



# RO

## ESERCIZI DI MODELLAZIONE

ES.1

Un'azienda produce due diversi tipi di profumo costituiti da alcol e da essenze. Al momento, sono necessari 10 litri di essenza di rosa, 5 litri di mugheretto e 8 litri di limone. Le essenze sono ottenute distillando delle basi vendute sul mercato in flaconi. Ogni tipo di flacone ha un costo diverso, un tempo di distillazione diverso e permette di ricavare una diversa quantità delle tre essenze. Le caratteristiche dei flaconi sono riassunte nella seguente tabella:

Scrivere il modello di programmazione lineare che determina l'approvvigionamento di costo minimo, tenendo anche conto che:

### Flaconi

flacone	costo	h rich/flacone	ROSA ml	MUG ml	LIM ml
1	90	20	100	110	320
2	120	16	120	290	210
3	170	12	160	330	130

- le ore totali disponibili per il processo di distillazione sono 1500;
- ogni ordine per un diverso tipo di flaconi costa 20 €;
- si vogliono acquistare flaconi di almeno due tipi;
- i flaconi dello stesso tipo vengono distillati uno di seguito all'altro e ogni volta che si distilla un tipo di flacone bisogna effettuare il set-up dell'impianto, della durata di 8 ore.

### Esercizio 1

```
Xi=flacone i inc I={1,2,3}; j inc J={R,M,L}
Xij= quantità risorsa j nel flacone i i inc I AND j inc J
hi=ore richieste per produrre flacone i
Fobj= Min(90(x1+z1)+120(x2+z2)+170(x3+z3)+20(z1+z2+z3))
S.t.
[//conversione][//conversione] ml il l dei flaconi
[//vincoli][//vincoli] quantità
X1r(0.1)+x2r(0.12)+x3r(0.16) ≥ 10
X1m(0.11)+x2m(0.29)+x3m(0.33) ≥ 5
X1l(0.32)+x2l(0.21)+x3l(0.13) ≥ 8
[//][//vincoli]variabili logiche
Z1,z2,z3{0,1} 1 se faccio un ordine di xi 0 altrimenti
[//attivazione][//attivazione] variabili logiche
Xi<M*Zi for all i {1,2,3} M è una costante sufficientemente grande (esempio: M=62*x1(flacone 3)+1*x2(flacone 2)=63 che sarebbe
x1<=M*z1 ,x2<=M*z2,x3<=M*z3
Z1+z2+z3 ≥ 2
[//vincolo][//vincolo] ore
h1+h2+h3 ≤ 1500-8(z1+z2+z3)
//DOMINI
zi={0,1} for all i inside I
xi={Z+} for all i inside I
xij=RATIONAL{Q+} for all i inside I,j inside J //variabile non necessaria ma aiuta la leggibilità
hi={Z+} for all i inside I //si suppone che le ore lavorative siano piene
```

ES2.

Un'associazione umanitaria internazionale deve spedire i regali di Natale per i bambini di due orfanotrofi in Africa. Quest'anno si regaleranno puzzle, orsacchiotti e trenini, secondo le richieste minime sintetizzate in tabella:

### Regali(Richieste minime)

Orfanotrofia	Puzzle	Orsachioti	Trenini
<u>A: Tanzania</u>	2500	3000	1400
<u>B: Kenia</u>	2100	2400	1300

I regali saranno smistati a partire da 3 centri di raccolta. I regali sono stati confezionati in pacchi per la spedizione, e ciascun centro di raccolta ha composto dei pacchi diversi. La composizione dei pacchi e il numero di pacchi disponibili sono indicati nella seguente tabella:

#### Smistamento in pacchi

Centro	puzzle/pacchetto	orsach/pacchetto	tren/pacchetto	Pacchi disponibili
<u>1</u>	10	4	15	220
<u>2</u>	5	12	7	240
<u>3</u>	14	9	16	260

La spedizione avverrà per via aerea: da ciascun centro potrà partire al massimo un aereo per ciascuna destinazione, tenendo conto che il Centro 2 ha al massimo un aereo a disposizione. Ciascun aereo ha un costo fisso (tasse aeroportuali in partenza) e un costo variabile per pacco, secondo i dati (in euro) riportati in tabella:

#### Costi

Centro	Costo fisso aereo	costo variabile per pacco verso A	costo variabile per pacco verso B
<u>1</u>	500	10	12
<u>2</u>	300	15	14
<u>3</u>	400	5	25

Si vuole determinare un piano di smistamento dei regali di costo minimo, considerando che il governo della Tanzania incentiva l'arrivo di puzzle chiedendo una sovrattassa di 1000 € qualora il numero di puzzle arrivati non superi di 500 unità la richiesta minima. ???????

#### Esercizio 2

```

min (x1*(10*z1A+12*z1B))+500(z1A+z1B)+ (x2*(15*z2A+14*z2B))+300(z2A+z2B)+(x3*(5*z3A+25*z3B))+400*(z3A+z3B)-1000(tA)

s.t.
xi=pacchi dal centro i for i{1,2,3} J=destinazione j for j{A,B}
zij
//vincolo quantita'
10*x1A+5*x2A+14*x3A>=2500 //A //puzzle
10*x1B+5*x2B+14*x3B>=2100//B
4*x1A+12*x2A+9*x3A>=3000//A //orsach
4*x1B+12*x2B+9*x3B>=2400//B
15*x1A+7*x2A+16*x3A>=1400//A //tren
15*x1B+7*x2B+16*x3B>=1300//B
//vincolo pacchi
xij=pacchi dal centro i verso la destinazione j
x1A+x1B<=220
x2A+x2B<=240
x3A+x3B<=260
//vincolo logico spedizioni
zij=variabili logiche for all i in I for all j in J zij={0,1}
//controllo spuri ed attivazione
z1A+z1B+z2A+z2B+z3A+z3B<=5
z2A+z2B<=1//escludo spuri //una sola nave da 2
xij<=M*zij for all j //M is a constant for exemple the maximum package all to one destination
//vincolo logico TA variabile logica se...finisco tra poco
tA{0,1} defined only for J=A
10*x1A+5*x2A+14*x3A>=2500 ->tA=0 else tA=1 tA<=1
10*x1A+5*x2A+14*x3A>=2500+M*tA //M=500
//DOMINI
xij INSIDE{Z+} for all i,j
zij INSIDE{0,1} defined for all the oportunes indexes
tA INSIDE {0,1} defined only for A

```

#### ES.3

In vista delle prossime festività natalizie, Babbo Natale e la Befana devono programmare l'utilizzo della flotta di slitte e scope volanti. Ciascuna slitta o scopa da utilizzare deve prima passare dalla manutenzione. Le operazioni di manutenzione per una slitta o scopa richiedono dei pezzi di ricambio e un costo di manodopera, secondo i dati indicati in tabella:

#### Tipo manutenzione

Manutenzione	sottopattini	bulloni	perni	Costo manutenzione
<u>A:Slitta normale</u>	2	10	20	25
<u>B: Slitta lusso</u>	4	12	25	20
<u>C: scopa normale</u>	0	5	30	35
<u>D: scopa lusso</u>	0	9	25	30

Le previsioni sulle richieste dei bambini indicano la necessità di approntare almeno 1200 mezzi tra slitte e scope, indipendentemente dal tipo. Inoltre, Babbo Natale può contare su 600 aiutanti al massimo e la Befana può contare su 900 aiutanti al massimo (gli aiutanti di Babbo Natale e della Befana possono, ovviamente, guidare solo slitte i primi e scope le seconde). Per l'acquisto dei pezzi di ricambio sono disponibili le seguenti confezioni:

#### Kit confezioni

Confezione	sottopattini	bulloni	perni	costo unitario
<u>1</u>	5	30	70	20
<u>2</u>	7	45	90	25

```
//SOL.ES3 copertura costo minimo
xi i inside I={A,B,C,D}=mezzo di tipo i da farne manutenzione
yj j inside J={1,2}=kit di tipo j acquistabile
funzione obj = min(20*y1+25*y2-s1(500));
s.t.
(ΣXi)>=1200
//zi logic var zi inside{0,1} for all i{A,B,C,D}
(ΣZi)=3
XA*zA+XB*zB<=600
XC*zC+XD*zD<=900
xA<=M*zA xB<=M*zB //M=600
xC<=M*zC xD<=M*zD //M=900
//vincoli quantità manutenzione
//somma delle parti incluse in ciascun kit risorsa k>= parti necessarie risorsa k per manutenzione veicolo i
5y1 + 7y2 >= 2xA + 4xB
30y1 + 45y2 >= 10xA + 12xB + 5xC + 9xD
70y1 + 90y2 >= 20xA + 25xB + 30xC + 25xD
/*5y1 + 7y2 >= 2xA*(zA) + 4xB*(zB)
30y1 + 45y2 >= 10xA*(zA) + 12xB*(zB) + 5xC*(zC)+9xD*(zD)
70y1 + 90y2 >= 20xA*(zA) + 25xB*(zB) + 30xC*(zC)+25xD*(zD)
xA<=M1*zA xB<=M1*zB xC<=M2*zC xD<=M2*zD /*dove M è una costante sufficientemente grande da coprire il massimo se si effettuasse
caso 1 slitte -> M1 di A e B = 600
caso 2 scope -> M2 di C e D = 900
non è necessario il controllo dei spuri perchè ci sono vincoli*/
//VAR logica s se acquisto 200 kit tipo 1 ed attivazione
is defined only for i=1 -> s1={0,1}
y1>=200s1 //vincolo spuri ovvero <200
y1<=s1*M /*M costante minima sufficientemente grande per la copertura avendo 900scope lusso,299 slitte lusso, e 1 sola slitta
//DOMINI: !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
xi inside {Z+} yj inside {Z+} //Z+ perchè non richiesto ma una soluzione ideale sarebbe Q+
```

Le confezioni di tipo 1 sono in promozione: se si acquistano più di 200 confezioni di tipo 1 si ha uno sconto di 500 €. Vogliamo aiutare Babbo Natale e la Befana a determinare il numero di mezzi, per tipo, da utilizzare, cercando di minimizzare i costi complessivi di manutenzione(pezzi di ricambio e manodopera) e considerando che esattamente tre tipi di mezzi dovranno circolare.

#### ES4

Una ditta di trasporti distribuisce frigoriferi in 4 città A, B, C e D a partire da 3 centri di distribuzione 1, 2 e 3 e vuole valutare la convenienza ad aprire il centro 4. Il costo di trasporto di un frigorifero in euro, le richieste delle città e le disponibilità dei centri di distribuzione (già aperti o potenziali) sono sintetizzati nella seguente tabella:

### Centro richieste

ND	città A	città B	città C	città D	Disponibilita centri
<u>centro 1</u>	4	3	2	3	1800
<u>centro 2</u>	2	4	3	1	3000
<u>centro 3</u>	2	3	4	5	1800
<u>centro 4</u>	3	1	2	2	1000
<u>richieste città</u>	1000	2000	1700	1300	

Scrivere il modello di programmazione lineare che permetta di minimizzare i costi di trasporto e di valutare la convenienza ad aprire il nuovo centro 4 considerando che:

- il costo di apertura del nuovo centro è di 1000 euro;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire una domanda di almeno 600 frigoriferi;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire almeno 2 città diverse.

```
//notazioni utili
xi defined for all i inside I={1,2,3,4} = centro smistamento i
yj defined for all j inside J={A,B,C,D} = magazzino città J
xij=number of frizers to transport from i to the city j
f.obj. min( (4x1A+3x1B+2x1C+3x1D)+(2x2A+4x2B+3x2C+1x2D)+(2x3A+3x3B+4x3C+5x3D)+s(3x4A+1x4B+2x4C+2x4D+1000) ) =min(/*for i,j=1 to
s.t.
//vincolo quantita' frighi dal centro i
Σx1j<=1800 //FOR j=A to j=D
Σx2j<=3000
Σx3j<=1800
Σx4j<=1000
//vincolo richieste città
ΣxiA>=1000 //FOR i=1 to 4
ΣxiB>=2000
ΣxiC>=1700
ΣxiD>=1300
//vincolo var logica s
s={0,1} if(ΣxiD>=600) s=1 else s=0;
//attivazione
ΣxiD<=M*s //dove la costante M si potrebbe assumere (frighi disp - richieste)+richiesta città D=1600+1300=2900
//vincolo spuri
ΣxiD>=600*s
//var logiche vincolo almeno 2 città definite solo per il centro 4
z4j={0,1} for all j
Σz4j>=s*2
Σz4j<=s*4
//DOMINI
xi,yj,xij inside{Z+} for all i,j //yj variabile inutile perchè non utilizzata
```

### ES 5

Un risparmiatore ha a disposizione, all'inizio di aprile, un budget di 100.000 euro e vorrebbe disporre, all'inizio di agosto, di almeno 150.000 euro attraverso un mix di investimenti. Tutti gli investimenti sono a disposizione all'inizio di ciascuno dei prossimi mesi (da aprile a luglio) e le loro caratteristiche sono riassunte nella seguente tabella, in termini di durata (in mesi), rendimento percentuale e livello di rischio:

#### Tipologia investimento

Investiment	Anni	+money	rischio
<u>A</u>	1	0.1	2
<u>B</u>	2	0.19	3
<u>C</u>	3	0.33	5
<u>D</u>	1	0.15	4

Scrivere il modello di programmazione lineare che aiuti il risparmiatore ad arrivare alla cifra desiderata minimizzando il livello di rischio e tenendo conto che:

- il capitale rientrato alla fine di un investimento è immediatamente a disposizione per altri investimenti;
- a inizio maggio, non è possibile investire nello stesso periodo sia in B che in C;

- per poter usufruire dell'investimento A a inizio aprile è necessario investire, nello stesso periodo, almeno 10.000 euro in B e 30.000 euro in D;
- è possibile investire solo multipli interi di 1.000 euro.

```
//INSIEMI
I={A,B,C,D}=investimenti potenziali
J={aprile,maggio,giugno,luglio}=mesi di investimento dove è possibile investire
/*NOTAZIONI
ri=costante di rischio del investimento in i
yij=capitale investito in i nel mese j
ci=costante indicante il guadagno se si investe in i
*/
M parametro iniziale = 100000
min 0.1yA1+0.19yB1+0.33yC1+0.15yD1<=M
      0.1yA2+0.19yB2*ZB2          +0.15yD2*ZD2<=M+0.1yA1+0.15yD1
      0.1yA3+                      +0.15yD3<=M+0.1(yA1+yA2)+0.19yB1+0.15(yD1+yD2*ZD2)
      0.1yA4+                      +0.15yD4<=M+0.1(yA1+yA2+yA3)+0.19(yB1+yB2*ZB2)+0.33(yC1)+0.15(yD1+yD2+yD3)
generalizziamo
piu o meno
Σci*yij<=M+Σci*yij
s.t.
//vincolo logico maggio
zij definite solo per i=B,D e j=2 {se investo capitale in i zi2=1 0 altrimenti} {0,1}
//attivazione
z2B+z2D<=1 yB2<=M*zB2,yD2<=M*zD2 //dove M è una costante alta ovvero M circa 0.15*M+M per stare larghi ovvero il capitale massi
//vincolo logico per investire in A1
//yD1>=30000 && yB1>=10000 -> s=1 s{0,1} s<=1
yD1>=30000*s yB1>=10000*s yC1>=0 ->
se s=1
(yD1>=30000 && yB1>=10000 se s=1 -> yA1<=M)&& se s=0
(yD1>=0 && yB1>=0 se s=0 -> yA1<=0) in ogni caso vale che yC1>=0
//quindi il controllo degli spuri non è necessario
//attivazione
yA1<=s*M //60000 se s = 1 altrimenti 0
```