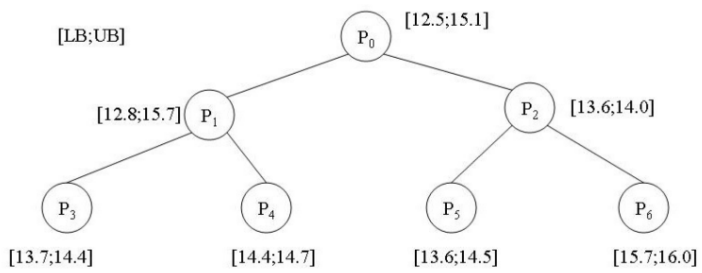
Esercizio



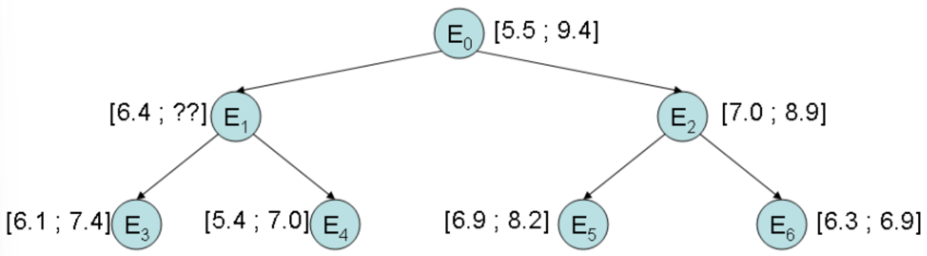
Ci sono 4 nodi aperti in questo albero. Abbiamo poi una serie di domande:

- Min o Max? → Problema di minimo →[LB; SA]
    - I lower bound aumentano di padre in figlio e gli upper bound diminuiscono (quindi, LB a sx e UB a dx), cosa che si preserva a tutti i livelli
    - Se fosse problema di minimo, il LB sarebbe valutazione ottimistica, mentre l'UB sarebbe soluzione ammissibile (SA)
        - In questo caso, diremmo "non si può scendere sotto 12.5", poi "non puoi scendere sotto 12.8", poi 13.7; continua quindi a crescere. Il bound non diminuisce aumentando i vincoli, ma di fatto aumenta diventando vincolo più stringente
    - Se fosse un problema di massimo, il LB sarebbe soluzione ammissibile (SA), mentre l'upper bound sarebbe valutazione ottimistica, perché non scenderò sotto LB
        - In questo caso, diremmo "meglio di 15.1 in P_0 non si potrebbe fare"; tuttavia, scendendo, aggiungendo vincoli il bound dovrebbe diventare più piccolo, non più grande come capita in 15.7

- Quindi: Problema di minimo se il LB cresce (o non decresce) di padre in figlio, problema di massimo se l'UB decresce (o non cresce) di padre in figlio

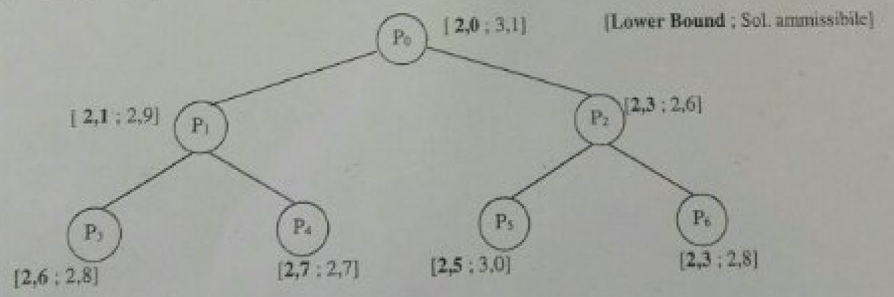
- Nodi da chiudere? (Possono essere chiusi dei nodi?)
    - Cerco l'UB minimo tra tutti i possibili nodi (soluzione corrente/incumbent), successivamente considero come aperti i nodi LB quelli ≤ al LB, perché promettono potenzialmente una soluzione migliore
    - Di sicuro non considero P_0, P_1, P_2, in quanto nodi già sviluppati; avremo quindi P_3, P_4, P_5, P_6
    - Controllo se il LB sia migliore della soluzione incumbent in mano; al primo nodo, l'incumbent è 15.1; poi, andando verso P_3 trovo che l'incumbent è 14.
    - P_3 non lo chiudo, dato che contiene 13.7; similmente, chiudo P_4 in quanto contiene 14.4 (più alto di 14); non chiudo P_5 dato che promette 13.6 (migliore di 14), chiudo P_6 in quanto ha 15.7 che non è migliore di 14
- Intervallo ottimo entro il quale è compresa la soluzione ottima?
    - Sicuramente l'intervallo di valutazione dei bound è tra 12.5 e 15.1;
    - Escludo P_0, P_1, P_2, quindi considero solo P_3, P_4, P_5, P_6. Di fatto, la soluzione ottima è compresa tra $[13.6; 14.0]$, quindi il miglior LB (quello minore) e l'incumbent corrente, appunto 14
- Qual è il nodo esplorato con una strategia best bound first?
    - Si sceglie il nodo con il miglior LB, quindi il nodo P_5
- Supponiamo di sviluppare il nodo della strategia best bound first P_5 e di ottenere due nodi P_7 *e* P_8, nel quale P_8 viene chiuso ne ammissibile, mentre P_7 porta a due valori. Quali sono possibili valori per LB e UB tali che chiudo tutti i nodi (riconosco subito la soluzione ottima)?
    - Ora rimangono aperti P_8 *e* P_3

- Dobbiamo prendere un LB che rispetti la proprietà padre-figlio (quindi >= LB del nodo padre) → LB ≥ 13.6, mentre prendo come UB una nuova incumbent, cioè un valore che sia <= a tutti i LB presenti.
- Basterà avere un LB >= 13.6 e un LB <= 13-7
- Per chiudere anche lo stesso P_7 basterà prendere $[13.65; 13.65]$ come intervallo, quindi dentro l'intervallo individuato



- Min o Max? → Problema di massimo → [SA; UB]
  - Se fosse problema minimo, di padre in figlio il LB cresce; tuttavia, andando da E_1 ad E_3 il LB passa da 6.4 a 6.1 e non cresce; sicuramente non è problema di massimo
  - Se fosse problema massimo, di padre in figlio l'UB diminuisce; andando in basso, di fatto si ha questa condizione
  - Per i punti ??, andremo ad inserire un valore compreso tra 9.4 (se vogliamo che sia problema di max, non deve essere superiore al nodo del padre) e inferiore al maggiore dei figli), quindi 7.4 → $7.4 \leq ?? \leq 9.4$
- Intervallo ottimo?
  - Ci serve un incumbent, che viene cercato tra tutti i possibili LB (cerco il più grande tra i LB essendo di massimo); l'incumbent è 7.0
  - Per gli UB, cerco tra i soli nodi aperti, quindi E_3, E_4, E_5, E_6
  - Prendo il valore più alto tra i nodi aperti, quindi 8.2
  - Quindi $[7.0;\ 8.2]$
- Nodi da chiudere?
  - Controllo se l'UB sia migliore della soluzione incumbent in mano (quindi, 7), quindi $\geq$ e chiudo tutti i nodi che promettono di meno di S.A.
  - Posso chiudere E_6, in quanto 6.9 non è migliore di 7
  - Posso chiudere E_4, in quanto 7 non è migliore di 7
- Qual è il nodo esplorato con una strategia best bound first?
  - Si sceglie il nodo con il miglior UB, quindi Il nodo E_5
- Supponiamo di sviluppare il nodo di best bound first E_5 e di ottenere due nodi $E_7\ e\ E_8$, nel quale E_8 porta ad una soluzione ammissibile, mentre E_7 porta a due valori. Quali sono possibili valori per LB e UB tali che chiudo tutti i nodi (riconosco subito la soluzione ottima)?
  - Controllo tra i nodi aperti, quindi $E_3\ ed\ E_8$
  - Il LB deve essere >= all'incumbent dei nodi che si vogliono chiudere (quindi, al loro UB), mentre l'UB deve essere compatibile con il fatto di essere figlio del nodo best-bound first, quindi essere <= UB del nodo padre. Prenderò qualsiasi nodo con $LB \geq 7.4\ e\ UB \leq 8.2$.
  - Per chiudere anche lo stesso E_8 basterà prendere un qualsiasi valore dentro a questo intervallo.

6. Si consideri il seguente sviluppo di un albero di Branch and Bound relativo ad un problema di minimo:



a. Come è possibile stabilire che si tratta di un problema di minimo?
b. È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali?
c. In quale intervallo è sicuramente compreso il valore della funzione obiettivo?
d. Quale nodo sarà sviluppato per primo in una strategia Best Bound First?
e. Si supponga che lo sviluppo di cui al punto precedente porti a due nodi figli, di cui uno è relativo ad un insieme di soluzioni vuoto. Si dia un esempio di valori di lower bound e soluzione ammissibile relativi al secondo nodo che consentano di riconoscere subito la soluzione ottima del problema.

a. Per capire se si tratta di problema di minimo, di padre in figlio il LB cresce (o comunque, non decresce). Infatti, si nota che questa proprietà viene rispettata da tutti i nodi.

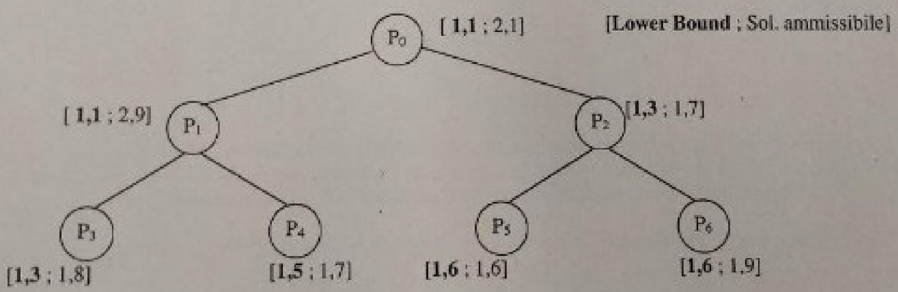
b. Chiudo tutti i nodi che hanno un LB >= S.A, quindi posso chiudere P_3 e P_6

c. Considero l'intervallo della soluzione ottima, quindi il miglior UB (minimo) tra tutti i nodi (attuale soluzione ammissibile) e come LB il minore tra i nodi aperti, quindi 2.6. $Intervallo = [2.3; 2.6]$

d. Per una strategia Best Bound First per un problema di minimo, si sceglie il nodo con il miglior LB tra i nodi aperti, cioè P_5.

e. Chiamiamo il nodo aperto P_7, con P_8 che porta ad una soluzione non ammissibile. Questo è figlio di P_5 dal punto precedente. Rimangono aperti P_3 e P_7. Sicuramente avremo un LB >= 2.5 e un UB come nuova incumbent (quindi, <= a quella di tutti i nodi aperti), cioè 2.8. Basterà prendere un qualsiasi intervallo che rispetti questa proprietà, quindi ad esempio [2.6; 2.6] per chiudere tutti i nodi

6. Si consideri il seguente sviluppo di un albero di Branch and Bound per un problema di ottimizzazione:



a. Perché è possibile stabilire che si tratta di un problema di minimo?
b. Qual è il miglior valore disponibile per una soluzione ammissibile? È quello ottimo?
c. È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali?
d. Quale nodo sarà sviluppato per primo in una strategia Best Bound First?
e. Si supponga che lo sviluppo di cui al punto precedente porti a due nodi figli, di cui uno è relativo ad un insieme di soluzioni vuoto. Si dia un esempio di valori di lower bound e soluzione ammissibile relativi al secondo nodo che consentano di riconoscere subito la soluzione ottima del problema.

a. Per capire se si tratta di problema di minimo, di padre in figlio il LB cresce (o comunque, non decresce). Infatti, si nota che questa proprietà viene rispettata da tutti i nodi.

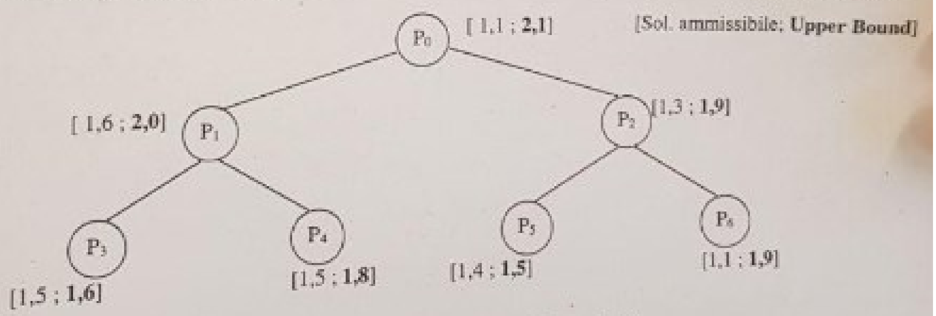
b. Ci viene praticamente chiesto di trovare il miglior LB (quello minimo) tra i nodi aperti, mentre il valore ottimo significa trovare l'incumbent, quindi il miglior UB (quello minimo) tra tutti i possibili nodi (incumbent). Nel primo caso, il miglior LB è 1.3, mentre il miglior UB è chiaramente 1.6. Quindi, sotto falso nome, è la domanda "trova l'intervallo ottimo".

c. Controllo se il LB sia migliore della soluzione incumbent in mano; al primo nodo, l'incumbent è 2.1 (mi interesserà trovare l'UB di valore minimo). Non è possibile chiudere nodi già sviluppati, dunque P_0, P_1, P_2.
Verso il basso, trovo che l'incumbent diventa 1.6 per quanto riguarda l'UB.
Chiudo P_5 in quanto 1.6 = 1.6, chiudo P_6 in quanto 1.9 > 1.6. Rimangono aperti P_4 e P_5

d. Per una strategia Best Bound First per un problema di minimo, si sceglie il nodo con il miglior LB tra quelli aperti, cioè P_3.

e. Consideriamo un generico nodo P_7 come appena inserito e P_8 che non porta ad una soluzione ammissibile.. Ora come ora, sono aperti i nodi P_3, P_4, P_7. Sviluppiamo rispetto al nodo di best bound first, quindi P_3. Il LB deve essere >= a quello del nodo padre (best bound first, quindi 1.3). Per chiudere tutti i nodi avrò bisogno di una nuova incumbent, cioè un UB che sia <= a quella dei nodi aperti. Quindi, sarà $\geq$ 1.3 e minore di 1.6. Per poter chiudere anche lo stesso nodo P_7 avrò bisogno di bound che siano almeno l'incumbent (quindi [1.4; 1.4] oppure [1.5; 1.5]). In questo caso scegliamo [1.4; 1.4].

6. Si consideri il seguente sviluppo di un albero di Branch and Bound per un problema di ottimizzazione:



a. Perché è possibile stabilire che si tratta di un problema di massimo?
b. Qual è il miglior valore disponibile per una soluzione ammissibile? È quello ottimo?
c. È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali?
d. Quale nodo sarà sviluppato per primo in una strategia Best Bound First?
e. Si supponga che lo sviluppo di cui al punto precedente porti a due nodi figli, di cui uno è relativo ad un insieme di soluzioni vuoto. Si dia un esempio di valori di upper bound e soluzione ammissibile relativi al secondo nodo che consentano di riconoscere subito la soluzione ottima del problema.

a. Per capire che si tratta di un problema di massimo, di padre in figlio l'UB diminuisce (o comunque, non aumenta). Infatti, si nota che questa proprietà viene rispettata da tutti i nodi

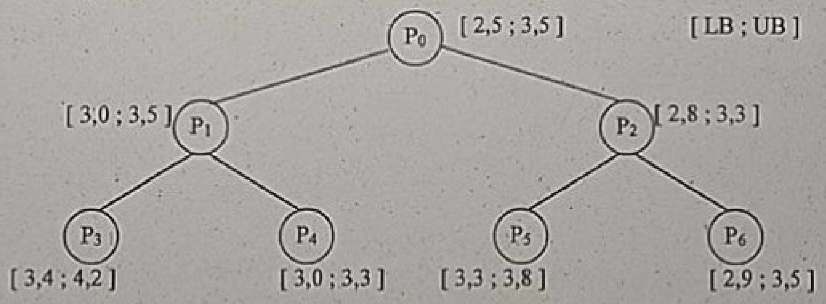
b. Il miglior valore per una soluzione ammissibile (quindi, incumbent) vuol dire prendere il LB massimo tra tutti i nodi presenti, quindi 1.6. Il valore ottimo significa cercare il LB migliore (massimo) tra i soli nodi aperti (quindi escludendo P_0, P_1, P_2. Quindi, sarà 1.5.

c. Di sicuro non chiudiamo P_0, P_1, P_2. Chiudiamo quindi P_3, P_5

d. Per una strategia Best Bound First per un problema di massimo, si sceglie il nodo con il miglior UB tra i nodi aperti, quindi P_6

e. Consideriamo l'inserimento di un generico nodo P_7 come figlio di P_6. Ora abbiamo aperti P_4, P_7. Dobbiamo rispettare la proprietà padre-figlio, quindi avremo un UB <= al nodo padre, quindi <= 1.9. Dovremo scegliere poi un LB <= a quello di tutti i nodi aperti, quindi la nuova incumbent sarà >= 1.5. Quindi, per chiudere anche il nodo stesso, possiamo immaginare questo intervallo come ad esempio [1.6; 1.6]

6. Si consideri il seguente sviluppo di un albero di Branch and Bound relativo ad un problema di minimo (ad ogni nodo, LB indica un lower bound e UB un upper bound ottenuto euristicamente):



a. Come si può capire che si tratta di un problema di minimo?
b. È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali?
c. In quale intervallo è sicuramente compreso il valore della funzione obiettivo?
d. Quale nodo sarà sviluppato per primo in una strategia Best Bound First?
e. Si supponga che lo sviluppo di cui al punto precedente porti a due nodi figli, di cui uno è relativo ad un insieme di soluzioni vuoto. Si dia un esempio di valori di lower e upper bound relativi al secondo nodo, che consentano di riconoscere subito la soluzione ottima del problema.

a. Per capire se si tratta di problema di minimo, di padre in figlio il LB cresce (o comunque, non decresce). Infatti, si nota che questa proprietà viene rispettata da tutti i nodi.

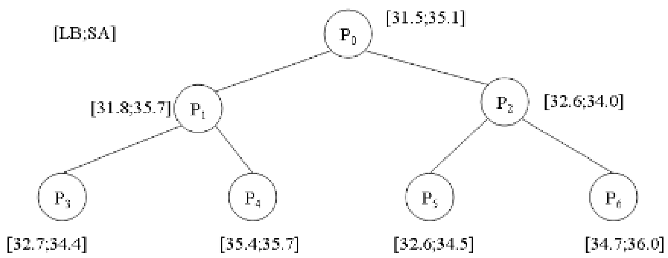
b. Di sicuro non chiudiamo P_0, P_1, P_2; rimangono i nodi sottostanti. La soluzione ammissibile è l'UB minimo tra tutti i nodi, quindi 3.3. Chiudo tutti i nodi con LB >= S.A, quindi chiudo P_3, P_5

c. L'intervallo ottimo è compreso tra l'UB minimo tra tutti i possibili nodi (quindi 3.3) e un LB il minore tra i nodi aperti, quindi 2.9.

d. Per una strategia Best Bound First per un problema di minimo, si sceglie il nodo con il miglior LB tra quelli aperti, cioè P_6.

e. Consideriamo l'inserimento di un generico nodo P_7 figlio di P_6. Ora abbiamo aperti i nodi P_7 e P_4. Devo rispettare la proprietà padre-figlio, quindi avremo un LB >= 2.9 e un UB che è una nuova incumbent (minore a quella di tutti i nodi), quindi <= 3.3. Per chiudere anche lo stesso P_7 prendiamo ad esempio [3.0; 3.0].

6. Si consideri il seguente albero di sviluppo del Branch and Bound per un problema di ottimizzazione combinatoria con funzione obiettivo di minimo:



(a) È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali e perché?

(b) In quale intervallo è sicuramente compreso il valore della funzione obiettivo?

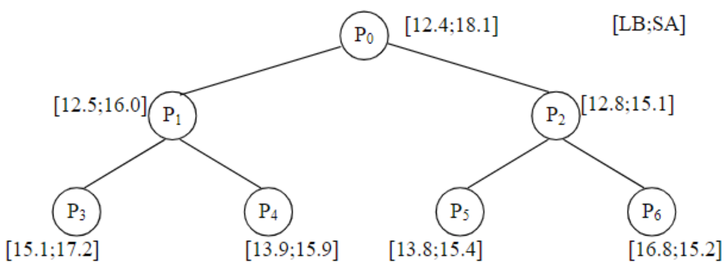
6. Si dà una traccia delle possibili risposte. Per argomentazioni più rigorose, si vedano le dispense. Nota: non si fa menzione di interezza dei coefficienti in funzione obiettivo, quindi non si può procedere ad arrotondamenti di alcun genere.

(a) Osserviamo che la migliore soluzione ammissibile a disposizione è pari a 34.0 (nodo P_2). Quindi i nodi P_4 e P_6 possono essere chiusi perché il loro lower bound non è minore di 34.0: si tratta di nodi non miglioranti.

(b) Il miglior valore che possiamo sperare per la funzione obiettivo è il più piccolo lower bound tra i nodi aperti (a questo punto P_3 e P_5). Quindi non possiamo

fare meglio di 32.6. Inoltre, abbiamo già una soluzione ammissibile che vale 34.0, quindi l'ottimo non potrà essere più alto di 34.0. L'ottimo della funzione obiettivo è quindi sicuramente compreso nell'intervallo $[32.6; 34.0]$

5. Si consideri il seguente albero di sviluppo del Branch and Bound per un problema di ottimizzazione combinatoria con funzione obiettivo di minimo:



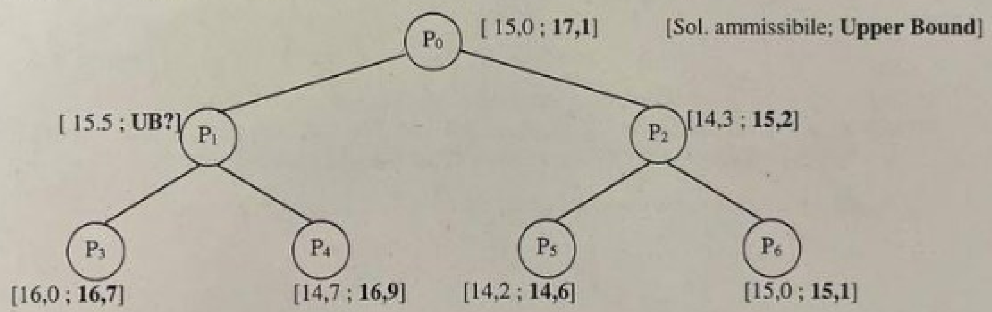
Rispondere sul foglio alle seguenti domande, giustificando sempre le risposte.
(a) Quali nodi è possibile chiudere?
(b) Tra quali valori è sicuramente compreso il valore ottimo della funzione obiettivo?
(c) Quale nodo sarà visitato per primo secondo una strategia di visita *Best-First*?

a) Per capire quali nodi chiudere, cerco la soluzione ammissibile (minore UB tra tutti i nodi), cioè 15.1. Chiudo tuti i nodi con LB >= S.A, quindi chiudo P_3, P_6

b) Il valore della f.o. all'ottimo è sicuramene compreso tra il miglior LB tra i nodi aperti, quindi 13.8 e il miglior UB tra tutti i nodi, cioè 15.1

c) Il nodo visitato per primo secondo la visita Best-First sarà P_5, dato che ha LB minimo tra i nodi aperti.

6. Si consideri il seguente sviluppo di un albero di Branch and Bound per un problema di massimizzazione:



a. Indicare possibili valori per "UB?" in modo da mantenere la coerenza con un problema di massimo
b. Qual è l'intervallo più piccolo entro cui è sicuramente compreso il valore ottimo della funzione obiettivo?
c. È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali?
d. Quale nodo sarà sviluppato per primo in una strategia Best Bound First?
e. Si supponga che lo sviluppo di cui al punto precedente porti a due nodi figli, di cui uno è relativo ad un insieme di soluzioni vuoto. Si dia un esempio di valori di upper bound e soluzione ammissibile relativi al secondo nodo che consentano di riconoscere subito la soluzione ottima del problema.

a) Se si tratta di problema di massimo se gli UB decrescono (o non crescono) di padre in figlio; quindi, basterà individuare un UB minore rispetto al nodo radice e un UB dello stesso nodo più grande rispetto a quello dei figli. Per tali considerazioni, si potrà avere come UB i valori 17 oppure 16.9; mettendo 16.8, non viene rispettata la regola.

b) Il valore ottimo è compreso tra 16.0 (maggior UB tra tutti i nodi aka incumbent) e il miglior (maggior) UB tra i nodi aperti, quindi 16.9

c) La soluzione ammissibile è 16.0 e chiudo tutti i nodi con UB <= S.A., quindi chiudo P_5 e P_6

d) Si sceglie il nodo con il miglior UB tra i nodi aperti, quindi P_4

e) Consideriamo l'inserimento di un generico nodo P_7 come figlio di P_4. A questo punto, rimangono aperti P_3 *e* P_7. Per chiudere tutti i nodi avremo bisogno di una nuova incumbent, cioè di un LB <= a 16.0 e un UB che rispetti la proprietà padre-figlio, cioè un UB <= al padre, quindi un UB <= 16.9. Un intervallo che rispetta questa proprietà può essere ad esempio [16.5; 16.5].