Quarto appello 2021/2022

**1.** Una ludoteca vuole rinnovare il parco dei giocattoli disponibili, ricomponendo in modo diverso le parti dei vecchi giocattoli. I vecchi giocattoli sono divisi in tre tipi: il tipo "1" è composto da 4 ruote, un corpo centrale e una marmitta; il tipo "2" da 3 ruote, un corpo centrale e 2 ali; il tipo "3" da 6 ruote, 2 corpi centrali e 3 personaggi. I nuovi giocattoli saranno di tre tipi e composti come segue: il tipo "A" con 2 ruote, un personaggio e un corpo centrale; il tipo "B" con 3 ruote, due corpi centrali, 2 personaggi e una marmitta; il tipo "C" con un corpo centrale, un'ala e una ruota. Sono disponibili 20, 30 e 15 giocattoli del tipo 1, 2 e 3, rispettivamente. Le operazioni di smontaggio dei vecchi giocattoli richiedono 15, 10 e 20 minuti per il tipo 1, 2 e 3, rispettivamente, e le operazioni di montaggio dei tipi A, B e C richiedono, rispettivamente, 15, 25 e 20 minuti. Tutte le operazioni saranno svolte da volontari, che mettono a disposizione 25 ore in tutto. Ciascun giocattolo di tipo A, B o C ha un indice di gradimento pari a 2, 9 e 3, rispettivamente. Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare il massimo indice di gradimento complessivamente ottenibile dai giocattoli ricombinati che saranno disponibili nella ludoteca, tenendo conto che:

- si vuole disporre di almeno 7 giocattoli di tipo A e 8 di tipo C;
- si vuole che rimangano almeno 12 dei vecchi giochi, complessivamente;
- per almeno due dei tipi A, B o C si vuole disporre di almeno 10 giocattoli di quel tipo;
- in caso di mancanza di personaggi, sarà possibile reperirne un numero sufficiente in una ludoteca gemellata, che però è distante e occupa due ore di disponibilità di un volontario per andare a prenderli;
- è possibile montare giocattoli di tipo B solo con la consulenza di un negozio di giocattoli, che verrà ricompensata, nel caso, con 3 giocattoli di tipo A, 2 di tipo B e 5 di tipo C.

Partiamo dalla f.o., dove il problema è piuttosto *self-explanatory*: massimizzare l'indice di gradimento.
Introduciamo una variabile decisionale:
$x_i$: indice di gradimento del giocattolo di tipo $i \in \{A, B, C\}$
In questo modo, introduciamo la f.o.:

$$\max \begin{matrix} 2x_A + 9x_B + 3x_C \\ s.t. \end{matrix}$$

Notiamo che esistono due tipi di giocattoli, con varie composizioni; in particolare, vecchi e nuovi. Si noti che il secondo vincolo del problema fa riferimento a giocattoli vecchi, introducendo un "almeno 12". Quindi, creiamo una variabile decisionale:
$y_j$: quantità di giocattoli vecchi del tipo $j \in \{1,2,3\}$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 12$$

Sappiamo poi che disporremo di almeno 7 giocattoli del tipo A e 8 del tipo C. Introduciamo una variabile decisionale che modella la quantità di giocattoli vecchi del tipo vecchio.
$l_i$: quantità del giocattolo di tipo $i \in \{A, B, C\}$

$$l_A \geq 7, l_C \geq 8$$

Notiamo nella prima parte del testo del problema la presenza di operazioni di montaggio/smontaggio. Essendo due indici diversi, introduciamo due variabili decisionali apposite.
$k_i$: operazioni di montaggio del tipo giocattoli nuovi $i \in \{A, B, C\}$
$h_j$: operazioni di smontaggio del tipo giocattoli vecchi $j \in \{1,2,3\}$

Qui introduciamo una serie di vincoli:
$y_1 \leq 20, y_2 \leq 30, y_3 \leq 15$ (quantità giocattoli vecchi)

"Tutte le operazioni (smontaggio/montaggio) devono essere fatte in 25 ore"
Abbiamo i minuti e basterà convertirli (ricordiamo $25 * 60 = 1500$)

$$15k_1 + 10k_2 + 20k_3 + 15h_A + 25h_B + 20h_C \leq 1500$$

"Per almeno due dei tipi $A, B, C$ si vuole disporre di almeno 10 giocattoli di quel tipo"

Introduciamo quindi un'apposita variabile logica:
$z_i$: variabile logica che vale 1 se ho a disposizione almeno 10 giocattoli del tipo $i \in \{A, B, C\}$, 0 altrimenti

$$z_A + z_B + z_C \geq 2$$

Dobbiamo legarle alle variabili $x_i$ e introduciamo un vincolo di Big-M per una costante $M$ abbastanza grande:

$$x_A \leq M z_A, x_B \leq M z_B, x_C \leq M z_C$$

Ora, il successivo vincolo parla di "personaggi"; notando la prima parte del testo, si parla di vecchi e nuovi giocattoli sempre composti da vari pezzi: ruote, corpi centrali, ali, personaggi, marmitte.
Dobbiamo introdurre un'ulteriore variabile decisionale, che considera indistintamente sia giocattoli vecchi che nuovi
$m_{ij}$: quantità del pezzo $i \in \{R, C, A, P, M\}$ per il giocattolo di tipo $j \in \{1,2,3, A, B, C\}$

A questo livello, riusciamo a modellare tutta la prima parte del problema (considerando vecchi <= nuovi e, almeno io, decido di indicizzare il confronto tra i singoli tipi di pezzo tutto del tipo vecchio <= a tutti i singoli tipi di pezzo del tipo nuovo, quindi in senso trasposto e ugualmente corretto):

$$4m_{R1} + m_{C1} + m_{m1} \leq 2m_{RA} + m_{PA} + m_{CA}$$
$$3m_{R2} + m_{C2} + 2m_{A2} \leq 3m_{RB} + 2m_{CB} + 2m_{MB}$$
$$6m_{R3} + 2m_{C3} + 2m_{P3} \leq m_{CC} + m_{AC} + m_{RC}$$

- "In caso di mancanza di personaggi, sarà possibile reperirne di più da una ludoteca distante occupando due ore di disponibilità di un volontario"

Introduciamo una variabile decisionale:
$w$: variabile logica che vale 1 se il volontario va a prendere i personaggi mancanti, 0 altrimenti
Questo comporta l'aggiunta di un pezzo nel vincolo $\leq 1500$, in particolare considerando le 2 ore in minuti sottratte, quindi $-120w$.

- "È possibile montare giocattoli di tipo B solo con la consulenza di un negozio e verrà ricompensata con 3 giocattoli di tipo A, 2 di tipo B e 5 di tipo C".

Usiamo una variabile logica.
$s_i$: variabile binaria che vale 1 se ci si avvale della consulenza di un negozio per il tipo $i \in \{1,2,3\}$, 0 altrimenti

Si lega alle variabili di montaggio dei tipi nuovi:

$$k_i \leq M s_i$$

Il fatto delle ricompense centra con il fatto di avere come ricompensa dei giocattoli, quindi montati. Le ricompense vengono aggiunte ai vincoli di prima, aggiungendo le parti in più:

$$4m_{R1} + m_{C1} + m_{m1} \leq 2m_{RA} + m_{PA} + m_{CA} + 3s_A$$
$$3m_{R2} + m_{C2} + 2m_{A2} \leq 3m_{RB} + 2m_{CB} + 2m_{MB} + 2s_B$$
$$6m_{R3} + 2m_{C3} + 2m_{P3} \leq m_{CC} + m_{AC} + m_{RC} + 5s_C$$