STRUTT. DAB. BF.
ITER./NODI/AGGIORNATO

STRUTTURA DAB. DIJKSTRA → ITER./NODI/ $\bar{S}$ / ∇
IT. 0 → O(n) + O(n) ..... → A, B, C, D, E, F ∇ → //
IT. 1 → (SU A) ..... ∇ → A
(PERCORSI PARTONO DAL NODO SCELTO PRIMA)

PROGR. LINEARE

SBAGLIATO formulazioni *NON LINEARI!!!*			Corretto Vincoli	Domini
if $x_1 > 0$ then $x_2 = 0$ and if $x_2 > 0$ then $x_1 = 0$	$nand(y_1, y_2)$	$x_1 x_2 = 0$ $y_1 y_2 = 0$	$x_1 \le M y_1$ $x_2 \le M y_2$ $y_1 + y_2 \le 1$	$x_1, x_2 \ge 0$ $y_1, y_2 \in \{0,1\}$ $(M \to \infty)$
if $x > 0$ then $y = 1$	$(x > 0) \to (y = 1)$	$x(1-y) = 0$	$x \le My$	$x \ge 0, y \in \{0,$
$y_1 = 1$ or $y_2 = 1$	$y_1 \vee y_2$	$(1-y_1)(1-y_2) = 0$	$y_1 + y_2 \ge 1$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ and $y_2 = 1$	$y_1 \wedge y_2$	$y_1 y_2 = 1$	$y_1 + y_2 = 2$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 1$	$y_1 \to y_2$	$y_1(1-y_2) = 0$	$y_1 \le y_2$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 0$	$y_1 \to \bar{y}_2$	$y_1 y_2 = 0$	$y_1 \le (1-y_2)$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ xor $y_2 = 1$	$y_1 \ne y_2$		$y_1 + y_2 = 1$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
etc. etc. etc.			etc. etc. etc.	

Queste formulazioni sono semanticamente corrette ma

NON ACCETTABILI

in un modello di programmazione lineare

Queste formulazioni sono corrette a patto di
- SPECIFICARE I DOMINI
- ATTIVARE le var. logiche

Modelli di copertura di costo minimo

$$\min \sum_{i \in I} C_i x_i$$
$$s.t. \quad \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \ge D_j \quad \forall j \in J$$
$$x_i \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \quad \forall i \in I$$

Modelli di trasporto

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_{ij} x_{ij}$$
$$s.t. \quad \sum_{j \in J} x_{ij} \le O_i \quad \forall i \in I$$
$$\sum_{i \in I} x_{ij} \ge D_j \quad \forall j \in J$$
$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J$$

Modelli di mix ottimo di produzione

$$\max \sum_{i \in I} P_i x_i$$
$$s.t. \quad \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \le Q_j \quad \forall j \in J$$
$$x_i \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \quad \forall i \in I$$

Passi:
Decisioni
F.o.
Disuguaglianze
Domini

Casi notevoli:
Costi Fissi → Termine apposito con var. decisionale
Almeno/Al massimo → Logico: "insieme di variabili logiche >=/<= numero" e legare le variabili con vincolo di big-M nel modo $x_i \ge / \le M * y_i$
Esattamente → Logico: "insieme di variabili logiche = numero" e legare le variabili con vincolo di big-M nel modo $x_i \le numero * y_i$
Penalità/Sconto → Scelgo di pagarla, pertanto sarà una variabile binaria legata a variabili logiche già presenti e poi aggiunte in funzione obiettivo
Budget → var. decisionali <= budget   **Capacità → 1Variabili decisionali <= cap. minima oppure >= cap. massima**

CONDIZIONI ECPD → ENUNCIATO

Dato $\min c^T x$ s.t. $Ax \ge b$, $x \in \mathbb{R}_+^n$ e il duale $\max u^T b$ s.t. $u^T A \le c$, $u \in \mathbb{R}_+^m$ e due vettori $\bar{x}, \bar{u} \in \mathbb{R}_+^m$, $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono ottime risp. per primale e duale sse: $\bar{x}$ è amm. primale, $\bar{u}$ amm. duale, $\bar{u}_i(a_i^T \bar{x} - b_i) = 0, \forall i = 1 \ldots m$, $(c_j - \bar{u}^T A_j)\bar{x}_j = 0$, $\forall j = 1 \ldots n$, con a_i^T riga i-esima e A_j colonna j-esima di A

SIMPLESSO

→ FORMA STANDARD → METTERE DOMINIO TUTTE VARIABILI E SLACK (SI PUÒ FARE IN UN PASSAGGIO SOLO)

1. F.O DI MINIMO (~~[illegible]~~)
2. VINCOLI DI UGUAGLIANZA (AGGIUNTA VAR. DI SLACK) → SE ≤ SLACK POSITIVO, SE ≥ SLACK NEGATIVO
3. VAR. NON NEGATIVE → ($x_2 = -x_2'$, $x_2 \le 0$) E CAMBIO TUTTE LE OCCORRENZE
4. TERMINI NOTI NON NEGATIVI → CAMBIO SEGNO A TUTTA LA DIS.

$z_2 = 10$
$-(-10) \ge 10$

$z_{max} = -z_{min}$
$x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_i \ge 0$ LASCO
$x_i \le 0$ SURPLUS

PASSAGGI → F.C / AMMISSIBILE / ILLIMITATA / ENTRA / ESCE / BLAND

LASCO E SURPLUS SONO COSTITUITE = SLACK

DOMANDE TEORICHE SIMPLESSO

- SOL. DI BASE CORRENTE E DIRE SE È OTTIMA → DIRE x, DIRE z, NON È OTTIMA SE (COND. SUFF. MA NON NEC.)
- PIVOT → VAR. CHE ENTRA E CHE ESCE → SE BLAND → REGOLE GIUSTE; SE NO BLAND → TUTTE

riga t e colonna h, con $h = \min\{j, \bar{c}_j < 0\}$ e $t = \arg\min\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0\}$ e quoz. minimo θ

con $t = \min\{B_i : \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} \ge 0\}$

- VALORE F.O SENZA CALCOLI → $(\bar{c}_i \cdot \theta)$ → (COEFF. COSTO RIDOTTO × QUOZ. MINIMO)
→ $-z + (\bar{c}_i \cdot \theta)$ → COEFF. F.O. −

- NO PIVOT → NO RISPETTO QUOZ. MINIMO

- PL ILLIMITATO ⟺ DL INAMMISSIBILE (COROLL. DUALITÀ DEBOLE)
- PL OTTIMO ⟺ DL OTTIMO E STESSA SOLUZIONE (DUALITÀ FORTE)
- SOLUZ. SICUR. DEGENERE ⟺ PIÙ RIGHE CON RAPP. MINIMO E TUTTE LE VAR. ASSEGNATE ASSUMONO VAL. ∅ NELLA NUOVA BASE, UNA ESCE E L'ALTRA ENTRA CON VALORE ∅

COND. DI ILLIMITATEZZA: ESISTE UNA QUALSIASI V. VAR. FUORI BASE x_h: $(\bar{c}_h < 0) \wedge (\bar{a}_{ih} \le 0, \forall i = 1 \ldots m)$

DUALITÀ:

1. VERIFICA AMM. PRIMALE
2. PASSAGGIO AL PROBL. DUALE

→ DA MIN A MAX
VINCOLI → OPPOSTO SEGNO VAR. DOMINIO PRIMALE
DOMINIO → STESSO SEGNO UG./DIS. VAR. PRIMALI

→ DA ~~MAX~~ A MIN
VINCOLI → STESSO SEGNO VAR. DOMINIO PRIMALE
DOMINIO → OPPOSTO SEGNO UG./DIS. VAR. PRIMALI

VERIFICA CON DUALITÀ FORTE PER F.O

CONDIZIONI CCPD

$\min\{c^T x : x \ge 0, Ax \ge b\}$
$\max\{u^T b : u \ge 0, u^T A \le c^T\}$

x e u ottime primale e duale ⟷ $Ax \ge b \wedge x \ge 0$ → AMM. PRIMALE
$u^T A \le c^T \wedge u \ge 0$ → AMM. DUALE
$u^T(Ax - b) = 0$, $(c^T - u^T A)x = 0$ → ORTOG.

⟷ $\bar{u}$ amm. duale, $\bar{x}$ amm. primale, $\bar{u}_i(a_i^T \bar{x} - b_i) = 0$ $\forall i = 1, \ldots m$, $(c_j - \bar{u}^T A_j)x_j = 0, \forall j = 1 \ldots n$

3. CCPD → $x_1(u \ldots) = 0$ → se $= 0$ → NON POSSO ASSUMERE CONDIZIONI; se > 0 → CONSIDERO COME CONSIGLIO
$u_1(\ldots) = 0$
~~se uguaglianza~~ → VINC. PRIMALE → NON CONSIDERO, DERIVA DA AMM. PRIMALE

4. SISTEMA DI EQUAZIONI TRAMITE EQUAZIONE CCPD 3 E PRIMALE
VINC. DUALE → CONSIDERO, DERIVA DA AMM. DUALE

5. VERIFICA AMM. DUALE

6. CONCLUSIONI → x amm. primale (dove da verifica) e u amm. duale (verifica sopra) x e u in sc. complementari le due e per ottime per i pr. primale e duale

GRAFI

OPPORTUNO CONTROLLARE → SI, L'ALG. DI BF PERMETTE DI OTTENERE UN CAMMINO DI COSTO NEGATIVO ... ITERAZIONE "N" I CAMMINI VERSO OGNI NODO ... CON AL PIÙ "N" ARCHI

CICLO NEGATIVO ⇔ NO OTTICH. STABILE E TROVO UN NODO PRECEDENTE ARCHI CORRISPONDENTI AI PREDECESSORI LETTI NELL'ULTIMA RIGA DELLA TABELLA

BF → MAX NODI / COSTI ARCHI NEGATIVI

DIJKSTRA → COSTI ARCHI TUTTI POSITIVI (PIÙ EFFICIENTE

ALBERO → A RITROSO DALL'ULTIMO NODO AGGIORNATO, CAT. PREDECESSORI → (UN SOLO PREDEC. MINIMO)

GRAFO → SCELGO ETICH. OTTIME E PRENDO TUTTI GLI ARCHI CON COSTO UGUALE A QUELLO DELL'ARCO (TUTTI I PERCORSI MINIMI) → COMPLETO GLI ARCHI CHE SODDISFANO IL VINC. DUALE $\pi_j \geq \pi_i + c_{ij}$ CON UGUAGLIANZA

SPIEGAZIONE BF → LA TABELLA RIPORTA A RIGA 0 INIZ. E OGNI RIGA PER I TERATIVE. ALL'IT. "h" SI CONTROLLANO GLI ARCHI (i, j) USCENTI DA CIASCUN NODO NELLA COLONNA AGGIORNATI ALLA RIGA "h-1" E SI AGGIORNANO I COSTI E I PREDECESSORI DEL NODO "j" ALL'IT. "h" QUALORA L'ETICHETTA DEL NODO "i" ALL'ITERAZIONE "h-1" PIÙ IL COSTO DELL'ARCO (i, j) SIA STRETT. MINORE DELL'ETICH. CORRENTE DEL NODO "j". CONTROLLIAMO I VINCOLI DUALI SUGLI ARCHI USCENTI. L'ALG. TERMINA QUANDO LA LISTA "AGGIORNATI" SIA VUOTA (CONV. ETICHETTE A COSTI CAMM. MINIMI). → CICLO NEGATIVO QUANDO L'ITER. "H" È UG. AL NUM. DI NODI QUINDI CI SONO NODI NON FISSATI

PERCORSO BF

CONTROLLO TUTTE LE ETICH. PRESENTI NELLA COLONNA "AGGIORNATI" E VADO A RITROSO

SPIEGAZIONE DIJKSTRA → LA TABELLA RIPORTA A RIGA 0 INIZ. E OGNI RIGA TUTTE LE ITER. AD OGNI ITERAZIONE, SCELGO L'ETICHETTA DI COSTO MINIMO CON * E ASSEGNO IL NODO $\bar{v}$ DA $\bar{S}$ (ETICHETTE ANCORA DA FISSARE). OGNI PASSO VERIFICA LA CONDIZIONE DI BELLMAN (RISPETTO VINCOLI DUALI ARCHI USCENTI DA $\bar{v}$ SPOSTANDO NODI IN $\bar{S}$). L'ALGORITMO TERMINA UNA VOLTA EFFETTUATO IL LABEL SETTING DI TUTTE LE ETICHETTE (TRASFERENDO NODI DA $\bar{S}$ A S) E QUANDO $\bar{S} \neq \emptyset$ (CIOÈ TUTTE LE ET. FISSATE)

LEGENDA:

* – ET. FISSATA

— : CONTROLLATA MA NON AGGIORNATA (DI SOLITO STESSO COSTO)

V : CONTROLLATA MA NON AGGIORNATA (GIÀ FISSATA)

UB MANCANTE [LB, ??] → MASSIMO → UB ∈ [UB MAX NODI FIGLI e UB NODO PADRE]

LB MANCANTE [??, UB] → MINIMO → LB ∈ [LB NODO PADRE e LB MIN. TRA I NODI FIGLI]

BRANCH AND BOUND

MINIMO → [LB, S.A] → LB MINIMO TRA I NODI APERTI / UB MINIMO TRA TUTTI I PROSS. NODI (INCUMBENT)

MASSIMO → [~~SA~~ ~~UB~~] → LB MASSIMO TRA TUTTI I NODI / UB MASSIMO TRA I SOLI NODI APERTI (INCUMBENT)

① MINIMO → LB AUMENTANO (O NON DECRESCONO DI PADRE IN FIGLIO)

MASSIMO → UB DECRESCONO (O NON DIMINUISCONO DI PADRE IN FIGLIO)

② NODI DA CHIUDERE

MINIMO → I NODI CON LB ≥ S.A.

MASSIMO → I NODI CON UB ≤ S.A

③ INTERVALLO OTTIMO → VALGONO LE CONS. DI CUI SOPRA → VAL. OTTIMO → TUTTI NODI APERTI

VAL AMMISS. → TUTTI I NODI

④ NODO BBF → MINIMO → LB MINIMO TRA I NODI APERTI

MASSIMO → UB MASSIMO TRA I NODI APERTI

⑤ SVILUPPO DI CUI AL P. PRECEDENTE E CHIUS. DI TUTTI I NODI POSSIBILI VALORI PER LB/UB → SI USI QUANTO SOPRA → FIGLIO DI BBF

– SE MIN → LB ≥ AL PADRE // NUOVA S.A PER UB (MINIMO TRA I NODI RIMASTI

– SE MAX → UB ≤ AL PADRE / NUOVA S.A PER LB (MAX TRA I NODI RIMASTI)

AMPL

VALORE → MASSIMO → [LB S.A · UB ≤ PADRE]

MINIMO → [LB ≥ PADRE · S.A]

MOD

→ I, J

param → F{I}, C{I, J}, N, M, (S)

param C(M): (i) (j) := / param C: (j) :=

(i)

DAT → set I := .... / set J := ......

param N := 4;

obiett. $\min \sum_{i \in I, j \in J} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in I} F_i Y_i$ → minimize fo: sum{i in I, j in J}: C[i, J] * x[i, J] - sum{i in I} F[i] * y[i];

s.t. $\sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j, \forall j \in J$ → s.t. d{j in J}: sum{i in I} x[i, j] >= D[J];

RUN → reset; model file.mod; data file.dat; option solver cplex; solve; display fo, x;