CAMMINI MINIMI

- ALGORITMO DI BELLMAN-FORD:

ITERAZIONE	NODI A B ...	AGGIORNATI
0	$0, \infty, \infty$ ...	A
1	0 val_A ∞ ...	⋮
⋮	⋮	$\emptyset$

- PUÒ NON CONVERGERE
- FUNZIONA ANCHE CON CICLI NEGATIVI
  ⇓
  NON CONVERGE.
- MAX-HOP = MASSIMO NUMERO (i) DI ARCHI PER RAGGIUNGERE UN NODO ALL'ITERAZIONE i
- SI SOMMANO I VALORI DELL'ITERAZIONE PRECEDENTE.

- ALGORITMO DI DIJKSTRA:

ITERAZIONE	NODI...	$\bar{S}$	$\hat{V}$
0	$0\ \infty\ \infty\ \infty$ ...	A,B,C,D,E,F	//
1	$*\ val_A\ \infty$ ...	B,C,D,E,F	A
⋮	⋮	$\emptyset$	⋮

- PIÙ EFFICIENTE DI BELLMAN-FORD
- FUNZIONA SOLO SE TUTTI GLI ARCHI HANNO COSTO ~~[illegible]~~ POSITIVO ($c \geq 0$)
- PER VERIFICARE SE UN NODO È RAGGIUNGIBILE IN n ARCHI VADO SULL'ITERAZIONE n E (SE NON HA VALORE $+\infty$) PROCEDO A RITROSO SUI NODI RETROCEDENDO SULLA LINEA DELL'ITERAZIONE PRECEDENTE
  -> PERCHÉ CONTROLLA UN ARCO ALLA VOLTA AD OGNI ITERAZIONE)

METODO DEL SIMPLESSO

- SCRIVO IL PROBLEMA IN FORMA STANDARD =
  - F.O. DI min
  - VINCOLI DI UGUAGLIANZA CON DELLE VARIABILI DI SURPLUS
    ⇓
    SE VINCOLO $\geq 0 \Rightarrow -S$
    ALTRIMENTI SE $\leq 0 \Rightarrow +S$
  - SE DOMINIO DI $x \leq 0 \Rightarrow \hat{x} = -x$, $\hat{x} \leq 0$
- TROVO UNA BASE GRANDE COME LE RIGHE CHE DIA ORIGINE AD UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE
  ‖
  $\bar{b}_i \geq 0 \quad \forall i$
  E METTO IN FORMA CANONICA LA MATRICE
  ‖
  NEI VINCOLI TROVO UNA SOTTOMATRICE IDENTITÀ SOVRAPPOSTA DA ZERI NELLA RIGA DELLA FUNZIONE OBIETTIVO.
- – SE LA F.O. HA TUTTI VALORI (= COSTI RIDOTTI) POSITIVI (ESCLUDENDO CAMPO Z e b) ALLORA LA SOLUZIONE È OTTIMA AMMISSIBILE. => HO FINITO
  – SE UN VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO È NEGATIVO E TUTTI I VALORI DEI VINCOLI SOTTO DI LUI SONO ≤ 0. ALLORA IL PROBLEMA È ILLIMITATO => MI FERMO.
- AD OGNI PASSAGGIO SE C'È UN COSTO RIDOTTO NEGATIVO (O PIÙ) NE PRENDO UNO (QUELLO CON INDICE MINIMO PER BLAND) CHE "ENTRA"
- "ESCE" LA VARIABILE CHE HA RAPPORTO $\frac{b_i}{a_i}$ MIN $\quad a_i \to \geq 0$
- FACCIO PIVOT PER CREARE UNA NUOVA SOTTOMATRICE IDENTITÀ CON LA VARIABILE ENTRANTE E SENZA QUELLA USCENTE.
- RIPETO

MODELLAZIONE

$$\left.\begin{array}{l} \text{IF } (x_1 > 0) \to x_2 = 0 \;\; \& \\ \text{IF } (x_2 > 0) \to x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \leq M y_1 \\ x_2 \leq M y_2 \end{array} \quad y_1 + y_2 \leq 1 \left.\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1, x_2 \geq 0, \quad M \to +\infty \\ y_1, y_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

$$\text{IF } (x > 0) \to y = 1 \Rightarrow x \leq My \Rightarrow x \geq 0,\ y \in \{0,1\}$$

$$\text{IF } (x > K) \to y = 1 \Rightarrow x \geq Ky \Rightarrow x \geq 0,\ y \in \{0,1\}$$

$$y_1 = 1 \Leftrightarrow y_2 = 1 \Rightarrow y_1 \leq y_2 \Rightarrow y_1, y_2 \in \{0,1\}$$

min-abs $\Rightarrow$ min $|e|$
⇓
min-max $\{e, -e\}$
⇓
min y, $y \geq e$, $y \geq -e$

RAGIONAMENTO ANALOGO PER max-abs

DUALITÀ

AMMETTE SOLUZIONE?

		DUALE		
		FINITO	ILLIMITATO	INAMMISSIBILE
PRIMALE	FINITO	$z^* = w^*$	NO	NO
	ILLIMITATO	NO	NO	SÌ
	INAMMISSIBILE	NO	SÌ	SI?

• DUALITÀ FORTE: z^* OTTIMA PRIMALE $\Rightarrow$ u^* OTTIMA DUALE

• DUALITÀ DEBOLE: $x \in$ PRIMALE, $u \in$ DUALE $\Rightarrow u^T \cdot b \leqslant c^T \cdot x$

• CONDIZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ PRIMALE DUALE (C.C.P.D.) $\Leftrightarrow$

DEF.: DATO UN PROBLEMA PRIMALE ED IL CORRISPONDENTE DUALE, E DATI DUE VETTORI DA ASSOCIARVI (x SOLUZIONE AMMISSIBILE PRIMALE, u SOLUZIONE AMMISSIBILE DUALE) $\Rightarrow x$ e u OTTIME $\Leftrightarrow$ " e $x_j(c_j - u^T \cdot A_j) = 0$ e $u_i(a_i^T \cdot x - b_i) = 0$ $\forall j, \forall i$

• CONVERSIONE PRIMALE $\Leftrightarrow$ DUALE

min	max
$a_i^T \cdot x \geqslant b_i$	$u_i \geqslant 0$
$a_i^T \cdot x \leqslant b_i$	$u_i \leqslant 0$
$a_i^T \cdot x = b_i$	u_i LIBERA
$x_j \geqslant 0$	$u^T \cdot A_j \leqslant c_j$
$x_j \leqslant 0$	$u^T \cdot A_j \geqslant c_j$
x_j LIBERA	$u^T \cdot A_j = c_j$

• DIMOSTRAZIONE DI OTTIMALITÀ CON CCDP:

1- VERIFICO AMMISSIBILITÀ PRIMALE INSERENDO I DATI NEI VINCOLI → SE SONO RISPETTATI PROCEDO
2- SCRIVO IL RISPETTIVO DUALE
3- METTO A SISTEMA $u_i(a_i^T x - b_i) = 0$ $\forall i$ e $x_j(c_j - u^T \cdot A_j) = 0$ $\forall j$ PER TROVARE I VALORI DELLE u_i (CCPD)
4- RISOLVO IL SISTEMA: CCPD + VINCOLI DI UGUAGLIANZA DEL DUALE
5- VERIFICA AMMISSIBILITÀ DUALE INSERENDO I DATI NEI VINCOLI
6- SE AMMISSIBILE AL PUNTO 5 $\Rightarrow x$ e u OTTIME $\Rightarrow x$ OTTIMA.

(MODELLAZIONE PT.2) ⊛

$y_1 = 1 \Leftrightarrow y_2 = 0 \Rightarrow y_1 \leqslant (1 - y_2) \Rightarrow y_1, y_2 \in \{0,1\}$

$y_1 = 1$ OR $y_2 = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 \geqslant 1 \Rightarrow y_1, y_2 \in \{0,1\}$

$y_1 \neq y_2 \Rightarrow y_1 = 1$ XOR $y_2 = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_1, y_2 \in \{0,1\}$

$y_1 = 1$ AND $y_2 = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_1, y_2 \in \{0,1\}$

$\text{min-max}\{e_1, \dots, e_n\}$
$\Downarrow$
$\min y, \quad y \geqslant e_i \ \forall i$

$\text{max-min}\{e_1, \dots, e_n\}$
$\Downarrow$
$\max y, \quad y \leqslant e_i \ \forall i$

BRANCH & BOUND

max: [LB, UB] $\Rightarrow$ L.B. LIBERO +/- ; UB DIMINUISCE.

LB ← SOLUZIONE AMMISSIBILE → DIVENTA INCUMBENT

CHIUDO I NODI CON UB $\leqslant$ S.A.

BEST BOUND CHOICE → U.B MAGGIORE.

PER CHIUDERE ~~CON DIAZ~~ → SCELGO LB e UB CHE CHIUDANO TUTTI GLI ALTRI E SIANO AMMISSIBILI

min: [LB, UB] $\Rightarrow$ L.B. AUMENTA ; UB LIBERO +/-

UB ← S.A. → INCUMBENT

CHIUDO I NODI CON LB $\geqslant$ S.A.

BEST BOUND CHOICE → LB MINORE

PER CHIUDERE → SCELGO LB e UB CHE CHIUDANO TUTTI GLI ALTRI e CHE SIANO AMMISSIBILI