Esercizio 4. Dato il problema

$$\begin{array}{llcll}
\max & x_1 & - & x_2 & \\
\text{s.t.} & & & x_2 & \leq 1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\
& -x_1 & - & 3x_2 & = 10 \\
& x_1 & + & x_2 & \geq -2 \\
& x_1 & & & \geq 0 \\
& & & x_2 & \text{libera}
\end{array}$$

applicare le condizioni di complementarietà primale-duale per verificare se la soluzione $[x_1, x_2] = [2, -4]$ è ottima.

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$x_2 = -4 \leq 1\ (OK)$$

$$2x_1 + x_2 = 2 * 2 - 4 = 0 \leq 5\ (OK)$$

$$-x_1 - 3x_2 = \ -2 * -3(-4) = 10\ (OK)$$

$$x_1 + x_2 = 2 - 4 = -2 \geq \ -2\ (OK)$$

$$x_1 = 2 \geq 0\ (OK)$$

2) Passaggio al duale:

$$\min u_1 + 5u_2 + 10u_3 - 2u_4$$

$$s.t.\ \ 2u_2 - u_3 + u_4 \geq 1$$

$$u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 = 1\ (perché\ x_2\ è\ libera)$$

$$u_1, u_2 \geq 0, u_3\ libera\ (in\ quanto\ il\ terzo\ era\ vincolo\ di\ =), u_4 \leq 0$$

(essendo il problema duale di minimo e primale di massimo, si invertono tutti i segni del resto)

3) CCPD → Sostituisco x_1, x_2 e pongo all'uguaglianza

Prima i vincoli del primale:

$$u_1(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow u_1(-5) = 0 \Rightarrow u_1 = 0\ (prima\ condizione)$$

$$u_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0\ \Rightarrow u_2(-5) \Rightarrow u_2 = 0\ (seconda\ condizione)$$

$$Per\ il\ terzo\ vincolo, è\ di\ uguaglianza\ e\ non\ si\ impongono\ condizioni, deriva\ da\ ammissibilità\ primale$$

$$u_4(x_1 + x_2 + 2) = 0\ \Rightarrow u_4(0)\ \Rightarrow (non\ posso\ dedurre\ nulla)$$

Poi i vincoli del duale:

$$(2u_2 - u_3 - u_4 - 1)x_1 = 0\ \Rightarrow (2u_2 - u_3 - u_4 - 1) * 2\ \Rightarrow 2u_2 - u_3 + u_4 = 1\ (terza\ condizione)$$

$$(u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow è\ di\ uguaglianza\ e\ non\ si\ impongono\ condizioni, ma\ deriva\ dall'ammissibilità\ duale$$

4) Sistema delle condizioni CCPD e ammissibilità duale trovate

$$u_1 = 0\ (ccpd)$$

$$u_2 = 0\ (ccpd)$$

$$2u_2 - u_3 + u_4 = 1\ (ccpd)$$

$$u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 = -1\ (ammissibilità)$$

Sostituisco u_1, u_2 e risolvo le altre

$$u_3 = u_4 - 1$$

$$u_4 = -1 + 3(u_4 - 1)$$

Quindi:

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 2$$

5) Verifica ammissibilità duale

Le soluzioni soddisfano i vincoli duali? Sì

$$2u_2 - u_3 + u_4 = 1 \geq 1$$

$$u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 = -1 \Rightarrow -1$$

Le soluzioni soddisfano i vincoli di dominio? No

$$u_1, u_2 \geq 0\ (corretto)\quad u_3\ libera \Rightarrow 1 \quad u_4 \geq 0 \Rightarrow (per\ dominio\ dovrebbe\ essere \leq 0)$$

La soluzione trovata, quindi, sarebbe u_4, in quanto le altre sono pari a 0 oppure libere. Questa però risulta non ammissibile per il problema duale e, dunque, non è possibile trovare nessuna soluzione ammissibile duale che sia in scarti complementari con la soluzione data, dunque, non ottima.

Esercizio 3. Dato il problema

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & \leq & 2 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & -3 \\
 & x_1 & , & & & & & x_4 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & & x_3 & & & & \text{libera}
\end{array}$$

applicare le condizioni di complementarietà primale-duale per verificare se la soluzione $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [0, 0, -3, 7]$ è ottima.

1) Verifica dell'ammissibilità della soluzione primale

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 - 0 + 2(-3) + 7 = 1 \geq 1 (OK)$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 + 0 - 2 * 7 = -14 \leq 2\ (OK)$$

$$2x_2 + x_3 = 0 - 3 = \ -3\ (OK)$$

$$x_1 = 0 \geq 0, x_2 = 0 \leq 0, x_3\ libera, x_4 = 7 \geq 0$$

2) Passaggio al problema duale

$$\max u_1 + 2u_2 - 3u_3$$

$$s.t. -u_1 - u_2 \leq 2$$

$$-u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$$

$$2u_1 + u_3 = 1$$

$$u_1 - 2u_2 \leq 0 \ (sapendo\ che\ x_4\ non\ c'è, dunque\ si\ pone \leq 0)$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \leq 0, u_3\ libera$$

3) Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale

Partiamo dalle condizioni primali:

$u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 1) = 0 \Rightarrow u_1(7-7) \Rightarrow u_1(0) = 0$ (non si può dire nulla poiché già uguale a 0)

$u_2(-x_1 + x_2 - 2x_4 - 2) = 0 \Rightarrow u_2(-16) = 0 \Rightarrow u_2 = 0\ (prima\ condizione)$

$$u_3(2x_2 + x_3 + 3) = 0\ (vincolo\ di\ uguaglianza, deriva\ da\ ammissibilità\ primale)$$

Andiamo poi con le condizioni duali:

$(-u_1 - u_2 - 2)x_1 = 0 \Rightarrow 0$ (non di può dire nulla in quanto già uguale a zero)

$(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)x_2 \Rightarrow 0$ (non di può dire nulla in quanto già uguale a zero)

$$(2u_1 + u_3 - 1) = 0$$

$$Il\ terzo\ vincolo\ duale\ è\ già\ di\ uguaglianza\ e\ ciò\ deriva\ dall'ammissibilità\ primale$$

$$(u_1 - 2u_2 - 0)x_4 = 0 \Rightarrow (u_1 - 2u_2)7 \Rightarrow u_1 - 2u_2 = 0\ (seconda\ condizione)$$

4) Sistema delle condizioni CCPD e ammissibilità duale trovate

$$u_2 = 0$$

$$u_1 - 2u_2 = 0$$

$$2u_1 + u_3 = 1$$

E quindi: $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1$

5) Verifica ammissibilità duale

Le soluzioni soddisfano i vincoli duali? Sì

$$-u_1 - u_2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2$$

$$-u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1$$

$$2u_1 + u_3 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

Le variabili soddisfano i vincoli di dominio? Sì

$$u_1 \geq 0, u_2 \leq 0, u_3\ libera$$

6) Conclusioni → x ammissibile primale, u ammissibile duale, x, u scarti complementari per costruzione e valori all'ottimo uguali

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale. Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x1, x2, x3) = (1, 4, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & x_2 + x_3 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & 1 \\
& -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
& 2x_2 & \geq & -3 \\
& 2x_1 + x_3 & = & 2 \\
& x_1 \text{ libera } x_2 \geq 0 \;\; x_3 \leq 0 & &
\end{array}$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$$
$$\max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}$$

$$\begin{array}{c} x \text{ e } u \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \leq 1 \; (OK)$$
$$-2x_1 + x_2 = 2 \leq 2 \; (OK)$$
$$2x_2 = 8 \geq -3 \; (OK)$$
$$2x_1 + x_3 = 2 = 2 \; (OK)$$
$$x_1 \; libera, x_2 = 4 \geq 0, x_3 = 0 \leq 0 \; (domini \; OK)$$

2) Passaggio al duale

$$\min u_1 + 2u_2 - 3u_3 + 2u_4$$
$$s.t. -u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$$
$$-u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1$$
$$2u_1 + u_4 \leq 1$$
$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0, u_4 \; libera$$

3) Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale

Primo vincolo primale: $u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \rightarrow u_1(-6) = 0 \rightarrow u_1 = 0$ (prima condizione)

Secondo vincolo primale:$u_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \rightarrow u_2(0) \rightarrow 0$ // (non si deducono condizioni di complementarietà su u_2)

Terzo vincolo primale: $u_3(2x_2 + 3) = 0 \rightarrow u_3(11) \rightarrow u_3 = 0$ (seconda condizione)

Quarto vincolo primale di uguaglianza, pertanto non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la relativa variabile u_4

Primo vincolo duale di uguaglianza: non si impongono condizioni di complementarietà con x_1 (in quanto la condizione $(-u_1 - 2u_2 + 2u_4)x_1 = 0$ è diretta conseguenza dell'ammissibilità duale; l'equazione $-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$ sarà comunque da considerare come condizione di ammissibilità duale

Secondo vincolo duale: $(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)x_2 \Rightarrow (-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)4 \Rightarrow -u_1 + u_2 + 2u_3 - 1 = 0$ (terza condizione)

Terzo vincolo duale: $(2u_1 + u_4 - 1)x_3 = 0 \rightarrow (2u_1 + u_4 - 1)0 = 0$ //

4) Sistema delle condizioni CCPD e ammissibilità duale trovate

$u_1 = 0$ (ccpd)

$u_3 = 0$ (ccpd)

$-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1$ (ammissibilità duale)

$-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$ (ammissibilità duale)

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0, u_4 = 1$$

5) Verifica ammissibilità duale

La soluzione duale trovata:

- Soddisfa i tre vincoli duali: $-u_1 - 2u_2 + 2u_4 \rightarrow 0 = 0, -u_1 + u_2 + 2u_3 = 1 \geq 1, 2u_1 + u_4 = 1 \leq 1$
- Soddisfa i vincoli di dominio: $u_1 = 0 \geq 0, u_2 = 1 \geq 0, u_3 = 0 \leq 0, u_4\ libera$

6) Conclusioni

Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

• x è ammissibile primale (come da verifica);

• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);

• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale

(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe 4 e verifica il corollario della dualità forte)

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che (x1,x2,x3) = (3/2 , 9/4 ,0) è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llllll} \min & -2x_1 & + & x_2 - & x_3 & \\ \text{s.t.} & -2x_1 & - & x_2 + & x_3 & \leq 2 \\ & x_1 & + & 2x_2 + & 3x_3 & = 6 \\ & -2x_1 & & & & \geq -3 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \leq 0 & & \end{array}$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^Tx : x \geq 0, Ax \geq b\}$$
$$\max\{u^Tb : u \geq 0, u^TA \leq c^T\}$$

$$\begin{array}{c} x \text{ e } u \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ u^TA \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{l} u^T(Ax-b) = 0 \\ (c^T - u^TA)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^Tx : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^Tb : x \geq 0, u^TA \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^TA_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^TA_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^Tx = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^Tx > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$-2x_1 - x_2 + x_3 = -\frac{3}{4} \leq 2\ (OK)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 = 6\ (OK)$$

$$-2x_1 = -3 \geq -3\ (OK)$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \geq 0, x_2 = \frac{9}{4} \geq 0, x_3 = 0 \leq 0\ (domini\ OK)$$

2) Passaggio al problema duale

$$\max 2u_1 + 6u_2 - 3u_3$$

$$s.t. -2u_1 + u_2 - 2u_3 \leq -2$$

$$-u_1 + 2u_2 \leq 1$$

$$u_1 + 3u_2 \geq -1$$

$$u_1 \leq 0, u_2\ libera, u_3 \geq 0$$

3) Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale

Primo vincolo primale: $(-2x_1 - x_2 + x_3 - 2)u_1$ → $\left(-\frac{29}{4}\right)u_1$ → $u_1 = 0$ (prima condizione)

Secondo vincolo primale: È vincolo di uguaglianza, non ci sono da imporre condizioni con la variabile duale u_2, visto che la condizione $(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6) = 0$ deriva dall'ammissibilità primale

Terzo vincolo primale: $(-2x_1 + 3)u_3 = 0$ → $u_3(0)$ → // (non si possono dedurre condizioni)

Primo vincolo duale: $(-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2)x_1 = 0$ → $(-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2)\frac{3}{2}$ → $-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2 = 0$ (seconda condizione)

Secondo vincolo duale: $(-u_1 + 2u_2 - 1)x_2$ → $(-u_1 + 2u_2 - 1)\frac{9}{4}$ → $(-u_1 + 2u_2 - 1 = 0)$ (terza condizione

Terzo vincolo duale: $(u_1 + 3u_2 + 1)x_3$ → $(u_1 + 3u_2 + 1)0$ → //

4) Sistema delle condizioni CCPD e ammissibilità duale trovate

$u_1 = 0$ (ccpd)

$-2u_1 + u_2 - 2u_3 + 2 = 0$ (ammissibilità duale)

$-u_1 + 2u_2 - 1 = 0$(ammissibilità duale)

Risolvendo → $u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = +\frac{3}{4}$

5) Verifica ammissibilità duale

La soluzione duale trovata:

soddisfa i vincoli duali ($-2u_1 + u_2 - 2u_3 = -2 \geq -2, -u_1 + 2u_2 = 1 = 1, u_1 + 3u_2 \geq -1$)

soddisfa i vincoli di dominio ($u_1 = 0 \leq 0, u_2\ libera, u_3 = \frac{3}{4} > 0$)

6) Conclusioni

Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

• x è ammissibile primale (come da verifica);

• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);

• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale

(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe $\frac{3}{4}$ e verifica il corollario della dualità forte)

- (*4) Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x_1,x_2,x_3) = (0,4,8)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llll} \max & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & +3x_2 \; -x_3 & = 4 \\ & x_1 & +x_2 & \le 4 \\ & x_1 \le 0 & x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 & \end{array}$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^T x : x \ge 0, Ax \ge b\}$$
$$\max\{u^T b : u \ge 0, u^T A \le c^T\}$$

$$x \text{ e } u \text{ ottime primale e duale (risp.)} \iff \begin{array}{ll} Ax \ge b \wedge x \ge 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \le c^T \wedge u \ge 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \ge 0, Ax \ge b\}$ e $\max\{u^T b : x \ge 0, u^T A \le c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0 \Rightarrow u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j \Rightarrow x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0 \Rightarrow a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i \Rightarrow u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 = 4\ (OK)$$

$$x_1 + x_2 = 4 \le 4\ (OK)$$

$$x_1 = 0 \le 0, x_2 = 4 \ge 0, x_3 = 8 \ge 0\ (domini\ OK)$$

2) Passaggio al duale

$$\min 4u_1 + 4u_2$$

$$s.t. 2u_1 + u_2 \ge 1$$

$$3u_1 + u_2 \le 1$$

$$-u_1 = 0$$

$$u_1\ libera, u_2 \ge 0$$

3) Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale

- il primo vincolo primale è di uguaglianza; non ci sono da imporre condizioni con la relativa variabile duale u_1 (la condizione $u_1(2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4) = 0$ è diretta conseguenza dall'ammissibilità primale

- il secondo vincolo primale $u_2(x_1 + x_2 - 4) = 0$ → $u_2(0)$ → (non è possibile dedurre alcuna condizione di complementarietà su u_2)

- il primo vincolo duale $x_1(2u_1 + u_2 - 1) = 0$ → $0(2u_1 + u_2 - 1)$ → 0 → //

- il secondo vincolo duale $x_2(3u_1 + u_2) = 0$ → $4(3u_1 + u_2 - 1)$ → $3u_1 + u_2 - 1 = 0$ (prima condizione)

- il terzo vincolo duale è di uguaglianza: non ci sono condizioni da imporre sulla relative variabile primale x_3 (tuttavia, la condizione $-u_1 = 0$ sarà comunque da considerare come condizione di ammissibilità duale) → (seconda condizione)

4) Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale

1]

$$3u_1 + u_2 - 1 = 0 \ (ammissibilità\ duale)$$

$$-u_1 = 0 \ (ammissibilità\ duale)$$

2]

$$u_1 = 0, u_2 = 1$$

5) Verifica ammissibilità duale

La soluzione duale trovata:

- soddisfa i tre vincoli duali ($2u_1 + u_2 = 1 \geq 1, 3u_1 + u_2 = 1 \leq 1, u_1 = 0$)
- soddisfa i vincoli di dominio (u_1 libera, $u_2 \geq 0$)

6) Conclusioni

Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

• x è ammissibile primale (come da verifica);

• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);

• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale

(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe 4 e verifica il corollario della dualità forte)

- A) enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale e B) applicare tali condizioni per dimostrare che(x_1 , x_2 , x_3) = (1 , 0 , – 2) è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{lrlrlrlcr}
\max & 3 & x_1 & - & x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & & x_1 & + & x_2 & & & \geq & 1 \\
 & 2 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & 2 & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\
 & 2 & x_1 & & & - & x_3 & \geq & -1 \\
 & \multicolumn{2}{l}{x_1 \geq 0} & \multicolumn{2}{l}{x_2 \text{ libera}} & & \multicolumn{3}{l}{x_3 \leq 0}
\end{array}
$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data. In particolare, valgono le seguenti condizioni di ottimalità:

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$
\begin{array}{l}
\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\} \\
\max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
x \text{ e } u \text{ ottime} \\
\text{primale e duale (risp.)}
\end{array}
\iff
\begin{array}{ll}
Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\
u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\
\left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)}
\end{array}
$$

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1) variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow \; u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2) vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow \; x_j = 0$	variabile primale nulla
3) variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow \; a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4) vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow \; u_i = 0$	variabile duale nulla

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione dat

$$x_1 + x_2 \geq 1 = 1 \geq 1 \; (OK)$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \leq 0 \; (OK)$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4 = 4 \; (OK)$$

$$2x_1 - x_3 = 2 \geq -1 \; (OK)$$

$$x_1 = 1 \geq 0, x_2 \; libera, x_3 = -2 \leq 0 \; (domini \; OK)$$

2) Passaggio al duale:

$$\min u_1 + 4u_3 - u_4$$

$$s.t.$$

$$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 \leq 3$$

$$u_1 + u_2 - u_3 \geq -1$$

$$u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

$u_1 \leq 0, u_2 \geq 0, u_3\ libera, u_4 \leq 08$

3) Applicazione delle condizioni CCPD:

$u_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \rightarrow u_1(0) \rightarrow$// non si può dire nulla

$u_2(2x_1 + x_2 + x_3 - 0) = u_2(0) \rightarrow$ // non si può dire nulla

$u_3(2x_1 - x_2 - x_3 - 4) = 0$ → non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la relativa variabile duale u_3, in quanto la condizione è diretta conseguenza dell'ammissibilità primale

$u_4(2x_1 - x_3 + 1) = 0$ → $u_4(1) \rightarrow u_4 = 0$ (prima condizione)

$x_1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) = 0 \rightarrow 1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) \rightarrow\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3 = 0$ (seconda condizione)

$x_2(u_1 + u_2 - u_3 + 1) = 0$ → Il vincolo duale è di uguaglianza, non ci sono condizioni da imporre con la relativa variabile x_2, in quanto la condizione è di diretta conseguenza dell'ammissibilità duale: comunque $(u_1 + u_2 - u_3 + 1) = 0$ è da considerarsi come terza condizione

$x_3(u_2 - u_3 - u_4 - 0) = -2(u_2 - u_3 - u_4 - 0) \rightarrow u_2 - u_3 - u_4 = 0$ (quarta condizione)

4) Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale

$u_4 = 0$ (ccpd)

$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3 = 0$ (ammissibilità duale)

$(u_1 + u_2 - u_3 + 1) = 0$ (ammissibilità duale)

$u_2 - u_3 - u_4 = 0$ (ammissibilità duale)

$u_1 = 3, u_2 = -2, u_3 = -2, u_4 = 0$

$u_2 = u_3$

$u_1 = -1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = 0$

5) Verifica ammissibilità duale

La soluzione duale trovata:

- soddisfa i tre vincoli duali ($u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 1 \leq 3, u_1 + u_2 - u_3 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 = -1 \leq -1,\ u_2 - u_3 - u_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 0$
- soddisfa i vincoli di dominio ($u_1 = -1 \leq 0, u_2 = \frac{1}{2} \geq 0, u_3\ libera, u_4 = 0 \leq 0$

6) Conclusioni

Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

• x è ammissibile primale (come da verifica);

• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);

• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale

Svolgimento del prof

A) Dati due problemi generici *mix* e *max* nelle forme:

$$\min c^T x \; Ax \; \sim b \; x \sim 0$$
$$\max u^T b \quad u^T A \sim c \;\; u^T \sim 0$$
$$\bar{x} \; e \; \bar{u} \; ottime$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\bar{u_i}\left(u^T A_j - c_J\right) = 0$$
$$\bar{x_J}\left(a_i^T x - b_i\right) = 0$$

Con $\bar{x}$ $ammissibile\ primale\ e\ \bar{u}\ ammissibile\ duale$

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

X è ammissibile primale?

$$x_1 + x_2 = 1 \; (OK),$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \; (OK)$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \; (OK)$$

$$2x_1 - x_3 > 1 \; (OK)$$

$$x_1 > 0, x_2 \; libera, x_3 < 0$$

2) Passaggio al problema duale

$$\min u_1 + 0u_2 + 4u_3 - 1u_4$$

$$s.t. u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 \geq 3$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = -1$$

$$u_2 - u_3 - u_4 \leq 0$$

$$u_1 \leq 0, u_2 <\geq 0, u_3 \; libera, u_4 \leq 0$$

3) Condizioni di complementarietà primale-duale

$x_1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) = 0 \rightarrow 1(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 - 3) \rightarrow \; u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 3$

$x_2(u_1 + u_2 + u_3 + 1) = 0$ → Vero per ammissibilità duale ($x_2 = 0$ per il fatto delle condizioni di complementarietà, non tanto perché $x_2 = 0$

$x_3(u_2 - u_3 - u_4 - 0) = 0 \rightarrow \; u_2 - u_3 - u_4 - 0$

$u_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \rightarrow u_1 * 0 \rightarrow 0 \rightarrow //$

$u_2(2x_1 + x_2 + x_3 - 0) = 0 \rightarrow u_2 * 0 = 0 \rightarrow //$

$u_3(2x_1 - x_2 - x_3 - 4) = 0$ → Vero per ammissibilità primale

$u_4(2x_1 - x_3 - 1) = 0 \rightarrow u_4 * 5 = 0 \rightarrow u_4 = 0$

4) Sistema di equazioni per l'imposizione delle condizioni di complementarietà primale duale (ccpd) trovate e delle condizioni di ammissibilità duale:

$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 3$ (CCPD)

$u_1 + u_2 + u_3 = -1$ (ammissibilità duale)

$u_2 - u_3 - u_4 = 0$ (CCPD)

$u_4 = 0$ (CCPD

$$u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 0$$

5) Verifica ammissibilità duale

$$u_1 < 0, u_2 > 0, u_3 \ libera, u_4 = 0$$

Primo vincolo duale a posto per costruzione, secondo vincolo duale a posto per costruzione, terzo vincolo duale a posto per costruzione

6) Conclusioni

La u è ammissibile duale ed è in scarti complementare con la x data ⇒ ottime

Esercizio 2 *Verificare se $x^b = [5, -5]$ è soluzione ottima per il problema dell'esempio precedente [risultato: x^b è ottima].*

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & x_1 - x_2 \\
s.t. & & x_2 \leq 1 \\
& & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\
& & -x_1 - 3x_2 \leq 10 \\
& & -x_1 - x_2 \leq 2 \\
& & x_1 \geq 0, x_2 \ libera
\end{array}
$$

Per verificare se la soluzione proposta è ottima dobbiamo verificare che sia una soluzione primale ammissibile e che sia possibile trovare una soluzione del problema duale che sia ammissibile e in scarti complementari con la soluzione primale data.

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$-5 \leq 1\ (OK)$$

$$10 - 5 = 5 \leq 5\ (OK)$$

$$-5 + 15 = 10 \leq 10\ (OK)$$

$$-5 + 5 = 0 \leq 2$$

$$x_1 = 5 \geq 0, x_2\ libera$$

2) Passaggio al duale

$$
\begin{array}{lll}
\min & w = & u_1 + 5u_2 + 10u_3 + 2u_4 \\
s.t. & & 2u_2 - u_3 - u_4 \geq 1 \\
& & u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4 = -1 \\
& & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0
\end{array}
$$

3) Applicazione delle condizioni CCPD

$u_1(x_2 - 1) = u_1(-5 - 1) = u_1(-6) \rightarrow u_1 = 0$ (prima condizione)

$u_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0 \rightarrow u_2(0) \rightarrow //$

$u_3(-x_1 - 3x_2 - 10) = 0 \rightarrow u_3(0) \rightarrow //$

$u_4(-x_1 - x_2 - 2) = 0 \rightarrow u_4(-5 + 5 - 2) \rightarrow u_4(-2) \rightarrow u_4 = 0$ (seconda condizione)

$(2u_2 - u_3 - u_4 - 1)x_1 = 0 \rightarrow\ (2u_2 - u_3 - u_4 - 1)5 \rightarrow\ 2u_2 - u_3 - u_4 - 1 = 0$ (terza condizione)

$u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4 = -1$ (vincolo di uguaglianza, ma deve essere considerato nelle condizioni e sarà la quarta condizione)

4) Sistema di equazioni CCPD

$u_1 = 0$ (CCPD)

$u_4 = 0$ (CCPD)

$2u_2 - u_3 - u_4 - 1 = 0$ (ammissibilità duale)

$u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4 = -1$ (ammissibilità duale)

$$2u_2 - 1 = u_3$$

$$u_1 = 0, u_2 = \frac{4}{5}, u_3 = \frac{3}{5}, u_4 = 0$$

5) Verifica ammissibilità duale:

La soluzione duale trovata:

- soddisfa i due vincoli duali: $2u_2 - u_3 - u_4 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1 \geq 1, u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4 = \frac{4}{5} - \frac{9}{5} = -1 = -1$,
- soddisfa i vincoli di dominio: $u_1 = 0 \geq 0, u_2 = \frac{4}{5} \geq 0, u_3 = \frac{3}{5} \geq 0, u_4 = 0 \geq 0$

6) Conclusioni

Abbiamo a disposizione una soluzione primale x e una soluzione duale u tali che:

• x è ammissibile primale (come da verifica);

• u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);

• x e u sono in scarti complementari (per costruzione).

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale

4. a) enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in
   b) applicare tali condizioni per dimostrare che
   $$(x_1, x_2, x_3) = (-3, 0, 2)$$
   è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \\
 & x_1 & & & + & 2\,x_3 & \leq & 1 \\
 & & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\
\end{array}
$$

$x_1 \leq 0$ $\quad x_2$ libera $\quad x_3 \geq 0$

a) Complementarietà = Ortogonalità

Condizioni di complementarietà primale duale

Teorema (condizioni "estese")

Data **qualsiasi** coppia di problemi primale duale e $x \in \mathbb{R}^n$ $u \in \mathbb{R}^m$

$$
x \text{ e } u \text{ ottime} \iff
\begin{cases}
x \text{ ammissibile primale} \\
u \text{ ammissibile duale} \\
u_i\,(a_i^T x - b_i) = 0, \quad \forall\, i = 1 \ldots m \\
(c_j - u^T A_j)\, x_j = 0, \quad \forall\, j = 1 \ldots n
\end{cases}
$$

- Esempio: (PP) $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$
  (PD) $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$

1)	variabile primale $\neq 0$	$x_j > 0 \Rightarrow u^T A_j = c_j$	vincolo duale *saturo*
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j \Rightarrow x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale $\neq 0$	$u_i > 0 \Rightarrow a_i^T x = b_i$	vincolo primale *saturo*
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i \Rightarrow u_i = 0$	variabile duale nulla

solo nel verso $\Rightarrow$!

b)

1 $\max x_1 + 2x_2$

s.t. $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$

$x_1 + 2x_3 \leq 1$ $\qquad [x_1, x_2, x_3) = [-3, 0, 2]$

$-x_2 + x_3 \geq 2$

$x_1 \leq 0$, x_2 libero, $x_3 \geq 0$

1 $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3 \to -3 - 0 + 2 = -1 \leq 3$ ok

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \to -3 + 0 + 4 = 1 = 1$ OK

$x_1 + 2x_3 \leq 1 \to -3 + 4 \leq 1 \leq 1 \to$ ok

~~$x_1 + 2x_3 \leq 1 \to -3 + 4 \leq 1 \to 1 \leq 1$ ok~~

$-x_2 + x_3 \geq 2 \to 0 + 2 \geq 2$ ok

2 $\min 3u_1 + u_2 + u_3$ $\qquad u_1 \geq 0,\ u_2 = 0$ libero$,\ u_3 \geq 0$

s.t. $u_1 + u_2 + u_3 \leq 1$

$-2u_1 + 2u_2 - u_4 = 2$

$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4 \geq 0$

CONS. CCPD

(3) $u_1(x_1 - 2x_2 + x_3 + 3) = 0 \rightarrow u_1(-3+2-3) = u_1(-4) = u_1 = 0$

$u_2(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \rightarrow u_2(-3+0+4-1) = u_2(0) \rightarrow //$ 1° CONS.

$u_3(x_1 + 2x_3 - 1) = 0 \rightarrow u_3(-3+4-1) = u_3 = 0 \rightarrow //$

$u_4(-x_2 + x_3 - 2) = 0 \rightarrow u_4(-2+x_3-2) = 0 \quad u_4(-4) = 0 \rightarrow u_4 = 0$

$x_1(u_1 + u_2 + u_3 - 1) = 0 \rightarrow 3(u_1 + u_2 + u_3 - 1) = 0 \rightarrow u_1 + u_2 + u_3 - 1 = 0$ 2° CONS.

$x_2(-2u_1 + 2u_2 - u_4 - 2) = 0 \rightarrow$ DI UGUAGLIANZA, DA DIRETTO CONSEG. VIN. DUALE $\rightarrow$ DA CONSIDERARE

$x_3(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4) = 0 \rightarrow 2(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4) = 0$ 3° CONS.

$\rightarrow u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4 = 0$

(4) CCPD CON VAR.

$$\begin{cases} u_1 = 0 \quad (\text{CCPD}) \quad \overset{u_4=0}{u_1+u_2+u_3-1=0} \;(\text{CCPD}) \rightarrow \text{SI CONSIDERA} \\ -2u_1 + 2u_2 - u_4 = 2 = 0 \quad (\text{A.V.D.}) \\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4 = 0 \end{cases}$$

$u_1 = 0 \quad u_2 = 1 - u_3$

$2u_2 - u_4 - 2 = 0$

$2u_2 + 2u_3 + u_4 = 0$

$u_2 = 1 - u_3$

$2 - 2u_3 - 2 = 0$

$2 - 2u_3 + 2u_3 = 0$

$u_1 = 0$

$u_2 = 1$

$-2u_3 = 0 \rightarrow u_3 = 0$

$u_4 = 0$

(5) $u_1 + u_2 + u_3 \leq 1 \rightarrow 0 + 1 + 0 \leq 1 \rightarrow$ OK

$-2u_1 + 2u_2 - u_4 = 2 \rightarrow 0 + 2 - 0 = 2$ OK

$u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4 \geq 0 \rightarrow 0 + 2 + 0 + 0 \geq 0 \rightarrow 2 \geq 0$ OK

(6) X ammiss. primale, U ammiss. duale, X e U inter-complementari

$\rightarrow$ VAL. DELLE 2 F.O. SONO ENTRAMBE AD "1"