

12-02-2016

1. Una raffineria produce benzina impiegando petrolio, catalizzatore e energia elettrica: per ottenere un barile di benzina si impiegano 2 barili di petrolio, 5 kg di catalizzatore e 8 kWh di energia elettrica. La seguente tabella riporta, per le tre settimane, la richiesta minima di benzina (in barili), il costo del petrolio (euro al barile), il costo del catalizzatore (euro al kg) e il limite di energia elettrica (in kWh) che può essere consumata nella settimana.

Settimana	Domanda benzina	Costo petrolio	Costo Catalizzatore	Limite energia
1	1500	120	24	2000
2	3600	130	21	2500
3	2400	110	18	1500

La benzina prodotta in una settimana in eccedenza rispetto alla richiesta può essere utilizzata nelle settimane successive. Si scriva un modello di programmazione lineare per pianificare la produzione di benzina nelle tre settimane al fine di minimizzare i costi, tenendo conto che:

- si devono produrre almeno 200 barili di benzina ogni settimana;
- i silos disponibili limitano a 2500 barili l'eccedenza settimanale di benzina;
- è possibile superare il limite di energia previsto per la settimana, pagando 4 euro per ogni kWh in più;
- da contratto, è possibile superare il limite previsto di energia in al massimo due settimane;
- ogni settimana si può decidere di non soddisfare tutta la richiesta di benzina, con un limite complessivo di 500 barili nelle tre settimane. In questo caso, si paga una penalità di 300 euro per ogni barile di benzina mancante.

Considerando la dovuta minimizzazione dei costi, partiamo dal creare una variabile decisionale apposita.  $x_{ij}$ : produzione del materiale necessario al barile per il tipo  $i \in \{B, P, C, E\}$  in base al tipo di domanda  $j \in \{1, 2, 3\}$

A tale scopo, introduciamo la funzione obiettivo come segue, considerando costi del petrolio e del catalizzatore:

$$\min 120x_{P1} + 130x_{P2} + 110x_{P3} + 24x_{C1} + 21x_{C2} + 18x_{C3}$$

Considerando tutti i vincoli di produzione (benzina e catalizzatore) affinché non superino le disponibilità minime di benzina:

$$\begin{aligned} 2x_{P1} + 2x_{P2} + 2x_{P3} &\leq 1500 + 3600 + 2400 \\ 5x_{C1} + 5x_{C2} + 5x_{C3} &\leq 1500 + 3600 + 2400 \end{aligned}$$

Cominciamo dai singoli vincoli:

- "si devono produrre almeno 200 barili ogni settimana"

Qua si deve considerare anche il fatto che potremmo avere i barili in eccedenza, dunque si modella una variabile apposita:

$y_{ij}$ : quantità in eccedenza di benzina in base al tipo di domanda  $i \in \{B, P, C, E\}$  da usare nella settimana  $j \in \{1, 2, 3\}$ , 0 altrimenti

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} - y_{B1} - y_{B2} - y_{B3} \geq 200$$

- "i silos disponibili limitano a 2500 barili l'eccedenza settimanale di benzina"

Ci viene in aiuto la variabile appena creata

$$y_{1B} + y_{2B} + y_{3B} \leq 2500$$

- "si può superare il limite di energia previsto per la settimana, pagando 4 euro per ogni kWh in più"

Essendo che si può superare, allora introduciamo una variabile che memorizza la quantità di risorsa in eccedenza. Questa sarà modellata sulla base della variabile logica precedente (attivandola)

$z_{ij}$ : quantità di energia in eccedenza in base al tipo di domanda  $i \in \{B, P, C, E\}$  nella settimana  $j \in \{1, 2, 3\}$ , 0 altrimenti

$M$ : costante sufficientemente elevata

Vincoli di attivazione:

$$y_{1E} \leq Mz_{1E}, z_{2E} \leq My_{2E}, z_{3E} \leq My_{3E}$$

Quindi, in f.o. si modella la seguente cosa:

$$\min 120x_{p1} + 130x_{p2} + 110x_{p3} + 24x_{c1} + 21x_{c2} + 18x_{c3} + 4z_{E1} + 4z_{E2} + 4z_{E3}$$

Si introduce il vincolo di non superamento della disponibilità di energia:

$$8(x_{E1} + x_{E2} + x_{E3}) + y_{E1} + y_{E2} + y_{E3} \leq 2000 + 2500 + 1500$$

- “da contratto, è possibile superare il limite di energia previsto in al massimo due settimane”  
$$z_{E1} + z_{E2} + z_{E3} \leq 2$$
- “ogni settimana si può decidere di non soddisfare tutta la richiesta di benzina, con un limite complessivo di 500 barili nelle tre settimane. In questo caso, si paga una penalità di 300 euro per ogni barile mancante”

Introduco una variabile logica che mi modella la quantità di barili *mancanti*, da poter legare ad una variabile logica apposita:

$k_{ij}$ : numero di barili mancanti la produzione di benzina in base al tipo di domanda  $j \in \{B, P, C, E\}$  nella settimana  $j \in \{1, 2, 3\}$

$w_{ij}$ : variabile logica che vale 1 se scelgo di non soddisfare la produzione di benzina in base al tipo di domanda  $j \in \{B, P, C, E\}$  nella settimana  $j \in \{1, 2, 3\}$ , 0 altrimenti  
0 altrimenti

$$k_{B1} + k_{B2} + k_{B3} \leq 500$$

Vincoli di attivazione (per M costante abbastanza grande)

$$k_{B1} \leq Mw_{B1}, k_{B2} \leq Mw_{B2}, k_{B3} \leq Mw_{B3}$$

Paghiamo ora i 300 euro di penalità per i barili mancanti, dato che abbiamo la decisione legata:

$$\min 120x_{p1} + 130x_{p2} + 110x_{p3} + 24x_{c1} + 21x_{c2} + 18x_{c3} + 4z_{E1} + 4z_{E2} + 4z_{E3} + 300(w_{B1} + w_{B2} + w_{B3})$$

Domini:  $x_{ij} \in Z_+, y_{ij} \in Z_+, z_{ij} \in Z_+, k_{ij} \in \{0, 1\}, w_{ij} \in \{0, 1\} j \in \{1, 2, 3\}, i \in \{B, P, C, E\}$