2011-12-13

1. In vista del Natale, una ditta di trasporti è stata incaricata delle spedizioni di abeti dalla Norvegia verso diverse capitali europee. In Norvegia ci sono 3 vivai, indicati con A, B e C, e gli abeti sono disponibili in 2 diverse misure: medi e grandi. Le distanze in km tra i vivai e le capitali europee sono indicate in tabella, insieme alle richieste di ogni capitale e alle disponibilità di ogni vivaio (per le due taglie):

km	Roma	Parigi	Londra	Madrid	*Disponibilità medi*	*Disponibilità grandi*
Vivaio A	2000	1500	800	2200	*100*	*210*
Vivaio B	2300	1700	1200	1900	*200*	*120*
Vivaio C	1800	1300	900	2000	*300*	*250*
Richiesta medi	*50*	*80*	*260*	*150*		
Richiesta grandi	*100*	*200*	*40*	*160*		

I costi di trasporto sono di 20 centesimi di euro a chilometro per gli abeti medi e di 45 centesimi di euro a chilometro per gli abeti grandi. Determinare il piano di trasporti di costo minimo considerando che:

- il sindaco di Roma ha bisogno di almeno 20 alberi medi dal vivaio A e 10 alberi grandi dal vivaio B;
- per motivi logistici, il vivaio C non può servire più di 2 capitali diverse;
- le spedizioni avvengono in container della capacità di 50 abeti, indipendentemente dalla taglia, e ogni container utilizzato impone un costo aggiuntivo di 100 euro;
- ogni abete che non viene spedito nelle capitali europee impone dei costi di recupero (gli abeti eccedenti vengono trapiantati nelle foreste). I costi sono diversi per i diversi vivai e sono pari a 5, 7 e 9 euro per i vivai A, B e C, rispettivamente.

(Si suggerisce di scrivere il modello tenendo conto dei punti sopra elencati nell'ordine proposto.)

Introduciamo due variabile decisionali per il numero di alberi medi e grandi; inizialmente, avevo pensato ad una variabile a tre indici per considerare vivaio/dimensioni/città, ma complica tutto e non avrebbe troppo senso.

x_{ij}: numero di alberi medi per il vivaio $i \in \{A, B, C\}$ per la città $j \in \{R, P, C, M\}$

y_{ij}: numero di alberi grandi per il vivaio $i \in \{A, B, C\}$ per la città $j \in \{R, P, C, M\}$

Scriviamo la funzione obiettivo:

$$\begin{aligned}\min 0.2(&2000x_{AR} + 1500x_{AP} + 800x_{AL} + 2200x_{AM} + 2300x_{BR} + 1700x_{BP} + 1200x_{BL} + 1900x_{BM} \\ &+ 1800x_{CR} + 1300x_{CP} + 900x_{CL} + 2000x_{CM}) + 0.45(2000y_{AR} + 1500y_{AP} + 800y_{AL} \\ &+ 2200y_{AM} + 2300y_{BR} + 1700y_{BP} + 1200y_{BL} + 1900y_{BM} + 1800y_{CR} + 1300y_{CP} \\ &+ 900y_{CL} + 2000y_{CM})\end{aligned}$$

Consideriamo ora i vincoli di disponibilità (alberi medi):

$$x_{AR} + x_{AP} + x_{AL} + x_{AM} \le 100$$
$$x_{BR} + x_{BP} + x_{BL} + x_{BM} \le 200$$
$$x_{CR} + x_{CP} + x_{CL} + x_{CM} \le 300$$

Consideriamo ora i vincoli di disponibilità (alberi grandi):

$$y_{AR} + y_{AP} + y_{AL} + y_{AM} \le 210$$
$$y_{BR} + y_{BP} + y_{BL} + y_{BM} \le 120$$
$$y_{CR} + y_{CP} + y_{CL} + y_{CM} \le 250$$

- "il sindaco di Roma ha bisogno di almeno 20 alberi medi dal vivaio A e 10 alberi grandi dal vivaio B"

$$y_{AR} \ge 20, \qquad y_{BR} \ge 10$$

- per motivi logistici, il vivaio C non può servire più di 2 capitali diverse

Introduciamo una relativa variabile binaria:

z_{ij}: variabile logica che vale 1 se decido di spedire per il vivaio $i \in \{A, B, C\}$ della città $j \in \{R, P, C, M\}$, 0 altrimenti

In questo modo, avremo:

$$z_{CR} + z_{CP} + z_{CL} + z_{CM} \leq 2$$

Relativi vincoli di attivazione seguono:

$$x_{CR} \leq Mz_{CR}, x_{CP} \leq Mz_{CP}, x_{CL} \leq Mz_{CL}, x_{CM} \leq Mz_{CM}$$

- “le spedizioni avvengono in container della capacità di 50 abeti, indipendentemente dalla taglia, e ogni container utilizzato impone un costo aggiuntivo di 100 euro”

Quindi, leghiamo “x” ed “y” al fatto di spedire 50 abeti:

$$\begin{gathered}
x_{AR} + y_{AR} \leq 50z_{AR}, x_{BR} + y_{BR} \leq 50z_{BR}, x_{CR} + y_{CR} \leq 50z_{CR} \\
x_{AP} + y_{AP} \leq 50z_{AP}, x_{BP} + y_{BP} \leq 50z_{BP}, x_{CP} + y_{CP} \leq 50z_{CP} \\
x_{AL} + y_{AL} \leq 50z_{AL}, x_{BL} + y_{BL} \leq 50z_{BL}, x_{CL} + y_{CL} \leq 50z_{CL} \\
x_{AM} + y_{AM} \leq 50z_{AM}, x_{BM} + y_{BM} \leq 50z_{BM}, x_{CM} + y_{CM} \leq 50z_{CM}
\end{gathered}$$

Relativi vincoli di attivazione seguono:

$$\begin{gathered}
x_{AR} \leq Mz_{AR}, x_{AP} \leq Mz_{AP}, x_{AL} \leq Mz_{AL}, x_{AM} \leq Mz_{AM} \\
x_{BR} \leq Mz_{BR}, x_{BP} \leq Mz_{BP}, x_{BL} \leq Mz_{BL}, x_{BM} \leq Mz_{BM} \\
x_{CR} \leq Mz_{CR}, x_{CP} \leq Mz_{CP}, x_{CL} \leq Mz_{CL}, x_{CM} \leq Mz_{CM}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
y_{AR} \leq Mz_{AR}, y_{AP} \leq Mz_{AP}, y_{AL} \leq Mz_{AL}, y_{AM} \leq Mz_{AM} \\
y_{BR} \leq Mz_{BR}, y_{BP} \leq Mz_{BP}, y_{BL} \leq Mz_{BL}, y_{BM} \leq Mz_{BM} \\
y_{CR} \leq Mz_{CR}, y_{CP} \leq Mz_{CP}, y_{CL} \leq Mz_{CL}, y_{CM} \leq Mz_{CM}
\end{gathered}$$

Dunque, in f.o., andiamo ad aggiungere il seguente pezzo, considerando i e j variabili negli intervalli detti:

$$+100 \sum_{i} \sum_{j} z_{(ij)}$$

- “ogni abete che non viene spedito nelle capitali europee impone dei costi di recupero (gli abeti eccedenti vengono trapiantati nelle foreste). I costi sono diversi per i diversi vivai e sono pari a 5, 7 e 9 euro per i vivai A, B e C, rispettivamente”

Se abbiamo dei costi di recupero, significa in effetti che, a prescindere dagli abeti spediti, si ha questo costo. La mia idea iniziale era di usare e legare in qualche modo le variabili binarie, ma non sembra essere particolarmente utile.
Invece, si potrebbe fare come nella soluzione presente su Mega; considerare il costo presente in funzione della quantità “i” e “j” venduta sottraendola dal totale:

$$+ 5*[(100-\sum_J x_{AJ})+ (210-\sum_J y_{AJ})] + 7*[(200-\sum_J x_{BJ})+ (120-\sum_J y_{BJ})]+ 9*[(300-\sum_J x_{CJ})+ (250-\sum_J y_{CJ})]$$

In ultimo, inseriamo tutti i domini:

$$x_{ij} \in Z_+, y_{ij} \in Z_+, z_{ij} \in \{0,1\}, i \in \{A,B,C\}, j \in \{R,P,C,M\}$$