Ricerca Operativa

2. Modelli di Programmazione Lineare

Modelli di programmazione lineare

- Il metodo grafico è basato su

  $\Rightarrow$ linearità della funzione obiettivo

  $\Rightarrow$ linearità dei vincoli

- Sotto queste ipotesi (come vedremo meglio in seguito), una soluzione si trova su un vertice della regione ammissibile: l'ultimo toccato traslando le rette isoprofitto nella direzione del gradiente

- Si parla in questi casi di modelli di programmazione lineare (PL)

Elementi di un modello PL

- **Insiemi**: elementi del sistema;
- **Parametri**: dati del problema;
- **Variabili decisionali o di controllo**: grandezze sulle quali possiamo agire;
- **Vincoli**: relazioni matematiche che descrivono le condizioni di ammissibilità delle soluzioni;
- **Funzione obiettivo**: la quantità da massimizzare o minimizzare.

Un modello PL **dichiara** le caratteristiche della soluzione ottima in linguaggio matematico

Formulazione generale di un modello di Programmazione Lineare

$$\min\ (\max)\ z = [\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n\ (+\ cost.\ )\ ] \cdot cost \geq 0$$

subject to (s.t., soggetto a, s.a)

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \geq (=, \leq)\ b_1 \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \geq (=, \leq)\ b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \geq (=, \leq)\ b_m \\
&x_j \in \mathbb{R}_{(+)}\ (\ x_j \text{ intere }\ )
\end{aligned}$$

z : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)

x_j : variabili decisionali (incognite)

- **reali** (eventualmente non negative)
- **intere** (eventualmente non negative)
- **binarie** ($x_j \in \{0,1\}$)

} Programmazione lineare **intera (PLI)**

c_j : coefficienti di costo (min) o profitto (max) [costante nota]

a_{ij} : coefficienti tecnologici [costante nota]

b_i : termini noti [costante nota]

CAVEAT!!!

In questo corso si richiedono

MODELLI LINEARI

le variabili,

di qualsiasi natura esse siano,

possono essere solo moltiplicate per una costante e sommate tra loro.

E basta!!!

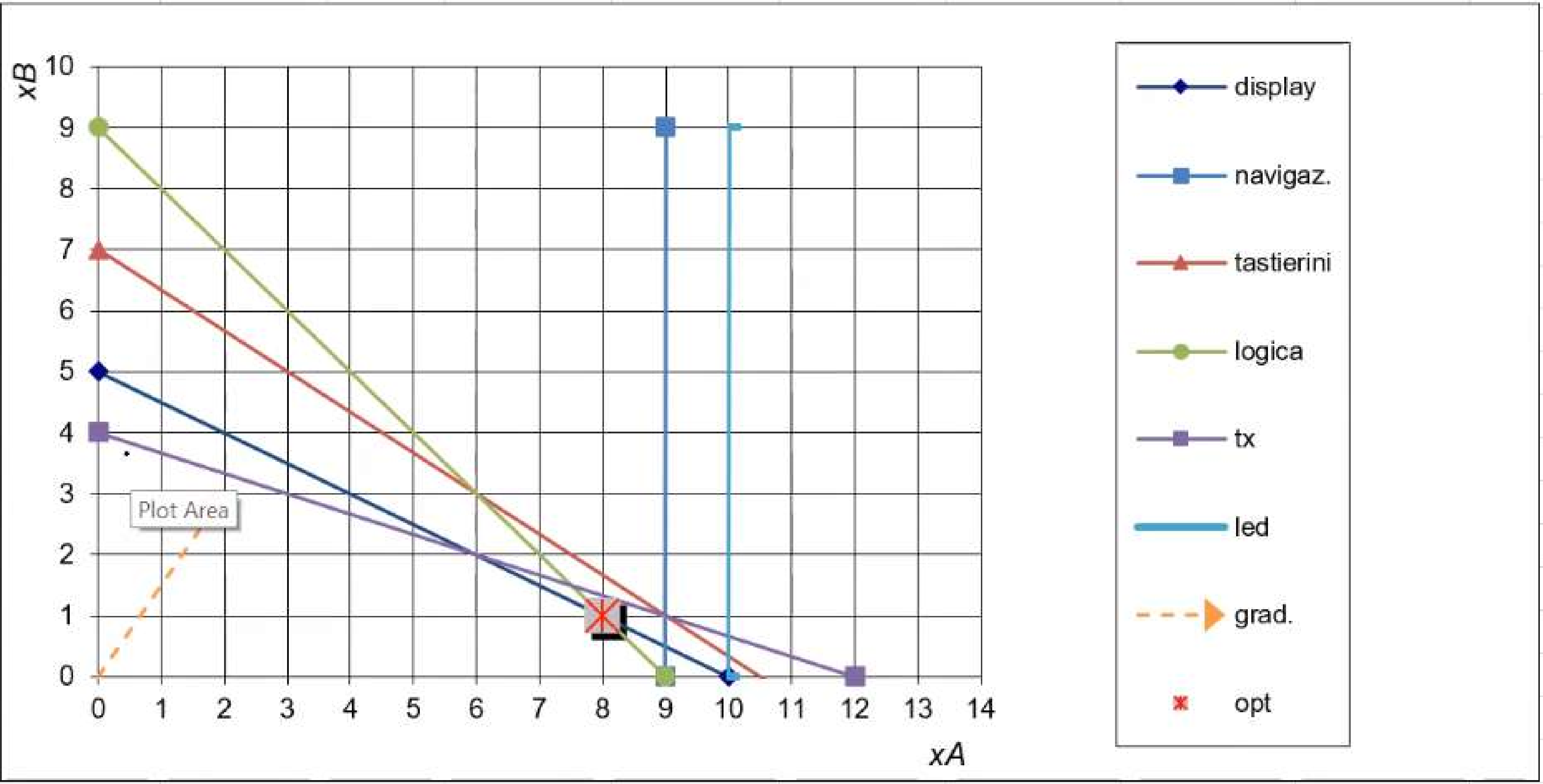
Telecomandi

Per l'assemblaggio di telecomandi, si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di logica di controllo, 12 moduli di trasmissione, 21 tastierini, 9 moduli di navigazione e 10 moduli led. I telecomandi sono di due tipi. Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di logica, un modulo di trasmissione e un led. Il tipo B richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di logica e 3 moduli di trasmissione. Considerando che il tipo A permette un guadagno netto di 4 euro e il tipo B di 6 euro, determinare la produzione che massimizza il guadagno.

Siano x_A e x_B le quantità di telefoni di tipo A e B

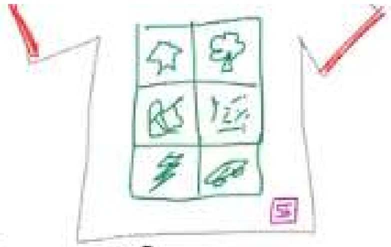
$$
\begin{array}{lrcrl}
\textit{max}\ 4\ x_\mathrm{A} + 6\ x_\mathrm{B} & & & & \text{(guadagno complessivo)} \\
\textit{s.t.} & & & & \\
 & x_\mathrm{A} + 2\ x_\mathrm{B} & \leq & 10 & \text{(display)} \\
 & x_\mathrm{A} \qquad\quad & \leq & 9 & \text{(navigazione)} \\
 & 2\ \ x_\mathrm{A} + 3\ x_\mathrm{B} & \leq & 21 & \text{(tastierini)} \\
 & 2\ \ x_\mathrm{A} + 2\ x_\mathrm{B} & \leq & 18 & \text{(logica)} \\
 & x_\mathrm{A} + 3\ x_\mathrm{B} & \leq & 12 & \text{(trasmissione)} \\
 & x_\mathrm{A} \qquad\quad & \leq & 10 & \text{(led)}
\end{array}
$$

$$x_A\ ,\ x_B \in \mathbb{Z}_+$$

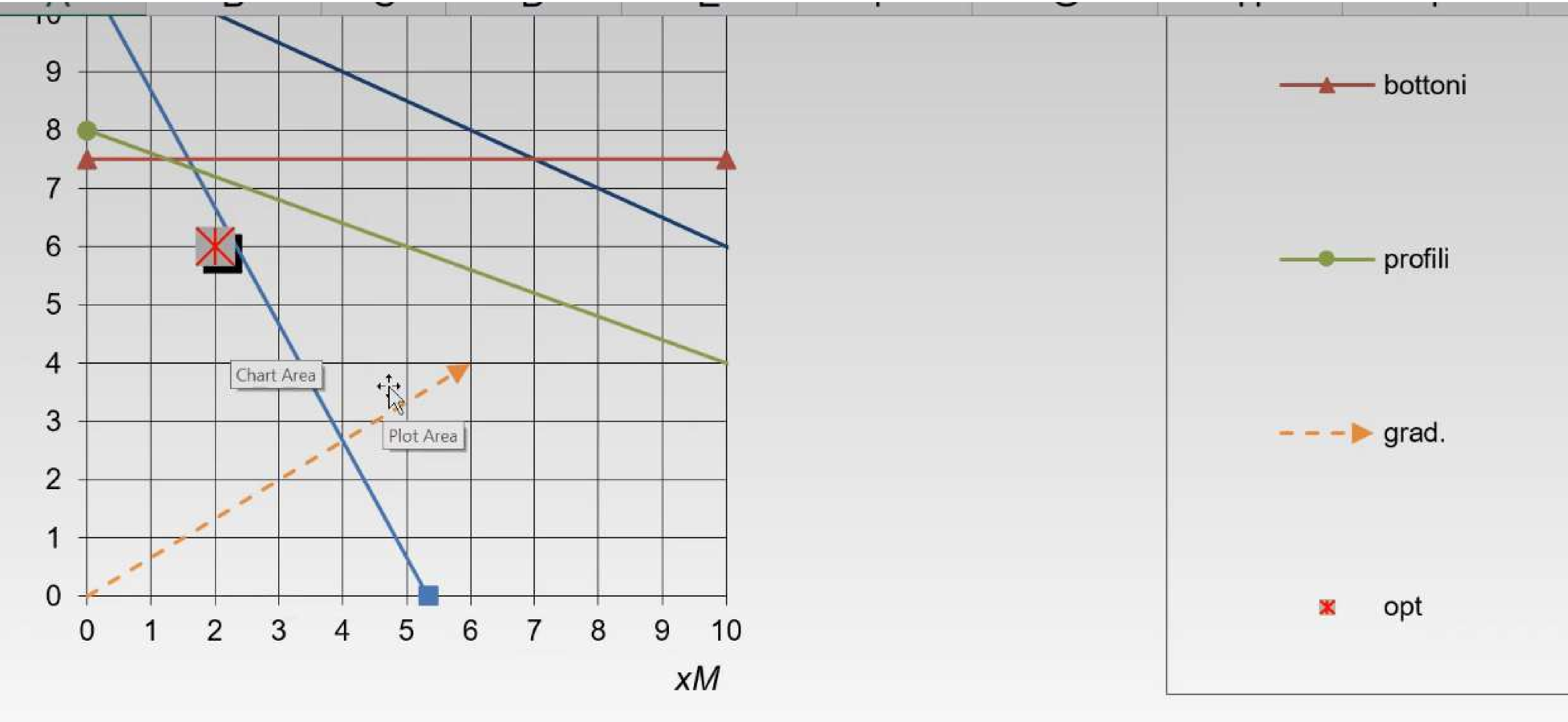


xB
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
xA
Plot Area
display
navigaz.
tastierini
logica
tx
led
grad.
opt

Money makers




Un gruppo di ragazzi vuole ricavare il più possibile vendendo agli amici magliette e borse decorate. Sono disponibili 10 magliette di cotone e 15 borse di tela e, per la decorazione, 32 riquadri disegnati e 40 profili rossi. Su ogni maglietta vengono apposti 6 riquadri e 2 profili, e su ogni borsa 3 riquadri e 5 profili. Sono anche disponibili 15 bottoni, e ogni borsa ne utilizzerà due per la chiusura. Sono state anche preparate 22 etichette, da apporre una su ogni maglietta e due su ogni borsa. Considerando che ogni maglietta decorata è venduta a 24 euro e ogni borsa a 16 euro, e che gli amici compreranno tutte le magliette e le borse, determinare la produzione che massimizza il ricavo.



9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
xM
Chart Area
Plot Area
bottoni
profili
grad.
opt

Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Modello PL

- Siano $\overset{x_V}{x_1}$, $\overset{x_C}{x_2}$ e $\overset{x_F}{x_3}$ le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$\textbf{min} \quad 4\,x_1+10\,x_2+7\,x_3 \qquad \text{(costo giornaliero dieta)}$$

s.t.

$$5x_1+15x_2+4x_3 \geq 20 \qquad \text{(proteine)}$$
$$6x_1+10x_2+5x_3 \geq 30 \qquad \text{(ferro)}$$
$$5x_1+3x_2+12x_3 \geq 10 \qquad \text{(calcio)}$$

$$x_i \in \cancel{\mathbb{R}_+},\ \forall i \in \{1, 2, 3\} \qquad x_j \in \mathbb{Z}_+$$

Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

Modello PLI

- Siano x_1 e x_2 il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

min $1.1\, x_1 + 1.6\, x_2$ (costo totale telefonate)

s.t.

$0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 150$ (donne sposate)

$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 110$ (donne non sposate)

$0.1x_1 + 0.3x_2 \geq 120$ (uomini sposati)

$0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 100$ (uomini non sposati)

$x_i \in \mathbb{Z}_+, \ \forall i \in \{1, 2\}$

Alcuni schemi base di modellazione

Modelli di copertura di costo minimo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} C_i x_i \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \geq D_j \qquad \forall\, j \in J \\
& x_i \in \mathbb{R}_+ \; [\; \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \;] \quad \forall\, i \in I
\end{aligned}
$$

I insieme delle risorse da acquistare;

J insieme delle domande da coprire;

C_i costo (unitario) per l'utilizzo della risorsa $i \in I$;

D_j ammontare della domanda di $j \in J$;

A_{ij} capacità (unitaria) della risorsa i di soddisfare la domanda j.

Alcuni schemi base di modellazione

Modelli di mix ottimo di produzione

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} P_i x_i \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \leq Q_j && \forall\, j \in J \\
& x_i \in \mathbb{R}_+ \; [\, \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \,] && \forall\, i \in I
\end{aligned}$$

I insieme dei beni che possono essere prodotti;

J insieme delle risorse disponibili;

P_i profitto (unitario) per il bene $i \in I$;

Q_j quantità disponibile della risorsa $j \in J$;

A_{ij} quantità di risorsa j necessaria per la produzione di un'unità del bene i.

Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

Modello PLI

- Sia x_{ij} il numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento i e smistati nel magazzino j

$$
\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & 6\,x_{A1} + 8\,x_{A2} + 3\,x_{A3} + 4\,x_{A4} + \\
+ \quad & 2\,x_{B1} + 3\,x_{B2} + 1\,x_{B3} + 3\,x_{B4} + \\
+ \quad & 2\,x_{C1} + 4\,x_{C2} + 6\,x_{C3} + 5\,x_{C4}
\end{aligned}
$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
& x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4} \le 50 && \text{(capacità produttiva stabilimento A)} \\
& x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4} \le 70 && \text{(capacità produttiva stabilimento B)} \\
& x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4} \le 20 && \text{(capacità produttiva stabilimento C)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \ge 10 && \text{(domanda magazzino 1)} \\
& x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \ge 60 && \text{(domanda magazzino 2)} \\
& x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \ge 30 && \text{(domanda magazzino 3)} \\
& x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \ge 40 && \text{(domanda magazzino 4)}
\end{aligned}
$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall\, i \in \{A, B, C\},\, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Alcuni schemi base di modellazione

Modelli di trasporto

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}x_{ij} & \\
s.t. & & \\
& \displaystyle\sum_{j\in J} x_{ij} \leq O_i & \forall\, i \in I \\
& \displaystyle\sum_{i\in I} x_{ij} \geq D_j & \forall\, j \in J \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \;[\; \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\}\;] & \forall\, i \in I, j \in J
\end{array}
$$

I insieme dei centri di offerta; O_i ammontare dell'offerta in $i \in I$;

J insieme dei centri di domanda; D_j ammontare della domanda in $j \in J$.

C_{ij} costo (unitario) per il trasporto da $i \in I$ a $j \in J$;

Turni in ospedale

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

Modello PLI

- Siano *lun*, *mar*, *mer*, *gio*, *ven*, *sab* e *dom* il numero di infermieri in cui turno inizia di lunedì,… domenica

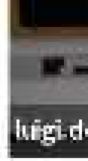
$$
\begin{array}{llr}
\textbf{min} & lun + mar + mer + gio + ven + sab + dom & \\
\textbf{s.t.} & & \\
& lun + gio + ven + sab + dom \geq 17 & \text{(presenze lunedì)} \\
& lun + mar + ven + sab + dom \geq 13 & \text{(presenze martedì)} \\
& lun + mar + mer + sab + dom \geq 15 & \text{(presenze mercoledì)} \\
& lun + mar + mer + gio + dom \geq 19 & \text{(presenze giovedì)} \\
& lun + mar + mer + gio + ven \geq 14 & \text{(presenze venerdì)} \\
& mar + mer + gio + ven + sab \geq 16 & \text{(presenze sabato)} \\
& mer + gio + ven + sab + dom \geq 11 & \text{(presenze domenica)}
\end{array}
$$

$lun, mar, mer, gio, ven, sab, dom \in \mathbb{Z}_+$

Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5



Modello PLI

Sia $x_i = 1$, se viene aperto il CUP nel quartiere *i*, 0 altrimenti

$$
\begin{array}{llllllll}
\textbf{min} & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & \\
\textbf{s.t.} & & & & & & & \\
& x_1 & + x_2 & & & & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 1)} \\
& x_1 & + x_2 & & & & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 2)} \\
& & & x_3 & + x_4 & & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 3)} \\
& & & x_3 & + x_4 & + x_5 & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 4)} \\
& & & & x_4 & + x_5 & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 5)} \\
& & x_2 & & & + x_5 & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 6)} \\
& & & & & & & \\
& x_i \in \{0,1\} & & & & & &
\end{array}
$$