Tema d'esame del 10 febbraio 2020

	COGNOME: ______________________	*Questo foglio deve*
Scrivere subito!	NOME: ______________________	*essere consegnato*
	MATRICOLA: ____________________	*con l'elaborato*

1. Una falegnameria vuole realizzare le ante, i frontali e i fianchi necessari per la produzione di cucine. Tutte le cucine utilizzano gli stessi componenti, che sono ottenuti dal taglio di pannelli di dimensioni standard. Il taglio avviene secondo quattro diversi pattern, che permettono di ottenere, a partire da un pannello, un diverso numero di ante, fianchi e frontali, con diversi consumi di energia e di manodopera. Le cucine possono essere prodotte in due tipi, ciascuna caratterizzata dall'impiego di un numero diverso di componenti e di manodopera. Le caratteristiche di pattern e tipi di cucina sono riassunti nella tabella.

	Pattern 1	Pattern 2	Pattern 3	Pattern 4	Tipo A	Tipo B
Ante	12	8	9	3	10	7
Frontali	9	11	13	-	8	11
Fianchi	4	6	2	11	6	5
Manodopera (ore)	3	4	5	2	10	12

Sono disponibili 80 pannelli e 500 ore di manodopera. L'energia impiegata per il taglio del pattern 1 è la stessa del pattern 2, la metà del pattern 3 e un terzo del pattern 4. È disponibile energia complessiva per tagliare l'equivalente di 100 pannelli secondo il pattern 1. Si scriva un modello di programmazione lineare che permetta di massimizzare il numero di cucine realizzate, tenendo anche conto che

- si vogliono tagliare almeno 20 pannelli seguendo il pattern 1;
- le cucine di tipo B devono essere almeno la metà delle cucine di tipo A;
- è possibile utilizzare al massimo tre pattern diversi per il taglio dei pannelli;
- si vogliono ricavare frontali da almeno due pattern diversi;
- il taglio dei pannelli avviene su linee diverse a seconda del pattern, e la manodopera per la loro predisposizione è di 40 ore se si utilizzano fino a 2 linee, 50 se se ne usano di più.

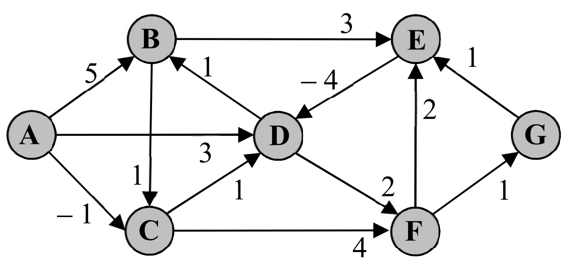
2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\min & & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & \\
\text{s.t.} & & 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \geq & -3 \\
 & & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & & & - & x_3 & \geq & -1
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{x_1 \leq 0} \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;
b) qual è il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo direttamente a partire dal risultato del punto precedente?

3. Nel seguente grafo, calcolare i cammini minimi dal nodo A verso **tutti** gli altri nodi.



a. si scelga l'algoritmo da utilizzare e si motivi la scelta;
b. si applichi l'algoritmo scelto (riportare e **giustificare** i passi dell'algoritmo in una tabella);
c. si utilizzi la tabella del punto b per riportare, se possibile, l'albero e il grafo dei cammini minimi oppure, se esiste, un ciclo di costo negativo (descrivere il procedimento);
d. è possibile, con l'algoritmo scelto, ottenere un cammino minimo da A a E con al più 5 archi? Se sì, qual è? come si ottiene?

... CONTINUA SUL RETRO ...

4. Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale.

Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (5/2, 0, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & - & x_3 & \geq & 2 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & -1 \\
 & 2x_1 & & & - & x_3 & = & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & & x_3 \text{ libera} & &
\end{array}
$$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	−1	0	0	−9	0	−1	0
0	6	0	1	12	1	0	12
1	7	0	0	10	1	0	14
0	8	1	0	16	1	0	16

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Perché? Qual è? Perché non è ottima?
b. perché la teoria del simplesso non consente l'operazione di pivot sull'elemento nel cerchio (10)?
c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?
e. supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile x_2: perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

6. Si vuole risolvere con **AMPL** un problema di trasporto di alberi da un insieme di origini I a un insieme di destinazioni J. Ciascuna origine i mette a disposizione O_i alberi e ciascuna destinazione richiede D_j alberi. Il costo unitario di trasporto da i a j è C_{ij} e si ha un costo fisso F_i per l'organizzazione dei trasporti da ciascuna origine i. Non è inoltre possibile organizzare il trasporto in più di N origini. Il modello per la minimizzazione dei costi è riportato affianco e utilizza le variabili x_{ij} per indicare il numero di alberi trasportati da i a j, e y_i che vale 1 se si organizza il trasporto da i, 0 altrimenti.

$$
\begin{aligned}
\min \; & \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i \in I} F_i\, y_i \\
\text{s.t.} \; & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j \quad , \quad \forall j \in J \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i\, y_i \quad , \quad \forall i \in I \\
& \sum_{i \in I} y_i \leq N \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \;\; y_i \in \{0,1\}, \;\; \forall i \in I, \;\; j \in J
\end{aligned}
$$

a. Si traduca nel linguaggio **AMPL** il modello proposto (**file .mod**).
b. Si produca il **file .dat** per l'istanza con origini Croazia, Svezia, Gran Bretagna e Canada (disponibilità di 1000, 2000, 3000 e 4000 alberi rispettivamente), destinazioni Italia, Francia e Germania (con richieste di 5000, 3000 e 2000 rispettivamente), $N = 3$, costi fissi F_i di 1000 euro per tutte le origini, e costi di trasporto verso Italia, Francia e Germania (nell'ordine) pari a: dalla Croazia 10, 20 e 30 euro; dalla Svezia 40, 50 e 60 euro; dalla Gran Bretagna 70, 80 e 90 euro; dal Canada 100, 110 e 120 euro.
c. Si scriva uno script di AMPL (**file .run**) che risolve l'istanza specificata e visualizza il valore della funzione obiettivo e delle variabili per una soluzione ottima.

SOLUZIONE

Esercizio 1

Variabili

- x_i: numero di cucine di tipo $i \in \{A, B\}$ prodotte;
- y_j: numero di pannelli tagliati secondo il pattern $j \in \{1,2,3,4\}$;
- z_j: variabile binaria con valore 1 se si taglia almeno un pannello secondo il patten $j \in \{1,2,3,4\}$, 0 altrimenti;
- w: variabile binaria con valore 1 se si tagliano pannelli seguendo più di due pattern diversi .

Modello

$$
\begin{aligned}
&\max x_A + x_B \\
&s.t. \quad y_1 \geq 20 \\
&\qquad x_B \geq \frac{1}{2} x_A \\
&\qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 80 && (pannelli\ disponibili) \\
&\qquad 12y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 3y_4 \geq 10x_A + 7x_B && (ante\ sufficienti) \\
&\qquad 9y_1 + 11y_2 + 13y_3 \geq 8x_A + 11x_B && (frontali\ sufficienti) \\
&\qquad 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 11y_4 \geq 6x_A + 5x_B && (fianchi\ sufficienti) \\
&\qquad 10\mathrm{x_A} + 12\mathrm{x_B} + 3\mathrm{y_1} + 4\mathrm{y_2} + 5\mathrm{y_3} + 2\mathrm{y_4} \leq 500 - 40 - 10\mathrm{w} && (\text{manodopera disponibile}) \\
&\qquad \mathrm{y_1} + \mathrm{y_2} + 2\mathrm{y_3} + 3\mathrm{y_4} \leq 100 && (energia\ disponibile) \\
&\qquad \mathrm{z_1} + \mathrm{z_2} + \mathrm{z_3} + \mathrm{z_4} \leq 3 && (\text{massimo 3 pattern diversi}) \\
&\qquad \mathrm{z_1} + \mathrm{z_2} + \mathrm{z_3} \geq 2 && (\text{frontali da almeno due pattern diversi}) \\
&\qquad \mathrm{y_j} \leq \mathrm{Mz_j}\,, \quad \mathrm{j} \in \{1,2,3,4\} && (\text{attiva variabili z, M cost. grande, ad es. M} = 80) \\
&\qquad \mathrm{y_j} \geq \mathrm{z_j}\,, \quad \mathrm{j} \in \{1,2,3,4\} && (valori\ spuri\ su\ z) \\
&\qquad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \leq 2 + 2w && (attiva\ variabile\ w) \\
&\qquad x_i \in \mathbb{Z}_+\,, i \in \{A, B\} \\
&\qquad y_j \in \mathbb{Z}_+\,, j \in \{1,2,3,4\} \\
&\qquad z_j \in \{0,1\}, j \in \{1,2,3,4\} \\
&\qquad w \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

<u>*Punto a)*</u>

Forma standard

Posto $y_1 = -x_1$

$$
\begin{array}{llcccccccccccc}
\text{min } \cancel{\max} & -2\,y_1 & - & 3\,x_2 & - & x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 1
\end{array}
$$

$$\mathbf{y_1 \geq 0} \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \qquad x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

È evidente una base ammissibile da variabili di slack x_4, x_5, x_6

Passaggi del simplesso in forma tableau

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
z	– 2	– 3	– 1	0	0	0	– 1	0
x_4	2	2	1	1	0	0	0	3
x_5	1	2	1	0	1	0	0	2
x_6	1	0	1	0	0	1	0	1

Forma canonica rispetto alla base $\{x_4, x_5, x_6\}$: si. Ammissibile: si. Ottimo: non so. Illimitato non so.
Entra x_1 (per Bland); esce arg min $\{3/2, 2/1, \mathbf{1/1}\} = x_6$

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	– 3	1	0	0	2	– 1	2	$R_0 + 2\ R_3$
x_4	0	2	– 1	1	0	– 2	0	1	$R_1 – 2\ R_3$
x_5	0	2	0	0	1	– 1	0	1	$R_2 – R_3$
y_1	1	0	1	0	0	1	0	1	R_3

Forma canonica rispetto alla base $\{x_4, x_5, y_1\}$: si. Ammissibile: si. Ottimo: non so. Illimitato non so.
Entra y_2; esce arg min $\{\mathbf{1/2}$, $\mathbf{1/2}$, X $\} = x_4$ (per Bland)

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	0	– ½	3/2	0	– 1	– 1	7/2	$R_0 + 3\ R'_1$
x_2	0	1	– ½	½	0	– 1	0	½	½ R_1
x_5	0	0	1	– 1	1	1	0	0	~~$R_2 – R_1$~~ R2-2R1
y_1	1	0	1	0	0	1	0	1	R_3

Forma canonica rispetto alla base $\{x_2, x_5, y_1\}$: si. Ammissibile: si. Ottimo: non so. Illimitato non so.
Entra x_3 (per Bland); esce arg min { X , **0/1** , 1/1 } $= x_5$

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	0	0	1	½	– ½	– 1	7/2	$R_0 + ½\ R_2$
x_2	0	1	0	0	½	– ½	0	½	$R_1 + ½\ R_2$
x_3	0	0	1	– 1	1	1	0	0	R_2
y_1	1	0	0	1	– 1	0	0	1	$R_3 – R_2$

Forma canonica rispetto alla base $\{x_2, x_3, y_1\}$: si. Ammissibile: si. Ottimo: non so. Illimitato non so.
Entra x_6; esce arg min { X , **0/1** , X } $= x_3$

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
z	0	0	½	½	1	0	– 1	7/2	$R_0 + ½\ R_2$
x_2	0	1	½	– ½	1	0	0	½	$R_1 + ½\ R_2$
x_6	0	0	1	– 1	1	1	0	0	R_2
y_1	1	0	0	1	– 1	0	0	1	R_3

Forma canonica rispetto alla base $\{x_2, x_6, y_1\}$: si. Ammissibile: si. Ottimo: si.
Soluzione Ottima $z_{min} = – 7/2$
$x_1 = – y_1 = – 1$; $x_2 = ½$; $x_3 = 0$; $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ (vincoli saturi)

Punto b)

Il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale è – 7/2 (lo stesso) in base al teorema della dualità forte (se un problema di PL ha soluzione ottima finita, il corrispondente problema duale ha soluzione ottima finita e i valori coincidono).

Esercizio 3

Punto a) Si sceglie l'agoritmo di Bellman-Ford in quanto esistono archi con costo negativo. Bellman-Ford è l'unico algoritmo visto in grado di garantire convergenza alla soluzione ottima del problema dei cammini minimi in presenza di archi di costo negativo, sebbene mediamente meno efficiente dell'algoritmo di Dijkstra, che non garantisce di trovare la soluzione al problema dei cammini minimi se esistono archi di costo negativo.

Punto b) Rosso e blu = Albero guardando i predecessori di tutti i nodi aggiornati all'ultima iterazione guardando la riga precedente

Iter.	A	B	C	D	E	F	G	*Aggiornati*
h=0	0(-)	+∞(-)	+∞(-)	+∞(-)	+∞(-)	+∞(-)	+∞(-)	A
h=1	0(-)	5(A)	–1(A)	3(A)	+∞(-)	+∞ (-)	+∞(-)	B, C, D
h=2	0(-)	4(D)	–1(A)	0(C)	8(B)	3(C)	+∞(-)	B, D, E, F
h=3	0(-)	1(D)	–1(A)	0(C)	~~7(B)~~ 5(F)	2(D)	4(F)	B, E, F, G
h=4	0(-)	1(D)	–1(A)	0(C)	4(B)	2(D)	3(F)	E, G
h=5	0(-)	1(D)	–1(A)	0(C)	4(B)	2(D)	3(F)	//

La tabella riporta al riga 0 di inizializzazione e una riga per ogni iterazione. All'iterazione h si controllano gli archi (i,j) uscenti da ciascun nodo i nella colonna *Aggiornati* alla riga h–1, e si aggiornano i costi (etichette π) e i predecessori del nodo j all'iterazione h qualora l'etichetta del nodo i all'iterazione h–1 più il costo dell'arco (i,j) sia strettamente minore dell'etichetta corrente del nodo j.

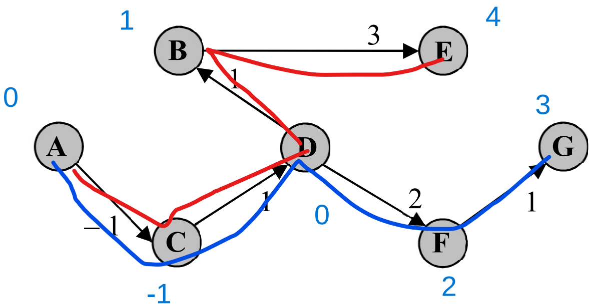
L'algoritmo si ferma qualora la lista dei nodi aggiornati sia vuota, come in questo caso alla fine dell'iterazione con h=5 (convergenza delle etichette ai costi dei cammini minimi da A verso gli altri nodi) o, qualora venga completata l'iterazione con h uguale al numero di nodi avendo dei nodi aggiornati (individuando la presenza di un ciclo negativo).

Segno per comodità anche le etichette ottime

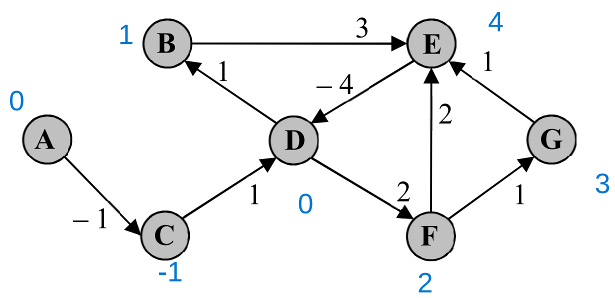
Punto c)

Siccome all'iterazione 5 la lista dei nodi aggiornati è vuota, le etichette sono stabili e pertanto è possibile determinare albero o grafo dei cammini minimi.

L'albero dei cammini minimi si ottiene riportando gli archi corrispondenti ai predecessori letti nell'ultima riga della tabella:



Il grafo dei camminimi minimi si ottiene completando con tutti gli archi che soddisfano all'uguaglianza il vincolo duale $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$:



Punto d)

Sì, l'algoritmo utilizzato permette di ottenere un cammimo minimo da A a E con al più 5 archi, trattandosi dell'algoritmo di Bellman-Ford che fornisce, al completamento dell'interazione h i cammini minimi dall'origine verso un qualsiasi nodo con al più h archi. Per individuare il cammino, si parte dall'etichetta del nodo E all'iterazione 5 e si considera il predecessore B; si procede quindi con il predecessore di B all'iterazione 4 (D), con il predecessore di D all'iterazione 3 e così via, considerando di volta in volta i predecessori all'iterazione precedente (vedi elementi evidenziati) e ottenendo A→C→D→B→E il cui costo è 4, come si può verificare. Notare che, essendoci fermati all'iterazione 5, tutti i cammini minimi hanno al più 5 archi, pertanto è possibile individuare un cammino minimo da A ad E con al più 5 archi anche direttamente sull'albero o sul grafo dei cammini minimi.

Esercizio 4

Enunciato delle condizioni di complementarietà primale duale:

Dati un problema primale $\min c^{\mathrm{T}}x$ s.t. $Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n_+$ e il corrispondente duale $\max u^{\mathrm{T}}b$ s.t. $u^{\mathrm{T}}A \leq c, u \in \mathbb{R}^m_+$, e due vettori $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono soluzioni ottime rispettivamente per il primale e per il duale se e solo se: $\bar{x}$ è ammissibile primale, $\bar{u}$ è ammissibile duale, $u_i(a_i^{\mathrm{T}}x - b_i) = 0, \forall\, i = 1 \dots m$, e $(c_j - u^{\mathrm{T}}A_j)x_j = 0, \forall\, j = 1 \dots n$, dove a_i^{T} è la riga i-esima di A e A_j è la colonna j-esima di A.

Applicazione delle condizioni al problema dato:

a) Verifica dell'ammissibilità primale:
   - Vincoli: $5/2 > 2$, $-5/2 < -1$, $5 = 5$, $5 \geq 5$ [OK]
   - Domini: $5/2 \geq 0$, $0 \leq 0$, x_3 libera [OK]

b) Passaggio al duale:

$$
\begin{array}{llcl}
\min & 2u_1 - u_2 + 5u_3 + 5u_4 & & \\
\text{s.t.} & u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 & \geq & -1 \\
 & 3u_2 - u_4 & \leq & 2 \\
 & -u_1 - u_3 - 2u_4 & = & 2
\end{array}
$$

$$u_1 \leq 0 \qquad u_2 \geq 0 \qquad u_3 \text{ libera} \qquad u_4 \leq 0$$

c) Applicazione delle condizioni e deduzioni:
   - $u_1\,(\tfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow u_1 = 0$
   - $u_2\,(-\tfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow u_2 = 0$
   - $u_3\,(2x_1 - x_3 - 5) = 0$ per ammissibilità primale
   - $u_4\,(0) = 0 \Rightarrow$ nessuna informazione su u_4

   - $x_1\,(u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1$
   - $x_2\,(3u_2 - u_4 - 2) = 0 \quad \Rightarrow$ nessuna informazione ($x_2 = 0$)
   - x_3 libera $\Rightarrow$ imporremo il corrispondente vincolo duale di uguaglianza per ammissibilità duale

d) Sistema delle equazioni per condizioni di complementarietà primale-duale (CCPD) e per ammissibilità duale (AD):

$$
\begin{cases}
u_1 = 0 & \text{(CCPD)} \\
u_2 = 0 & \text{(CCPD)} \\
u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1 & \text{(CCPD)} \\
-u_1 - u_3 - 2u_4 = 2 & \text{(AD)}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
u_1 = 0 \\
u_2 = 0 \\
u_3 = 1 \\
u_4 = -3/2
\end{cases}
$$

e) Verifica ammissibilità duale

   La soluzione calcolata al punto d)
   - soddisfa il primo e il terzo vincolo [per costruzione]
   - soddisfa il secondo vincolo duale [$3/2 < 2$]
   - soddisfa i vincoli di dominiio del duale [$0 \leq 0$, $0 \geq 0$, u_3 libera, $-3/2 < 0$]

f) La soluzione x data e la soluzione u determinata al punto d) sono una coppia di soluzioni ammissibili, rispettivamente, per il problema primale e per il problema duale e sono i scarti complementari. Pertanto la soluzione x data è ottima.

Esercizio 5

Punto a) Sì, riusciamo a individuare una soluzione di base in quanto il tableau dato è in forma canonica rispetto alla base individuata dalle variabili, in ordine di riga, x_4, x_1 e x_3. La soluzione è $x_4 = 12$, $x_1 = 14$, $x_3 = 16$, $x_2 = x_5 = x_6 = 0$. Il valore della soluzione è pari a z = – 0 = 0. La soluzione non è ottima perché esistono dei costi ridotti strettamente negativi e perché, essendo la soluzione non degenere, è possibile effettuare un'operazione di pivot che porterà in base una variabile a costo ridotto negativo con un valore strettamente positivo, provocando un decremento del valore della funzione obiettivo.

Punto b) L'operazione non è consentita in quanto porterebbe a una soluzione di base non ammissibile, visto che la riga dell'elemento proposto non soddisfa la regola del rapporto minimo. Pertanto l'operazione di pivot proposta porterà la variabile x_1 al valore 0 e le variabili x_3 e x_4 (i cui rapporti sono inferiori) a valori strettamente negativi.

Punto c) considerando l'entrata di una variabile a costo ridotto negativo e l'uscita di una variabile che soddisfa la regola del rapporto minimo, è possibile effettuare il pivot su uno degli elementi 6 (entra x_2 esce x_4), 7 (entra x_2 esce x_1), 8 (entra x_2 esce x_3), 12 (entra x_5 esce x_4), 16 (entra x_5 esce x_3).

Punto d) Entra x_2 ed esce x_1. Essendo il rapporto minimo pari a 2, la variabile x_2 entra in base al valore 2. Essendo il costo ridotto di x_2 pari a – 1, il nuovo valore della funzione obiettivo sarà pari a quello corrente più (– 1) · 2, quindi 0 – 2 = – 2.

Punto e) La colonna x_2 presenta tre righe corrispondenti al rapporto minimo, pertanto una delle variabili tra x_4, x_1 e x_3 assumerà valore 0 uscendo dalla base, mentre le altre due assumeranno valore 0 restando in base, configurando una nuova base degenere.

Esercizio 6

Punto a)

```
set I;              set J;
param O{I};         param D{J};
param C{I,J};       param F{I};
param N;
var x{I,J} >=0 integer;
var y{I} binary;
minimize fo: sum{i in I, j in J} C[i,j]*x[i,j] - sum{i in I} F[i]*y[i];
s.t. d{j in J}: sum{i in I} x[i,j] >= D[j];
s.t. o{i in I}: sum{j in J} x[i,j] <= O[i] * y[i];
s.t. n: sum{i in I} y[i] <= N;
```

Punto b)

```
set I := Croazia Svezia GranBretagna Canada;
set J := Italia Francia Germania;
param :        F     O :=
Croazia        1000  1000
Svezia         1000  2000
GranBretagna   1000  3000
Canada         1000  4000;
param D := Italia 5000 Francia 3000 Germania 2000;
param N := 4;
param C :      Italia     Francia    Germania :=
Croazia        10         20         30
Svezia         40         50         60
GranBretagna   70         80         90
Canada         100        110        120;
```

Punto c)

```
reset;
model ampl.mod;
data ampl.dat;
option solver cplexamp;
solve;
display fo, x, y;
```