Ricerca Operativa

2. Modelli di Programmazione Lineare

Modelli di programmazione lineare

- Il metodo grafico è basato su

  ⇒ linearità della funzione obiettivo

  ⇒ linearità dei vincoli

- Sotto queste ipotesi (come vedremo meglio in seguito), una soluzione si trova su un vertice della regione ammissibile: l'ultimo toccato traslando le rette isoprofitto nella direzione del gradiente

- Si parla in questi casi di modelli di programmazione lineare (PL)

Elementi di un modello PL

- **Insiemi**: elementi del sistema;
- **Parametri**: dati del problema;
- **Variabili decisionali o di controllo**: grandezze sulle quali possiamo agire;
- **Vincoli**: relazioni matematiche che descrivono le condizioni di ammissibilità delle soluzioni;
- **Funzione obiettivo**: la quantità da massimizzare o minimizzare.

Un modello PL **dichiara** le caratteristiche della soluzione ottima in linguaggio matematico

Formulazione generale di un modello di Programmazione Lineare

min (max) $z = [\, c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \,(+\, cost.\,)\,] \cdot cost \geq 0$

subject to (s.t., soggetto a, s.a)

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \;\geq (=, \leq)\; b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \;\geq (=, \leq)\; b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \;\geq (=, \leq)\; b_m$$
$$x_j \in \mathbb{R}_{(+)} \;(\, x_j \text{ intere })$$

z : funzione obiettivo da minimizzare (min) o massimizzare (max)

x_j : variabili decisionali (incognite)

- **reali** (eventualmente non negative)
- **intere** (eventualmente non negative)
- **binarie** ($x_j \in \{0,1\}$)

$\left.\right\}$ Programmazione lineare **intera (PLI)**

c_j : coefficienti di costo (min) o profitto (max) [costante nota]

a_{ij} : coefficienti tecnologici [costante nota]

b_i : termini noti [costante nota]

CAVEAT!!!

In questo corso si richiedono

MODELLI LINEARI

le variabili,

di qualsiasi natura esse siano,

possono essere solo moltiplicate per una costante e sommate tra loro.

E basta!!!

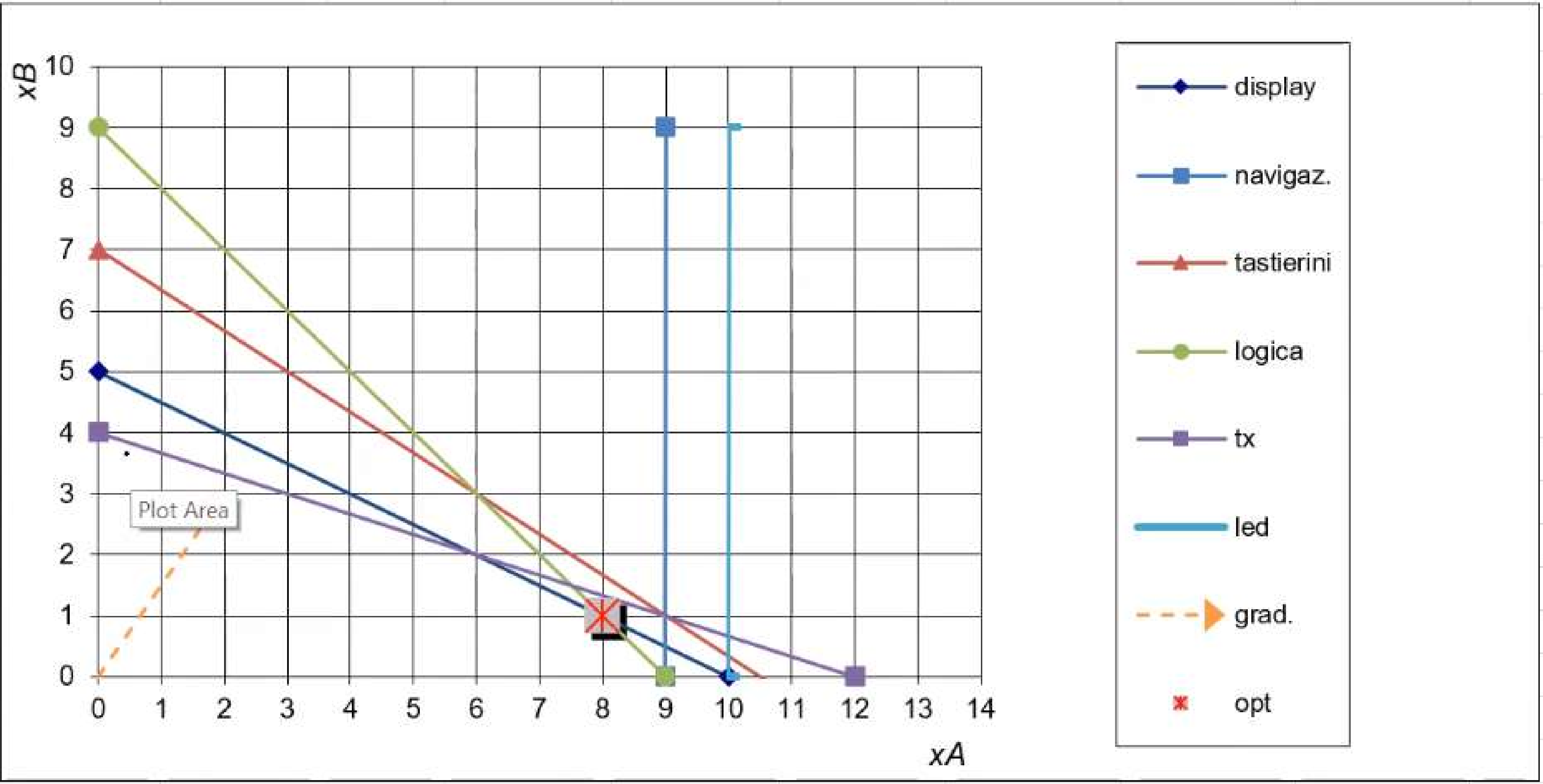
Telecomandi

Per l'assemblaggio di telecomandi, si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di logica di controllo, 12 moduli di trasmissione, 21 tastierini, 9 moduli di navigazione e 10 moduli led. I telecomandi sono di due tipi. Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di logica, un modulo di trasmissione e un led. Il tipo B richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di logica e 3 moduli di trasmissione. Considerando che il tipo A permette un guadagno netto di 4 euro e il tipo B di 6 euro, determinare la produzione che massimizza il guadagno.

Siano x_A e x_B le quantità di telefoni di tipo A e B

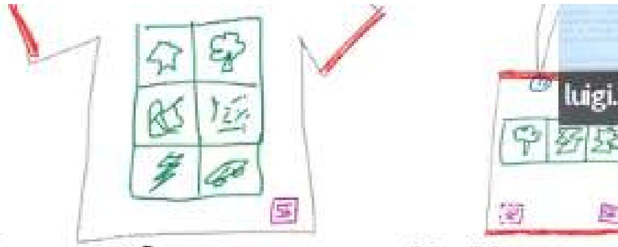
$$
\begin{array}{lrcrl}
\max 4\ x_A + 6\ x_B & & & & \text{(guadagno complessivo)} \\
s.t. & & & & \\
 & x_A + 2\ x_B & \le & 10 & \text{(display)} \\
 & x_A & \le & 9 & \text{(navigazione)} \\
 & 2\ x_A + 3\ x_B & \le & 21 & \text{(tastierini)} \\
 & 2\ x_A + 2\ x_B & \le & 18 & \text{(logica)} \\
 & x_A + 3\ x_B & \le & 12 & \text{(trasmissione)} \\
 & x_A & \le & 10 & \text{(led)}
\end{array}
$$

$$x_A\ ,\ x_B \in \mathbb{Z}_+$$

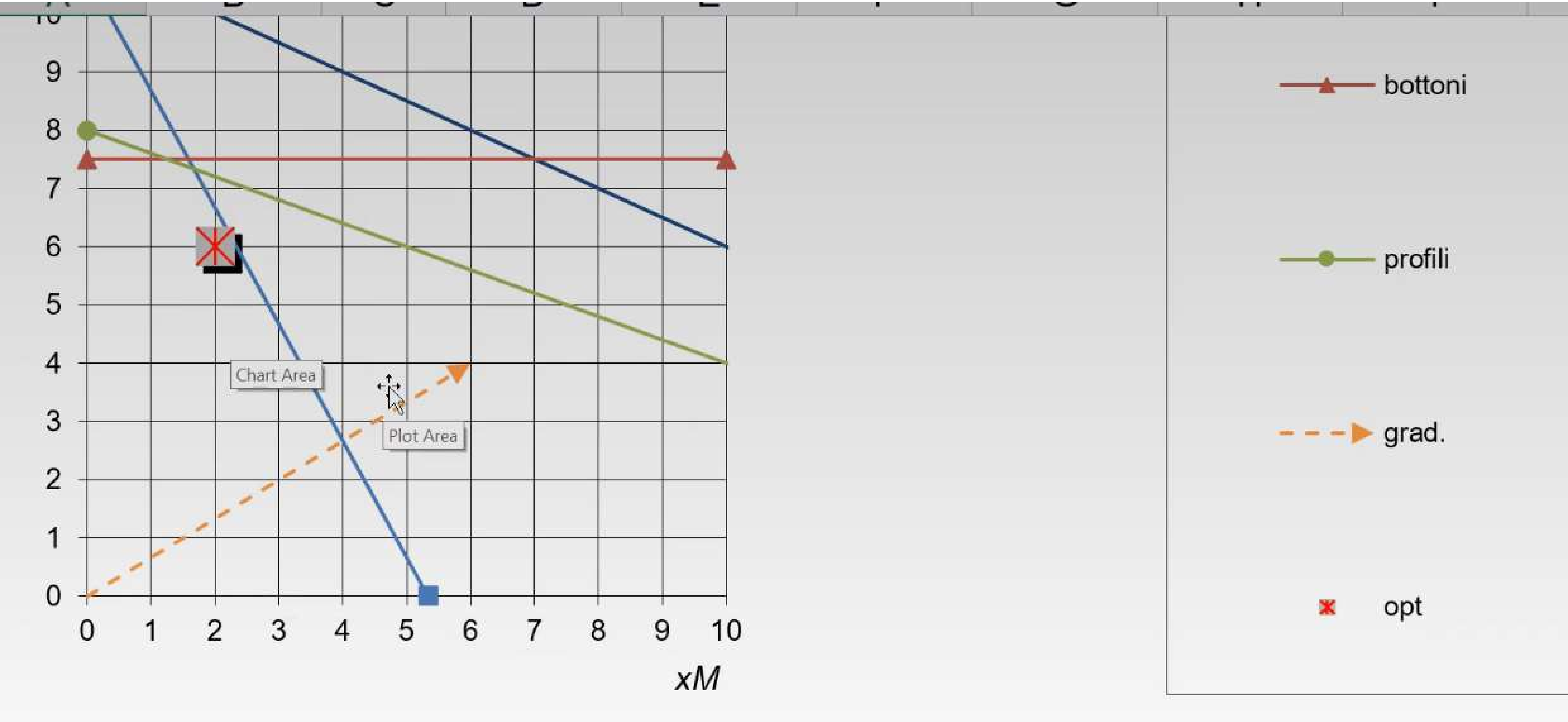


xB
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
xA
Plot Area
display
navigaz.
tastierini
logica
tx
led
grad.
opt

Money makers



Un gruppo di ragazzi vuole ricavare il più possibile vendendo agli amici magliette e borse decorate. Sono disponibili 10 magliette di cotone e 15 borse di tela e, per la decorazione, 32 riquadri disegnati e 40 profili rossi. Su ogni maglietta vengono apposti 6 riquadri e 2 profili, e su ogni borsa 3 riquadri e 5 profili. Sono anche disponibili 15 bottoni, e ogni borsa ne utilizzerà due per la chiusura. Sono state anche preparate 22 etichette, da apporre una su ogni maglietta e due su ogni borsa. Considerando che ogni maglietta decorata è venduta a 24 euro e ogni borsa a 16 euro, e che gli amici compreranno tutte le magliette e le borse, determinare la produzione che massimizza il ricavo.



bottoni
profili
grad.
opt
Chart Area
Plot Area
xM

Dieta economica

Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno 20 mg, 30 mg e 10 mg, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/Kg di ferro e 5 mg/Kg di calcio, al costo di 4 €/Kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/Kg di ferro e 3 mg/Kg di calcio, al costo di 10 €/Kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/Kg di ferro e 12 mg/Kg di calcio, al costo di 7 €/Kg). Determinare la dieta di costo minimo.

Modello PL

- Siano $\overset{x_v}{x_1}$, $\overset{x_C}{x_2}$ e $\overset{x_F}{x_3}$ le quantità di cibi a base di verdura, carne e frutta, rispettivamente

$$\textbf{min} \quad 4\,x_1 + 10\,x_2 + 7\,x_3 \qquad \text{(costo giornaliero dieta)}$$

s.t.

$$5x_1 + 15x_2 + 4x_3 \geq 20 \qquad \text{(proteine)}$$

$$6x_1 + 10x_2 + 5x_3 \geq 30 \qquad \text{(ferro)}$$

$$5x_1 + 3x_2 + 12x_3 \geq 10 \qquad \text{(calcio)}$$

$$x_i \in \cancel{\mathbb{R}_+}, \ \forall i \in \{1, 2, 3\} \qquad x_j \in \mathbb{Z}_+$$

Indagine di mercato

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella.

	Mattino	Sera
Donne sposate	30%	30%
Donne non sposate	10%	20%
Uomini sposati	10%	30%
Uomini non sposati	10%	15%
Nessuno	40%	5%

Si noti come le telefonate serali sono più costose, ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% va a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone

Modello PLI

- Siano x_1 e x_2 il numero di telefonate da fare al mattino e alla sera, rispettivamente

min $\quad 1.1\,x_1 + 1.6\,x_2$ (costo totale telefonate)

s.t.

$0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 150$ (donne sposate)

$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 110$ (donne non sposate)

$0.1x_1 + 0.3x_2 \geq 120$ (uomini sposati)

$0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 100$ (uomini non sposati)

$x_i \in \mathbb{Z}_+, \ \forall i \in \{1, 2\}$

Alcuni schemi base di modellazione

Modelli di copertura di costo minimo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} C_i x_i \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \geq D_j & \forall\, j \in J \\
& x_i \in \mathbb{R}_+ \; [\; \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \;] & \forall\, i \in I
\end{aligned}
$$

I insieme delle risorse da acquistare;

J insieme delle domande da coprire;

C_i costo (unitario) per l'utilizzo della risorsa $i \in I$;

D_j ammontare della domanda di $j \in J$;

A_{ij} capacità (unitaria) della risorsa i di soddisfare la domanda j.

Alcuni schemi base di modellazione

Modelli di mix ottimo di produzione

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} P_i x_i \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i \in I} A_{ij} x_i \leq Q_j && \forall\, j \in J \\
& x_i \in \mathbb{R}_+ \left[\, \mathbb{Z}_+ \mid \{0,1\} \,\right] && \forall\, i \in I
\end{aligned}
$$

I insieme dei beni che possono essere prodotti;

J insieme delle risorse disponibili;

P_i profitto (unitario) per il bene $i \in I$;

Q_j quantità disponibile della risorsa $j \in J$;

A_{ij} quantità di risorsa j necessaria per la produzione di un'unità del bene i.

Trasporto di frigoriferi

Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

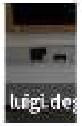
Modello PLI

- Sia x_{ij} il numero di frigoriferi prodotti nello stabilimento i e smistati nel magazzino j

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{min} & 6\,x_{A1}+8\,x_{A2}+3\,x_{A3}+4\,x_{A4}+ & \\
+ & 2\,x_{B1}+3\,x_{B2}+1\,x_{B3}+3\,x_{B4}+ & \\
+ & 2\,x_{C1}+4\,x_{C2}+6\,x_{C3}+5\,x_{C4} & \\
\textbf{s.t.} & & \\
& x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4} \le 50 & \text{(capacità produttiva stabilimento A)} \\
& x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4} \le 70 & \text{(capacità produttiva stabilimento B)} \\
& x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4} \le 20 & \text{(capacità produttiva stabilimento C)} \\
& & \\
& x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \ge 10 & \text{(domanda magazzino 1)} \\
& x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \ge 60 & \text{(domanda magazzino 2)} \\
& x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \ge 30 & \text{(domanda magazzino 3)} \\
& x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \ge 40 & \text{(domanda magazzino 4)}
\end{array}
$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \ \ \forall i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Alcuni schemi base di modellazione



Modelli di trasporto

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_{ij} x_{ij} & \\
s.t. \quad & & \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i & \forall\, i \in I \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j & \forall\, j \in J \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \ [\ \mathbb{Z}_+ \mid \{0, 1\}\ ] & \forall\, i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

I insieme dei centri di offerta; O_i ammontare dell'offerta in $i \in I$;

J insieme dei centri di domanda; D_j ammontare della domanda in $j \in J$.

C_{ij} costo (unitario) per il trasporto da $i \in I$ a $j \in J$;

Turni in ospedale

Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

Modello PLI

- Siano *lun*, *mar*, *mer*, *gio*, *ven*, *sab* e *dom* il numero di infermieri in cui turno inizia di lunedì,… domenica

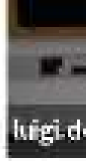
$$
\begin{array}{llr}
\textbf{min} & lun + mar + mer + gio + ven + sab + dom & \\
\textbf{s.t.} & & \\
& lun + gio + ven + sab + dom \geq 17 & \text{(presenze lunedì)} \\
& lun + mar + ven + sab + dom \geq 13 & \text{(presenze martedì)} \\
& lun + mar + mer + sab + dom \geq 15 & \text{(presenze mercoledì)} \\
& lun + mar + mer + gio + dom \geq 19 & \text{(presenze giovedì)} \\
& lun + mar + mer + gio + ven \geq 14 & \text{(presenze venerdì)} \\
& mar + mer + gio + ven + sab \geq 16 & \text{(presenze sabato)} \\
& mer + gio + ven + sab + dom \geq 11 & \text{(presenze domenica)}
\end{array}
$$

$lun, mar, mer, gio, ven, sab, dom \in \mathbb{Z}_+$

Localizzazione di servizi

Una città è divisa in sei quartieri, dove si vogliono attivare dei centri unificati di prenotazione (CUP) per servizi sanitari. In ciascun quartiere è stata individuata una possibile località di apertura. Le distanze medie in minuti da ciascun quartiere a ciascuna delle possibili località è indicata in tabella. Si desidera che nessun utente abbia un tempo medio di spostamento superiore a 15 minuti per arrivare al CUP più vicino e si vuole minimizzare il numero di CUP attivati.

	Loc. 1	Loc. 2	Loc 3	Loc. 4	Loc. 5	Loc. 6
Q.re 1	5	10	20	30	30	20
Q.re 2	10	5	25	35	20	10
Q.re 3	20	25	5	15	30	20
Q.re 4	30	35	15	5	15	25
Q.re 5	30	20	30	15	5	14
Q.re 6	20	10	20	25	14	5



Modello PLI

Sia $x_i = 1$, se viene aperto il CUP nel quartiere *i*, 0 altrimenti

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

s.t.

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & + x_2 & & & & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 1)} \\
x_1 & + x_2 & & & & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 2)} \\
 & & x_3 & + x_4 & & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 3)} \\
 & & x_3 & + x_4 & + x_5 & & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 4)} \\
 & & & x_4 & + x_5 & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 5)} \\
 & x_2 & & & + x_5 & + x_6 & \geq 1 \text{ (esigenze q.re 6)}
\end{array}
$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

Produzione e forza lavoro

Un'azienda produce i modelli I, II e III di un certo prodotto a partire dai materiali grezzi A e B, di cui sono disponibili 4000 e 6000 unità, rispettivamente. In particolare, ogni unità del modello I richiede 2 unità di A e 4 di B; un'unità del modello II richiede 3 unità di A e 2 di B; ogni unità del modello III richiede 5 unità di A e 7 di B. Il modello I richiede una forza lavoro doppia rispetto al modello II e tripla rispetto al modello III. La forza lavoro disponibile è in grado di produrre al massimo l'equivalente di 700 unità del modello I. Il settore marketing dell'azienda ha reso noto che la domanda minima per ciascun modello è rispettivamente di 200, 200 e 150 unità, al prezzo di 30, 20 e 50 euro. Si vuole massimizzare il ricavo totale.

Modello PLI

x_i: numero di unità del modello i da produrre, $\forall\, i \in \{I, II, III\}$

$$\max \quad 30x_I + 20x_{II} + 50x_{III}$$

$s.t.$

$$
\begin{array}{ll}
x_I \geq 200 & \text{(vincoli sulla domanda)} \\
x_{II} \geq 200 & \\
x_{III} \geq 150 & \\
& \\
2x_I + 3x_{II} + 5x_{III} \leq 4000 & \text{(vincoli sui materiali)} \\
4x_I + 2x_{II} + 7x_{III} \leq 6000 & \\
& \\
x_I + \frac{1}{2}x_{II} + \frac{1}{3}x_{III} \leq 700 & \text{(vincoli sulla forza lavoro)} \\
& \\
x_i \in \mathbb{Z}_+, \forall\, i \in \{I, II, III\} & \text{(dominio)}
\end{array}
$$

Capacità produttiva in eccesso

Una società ha tre impianti con capacità produttiva eccedente. Tutti e tre impianti sono in grado di produrre schiume di lattice e si è deciso di sfruttare in questo modo la capacità produttiva in eccesso. Le schiume possono essere realizzate in tre diverse densità (bassa, media e alta) che forniscono un profitto netto unitario di 9, 10 e 12 euro. Gli stabilimenti 1, 2 e 3 hanno manodopera e capacità produttiva in eccesso per produrre, rispettivamente, 500, 600 e 300 quintali al giorno, indipendentemente dalla densità delle schiume. Comunque, la disponibilità dello spazio destinato all'immagazzinamento durante il processo produttivo limita la produzione. Gli stabilimenti 1, 2 e 3 hanno, rispettivamente, 900, 800 e 350 mq di magazzino disponibile per questo prodotto. Ogni quintale di schiuma prodotta al giorno in densità bassa, media o alta richiede 2, 1.5 e 1 mq, rispettivamente. Le previsioni di vendita indicano che si possono vendere al massimo 600, 800 e 500 quintali delle schiume di densità bassa, media e alta, rispettivamente. I sindacati hanno chiesto di mantenere un carico di lavoro uniforme e la direzione ha concordato che sarà utilizzata la medesima percentuale della capacità produttiva in eccesso. La direzione ci chiede di determinare come suddividere la produzione per massimizzare il profitto totale.

Modello PLI

x_{ij}: quantità di schiuma di densità j prodotta nello stabilimento

luigi.degio

$$\max \quad 9(x_{1b}+x_{2b}+x_{3b}) + 10(x_{1m}+x_{2m}+x_{3m}) + 12(x_{1a}+x_{2a}+x_{3a})$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \; \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{b,m,a\}$$

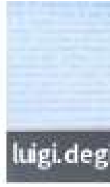
$$s.t. \quad x_{1b}+x_{1m}+x_{1a} \le 500 \quad \boxed{\text{manodopera}}$$
$$x_{2b}+x_{2m}+x_{2a} \le 600$$
$$x_{3b}+x_{3m}+x_{3a} \le 300$$

$$x_{1b}+x_{2b}+x_{3b} \le 600$$
$$x_{1m}+x_{2m}+x_{3m} \le 800$$
$$x_{1a}+x_{2a}+x_{3a} \le 500$$
$$\boxed{\text{vendita}}$$

$$2x_{1b}+1.5x_{1m}+1x_{1a} \le 900$$
$$2x_{2b}+1.5x_{2m}+1x_{2a} \le 800$$
$$2x_{3b}+1.5x_{3m}+1x_{3a} \le 350 \quad \boxed{\text{magazzini}}$$

$$\frac{1}{500}(x_{1b}+x_{1m}+x_{1a}) = \frac{1}{600}(x_{2b}+x_{2m}+x_{2a})$$
$$\frac{1}{500}(x_{1b}+x_{1m}+x_{1a}) = \frac{1}{300}(x_{3b}+x_{3m}+x_{3a})$$
$$\boxed{\text{carico di lavoro}}$$

Piani multi-periodo di investimento



Un finanziere ha due piani di investimento A e B disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno garantisce, due anni più tardi, un profitto di 0,4 euro (e può essere immediatamente reinvesito). Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0,7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche i piani di investimento C e D. Ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo 4 anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0,3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C e D vale la possibilità di reinvestimento, come per il piano A. Il finanziere ha a disposizione 10000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il capitale posseduto all'inizio del sesto anno.

Modello PLI

x_{ij}: capitale, in euro, investito nel piano i all'inizio dell'anno j

$$\max \quad 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 0.7(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3}) + x_{C2} + 0.3x_{D5} + 10000$$

$s.t.$

$$x_{A1} + x_{B1} \leq 10000 \qquad \text{(anno 1)}$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 10000 - x_{A1} - x_{B1} \qquad \text{(anno 2)}$$

$$x_{A3} + x_{B3} \leq 10000 + 0.4x_{A1} - x_{B1} - x_{A2} - x_{B2} - x_{C2} \qquad \text{(anno 3)}$$

$$x_{A4} \leq 10000 + 0.4x_{A1} + 0.7x_{B1} + 0.4x_{A2} - x_{B2} - x_{C2} - x_{A3} - x_{B3} \qquad \text{(anno 4)}$$

$$x_{D5} \leq 10000 + 0.4x_{A1} + 0.7x_{B1} + 0.4x_{A2} + 0.7x_{B2} + 0.4x_{A3} + -x_{C2} - x_{B3} - x_{A4} \qquad \text{(anno 5)}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\, i \in \{A, B, C, D\}, \forall\, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{(dominio)}$$

luigi.deg

Produzione su più linee

Un mangime è ottenuto miscelando una stessa quantità di tre componenti che p
sono essere lavorate su quattro linee di produzione differenti. Ogni linea è dotata di una limitata capacità di ore di lavorazione e una diversa produttività (unità di componente per ogni ora), come indicato nella seguente tabella:

Linea	Capacità	Produttività		
		componente 1	componente 2	componente 3
1	100	10	15	5
2	150	15	10	5
3	80	20	5	10
4	200	10	15	20

Si vuole determinare il numero di ore di lavorazione di ciascuna componente su ciascuna linea di produzione in modo da massimizzare la quantità di mangime complessivamente prodotta.

Una formulazione

x_{ij}: numero di ore di lavorazione della componente j sulla linea di lavorazione i

p_j: quantità di componente j prodotta

$$\max \boxed{\min\{p_1, p_2, p_3\}}$$

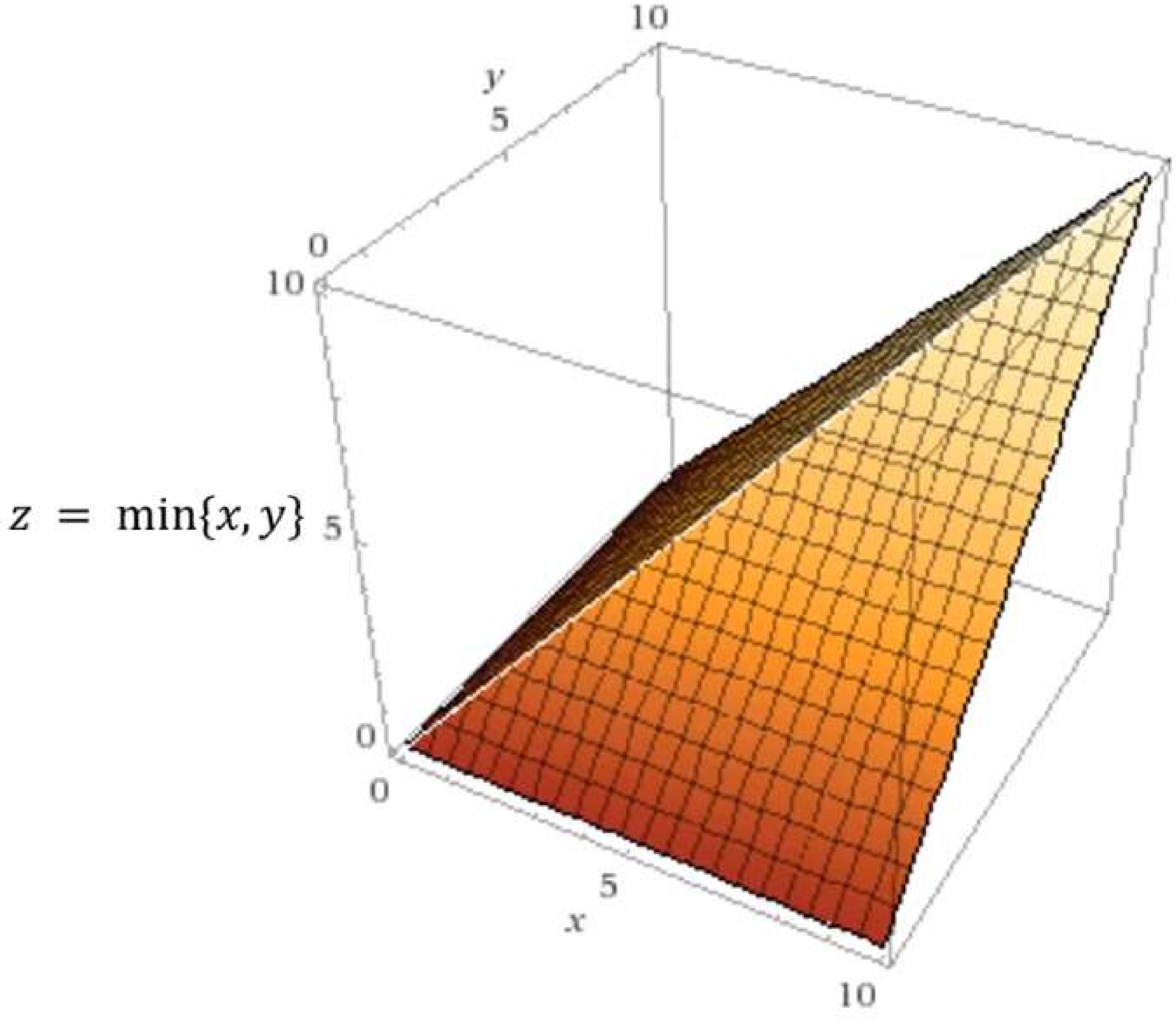
$s.t.$

$$p_1 = 10x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} + 10x_{41}$$
$$p_2 = 15x_{12} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42}$$
$$p_3 = 5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 80$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 200$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\ i \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall\ j \in \{1, 2, 3\}$$

min non è una funzione lineare



Una formulazione non lineare

x_{ij}: numero di ore di lavorazione della componente j sulla linea di lavorazione i

p_j: quantità di componente j prodotta

$$\max \boxed{\min\{p_1, p_2, p_3\}}$$

$s.t.$

$$p_1 = 10x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} + 10x_{41}$$
$$p_2 = 15x_{12} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42}$$
$$p_3 = 5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 80$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \leq 200$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\ i \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall\ j \in \{1, 2, 3\}$$

Min-max, max-min e min-abs

$$\max \min \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

$$\begin{aligned} &\max y \\ &y \leq e_1 \\ &y \leq e_2 \\ &\ldots \\ &y \leq e_n \end{aligned}$$

$$\min \max \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

$$\begin{aligned} &\min y \\ &y \geq e_1 \\ &y \geq e_2 \\ &\ldots \\ &y \geq e_n \end{aligned}$$

- **min** non è una funzione lineare
- **max** non è una funzione lineare
- **Valore assoluto** non è una funzione lineare

$$\min |e| \equiv \min \max \{e, -e\}$$

$$\begin{aligned} &\min y \\ &y \geq e \\ &y \geq -e \end{aligned}$$

Una formulazione LINEARE (modello PL)

x_{ij}: numero di ore di lavorazione della componente j sulla linea di lavorazione i

p_j: quantità di componente j prodotta

$$\max y$$

$s.t.$

$$p_1 = 10x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} + 10x_{41} \qquad y \le p_1$$
$$p_2 = 15x_{12} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42} \qquad y \le p_2$$
$$p_3 = 5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43} \qquad y \le p_3$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 150$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \le 80$$
$$x_{31} + x_{42} + x_{53} \le 200$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+, \forall\, i \in \{1,2,3,4\}, \forall\, j \in \{1,2,3\}$$

Schedulazione just-in-time

Un server deve pianificare l'esecuzione di cinque batch su una macchina mono-processore. I batch durano rispettivamente 5, 7, 4, 7 e 10 minuti. La sequenza di esecuzione 1-2-3-4-5 è data e non ci può essere sovrapposizione temporale tra i batch. Il primo batch ha come ora di consegna desiderata le 10:32, il secondo le 10:38, il terzo le 10:42, il quarto le 10:52 e il quinto le 10:57. La consegna dei batch elaborati deve essere il più puntuale possibile: si paga una penale di 750 euro per ogni minuto di anticipo o ritardo nella consegna. Organizzare i tempi di esecuzione (al minuto) per minimizzare la penale totale.

Modello PL

i_j: minuto dopo le 10:00 nel quale la macchina inizia il batch j

y_j: minuti di anticipo/ritardo del job j

$$\min \quad 750(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

$s.t.$

$$\begin{array}{ll}
y_1 \geq i_1 + 5 - 32 & y_1 \geq 32 - 5 - i_1 \\
y_2 \geq i_2 + 7 - 38 & y_2 \geq 38 - 7 - i_2 \\
y_3 \geq i_3 + 4 - 42 & y_3 \geq 42 - 4 - i_3 \\
y_4 \geq i_4 + 7 - 52 & y_4 \geq 52 - 7 - i_4 \\
y_5 \geq i_5 + 10 - 57 & y_5 \geq 57 - 10 - i_5
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
i_2 \geq i_1 + 5 & i_j \in \mathbb{Z}_+, \forall\, j \in \{1,2,3,4,5\} \\
i_3 \geq i_2 + 7 & y_j \in \mathbb{R}, \forall\, j \in \{1,2,3,4,5\} \\
i_4 \geq i_3 + 4 & \\
i_5 \geq i_4 + 7 &
\end{array}$$

Localizzazione con costi fissi

Una catena delle Grande Distribuzione Organizzata (GDO) dispone di un budget W per l'apertura di nuovi ipermercati in Italia. Gli studi preliminari hanno individuato un insieme I di possibili localizzazioni. Per l'apertura di un ipermercato nella localizzazione i bisogna sostenere un costo fisso F_i (acquisto del terreno, oneri amministrativi etc.) e un costo variabile pari a C_i ogni 100 mq di ipermercato. Una volta aperto e entrato a regime, ciascun ipermercato localizzato in i produrrà entrate per R_i ogni 100 mq. Determinare l'insieme di localizzazioni in cui aprire dei nuovi ipermercati e dimensionare gli ipermercati stessi in modo da massimizzare i ricavi complessivi.

Variabili decisionali

- $x_i : i \in I$: dimensione in centinaia di mq dell'ipermercato localizzato in i;
- $y_i : i \in I$: **variabile logica (binaria)** legata all'apertura di un ipermercato nella localizzazione i, cioè:
$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ se viene aperto un ipermercato nella localizzazione } i\ (x_i > 0) \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Modello

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in I} R_i x_i \\ & s.t. \\ & \sum_{i \in I} C_i x_i + F_i y_i \leq W \qquad \text{(budget)} \\ & x_i \leq M\, y_i \quad \forall\, i \in I \qquad (\textit{attivazione} \text{ delle variabili binarie}) \\ & \\ & x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

M: **costante** di valore "molto grande" (**big-M**). Ad esempio, $M \geq \max_{i \in I} \left\{ \frac{W - F_i}{C_i} \right\}$.

Localizzazione con costi fissi e vincoli aggiuntivi

Una catena delle Grande Distribuzione Organizzata (GDO) dispone di un budget W per l'apertura di nuovi ipermercati in Italia. Gli studi preliminari hanno individuato un insieme I di possibili localizzazioni. Per l'apertura di un ipermercato nella localizzazione i bisogna sostenere un costo fisso F_i (acquisto del terreno, oneri amministrativi etc.) e un costo variabile pari a C_i ogni 100 mq di ipermercato. Una volta aperto e entrato a regime, ciascun ipermercato localizzato in i produrrà entrate per R_i ogni 100 mq. Per ogni localizzazione, è prevista una dimensione massima U_i e, nel caso di apertura, una dimensione minima pari a L_i. Determinare l'insieme di localizzazioni in cui aprire dei nuovi ipermercati e dimensionare gli ipermercati stessi in modo da massimizzare i ricavi complessivi, tenendo conto che non possono essere aperti più di K ipermercati.

Portfolio Optimization

Un cliente affida ad un'agenzia finanziaria 100 000 euro da impiegare in fondi di investimento. I fondi attualmente offerti dal mercato sono di cinque tipi, come riassunto in tabella:

Nome	**Tipo**	**Moody's rating**	**Durata (anni)**	**Rendita alla maturazione**
A	privato	Aa	9	4,5%
B	pubblico	A	15	5,4%
C	stato	Aaa	4	5,1%
D	stato	Baa	3	4,4%
E	privato	Ba	2	6,1%

Si sa che i fondi pubblici e dello stato sono tassati del 30% alla fine del periodo. Il cliente chiede di riservare almeno il 40% del capitale a fondi pubblici e dello stato e vuole che la durata media dell'investimento non superi i 5 anni. Le regole del mercato impongono che l'investimento in C precluda la possibilità di investire in D, e viceversa. Inoltre, è possibile investire in E solo se si sono investiti almeno 10 000 euro in A. Infine, trasformando il Moody's rating in una scala numerica (Aaa = 1, Aa = 2, A = 3, Baa = 4 e Ba = 5), il valore medio del rischio dell'investimento non deve superare 1,5. Si vuole massimizzare la rendita finale dell'investimento.

Modelli con vincoli di tipo logico: esempi

Nota: y sono variabili logiche e x variabili di altro tipo (reali o intere).

SBAGLIATO formulazioni *NON LINEARI*!!!			**Corretto** Vincoli	Domini
if $x_1 > 0$ then $x_2 = 0$ and if $x_2 > 0$ then $x_1 = 0$	$nand(y_1, y_2)$	$x_1 x_2 = 0$ $y_1 y_2 = 0$	$x_1 \leq M y_1$ $x_2 \leq M y_2$ $y_1 + y_2 \leq 1$	$x_1, x_2 \geq 0$ $y_1, y_2 \in \{0,1\}$ $(M \to \infty)$
if $x > 0$ then $y = 1$	$(x > 0) \to (y = 1)$	$x(1-y) = 0$	$x \leq My$	$x \geq 0, y \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ or $y_2 = 1$	$y_1 \vee y_2$	$(1-y_1)(1-y_2) = 0$	$y_1 + y_2 \geq 1$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ and $y_2 = 1$	$y_1 \wedge y_2$	$y_1 y_2 = 1$	$y_1 + y_2 = 2$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 1$	$y_1 \to y_2$	$y_1(1-y_2) = 0$	$y_1 \leq y_2$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ only if $y_2 = 0$	$y_1 \to \overline{y_2}$	$y_1 y_2 = 0$	$y_1 \leq (1-y_2)$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
$y_1 = 1$ xor $y_2 = 1$	$y_1 \neq y_2$		$y_1 + y_2 = 1$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
etc. etc. etc.			etc. etc. etc.	
Queste formulazioni sono semanticamente corrette ma **NON ACCETTABILI** in un modello di programmazione lineare			Queste formulazioni sono corrette a patto di - SPECIFICARE I DOMINI - ATTIVARE le var. logiche	