Esercizi risolti

1) Modelli di programmazione lineare – Primo PDF

Un'azienda produce due diversi tipi di profumo costituiti da alcol e da essenze. Al momento, sono necessari 10 litri di essenza di rosa, 5 litri di mughetto e 8 litri di limone. Le essenze sono ottenute distillando delle basi vendute sul mercato in flaconi. Ogni tipo di flacone ha un costo diverso, un tempo di distillazione diverso e permette di ricavare una diversa quantità delle tre essenze. Le caratteristiche dei flaconi sono riassunte nella seguente tabella:

Flacone	Costo (€)	Ore richieste per flacone	Rosa (ml)	Mughetto (ml)	Limone (ml)
1	90	20	100	110	320
2	120	16	120	290	210
3	170	12	160	330	130

Scrivere il modello di programmazione lineare che determina l'approvvigionamento di costo minimo, tenendo anche conto che:

- le ore totali disponibili per il processo di distillazione sono 1500;
- ogni ordine per un diverso tipo di flaconi costa 20 €;
- si vogliono acquistare flaconi di almeno due tipi;
- i flaconi dello stesso tipo vengono distillati uno di seguito all'altro e ogni volta che si distilla un tipo di flacone bisogna effettuare il set-up dell'impianto, della durata di 8 ore.

Il problema presentato assomiglia al problema della produzione su più linee/quantità di schiuma, ma qui non abbiamo a che fare con una massimizzazione delle quantità, quanto piuttosto con un problema di costo minimo.
Possiamo sicuramente vedere che abbiamo diverse cose da considerare:

- le ore richieste
- il costo
- i ml/millilitri prodotti

Tutto questo, in funzione dei tre flaconi, assumendo una generica quantità f_i per la produzione di flaconi.
Si può quindi immaginare di voler minimizzare il costo per i tre flaconi presentati, considerando però che ogni ordine dei singoli tipi di flacone costa 20€.

Generalmente, dunque, la variabile decisionale, assumerà forma:
x_i: quantità di flacone i, $\forall i \in \{1,2,3\}$
y_i: variabile logica che vale 1 si utilizza il flacone i, $\forall i \in \{1,2,3\}$

Vincoli di attivazione, per una costante M abbastanza grande:

$$x_1 \leq My_1, x_2 \leq My_2, x_3 \leq My_3$$

Da cui la funzione obiettivo:

$$min\ 90x_1 + 120x_2 + 110x_3 + 20y_1 + 20y_2 + 20y_3$$
$$s.t.$$

I vincoli sono come segue (s.t rispetto alla funzione obiettivo)

- Per le ore, si considera che sono 1500, abbiamo le singole ore ma, ogni volta che si usa un tipo di flacone, si impiegano 8 ore, che devono essere considerate nel modello:
  $20x_1 + 16x_2 + 12x_3 \leq 1500 - 8y_1 - 8y_2 - 8y_3$
- Si considerano ora i tre tipi di profumi, sapendo che la resa è data dai litri e qui consideriamo i millilitri. Quindi, moltiplichiamo i litri per 1000:
  - $100x_1 + 120x_2 + 160x_3 \geq 10000$ (rosa)
  - $110x_1 + 290x_2 + 330x_3 \geq 5000$ (mughetto)
  - $320x_1 + 210x_2 + 130x_3 \geq 8000$ (limone)

- Si vogliono acquistare flaconi di almeno due tipi, quindi:
    - $y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$

- Sono necessarie alcune quantità rispetto ai litri, quindi:
    - $x_1 \geq 10000$
    - $x_2 \geq 5000$
    - $x_3 \geq 8000$

Dominio delle variabili:
$x_i \in Z_+, y_i \in \{0,1\}, \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{R, M, L\}$

<u>Fatto dal prof in classe</u>

2. Un'associazione umanitaria internazionale deve spedire i regali di Natale per i bambini di due orfanotrofi in Africa. Quest'anno si regaleranno puzzle, orsacchiotti e trenini, secondo le richieste minime sintetizzate in tabella:

Orfanotrofio	**Puzzle**	**Orsacchiotti**	**Trenini**
A: Tanzania	2500	3000	1400
B: Kenia	2100	2400	1300

I regali saranno smistati a partire da 3 centri di raccolta. I regali sono stati confezionati in pacchi per la spedizione, e ciascun centro di raccolta ha composto dei pacchi diversi. La composizione dei pacchi e il numero di pacchi disponibili sono indicati nella seguente tabella:

Centro	**Puzzle per pacco**	**Orsacchiotti per pacco**	**Trenini per pacco**	**Pacchi disponibili**
1	10	4	15	220
2	5	12	7	240
3	14	9	16	260

La spedizione avverrà per via aerea: da ciascun centro potrà partire al massimo un aereo per ciascuna destinazione, tenendo conto che il Centro 2 ha al massimo un aereo a disposizione. Ciascun aereo ha un costo fisso (tasse aeroportuali in partenza) e un costo variabile per pacco, secondo i dati (in euro) riportati in tabella

Centro	**Costo fisso per aereo**	**Costo variabile per pacco verso:**	
		Tanzania	**Kenia**
1	500	10	12
2	300	15	14
3	400	5	25

Si vuole determinare un piano di smistamento dei regali di costo minimo, considerando che il governo della Tanzania incentiva l'arrivo di puzzle chiedendo una sovrattassa di 1000 € qualora il numero di puzzle arrivati non superi di 500 unità la richiesta minima.

x_{ij}: pacchi da inviare da $i \in \{1,2,3\}$ dal paese $j \in \{T, K\}$
y_{ij}: variabile binaria che vale 1 se aereo parte da i a j

$$\min 10x_{1T} + 12x_{1K} + 15X_{2T} + 14X_{2T} + 5_{3T} + 25x_{3K}$$
$$s.t.$$

$10x_{1T} + 5x_{2T} + 14x_{3T} \geq 2500$ //(richieste minime puzzle Tanzania)
$4x_{1T} + 12x_{2T} + 2x_{3T} \geq 3000$ //(richieste minime orsacchiotti Tanzania)
$15x_{1T} + 7x_{2T} + 16x_{3t} \geq 1400$ //(richieste minime trenini Tanzania)
$10x_{1K} + 5x_{2K} + 14x_{3T} \geq 2100$ //(richieste minime puzzle Kenya)
$4x_{1K} + 12x_{2K} + 2x_{3T} \geq 2400$ //(richieste minime orsacchiotti Kenya)
$15x_{1K} + 7x_{2K} + 16x_{3t} \geq 1300$ //(richieste minime trenini Kenya)

$x_{1T} + x_{1K} \leq 220$ //(disponibilità pacchi centro 1 Tanzania/Kenya)
$x_{2T} + x_{2K} \leq 240$ //(disponibilità pacchi centro 2 Tanzania/Kenya)

$x_{3T} + x_{3K} \leq 260$ //(disponibilità pacchi centro 3 Tanzania/Kenya)

Introduco la variabile binaria per i costi fissi e modifico la f.o.
Devo fare in modo che non parta l'aereo se non attivo il paese.

$$\text{Min } 10x_{1T} + 12x_{1K} + 15X_{2T} + 14X_{2T} + 5_{3T} + 25x_{3K} + 500(y_{1T} + y_{1K}) + 300(y_{2T} + y_{2K}) + 400(y_{3T} + y_{3K})$$

L'attivazione vale:
$//y_{ij} \sim x_{ij}$ $\quad x_{ij} \leq My_{ij}, \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{K,T\}$

Non serve dimensionare per forza bene M; basta dire "costante sufficientemente grande"; non sarebbe *del tutto* sbagliato dire $M \to +\infty$

Per modellare "il centro 2 che ha al massimo un aereo a disposizione", usiamo le variabili.

$$y_{2T} + y_{2K} \leq 1$$

Il vincolo che "parta al massimo un aereo a destinazione" è già contenuto nell'attivazione (e non sarebbe necessario)

$$y_{ij} \leq 1$$

Io posso *decidere* se prendere la penalità o meno:
$w = 1$ se prendo la penalità di 1000 euro, 0 altrimenti

La variabile ha impatto sulla f.o., infatti aggiungerò $1000w$.
Se io decido di pagare le penalità, allora modifico il vincolo di puzzle della Tanzania:

$$10x_{1T} + 5x_{2T} + 14x_{3T} \geq 2500 + 500(1 - w)$$

Se $w = 0$, pago la penalità e sono libero di inviare 2500 pacchi
Se $w = 1$, non pago la penalità invio almeno 3000 pacchi

Il seguente vincolo sarebbe ridondante, perché modella la stessa cosa:

$$10x_{1T} + 5x_{2T} + 14x_{3T} \geq 3000(1 - w)$$

Domini: $x_{ij} \in Z_+, y_{ij} \in Z_+, w \in \{0,1\}$

3. In vista delle prossime festività natalizie, Babbo Natale e la Befana devono programmare l'utilizzo della flotta di slitte e scope volanti. Ciascuna slitta o scopa da utilizzare deve prima passare dalla manutenzione. Le operazioni di manutenzione per una slitta o scopa richiedono dei pezzi di ricambio e un costo di manodopera, secondo i dati indicati in tabella:

Tipo	Sottopattini	Bulloni	Perni	Costo manodopera €
A: Slitta normale	2	10	20	25
B: Slitta lusso	4	12	25	20
C: Scopa normale	0	5	30	35
D: Scopa lusso	0	9	25	30

Le previsioni sulle richieste dei bambini indicano la necessità di approntare almeno 1200 mezzi tra slitte e scope, indipendentemente dal tipo. Inoltre, Babbo Natale può contare su 600 aiutanti al massimo e la Befana può contare su 900 aiutanti al massimo (gli aiutanti di Babbo Natale e della Befana possono, ovviamente, guidare solo slitte i primi e scope le seconde). Per l'acquisto dei pezzi di ricambio sono disponibili le seguenti confezioni:

Confezione	Sottopattini	Bulloni	Perni	Costo unitario €
1	5	30	70	20
2	7	45	90	25

Le confezioni di tipo 1 sono in promozione: se si acquistano più di 200 confezioni di tipo 1 si ha uno sconto di 500 €. Vogliamo aiutare Babbo Natale e la Befana a determinare il numero di mezzi, per tipo, da utilizzare, cercando di minimizzare i costi complessivi di manutenzione (pezzi di ricambio e manodopera) e considerando che esattamente tre tipi di mezzi dovranno circolare.

Si vede che in effetti, noi consideriamo operazioni su tipi di slitte e di scope, ciascuno con un proprio sottotipo. Possiamo immaginare delle variabili decisionali che considerano due dati principali:

x_i : tipo di slitta/scopa manutenuta considerando la categoria $i \in \{A, B, C, D\}$
y_j : confezione di pezzi di ricambio del tipo $j \in \{1,2\}$

La funzione obiettivo allora considera i costi da minimizzare, sapendo che abbiamo sia dei costi di manodopera che di manutenzione:

$$min(20y_1 + 25y_2 + 25x_A + 25x_B + 35x_C + 30x_D)$$
$$s.t.$$

Ora, passiamo ai vincoli da inserire.

$$x_A + x_B + x_C + x_D \geq 1200$$

(in quanto, "indipendentemente dal tipo, si ha necessità di approntare almeno 1200 tra slitte e scope", quindi considero tutti i tipi di mezzi)

Poi, dato che si considerano:

- gli aiutanti di Babbo Natale che possono essere al massimo 600 (guidano solo slitte) e si considera di introdurre una variabile logica:
$$x_A + x_B \leq 600$$
- gli aiutanti della Befana che possono essere al massimo 900 (guidano solo scope) e:
$$x_C + x_D \leq 900$$

Logicamente, si può intuire guardando le due tabelle, che i pezzi dei kit devono essere di più rispetto a quelli in manutenzione:

$$5y_1 + 7y_2 \geq 2x_A + 4x_B$$
$$30y_1 + 45y_2 \geq 10x_A + 12x_B + 5x_C + 9x_D$$
$$70y_1 + 90y_2 \geq 20x_A + 25x_B + 30x_C + 25x_D$$

Si considera inoltre uno sconto di 500 euro se si acquistano più di 200 confezioni. Questo accade usando una variabile logica che comporta la modifica in funzione obiettivo:
z: variabile logica che vale 1 se decido di acquistare più di 200 confezioni, 0 altrimenti

$$min(20y_1 + 25y_2 + 25x_A + 25x_B + 35x_C + 30x_D) - 500z$$

In ultimo, consideriamo che "esattamente tre tipi di mezzi dovranno circolare", quindi il vincolo logico dipende da una variabile binaria indicizzata ai mezzi, che abbiamo già:

$$z_A + z_B + z_C + z_D = 3$$

Questo è un caso per cui, quando $y_i = 1, x_i > 0$, tale da dover aggiungere i vincoli che seguono:

$$x_A \geq 3 * z_A,\ x_B \geq 3 * z_B,\ x_C \geq 3 * z_C, x_D \geq 3 * z_D$$

Domini: $x_i \in Z_+$, $y_i \in Z_+$, $z \in \{0,1\}$

4. Una ditta di trasporti distribuisce frigoriferi in 4 città A, B, C e D a partire da 3 centri di distribuzione 1, 2 e 3 e vuole valutare la convenienza ad aprire il centro 4. Il costo di trasporto di un frigorifero in euro, le richieste delle città e le disponibilità dei centri di distribuzione (già aperti o potenziali) sono sintetizzati nella seguente tabella:

	Città A	**Città B**	**Città C**	**Città D**	***Disponibilità centri***
Centro 1	4	3	2	3	*1800*
Centro 2	2	4	3	1	*3000*
Centro 3	2	3	4	5	*1800*
Centro 4	3	1	2	2	*1000*
Richieste città	*1000*	*2000*	*1700*	*1300*	

Scrivere il modello di programmazione lineare che permetta di minimizzare i costi di trasporto e di valutare la convenienza ad aprire il nuovo centro 4 considerando che:

- il costo di apertura del nuovo centro è di 1000 euro;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire una domanda di almeno 600 frigoriferi;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire almeno 2 città diverse.

Il problema assomiglia alla categoria dei problemi di trasporto (cfr. pag. 9 dispense prof).
Per cominciare, impostiamo la variabile decisionale:
x_{ij} = apertura nella città $i \in \{A, B, C, D\}$ del centro $j \in \{1,2,3,4\}$
Proviamo a scrivere la funzione obiettivo:

$$min\ (4x_{A1} + 3x_{B1} + 2x_{C1} + 3x_{D1} + 2x_{A2} + 4x_{B2} + 3x_{C2} + 1x_{D2} + 2x_{A3} + 3x_{B3} + 4x_{C3} + 5x_{D3} + 3x_{A4} + 1x_{B4} + 2x_{C4} + 2x_{D4})$$
$$s.t.$$

A questo punto, inseriamo i vincoli sulla disponibilità:
$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + x_{D1} \leq 1800$ (caso centro 1)
$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + x_{D2} \leq 3000$ (caso centro 2)
$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} + x_{D3} \leq 1800$ (caso centro 3)
$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} + x_{D4} \leq 1000$ (caso centro 4)

Poi, inseriamo i vincoli sulle richieste delle città:
$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} \geq 1000$ (caso richieste città A)
$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} \geq 2000$ (caso richieste città B)
$x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} \geq 1700$ (caso richieste città C)
$x_{D1} + x_{D2} + x_{D3} + x_{D4} \geq 1300$ (caso richieste città D)
Si vuole "valutare la convenienza di aprire il centro 4", si considera una variabile binaria, sapendo dai due vincoli relativi al centro 4 che occorre modellarlo sulla base delle città ("servire almeno 2 città diverse"), quindi occorre una variabile a due indici:
y_{ij}: variabile logica che vale 1 se decidiamo di aprire nella città $i \in \{A, B, C, D\}$ il centro $j \in \{1,2,3,4\}$, 0 altrimenti

Introduciamo i vincoli relativi al centro 4:

$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} + x_{D4} \geq 600$ (il centro 4 deve servire almeno una domanda di 600 frigoriferi)
$y_{A4} + y_{B4} + y_{C4} + y_{D4} \geq 2$ (il centro 4 deve servire almeno 2 città diverse)

Ora, occorre attivare le variabili, quindi legare x_{ij} ad y_{ij}.
Questo è reso fattibile dai vincoli di big-M:

$$x_{A1} \leq y_{A1}, x_{A2} \leq y_{A2}, x_{A3} \leq y_{A3}, x_{A4} \leq y_{A4}, x_{B1} \leq y_{B1}, x_{B2} \leq y_{B2}, x_{B3} \leq y_{B3}, x_{B4} \leq y_{B4},$$
$$x_{C1} \leq y_{C1}, x_{C2} \leq y_{C2}, x_{C3} \leq y_{C3}, x_{C4} \leq y_{C4}, x_{D1} \leq y_{D1}, x_{D2} \leq y_{D2}, x_{D3} \leq y_{D3}, x_{D4} \leq y_{D4}$$

Ora, consideriamo il fatto di pagare 1000 euro se effettivamente andiamo ad aprire un nuovo centro 4; attenzione che non è specifico a *tutti* i centri, ma al centro 4 in particolare.
Introduciamo quindi una variabile logica:
k: variabile logica che vale 1 se decido di aprire un nuovo centro 4, 0 altrimenti

Vincolo di attivazione logica che considera il fatto di andare ad aprire *tutti* i centri, in quanto se lo mettessi ad 1 come sotto, significherebbe che devo aprire *in tutte* le città:

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} + x_{D4} \leq k$$

Quindi, avremo che si deve creare un vincolo di attivazione *spurio*

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} + x_{D4} \leq k(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} + x_{D4}) + k$$

La modifica finale è come segue:

$min\ (4x_{A1} + 3x_{B1} + 2x_{C1} + 3x_{D1} + 2x_{A2} + 4x_{B2} + 3x_{C2} + 1x_{D2} + 2x_{A3} + 3x_{B3} + 4x_{C3} + 5x_{D3} + 3x_{A4} + 1x_{B4} + 2x_{C4} + 2x_{D4}) + 1000k$

Domini: $x_{ij} \in Z_+, y_{ij} \in Z_+, y_i \in \{0,1\}, \forall i \in \{A,B,C,D\}, \forall j \in \{1,2,3,4\}$

Fatto dal prof in classe

5. Un risparmiatore ha a disposizione, all'inizio di aprile, un budget di 100.000 euro e vorrebbe disporre, all'inizio di agosto, di almeno 150.000 euro attraverso un mix di investimenti. Tutti gli investimenti sono a disposizione all'inizio di ciascuno dei prossimi mesi (da aprile a luglio) e le loro caratteristiche sono riassunte nella seguente tabella, in termini di durata (in mesi), rendimento percentuale e livello di rischio:

Investimento	**durata (mesi)**	**rendimento**	**rischio**
A	1	10%	2
B	2	19%	3
C	3	33%	5
D	1	15%	4

Scrivere il modello di programmazione lineare che aiuti il risparmiatore ad arrivare alla cifra desiderata minimizzando il livello di rischio e tenendo conto che:

- il capitale rientrato alla fine di un investimento è immediatamente a disposizione per altri investimenti;
- a inizio maggio, non è possibile investire nello stesso periodo sia in B che in C;
- per poter usufruire dell'investimento A a inizio aprile è necessario investire, nello stesso periodo, almeno 10.000 euro in B e 30.000 euro in D;
- è possibile investire solo multipli interi di 1.000 euro.

x_{ij}: € investiti in $i \in \{A,B,C,D\}$ all'inizio del mese $j \in \{1,2,3,4\}$

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + x_{D1} \leq 100000 \text{ //(aprile)}$$

SI considera che ritornano tutti gli investimenti e i capitali che ho investito:

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + x_{D2} \leq 100000 + 0.1x_{A1} - x_{B1} - x_{C1} + 0.15x_D \text{ //(maggio)}$$

$//x_{C3} = 0$ in soluzioni ottime, perché tanto tornerebbe dopo 3 mesi

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} + x_{D3} \leq 100000 + 0.1x_{A2} + 0.19x_{B1} + 0.15x_{D1} + 0.1x_{A2} + 0.15x_{D2} - x_{C1} - x_{B2} - x_{C2} \text{ //(giugno)}$$

$$x_{A4} + x_{D4} \leq 100000 + 0.1x_{A1} + 0.19x_{B1} + 0.33x_{C1} + 0.15x_{D1} + 0.1x_{A2} + 0.19x_{B2} + 0.15x_{D2} + 0.1x_{A3} + 0.15x_{D3} - x_{C2} - x_{B3} \text{ //(luglio)}$$

$$0.1(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 0.19(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3}) + 0.33(x_{C1} + x_{C2}) + 0.15(x_{D1} + x_{D2} + x_{D3} + x_{D4}) \geq 150000 \text{ //(agosto)}$$

Per la f.o., si deve minimizzare il livello di rischio:

$$\min 2(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 3(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3}) + 5(x_{C1} + x_{C2}) + 4(x_{D1} + x_{D2} + x_{D3} + x_{D4})$$

- "a inizio maggio, non è possibile investire nello stesso periodo sia in B che in C"

Logicamente, si esprime come un OR logico

$$y_{B2}, y_{C2} \in \{0,1\}, \text{ con } y_{ij} = 1 \text{ se } x_{ij} = 0, 0 \ altrimenti$$
$$y_{B2} + y_{C2} \leq 1$$

Occorre poi attivare le variabili:

$$x_{B2} \leq M y_{B2}, x_{C2} \leq M y_{C2}$$

Per M costante sufficientemente grande

- "per poter usufruire dell'investimento A ad inizio aprile è necessario investire, nello stesso periodo, almeno 10000 euro in B e 30000 euro in D"

$//z_B = 1$ se almeno 10000 in B, 0 altrimenti
$//z_D = 1$ se almeno 30000 in D, 0 altrimenti

Quando A vale qualcosa, almeno una delle due tra B e D vale 0:

$$x_{A1} \leq M z_B, x_{A1} \leq M z_D$$

Poi:

$$x_{B1} \geq 10000 z_B, x_{D1} \geq 30000 z_D$$

- "è possibile investire solo multipli interi di 1000 euro"

Questo ha a che fare con i domini:
$x_{ij} \in R_+$,
Ho due modi per scriverlo:
$x_{ij} \in Z_+$, (modificando tutti i vincoli esprimendo tutto in migliaia di euro, es. 150000 come 150)
$w_{ij} \in Z_+, x_{ij} = 1000 w_{ij}$ (vincolo più generale, per esprimere tutto in funzione delle migliaia di euro)

<u>Fatto dal prof in classe</u>

6. Per l'assortimento di scatole di cioccolatini, sono disponibili praline di forme (cuore, fiore, stella o chicco) e gusti (latte, fondente o caffè) diversi. Le praline sono acquistate dalla sede centrale in confezioni, ciascuna contenente praline della stessa forma e dello stesso gusto. Il numero di praline per confezione dipende dalla forma: 70 cuori, 50 fiori, 100 stelle o 200 chicchi. Il costo per confezione dipende dal gusto: 30 euro per il latte, 50 euro per il fondente e 40 euro per il caffè. Le disponibilità di confezioni per le diverse forme e i diversi gusti sono riassunti nella tabella sotto. Il confezionamento avviene in tre diversi stabilimenti. Ogni stabilimento produce lo stesso numero di scatole dello stesso peso, ma con una composizione diversa: ciascuno stabilimento richiede 900 kg di cioccolato in tutto, e una quantità minima diversa di cioccolato dei diversi gusti, come dalla tabella.

Gusto	Disponibilità				Richiesta minima (kg)		
	Cuore	Fiore	Stella	Chicco	Stab. 1	Stab. 2	Stab. 3
Latte	Sì	Sì	No	No	500	100	100
Fondente	Sì	No	Sì	No	100	500	100
Caffè	No	Sì	Sì	Sì	100	100	500

Ciascuna pralina a forma di cuore, fiore, stella e chicco pesa, rispettivamente, 30, 50, 20 e 10 grammi. Si scriva un modello di programmazione lineare che minimizzi i costi tenendo conto che:
- si vogliono acquistare almeno 10 confezioni di cuori di cioccolato fondente;
- prima della spedizione negli stabilimenti, le praline acquistate sono pretrattate su linee diverse a seconda della forma, indipendentemente dal gusto, e ogni linea ha un costo fisso di setup pari a 200 euro;
- si vogliono acquistare praline di almeno 3 forme, indipendentemente dal gusto;
- si può evitare di rifornire uno stabilimento a scelta, pagando 15 000 euro a un fornitore esterno.

x_{ij}: # confezioni del gusto $i \in \{L, F, C\}, j \in \{1,2,3,4\}$

$x_{F1} \geq 10$ //almeno 10 confezioni di cuori di cioccolato fondente

$$\min 30(x_{L1} + x_{L2}) + 50(x_{F1} + x_{F3}) + 40(x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$$

Queste confezioni devono soddisfare una richiesta minima;
di kg che arriva allo stabilimento $1 \geq 900$

Con le variabili decisionali che ho, non ho la possibilità di modellare il problema correttamente.
y_{ij}^{k}: # di confezioni di gusto $i \in \{L, F, C\}$ per la forma $j \in \{1,2,3,4\}$ per lo stabilimento $k \in \{1,2,3\}$
Devo legare le variabili:
$x_{L1} = y_{L1}^{1} + y_{L2}^{2} + y_{L3}^{3}$

Questo sarebbe evitabile; non mi interessa lo stabilimento, ma semplicemente acquistare le richieste minime.

$70x_{L1} * 0.03 + 70x_{F1} * 0.03 + 0.05 * 50(x_{L2} + x_{C2}) + 0.02 * 100(x_{F3} + x_{C3}) + 0.01 * 200(x_{C4}) \geq 3 * 900$ (moltiplico la forma per il peso)

(cioccol. Latte >= 500); non serve per forza avere una variabile a 3 indici

$$70x_{L1} * 0.03 + 0.05 * 50x_{L2} \geq 500 + 100 + 100$$
$$0.03 * 70x_{F1} + 0.02 * 100x_{F3} \geq 100 + 500 + 100$$
$$0.05 * 50x_{L2} + 0.02 * 100x_{C3} + 0.01 * 200x_{C4} \geq 100 + 100 + 500$$

w_j: variabile logica che vale 1 se acquisto la forma $j \in \{1,2,3,4\}$, 0 altrimenti

Questo comporta una modifica della f.o., dato che aggiungeremo:
$$200(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$$

Per attivare le variabili abbiamo bisogno di un vincolo di big-M (sapendo che vale per il cioccolato e, quando questo vale 0, pretrattiamo rispetto alla singola forma; questo giustifica la somma:
$$x_{L1} + x_{F1} \leq Mw_1$$
$$x_{L2} + x_{F2} \leq Mw_2$$
$$x_{F3} + x_{L3} \leq Mw_3$$
$$x_{L4} \leq Mw_4$$

"prima della spedizione negli stabilimenti, le praline acquistate sono pretrattate su linee diverse a seconda della forma, indipendentemente dal gusto"
$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 3$$

Se non rifornisco uno stabilimento, non sono costretto a dover rispettare le quantità di richiesta minima. Dal punto di vista specifico, ogni stabilimento <u>non</u> ha le stesse richieste; quindi, dovremmo associare più variabili binarie per ognuno.
Per esempio, introduciamo:
$z = 0$ se produco in stabilimento, 1 se non produco in stabilimento

In questo modo, andiamo ad introdurre in funzione obiettivo $-900z$ dato che non rispettiamo genericamente la richiesta minima; tuttavia, occorre indicizzarla.

$z = 1$ se non produco in stabilimento $i \in \{1,2,3\}$, 0 altrimenti
Vincolo di attivazione se scegliessi un certo stabilimento, legando le singole variabili
$$z_1 - z_2 - z_3 = 3 - z$$

Occorre aggiungere il non rispetto delle richieste minime prima:
$$70x_{L1} * 0.03 + 0.05 * 50x_{L2} \geq 500z_1 + 100z_2 + 100z_3$$
$$0.03 * 70x_{F1} + 0.02 * 100x_{F3} \geq 100z_1 + 500z_2 + 100z_3$$

$$0.05 * 50x_{L2} + 0.02 * 100x_{C3} + 0.01 * 200x_{C4} \geq 100z_1 + 100z_2 + 500z_3$$

La f.o. è correttamente:

$$\min 30(x_{L1} + x_{L2}) + 50(x_{F1} + x_{F3}) + 40(x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) + 200(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 15000z$$

Aggiungiamo i domini:

$$x_{ij} \in Z_+, z \in \{0,1\}, z_i \in \{0,1\}, w_i \in \{0,1\}$$