Programmazione Lineare e Metodo del Simplesso

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Modelli di programmazione matematica

$$
\begin{aligned}
\min(\max) \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & g_i(x) = b_i \quad (i = 1 \dots k) \\
& g_i(x) \le b_i \quad (i = k+1 \dots k') \\
& g_i(x) \ge b_i \quad (i = k'+1 \dots m) \\
& \underline{x \in \mathbb{R}^n}
\end{aligned}
$$

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ è un vettore (colonna) di n variabili **reali**;
- f e g_i sono funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $b_i \in \mathbb{R}$

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

f e g_i sono funzioni **lineari** di x

$$
\begin{array}{lllr}
\min(\max) & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i = 1 \ldots k) \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \leq b_i & (i = k+1 \ldots k') \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \geq b_i & (i = k'+1 \ldots m) \\
 & x_i \in \mathbb{R} & & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

In questa fase **consideriamo soltanto variabili reali**!!!
Quanto diremo non vale in caso di variabili intere o binarie

Soluzione di un problema PL

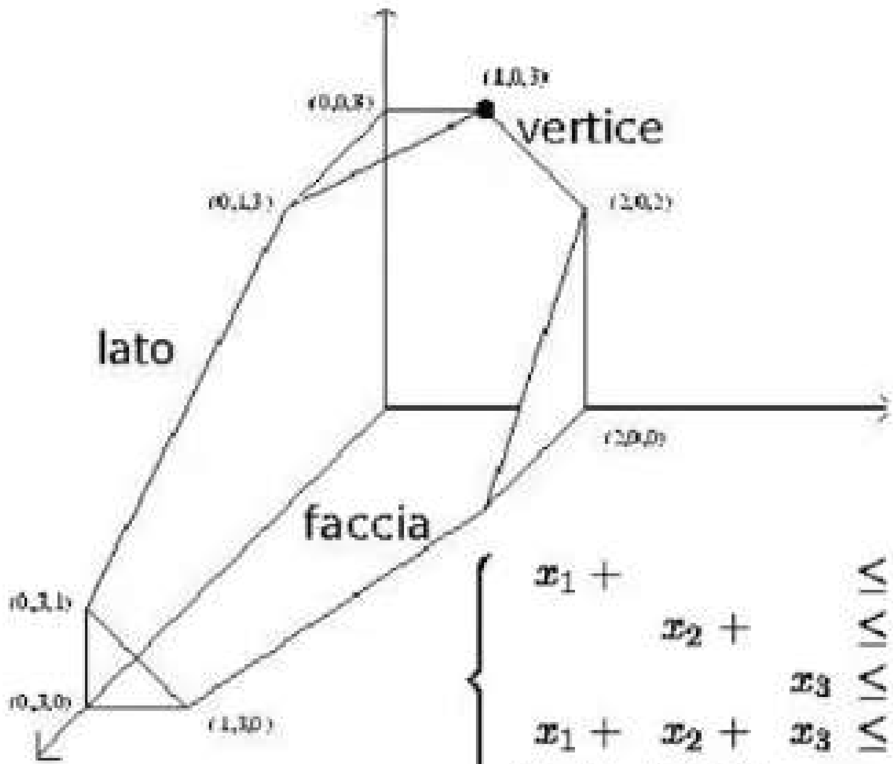
- *Soluzione ammissibile*: $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa tutti i vincoli
- *Regione ammissibile*: insieme delle x ammissibili
- *Soluzione ottima* x^* [min]: $c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in \mathbb{R}^n, x$ ammissibile.

Risolvere un problema PL significa determinare se:

- è inammissibile
- è illimitato
- ammette soluzione ottima

Geometria della PL

La regione ammissibile è un **poliedro** (intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani in $\mathbb{R}^n$)

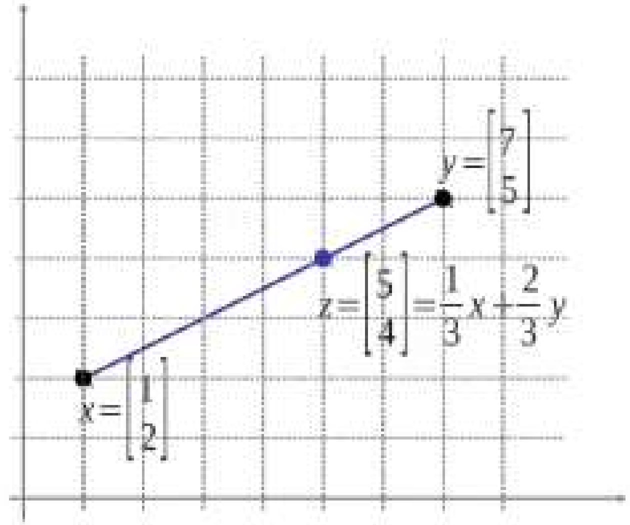


$$\begin{cases} x_1 + \le 2 \\ x_2 + \le 3 \\ x_3 \le 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Problema di PL: $\min(\max)\{c^T x : x \in P\}$, P è un poliedro in $\mathbb{R}^n$.

Vertici di un poliedro: definizione

- $z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa** di due punti x e y se
  $\exists\, \lambda \in [0,1] : z = \lambda x + (1-\lambda)y$



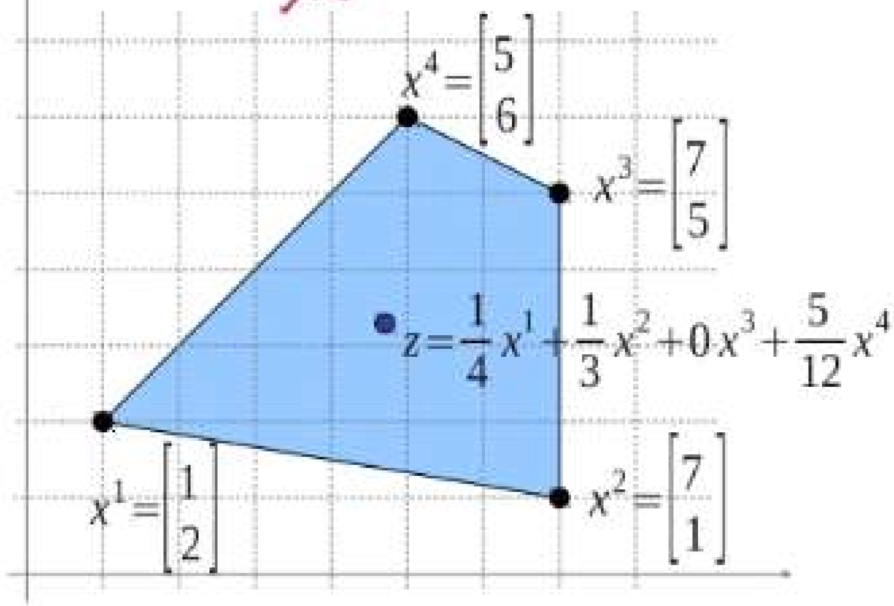
- $z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa stretta di due punti** x e y se $\exists\, \lambda \in (0,1) : z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

- $v \in P$ è **vertice del poliedro** P se **non** può essere espresso come **combinazione convessa stretta** di due punti distinti dello stesso poliedro: $\nexists\, x, y \in P, \lambda \in (0,1) : x \neq y, v = \lambda x + (1-\lambda)y$

Rappresentazione dei poliedri

$z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa** di $x^1, x^2 \dots x^k$ se $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \text{ e } z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$



Teorema di rappresentazione dei poliedri [Minkowski-Weyl] - caso limitato

Poliedro *limitato* $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $v^1, v^2, ..., v^k$ ($v^i \in \mathbb{R}^n$) i vertici di P

se $x \in P$ allora $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i$ con $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1..k$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

(x è combinazione convessa dei vertici di P)

Nota: un poliedro è un insieme convesso!

Vertice ottimo: dall'intuizione grafica alla dimostrazione

Teorema: esistenza di un vertice ottimo (versione "min")

Problema PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, P non vuoto e limitato

- PL ammette soluzione ottima
- **esiste almeno un vertice ottimo**

Dimostrazione:

$V = \{v^1, v^2 \dots v^k\} \qquad v^* = \arg\min_{v \in V} c^T v$

$$c^T x = c^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^* = c^T v^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = c^T v^*$$

In sintesi: $\quad \forall x \in P,\ \ c^T v^* \leq c^T x \qquad \blacksquare$

Possiamo limitare la ricerca dell'ottimo ai "soli" vertici!

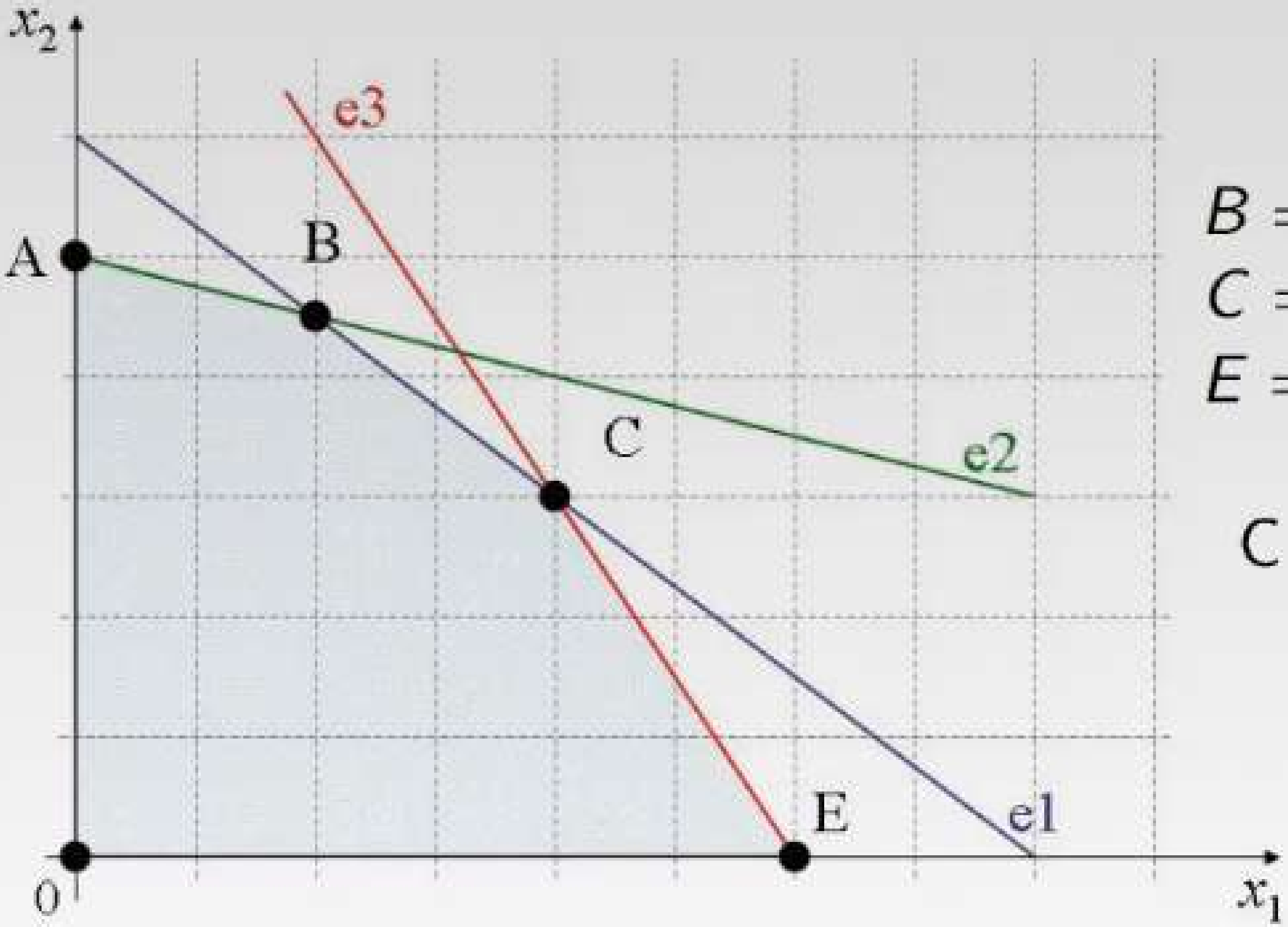
Come generare ed esplorare (tutti) i vertici? Un esempio

Una piccola ditta di profumi realizza due nuove fragranze a partire da 3 essenze: *rosa*, *mughetto* e *viola*. Per realizzare un litro di fragranza 1 sono richiesti 3 centilitri di rosa, 1 centilitro di mughetto e 3 centilitri di viola. Per realizzare un litro di fragranza 2 sono richiesti 4 centilitri di rosa, 4 centilitri di mughetto e 2 centilitri di viola. La disponibilità in magazzino per le tre essenze è di 24, 20 e 18 centilitri per rosa, mughetto e viola rispettivamente. Sapendo che l'azienda realizza un profitto di 13 e 10 euro per ogni litro venduto di fragranza 1 e 2 rispettivamente, determinare le quantità ottimali delle due fragranze da produrre.

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max & 13x_1 & + & 10x_2 & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & \text{(e1)} \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & \text{(e2)} \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & \text{(e3)} \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esempio: vertici come intersezione

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 13x_1 & + & 10x_2 & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & (e1) \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & (e2) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & (e3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lll}
B = e1 \cap e2 & (2, 9/2) & 71 \\
C = e1 \cap e3 & (4, 3) & 82 \\
E = e3 \cap (x_2 = 0) & (6, 0) & 78
\end{array}
$$

...

C ottimo!

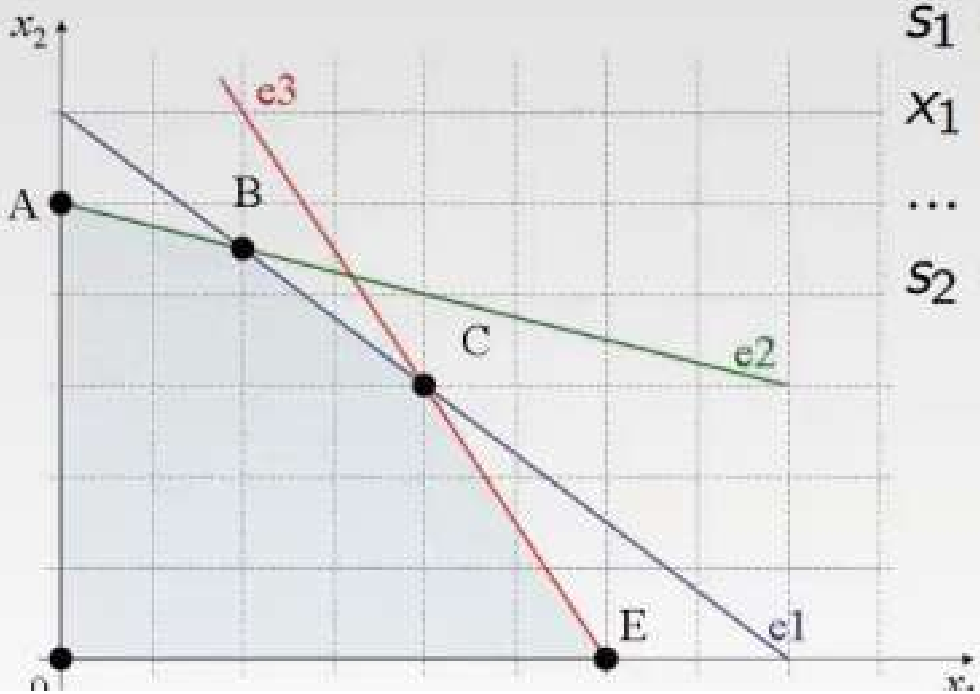
Caratterizzazione algebrica dei vertici

$s_1 = 24 - 3x_1 - 4x_2$
$s_2 = 20 - x_1 - 4x_2$
$s_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2$

Scriviamo il sistema come **equazioni**

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
3x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & = & 24 \\
x_1 & + & 4x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_3 & = & 18
\end{array}$$

2 gradi di libertà: ponendo a 0 due variabili, sistema quadrato!



$s_1 = s_2 = 0 \quad (2, 9/2, 0, 0, 3) \quad B$

$x_1 = s_2 = 0 \quad (0, 5, 4, 0, 8) \quad A$

...

$s_2 = s_3 = 0 \quad (3.2, 4.2, -2.4, 0, 0)$

non ammissibile!

Forma standard per problemi PL

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad = b_i & (i = 1 \ldots m) \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

- vincoli sono delle equazioni; $(+/-$ variabili slack/surplus$)$
- variabili ≥ 0; (sostituzione di variabili)
- funzione obiettivo di **minimo** senza cost. addit. e moltipl. $(\mathrm{X}\ -1)$;
- $b_i \geq 0$. $(\mathrm{X}\ -1)$

Forma standard: esempio

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34 \\
s.t. \quad & -2x_1 + 7x_2 \leq 5 - 6x_3 + 2x_1 \\
& -3x_1 + x_3 + 12 \geq 13 \\
& x_1 + x_2 \leq -2 \\
& x_1 \leq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\hat{x}_1 = -x_1 \qquad (\hat{x}_1 \geq 0)$

$x_3 = x_3' - x_3'' \quad (x_3' \geq 0 \ , \ \ x_3'' \geq 0)$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3' - 7x_3'' \\
s.t. \quad & 4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3' - 6x_3'' + s_1 = 5 \\
& 3\hat{x}_1 + x_3' - x_3'' - s_2 = 1 \\
& \hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2 \\
& \hat{x}_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3' \geq 0 \ , \ x_3'' \geq 0 \ , \ s_1 \geq 0 \ , \ s_2 \geq 0 \ , \ s_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Richiami di algebra lineare: definizioni

- vettore colonna $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
- vettore riga $v^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$: $v^T = [v_1, v_2, ..., v_n]$
- matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $v, w \in \mathbb{R}^n$, prodotto scalare $v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^T w = w^T v$
- Rango di $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\rho(A)$, max righe/colonne lin. indip.
- $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *invertibile* $\iff \rho(B) = m \iff det(B) \neq 0$

Sistemi di equazioni lineari

- *Sistemi di equazioni in forma matriciale*: un sistema di m equazioni in n incognite può essere messo in forma matriciale:
  $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.
- *Teorema di Rouché-Capelli*:
  $Ax = b$ ammette soluzioni $\iff \rho(A) = \rho(A|b) = r$ (∞^{n-r} soluzioni).
- *Operazioni elementari su matrici*:
  - scambiare la riga i con la riga j;
  - moltiplicare la riga i per uno scalare non nullo;
  - sostituire alla riga i, la riga i più α volte la riga j ($\alpha \in \mathbb{R}$).

  Le operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ non alterano l'insieme delle soluzioni ammissibili del sistema $Ax = b$.
- *Metodo di Gauss-Jordan* per la soluzione di sistemi $Ax = b$: eseguire delle operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ in modo da ottenere in A una sottomatrice identità di dimensioni pari a $\rho(A) = \rho(A|b)$.

Forma standard: esempio

min $3x_1$

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34 \\
s.t. & -2x_1 + 7x_2 \leq 5 - 6x_3 + 2x_1 \\
& -3x_1 + x_3 + 12 \geq 13 \\
& x_1 + x_2 \leq \underline{-2} \\
& x_1 \leq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$\hat{x}_1 = -x_1 \qquad (\hat{x}_1 \geq 0)$$

$$x_3 = x_3^{'} - x_3^{''} \quad (x_3^{'} \geq 0 \ , \ x_3^{''} \geq 0)$$

$$
\begin{array}{ll}
\min & -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3^{'} - 7x_3^{''} \\
s.t. & 4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3^{'} - 6x_3^{''} + s_1 = 5 \\
& 3\hat{x}_1 + x_3^{'} - x_3^{''} - s_2 = 1 \\
& \hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2 \\
& \hat{x}_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3^{'} \geq 0\ ,\ x_3^{''} \geq 0\ ,\ s_1 \geq 0\ ,\ s_2 \geq 0\ ,\ s_3 \geq 0.
\end{array}
$$

F. Std

Soluzioni di base: sistemi di equazioni lineari

- **Assunzioni**: sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\rho(A) = m$, $m < n$
- **Base di** A: sottomatrice quadrata di rango massimo, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $A = [B|F] \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m}, det(B) \neq 0$
$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}, x_B \in \mathbb{R}^m, x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$$
- $Ax = b \Longrightarrow [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = Bx_B + Fx_F = b$
- $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$
- con $x_F = 0$, una **soluzione di base**: $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$
- altre soluzioni di base scegliendo una **diversa base** di A
- **le variabili a 0 sono** $n - m$ (o più: soluzioni di base *degeneri*)

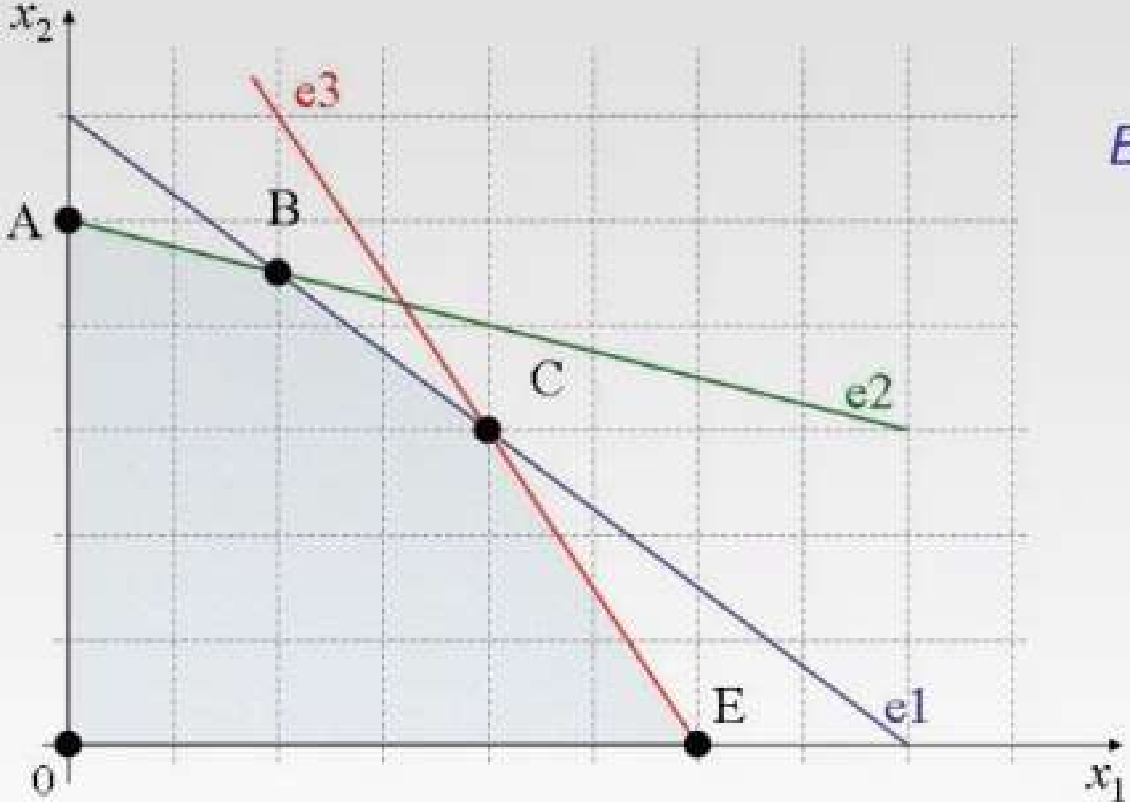
Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{lll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

- base B, **soluzione di base ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{rrrrrcl} 3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = & 24 \\ x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = & 20 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

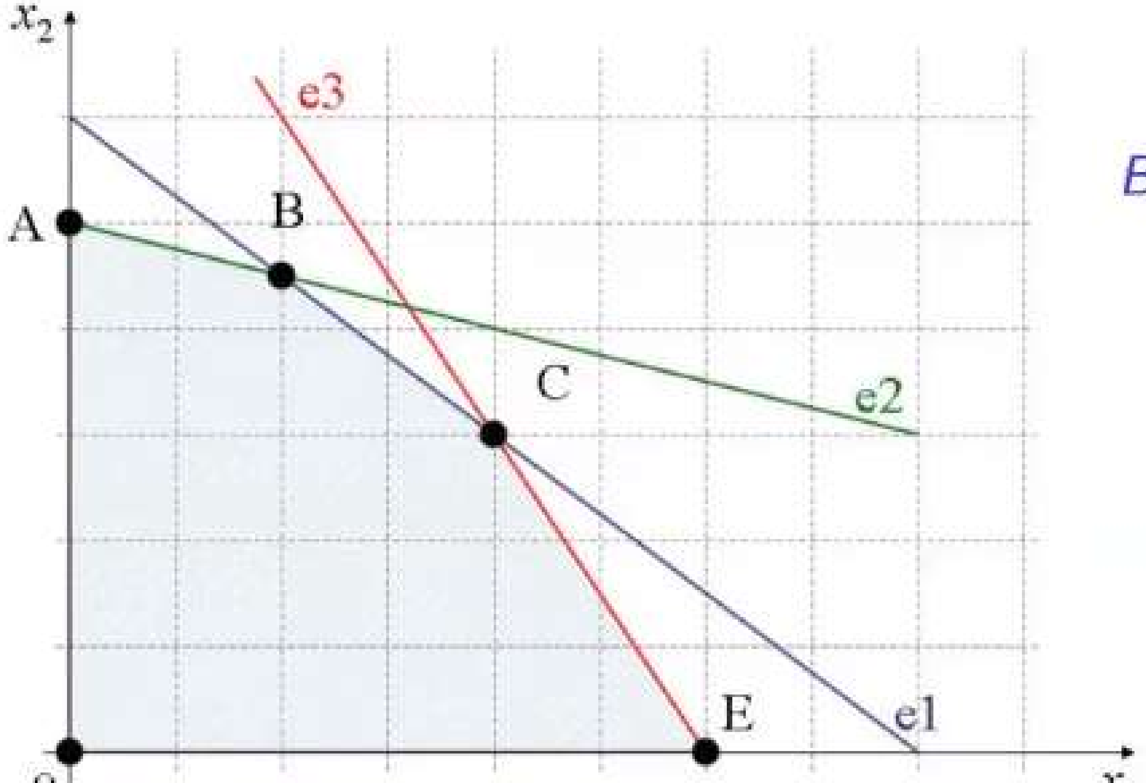
$x^T = (2 \;\; 9/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3)$ $\rightarrow$ **vertice B**

Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{llll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & & (i = 1 \ldots n) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

- base B, **soluzione di base ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{lllllll} 3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = & 24 \\ x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = & 20 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = B_2^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

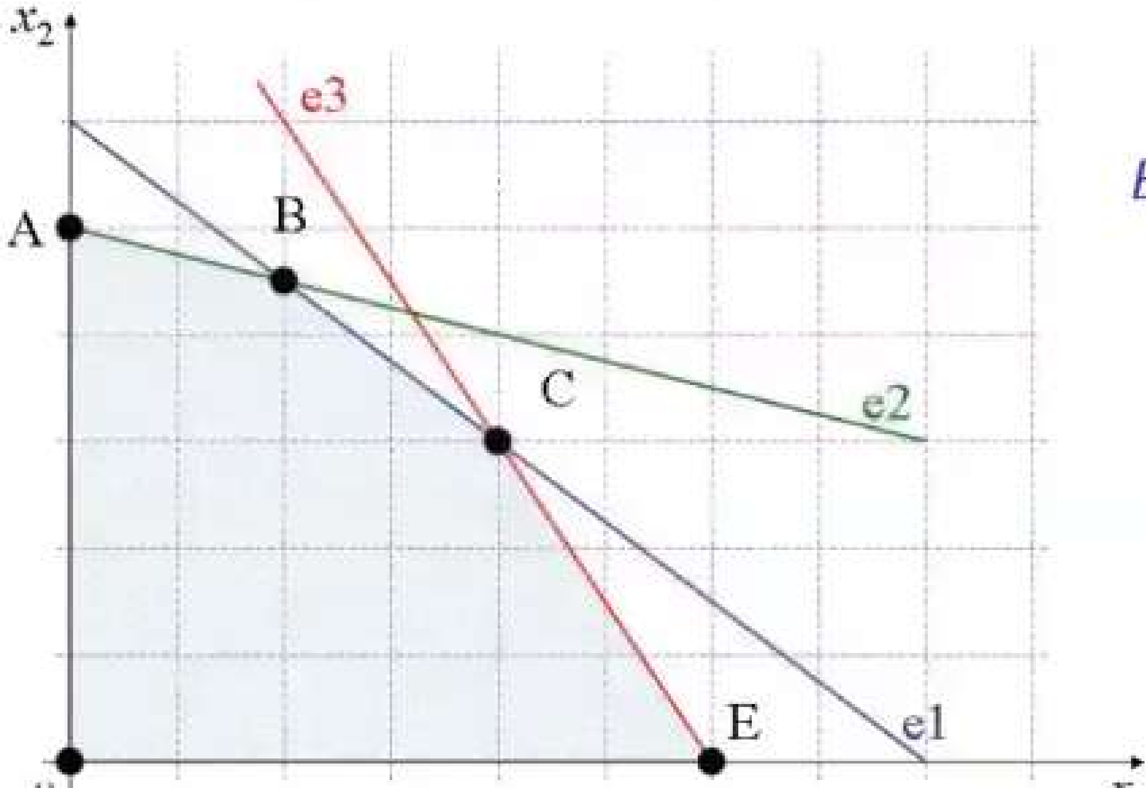
$x^T = (4\ 3\ 0\ 2\ 0)$ $\rightarrow$ **vertice** C

Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{lllr}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = 1 \ldots m) \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\min & c^T x & \\
\text{s.t.} & Ax & = b \\
 & x & \geq 0
\end{array}$$

- base B, **soluzione di base** **ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{lllllll}
3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = & 24 \\
x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = & 20 \\
3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18
\end{array}
\qquad
A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = B_3^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^T = (6\ 0\ 6\ 14\ 0)$ $\rightarrow$ **vertice** E

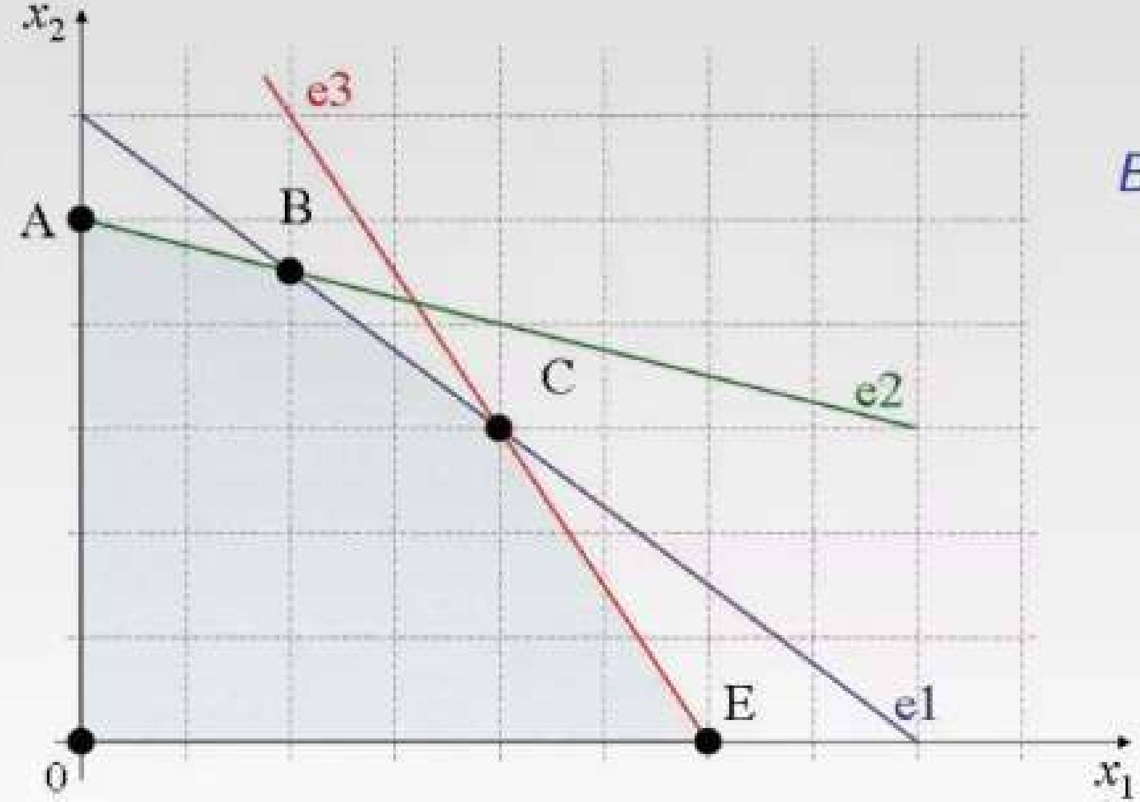
Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{llll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & & (i = 1 \ldots n) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

- base B, **soluzione di base ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{cccccccc} 3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = & 24 \\ x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = & 20 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 18/5 \\ 21/5 \\ -18/5 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^T = (18/5\ 21/5\ -18/5\ 0\ 0) \rightarrow$ **n.a.!**

Vertici e soluzioni di base

Soluzioni di base ammissibili $\rightsquigarrow$ $n - m$ variabili a 0 $\rightsquigarrow$ intersezione di un numero opportuno di iperpiani $\rightsquigarrow$ vertici

PL $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ $\quad$ $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$

Teorema: **corrispondenza tra vertici e soluzioni ammissibli di base**
(caratterizzazione algebrica dei vertici di un politopo)

x **soluzione ammissibile di base di** $Ax = b$ $\iff$ x **vertice di** P

Corollario: **soluzione ammissibile di base ottima**

Se P non vuoto e limitato, allora **esiste almeno una soluzione ottima coincidente con una soluzione ammissibile di base**

Algoritmo per PL (caso limitato): schema di principio

Algoritmo esaustivo delle soluzioni ammissibili di base:

1. metti il problema in forma standard $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
2. $incumbent = +\infty$
3. **repeat**
4. genera una combinazione di m colonne di A
5. sia B la relativa sottomatrice di A
6. **if** $det(B) \neq 0$ **then** calcola $x_B = B^{-1}b$ **else continue**
7. **if** $x_B \geq 0$ **and** $c_B^T x_B + c_N^T 0 < incumbent$ **then** aggiorna la soluzione
8. **until**(combinazioni di colonne esaurite)

Complessità: fino a $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ possibili soluzioni di base!!!

$\Rightarrow$ **metodo del simplesso**: esplorazione più efficiente delle soluzioni di base (solo soluzioni **ammissibili** e **miglioranti**)

Esempio

Problema dei profumi in **forma standard**:

$$
\begin{array}{llcccccccccl}
\min & z = -13x_1 & - & 10x_2 & & & & & & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & = & 24 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_3 & = & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

una **soluzione ammissibile di base** iniziale (vertice B):

- $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $z_B = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = -71$

Esempio

$x_{B_1} = 7 + \sum_j a_j x_{F_j}$

$x_{B_2} = +6 + \sum_j a_j x_{F_j}$

Nuova base $\Rightarrow$ variabile fuori base aumenta con **effetti su x_B e su z_B**

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$$

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = \boxed{c_B^T B^{-1} b} + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F)x_F$$

Esprimere x_B e z in funzione delle variabili **fuori** base

Per semplificare i calcoli a mano, usiamo metodo di **Gauss-Jordan**:

$$Ax = b \quad \rightsquigarrow \quad [\,B\;F \mid b\,] \quad \rightsquigarrow \quad [\,I\;\bar{F} \mid \bar{b}\,]$$

$$x_B = \bar{b} - \bar{F}x_F \qquad z = \dots$$

Esempio

Nuova base $\Rightarrow$ variabile fuori base aumenta con **effetti su x_B e su z_B**

$$
\begin{aligned}
x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Fx_F \\
z &= c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = c_B^T B^{-1} b + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F) x_F
\end{aligned}
$$

Esprimere x_B e z in funzione delle variabili **fuori** base

Per semplificare i calcoli a mano, usiamo metodo di **Gauss-Jordan**:

$$Ax = b \quad \rightsquigarrow \quad [\, B\ F \mid b \,] \quad \rightsquigarrow \quad [\, I\ \bar{F} \mid \bar{b} \,]$$

$$x_B = \bar{b} - \bar{F}x_F \qquad z = \ldots$$

Esempio

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & s_3 & s_1 & s_2 & \bar{b} \\
3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 24 \\
1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 20 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 18
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(R_1/3) \\
(R_2 - R_1/3) \\
(R_3 - R_1)
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 8 \\
0 & 8/3 & 0 & -1/3 & 1 & 12 \\
0 & -2 & 1 & -1 & 0 & -6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(R_1 - 1/2\ R_2) \\
(3/8\ R_2) \\
(R_3 + 3/4\ R_2)
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -1/8 & 3/8 & 9/2 \\
0 & 0 & 1 & -5/4 & 3/4 & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 1/2\ s_1 + 1/2\ s_2 \\
x_2 &= 9/2 + 1/8\ s_1 - 3/8\ s_2 \\
s_3 &= 3 + 5/4\ s_1 - 3/4\ s_2
\end{aligned}
$$

$$
z = -13x_1 - 10x_2 = -71 + 21/4\ s_1 - 11/4\ s_2
$$

Esempio

$$z = -71 + 21/4 \; s_1 \; -11/4 \; s_2$$

- Conviene aumentare s_2 (e lasciare s_1 a 0)
- Per mantenere i vincoli di uguaglianza:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & = & 2 & + & 1/2 & s_2 \\ x_2 & = & 9/2 & - & 3/8 & s_2 \\ s_3 & = & 3 & - & 3/4 & s_2 \end{array}$$

- Per mantenere i vincoli di non negatività:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 \geq 0 & \Rightarrow & 2 + 1/2 s_2 \geq 0 & \Rightarrow & s_2 & \geq & -4 & \textbf{sempre!} \\ x_2 \geq 0 & \Rightarrow & 9/2 - 3/8 s_2 \geq 0 & \Rightarrow & s_2 & \leq & 12 & \\ s_3 \geq 0 & \Rightarrow & 3 - 3/4 s_2 \geq 0 & \Rightarrow & s_2 & \leq & 4 & \end{array}$$

- **Soluzioni ammissibili** e **miglioranti** ponendo $s_1 = 0$ e $0 \leq s_2 \leq 4$
- $s_2 = 4 \Rightarrow s_3 = 0$: soluzione ammissibile **di base** e **migliorante**

Esempio

Nuova base ammissibile (s_2 al posto di s_3 in base):

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{(vertice C)} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_B = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = -82$$

Iteriamo il ragionamento: x_B e z **in funzione di** x_F:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 4 & + & 1/3 & s_1 & - & 2/3 & s_3 \\
x_2 & = & 3 & - & 1/2 & s_1 & - & 1/2 & s_3 \\
s_3 & = & 4 & + & 5/3 & s_1 & - & 4/3 & s_3 \\
 & & & & & & & & \\
z & = & -82 & + & 2/3 & s_1 & + & 11/3 & s_3
\end{array}$$

Soluzione ottima! Visitate 2 delle $\binom{5}{3} = 10$ possibili basi

Forma canonica di un problema PL

PL $\min\{z = c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ è in **forma canonica rispetto alla base** B di A se tutte le variabili in base e la funzione obiettivo sono scritte esplicitamente **nei termini delle sole variabili fuori base**:

$$
\begin{array}{l}
z = \bar{z}_B + \bar{c}_{F_1} x_{F_1} + \bar{c}_{F_2} x_{F_2} + \ldots + \bar{c}_{F_{(n-m)}} x_{F_{(n-m)}} \\
x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{iF_1} x_{F_1} - \bar{a}_{iF_2} x_{F_2} - \ldots - \bar{a}_{iF_{(n-m)}} x_{F_{(n-m)}} \quad (i = 1 \ldots m)
\end{array}
$$

- $\bar{z}_B$ scalare (valore f.o. per la soluzione di base)
- $\bar{b}_i$ scalare (valori variabili di base)
- B_i indice della i-esima variabile in base (ce ne sono m)
- F_j indice della j-esima variabile fuori base (ce ne sono $n - m$)
- $\bar{c}_{F_j}$ coefficiente della j-esima variabile fuori base in funzione obiettivo (**costo ridotto della variabile rispetto alla base** B)
- $-\bar{a}_{iF_j}$ coefficiente della j-esima variabile fuori base nel vincolo che esprime la i-esima variabile in base