

RICERCA OPERATIVA

Esercizi da temi d'esame

COGNOME: _____
NOME: _____
MATRICOLA: _____

*Questo foglio deve
va consegnato con
l'elaborato*

Scrivere subito!

- Un mulino produce due tipi di semola normale e integrale a partire da tre tipi di granaglie: A, B e C. Per produrre un quintale di semola normale, sono necessari 0.5 quintali di granaglia A, 0.4 di granaglia B e 0.3 di granaglia C; per un quintale di semola integrale, sono necessari 0.3 quintali di granaglia A, 0.7 di B e 0.4 di C. Il mulino si serve da tre fornitori. Ciascun fornitore mette a disposizione un lotto di acquisto, le cui caratteristiche sono riportate nella seguente tabella:

Lotto	Granaglia A	Granaglia B	Granaglia C	Costo	% impurità
1	3 q	5 q	8 q	100 €	1.0 %
2	4 q	9 q	3 q	140 €	2.0 %
3	7 q	2 q	2 q	120 €	1.5 %

Il mulino dispone di 10 000 € per approvvigionarsi di granaglie e vuole massimizzare il numero di quintali di semola prodotta complessivamente, considerando che:

- si possono acquistare al massimo 5 unità di lotto 3;
 - la semola normale deve essere almeno il doppio della semola integrale e non più del quadruplo;
 - le granaglie del lotto 1 e del lotto 2 sono incompatibili e pertanto non possono essere contemporaneamente acquistate;
 - l'impurità media delle scorte di granaglia di tipo A deve essere inferiore allo 1.6%.
- (*1) Una società di navigazione effettua un servizio di trasporto merci su tre rotte 1, 2 e 3 dove la domanda è rispettivamente di 20000, 5000 e 15000 tonnellate. La società usa per questo servizio tre tipi di nave (A, B e C) e dispone di 100 navi di tipo A, 80 navi di tipo B e 150 navi di tipo C. Ciascuna nave ha capacità e costo di trasporto unitario che dipendono dal tipo e dalla rotta, come riassunto nella seguente tabella:

TIPO NAVE	ROTTA	Capacità massima	Costo €/tonnellata
A	1	150	60
A	2	120	30
A	3	non impiegabile	
B	1	100	45
B	2	80	25
B	3	90	30
C	1	non impiegabile	
C	2	60	50
C	3	140	35

Si scriva il modello di programmazione lineare per determinare il piano di trasporto che soddisfa la domanda sulle tre rotte minimizzando i costi complessivi, tenendo conto che:

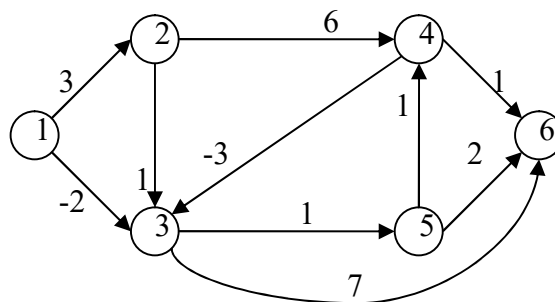
- sulla rotta 1 ci possono essere al massimo 10 navi di tipo A;

- sulla rotta 2 può effettuare servizio un solo tipo di nave;
- se le navi di tipo B sono utilizzate sulla rotta 2, allora queste non possono essere utilizzate né sulla rotta 1, né sulla rotta 3.

- (*2) Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso, a partire dalla base relativa alle variabili x_1, x_2, x_3 e applicando la regola di Bland:

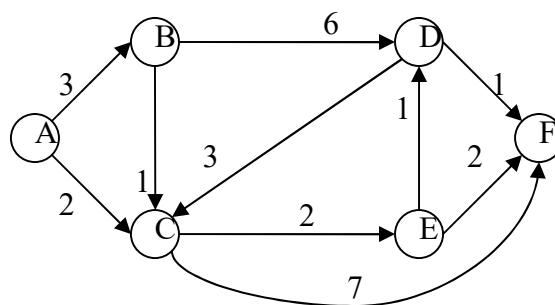
$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 5 \\
 & x_1 + x_2 \geq -1 \\
 & x_2 + 2x_3 = -2 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Si consideri il seguente grafo:



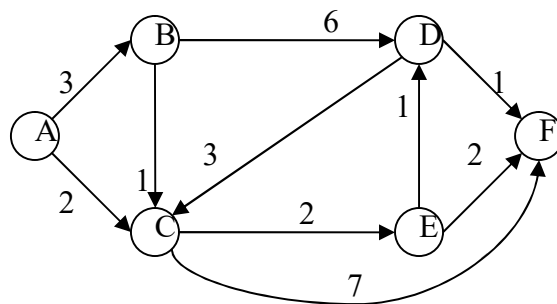
- si scelga un algoritmo per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
- L'algoritmo ha individuato un ciclo negativo? Giustificare la risposta.
- Riportare l'albero e il grafo dei cammini minimi, oppure il ciclo negativo (in ogni caso, si descriva il procedimento utilizzato).

- Si consideri il seguente grafo:



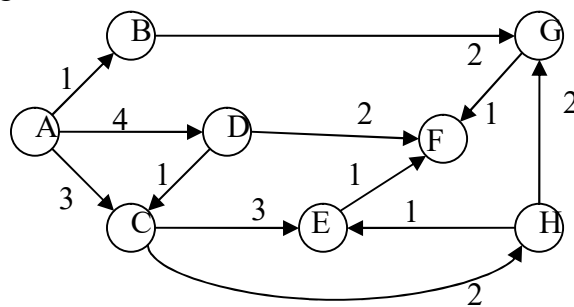
- si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati per determinare i cammini minimi dal nodo A verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
- si disegni l'albero e il grafo dei cammini minimi, descrivendo il procedimento usato.

- Si consideri il seguente grafo:



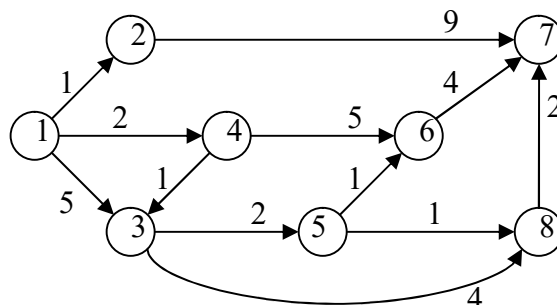
- si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati per determinare i cammini minimi CON MASSIMO 4 ARCHI dal nodo A verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
- si ricavi un cammino con al più 4 archi da A verso E e un cammino minimo con al più 3 archi da A a F: DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.
- è possibile, ricavare direttamente dalla tabella ottenuta albero e/o grafo dei cammini minimi? Giustificare la risposta.

- Si consideri il seguente grafo:



- si scelga un algoritmo appropriato e si motivi la scelta;
- si calcolino i cammini minimi dal nodo A verso tutti gli altri nodi (i passi dell'algoritmo vanno riportati in una tabella e giustificati);
- si disegni l'albero e il grafo dei cammini minimi, descrivendo il procedimento usato.

- (*3) Si vogliono determinare i cammini minimi composti da al più 4 archi sul seguente grafo:



- si scelga un algoritmo appropriato e si motivi la scelta;
- si calcolino i cammini minimi con al più quattro archi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi (i passi dell'algoritmo vanno riportati in una tabella e giustificati);
- si ricavi un cammino minimo di al più quattro archi da 1 a 7, descrivendo il procedimento adottato.

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale. Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (1, 4, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_2 + x_3 \\
 \text{s.t.} & -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1 \\
 & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & 2x_2 \geq -3 \\
 & 2x_1 + x_3 = 2 \\
 & x_1 \text{ libera } x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0
 \end{array}$$

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (3/2, 9/4, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{ll}
 \min & -2x_1 + x_2 - x_3 \\
 \text{s.t.} & -2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\
 & -2x_1 \geq -3 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0
 \end{array}$$

- (*4) Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (0, 4, 8)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\
 & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0
 \end{array}$$

- A) enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale e B) applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -2)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 3x_1 - x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\
 & 2x_1 - x_3 \geq -1 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ libera} \quad x_3 \leq 0
 \end{array}$$

- Come si riconoscono sul tableau del simplesso le condizioni di illimitatezza per un problema di minimo? Giustificare la risposta.
- Si enunci e si giustifichi la regola adottata dal metodo del simplesso per la selezione della variabile uscente nelle operazioni di cambio base.
- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo di Bellman-Ford.
- (*5) Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo di Dijkstra per il problema del cammino minimo.

- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo del simplesso.
- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	1/2	0	1	0	9
x_3	0	1/2	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	2
x_1	1	-1/2	0	1	0	1

Indicare, senza svolgere operazioni di pivot, 3 basi ottime (nei termini delle variabili che le compongono) del corrispondente problema di programmazione lineare.

- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	-1/3	0	-1	0	9
x_3	0	1/13	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	4/3
x_1	1	1/17	0	1	0	0

Rispondere alle seguenti domande, GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE:

- (a) Si può individuare una soluzione di base? Quale? È ottima?
 - (b) Quali sono i possibili cambi base?
 - (c) Quale sarà il cambio base usando la regola di Bland e ordinando le variabili secondo le colonne?
 - (d) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso usando la regola di Bland?
 - (e) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base?
- Enunciare e giustificare le condizioni di ottimalità nel metodo del simplesso.
 - (*6) Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	-12	0	0	0	-147	-239
x_3	75	0	1	0	-12	0
x_4	46	0	0	1	1	4/3
x_2	13	1	0	0	0	0

Riportare il tableau sul foglio e rispondere (NON su questo foglio) alle seguenti domande:

- (a) Cerchiare i possibili elementi pivot e dire su quale elemento si farà pivot alla prossima iterazione del simplesso usando la regola di Bland?
- (b) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso. GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!
- (c) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base? GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!