 1 \geq 1, 3u_1 + u_2 = 1 \leq 1, u_1 = 0$)
- soddisfa i vincoli di dominio (u_1 libera, $u_2 \geq 0$)

6) Conclusioni

Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

• x è ammissibile primale (come da verifica);
• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale
(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe 4 e verifica il corollario della dualità forte)

- A) enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale e B) applicare tali condizioni per dimostrare che(x_1 , x_2 , x_3) = (1 , 0 , – 2) è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 3x_1 - x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 & \geq 1 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq 0 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 & = 4 \\
& 2x_1 \qquad - x_3 & \geq -1 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ libera} \quad x_3 \leq 0 &
\end{array}
$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data. In particolare, valgono le seguenti condizioni di ottimalità:

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$$
$$\max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}$$

$$\begin{array}{c} x \text{ e } u \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione dat

$$x_1 + x_2 \geq 1 = 1 \geq 1\ (OK)$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \leq 0\ (OK)$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4 = 4\ (OK)$$
$$2x_1 - x_3 = 2 \geq -1\ (OK)$$
$$x_1 = 1 \geq 0, x_2\ libera, x_3 = -2 \leq 0\ (domini\ OK)$$

2) Passaggio al duale:

$$\min u_1 + 4u_3 - u_4$$
$$s.t.$$
$$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 \leq 3$$
$$u_1 + u_2 - u_3 \geq -1$$
$$u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

$u_1 \leq 0, u_2 \geq 0, u_3\ libera, u_4 \leq 08$

3) Applicazione delle condizioni CCPD:

$u_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \rightarrow u_1(0) \rightarrow$// non si può dire nulla

$u_2(2x_1 + x_2 + x_3 - 0) = u_2(0) \rightarrow$ // non si può dire nulla

$u_3(2x_1 - x_2 - x_3 - 4) = 0 \rightarrow$ non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la relativa variabile duale u_3, in quanto la condizione è diretta conseguenza dell'ammissibilità primale

$u_4(2x_1 - x_3 + 1) = 0 \rightarrow u_4(1) \rightarrow u_4 = 0$ (prima condizione)

$x_1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) = 0 \rightarrow 1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) \rightarrow\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3 = 0$ (seconda condizione)

$x_2(u_1 + u_2 - u_3 + 1) = 0$ → Il vincolo duale è di uguaglianza, non ci sono condizioni da imporre con la relativa variabile x_2, in quanto la condizione è di diretta conseguenza dell'ammissibilità duale: comunque $(u_1 + u_2 - u_3 + 1) = 0$ è da considerarsi come terza condizione
$x_3(u_2 - u_3 - u_4 - 0) = -2(u_2 - u_3 - u_4 - 0) \rightarrow u_2 - u_3 - u_4 = 0$ (quarta condizione)
4) Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale
$u_4 = 0$ (ccpd)
$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3 = 0$ (ammissibilità duale)
$(u_1 + u_2 - u_3 + 1) = 0$ (ammissibilità duale)
$u_2 - u_3 - u_4 = 0$ (ammissibilità duale)
$u_1 = 3, u_2 = -2, u_3 = -2, u_4 = 0$
$u_2 = u_3$
$u_1 = -1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = 0$
5) Verifica ammissibilità duale
La soluzione duale trovata:

- soddisfa i tre vincoli duali ($u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 1 \leq 3, u_1 + u_2 - u_3 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 = -1 \leq -1,\ u_2 - u_3 - u_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 0$
- soddisfa i vincoli di dominio ($u_1 = -1 \leq 0, u_2 = \frac{1}{2} \geq 0, u_3\ libera, u_4 = 0 \leq 0$

6) Conclusioni
Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:
• x è ammissibile primale (come da verifica);
• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).
Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale

<u>Svolgimento del prof</u>

A) Dati due problemi generici *mix* e *max* nelle forme:

$$\min c^T x\ Ax\ \sim b\ x \sim 0$$
$$\max u^T b\ \ u^T A \sim c\ \ u^T \sim 0$$
$$\bar{x}\ e\ \bar{u}\ ottime$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\overline{u_i}(u^T A_j - c_J) = 0$$
$$\overline{x_J}(a_i^T x - b_i) = 0$$
Con $\bar{x}\ ammissibile\ primale\ e\ \bar{u}\ ammissibile\ duale$

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data
X è ammissibile primale?

$$x_1 + x_2 = 1\ (OK),$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0\ (OK)$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4\ (OK)$$
$$2x_1 - x_3 > 1\ (OK)$$
$$x_1 > 0, x_2\ libera, x_3 < 0$$

2) Passaggio al problema duale

$$\min u_1 + 0u_2 + 4u_3 - 1u_4$$
$$s.t. u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 \geq 3$$
$$u_1 + u_2 + u_3 = -1$$
$$u_2 - u_3 - u_4 \leq 0$$
$$u_1 \leq 0, u_2 <\geq 0, u_3\ libera, u_4 \leq 0$$

3) Condizioni di complementarietà primale-duale

$x_1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) = 0 \rightarrow 1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) \rightarrow\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 3$
$x_2(u_1 + u_2 + u_3 + 1) = 0$ → Vero per ammissibilità duale ($x_2 = 0$ per il fatto delle condizioni di complementarietà, non tanto perché $x_2 = 0$
$x_3(u_2 - u_3 - u_4 - 0) = 0 \rightarrow\ u_2 - u_3 - u_4 - 0$
$u_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \rightarrow u_1 * 0 \rightarrow 0 \rightarrow //$
$u_2(2x_1 + x_2 + x_3 - 0) = 0 \rightarrow u_2 * 0 = 0 \rightarrow //$
$u_3(2x_1 - x_2 - x_3 - 4) = 0$ → Vero per ammissibilità primale
$u_4(2x_1 - x_3 - 1) = 0 \rightarrow u_4 * 5 = 0 \rightarrow u_4 = 0$

4) Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale:
$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 3$ (CCPD)
$u_1 + u_2 + u_3 = -1$ (ammissibilità duale)
$u_2 - u_3 - u_4 = 0$ (CCPD)
$u_4 = 0$ (CCPD

$u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 0$

5) Verifica ammissibilità duale

$$u_1 < 0, u_2 > 0, u_3\ libera, u_4 = 0$$

Primo vincolo duale a posto per costruzione, secondo vincolo duale a posto per costruzione, terzo vincolo duale a posto per costruzione

6) Conclusioni

La u è ammissibile duale ed è in scarti complementare con la x data ⇒ ottime

- Come si riconoscono sul tableau del simplesso le condizioni di illimitatezza per un problema di minimo? Giustificare la risposta.
    - Le condizioni di illimitatezza sono date dall'avere un'intera colonna che posto un costo ridotto positivo costituita di soli coefficienti negativi

- Si enunci e si giustifichi la regola adottata dal metodo del simplesso per la selezione della variabile uscente nelle operazioni di cambio base.

    - Per la selezione della variabile uscente, normalmente all'interno della matrice aumentata su cui eseguiamo le operazioni (nel nostro caso, il tableau del simplesso) si sceglie come riga la variabile che entra e si esegue il rapporto minimo tra ogni coefficiente $\overline{b_i}$ e tutti i coefficienti a_i

- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo di Bellman-Ford.
    - L'algoritmo di Bellman-Ford ha una complessità $O(N * A)$), in quanto viene fato un numero di iterazioni pari al numero N di nodi con un ciclo che esamina le etichette duali su tutti gli archi A. Qualora esistesse un ciclo negativo (abbiamo aggiornato almeno un'etichetta) oppure tutte le etichette sono stabili, l'algoritmo termina la sua esecuzione.

- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo di Dijkstra per il problema del cammino minimo
    - Il prof riporta: "Si consiglia di riportare i passi dell'algoritmo di Dijkstra e, quindi, discuterne la complessità come fatto nelle dimostrazione della Proprietà 10 alla fine del paragrafo 6.1 delle dispense sugli algoritmi per problemi di cammino minimo. Quindi si può approfondire con qualche dettaglio sull'influenza della scelta di opportune strutture dati per migliorare l'efficienza, come dal paragrafo 6.2 delle stesse dispense."

- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo del simplesso.
    - Essendo un algoritmo iterativo che cambia base e vertice quando la base è degenere, tende a convergere in $O\binom{n}{m}$; quando si ha a che fare con basi degeneri, non vi è nessuna garanzia di convergenza. Grazie anche alla regola di Bland, la complessità si assesta numericamente a quanto descritto, diventando tuttavia più efficiente, ottenendo complessità media lineare/sublineare in casi più fortunati.

Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	1/2	0	1	0	9
x_3	0	1/2	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	2
x_1	1	-1/2	0	1	0	1

Indicare, senza svolgere operazioni di pivot, 3 basi ottime (nei termini delle variabili che le compongono) del corrispondente problema di programmazione lineare.

Basi ottime:

- $[x_3, x_5, x_1]$ → Data direttamente dal problema

Sfrutto il fatto che la base è degenere (con stessa soluzione ottima, ma la base è diversa)
Con la regola del rapporto minimo, individuo basi alternative
$B_2 = [x_2\ x_5\ x_1]$
$B_3 = [x_4\ x_5\ x_1]$

- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	-1/3	0	-1	0	9
x_3	0	1/13	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	4/3
x_1	1	1/17	0	1	0	0

Rispondere alle seguenti domande, GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE:
(a) Si può individuare una soluzione di base? Quale? È ottima?
(b) Quali sono i possibili cambi base?
(c) Quale sarà il cambio base usando la regola di Bland e ordinando le variabili secondo le colonne?
(d) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso usando la reola di Bland?
(e) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base?

a) La possibile soluzione di base è $B = [x_3, x_5, x_1]$, dati gli 1 della matrice identità. Inoltre, non sappiamo al momento se sia ottima, in quanto esistono due costi ridotti non positivi; al momento, non si sa per certo se possa essere illimitata

b) I possibili cambi base sono 2: x_2 ed x_4, in quanto hanno due coefficienti negativi

c) Seguendo la regola di Bland, il cambio di base sarà su x_2 e si andrà a fare il rapporto minimo tra $\overline{b_i}$ e la colonna di x_1, selezionando l'argomento minimo

d) Usando la regola di Bland, andiamo a selezionare x_2; di fatto, la funzione obiettivo non migliora, in quanto il minimo rapporto è $\theta = 0$, quindi la funzione obiettivo è $-\frac{1}{3}\theta = 0$

e) Anche se cambia la base corrente, non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base. Infatti, i nuovi valori delle variabili in base sono $x_3 = 0 = \theta, x_5 = \frac{4}{3} - 0\theta = \frac{4}{3}, x_1 = 0 - 1\theta = 0$
Si passa quindi dalla soluzione di base degenere: $x_3 = 0, x_4 = \frac{4}{3}, x_1 = 0$ (con $x_2, x_5 = 0$ e fuori base) alla soluzione di base sempre degenere (con x_2 entrante e x_3 uscente, visto il rapporto minimo precedente e sfruttando la regola di Bland), $x_2 = 0, x_5 = \frac{4}{3}, x_1 = 0$, che rappresenta lo stesso vertice del poliedro ammissibile.

- (*6) Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	-12	0	0	0	-147	-239
x_3	75	0	1	0	-12	0
x_4	46	0	0	1	1	4/3
x_2	13	1	0	0	0	0

Riportare il tableau sul foglio e rispondere (NON su questo foglio) alle seguenti domande:

(a) Cerchiare i possibili elementi pivot e dire su quale elemento si farà pivot alla prossima iterazione del simplesso usando la regola di Bland?

(b) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso. GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!

(c) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base? GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!

a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	-12	0	0	0	-147	-239
x_3	75	0	1	0	-12	0
x_4	46	0	0	1	1	4/3
x_2	13	1	0	0	0	0

Per Bland, sceglieremo come variabile entrante x_1. Poi, eseguiremo il pivot, sempre per Bland, sulle variabili che hanno rapporto minimo, quindi in questo caso specifico, su 75 e 13, in quanto hanno entrambe rapporto 0. Come tale, si evidenzia in tabella questa scelta.

b)

Di fatto, si ha un'iterazione degenere, in quanto il rapporto minimo è $\theta = 0$, e quindi il miglioramento atteso sarebbe dato da $x_i * \theta = -12 * \theta = 0$

c)

Anche se cambia la base corrente, non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base. Infatti, i nuovi valori delle variabili in base sono $x_3 = 0 - 75\theta = 0, x_4 = \frac{4}{3} - 46\theta = \frac{4}{3}, x_2 = 0 - \theta 0 = 0$. Passiamo quindi dalla soluzione di base degenere $x_3 = 0, x_4 = \frac{4}{3}, x_2 = 0$ (con $x_2, x_5 = 0$ e fuori base) alla soluzione di base sempre degenere $x_3 = 0, x_1 = 0$ (variabile questa che entra in base per la regola di Bland ma degenere come notato poco fa), $x_4 = \frac{4}{3}$ (con $x_2, x_5 = 0$ e fuori base), che rappresenta lo stesso vertice del poliedro ammissibile.

- Enunciare e giustificare le condizioni di ottimalità nel metodo del simplesso
  - Il problema di PL deve essere in forma standard, quindi con funzione di minimo e una base ammissibile di partenza, cioè con $\overline{b_i}$ tutti positivi
  - Deve essere in forma canonica rispetto alla base corrente B, quindi avere le colonne anche sparse con coefficienti dalla matrice identità

- La soluzione è ottima nel momento in cui tutti i costi ridotti delle variabili fuori base sono positivi o nulli; sarà anche tale se non vi sono colonne di costo ridotto della f.o. con tutti coefficienti negativi, in tal caso sarà illimitata
- Fatte tutte queste premesse, viene definita ottima in quanto il valore della f.o. migliora (o, in altri casi, non peggiora)