Programmazione Lineare e Metodo del Simplesso

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Modelli di programmazione matematica

$$
\begin{array}{rll}
\min(\max) & f(x) & \\
\text{s.t.} & g_i(x) = b_i & (i = 1 \dots k) \\
& g_i(x) \leq b_i & (i = k+1 \dots k') \\
& g_i(x) \geq b_i & (i = k'+1 \dots m) \\
& \underline{x \in \mathbb{R}^n} &
\end{array}
$$

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ è un vettore (colonna) di n variabili **reali**;
- f e g_i sono funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $b_i \in \mathbb{R}$

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

f e g_i sono funzioni **lineari** di x

$$
\begin{array}{lll}
\min(\max) & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \; = b_i & (i = 1 \ldots k) \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \; \leq b_i & (i = k+1 \ldots k') \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \; \geq b_i & (i = k'+1 \ldots m) \\
 & x_i \in \mathbb{R} & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

In questa fase **consideriamo soltanto variabili reali**!!!
Quanto diremo non vale in caso di variabili intere o binarie

Soluzione di un problema PL

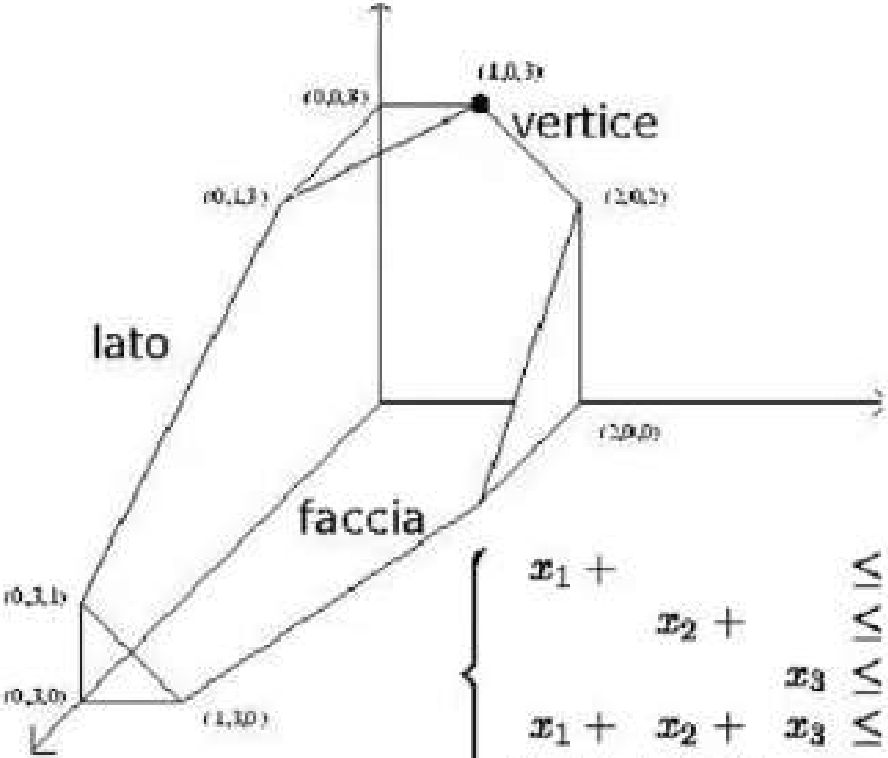
- *Soluzione ammissibile*: $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa tutti i vincoli
- *Regione ammissibile*: insieme delle x ammissibili
- *Soluzione ottima* x^* [min]: $c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in \mathbb{R}^n, x$ ammissibile.

Risolvere un problema PL significa determinare se:

- è inammissibile
- è illimitato
- ammette soluzione ottima

Geometria della PL

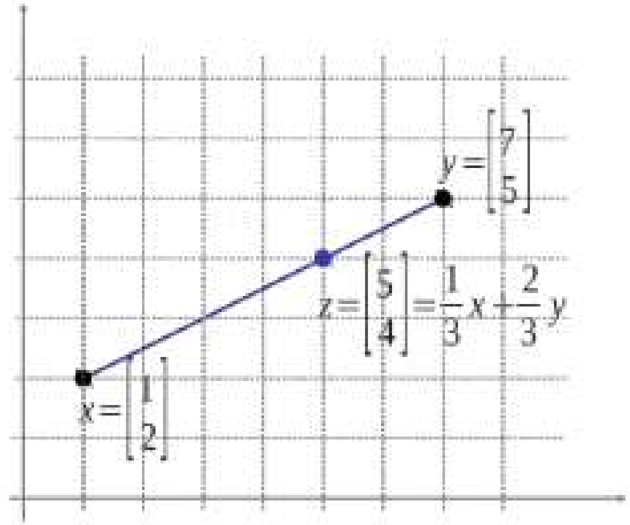
La regione ammissibile è un **poliedro** (intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani in $\mathbb{R}^n$)



$$\begin{cases} x_1 + & & & \leq & 2 \\ & x_2 + & & \leq & 3 \\ & & x_3 & \leq & 3 \\ x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

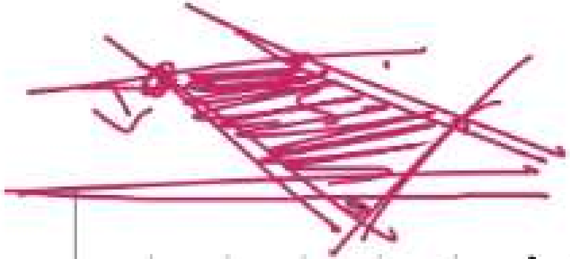
Problema di PL: $\min(\max)\{c^T x : x \in P\}$, P è un poliedro in $\mathbb{R}^n$.

Vertici di un poliedro: definizione



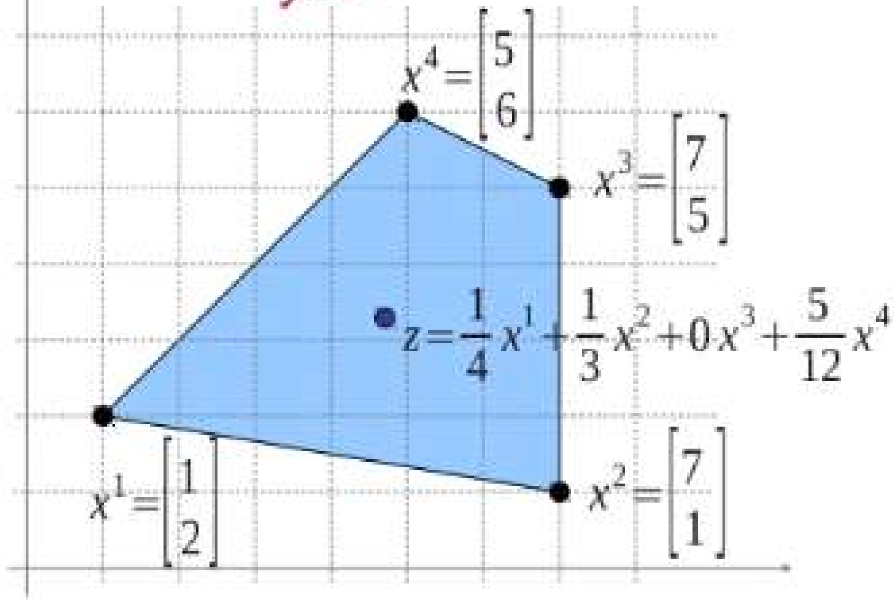
- $z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa** di due punti x e y se $\exists\, \lambda \in [0,1] : z = \lambda x + (1-\lambda)y$
- $z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa stretta di due punti** x e y se $\exists\, \lambda \in (0,1) : z = \lambda x + (1-\lambda)y$.
- $v \in P$ è **vertice del poliedro** P se **non** può essere espresso come **combinazione convessa stretta** di due punti distinti dello stesso poliedro: $\nexists\, x, y \in P, \lambda \in (0,1) : x \neq y, v = \lambda x + (1-\lambda)y$

Rappresentazione dei poliedri



$z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa** di $x^1, x^2 \ldots x^k$ se $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \text{ e } z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$



Teorema di rappresentazione dei poliedri [Minkowski-Weyl] - caso limitato

Poliedro *limitato* $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $v^1, v^2, \ldots, v^k$ ($v^i \in \mathbb{R}^n$) i vertici di P

se $x \in P$ allora $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i$ con $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1..k$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

(x è combinazione convessa dei vertici di P)

Nota: un poliedro è un insieme convesso!

Vertice ottimo: dall'intuizione grafica alla dimostrazione

Teorema: esistenza di un vertice ottimo (versione "min")

Problema PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, P non vuoto e limitato

- PL ammette soluzione ottima
- **esiste almeno un vertice ottimo**

Dimostrazione:

$$V = \{v^1, v^2 \dots v^k\} \qquad v^* = \arg\min_{v \in V} c^T v$$

$$c^T x = c^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^* = c^T v^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = c^T v^*$$

In sintesi: $\forall x \in P, \;\; c^T v^* \leq c^T x$ ■

Possiamo limitare la ricerca dell'ottimo ai "soli" vertici!

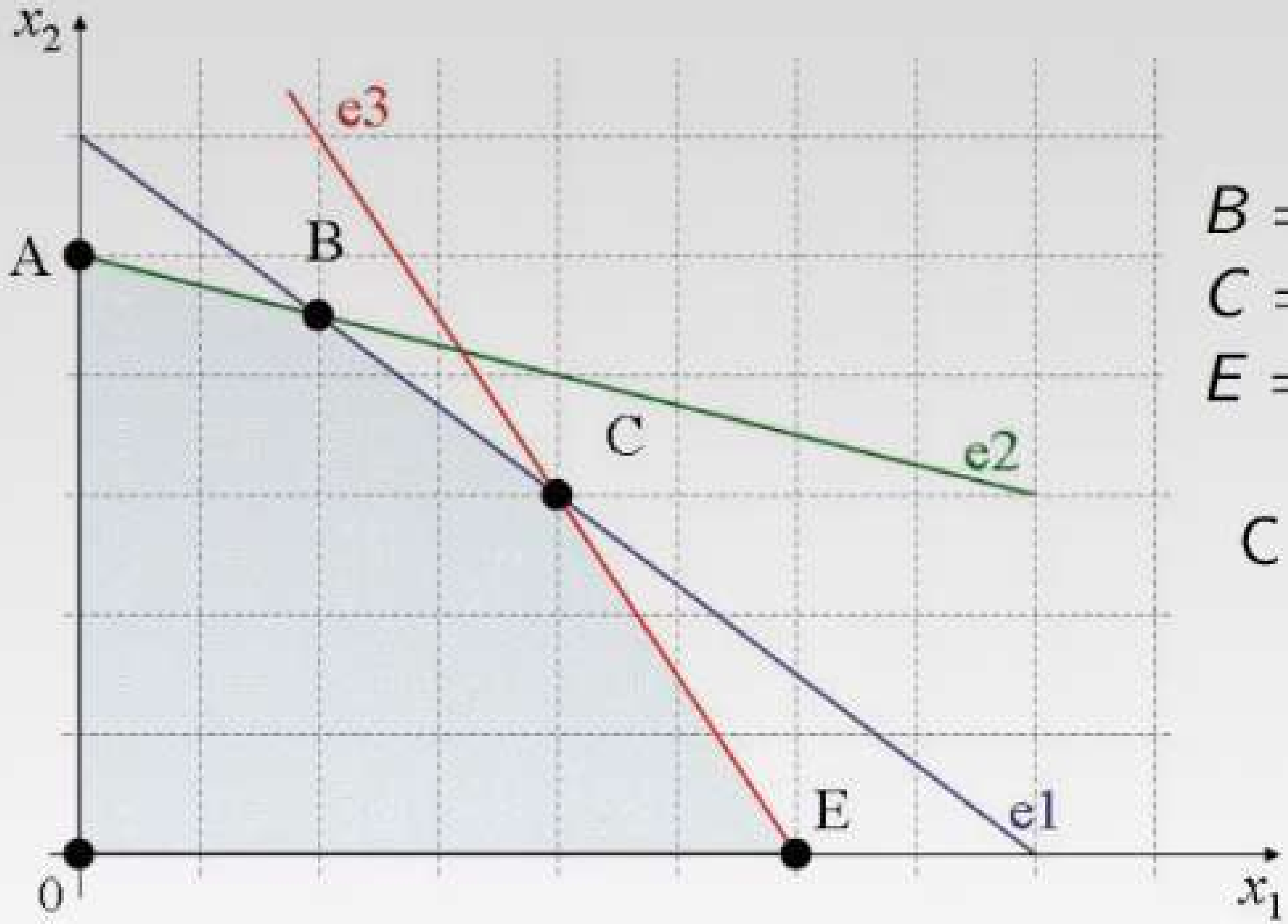
Come generare ed esplorare (tutti) i vertici? Un esempio

Una piccola ditta di profumi realizza due nuove fragranze a partire da 3 essenze: *rosa*, *mughetto* e *viola*. Per realizzare un litro di fragranza 1 sono richiesti 3 centilitri di rosa, 1 centilitro di mughetto e 3 centilitri di viola. Per realizzare un litro di fragranza 2 sono richiesti 4 centilitri di rosa, 4 centilitri di mughetto e 2 centilitri di viola. La disponibilità in magazzino per le tre essenze è di 24, 20 e 18 centilitri per rosa, mughetto e viola rispettivamente. Sapendo che l'azienda realizza un profitto di 13 e 10 euro per ogni litro venduto di fragranza 1 e 2 rispettivamente, determinare le quantità ottimali delle due fragranze da produrre.

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 13x_1 & + & 10x_2 & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & (e1) \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & (e2) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & (e3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esempio: vertici come intersezione

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max & 13x_1 & + & 10x_2 & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & (e1) \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & (e2) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & (e3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



$B = e1 \cap e2$	$(2, 9/2)$	71
$C = e1 \cap e3$	$(4, 3)$	82
$E = e3 \cap (x_2 = 0)$	$(6, 0)$	78

...

C ottimo!

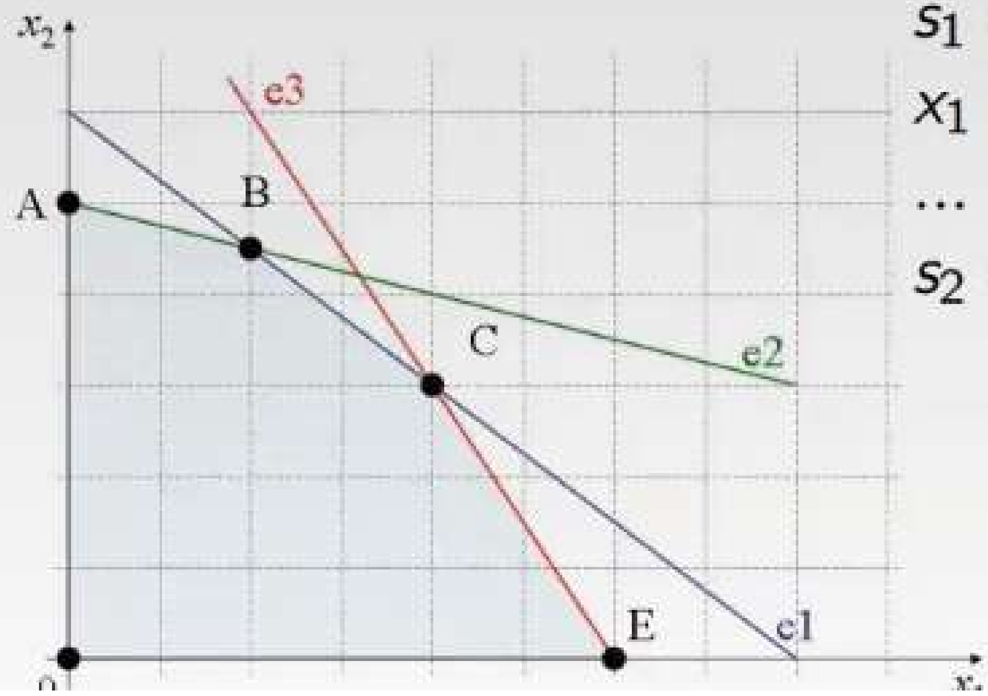
Caratterizzazione algebrica dei vertici

$s_1 = 24 - 3x_1 - 4x_2$
$s_2 = 20 - x_1 - 4x_2$
$s_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2$

Scriviamo il sistema come **equazioni**

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
3x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & = & 24 \\
x_1 & + & 4x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_3 & = & 18
\end{array}
$$

2 gradi di libertà: ponendo a 0 due variabili, sistema quadrato!



$s_1 = s_2 = 0 \quad (2, 9/2, 0, 0, 3) \quad B$

$x_1 = s_2 = 0 \quad (0, 5, 4, 0, 8) \quad A$

...

$s_2 = s_3 = 0 \quad (3.2, 4.2, -2.4, 0, 0)$

non ammissibile!

Forma standard per problemi PL

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad = b_i & (i = 1 \ldots m) \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

- vincoli sono delle equazioni; $(+/-$ variabili slack/surplus$)$
- variabili ≥ 0; (sostituzione di variabili)
- funzione obiettivo di **minimo** senza cost. addit. e moltipl. $(X\ -1)$;
- $b_i \geq 0$. $(X\ -1)$

Forma standard: esempio

$$\begin{aligned}
\max \quad & 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34 \\
s.t. \quad & -2x_1 + 7x_2 \le 5 - 6x_3 + 2x_1 \\
& -3x_1 + x_3 + 12 \ge 13 \\
& x_1 + x_2 \le -2 \\
& x_1 \le 0 \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$\hat{x}_1 = -x_1 \qquad (\hat{x}_1 \ge 0)$

$x_3 = x_3' - x_3'' \quad (x_3' \ge 0\ ,\ \ x_3'' \ge 0)$

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3' - 7x_3'' \\
s.t. \quad & 4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3' - 6x_3'' + s_1 = 5 \\
& 3\hat{x}_1 + x_3' - x_3'' - s_2 = 1 \\
& \hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2 \\
& \hat{x}_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ x_3' \ge 0\ ,\ x_3'' \ge 0\ ,\ s_1 \ge 0\ ,\ s_2 \ge 0\ ,\ s_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Richiami di algebra lineare: definizioni

- vettore colonna $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
- vettore riga $v^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: $v^T = [v_1, v_2, ..., v_n]$
- matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $v, w \in \mathbb{R}^n$, prodotto scalare $v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^T w = w^T v$
- Rango di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\rho(A)$, max righe/colonne lin. indip.
- $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *invertibile* $\iff \rho(B) = m \iff det(B) \neq 0$

Sistemi di equazioni lineari

m

- *Sistemi di equazioni in forma matriciale*: un sistema di m equazioni in n incognite può essere messo in forma matriciale:
  $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

- *Teorema di Rouché-Capelli*:
  $Ax = b$ ammette soluzioni $\iff \rho(A) = \rho(A|b) = r$ (∞^{n-r} soluzioni).

- *Operazioni elementari su matrici*:
  - scambiare la riga i con la riga j;
  - moltiplicare la riga i per uno scalare non nullo;
  - sostituire alla riga i, la riga i più α volte la riga j ($\alpha \in \mathbb{R}$).

  Le operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ non alterano l'insieme delle soluzioni ammissibili del sistema $Ax = b$.

- *Metodo di Gauss-Jordan* per la soluzione di sistemi $Ax = b$: eseguire delle operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ in modo da ottenere in A una sottomatrice identità di dimensioni pari a $\rho(A) = \rho(A|b)$.