

Scrivere subito! COGNOME: _____ *Questo foglio deve essere consegnato con l'elaborato*
 NOME: _____
 MATRICOLA: _____

1. In vista del Natale, una ditta di trasporti è stata incaricata delle spedizioni di confezioni di pandori in 4 città a partire da 3 centri A, B, C e vuole valutare la convenienza ad aprire un quarto centro D. Le distanze in km tra i centri e le città sono indicate in tabella, insieme al numero di confezioni richieste da ogni città e alle disponibilità di ogni centro:

| km | Città 1 | Città 2 | Città 3 | Città 4 | Disponibilità |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------------|
| Centro A | 200 | 150 | 80 | 220 | 3000 |
| Centro B | 230 | 170 | 120 | 190 | 2000 |
| Centro C | 180 | 130 | 90 | 200 | 1500 |
| Centro D | 50 | 200 | 100 | 150 | 1000 |
| Richiesta | 1000 | 700 | 800 | 1200 | |

I costi di trasporto sono di 2 centesimi di euro a chilometro per ciascuna confezione. Determinare il piano di trasporto di costo minimo e valutare la convenienza di aprire il nuovo centro D, considerando che:

- la città 1 ha bisogno di almeno 200 confezioni dal centro A e 300 confezioni dal centro B;
- per motivi logistici, il centro B non può servire più di 2 città diverse;
- il costo di apertura del nuovo centro D è di 1500 euro;
- il centro D, per poter essere aperto, deve servire una domanda di almeno 500 confezioni;
- se il centro C serve la città 1, allora non può servire la città 2 .

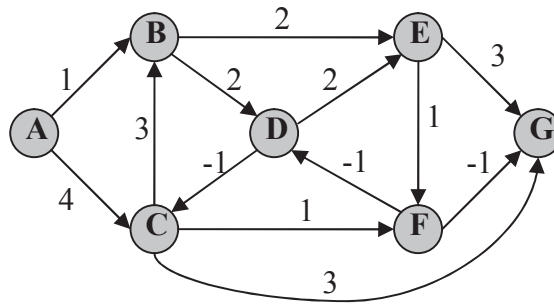
(Si suggerisce di scrivere il modello tenendo conto dei punti sopra elencati nell'ordine proposto.)

2. Si risolva con il metodo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare, applicando la regola anticiclo di Bland.

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & - & x_1 & + & 2 & x_2 & - & 7 & x_3 & - & 3 & x_4 \\
 \text{s.t.} & 2 & x_1 & + & & x_2 & + & 2 & x_3 & + & & x_4 & \geq & -2 \\
 & & x_1 & + & 2 & x_2 & - & 4 & x_3 & - & 2 & x_4 & \leq & 4 \\
 & -2 & x_1 & - & & x_2 & & & & - & & x_4 & \geq & -2 \\
 & x_1 \geq 0 & & & x_2 \geq 0 & & & & x_3 \geq 0 & & & x_4 \leq 0
 \end{array}$$

... CONTINUA SUL RETRO ...

3. Dato il seguente grafo, calcolare i cammini minimi a partire dal nodo A verso tutti gli altri nodi:



- si scelga l'algoritmo da utilizzare e si motivi la scelta;
- si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
- si disegni l'albero dei cammini minimi da A o, se esiste, si individui un ciclo negativo.

4. Enunciare le condizioni di complementarità primale-duale in generale.

Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (-1/5, 0, 8/5)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
 & -x_1 + 3x_3 \leq 5 \\
 & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -6 \\
 & 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
 & x_1 \leq 0 \quad x_2 \text{ libera} \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | z | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| -2 | 0 | -3 | 1 | 0 | 0 | -1 | 5 |
| -1 | 0 | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 1 | 1 | -1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Si dica, senza svolgere calcoli e fornendo una giustificazione teorica delle risposte:

- quale è la soluzione di base corrispondente? Possiamo subito dire se è ottima?
- perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato (1)?
- su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
- quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Che caratteristica avrà la soluzione di base ottenuta?

6. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Senza svolgere calcoli, cosa possiamo dire del corrispondente problema duale? In base a quale proprietà? Fornire una giustificazione teorica della risposta.

Ricerca Operativa

Soluzione del tema d'esame del 10 Dicembre 2012

Luigi De Giovanni

1) Introduciamo gli insiemi $I = \{A, B, C, D\}$ dei centri e $J = \{1, 2, 3, 4\}$ delle città, e le variabili:

- x_{ij} : numero di confezioni trasportate dal centro $i \in I$ alla città $j \in J$;
- y_{ij} : 1 se il centro $i \in I$ serve la città $j \in J$, 0 altrimenti;
- z : 1 se si apre il centro D , 0 altrimenti.

Un possibile modello è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0,02(200x_{A1} + 150x_{A2} + 80x_{A3} + 220x_{A4} + \\ & + 230x_{B1} + 1750x_{B2} + 120x_{B3} + 190x_{B4} + \\ & + 180x_{C1} + 130x_{C2} + 90x_{C3} + 200x_{C4} + \\ & + 50x_{D1} + 200x_{D2} + 100x_{D3} + 150x_{D4}) + 1500z \end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} &\leq 3000 \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} &\leq 2000 \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} &\leq 1500 \\ x_{D1} + x_{D2} + x_{D3} + x_{D4} &\leq 1000z \\ x_{D1} + x_{D2} + x_{D3} + x_{D4} &\geq 500z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + x_{D1} &\geq 1000 \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + x_{D2} &\geq 700 \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} + x_{D3} &\geq 800 \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} + x_{D4} &\geq 1200 \end{aligned}$$

$$x_{A1} \geq 200 \quad x_{B1} \geq 300$$

$$\begin{aligned} y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} + y_{B4} &\leq 2 \\ x_{B1} &\leq My_{B1} \quad x_{B2} \leq My_{B2} \quad x_{B3} \leq My_{B3} \quad x_{B4} \leq My_{B4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{C2} &\leq 1 - y_{C1} \\ x_{C1} &\leq My_{C1} \quad x_{C2} \leq My_{C2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i \in I, j \in J \\ y_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \{(B, 1), (B, 2), (B, 3), (B, 4), (C, 1), (C, 2)\} \\ z &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- 2) Si risolva con il metodo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare, applicando la regola anticiclo di Bland.

$$\begin{array}{ll}
 \max & -x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 \\
 \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -2 \\
 & x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \leq 4 \\
 & -2x_1 - x_2 - x_4 \geq -2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
 & x_4 \leq 0
 \end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard ($\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$). Poiché $x_4 \leq 0$, introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_4 = -x_4$ con $\hat{x}_4 \geq 0$.

$$\begin{array}{ll}
 \min & x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3\hat{x}_4 \\
 \text{s.t.} & -2x_1 - x_2 - 2x_3 + \hat{x}_4 + x_5 = 2 \\
 & x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2\hat{x}_4 + x_6 = 4 \\
 & 2x_1 + x_2 - \hat{x}_4 + x_7 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{array}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack x_5, x_6 e x_7 , disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_5, x_6, x_7\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B . Organizziamo i dati in forma tableau.

| | x_1 | x_2 | x_3 | \hat{x}_4 | x_5 | x_6 | x_7 | z | \bar{b} |
|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|-----|-----------|
| $-z$ | 1 | -2 | 7 | -3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x_5 | -2 | -1 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| x_6 | 1 | 2 | -4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| x_7 | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_6 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 2, 4, 2)$ di valore $z = 0$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-2 e -3), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto

negativo che entra in base, la variabile x_2 e, come variabile uscente, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{-1}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 2$. Poiché sia x_6 che x_7 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, fra le due, scegliamo come variabile uscente quella con indice minore, quindi x_6 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, x_2, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/2$, $R_1 \leftarrow R_1 + R_2/2$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_2/2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

| | x_1 | x_2 | x_3 | \hat{x}_4 | x_5 | x_6 | x_7 | z | \bar{b} |
|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-----|-----------|
| $-z$ | 2 | 0 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 4 |
| x_5 | -3/2 | 0 | -4 | 2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 4 |
| x_2 | 1/2 | 1 | -2 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 2 |
| x_7 | 3/2 | 0 | 2 | -2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | 0 |

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_2 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 2, 0, 0, 4, 0, 0)$ di valore $z = -4$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo (-1), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile con costo ridotto negativo, ovvero \hat{x}_4 . Per scegliere la variabile che esce di base calcoliamo $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i4}} : \bar{a}_{i4} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \frac{0}{-2} \right\} = 2$. Poiché sia x_5 che x_2 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, scegliamo come variabile uscente quella con indice minore, quindi x_2 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, \hat{x}_4, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

| | x_1 | x_2 | x_3 | \hat{x}_4 | x_5 | x_6 | x_7 | z | \bar{b} |
|-------------|--------|-------|-------|-------------|-------|--------|-------|------|-----------|
| $-z$ | $5/2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $3/2$ | 0 | -1 | 6 |
| x_5 | $-5/2$ | -2 | 0 | 0 | 1 | $-1/2$ | 0 | 0 | 0 |
| \hat{x}_4 | $1/2$ | 1 | -2 | 1 | 0 | $1/2$ | 0 | 0 | 2 |
| x_7 | $5/2$ | 2 | -2 | 0 | 0 | $1/2$ | 1 | 0 | 4 |

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ \hat{x}_4 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_4 \ A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 2, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga sono non negativi e quindi la base corrente $B = \{x_5, \hat{x}_4, x_7\}$ è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 2, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, -2)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 6$.

- 3) Dato il grafo indicato nel testo, calcolare i cammini minimi a partire dal nodo A verso tutti gli altri nodi:
- si scelga l'algoritmo da utilizzare e si motivi la scelta;
 - si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
 - si disegni l'albero dei cammini minimi da A o, se esiste, si individui un ciclo negativo.

Soluzione.

- Data la presenza di alcuni costi strettamente negativi, non è possibile utilizzare l'algoritmo più efficiente visto a lezione, ovvero l'algoritmo di Dijkstra, quindi applichiamo l'algoritmo di Bellman-Ford.
-

| <i>iterazione</i> | <i>nodo A</i> | <i>nodo B</i> | <i>nodo C</i> | <i>nodo D</i> | <i>nodo E</i> | <i>nodo F</i> | <i>nodo G</i> | <i>Aggiornati</i> |
|-------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---|-------------------|
| $h = 0$ | $0_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | A |
| $h = 1$ | $0_{(\Lambda)}$ | $1_{(A)}$ | $4_{(A)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | $+\infty_{(\Lambda)}$ | B, C |
| $h = 2$ | $0_{(\Lambda)}$ | $1_{(A)}$ | $4_{(A)}$ | $3_{(B)}$ | $3_{(B)}$ | $5_{(C)}$ | $7_{(C)}$ | D, E, F, G |
| $h = 3$ | $0_{(\Lambda)}$ | $1_{(A)}$ | $2_{(D)}$ | $3_{(B)}$ | $3_{(B)}$ | $4_{(E)}$ | $6_{(E)}$ $4_{(F)}$ | C, F, G |
| $h = 4$ | $0_{(\Lambda)}$ | $1_{(A)}$ | $2_{(D)}$ | $3_{(B)}$ | $3_{(B)}$ | $3_{(C)}$ | $3_{(F)}$ | F, G |
| $h = 5$ | $0_{(\Lambda)}$ | $1_{(A)}$ | $2_{(D)}$ | $2_{(F)}$ | $3_{(B)}$ | $3_{(C)}$ | $2_{(F)}$ | D, G |
| $h = 6$ | $0_{(\Lambda)}$ | $1_{(A)}$ | $1_{(D)}$ | $2_{(F)}$ | $3_{(B)}$ | $3_{(C)}$ | $2_{(F)}$ | C |
| $h = 7$ | $0_{(\Lambda)}$ | $1_{(A)}$ | $1_{(D)}$ | $2_{(F)}$ | $3_{(B)}$ | $2_{(C)}$ | $2_{(F)}$ | F |

- c. L'algoritmo termina con $Aggiornati \neq \emptyset$, pertanto esiste un ciclo negativo che si ricava dal nodo F (che ha subito un aggiornamento all'ultima iterazione), procedendo a ritroso attraverso i puntatori $p(\cdot)$: $F \leftarrow C \leftarrow D \leftarrow F$, di costo $-1 - 1 + 1 = -1$.
- 4) Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale. Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (-1/5, 0, 8/5)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & -3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\
 s.t. & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 = 2 \\
 & -x_1 & & & + & 3x_3 \leq 5 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \geq -6 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 = 1 \\
 & x_1 \leq 0 & , & x_2 \text{ libera} & , & x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Soluzione.

Consideriamo la soluzione data $(x_1, x_2, x_3) = (-1/5, 0, 8/5)$ e verifichiamo che sia una soluzione ammissibile per il problema:

$$\begin{array}{llll}
 -2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 & = 2 \\
 -x_1 + 3x_3 & = & 5 & \leq 5 \\
 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -2 & \geq -6 \\
 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 & = 1 \\
 x_1 & = & -1/5 & \leq 0 \\
 x_3 & = & 8/5 & \geq 0
 \end{array}$$

Scriviamo il problema duale:

$$\begin{array}{llllll}
\min & 2u_1 & + & 5u_2 & - & 6u_3 & + & u_4 \\
s.t. & -2u_1 & - & u_2 & + & 2u_3 & + & 3u_4 \leq -3 \\
& u_1 & & & + & 2u_3 & - & u_4 = 1 \\
& u_1 & + & 3u_2 & - & u_3 & + & u_4 \geq 3 \\
& u_1 \text{ libera} & , & u_2 \geq 0 & , & u_3 \leq 0 & , & u_4 \text{ libera}
\end{array}$$

Ora cerchiamo di costruire una soluzione duale che sia in scarti complementari con la soluzione primale data. Applichiamo le condizioni di ortogonalità. Dalle informazioni sulle variabili primali otteniamo:

$$\begin{array}{llll}
x_1(-2u_1 - u_2 + 2u_3 + 3u_4 + 3) = 0 & \Rightarrow & -1/5 \cdot (-2u_1 - u_2 + 2u_3 + 3u_4 + 3) = 0 & \Rightarrow \\
& \Rightarrow & -2u_1 - u_2 + 2u_3 + 3u_4 = -3 & \\
x_2 \text{ è libera} & \Rightarrow & \text{vincolo duale di uguaglianza} & \Rightarrow \\
& \Rightarrow & u_1 + 2u_3 - u_4 = 1 & \\
x_3(u_1 + 3u_2 - u_3 + u_4 - 3) = 0 & \Rightarrow & 8/5 \cdot (u_1 + 3u_2 - u_3 + u_4 - 3) = 0 & \Rightarrow \\
& \Rightarrow & u_1 + 3u_2 - u_3 + u_4 = 3 &
\end{array}$$

Si osservi che, poiché x_2 è libera, non si considera la condizione di ortogonalità tra il secondo vincolo duale e x_2 . D'altra parte il secondo vincolo duale è una uguaglianza, che può essere direttamente sfruttata nel sistema di vincoli. Quindi, aggiungeremo nel sistema il secondo vincolo duale: $u_1 + 2u_3 - u_4 = 1$. (Si osservi che, se erroneamente si considerasse la condizione di ortogonalità tra il secondo vincolo duale e x_2 , poiché $x_2 = 0$, ciò comporterebbe a non aggiungere alcuna condizione e condurrebbe dunque in errore.)

Dalle informazioni sui vincoli primali otteniamo:

$$\begin{array}{llll}
\text{vincolo primale di uguaglianza} & \Rightarrow & // & \\
u_2(-x_1 + 3x_3 - 5) = 0 & \Rightarrow & u_2 \cdot 0 = 0 & \Rightarrow // \\
u_3(2x_1 + 2x_2 - x_3 + 6) = 0 & \Rightarrow & u_3 \cdot 4 = 0 & \Rightarrow u_3 = 0 \\
\text{vincolo primale di uguaglianza} & \Rightarrow & // &
\end{array}$$

Mettendo a sistema le condizioni ricavate otteniamo:

$$\begin{cases} -2u_1 - u_2 + 2u_3 + 3u_4 = -3 \\ u_1 + 2u_3 - u_4 = 1 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 + u_4 = 3 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 4/5 \\ u_2 = 4/5 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = -1/5 \end{cases}$$

Verifichiamo che la soluzione duale ottenuta, $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (4/5, 4/5, 0, -1/5)$, è ammissibile per il problema duale:

$$\begin{array}{rclcl}
-2u_1 - u_2 + 2u_3 + 3u_4 & = & -3 & \leq & -3 \\
u_1 + 2u_3 - u_4 & = & 1 & = & 1 \\
u_1 + 3u_2 - u_3 + u_4 & = & 3 & \geq & 3 \\
u_2 & = & 4/5 & \geq & 0 \\
u_3 & = & 0 & \leq & 0
\end{array}$$

Quindi $(x_1, x_2, x_3) = (-1/5, 0, 8/5)$ e $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (4/5, 4/5, 0, -1/5)$ è una coppia di soluzioni primale-duale ammissibili e, per costruzione, in scarti complementari. Pertanto le due soluzioni sono ottime e, in particolare, $(x_1, x_2, x_3) = (-1/5, 0, 8/5)$ è ottima per il problema dato.

(Come verifica, testiamo se i due valori delle funzioni obiettivo coincidono: $-3x_1 + x_2 + 3x_3 = 27/5$ e $2u_1 + 5u_2 - 6u_3 + u_4 = 27/5$.)

5) Si consideri il seguente tableau del simplesso:

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | z | \bar{b} |
|------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-----|-----------|
| $-z$ | -2 | 0 | -3 | 1 | 0 | 0 | -1 | 5 |
| | -1 | 0 | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| | 1 | 1 | -1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Si dica, senza svolgere calcoli e fornendo una giustificazione teorica delle risposte:

- quale è la soluzione di base corrispondente? Possiamo subito dire se è ottima?
- perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato (1)?
- su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
- quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Che caratteristica avrà la soluzione di base ottenuta?

Soluzione.

- Osserviamo che il tableau è in forma canonica rispetto alla base $B = \{x_5, x_6, x_2\}$. La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = [A_5 \ A_6 \ A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la soluzione di base corrente è $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2, 0, 0, 2, 4)$ di valore $z = -5$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi, $(-2, -3 < 0)$, quindi la soluzione di base corrente non è detto sia ottima (ricordiamo che “costi ridotti tutti positivi o nulli” è condizione SUFFICIENTE e non necessaria di ottimalità). Inoltre, poiché tutti i termini noti (colonna \bar{b}) sono strettamente positivi, allora sicuramente, aumentando il valore delle variabili corrispondenti a tali costi ridotti negativi, ovvero aumentando il valore di x_1 o x_3 , è possibile trovare una soluzione ammissibile con valore della funzione obiettivo strettamente minore e quindi la soluzione di base corrente non è ottima.

- b. L'operazione di pivot non può essere effettuata sull'elemento evidenziato (1) in quanto questa operazione porterebbe ad una soluzione non ammissibile, visto che l'elemento non soddisfa la regola del quoziente minimo. In altre parole, effettuando questo pivot, la variabile x_3 (che entra in base) assumerebbe un valore (che corrisponde al rapporto non minimo $\frac{4}{1}$) tale da portare a 0 la variabile x_6 (che uscirebbe dalla base), ma troppo alto, in quanto, per soddisfare i restanti vincoli, le altre variabili dovrebbero assumere valori negativi.
- c. Ricordiamo che il metodo del simplesso cerca cambi base che tendano a migliorare il valore della funzione obiettivo (quindi si fa entrare in base una qualsiasi colonna con costo ridotto negativo) preservando l'ammissibilità della nuova base (si fa uscire dalla base una qualsiasi variabile che soddisfi la regola del quoziente minimo). Pertanto, i possibili elementi pivot sono 2 (entra x_1 e esce x_6), 1 (entra x_1 e esce x_2) e 1 (entra x_3 e esce x_5).
- d. Seguendo la regola di Bland, l'operazione di pivot viene eseguita sull'elemento in riga t e in colonna h dove $h = \min \{j : \bar{c}_j < 0\}$ e $t = \arg \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$ e nel caso di più variabili attualmente in base che corrispondono al minimo quoziente θ , $t = \min \left\{ B_i : \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} = \theta \right\}$. Dal tableau osserviamo che i costi ridotti negativi $(-2, -3 < 0)$ corrispondono alle variabili x_1 e x_3 , quindi $h = \min \{1, 3\} = 1$. Allora il quoziente minimo corrisponde a $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{2}{-1}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 2$. Ci sono due variabili corrispondenti a questo minimo rapporto, ovvero x_6 ($t = 2$) e x_2 ($t = 3$). Pertanto, si sceglie come variabile uscente x_2 (che ha l'indice minimo), dunque $t = 3$ e alla prossima iterazione del metodo del simplesso, l'operazione di pivot verrà eseguita sull'elemento 1 in riga $t = 3$ e in colonna $h = 1$.

La regola di Bland impone l'operazione di pivot sulla prima colonna, dove due variabili x_6 e x_2 corrispondono al rapporto minimo. Pertanto, sia x_6 sia x_2 assumeranno il valore 0 nella nuova base: x_2 esce dalla base e x_6 rimane in base al valore 0, rendendo la nuova base DEGENERE.

- 6) Il problema dato è illimitato in quanto, visto che i vincoli sono tutti del tipo \leq , le variabili sono tutte positive e i coefficienti di x_2 nei due vincoli sono strettamente negativi, il valore della variabile x_2 può essere aumentato illimitatamente, individuando, in questo modo, infinite soluzioni ammissibili. Inoltre, poiché, nella funzione obiettivo, la variabile x_2 compare con coefficiente strettamente negativo, all'aumento del valore di x_2 corrisponde una diminuzione, e dunque un miglioramento (trattandosi di un problema di minimo), del valore della funzione obiettivo.

Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale è inammissibile in quanto, se per assurdo esistesse una soluzione duale ammissibile u , allora, per il Teorema di dualità debole, dovrebbe valere $c^T x \geq u^T b$ per ogni soluzione ammissibile primale x , ovvero z^* limitato, in contraddizione con l'ipotesi di illimitatezza.