

Dualità e Programmazione Lineare

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Problemi di programmazione lineare: punti di vista

- 1 ipotizza vettore x
- 2 verifica $x \in P$ e calcola $c^T x$
- 3 z^* è il *minimo* tra tutti

$$\begin{array}{ll} z^* = \min & c^T x \\ (PL_1) \quad \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- 1 ipotizza valore funzione obiettivo w
- 2 verifica $w \leq c^T x$ su P (o vertici)
- 3 w^* è il *massimo* tra tutti

$$\begin{array}{ll} w^* = \max & w \\ (PL_2) \quad \text{s.t.} & w \leq c^T x \quad \forall x \in P \\ & w \in \mathbb{R} \end{array}$$

Se z^* esiste finito, $z^* = w^*$

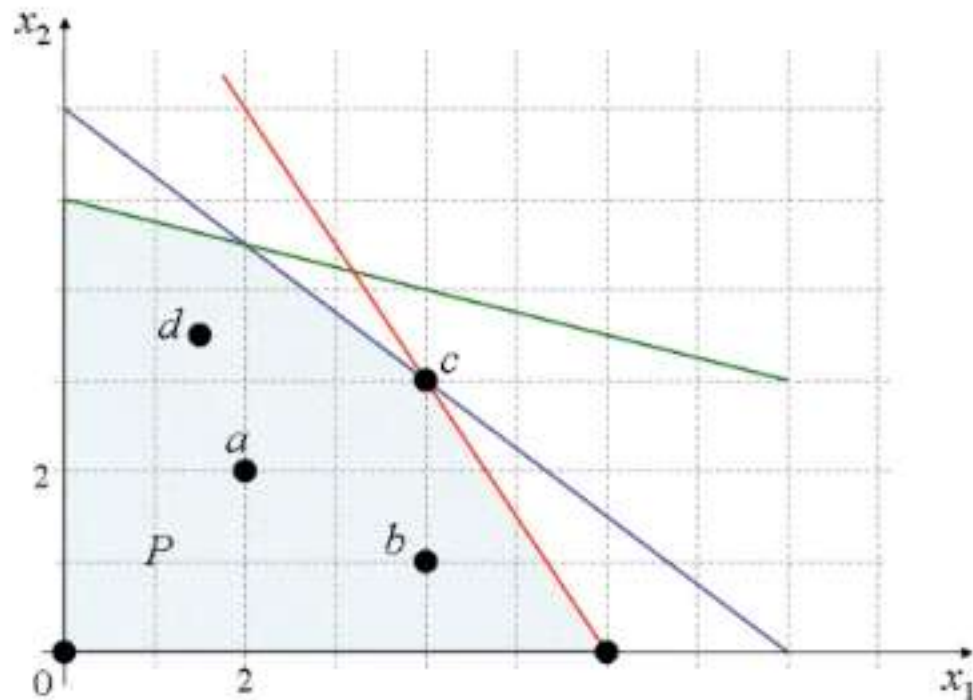
- n variabili
- m vincoli

- 1 sola variabile (w)
- **molti** (esponenzialmente) vincoli

Esempio

$$\begin{array}{llllll}
 \min & -x_1 & - & x_2 & & \\
 \text{s.t.} & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 \max & w & & \\
 \text{s.t.} & w & \leq & -4 \quad (= c^T x \mid_{x=a=(2,2)}) \\
 & w & \leq & 0 \quad (= c^T x \mid_{x=0=(0,0)}) \\
 & w & \leq & -5 \quad (= c^T x \mid_{x=b=(4,1)}) \\
 & w & \leq & -7 \quad (= c^T x \mid_{x=c=(4,3)}) \\
 & w & \leq & -5 \quad (= c^T x \mid_{x=d=(3/2, 7/2)}) \\
 & \dots & & \\
 & w & \text{libera} &
 \end{array}$$



Nota:
 possiamo limitare i vincoli alle sole
 soluzioni di base: $O\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right)$ vincoli

Condizioni equivalenti di ammissibilità per PL_2

Obiettivo: riscrivere PL_2 in forma *maneggevole* (meno vincoli)

- Assunzione "tecnica": PL_1 ammette ottimo limitato
- Vogliamo trovare **condizioni** tali che

$$\begin{cases} w \leq c^T x, \forall x \in P \\ P \neq \emptyset \\ z^* > -\infty \end{cases}$$

\iff

??? **condizioni** ???

- Cominciamo deducendo delle condizioni necessarie (\implies)

$\exists B \quad \bar{c} \geq 0$

Espressione dei costi ridotti

- $Ax = b \Rightarrow Bx_B + Fx_F = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$

- $z = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Fx_F) + c_F^T x_F$
 $\Rightarrow z = \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_{\bar{z}_B} + \underbrace{(c_F^T - c_B^T B^{-1}F)}_{\bar{c}_F^T} x_F$

- $\bar{c}^T = [\bar{c}_B^T \mid \bar{c}_F^T] = [0^T \mid c_F^T - c_B^T B^{-1}F] =$
 $= [c_B^T - c_B^T B^{-1}B \mid c_F^T - c_B^T B^{-1}F] =$
 $= [c_B^T \mid c_F^T] - [c_B^T B^{-1}B \mid c_B^T B^{-1}F] =$
 $= c^T - c_B^T B^{-1}[B \mid F] =$
 $= c^T - c_B^T B^{-1}A$

Condizioni necessarie

- $P \neq \emptyset \wedge z^* > -\infty \Rightarrow \exists \text{ base } B : c^T \geq c_B^T B^{-1} A$
- $w \leq c^T x, \forall x \in P \Rightarrow \exists \text{ base } B : w \leq c_B^T B^{-1} b$
- $\exists \text{ base } B \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^m : c_B^T B^{-1} = u^T$
- Riassumendo:

$$\begin{cases} w \leq c^T x, \forall x \in P \\ P \neq \emptyset \wedge z^* > -\infty \end{cases} \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} u^T A \leq c^T \\ w \leq u^T b \end{cases}$$

Condizioni equivalenti!

Le condizioni sono **anche sufficienti**: $\forall x \in P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$:

- $\exists u \in \mathbb{R}^m : u^T A \leq c^T \Rightarrow u^T Ax \leq c^T x \Rightarrow u^T b \leq c^T x$
- $\exists u \in \mathbb{R}^m : w \leq u^T b \Rightarrow w \leq u^T b \leq c^T x$

Dato un problema di programmazione lineare

$$z^* = \min\{c^T x : x \in P\} \text{ con } P = \{x : Ax = b, x \geq 0\},$$

$P \neq \emptyset$ e z^* limitato,

valgono le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

$$w \leq c^T x, \forall x \in P \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} u^T A \leq c^T \\ w \leq u^T b \end{cases}$$

Forma equivalente per PL_2

$$\begin{aligned} w^* = \max \quad & w \\ \text{s.t.} \quad & w \leq c^T x \quad \forall x \in P \\ & w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\max c^T x = z^*$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{aligned} w^* = \max \quad & w \\ \text{s.t.} \quad & w \leq u^T b \quad (\text{un vincolo}) \\ & u^T A \leq c^T \quad (n \text{ vincoli}) \\ & u \in \mathbb{R}^m \quad (m \text{ variabili}) \end{aligned}$$

[all'ottimo, $w = \widehat{u^T b}$]

(PL_2)

$$\begin{aligned} w^* = \max \quad & u^T b \\ \text{s.t.} \quad & u^T A \leq c^T \quad (n \text{ vincoli}) \\ & u \in \mathbb{R}^m \quad (m \text{ variabili}) \end{aligned}$$

Coppie di problemi primale-duale

(PL_1)

$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- n variabili x
- m vincoli

(PL_2)

$$\begin{aligned} w^* = \max \quad & u^T b \\ \text{s.t.} \quad & u^T A \leq c^T \\ & u \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

- n vincoli
- m variabili u

Teorema: dualità forte

Se PL_1 ammette ottimo finito, $z^* = w^*$

Il problema duale

- vincolo primale \leftrightarrow variabile duale

$$u^T b = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \dots + u_m b_m$$

- variabile primale \leftrightarrow vincolo duale

$$u^T A \leq c^T \equiv \begin{cases} u^T A_1 \leq c_1 \\ u^T A_2 \leq c_2 \\ \dots \\ u^T A_j \leq c_j \\ \dots \\ u^T A_n \leq c_n \end{cases} \equiv u^T A_j \leq c_j, \forall j = 1 \dots n$$

Esempio

$$\max u^T b =$$

$$= [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 22 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 & - 3x_2 & - x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + 4x_2 & + 3x_3 = 22 \\ & x_1 & - 7x_2 & = 15 \\ & x_1 & , & x_2 , & x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$u^T A \leq c^T =$$

$$\max 22u_1 + 15u_2$$

$$u^T A = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[2u_1 + u_2 \mid 4u_1 - 7u_2 \mid 3u_1] \leq \begin{cases} 2u_1 + u_2 \leq 2 \\ 4u_1 - 7u_2 \leq -3 \\ 3u_1 \leq -1 \\ u_1, u_2 \\ u_3 \text{ libere} \end{cases}$$

$$\leq [2 \quad 1 \quad -3 \quad \quad \quad 1 \quad -1]$$

Esempio

$$\begin{array}{llllllll} \min & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 22 \quad u_1 \\ & x_1 & - & 7x_2 & & & = & 15 \quad u_2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \max & 22u_1 & + & 15u_2 & & \\ \text{s.t.} & 2u_1 & + & u_2 & \leq & 2 \\ & 4u_1 & - & 7u_2 & \leq & -3 \\ & 3u_1 & & & \leq & -1 \\ & u_1 & , & u_2 & & \text{libere} \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 = 22 \\ & x_1 & - & 7x_2 & & = 15 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$Z^* = 38$$

$$\begin{array}{llllll} \max & 22u_1 & + & 15u_2 & & \\ \text{s.t.} & 2u_1 & + & u_2 & \leq & 2 \\ & 4u_1 & - & 7u_2 & \leq & -3 \\ & 3u_1 & & & \leq & -1 \\ & u_1 & , & u_2 & & \text{libere} \end{array}$$

$$W^k = 38$$

Duali di PL in forma generica

- Per la **sufficienza**, definire $u^T A \sim c^T$ e u per **mantenere**

$$\underbrace{c^T x \geq u^T A x}_{\substack{\text{siccome } x \geq 0 \\ \text{serve } u^T A \leq c^T}} \underbrace{\geq}_{\substack{\text{siccome } Ax = b \\ \text{vale con } u \text{ qualsiasi}}} u^T b \geq w, \forall x \in F$$

- Consideriamo $c^T x \geq u^T A x$:

$$\begin{aligned} u^T A x &= [u^T A_1 | u^T A_2 | \dots | u^T A_j | \dots | u^T A_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \\ \wedge &= u^T A_1 x_1 + u^T A_2 x_2 + \dots + u^T A_j x_j + \dots + u^T A_n x_n \\ c^T x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \end{aligned}$$

Duali di PL in forma generica (cont.)

- Affinché $u^T A x \leq c^T x$, è sufficiente

$$u^T A_j x_j \leq c_j x_j, \quad \forall j = 1 \dots n$$

- Pertanto:

$$u^T A_j x_j \leq c_j x_j$$

se $x_j \geq 0$, la condizione sufficiente è che $u^T A_j \leq c_j$

se $x_j \leq 0$, la condizione sufficiente è che $u^T A_j \geq c_j$

se x_j libera, la condizione sufficiente è che $u^T A_j = c_j$

- variabile primale ≥ 0 / ≤ 0 / libera \rightsquigarrow vincolo duale \leq / \geq / $=$

Duali di PL in forma generica (cont.)

- Manteniamo adesso la seconda disuguaglianza della catena

$$\underbrace{c^T x}_{x \geq 0} \geq \underbrace{u^T Ax}_{Ax=b} \geq u^T b \geq w, \forall x \in P$$

- Consideriamo $u^T Ax \geq u^T b$:

$$u^T Ax = [u_1 | u_2 | \dots | u_i | \dots | u_n] \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_i^T x \\ \vdots \\ a_m^T x \end{bmatrix} =$$

$$= u_1 a_1^T x + u_2 a_2^T x + \dots + u_i a_i^T x + \dots + u_m a_m^T x$$

$$u^T b = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \dots + u_i b_i + \dots + u_m b_m$$

Duali di PL in forma generica (cont.)

- Affinché $u^T A x \geq u^T b$, è sufficiente

$$u_i a_i^T x \geq u_i b_i, \forall i = 1 \dots m$$

- Pertanto:

se $a_i^T x \geq b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \geq 0$

se $a_i^T x \leq b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \leq 0$

se $a_i^T x = b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \in \mathbb{R}$ (sempre!)

- vincolo primale $\geq / \leq / = \rightsquigarrow$ variabile duale $\geq 0 / \leq 0 / \text{libera}$

Si può dimostrare che le condizioni sono anche necessarie.

Duali di PL in forma generica: conversione

- Considerare singolarmente variabili e vincoli primali

Primale ($\min c^T x$)	Duale ($\max u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

- Per problemi di max, partire dalla colonna di destra

Esempio 1

$$\begin{array}{llll}
 \min & 10x_1 & +20x_2 & +0 \cdot x_3 \\
 \text{s.t.} & 2x_1 & -x_2 & \geq 1 \quad u_1 \\
 & & x_2 & +x_3 \leq 2 \quad u_2 \\
 & x_1 & & -2x_3 = 3 \quad u_3 \\
 & & 3x_2 & -x_3 \geq 4 \quad u_4 \\
 \hline
 & x_1 & & \geq 0 \\
 & & x_2 & \leq 0 \\
 & & & x_3 \text{ libera}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 u^T A \sim c^T \\
 u^T A_2 \sim c_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 u^T A_1 \quad c_1 \\
 c_2
 \end{array}$$

Primale (min $c^T x$)	Duale (max $u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x \odot b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

$$\max \quad 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 3u_3 + 4u_4$$

$$\text{s.t.} \quad 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 \leq 10$$

$$-u_1 + u_2 + 3u_4 \geq 20$$

$$+u_2 - 2u_3 - u_4 = 0$$

$$u_1 \geq 0 \quad u_2 \leq 0 \quad u_3 \text{ libera} \quad -u_4 \geq 0$$

Esempio 1

$$\begin{array}{llllll}
 \min & 10x_1 & +20x_2 & & & \\
 \text{s.t.} & 2x_1 & -x_2 & & & \geq 1 \\
 & & x_2 & +x_3 & & \leq 2 \\
 & x_1 & & -2x_3 & & = 3 \\
 & & 3x_2 & -x_3 & & \geq 4 \\
 & x_1 & & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & & \text{libera}
 \end{array}$$

Primale (min $c^T x$)	Duale (max $u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

$$\begin{array}{llllll}
 \max & u_1 & +2u_2 & +3u_3 & +4u_4 & \\
 \text{s.t.} & u_1 & & & & \geq 0 \\
 & & u_2 & & & \leq 0 \\
 & & & u_3 & & \text{libera} \\
 & & & & u_4 & \geq 0 \\
 & 2u_1 & & +u_3 & & \leq 10 \\
 & -u_1 & +u_2 & & +3u_4 & \geq 20 \\
 & & u_2 & -2u_3 & -u_4 & = 0
 \end{array}$$

Esempio 2

$$\begin{array}{llllll}
 \max & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \\
 \text{s.t.} & \boxed{\begin{array}{l} 2x_1 \\ -x_1 \end{array}} & \begin{array}{l} +x_2 \\ x_2 \end{array} & \boxed{\begin{array}{l} +x_3 \\ -2x_3 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} +3x_4 \\ -x_4 \end{array}} & \begin{array}{l} \leq 10 \\ \geq 20 \\ = 0 \end{array} \\
 & \underline{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \\
 & & & & & \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{libera} \end{array} \\
 & & & & & \geq 0
 \end{array}$$

Primale ($\min c^T x$)	Duale ($\max u^T$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

$$\begin{array}{ll}
 \min & 10y_1 + 20y_2 \\
 \text{s.t.} & 2y_1 - y_2 \geq 1 \\
 & y_2 + y_3 \leq 2 \\
 & y_1 - 2y_3 = 3 \\
 & 3y_2 - y_3 \geq 4
 \end{array}$$

$y_1 \geq 0$
 $y_2 \leq 0$
 y_3 libera

Esempio 2

max $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$
s.t. $2x_1 + x_3 \leq 10$
 $-x_1 + x_2 + 3x_4 \geq 20$
 $x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$
 $x_1 \geq 0$
 $x_2 \leq 0$
 x_3 libera
 $x_4 \geq 0$

Primale (min $c^T x$)	Duale (max $u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

min $10u_1 + 20u_2$
s.t. $u_1 \geq 0$
 $u_2 \leq 0$
 u_3 libera
 $2u_1 - u_2 \geq 1$
 $u_2 + u_3 \leq 2$
 $u_1 - 2u_3 = 3$
 $3u_2 - u_3 \geq 4$

Teoremi della dualità

$$X Y = (Y^T X^T)^T$$

Teorema: trasformazione duale doppia

Il duale del duale è il primale

Dimostrazione:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \max & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \max & b^T u \\ \text{s.t.} & A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T y \\ \text{s.t.} & y^T A^T \geq b^T \\ & y \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T y \\ \text{s.t.} & Ay \geq b \\ & y \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

Teorema della dualità **forte**

Data coppia (PL) e (DL)

(PL) ammette **ottimo finito** z^* \iff (DL) ammette **ottimo finito** w^*
e, inoltre, $z^* = w^*$

Dimostrazione:

\Rightarrow per costruzione, $z^* = w^*$

\Leftarrow per costruzione del duale applicata al duale, visto che il duale del duale è il primale



Teorema della dualità **debole**

Ricordando che i **risultati possono essere generalizzati**, fissiamo le idee:

$$(PL) \quad \begin{array}{ll} z^* = \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$(DL) \quad \begin{array}{ll} w^* = \max & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Siano $P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ e $D = \{u \geq 0 : u^T A \leq c^T\}$

Se $P \neq \emptyset$ e $D \neq \emptyset$, allora $\forall x \in P, u \in D$ si ha $u^T b \leq c^T x$

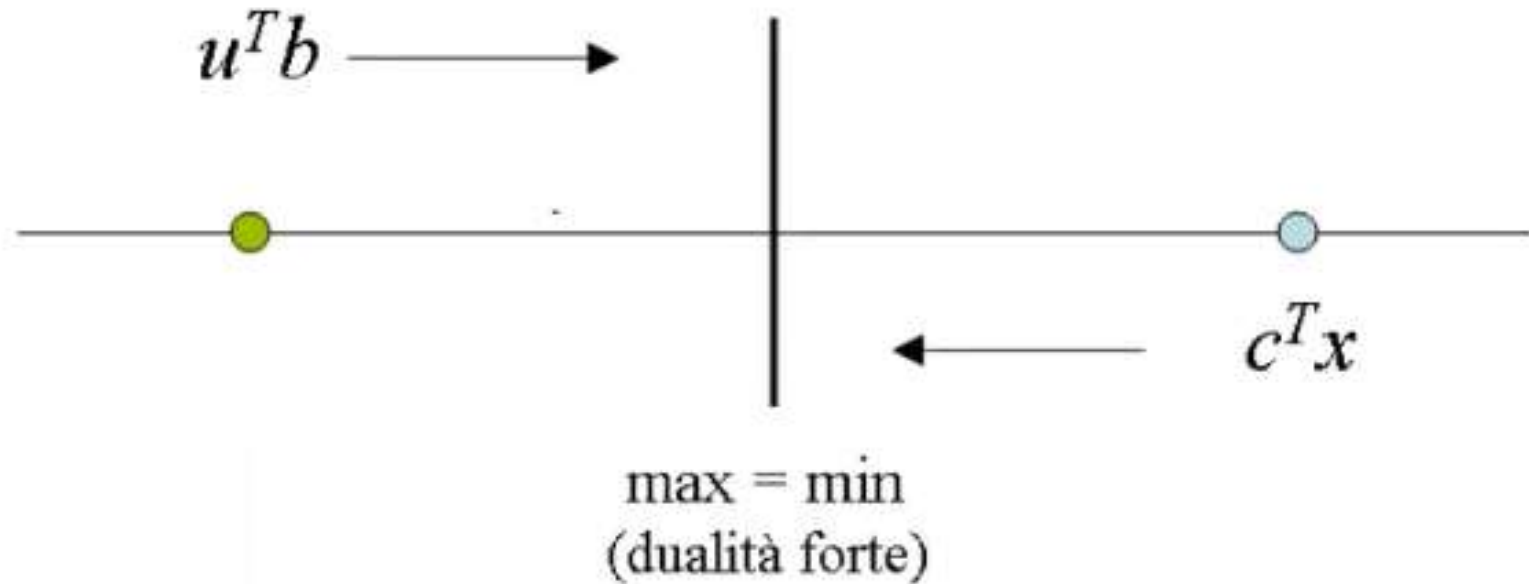
Dimostrazione:

$$\begin{array}{ccccc} u^T b & \leq & u^T Ax & \leq & c^T x \\ & \begin{array}{c} u^T \geq 0 \\ b \leq Ax \end{array} & & \begin{array}{c} x \geq 0 \\ u^T A \leq c^T \end{array} & \end{array}$$

[Nota: per costruzione del duale, maggiorazioni **sempre** rispettate!] ■

Dualità debole: rappresentazione

- I valori delle soluzioni primale e duale si limitano a vicenda



- valori ammissibili del duale sono un *lower bound* per il primale
- valori ammissibili del primale sono un *upper bound* per il duale

Corollario: condizione di ottimalità

Date soluzioni x ammissibile primale e u ammissibile duale

$$c^T x = u^T b \iff x \text{ e } u \text{ ottime primale e duale risp.}$$

Dimostrazione:

\Rightarrow soluzioni migliori violerebbero il teorema della dualità debole

\Leftarrow per il Teorema della dualità forte

