Programmazione Lineare e Metodo del Simplesso

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Modelli di programmazione matematica

$$
\begin{aligned}
\min(\max) \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & g_i(x) = b_i \quad (i = 1 \dots k) \\
& g_i(x) \leq b_i \quad (i = k+1 \dots k') \\
& g_i(x) \geq b_i \quad (i = k'+1 \dots m) \\
& \underline{x \in \mathbb{R}^n}
\end{aligned}
$$

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ è un vettore (colonna) di n variabili **reali**;
- f e g_i sono funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $b_i \in \mathbb{R}$

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

f e g_i sono funzioni **lineari** di x

$$
\begin{array}{lllll}
\min(\max) & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i = 1 \ldots k) \\
& a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \leq b_i & (i = k+1 \ldots k') \\
& a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & \geq b_i & (i = k'+1 \ldots m) \\
& x_i \in \mathbb{R} & & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

In questa fase **consideriamo soltanto variabili reali**!!!
Quanto diremo non vale in caso di variabili intere o binarie

Soluzione di un problema PL

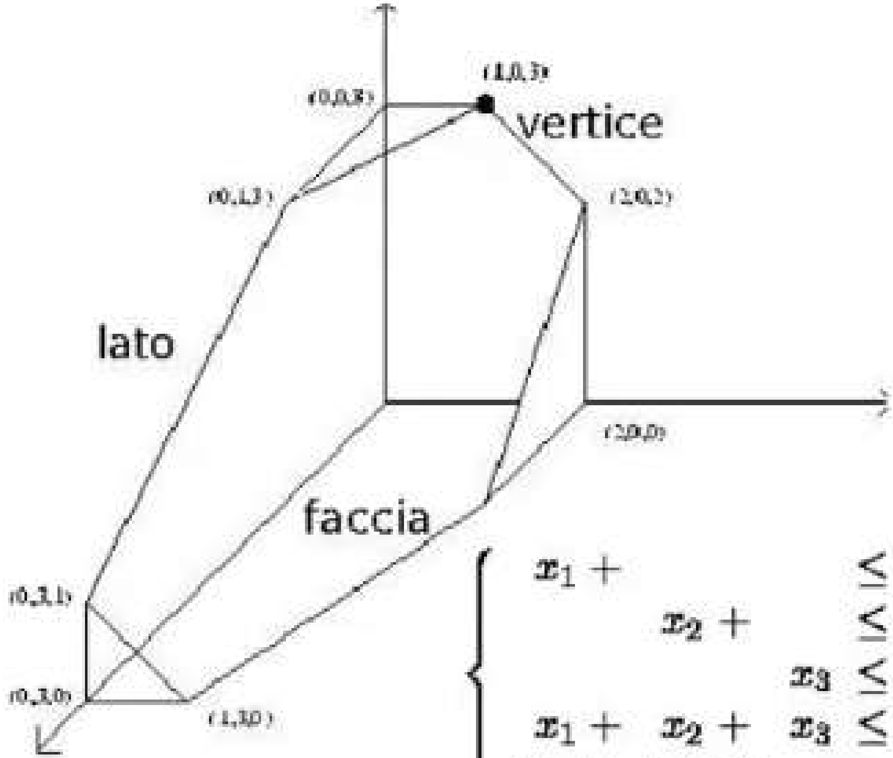
- *Soluzione ammissibile*: $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa tutti i vincoli
- *Regione ammissibile*: insieme delle x ammissibili
- *Soluzione ottima* x^* [min]: $c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in \mathbb{R}^n, x$ ammissibile.

Risolvere un problema PL significa determinare se:

- è inammissibile
- è illimitato
- ammette soluzione ottima

Geometria della PL

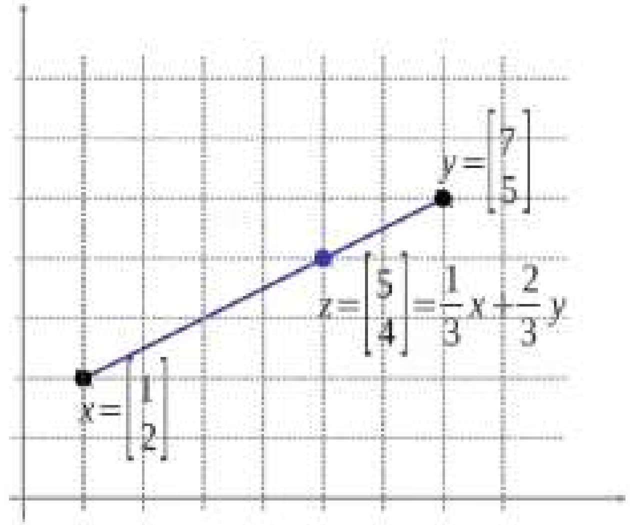
La regione ammissibile è un **poliedro** (intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani in $\mathbb{R}^n$)



$$
\begin{cases}
x_1 + & & & \leq & 2 \\
& x_2 + & & \leq & 3 \\
& & x_3 & \leq & 3 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 4 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & &
\end{cases}
$$

Problema di PL: $\min(\max)\{c^T x : x \in P\}$, P è un poliedro in $\mathbb{R}^n$.

Vertici di un poliedro: definizione

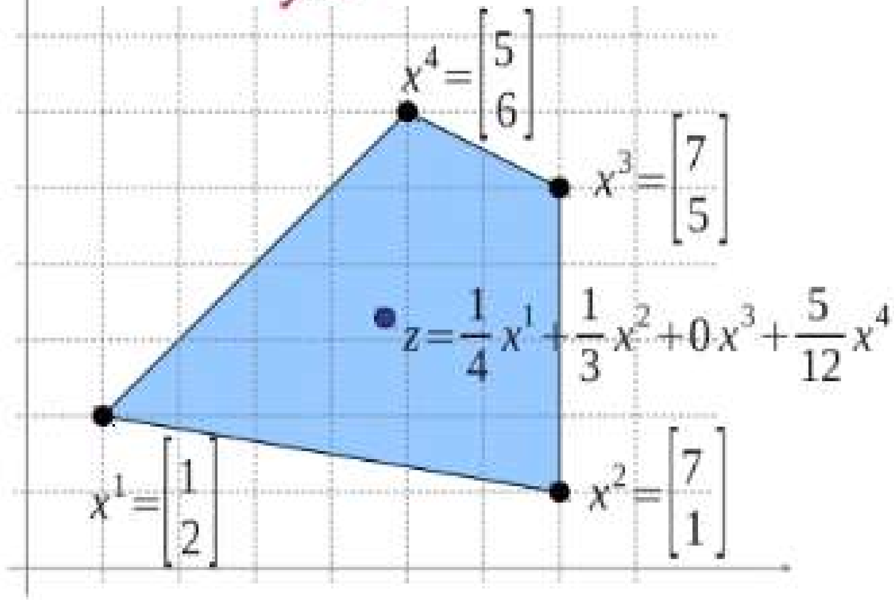


- $z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa** di due punti x e y se $\exists\, \lambda \in [0,1] : z = \lambda x + (1-\lambda)y$

- $z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa stretta di due punti** x e y se $\exists\, \lambda \in (0,1) : z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

- $v \in P$ è **vertice del poliedro** P se **non** può essere espresso come **combinazione convessa stretta** di due punti distinti dello stesso poliedro: $\nexists\, x, y \in P, \lambda \in (0,1) : x \neq y, v = \lambda x + (1-\lambda)y$

Rappresentazione dei poliedri



$z \in \mathbb{R}^n$ è **combinazione convessa** di $x^1, x^2 \ldots x^k$ se $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k \geq 0$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ e $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$

Teorema di rappresentazione dei poliedri [Minkowski-Weyl] - caso limitato

Poliedro *limitato* $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $v^1, v^2, \ldots, v^k$ ($v^i \in \mathbb{R}^n$) i vertici di P

se $x \in P$ allora $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i$ con $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1..k$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

(x è combinazione convessa dei vertici di P)

Nota: un poliedro è un insieme convesso!

Vertice ottimo: dall'intuizione grafica alla dimostrazione

Teorema: esistenza di un vertice ottimo (versione "min")

Problema PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, P non vuoto e limitato

- PL ammette soluzione ottima
- **esiste almeno un vertice ottimo**

Dimostrazione:

$$V = \{v^1, v^2 \dots v^k\} \qquad v^* = \arg\min_{v \in V} c^T v$$

$$c^T x = c^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v^* = c^T v^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = c^T v^*$$

In sintesi: $\forall x \in P, \; c^T v^* \leq c^T x$ ■

Possiamo limitare la ricerca dell'ottimo ai "soli" vertici!

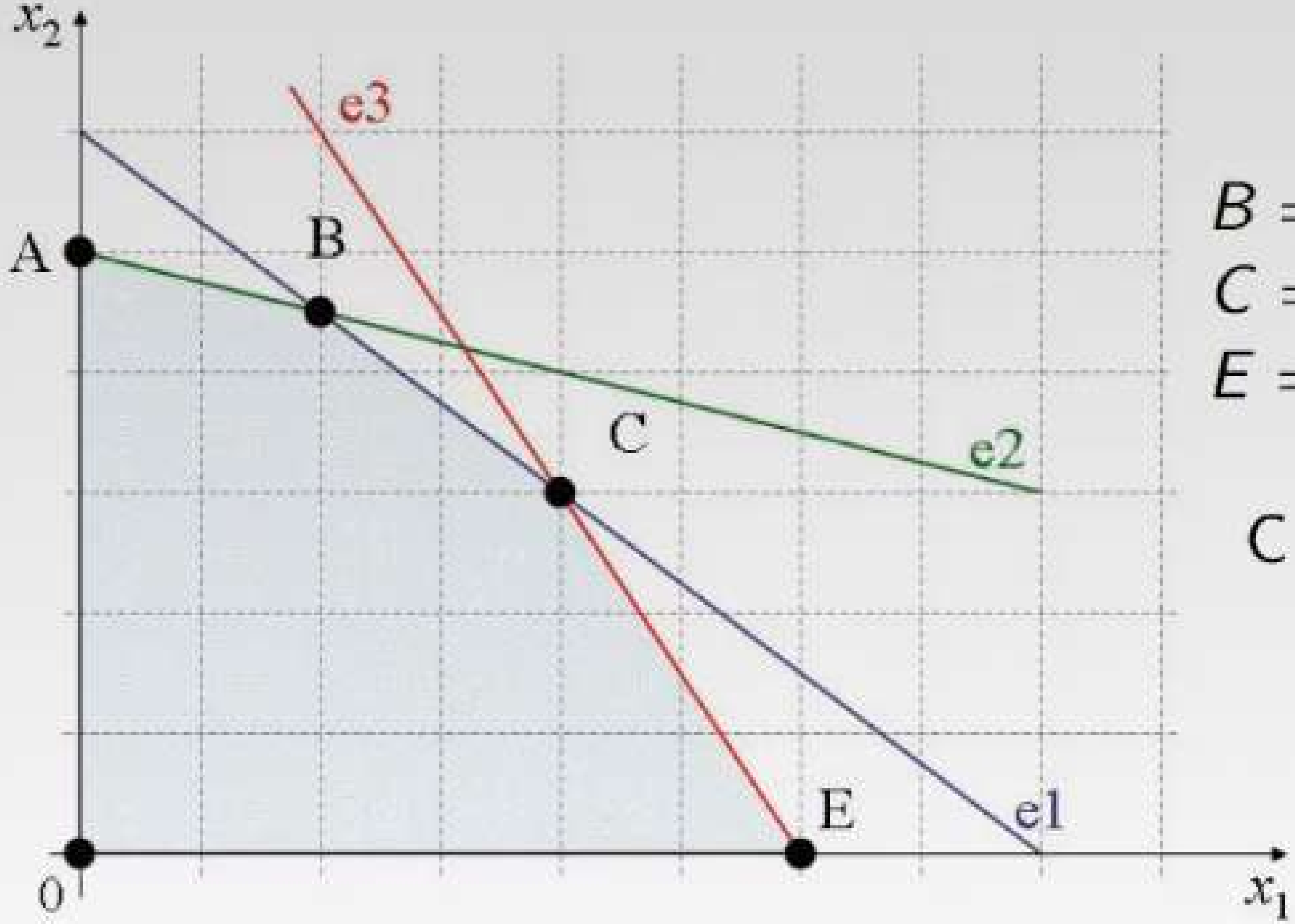
Come generare ed esplorare (tutti) i vertici? Un esempio

Una piccola ditta di profumi realizza due nuove fragranze a partire da 3 essenze: *rosa*, *mughetto* e *viola*. Per realizzare un litro di fragranza 1 sono richiesti 3 centilitri di rosa, 1 centilitro di mughetto e 3 centilitri di viola. Per realizzare un litro di fragranza 2 sono richiesti 4 centilitri di rosa, 4 centilitri di mughetto e 2 centilitri di viola. La disponibilità in magazzino per le tre essenze è di 24, 20 e 18 centilitri per rosa, mughetto e viola rispettivamente. Sapendo che l'azienda realizza un profitto di 13 e 10 euro per ogni litro venduto di fragranza 1 e 2 rispettivamente, determinare le quantità ottimali delle due fragranze da produrre.

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max & 13x_1 & + & 10x_2 & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & (e1) \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & (e2) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & (e3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esempio: vertici come intersezione

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & 13x_1 & + & 10x_2 & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 & (e1) \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & (e2) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & (e3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lcc}
B = e1 \cap e2 & (2, 9/2) & 71 \\
C = e1 \cap e3 & (4, 3) & 82 \\
E = e3 \cap (x_2 = 0) & (6, 0) & 78
\end{array}
$$

...

C ottimo!

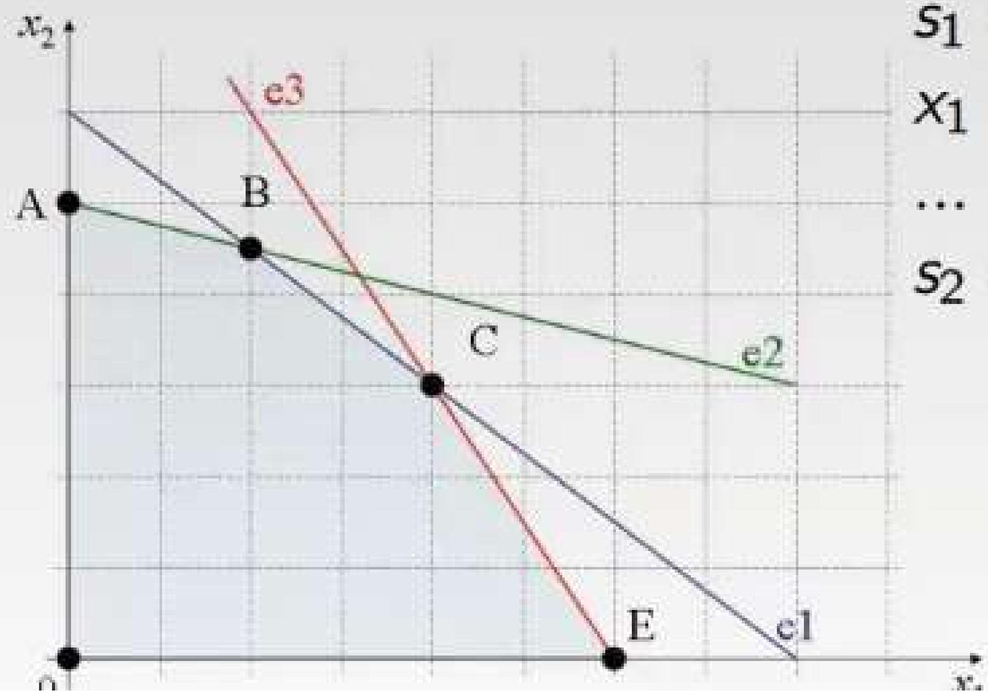
Caratterizzazione algebrica dei vertici

$s_1 = 24 - 3x_1 - 4x_2$
$s_2 = 20 - x_1 - 4x_2$
$s_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2$

Scriviamo il sistema come **equazioni**

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
3x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & = & 24 \\
x_1 & + & 4x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_3 & = & 18
\end{array}
$$

2 gradi di libertà: ponendo a 0 due variabili, sistema quadrato!



$s_1 = s_2 = 0 \quad (2, 9/2, 0, 0, 3) \quad B$

$x_1 = s_2 = 0 \quad (0, 5, 4, 0, 8) \quad A$

...

$s_2 = s_3 = 0 \quad (3.2, 4.2, -2.4, 0, 0)$

non ammissibile!

Forma standard per problemi PL

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad = b_i & (i = 1 \ldots m) \\
& x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

- vincoli sono delle equazioni; $(+/-$ variabili slack/surplus$)$
- variabili ≥ 0; (sostituzione di variabili)
- funzione obiettivo di **minimo** senza cost. addit. e moltipl. $(X\ -1)$;
- $b_i \geq 0$. $(X\ -1)$

Forma standard: esempio

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34 \\
s.t. & -2x_1 + 7x_2 \leq 5 - 6x_3 + 2x_1 \\
 & -3x_1 + x_3 + 12 \geq 13 \\
 & x_1 + x_2 \leq -2 \\
 & x_1 \leq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$\hat{x}_1 = -x_1 \qquad (\hat{x}_1 \geq 0)$$

$$x_3 = x_3' - x_3'' \quad (x_3' \geq 0 \ , \ \ x_3'' \geq 0)$$

$$
\begin{array}{ll}
\min & -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3' - 7x_3'' \\
s.t. & 4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3' - 6x_3'' + s_1 = 5 \\
 & 3\hat{x}_1 + x_3' - x_3'' - s_2 = 1 \\
 & \hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2 \\
 & \hat{x}_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3' \geq 0 \ , \ x_3'' \geq 0 \ , \ s_1 \geq 0 \ , \ s_2 \geq 0 \ , \ s_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Richiami di algebra lineare: definizioni

- vettore colonna $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
- vettore riga $v^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$: $v^T = [v_1, v_2, ..., v_n]$
- matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $v, w \in \mathbb{R}^n$, prodotto scalare $v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^T w = w^T v$
- Rango di $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\rho(A)$, max righe/colonne lin. indip.
- $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *invertibile* $\iff \rho(B) = m \iff det(B) \neq 0$

Sistemi di equazioni lineari

- *Sistemi di equazioni in forma matriciale*: un sistema di m equazioni in n incognite può essere messo in forma matriciale:
  $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.
- *Teorema di Rouché-Capelli*:
  $Ax = b$ ammette soluzioni $\Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A|b) = r$ (∞^{n-r} soluzioni).
- *Operazioni elementari su matrici*:
  - scambiare la riga i con la riga j;
  - moltiplicare la riga i per uno scalare non nullo;
  - sostituire alla riga i, la riga i più α volte la riga j ($\alpha \in \mathbb{R}$).

  Le operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ non alterano l'insieme delle soluzioni ammissibili del sistema $Ax = b$.
- *Metodo di Gauss-Jordan* per la soluzione di sistemi $Ax = b$: eseguire delle operazioni elementari sulla matrice aumentata $[A|b]$ in modo da ottenere in A una sottomatrice identità di dimensioni pari a $\rho(A) = \rho(A|b)$.

Forma standard: esempio

min $3x_1$

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34 \\
s.t. & -2x_1 + 7x_2 \le 5 - 6x_3 + 2x_1 \\
& -3x_1 + x_3 + 12 \ge 13 \\
& x_1 + x_2 \le -2 \\
& x_1 \le 0 \\
& x_2 \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\hat{x}_1 = -x_1 & (\hat{x}_1 \ge 0) \\
x_3 = x_3^{'} - x_3^{''} & (x_3^{'} \ge 0 \ ,\ \ x_3^{''} \ge 0)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\min & -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3^{'} - 7x_3^{''} \\
s.t. & 4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3^{'} - 6x_3^{''} + s_1 = 5 \\
& 3\hat{x}_1 + x_3^{'} - x_3^{''} - s_2 = 1 \\
& \hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2 \\
& \hat{x}_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ x_3^{'} \ge 0\ ,\ x_3^{''} \ge 0\ ,\ s_1 \ge 0\ ,\ s_2 \ge 0\ ,\ s_3 \ge 0.
\end{array}
$$

F. Std

Soluzioni di base: sistemi di equazioni lineari

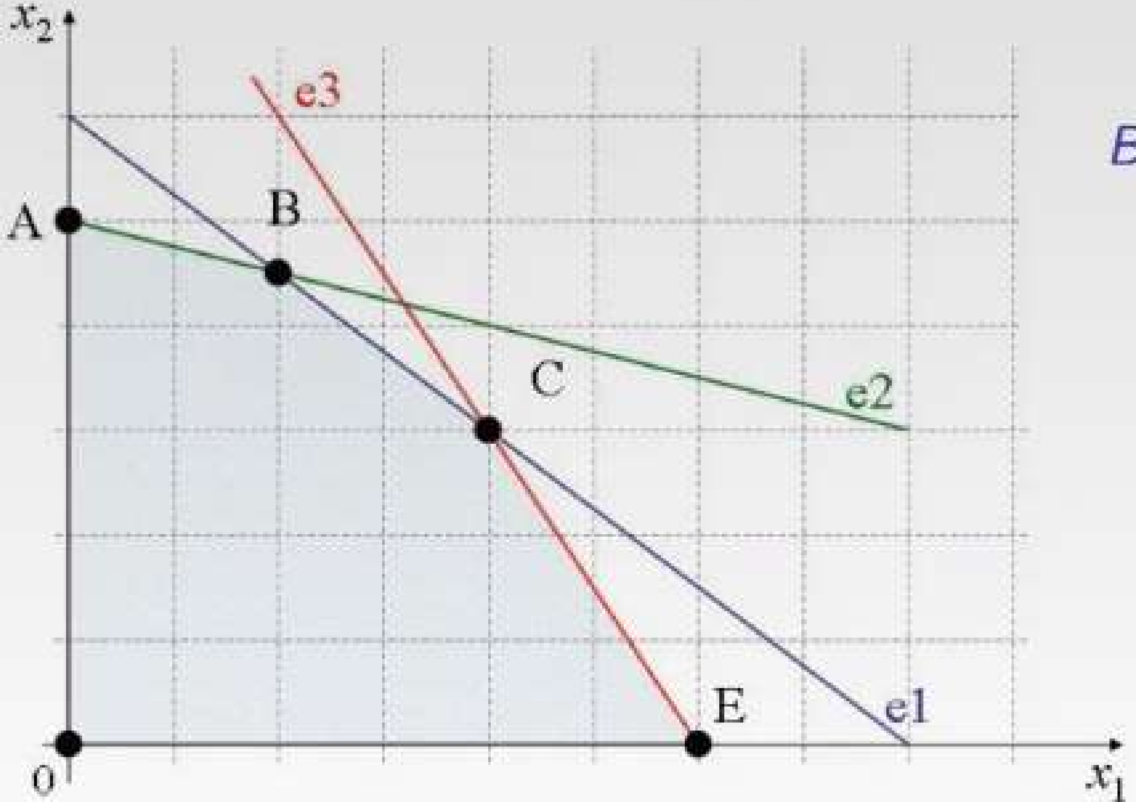
- **Assunzioni**: sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\rho(A) = m$, $m < n$
- **Base di** A: sottomatrice quadrata di rango massimo, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $A = [B|F] \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m}, det(B) \neq 0$
$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}, x_B \in \mathbb{R}^m, x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$$
- $Ax = b \Longrightarrow [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = Bx_B + Fx_F = b$
- $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$
- con $x_F = 0$, una **soluzione di base**: $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$
- altre soluzioni di base scegliendo una **diversa base** di A
- **le variabili a 0 sono** $n - m$ (o più: soluzioni di base *degeneri*)

Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{lll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

- base B, **soluzione di base ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{llllll} 3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = 24 \\ x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = 20 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = 18 \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

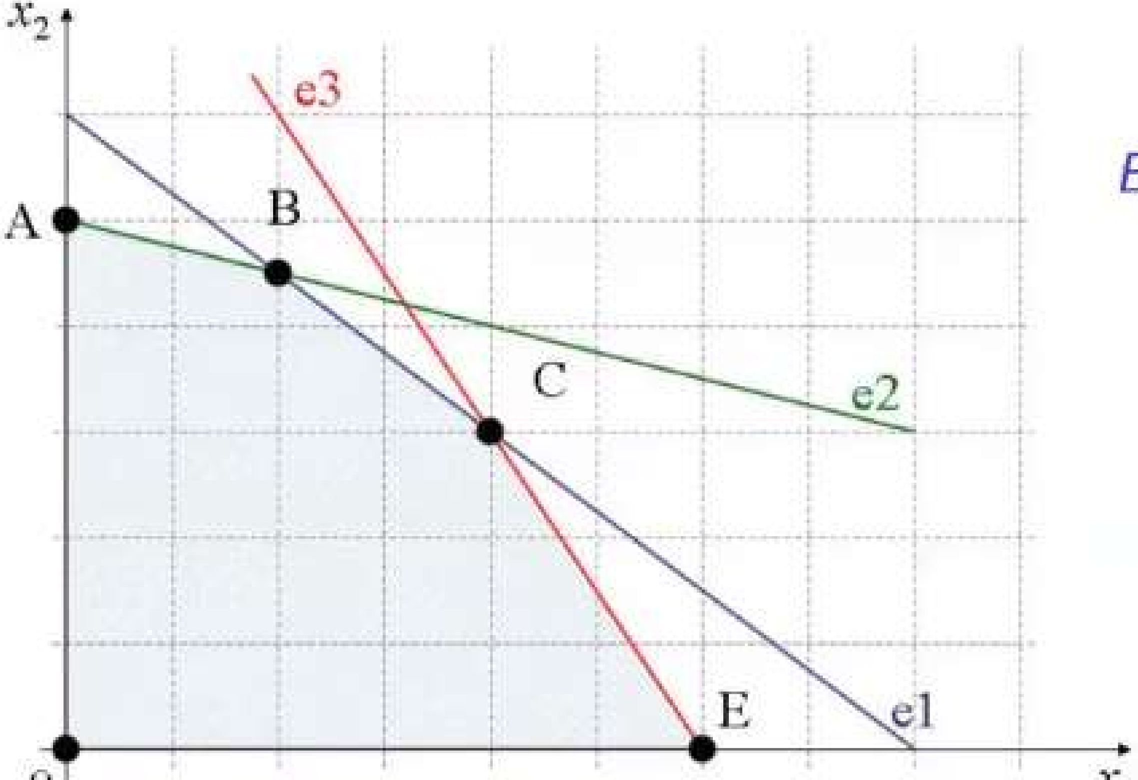
$x^T = (2 \;\; 9/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3)$ $\rightarrow$ **vertice** B

Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{llll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

- base B, **soluzione di base** **ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{lllllll} 3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = & 24 \\ x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = & 20 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = B_2^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^T = (4\ 3\ 0\ 2\ 0)$ $\rightarrow$ **vertice** C

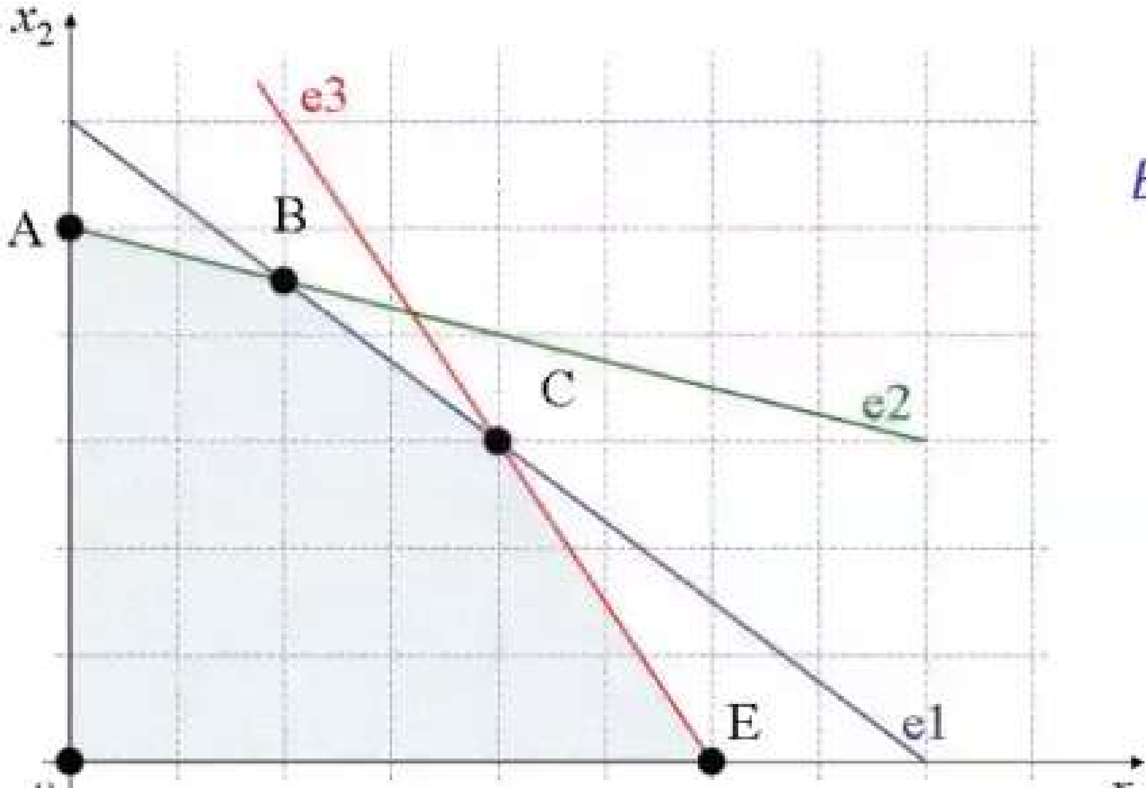
Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{lll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

- base B, **soluzione di base ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{lllllll} 3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = & 24 \\ x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = & 20 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = B_3^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^T = (6\ 0\ 6\ 14\ 0)$ $\rightarrow$ **vertice** E

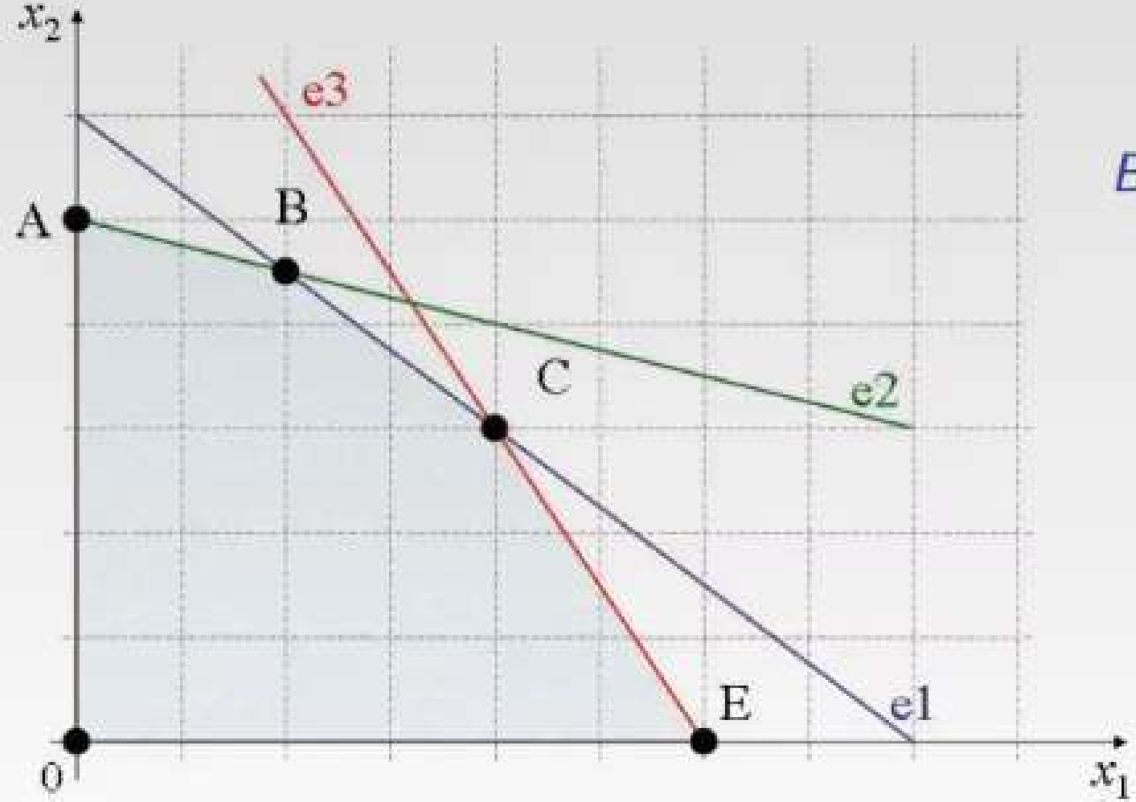
Soluzioni di base e PL in forma standard

$$\begin{array}{lll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (i = 1 \ldots m) \\ & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & c^Tx & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

- base B, **soluzione di base ammissibile**: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\begin{array}{llllll} 3x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & = 24 \\ x_1 & +4x_2 & & +s_2 & & = 20 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = 18 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$



$$B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 18/5 \\ 21/5 \\ -18/5 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^T = (18/5\ 21/5\ -18/5\ 0\ 0) \rightarrow$ **n.a.!**

Vertici e soluzioni di base

Soluzioni di base ammissibili $\rightsquigarrow$ $n - m$ variabili a 0 $\rightsquigarrow$ intersezione di un numero opportuno di iperpiani $\rightsquigarrow$ vertici

PL $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ $\qquad$ $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$

Teorema: **corrispondenza tra vertici e soluzioni ammissibli di base**
(caratterizzazione algebrica dei vertici di un politopo)

x **soluzione ammissibile di base di** $Ax = b$ $\quad\Longleftrightarrow\quad$ x **vertice di** P

Corollario: **soluzione ammissibile di base ottima**

Se P non vuoto e limitato, allora **esiste almeno una soluzione ottima coincidente con una soluzione ammissibile di base**

Algoritmo per PL (caso limitato): schema di principio

Algoritmo esaustivo delle soluzioni ammissibili di base:

1. metti il problema in forma standard $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
2. *incumbent* $= +\infty$
3. **repeat**
4.   genera una combinazione di m colonne di A
5.   sia B la relativa sottomatrice di A
6.   **if** $det(B) \neq 0$ **then** calcola $x_B = B^{-1}b$ **else continue**
7.   **if** $x_B \geq 0$ **and** $c_B^T x_B + c_N^T 0 <$ *incumbent* **then** aggiorna la soluzione
8. **until**(combinazioni di colonne esaurite)

Complessità: fino a $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ possibili soluzioni di base!!!

$\Rightarrow$ **metodo del simplesso**: esplorazione più efficiente delle soluzioni di base (solo soluzioni **ammissibili** e **miglioranti**)

Esempio

Problema dei profumi in **forma standard**:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & z = -13x_1 & - & 10x_2 & & & & & & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & = & 24 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_3 & = & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & \geq & 0
\end{array}$$

una **soluzione ammissibile di base** iniziale (vertice B):

- $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $z_B = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = -71$

Esempio

$x_{B_1} = 7 + \sum_j a_j x_{F_j}$

$x_{B_2} = +8 + \sum_j a_j x_{F_j}$

Nuova base $\Rightarrow$ variabile fuori base aumenta con **effetti su** x_B **e su** z_B

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$$

$$z = c^Tx = c_B^Tx_B + c_F^Tx_F = \boxed{c_B^TB^{-1}b} + (c_F^T - c_B^TB^{-1}F)x_F$$

Esprimere x_B e z in funzione delle variabili **fuori** base

Per semplificare i calcoli a mano, usiamo metodo di **Gauss-Jordan**:

$$Ax = b \quad \rightsquigarrow \quad [\,B\ F\,|\,b\,] \quad \rightsquigarrow \quad [\,I\ \bar{F}\,|\,\bar{b}\,]$$

$$x_B = \bar{b} - \bar{F}x_F \qquad z = \dots$$

Esempio

Nuova base $\Rightarrow$ variabile fuori base aumenta con **effetti su x_B e su z_B**

$$
\begin{aligned}
x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Fx_F \\
z &= c^Tx = c_B^T x_B + c_F^T x_F = c_B^T B^{-1} b + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F)x_F
\end{aligned}
$$

Esprimere x_B e z in funzione delle variabili **fuori** base

Per semplificare i calcoli a mano, usiamo metodo di **Gauss-Jordan**:

$$
Ax = b \quad \rightsquigarrow \quad [\ B\ F \mid b\ ] \quad \rightsquigarrow \quad [\ I\ \bar{F} \mid \bar{b}\ ]
$$

$$
x_B = \bar{b} - \bar{F}x_F \qquad z = \dots
$$

Esempio

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & s_3 & s_1 & s_2 & \bar{b} \\
3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 24 \\
1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 20 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 18
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|c}
(R_1/3) & 1 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 8 \\
(R_2 - R_1/3) & 0 & 8/3 & 0 & -1/3 & 1 & 12 \\
(R_3 - R_1) & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & -6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|c}
(R_1 - 1/2\ R_2) & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\
(3/8\ R_2) & 0 & 1 & 0 & -1/8 & 3/8 & 9/2 \\
(R_3 + 3/4\ R_2) & 0 & 0 & 1 & -5/4 & 3/4 & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 1/2\ s_1 + 1/2\ s_2 \\
x_2 &= 9/2 + 1/8\ s_1 - 3/8\ s_2 \\
s_3 &= 3 + 5/4\ s_1 - 3/4\ s_2
\end{aligned}
$$

$$
z = -13x_1 - 10x_2 = -71 + 21/4\ s_1 - 11/4\ s_2
$$

Esempio

$$z = -71 + 21/4 \; s_1 \; -11/4 \; s_2$$

- Conviene aumentare s_2 (e lasciare s_1 a 0)
- Per mantenere i vincoli di uguaglianza:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 1/2 \; s_2 \\ x_2 &= 9/2 - 3/8 \; s_2 \\ s_3 &= 3 - 3/4 \; s_2 \end{aligned}$$

- Per mantenere i vincoli di non negatività:

$$\begin{array}{lclclcll} x_1 \geq 0 & \Rightarrow & 2 + 1/2 s_2 \geq 0 & \Rightarrow & s_2 & \geq & -4 & \textbf{sempre!} \\ x_2 \geq 0 & \Rightarrow & 9/2 - 3/8 s_2 \geq 0 & \Rightarrow & s_2 & \leq & 12 & \\ s_3 \geq 0 & \Rightarrow & 3 - 3/4 s_2 \geq 0 & \Rightarrow & s_2 & \leq & 4 & \end{array}$$

- **Soluzioni ammissibili** e **miglioranti** ponendo $s_1 = 0$ e $0 \leq s_2 \leq 4$
- $s_2 = 4 \Rightarrow s_3 = 0$: soluzione ammissibile **di base** e **migliorante**

Esempio

Nuova base ammissibile (s_2 al posto di s_3 in base):

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{(vertice C)} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_F = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_B = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = -82$$

Iteriamo il ragionamento: x_B e z **in funzione di** x_F:

$$\begin{array}{rcrcrlcrl} x_1 & = & 4 & + & 1/3 & s_1 & - & 2/3 & s_3 \\ x_2 & = & 3 & - & 1/2 & s_1 & - & 1/2 & s_3 \\ s_3 & = & 4 & + & 5/3 & s_1 & - & 4/3 & s_3 \\ \\ z & = & -82 & + & 2/3 & s_1 & + & 11/3 & s_3 \end{array}$$

Soluzione ottima! Visitate 2 delle $\binom{5}{3} = 10$ possibili basi

Forma canonica di un problema PL

PL $\min\{z = c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ è in **forma canonica rispetto alla base** B di A se tutte le variabili in base e la funzione obiettivo sono scritte esplicitamente **nei termini delle sole variabili fuori base**:

$$
\begin{array}{lcl}
z & = & \bar{z}_B + \bar{c}_{F_1} x_{F_1} + \bar{c}_{F_2} x_{F_2} + \ldots + \bar{c}_{F_{(n-m)}} x_{F_{(n-m)}} \\
x_{B_i} & = & \bar{b}_i - \bar{a}_{iF_1} x_{F_1} - \bar{a}_{iF_2} x_{F_2} - \ldots - \bar{a}_{iF_{(n-m)}} x_{F_{(n-m)}} \quad (i = 1 \ldots m)
\end{array}
$$

- $\bar{z}_B$ scalare (valore f.o. per la soluzione di base)
- $\bar{b}_i$ scalare (valori variabili di base)
- B_i indice della i-esima variabile in base (ce ne sono m)
- F_j indice della j-esima variabile fuori base (ce ne sono $n - m$)
- $\bar{c}_{F_j}$ coefficiente della j-esima variabile fuori base in funzione obiettivo (**costo ridotto della variabile rispetto alla base** B)
- $-\bar{a}_{iF_j}$ coefficiente della j-esima variabile fuori base nel vincolo che esprime la i-esima variabile in base

Metodo del simplesso: cambio base

- Da base B ammissibile a $\tilde{B}$ **adiacente, ammissibile, migliorante**
- **Una** colonna ($\approx$ variabile) entrante al posto di una uscente

- Variabile **entrante** (miglioramento): *qualsiasi* $x_h : \bar{c}_h < 0$

$$z = \bar{z}_B + \bar{c}_h x_h = \bar{z}_{\tilde{B}} \leq \bar{z}_B$$

- Variabile **uscente** (ammissibilità): [regola del quoziente minimo]

$$x_{B_i} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{b}_i - \bar{a}_{ih}\, x_h \geq 0,\ \forall\, i \quad \Rightarrow \quad x_h \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}},\ \forall\, i : \bar{a}_{ih} > 0$$

$$t = \arg \min_{i=1\ldots m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$$

$$\boxed{x_h = \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{B_t} = 0 \ [x_{B_t} \text{ esce!}]}$$

Metodo del simplesso: condizione di illimitatezza

- Consideriamo una qualsiasi x_h: $\bar{c}_h < 0$.

$$z = \bar{z}_B + \bar{c}_h \; x_h$$

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \boxed{\bar{a}_{ih}} \; x_h \quad (i = 1 \dots m)$$

- Se $a_{ih} \leq 0, \; \forall \; i = 1 \dots m$, soluzione ammissibile con $x_h \rightarrow +\infty$

Condizione di illimitatezza di un PL

Esiste una base per cui

$$\exists \, x_h : \; (\bar{c}_h \; < \; 0) \; \wedge \; (\bar{a}_{ih} \; \leq \; 0, \; \forall \; i = 1 \dots m)$$

N.B.: condizione sufficiente

Metodo del simplesso: sintesi

Init: PL in forma standard $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ e una base ammissibile di partenza B

repeat

mettere in forma canonica rispetto a B

$$z = \bar{z}_B + \bar{c}_{F_1} x_{F_1} + \bar{c}_{F_2} x_{F_2} + \ldots + \bar{c}_{F_{(n-m)}} x_{F_{(n-m)}}$$
$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{iF_1} x_{F_1} - \bar{a}_{iF_2} x_{F_2} - \ldots - \bar{a}_{iF_{(n-m)}} x_{F_{(n-m)}} \quad (i = 1 \ldots m)$$

if $(\bar{c}_j \geq 0, \forall\, j)$ **then** PL ottimo con B base ottima: **continue**

if $(\exists\, h : \bar{c}_h < 0$ and $\bar{a}_{ih} \leq 0,\ \forall i)$ **then** PL illimitato: **continue**

variabile entrante: una $x_h : \bar{c}_h < 0$

variabile uscente: x_{B_t} con $t = \arg \min_{i=1\ldots m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$

$B \leftarrow B \oplus A_h \ominus A_{B_t}$ [cambio base]

until (PL ottimo o illimitato)

Il tableau del simplesso

- Per ottenere la forma canonica "a mano" con Gauss-Jordan
- **Funzione obiettivo come vincolo** (z nuova variabile):

  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad \rightsquigarrow \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - z = 0$

	x_{B_1}	$\ldots$	x_{B_m}	x_{F_1}	$\ldots$	$x_{F_{n-m}}$	z	$\bar{b}$
riga 0	c_B^T			c_F^T			-1	0
riga 1							0	
$\vdots$	B			F			$\vdots$	b
riga m							0	

- Operazioni elementari su righe (inclusa z): x_B (e z) in funzione di x_F

Tableau e forma canonica

	x_{B_1}	$\dots$	x_{B_m}	x_{F_1}	$\dots$	$x_{F_{n-m}}$	z	$\bar{b}$
$-z$	0	$\dots$	0	$\square$ $\bar{c}_{F_1}$	$\dots$	$\square$	-1	$\square$
x_{B_1}	1		0	$\square$ $\bar{a}_{iF_1}$	$\dots$	$\square$	0	$\square$
x_{B_i}		$\ddots$		$\square$	$\dots$	$\square$	$\vdots$	$\square$
x_{B_m}	0		1	$\square$	$\dots$	$\square$	0	$\square$

$$z = \bar{z}_B + \bar{c}_{F_1}\, x_{F_1} + \bar{c}_{F_2}\, x_{F_2} + \dots + \bar{c}_{F_{(n-m)}}\, x_{F_{(n-m)}}$$

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{iF_1}\, x_{F_1} - \bar{a}_{iF_2}\, x_{F_2} - \dots - \bar{a}_{iF_{(n-m)}}\, x_{F_{(n-m)}} \quad (i = 1 \dots m)$$

Tableau e forma canonica

	x_{B_1}	$\ldots$	x_{B_m}	x_{F_1}	$\ldots$	$x_{F_{n-m}}$	z	$\bar{b}$
$-z$	0	$\ldots$	0	$\bar{c}_{F_1}$	$\ldots$	$\bar{c}_{F_{n-m}}$	-1	$-\bar{z}_B$
x_{B_1}	1		0	$\bar{a}_{1\,F_1}$	$\ldots$	$\bar{a}_{1\,F_{n-m}}$	0	$\bar{b}_1$
x_{B_i}		$\ddots$		$\bar{a}_{i\,F_1}$	$\ldots$	$\bar{a}_{i\,F_{n-m}}$	$\vdots$	$\bar{b}_i$
x_{B_m}	0		1	$\bar{a}_{m\,F_1}$	$\ldots$	$\bar{a}_{m\,F_{n-m}}$	0	$\bar{b}_m$

$$z = \bar{z}_B + \bar{c}_{F_1}\, x_{F_1} + \bar{c}_{F_2}\, x_{F_2} + \ldots + \bar{c}_{F_{(n-m)}}\, x_{F_{(n-m)}}$$

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{iF_1}\, x_{F_1} - \bar{a}_{iF_2}\, x_{F_2} - \ldots - \bar{a}_{iF_{(n-m)}}\, x_{F_{(n-m)}} \quad (i = 1 \ldots m)$$

Il simplesso sul tableau

$\mathcal{B}$

	x_{B_1}	$\dots$	x_{B_t}	$\dots$	x_{B_m}	x_{F_1}	$\dots$	x_h	$\dots$	$x_{F_{n-m}}$	z	$\bar{b}$
$-z$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\bar{c}_{F_1}$	$\dots$	$\bar{c}_h$	$\dots$	$\bar{c}_{F_{n-m}}$	-1	$-\bar{z}_B$
x_{B_1}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$\bar{a}_{1F_1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1h}$	$\dots$	$\bar{a}_{1F_{n-m}}$	0	$\bar{b}_1$
x_{B_t}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$\bar{a}_{tF_1}$	$\dots$	$\bar{a}_{th}$	$\dots$	$\bar{a}_{tF_{n-m}}$	$\vdots$	$\bar{b}_t$
x_{B_m}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$\bar{a}_{mF_1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mh}$	$\dots$	$\bar{a}_{mF_{n-m}}$	0	$\bar{b}_m$

- verifica ottimalità: costi ridotti sulla riga $-z$ con valori ≥ 0
- verifica illimitatezza: colonna h con $c_h < 0$ e $a_{ih} \leq 0$
- variabile entrante: $x_h : c_h < 0$
- variabile uscente : $x_t,\ t = \arg \min\limits_{i=1\dots m} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \underline{\bar{a}_{ih} > 0} \right\}$

Il simplesso sul tableau

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|c|c|}
 & & & \uparrow & & & & & \downarrow & & & & \\
 & x_{B_1} & \dots & x_{B_t} & \dots & x_{B_m} & x_{F_1} & \dots & x_h & \dots & x_{F_{n-m}} & z & \bar{b} \\
\hline
-z & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_{F_1} & \dots & \bar{c}_h & \dots & \bar{c}_{F_{n-m}} & -1 & -\bar{z}_B \\
\hline
x_{B_1} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_{1F_1} & \dots & \bar{a}_{1h} & \dots & \bar{a}_{1F_{n-m}} & 0 & \bar{b}_1 \\
x_{B_t} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \bar{a}_{tF_1} & \dots & \boxed{\bar{a}_{th}} & \dots & \bar{a}_{tF_{n-m}} & \vdots & \bar{b}_t \\
x_{B_m} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \bar{a}_{mF_1} & \dots & \bar{a}_{mh} & \dots & \bar{a}_{mF_{n-m}} & 0 & \bar{b}_m \\
\hline
\end{array}
$$

- cambio base: operazione di **pivot su** $\bar{a}_{t\,h}$

$$
\begin{array}{lll}
\bar{a}_{tj} \leftarrow \dfrac{\bar{a}_{tj}}{\bar{a}_{th}} & \forall & \text{colonna } j \\
\bar{a}_{ij} \leftarrow \bar{a}_{ij} - \dfrac{\bar{a}_{tj}}{\bar{a}_{th}} \bar{a}_{ih} & \forall & \text{riga } i \neq t, \text{colonna } j
\end{array}
$$

Esempio: il contadino...

- Risolvere con il metodo del simplesso il problema del contadino, ricordando il suo modello PL:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 3\,000\,x_L & + & 5\,000\,x_P & & \\
 & x_L & + & x_P & \leq & 12 \\
 & 7\,x_L & & & \leq & 70 \\
 & & & 3\,x_P & \leq & 18 \\
 & 10\,x_L & + & 20\,x_P & \leq & 160 \\
 & x_L & , & x_P & \geq & 0
\end{array}
$$

Un problema illimitato (I)

- Risolvere con il metodo del simplesso il problema:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 2x_1 & + & 5x_2 & & \\
 & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 8 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Un problema illimitato (II)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	-2	-5	0	0	0	-1	0
x_3	1	-4	1	0	0	0	8
x_4	-1	1	0	1	0	0	6
x_5	-3	$\boxed{2}$	0	0	1	0	5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	$-19/2$	0	0	0	$5/2$	-1	$25/2$
x_3	-5	0	1	0	2	0	18
x_4	$\boxed{1/2}$	0	0	1	$-1/2$	0	$7/2$
x_2	$-3/2$	1	0	0	$1/2$	0	$5/2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	19	-7	-1	79
x_3	0	0	1	10	-3	0	53
x_1	1	0	0	2	-1	0	7
x_2	0	1	0	3	-1	0	13

problema illimitato

Un problema **non più** illimitato (I)

- Risolvere con il metodo del simplesso il problema precedente con una diversa funzione obiettivo:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & -5x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 8 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Un problema **non più** illimitato (II)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	5	-4	0	0	0	-1	0
x_3	1	-4	1	0	0	0	8
x_4	-1	1	0	1	0	0	6
x_5	-3	$\boxed{2}$	0	0	1	0	5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	-1	0	0	0	2	-1	5
x_3	-5	0	1	0	2	0	18
x_4	$\boxed{1/2}$	0	0	1	$-1/2$	0	$7/2$
x_2	$-3/2$	1	0	0	$1/2$	0	$5/2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	2	1	-1	12
x_3	0	0	1	10	-3	0	53
x_1	1	0	0	2	-1	0	7
x_2	0	1	0	3	-1	0	13

ottimo finito

Passaggio per basi degeneri (I)

- Risolvere con il metodo del simplesso:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 12 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Passaggio per basi degeneri (II)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	-2	-1	0	0	0	-1	0
x_3	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	0	4
x_4	3	-1	0	1	0	0	12
x_5	1	1	0	0	1	0	12

Base 1

x_1	x_2	$\boxed{x_3}$	$\boxed{x_4}$	$\boxed{x_5}$
0	0	$\boxed{4}$	$\boxed{12}$	$\boxed{12}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	-3	2	0	0	-1	8
x_1	1	-1	1	0	0	0	4
x_4	0	2	-3	1	0	0	0
x_5	0	2	-1	0	1	0	8

Base 2

$\boxed{x_1}$	x_2	x_3	$\boxed{x_4}$	$\boxed{x_5}$
$\boxed{4}$	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$

Passaggio per basi degeneri (III)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	-3	2	0	0	-1	8
x_1	1	-1	1	0	0	0	4
x_4	0	$\boxed{2}$	-3	1	0	0	0
x_5	0	2	-1	0	1	0	8

(Base 2)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	0	0	0	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	$-5/2$	$3/2$	0	-1	8
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	4
x_2	0	1	$-3/2$	$1/2$	0	0	0
x_5	0	0	2	-1	1	0	8

Base 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	0	0	0	8

Passaggio per basi degeneri (IV)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	$-5/2$	$3/2$	0	-1	8
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	4
x_2	0	1	$-3/2$	$1/2$	0	0	0
x_5	0	0	$\boxed{2}$	-1	1	0	8

(Base 3)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	0	0	0	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	$1/4$	$5/4$	-1	18
x_1	1	0	0	$1/4$	$1/4$	0	6
x_2	0	1	0	$-1/4$	$3/4$	0	6
x_3	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	4

Base 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	6	4	0	0

Infinite soluzioni ottime (I)

- Risolvere con il metodo del simplesso:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 7 \\
 & 2x_1 & + & 1/2x_2 & \leq & 10 \\
 & 3/2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & -3x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & & \\
 & & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 7 \\
 & 2x_1 & + & 1/2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 10 \\
 & 3/2x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Infinite soluzioni ottime (II)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	-3	-2	0	0	0	-1	0
x_3	0	1	1	0	0	0	7
x_4	$\boxed{2}$	$1/2$	0	1	0	0	10
x_5	$3/2$	1	0	0	1	0	10

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	$-5/4$	0	$3/2$	0	-1	15
x_3	0	1	1	0	0	0	7
x_1	1	$1/4$	0	$1/2$	0	0	5
x_5	0	$\boxed{5/8}$	0	$-3/4$	1	0	$5/2$

Infinite soluzioni ottime (III)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	0	2	-1	20
x_3	0	0	1	$\boxed{6/5}$	$-8/5$	0	3
x_1	1	0	0	$4/5$	$-2/5$	0	4
x_2	0	1	0	$-6/5$	$8/5$	0	4

FINE!

ma...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	0	0	2	-1	20
x_4	0	0	$5/6$	1	$-4/3$	0	$5/2$
x_1	1	0	$-2/3$	0	$-2/3$	0	2
x_2	0	1	1	0	0	0	7

altra soluzione ottima!

Soluzioni ottime con costi ridotti negativi (I)

- Risolvere con il metodo del simplesso (a partire dalla base x_1, x_2, x_4):

$$
\begin{array}{lccccl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Forma standard:

$$
\begin{array}{lccccccccccl}
\min & -x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$x_5 = -2$

Soluzioni ottime con costi ridotti negativi (II)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
//	-1	-2	0	0	0	-1	0
//	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	1
//	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	1
//	1	1	0	$\boxed{0}$	-1	0	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	-1	0	-2	-1	$\mathbf{3}$
$\underline{x_1}$	1	0	1	0	0	0	1
$\underline{x_2}$	0	1	-1	0	-1	0	1
$\underline{x_4}$	0	0	$\boxed{1}$	1	1	0	0

Convergenza del metodo del simplesso

- Ad ogni iterazione: $z_{new} = z_{old} + c_h \theta$

$$\theta = \min_{i=1\dots m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$$

- Se $\theta > 0$ ad ogni iterazione:

  cambio base e vertice, $z_{new} < z_{old}$

  $\Rightarrow$ **convergenza** in $O\left(\binom{n}{m}\right)$

- Se $\theta = 0$ (passaggio tra basi degeneri!):

  cambio base ma non vertice, $z_{new} = z_{old}$

  potrei tornare alla stessa base

  $\Rightarrow$ **nessuna garanzia di convergenza!**

Regola anticiclo di Bland

- **Fissare un ordine tra le variabili (indice)**
- **Tra tutte le variabili candidate al cambio base, scegliere sempre la prima (quella con indice minimo)**

- più variabili fuori base con costo ridotto negativo: entra in base la variabile x_h con indice h minimo

$$x_h : h = \min\{j : \bar{c}_j < 0\}$$

- più variabili in base che corrispondono al mimino quoziente θ: esce la variabile x_t con indice minimo

$$x_t : t = \min\{B_i : \bar{b}_i / \bar{a}_{ih} = \theta\}$$

Lemma: applicando Bland, il simplesso visita una base al più una volta

Esempio

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	$\bar{b}$
$-z$	5	-1	0	-10	0	0	0	0	-1	-10
x_5	1	$\boxed{4}$	0	1	1	0	0	0	0	8
x_3	-1	$\boxed{\mathbf{3}}$	1	0	0	0	0	0	0	6
x_6	0	-2	0	$\boxed{3}$	0	1	0	0	0	1
x_8	3	2	0	4	0	0	0	1	0	5
x_7	3	$\boxed{1}$	0	-2	0	0	1	0	0	2

1) soluzione base?
2) è ottima?
3) possibili cambi base?
4) con regola di Bland?
5) perché otterremo soluzione degenere?

Convergenza e condizioni di ottimalità

- Costi ridotti non negativi è condizione sufficiente di ottimalità: siamo sicuri di raggiungerla?

Sì! Teorema: *se esiste una soluzione ottima, allora esiste una base ottima con costi ridotti tutti non negativi*

Corollario: *Le regole anticiclo garantiscono di raggiungerla*

Teorema: convergenza del simplesso con regola anticiclo di Bland

Utilizzando la regola di Bland, il metodo del simplesso converge sempre in al più $\binom{n}{m}$ *iterazioni*

- Nota: esistono altri algoritmi per PL (e.g. *ellissoide*) di complessità polinomiale nel caso peggiore, **mediamente il simplesso è più efficiente!** [complessità caso medio lineare in m, sublineare in n]