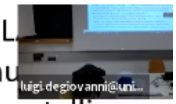
1. Un’acciaieria acquista rottame di tre tipi (T1, T2, T3) per ottenere due leghe (L




I rottami hanno contenuto percentuale diverso di tre metalli, e le leghe ottenu loro fusione devono avere un contenuto in percentuale massimo degli stessi metalli, come da tabella. Quando si fondono assieme dei rottami, si ottiene una stessa quantità di lega. Il costo dei rottami, in Keuro a tonnellata, è di 2.2, 1.9 e 2.1 per T1, T2 e T3 risp. Le leghe sono vendute in container da 10 tonnellate ciascuno, al prezzo di 50 / 60 Keuro a container di LA / LB. Saranno venduti 100 container in tutto. Scrivere un modello di programmazione lineare per massimizzare i profitti (ricavi – costi) tenendo conto che:

| **Metallo** | **Composizine rottami** | | | **massimo** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **T1** | **T2** | **T3** | **LA** | **LB** |
| Piombo | *40%* | *30%* | *25%* | *30%* | *45%* |
| Zinco | *35%* | *40%* | *35%* | *60%* | *35%* |
| Stagno | *25%* | *30%* | *40%* | *40%* | *55%* |

- per la lega LA, si vogliono impiegare almeno 10 tonnellate di T1 e 5 di T2;
- si devono vendere almeno 20 container di LA e 40 di LB;
- gestire ciascun tipo diverso di rottame determina un costo fisso di 1000 euro;
- si vogliono acquistare almeno due tipi di rottame (acquisto minimo 10 tonnellate);
- **se si acquistano almeno 100 tonn. di T1, il prezzo scende a 2.0 keuro a tonn.**

Introduciamo una variabile decisionale considera i container venduti per la lega $j \in \{A, B\}$
$y_j$: container venduti per la lega $j \in \{A, B\}$

$$\max 50y_A + 60y_B$$

Questo non basta; dobbiamo introdurre anche le tonnellate, in quanto suggerito dal primo vincolo:
$q_i$: tonnellate di rottami di tipo $i \in \{1,2,3\}$

$$\max 50y_A + 60y_B - 2.2\,q_1 + 1.9q_2 + 2.1q_3$$

(Si noti la sottrazione in quanto si tratta di costi, pertanto da sottrarre al ricavo)

Il primo vincolo dice: “per la lega LA, si vogliono impiegare almeno 10 tonnellate di T1 e 5 di T2”
Occorre decidere come miscelare i metalli rispetto alle leghe; quindi, si introduce una variabile a due indici.
$x_{ij}$: tonnellate di $i \in \{1,2,3\}$ usati per $j \in \{A, B\}$

Come tale, si modellano:

$$x_{1A} \geq 10, x_{2A} \geq 5$$

Ora consideriamo che "le leghe ottenute dalla loro fusione devono avere un contenuto in percentuale massimo degli stessi metalli:
$0.4x_{1A} + 0.3x_{2A} + 0.25x_{3A} \leq 0.6 + y_A$ oppure $\leq 0.3(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A})$
$0.35x_{1A} + 0.4x_{2A} + 0.35x_{3A} \leq 0.6(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A})$
$0.25x_{1A} + 0.3x_{2A} + 0.4x_{3A} \leq 0.4(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A})$

$0.4x_{1B} + 0.3x_{2B} + 0.25x_{3B} \leq 0.45(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})$
$0.35x_{1B} + 0.4x_{2B} + 0.35x_{3B} \leq 0.35(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})$
$0.25x_{1B} + 0.3x_{2B} + 0.4x_{3B} \leq 0.55(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})$

Le variabili $y$ sono legate alle $x$; in questo modo, leghiamo tutte le quantità $x_{ij}$ perché "le leghe sono vendute in container da 10 tonnellate ciascuno", il che significa che le singole tonnellate sono vendute con almeno un margine sulle 10 massime:

$$y_A = \frac{(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A})}{10}, y_B = \frac{(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})}{10}$$

Pure le quantità $q$ vanno legate alle $x$; quindi;

$$q_1 = x_{1A} + x_{1B}, q_2 = x_{2A} + x_{2B}, q_3 = x_{3A} + x_{3B}$$

"Si devono inoltre vendere almeno 20 container di LA e 40 di LB" → $y_A \geq 20, y_B \geq 40$
"Saranno venduti 100 container in tutto" → $y_A + y_B = 100$

Si deve inoltre "modellare il costo fisso di 1000 euro sul tipo di rottame", quindi:
$z_i$: variabile logica che vale 1 se compro il rottame di tipo $i \in \{1,2,3\}$, 0 altrimenti

Questo comporta che in funzione obiettivo si aggiunge il seguente pezzo:

$$-1(z_1 + z_2 + z_3)$$

(dove si moltiplica per $-1$ in quanto inteso come $-1{,}000$ essendo in k/euro il problema)

Attiviamo i vincoli sul rottame:

$$q_1 \leq Mz_1, q_2 \leq Mz_2, q_3 \leq Mz_3$$

$M$ costante sufficientemente grande

"Si vogliono acquistare almeno due tipi di rottame"

$$z_1 + z_2 + z_3 \geq 2$$

Dato inoltre che si vogliono acquistare almeno 10 tonnellate, "se vuoi comprare quel tipo di rottame devi averne comprato almeno 10 tonnellate"; $q_1 \geq 10z_1,\ \ q_2 \geq 10z_2,\ \ q_3 \geq 10z_3$
Alternativamente, si può compattare come:
$q_i \geq 10z_i, \forall\ i \in \{1,2,3\}$ (che non cambia niente, ma lo sintetizza)

L'ultimo punto è "se si acquistano almeno 100 tonnellate di T1, il prezzo scende a 2 k/euro a tonnellata"

La decisione da prende è data dall'acquisto scontato, dunque:
$s$: variabile logica che vale 1 se acquisto scontato, 0 altrimenti

In f.o. avrò:

$$\max 50y_A + 60y_B - 2.2\, q_1^S + 1.9q_2 + 2.1q_3 - 1(z_1 + z_2 + z_3) - 2.0q_1^S$$

Quindi, il dimensionamento è dato dall'acquisto non scontato (N) rispetto all'acquisto scontato (S):
$q_1 = q_1^S + q_1^N$ (prezzo = prezzo scontato + prezzo normale)
$q_1^S \geq 100s$ (se acquisto scontato, esiste almeno la quantità 100 tonnellate)

$q_1^S \leq Ms$ (grande quanto vuole, in quanto lo sconto esiste)
Se $s = 1$, a prescindere dalla sua grandezza, vale che: $q_1 = q_1^S$
Se $s = 0$, vale che acquistiamo a prezzo non scontato.

Domini: $y_j \in Z_+, x_{ij} \in R_+, q_i \in R_+, z_i \in \{0,1\}, s \in \{0,1\}, q_i^S \in R_+, y_i^N \in R_+, \forall\, i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{A, B\}$

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{llrl}
\max & & x_2 - 4\,x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 - 2\,x_2 + x_3 & \leq & 2 \\
& x_1 - x_2 + 2\,x_3 & \geq & -2 \\
& -2\,x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 0 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 & &
\end{array}
$$

3.

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;

b) possiamo dedurre qualche informazione sul corrispendente problema duale direttamente a partire dal risultato del punto precedente? in base a quale teorema?

$$
\begin{gathered}
\max x_2 - 4x_3 \\
s.t.\, x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 \leq -2 \\
-2x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0
\end{gathered}
$$

(Scritto in forma standard)

$$
\begin{gathered}
\min -x_2 - \hat{4}\,\widehat{x_3} \\
s.t.\, x_1 - 2x_2 - \widehat{x_3} + x_4 = 2 \\
-x_1 + x_2 + 2\widehat{x_3} + x_5 = 2 \\
-2x_1 + x_2 + \widehat{x_3} + x_6 = 0 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0
\end{gathered}
$$

Punto (a)

$B_0$ ~ VAR SLACK/SURPLUS

entra $x_2$ , esce $x_6$
entra 1 esce $x_2$

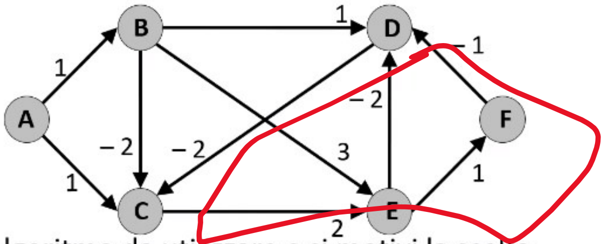
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -1 | 0 | 3 | -1 | -1 | 4 |
| 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | -1 | 0 | 8 |
| 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | -1 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | -1 | 0 | 4 |

ICUM !

Punto (b)

In base al fatto che il problema primale è illimitato, il problema duale è inammissibile (corollario del teorema della dualità debole).

3. Calcolare i cammini minimi **con al più 5 archi** dal nodo A verso <u>**tutti**</u> g
altri nodi.




a) si scelga l'algoritmo da utilizzare e <u>si motivi la scelta</u>;

b) si applichi l'algoritmo scelto (<u>riportare e **giustificare** i passi dell'algoritmo in una tabella</u>);

c) si riporti un cammino minimo con al più 5 archi da A verso C (giustificare)

d) è possibile, basandosi solo sulla tabella del punto b <u>**e senza ulteriori calcoli**</u>, determinare l'esistenza di un ciclo negativo?

a) Nella scelta dell'algoritmo, notiamo che ci viene dato un massimo numero di archi da dover rispettare, pertanto si può applicare solo l'algoritmo di Bellman – Ford, l'unico che dà la possibilità di calcolo dei cammini minimi sulla base di un massimo numero di archi. Applicheremo Bellman – Ford fermandoci alla quarta iterazioni, con un numero di archi e iterazioni pari a $k \leq 5$

b)

| Iterazione | Nodo A | Nodo B | Nodo C | Nodo D | Nodo E | Nodo F | Aggiornamenti |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Inizio$ | $0_\wedge$ | $+\infty_\wedge$ | $+\infty_\wedge$ | $+\infty_\wedge$ | $+\infty_\wedge$ | $+\infty_\wedge$ | $1$ |
| $h=1$ | $0_\wedge$ | $1_A$ | $1_A$ | $+\infty_\wedge$ | $+\infty_\wedge$ | $+\infty_\wedge$ | $B, C$ |
| $h=2$ | $0_\wedge$ | $1_A$ | $-1_B$ | $2_B$ | $3_C$ | $+\infty_\wedge$ | $C, D, E$ |
| $h=3$ | $0_\wedge$ | $1_A$ | $1_B$ | $1_E$ | $1_C$ | $4_E$ | $D, E, F$ |
| $h=4$ | $0_\wedge$ | $1_A$ | $-1_B$ | $-1_E$ | $1_C$ | $2_E$ | $D, F$ |
| $h=5$ | $0_\wedge$ | $1_A$ | $-3_D$ | $-1_E$ | $1_C$ | $2_E$ | $D$ |

c) Un cammino minimo (con al più 5 archi) può essere individuato seguendo la catena dei predecessori

$F \Rightarrow E \Rightarrow C \ \Rightarrow B \Rightarrow A$ che equivale al percorso con costo $1 + (-2) + 2 + 1 = 2$

A livello di algoritmo, si termina con *flag_aggiornato=true*, pertanto esiste un ciclo negativo, in quanto ad ogni iterazione è stata aggiornata almeno un'etichetta.

d) Basandosi solo sulla tabella e senza ulteriori calcoli, è possibile determinare il ciclo negativo perché siamo arrivati "fino in fondo" con i calcoli.

e) È possibile disegnare albero e grafo dei cammini minimi? No, in quanto abbiamo etichette instabili (no soluzione ammissibile duale e quindi no cammini minimi).

Dimostriamo ad esempio esiste il ciclo $[C, D, E, F]$; come tale, partiamo dal nodo iniziale e seguiamo per i primi nodi quelli dettati dal percorso dei predecessori e poi seguiamo il percorso che vogliamo fare noi, in questo caso ciclo; come si vede, esiste un vertice che era già presente nel cammino e che, idealmente, lo migliora ad $n$ iterazioni.

Risposte con limiti di archi (al più 5 archi)

e) È possibile disegnare albero e grafo dei cammini minimi? No, in quanto abbiamo etichette instabili (no soluzione ammissibile duale e quindi no cammini minimi). Fermandosi all'iterazione 5, vedo che $c$ è stato aggiornato e, seguendo da questo la catena dei predecessori, arrivo a costruire l'albero dei cammini minimi.
Senza fare calcoli, non posso sapere se le etichette si stabilizzeranno e quindi dato che non faccio l'iterazione 6, non riesco a fare il grafo con cammini minimi.

(Esercizio 4 – Dualità)

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | z | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −1 | 0 | −31 | 0 | −2 | 0 | −1 | −7 |
| 0 | 10 | 0 | 400 | 0 | 0 | 1 | 0 | 100 |
| 1 | −33 | 0 | 15 | −2 | 1 | 0 | 0 | 330 |
| 0 | 32 | 1 | 1 | 5 | −1 | 0 | 0 | 320 |

**Senza operazioni di pivot** e fornendo **giustificazione teorica delle risposte**:

a) si può individuare una soluzione di base corrispondente? qual è? è ottima?
b) su quali elementi sarebbe possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
c) considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland?
d) Qual è il valore della funzione obiettivo dopo il cambio base del punto c)?
e) La soluzione di base ottenuta in seguito al cambio base del punto c) è degenere oppure no?

a) Soluzione di base ottima data da $B = [x_7 \; x_1 \; x_3]$, in quanto ci sono le colonne della matrice identità
Avrò sicuramente una soluzione ammissibile perché $\bar{c} < 0$ (costo ridotto negativo), $\theta > 0$ (rapporto minimo positivo), dunque l'incremento della funzione obiettivo è positivo e migliora, dato che avremo

$$z_{min} = z + \bar{c}\theta > 0$$

b) Candidati per il cambio base (rapporti minimi) → $x_2, x_4, x_6$

c) Con Bland esce $x_3$

d) $z_{new} = -(-z) + (-1)\frac{320}{32} = 7 - 10 = -3$ (si nota anche da qui non è ottima)

e) La soluzione è degenere in quanto $x_3$ esce dalla base, ma $x_7$ assume valore $0$, assieme alle altre rimanendo in base.

(Esercizio 6 – Branch and Bound)