

17-02-2017

1. Una società di sviluppo software deve rinnovare le licenze per il suo parco macchine. La società dispone di 10 macchine (A, B, C, D, E, F, G, H, I, L) e 5 sviluppatori (1, 2, 3, 4, 5). Gli sviluppatori lavorano in remoto collegandosi a una macchina. Uno sviluppatore può collegarsi a una macchina qualsiasi, purché la qualità del segnale sia almeno pari al 70%. La qualità del segnale (in percentuale) per i diversi collegamenti è indicata nella seguente tabella.

Sviluppatore	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
1	80	20	75	90	100	30	20	85	20	95
2	10	80	90	60	50	75	20	20	75	20
3	30	10	50	30	10	50	70	80	90	70
4	95	30	75	80	50	60	80	30	75	50
5	70	80	10	60	90	80	75	75	50	80

Il mercato mette a disposizione due tipi di licenza: user e server. Una licenza user costa 1000 euro ed è legata allo sviluppatore, permettendo a un singolo sviluppatore di lavorare su tutte le macchine cui lo sviluppatore ha accesso; una licenza server costa 5000 euro ed è legata alla macchina, permettendo a tutti gli sviluppatori che vi hanno accesso di lavorare su una singola macchina. Scrivere il modello di programmazione lineare che determini il piano di acquisto licenze di costo minimo tenendo conto che:

- si vogliono acquistare almeno due licenze user e non più di 3 licenze server;
- ogni sviluppatore deve avere la possibilità di lavorare su almeno due macchine;
- si ha un costo fisso per l'emissione degli ordini: 100 euro per l'ordine di licenze user, e 150 euro per l'ordine di licenze server;
- se si acquistano almeno 6 licenze macchina, una è in omaggio.

Per il problema in oggetto, è utile introdurre due variabili, rispettivamente, per licenze user e server.

x_i : numero di licenze di tipo user per lo sviluppatore $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

y_j : numero di licenze di tipo server per lo sviluppatore $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Il vincolo sulla qualità del segnale almeno pari al 70% considera una sua variabile decisionale:

v_j : qualità del segnale per le macchine $j \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, L\}$

Per ciascuno sviluppatore, quindi, avremo un vincolo del tipo

$$\text{licenze sviluppatore} = \text{somma delle qualità del segnale} \geq 70\%$$

$$x_1 = v_A + v_C + v_D + v_E + v_H + v_L$$

$$x_2 = v_B + v_C + v_F + v_I$$

$$x_3 = v_H + v_I$$

$$x_4 = v_A + v_C + v_D + v_G + v_I$$

$$x_5 = v_B + v_E + v_F + v_G + v_H + v_L$$

Da questo, sono immediati i primi due punti del primo vincolo, sapendo che la somma di licenze user/server deve essere di una certa quantità. Avendo variabili decisionali che rappresentano di per sé un numero di licenze, si può modellare il problema in questo modo, considerando in entrambi i casi gli sviluppatori:

z_i : variabile logica che vale 1 se acquisto un numero di licenze di tipo user per lo sviluppatore $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 0 altrimenti

w_i : variabile logica che vale 1 se acquisto un numero di licenze di tipo server per lo sviluppatore $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 0 altrimenti

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 \geq 2 \text{ (numero di licenze user)}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \leq 3 \text{ (numero di licenze server)}$$

I vincoli di big-M legati a queste variabili seguono:

$$x_1 \leq Mz_1, x_2 \leq Mz_2, x_3 \leq Mz_3, x_4 \leq Mz_4, x_5 \leq Mz_5$$

$$y_1 \leq Mw_1, y_2 \leq Mw_2, y_3 \leq Mw_3, y_4 \leq Mw_4, y_5 \leq Mw_5$$

Avremo quindi che la funzione obiettivo segue esattamente quanto descrive quest'ultimo vincolo:

$$\min 1000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 + 1000x_5 + 5000y_1 + 5000y_2 + 5000y_3 + 5000y_4 + 5000y_5$$

Si cita poi che "per ogni sviluppatore deve avere la possibilità di lavorare su almeno due macchine".

Essendo che gli sviluppatori sono legati alle licenze user per lavorare su tutte le macchine ma, allo stesso tempo, la licenza server permette di legarsi ad una singola macchina, stiamo di fatto dicendo che tutti gli sviluppatori lavorano, *a prescindere dal tipo di macchina*, su almeno 2 macchine.

Quindi, avremo che, per ogni sviluppatore, il numero di licenze è dato da:

$$x_1 + y_1 \geq 2 \text{ (lo sviluppatore 1 ha accesso ad almeno 2 macchine)}$$

$$x_2 + y_2 \geq 2 \text{ (lo sviluppatore 2 ha accesso ad almeno 2 macchine)}$$

$$x_3 + y_3 \geq 2 \text{ (lo sviluppatore 3 ha accesso ad almeno 2 macchine)}$$

$$x_4 + y_4 \geq 2 \text{ (lo sviluppatore 4 ha accesso ad almeno 2 macchine)}$$

$$x_5 + y_5 \geq 2 \text{ (lo sviluppatore 5 ha accesso ad almeno 2 macchine)}$$

Abbiamo che: "se si acquistano almeno 6 licenze macchina, una è in omaggio". Significa quindi che, per ogni sviluppatore, la somma di tutte le possibilità di legarsi ad una macchina deve essere ≥ 6 .

Tradotto, avremo che questo una "licenze macchina" significa "licenza server", che è collegata comunque ad uno sviluppatore e, sfruttando la variabile logica di prima:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \geq 6$$

Il fatto di averne almeno una in omaggio è variabile logica.

k : variabile binaria che vale 1 se almeno una licenza macchina è in omaggio, 0 altrimenti

$$w_1(1 - k) + \sum_{i=2}^5 w_i \geq 6$$

Tra tutte le licenze, almeno una dovrà valere 0, in questo caso, per almeno una delle licenze, mentre le altre rispettano il vincolo precedente (in questo caso, per esempio, per la macchina 1).

"si ha un costo fisso per l'emissione degli ordini: 100 euro per l'ordine di licenze user, 150 euro per l'ordine di licenze server"

Questo significa che useremo le variabili binarie di prima considerando l'aggiunta degli eventuali costi fissi, sempre basati sugli sviluppatori. Quindi:

$$\min 1000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 + 1000x_5 + 5000y_1 + 5000y_2 + 5000y_3 + 5000y_4 + 5000y_5 \\ + 100z_1 + 100z_2 + 100z_3 + 100z_4 + 100z_5 + 150w_1 + 150w_2 + 150w_3 + 150w_4 + 150w_5$$

Domini: $x_i \in Z_+$, $y_i \in Z_+$, $z_i \in \{0,1\}$, $w_i \in \{0,1\}$, $k \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$