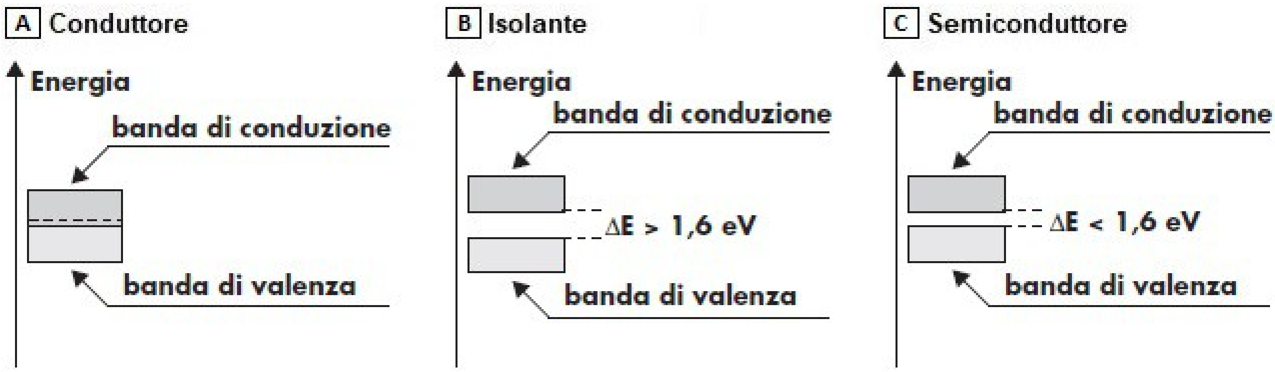
# Telecomunicazioni

## 1. Struttura della materia

L'**atomo** è composto da un **nucleo** formato da **neutroni** (carica nulla), **protoni** (carica positiva) e dagli **elettroni** (carica negativa) che ruotano attorno al nucleo.

L'atomo è **neutro** (numero protoni è pari al numero elettroni) ma se cede elettroni diventa **ione positivo**, se li acquista si trasforma in **ione negativo**.

Ricordiamo:
- protoni e neutroni hanno la stessa massa, mentre gli elettroni hanno massa inferiore;
- **orbitali**: zone dove è massima la probabilità di trovare gli elettroni (massimo 2 per orbitale);
- ogni orbitale ha un preciso **livello energetico** e i livelli energetici sono raggruppati in **bande**;
- **elettroni di valenza** (elettroni esterni): determinano le proprietà chimiche di un atomo, cioè la tendenza a formare legami chimici con altri atomi per ottenere molecole.
- **banda di valenza**: quella con i più elevati livelli energetici normalmente occupati da elettroni;
- **banda di conduzione**: quella con i livelli energetici superiori a quelli della banda di valenza che a temperatura ambiente (25 °C) è normalmente vuota;
- **conduttori**: le due bande sono adiacenti o parzialmente sovrapposte e si può avere conduzione;
- **isolanti**: le due bande sono energicamente troppo distanti e non si può avere conduzione;
- **semiconduttori**: il gap tra le bande è ridotto e quindi si creano facilmente pochi elettroni liberi.




Banda di valenza e di conduzione parzialmente sovrapposte nel caso di un conduttore (A) e separate da una banda proibita nel caso di isolante (B) o di un semiconduttore (C).

## 2. Quantità di carica e corrente elettrica

Nei metalli è facile portare gli elettroni di valenza dalla banda di valenza alla banda di conduzione e se poi si verifica il moto delle cariche in una certa direzione si ottiene una **corrente elettrica**.

Definizioni:
- **quantità di carica**: somma algebrica delle cariche elettriche in gioco; si misura in **coulomb**[**C**];
- **intensità di corrente elettrica**: quantità di cariche che passa nel conduttore in un certo intervallo di tempo; si misura in **ampere** [**A**] = [**C/s**].

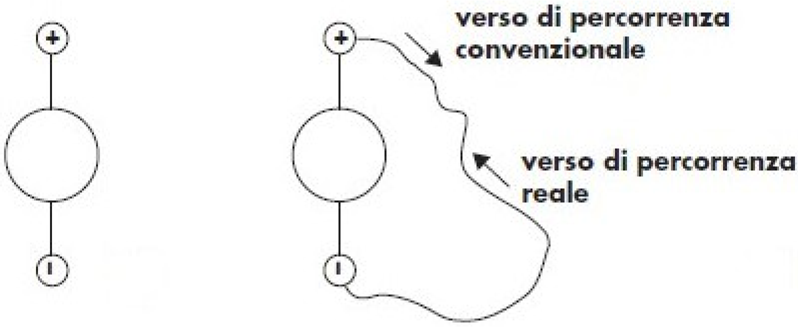
$$\boxed{I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\text{quantità di carica}}{\text{intervallo di tempo}}}$$

## 3. Il generatore elettrico

Per ottenere una corrente elettrica serve un dispositivo chiamato **generatore elettrico**. E' dotato di due morsetti detti **polo positivo** (+) e **polo negativo** (-).

Dall'elettrostatica le cariche positive addensate al polo + e quelle negative al polo – si attraggono e quindi se **chiudiamo il circuito** con un filo metallico gli elettroni liberi vanno dal polo – al + (anche se per convenzione si dice che la corrente va dal + al –).

Più precisamente la distribuzione delle cariche ai due poli determina tra gli stessi una **differenza di energia potenziale** che chiudendo il circuito permette la circolazione della corrente.




Il rapporto tra la differenza di energia potenziale tra i due poli e la quantità di carica (valutata in un polo) è detta **differenza di potenziale** o **tensione** e si misura in **volt** [**V**] = [**J/C**].

$$V = \frac{\Delta W}{Q} = \frac{\text{differenza di energia potenziale}}{\text{quantità di carica}}$$

## 4. Multipli e sottomultipli delle unità di misura

| | | | |
|---|---|---|---|
| giga | (G) | pari a $10^9$ | volte l'unità di misura di base |
| mega | (M) | pari a $10^6$ | volte l'unità di misura di base |
| chilo | (k) | pari a $10^3$ | volte l'unità di misura di base |
| milli | (m) | pari a $10^{-3}$ | volte l'unità di misura di base |
| micro | ($\mu$) | pari a $10^{-6}$ | volte l'unità di misura di base |
| nano | (n) | pari a $10^{-9}$ | volte l'unità di misura di base |
| pico | (p) | pari a $10^{-12}$ | volte l'unità di misura di base |

**Esempio**.
3mV = tre millesimi di volt = 0,003 V ovvero $3 \cdot 10^{-3}$ V.
3μA = 3 milionesi di ampere = 0,000003 A ovvero $3 \cdot 10^{-6}$ A.

## Domande

**1. Chiarire i concetti di banda di valenza e banda di conduzione.**
**Banda di energia**: esprime l'insieme dei valori energetici che un elettrone può assumere.

**Banda di valenza**: quella ai più elevati livelli energetici occupati stabilmente da elettroni.

**Banda di conduzione**: presenta livelli energetici più alti e se gli elettroni assumono valori di energia sufficienti da passare nella banda di conduzione risultano meno soggetti all'attrazione del nucleo e diventano liberi di muoversi determinando così la conducibilità del materiale.

**2. In cosa si differenziano un conduttore e un semiconduttore?**
**Conduttori**: banda di valenza e quella di conduzione adiacenti o parzialmente sovrapposte e quindi gli elettroni possono facilmente passare nella banda di conduzione.

**Semiconduttori**: le due bande differiscono di non più di 1,6 eV (1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J) e quindi basta poca energia per permettere agli elettroni di passare nella banda di conduzione.

**3. Chiarire i concetti di quantità di carica e intensità di corrente elettrica.**
**Quantità di carica**: esprime la somma algebrica delle cariche elettriche da considerare (ad esempio in un polo di un generatore); si indica con la lettera Q e si misura in coulomb [C].

**Intensità di corrente elettrica**: esprime il rapporto tra la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore e l'intervallo di tempo considerato; si misura in ampere [A].

**4. Riassumere sinteticamente le peculiarità di un generatore elettrico.**
**Generatore elettrico**: fisicamente dotato di due poli (uno positivo e uno negativo). Se una carica Q si muove dal + al -, la sua energia varia di una quantità ΔW e quindi il rapporto $V = \Delta W / Q$ dipende solo dal generatore ed è detta differenza di potenziale o tensione; si esprime in volt [V].

## Esercizi

**1. Una tensione di 3 V a quanti mV corrisponde?**
**Soluzione.** 1 mV equivale a $1 \cdot 10^{-3}$ V, quindi 3 V equivalgono a 3000 mV.

**2. Una corrente di 12 µA a quanti ampere corrisponde?**
**Soluzione.** 1 µA equivale a $1 \cdot 10^{-6}$ A, quindi 12 µA equivalgono a 0,000012 A.

**3. Una sezione è attraversata in 1 s da una quantità di carica di 15 nC; quanto vale l'intensità di corrente che l'attraversa? E se la quantità di carica attraversasse la sezione in 2 s?**
**Soluzione.** Ricordando la relazione dell'intensità di corrente elettrica si trova subito nel caso di 1 s:

$$I = \frac{15 \bullet 10^{-9}}{1} = 15 \bullet 10^{-9}\,A = 15\,nA$$

Se il tempo raddoppia (2 s) la corrente si dimezza.

**4. A quanta carica elettrica corrispondono 5 elettroni?**
**Soluzione.** Siccome la quantità di carica elettrica di un elettrone vale $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, con 5 elettroni si ha una quantità di carica elettrica pari a:

$$Q = 5 \bullet 1{,}6 \bullet 10^{-19}\,C = 8 \bullet 10^{-19}\,C$$

**5. Quanto vale la tensione esistente tra i poli di un generatore che manifesta tra i poli stessi una differenza di energia potenziale riferita al singolo elettrone di $0{,}16 \cdot 10^{-18}$ J?**
**Soluzione.** Basta applicare la relazione che determina la differenza di potenziale:

$$V = \frac{\Delta W}{Q} = \frac{0{,}16 \bullet 10^{-18}}{1{,}6 \bullet 10^{-19}} = 1\,V$$

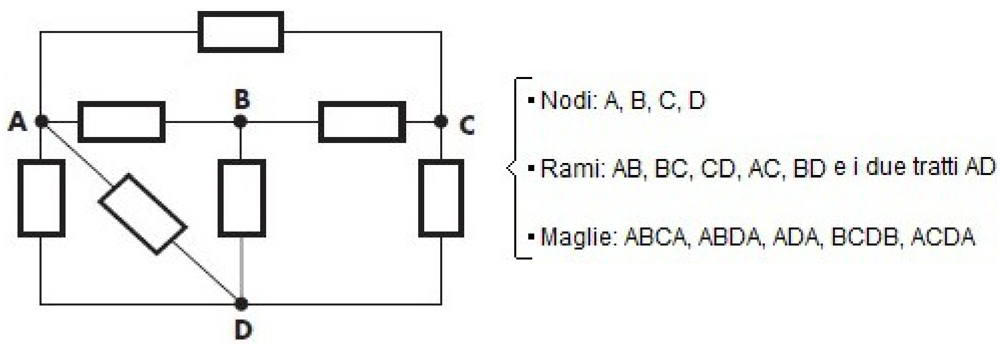
## 5. Componenti e circuiti elettrici

I componenti elettrici possono essere classificati in base a:

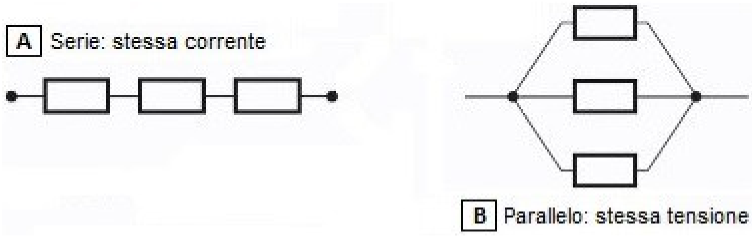
- **curva caratteristica:**
  rappresentazione grafica della **relazione tra uscita e ingresso**. L'ingresso è chiamato **eccitazione**, mentre l'uscita viene chiamata **risposta**. Essa è anche chiamata **caratteristica di traferimento (o funzione di trasferimento**);
- **numero di terminali:**
  bipoli, tripoli, quadripoli e in generale multipoli. Un dispositivo elettrico si dice **discreto** se svolge una sola funzione elettrica elementare; al contrario si dice **integrato** se svolge diverse funzioni ed è quindi equiparabile ad un circuito elettrico complesso (solitamente multipolare);
- **comportamento:**
  **attivi** se contengono generatori; in caso contrario **passivi**.

Definizioni sui circuiti:

- **rete elettrica**: insieme di componenti tra loro variamente collegati;
- **nodo**: punto di collegamento tra almeno tre componenti;
- **ramo**: tratto di circuito compreso tra due nodi;
- **maglia**: percorso chiuso che partendo da un nodo torna allo stesso.

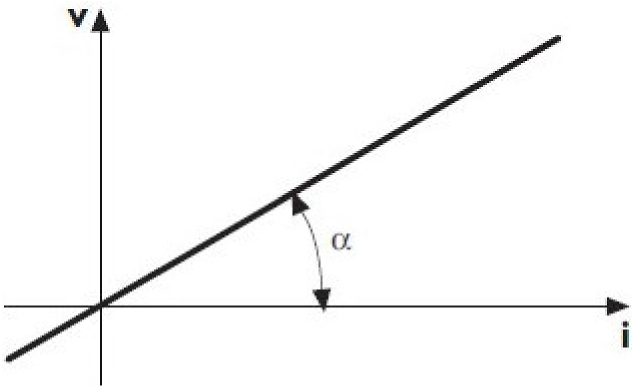


Bipoli inseriti sullo stesso ramo sono in **serie**, mentre collegati tra gli stessi nodi sono in **parallelo**.




### 6. La resistenza, il resistore e la legge di Ohm

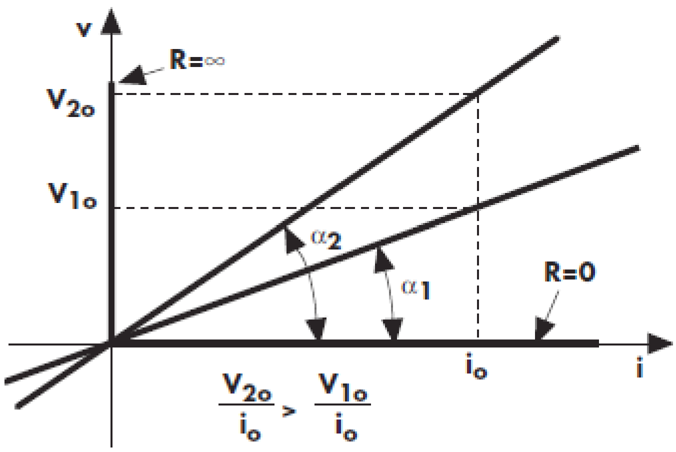
▪ **Resistore**: componente bipolare, lineare e passivo caratterizzato da un certo valore di **resistenza**.
▪ **Caratteristica**: rappresenta una retta passante per l'origine degli assi.




**V** rappresenta la tensione di un resistore e **I** la corrente che lo attraversa. Matematicamente la relazione V-I è esprimibile mediante la **legge di Ohm**:

$$\boxed{V = R \cdot I}$$

Il valore della **resistenza R** è il coefficiente angolare della retta che esprime la sua **inclinazione**.

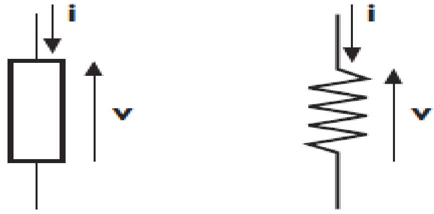



A parità di I, al crescere dell'angolo $\alpha$ cresce la resistenza R: per $\alpha$ = 90° si ha un valore infinito di R, per $\alpha$ = 0° si ha un valore nullo di R. Trigonometricamente risulta R = tg$\alpha$.

▪ **Casi limite**: se la resistenza nulla (**cortocircuito**) si ha tensione identicamente nulla, mentre se la resistenza infinita (**circuito aperto**) si ha corrente identicamente nulla.

▪ **Convenzione**: la corrente va dal punto a potenziale maggiore (+) al punto a potenziale minore (-) e il suo verso risulta opposto a quello della tensione.

▪ **Simboli delle resistenze.**




## 7. La legge di Joule e la potenza elettrica

- **Legge di Joule.** La corrente I che scorre in un conduttore di resistenza R determina, nell'intervallo di tempo $\Delta t$, una dissipazione di calore corrispondente all'energia:

$$\boxed{W = R \cdot I^2 \cdot \Delta t}$$

- Dividendo entrambi i membri per $\Delta t$ si ottiene la **potenza elettrica** P:

$$W = R \cdot I^2 \cdot \Delta t \;\Rightarrow\; \frac{W}{\Delta t} = \frac{R \cdot I^2 \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} \;\Rightarrow\; \boxed{P = \frac{W}{\Delta t} = R \cdot I^2} \longrightarrow$$

Esprime la potenza dissipata in calore da una resistenza R

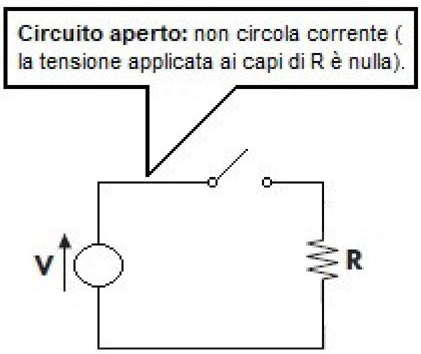
- Ricordando la legge di Ohm la potenza si può esprimere anche come:

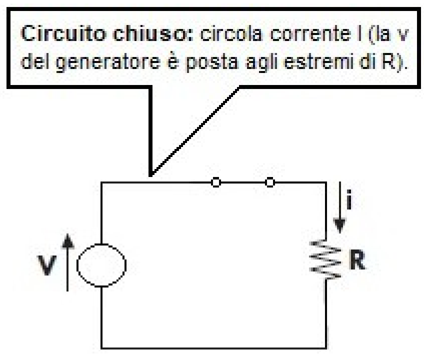
$$\boxed{P = R \cdot I^2 = R \cdot I \cdot I = V \cdot I} \quad \text{oppure} \quad \boxed{P = R \cdot I^2 = R \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{V^2}{R}}$$

L'unità di misura della potenza elettrica nel sistema internazionale (SI) è il **watt** [**W = V · A**].

## 8. Il generatore elettrico

- **Generatore elettrico**: componente attivo a due terminali capace di produrre ai suoi estremi una certa differenza di potenziale. Se si collega un generatore ad un interruttore e ad una resistenza si possono verificare due situazioni: **circuito aperto** e **circuito chiuso**.

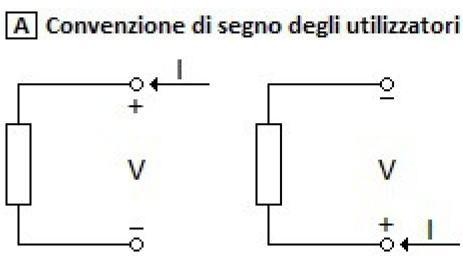


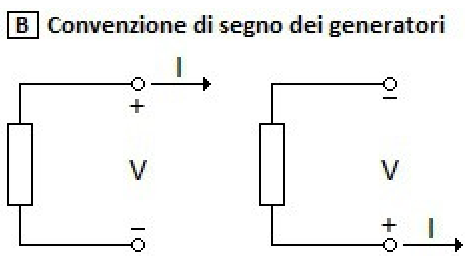




## 9. Convenzione di segno

Vengono utilizzate le seguenti convenzioni di segno:

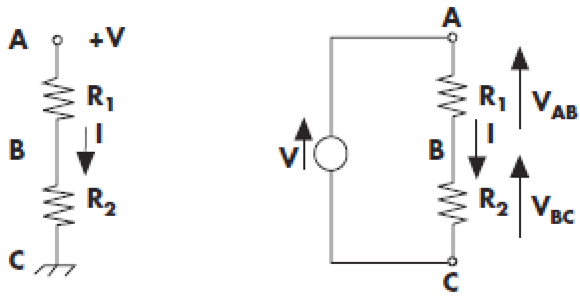
- **convenzione degli utilizzatori**: si assume come positivo il verso della corrente quando la stessa è **entrante** dal morsetto a potenziale maggiore (+);
- **convenzione dei generatori**: si considera come positivo il verso della corrente quando la stessa è **uscente** dal morsetto a potenziale maggiore (+).



## 10. Resistenze in serie e in parallelo

- **Massa**: parte del circuito ritenuta convenzionalmente a potenziale zero.
- Due o più resistenze si dicono in **serie** se sono entrambe attraversate dalla medesima corrente. Vi sono due modi di rappresentare due resistenze in serie.




- **Esempio**. Posto: V = 30 V, $R_1$ = 100 Ω, $R_2$ = 220 Ω, determinare la misura della corrente.

$$I = \frac{V}{R_1+R_2} = \frac{30}{320} \approx 0{,}0937\,A = 93{,}7\,mA$$

Per la legge di Ohm risulta:

$$V_{AB} = R_1 \cdot I \approx 9{,}37\,V\,; \quad V_{BC} = R_2 \cdot I \approx 20{,}6\,V$$

Da questi risultati si ricava:

$$V = V_{AB} + V_{BC} = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I \approx 30\,V$$

- Nel caso generale di n resistenze in serie, la resistenza equivalente $R_s$ è uguale alla loro somma:

$$\boxed{R_s = R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

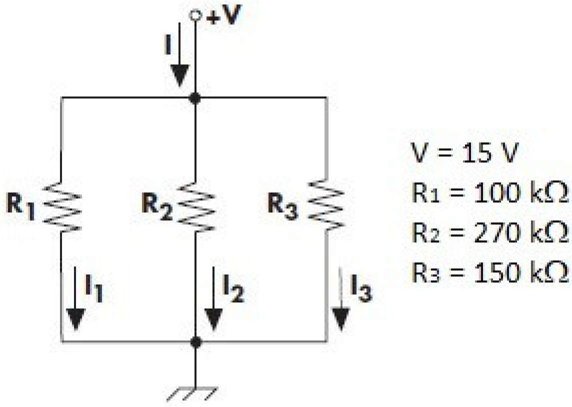
- Generalizzando si può dire che la tensione applicata a un gruppo di resistenze in serie è pari alla somma delle tensioni ai capi delle singole resistenze.
- Si osservi che la resistenza $R_s$ è sempre **superiore al valore delle singole resistenze**.
- Si dice che le resistenze in serie formano un **partitore di tensione** e questo nome deriva dal fatto che la tensione totale ai capi delle resistenze in serie si ripartisce sulle singole resistenze in modo direttamente proporzionale alle stesse.
- Due o più resistenze si dicono in **parallelo** se ai loro capi è applicata la stessa tensione.
- Detto n il numero di resistenze in parallelo, la resistenza equivalente $R_p$ è data dalla relazione:

$$\boxed{R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}}$$

- Con due sole resistenze la relazione precedente può anche essere scritta nel seguente modo:

$$\boxed{R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

- Si osservi che la resistenza $R_p$ è sempre **inferiore al valore delle singole resistenze**.
- Si dice che le resistenze in parallelo formano un **partitore di corrente** e questo nome deriva dal fatto che la corrente totale entrante nel parallelo di resistenze si ripartisce tra le stesse in modo inversamente proporzionale al loro valore.
- **Esempio.** Calcolare: a) la resistenza equivalente parallelo; b) le correnti nelle singole resistenze e la corrente totale.




Poichè $R_1$, $R_2$, $R_3$ sono collegate in parallelo, la resistenza equivalente Rp si ricava dalla relazione:

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{100K\Omega} + \frac{1}{270K\Omega} + \frac{1}{150K\Omega}} = 49\,K\Omega$$

Le correnti che circolano nei singoli resistori risultano:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = 150\,\mu A \qquad I_2 = \frac{V}{R_2} = 55\,\mu A \qquad I_3 = \frac{V}{R_3} = 100\,\mu A$$

La corrente totale si ottiene dalla somma delle tre precedenti: $I = I_1 + I_2 + I_3 \approx 305\ \mu A$. Naturalmente la I risulta anche uguale a $I = V/R_p$.

## 11. Condensatore

▪ Costituito da due lastre metalliche, chiamate **armature**, tra loro elettricamente isolate.

▪ E' un componente **bipolare** e **passivo** capace di accumulare cariche elettriche sulle sue armature; la grandezza che lo caratterizza è la capacità C che si misura in **farad** [F].

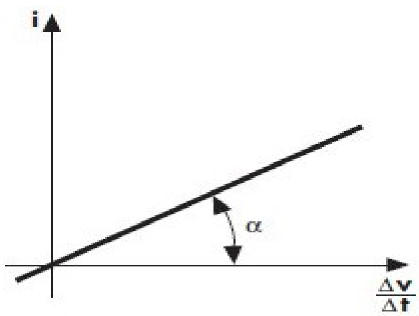
▪ Un condensatore è attraversato da corrente i solo se la tensione v ai suoi capi varia nel tempo ed è espressa dalla relazione:

$$\boxed{i = C\frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

▪ Quindi, in assenza di variazione di tensione ($\Delta v = 0$) la corrente è nulla ($i = 0$). Il rapporto **$\Delta v/\Delta t$** è ottenuto considerando intervalli più piccoli possibili (intervalli infinitesimi) e viene detto **derivata** della tensione rispetto al tempo.

▪ In questo caso il rapporto $\Delta v/\Delta t$ esprime la **corrente istantanea**, altrimenti determina la **corrente media** nell'intervallo considerato.

▪ **Caratteristica di un condensatore ideale**




▪ Un'altra relazione che descrive il comportamento del condensatore è:

$$\boxed{Q = C \cdot V}$$

dove Q è la carica accumulata sulle singole armature e V la tensione ai capi del condensatore.

▪ Più condensatori sono in **serie** se sono attraversati dalla **stessa corrente** e sono in **parallelo** se ai loro capi hanno la **stessa tensione**.

▪ La capacità equivalente di n condensatori in **parallelo** è pari alla somma delle singole capacità:

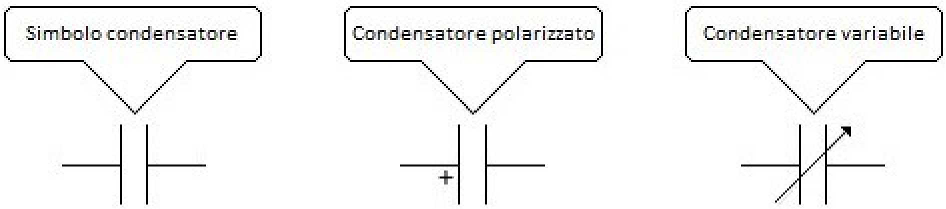
$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n}$$

▪ La capacità equivalente di n condensatori in **serie** si ricava dalla relazione:

$$\boxed{C_{eq} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{C_1} + \cfrac{1}{C_2} + \cfrac{1}{C_3} + \ldots + \cfrac{1}{C_n}}}$$

▪ Quindi si può dire che le capacità equivalenti in parallelo **aumentano** e in serie **diminuiscono**.

▪ **Simboli e forme costruttive di un condensatore**.

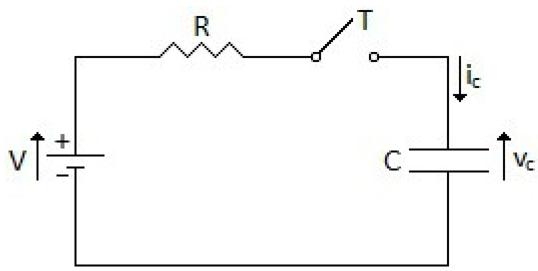



▪ **Tipiche forme costruttive**: condensatori ceramici o a dielettrico (**C < μF**), elettrolitici (**C elevate**).

## 12. Fenomeni transitori nei circuiti RC

### 1. Transitorio di carica

▪ Si analizzi cosa succede nel circuito quando si chiude l'interruttore T supponendo V una tensione continua e il condensatore inizialmente scarico.

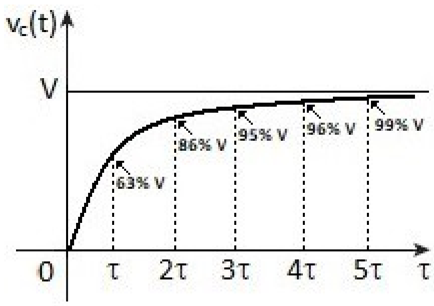


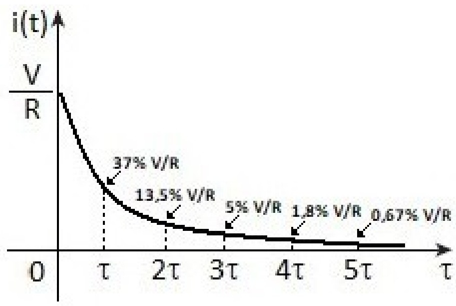

▪ **Ipotesi iniziale:** T aperto, $i_c = 0$ e quindi $v_c = 0$ (condensatore scarico).

▪ **Ipotesi finale:** T chiuso a transitorio esaurito, V è costante, $\Delta v/\Delta t = 0$, quindi $V_R = 0$ e $v_c = V$.

▪ Durante la carica, la **tensione** cresce gradualmente dal valore iniziale nullo e tende a raggiungere il valore V a regime in un tempo teoricamente infinito, ma praticamente pari a **5τ**.

▪ Nello stesso tempo la **corrente** passa da un valore iniziale massimo (il condensatore si comporta da **cortocircuito**) a un valore finale nullo (il condensatore si comporta da **circuito aperto**).




▪ Per **costante di tempo τ** si intende il periodo di tempo necessario per la carica (o la scarica) di un condensatore ed è pari al prodotto della resistenza per la capacità.

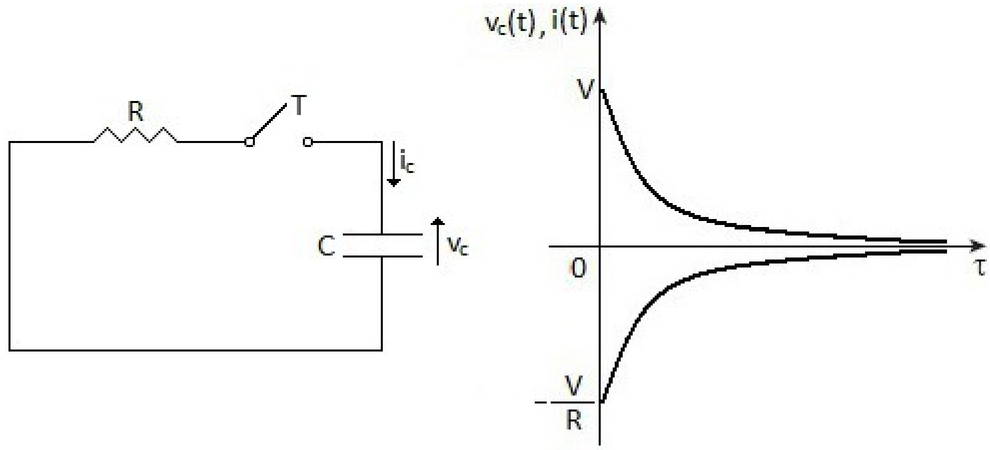
$$\boxed{\tau = RC}$$

▪ Da ciò si deduce che più piccolo è il valore della costante $\tau$, più in fretta si carica il condensatore. La costante di tempo $\tau$ si misura in **secondi**; infatti, utilizzando le unità di misura delle grandezze fisiche in gioco, abbiamo:

$$[\tau]=[RC]=[\frac{V}{A}\bullet\frac{C}{V}]=[\frac{C}{A}]=[C\bullet\frac{s}{C}]=[s]$$

**2. Transitorio di scarica**

▪ Si analizzi cosa succede nel circuito quando chiudiamo l'interruttore T supponendo V continua e il condensatore inizialmente carico.




▪ **Ipotesi iniziale:** T aperto, $i_c = 0$, $v_c = V$.

▪ **Ipotesi finale:** T chiuso, non si hanno generatori e quindi $i_c = 0$, $v_c = V$.

▪ Durante la scarica, la **tensione** e la **corrente** decrescono gradualmente e la scarica può ritenersi completa dopo un tempo uguale a **5τ**. In tal caso la corrente che circola nel circuito ha un verso opposto rispetto a quello della corrente durante il processo di carica.

▪ Quindi tutta l'energia immagazzinata nel condensatore durante la fase di carica viene dissipata nella resistenza sotto forma di calore durante quella di scarica.

**3. Studio analitico**

▪ Analiticamente le curve di carica e scarica risultano le seguenti:

$$\textbf{Carica}\begin{cases} v_c = V(1-e^{-t/\tau}) \\ i_c = \dfrac{V}{R}e^{-t/\tau} \end{cases} \qquad \textbf{Scarica}\begin{cases} v_c = V\cdot e^{-t/\tau} \\ i_c = -\dfrac{V}{R}e^{-t/\tau} \end{cases}$$

## Domande

**1. Chiarire i concetti di nodo, ramo e maglia.**

**Nodo**: punto di collegamento tra almeno tre componenti.

**Ramo**: tratto di circuito tra due nodi.

**Maglia**: percorso chiuso di un circuito che parte da un nodo e si richiude sullo stesso.

**2. Tre resistori attraversati da correnti uguali sono in serie. Se no, perchè?**

No, perchè per essere in serie i tre resistori devono appartenere allo stesso ramo ovvero essere attraversati dalla stessa corrente. Invece è vero che tre resistori uguali collegati in parallelo sono attraversati da correnti uguali.

**3. Cos'è la massa di un circuito?**

**Massa**: punto del circuito che per convenzione è posto a potenziale zero.

**4. Chiarire la differenza tra resistenza e resistore.**
**Resistenza**: grandezza elettrica che caratterizza un conduttore.

**Resistore**: componente elettrico caratterizzato da un particolare valore di resistenza.

**5. Descrivi qual è il principale parametro che caratterizza un condensatore.**
Il principale parametro che caratterizza un condensatore è la capacità C espressa come il rapporto tra le cariche accumulate sulle singole armature e la tensione ai capi del condensatore.

**6. Come si distribuisce la carica elettrica su più condensatori in serie?**
I condensatori connessi in serie hanno sulle armature la stessa carica elettrica e quindi la capacità equivalente risulta:

$$C_s = \frac{Q}{V_1+V_2+...+V_n} = \frac{Q}{\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+...\frac{Q}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+...\frac{1}{C_n}}$$

**7. Quanto vale la capacità che si ottiene da cinque condensatori uguali connessi in parallelo?**
Disponendo di cinque condensatori con capacità uguali comporta che la loro capacità equivalente parallelo è il quintuplo della singola capacità.

## Esercizi

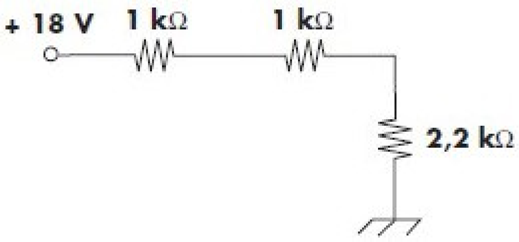
**1. Se un resistore da 12 kΩ è attraversato da una corrente di 0,5 mA, che potenza dissipa?**
**Soluzione.** Applicando la formula della potenza in funzione della resistenza e corrente risulta:

$$P = R\cdot I^2 = 12\cdot 10^3\cdot(0{,}5\cdot 10^{-3})^2 = 3\cdot 10^{-3}\,W = 3\,mW$$

**2. Se a un resistore da 33 kΩ è applicata una tensione di 12 V, che potenza dissipa?**
**Soluzione.** Applicando la formula della potenza in funzione della resistenza e corrente risulta:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{12^2}{33\cdot 10^{-3}} = 4{,}36\cdot 10^{-3}\,W = 4{,}36\,mW$$

**3. Calcolare la corrente nel circuito e caduta di tensione ai capi del resistore da 2,2 kΩ .**



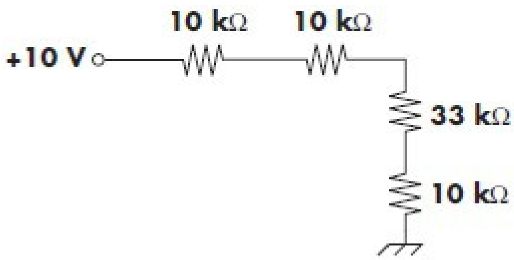

**Soluzione.** Applico la legge di Ohm per calcolare la corrente che scorre nelle tre resistenze serie:

$$I = \frac{18}{(1+1+2{,}2)\cdot 10^3} \approx 4{,}29\,mA$$

Quindi la caduta di tensione ai capi del resistore da 2,2 kΩ vale:

$$V = 2{,}2\cdot 10^3\cdot 4{,}29\cdot 10^{-3} \approx 9{,}44\,V$$

**4. Calcolare la corrente nel circuito e la tensione ai capi del resistore da 33 kΩ .**



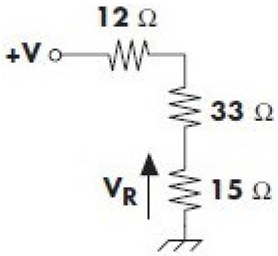

**Soluzione.** Applico la legge di Ohm per calcolare la corrente che scorre nelle quattro resistenze:

$$I = \frac{10}{(10+10+33+10)\cdot 10^3} \approx 0{,}158\,\text{mA}$$

Quindi la caduta di tensione ai capi del resistore da 33 kΩ vale:

$$V = 33\cdot 10^3 \cdot 0{,}158\cdot 10^{-3} \approx 5{,}24\,\text{V}$$

**5. Determinare quale frazione della tensione V cade sul resistore da 15 kΩ .**

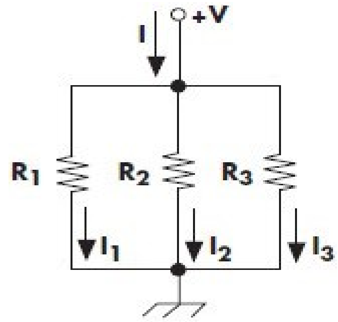



Applicando il partitore di tensione si ottiene:

$$V_R = \frac{15\text{ V}}{12+33+15} = \frac{15}{60}\text{V} = \frac{V}{4}$$

Sul resistore da 15 Ω cade un quarto della tensione V impressa dal generatore.

**6. Sapendo che V = 10 V, $R_1$ = 15 kΩ , $R_2$ = 10 kΩ , $R_3$ = 22 kΩ , calcolare:**
**a) la resistenza equivalente parallelo;**
**b) le correnti nelle singole resistenze e la corrente totale.**




**Soluzione.** Applicando la resistenza equivalente parallelo si ottiene:

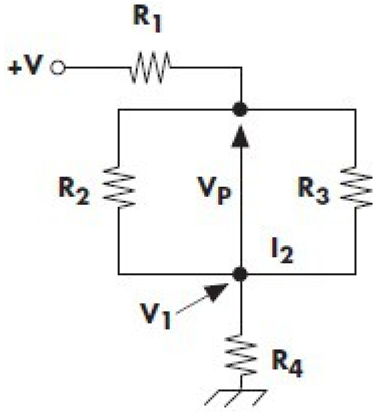
$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{15\text{K}\Omega}+\frac{1}{10\text{K}\Omega}+\frac{1}{22\text{K}\Omega}} = 4{,}71\,\text{K}\Omega$$

Le correnti nelle singole resistenze risultano:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = 666\,\mu\text{A} \qquad I_2 = \frac{V}{R_2} = 1\,\text{mA} \qquad I_3 = \frac{V}{R_3} = 454\,\mu\text{A}$$

La corrente totale si ottiene sommando le tre correnti o dividento la tensione applicata V per la resistenza equivalente $R_p$.

**7. Posto: V = 15 V, $R_1$ = 33 kΩ , $R_2$ = $R_3$ = 100 kΩ , $R_4$ = 47 kΩ calcolare:**
**a) la tensione $V_1$;**
**b) le tensione $V_p$ ai capi del parallelo.**



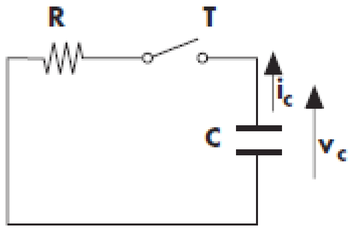
**Soluzione.** Il parallelo di $R_2$ e $R_3$ risulta 50 kΩ. Poichè il parallelo di $R_2$ e $R_3$ risulta in serie con $R_4$ e $R_1$, la tensione applicata al parallelo risulta:

$$V_p = \frac{R_p}{R_1+R_p+R_4} \cdot V = 5{,}77\,V$$

Analogamente la tensione su $V_1$ è pari alla tensione su $R_4$ e risulta:

$$V_1 = \frac{R_4}{R_1+R_p+R_4} \cdot V = 5{,}42\,V$$

**8. Si fissi, nel circuito in figura, R = 1 kΩ e C = 10 μF; supposto inizialmente C carico con V = 12 V, calcolare la tensione sul condensatore e la $i_c$ dopo 30 ms dalla chiusura di T.**




**Soluzione.** Si calcola inizialmente la costante di tempo τ:

$$\tau = RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 10\ ms$$

La tensione di scarica $v_c$ si calcola con la relazione:

$$v_c = V \cdot e^{-t/\tau} = 12 \cdot e^{-3} \approx 0{,}597\ V$$

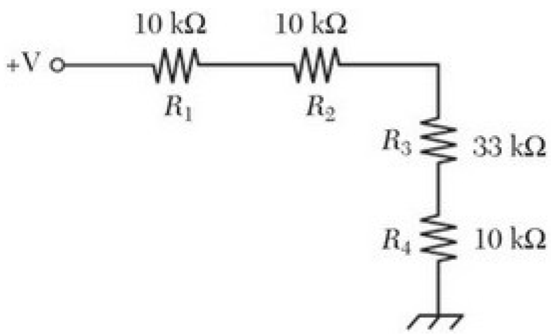
Per calcolare la corrente di scarica $i_c$ si utilizza la relazione:

$$i_c = \frac{V}{R} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{12}{1 \cdot 10^3} \cdot e^{-t/10 \cdot 10^{-3}} = 0{,}597\,mA$$

**Nota**. Visto che $v_c$ coincide con la tensione su R, la $i_c$ può essere calcolata tramite la legge di Ohm:

$$i_c = \frac{v_c}{R} = \frac{0{,}597}{1 \cdot 10^{-3}} = 0{,}597\,mA$$

**9. Quanto vale la tensione +V nel circuito noto che la tensione ai capi del resistore $R_4$ è pari a 5V?**



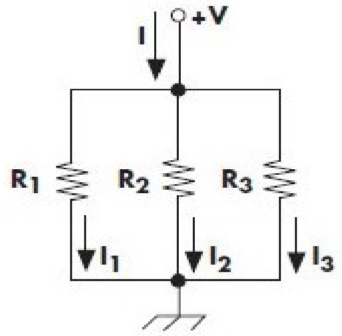

**Soluzione.** La corrente che scorre in $R_4$ e quindi in tutti i quattro resistori tra loro in serie vale:

$$I = \frac{V_4}{R_4} = \frac{5}{10 \cdot 10^3} = 0{,}5\,mA$$

La tensione V vale:

$$V = (R_1+R_2+R_3+R_4) \cdot I = 63 \cdot 10^3 + 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 31{,}5\,V$$

**10. Posto $R_1$ = 10 kΩ , $R_2$ = 10kΩ , $R_3$ = 5 kΩ , quanto vale il resistore equivalente? Se in $R_3$ scorre una corrente di 10 mA, quanto valgono V e I?**




**Soluzione.** Poichè $R_1$ e $R_2$ entrambe di 10 kΩ il loro parallelo è 5 kΩ. Poichè poi $R_3$ = 5 kΩ il parallelo complessivo è di 2,5 kΩ.

La tensione ai capi di $R_3$ che è anche la +V cercata vale:

$$V = R_3 \cdot I = 5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 50\,V$$

Per calcolare la I si può usare la resistenza equivalente parallelo:

$$I = \frac{V}{R_p} = \frac{50}{2{,}5} \cdot 10^3 = 20\,mA$$

**11. Nel circuito RC, con C = 10 μF e R = 10 kΩ , è alimentato da una tensione di 5V; supponendo C inizialmente scarico, calcolare quanto vale tensione ai capi di C e la corrente dopo 0,25 s.**

**Soluzione.** Si calcola inizialmente la costante di tempo τ:

$$\tau = RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 100\ ms$$

La tensione di carica $v_c$ si calcola con la relazione:

$$v_c = V \cdot (1 - e^{-t/\tau}) = 5 \cdot (1 - e^{-2,5}) \approx 4{,}59\ V$$

Per calcolare la corrente di carica $i_c$ si può applicare la relazione:

$$i_c = \frac{V}{R} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{5}{10 \cdot 10^3} \cdot e^{-2,5} = 41\,\mu A$$

**Quesito: nel circuito precedente, dopo quanto tempo la tensione del condensatore varrà 3 V?**

**Soluzione.** Dalla formula che calcola la $v_c$ si ricava:

$$1 - e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_c}{V} \rightarrow -e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - \frac{V_c}{V} \rightarrow t = -RC\ln\left(1 - \frac{V_c}{V}\right)$$

e quindi si trova:

$$t = -10 \bullet 10^3 \bullet 10 \bullet 10^{-6} \ln\left(1 - \frac{3}{5}\right) \approx 91{,}6\ ms$$

## 13. Il generatore elettrico

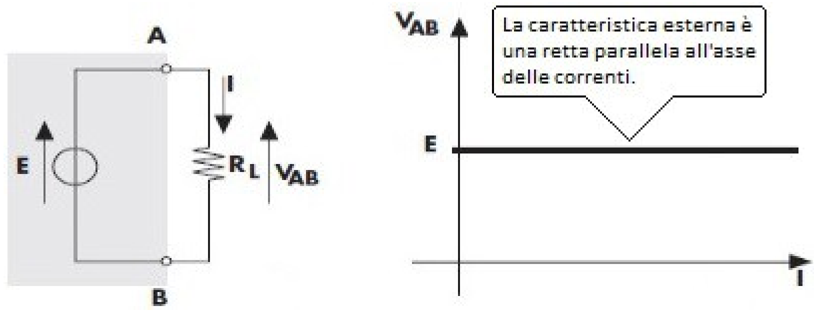
▪ **Generatore ideale di tensione**: generatore che eroga una tensione costante indipendentemente dal carico ad esso collegato e quindi dalla corrente che esso fornisce.

▪ **Equazione caratteristica**:

$$\boxed{V = E}$$

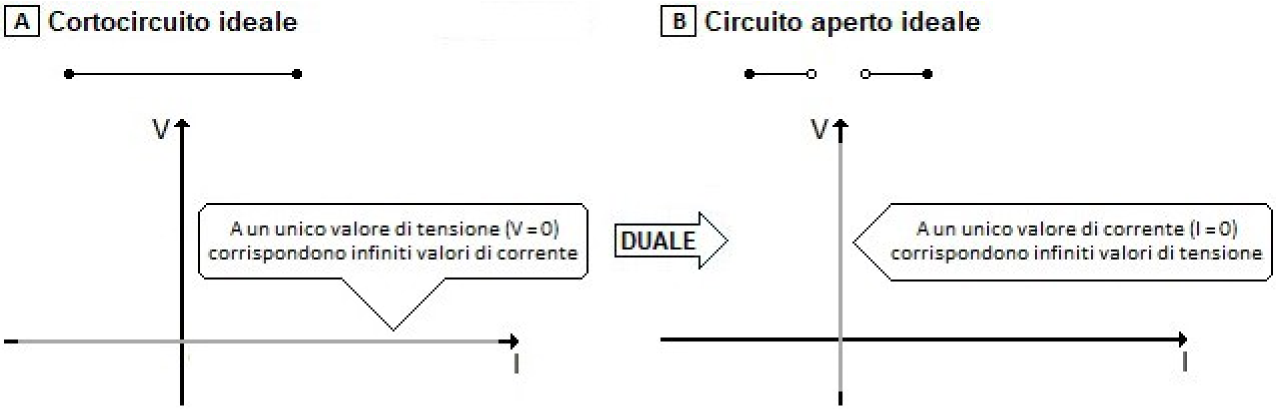
dove la tensione E si chiama **tensione impressa** o **forza elettromotrice** (**f.e.m.**).

▪ **Caratteristica**



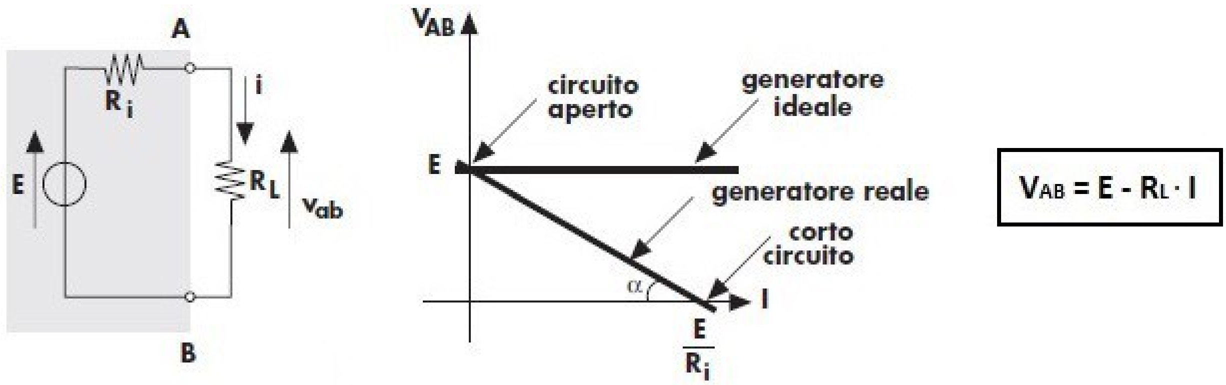

▪ **Caso limite**
Un generatore ideale con tensione impressa nulla coincide con il **cortocircuito ideale**, cioè con il resistore ideale con resistenza nulla.

▪ **Dualità dei bipoli ideali**
La relazione di un bipolo si ricava da quella dell'altro scambiando tra loro tensioni e correnti, cioè caratteristica esterna di uno coincide con quella dell'altro se si scambiano tra loro gli assi di V e I.




▪ **Generatore reale di tensione**: rappresentato come generatore ideale di tensione con in serie una resistenza interna di generatore.

▪ La **resistenza interna** $R_i$ tiene conto delle perdite che si possono avere all'interno del generatore.




▪ $V_{AB}$ decresce linearmente al crescere della corrente erogata (ovvero al diminuire di $R_L$).

▪ In particolare la tensione $V_{AB}$ assume il valore massimo a vuoto, mentre si annulla in cortocircuito quando la corrente è massima.

▪ Si osservi che un generatore reale di tensione approssima quello ideale se $\mathbf{R_i} \ll \mathbf{R_L}$; infatti risulta in questo caso trascurabile la caduta di tensione su $\mathbf{R_i}$.

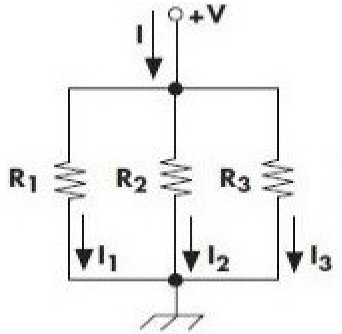
## 14. I principi di Kirchhoff

▪ **LKC (legge di kirchoff delle correnti):** in un **nodo** la **somma algebrica** delle correnti è uguale a **zero**.

▪ Deriva dalla **legge di conservazione della carica elettrica** (non vi può essere accumulo cariche).

▪ Per convenzione, consideriamo positive le corrente entranti e negative quelle uscenti dal nodo.

▪ **Esempio**: circuito parallelo.




- I entrante
- $I_1$, $I_2$, $I_3$ uscenti
- LKC: $I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$

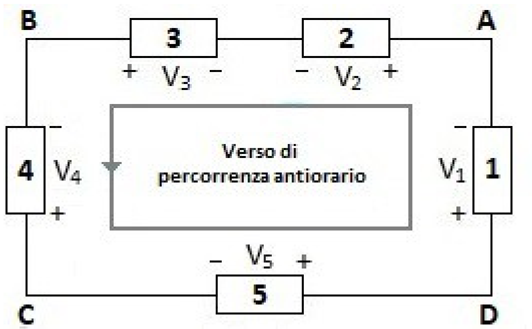
▪ **LKV (legge di kirchoff delle tensioni):** la **somma algebrica** delle **tensioni** in una **maglia** è pari a **zero**.

▪ Deriva dalla **legge di conservazione dell'energia** (cioè il suo valore rimane costante nel tempo).

▪ L'applicazione della legge richiede di stabilire il riferimento di tensione di ogni ramo della maglia e richiede inoltre di fissare un verso arbitrario di percorrenza (orario o antiorario) della maglia.

▪ La **somma algebrica** deve essere così eseguita:
  - se l'orientazione della maglia attraversa un ramo dal riferimento **+** al riferimento **–** la tensione relativa va sommata;
  - se l'orientazione della maglia attraversa un ramo dal riferimento **–** al riferimento **+** la tensione relativa va sottratta (o viceversa);

▪ **Esempio**: maglia formata da cinque generici bipoli.




- $V_1$, $V_2$ concordi
- $V_3$, $V_4$, $V_5$ discordi
- LKV (ABCDA): $V_1 + V_2 - V_3 - V_4 - V_5 = 0$

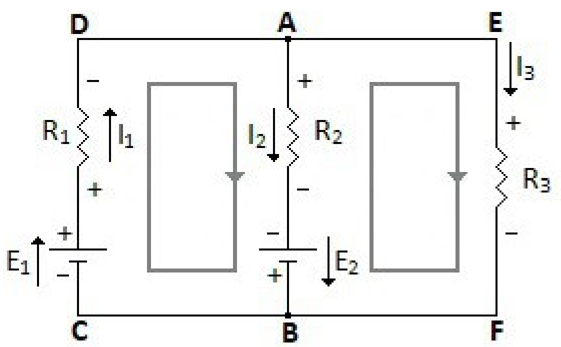
▪ Noti le resitenze e i generatori, applicando i principi di Kirchhoff è possibile scrivere un sistema di equazioni che permette di calcolare le correnti incognite.

▪ Queste equazioni non sono tutte tra loro **indipendenti**; in particolare: siano **n** il numero dei nodi, le equazioni ai nodi indipendenti sono **n – 1**, e detto **r** il numero dei rami, le equazioni alle maglie indipendenti sono **r – n + 1**.

▪ **Maglia indipendente**: maglia che contiene un ramo che non appartiene a nessun'altra maglia.

▪ Complessivamente il numero di equazioni indipendenti risulta uguale al numero dei rami, ovvero (**n – 1**) + (**r – n + 1**) = **r**. In pratica si può studiare un circuito risolvendo un sistema di r equazioni.

▪ **Esempio**. Scrivere un sistema di equazioni risolutivo di questo circuito.




- n (numero nodi) = 2
- r (numero rami) = 3
- n - 1 = 2 - 1 = 1 equazione ai nodi
- m = r - n + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 equazioni alle maglie

**Soluzione**. Un possibile sistema risolutivo è il seguente:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ RI_2 - E_2 - E_1 + R_1 I_1 = 0 \\ R_3 I_3 + E_2 - R_2 I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ - E_1 - E_2 = - R_1 I_1 - RI_2 \\ E_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \dashrightarrow \text{Nodo A} \\ E_1 + E_2 = R_1 I_1 + RI_2 \dashrightarrow \text{Maglia ABCDA} \\ E_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 \dashrightarrow \text{Maglia AEFBA} \end{cases}$$

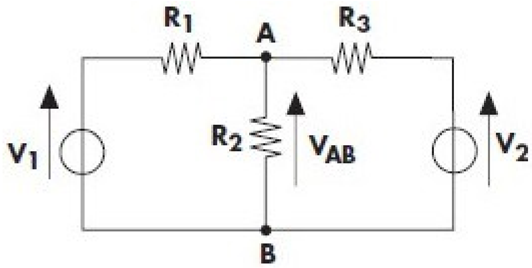
## 15. Il principio di sovrapposizione degli effetti

▪ Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che in un circuito composto da resistori ideali e da generatori ideali di tensione e di corrente, la **tensione** (o la **corrente**) in un generico ramo è pari alla somma algebrica delle tensioni (o delle correnti) che si ottengono in quel ramo facendo agire uno alla volta i generatori ideali.

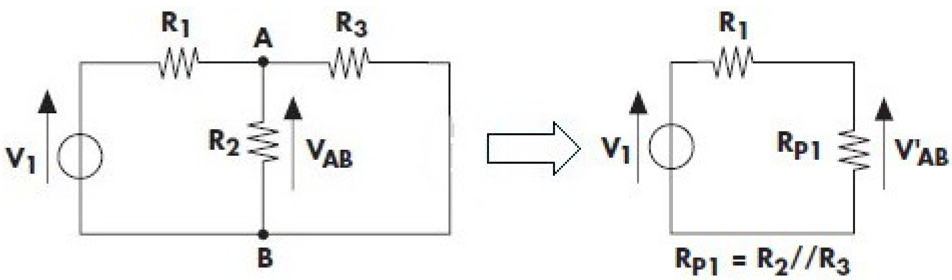
▪ I generatori non considerati vanno **annullati**; in altri termini si **cortocircuitano** i generatori ideali di tensione e si **aprono** i generatori ideali di corrente.

▪ Questo metodo vale **solo** per i **circuiti lineari**; è comodo per semplificare il circuito e valutare gli effetti dei singoli generatori.

▪ **Esempio**. Posto $V_1 = V_2 = 4$ V, $R_1 = 1$ KΩ, $R_2 = R_3 = 2$ KΩ, valutare l'effetto della tensione $V_{AB}$.




**Soluzione**. Cortociruitando il generatore $V_2$ (considero solo $V_1$), si ottiene il circuito in figura:



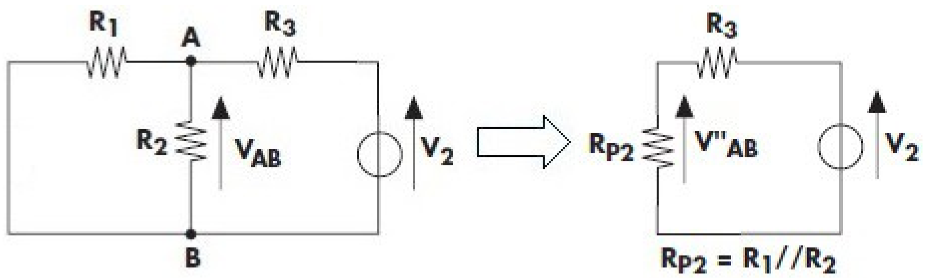

$$R_{p1} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 2}{2+2} = 1 K\Omega = R_1$$

Applicando il partitore di tensione si ottiene la tensione in $R_{p1}$:

$$V'_{AB} = V_1 \cdot \frac{R_{p1}}{R_1 + R_{p1}} = 4 \cdot \frac{1}{1+1} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 V$$

Quindi l'effetto di questo generatore sulla $V_{AB}$ è pari a $V'_{AB} = 1/2\ V_1 = 2$ V

Se ora si considera solo il generatore $V_2$ (cortocircuito $V_1$), si ottiene il circuito in figura:




$$R_{p2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} = \frac{2}{3} K\Omega \approx 0{,}66 K\Omega$$

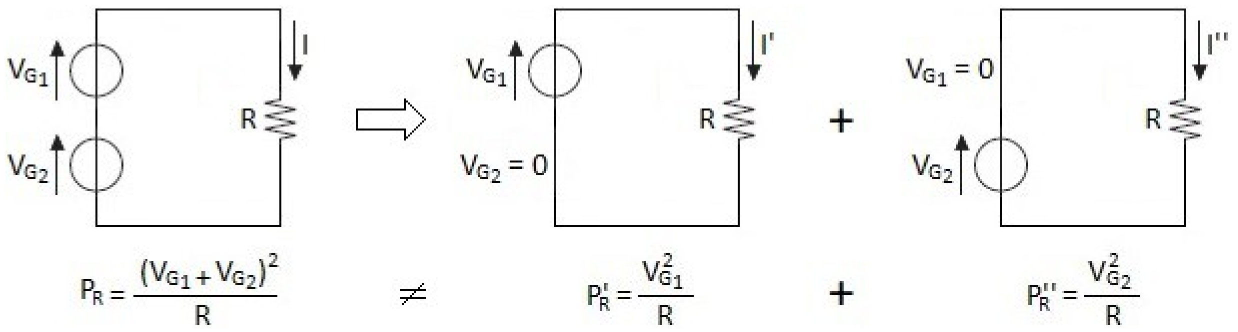
Applicando il partitore di tensione si ottiene la tensione in $R_{p2}$:

$$V'_{AB} = V_2 \cdot \frac{R_{p2}}{R_3 + R_{p2}} = 4 \cdot \frac{0{,}66}{2 + 0{,}66} = 4 \cdot \frac{0{,}66}{2{,}66} \approx 1\,V$$

Sommando infine gli effetti si trova:

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = 2 + 1 = 3\,V$$

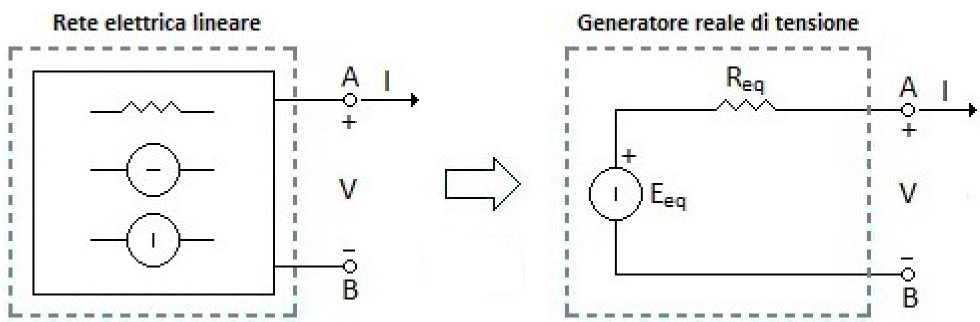
▪ **Nota**. Il principio di sovrapposizione degli effetti non vale per sovrapporre le potenze.




▪ Quindi la potenza assorbita dal resistore R, a causa della presenza del doppio prodotto $2V_{G1}V_{G2}$, non è pari alla somma delle potenze assorbite da R quando agiscono singolarmente $V_{G1}$ e $V_{G2}$.

## 16. Il principio di Thevenin

▪ Un circuito elettrico **lineare**, comunque complesso, visto da due terminali A e B è equivalente ad un **generatore reale di tensione**.

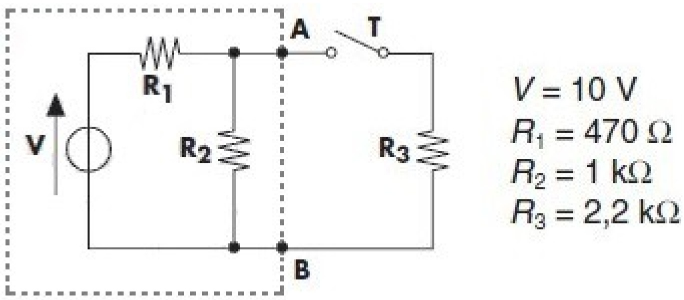



▪ **Nota**. Si assume che i riferimenti ai due morsetti A e B rispettino la convenzione dei generatori.

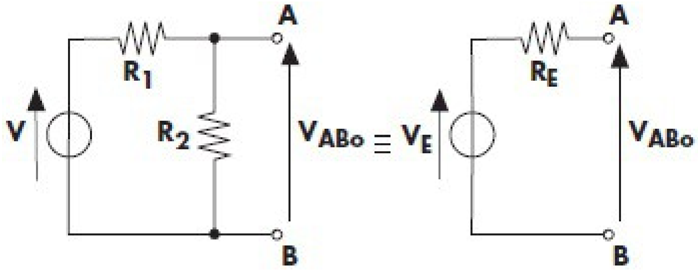
▪ **Significato dei parametri**

- ▪ **$E_{eq}$**: tensione impressa del generatore equivalente è pari alla tensione a vuoto ai due terminali.
- ▪ **$R_{eq}$**: resistenza equivalente vista dai due terminali quando sono azzerati tutti i generatori ideali.

▪ **Esempio**. Calcola, applicando Thevenin, la tensione su $R_3$, quando chiudi T.



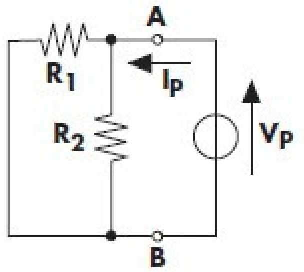

**Soluzione**. Applicando il teorema di Thevenin è possibile sostituire il bipolo nella zona evidenziata con un generatore di tensione equivalente.




La tensione impressa $V_E$ del generatore equivalente corrisponde alla tensione a vuoto $V_{AB}$ (ovvero $V_{ABO}$) e quindi applicando il partitore di tensione si ottiene la tensione in $R_2$ (=$V_{AB0}$):

$$V_E = \frac{V}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = \frac{10}{0{,}47 + 1} \cdot 1 = 6{,}8\,\mathrm{V}$$

La resistenza equivalente $R_E$ vista ai morsetti A e B del bipolo si ottiene azzerando tutti gli effetti dei generatori interni. Per fare questo puoi immaginare di porre ai morsetti A e B del circuito in esame un ipotetico generatore di prova $V_p$:

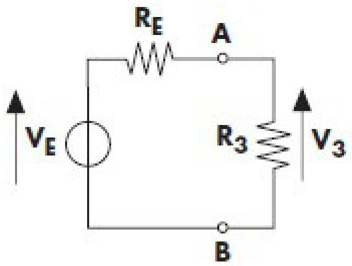



$$\boxed{R_E = \frac{V_p}{I_p}}$$

In pratica si vede subito che nel nostro caso risulta $R_E = R_1 // R_2$. Numericamente risulta:

$$R_E = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{0{,}47 \cdot 1}{0{,}47 + 1} = \frac{0{,}47}{1{,}47} \approx 0{,}32\,\mathrm{K}\Omega = 320\,\Omega$$

Supposto T chiuso, possiamo ora collegare il bipolo equivalente alla resistenza $R_3$ e applicando il partitore di tensione si ottiene la c.d.t. su $R_3$.




$$V_3 = \frac{V_E}{R_E + R_3} \cdot R_3 = \frac{6{,}8}{320 + 2200} \cdot 2200 \approx 5{,}94\,\mathrm{V}$$

## Domande

**1. Enunciare i due principi di Kirchhoff.**

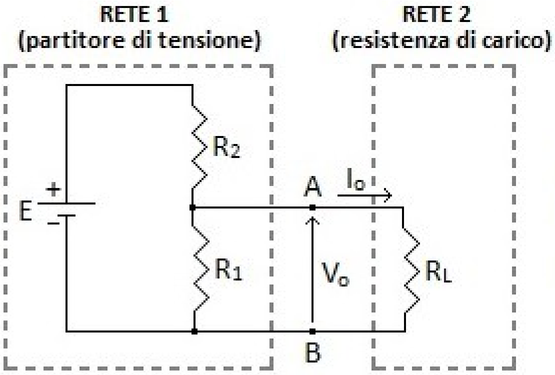
In un nodo la somma algebrica delle correnti è uguale a zero (primo principio).
In una maglia la somma algebrica delle tensioni è pari a zero (secondo principio).

**2. Enunciare il principio di Thevenin.**

Un circuito elettrico lineare, comunque complesso, visto da due morsetti A e B è equivalente ad un generatore reale di tensione. La tensione impressa del generatore coincide con la tensione a vuoto ai due terminali e la resistenza equivalente vista dai due terminali è calcolata dopo aver sostituito i generatori presenti con le relative resistenze interne (o in altre parole cortocircuitando i generatori ideali di tensione e aprendo i generatori ideali di corrente).

## Esercizi

**1. La rete in figura è formata da un partitore di tensione a cui è collegato un carico. Determinare i valori di $I_o$ e $V_o$ sulla resistenza di carico, utilizzando il teorema di Thevenin.**




E = 10 V

$R_1 = R_2 = 1\ k\Omega$

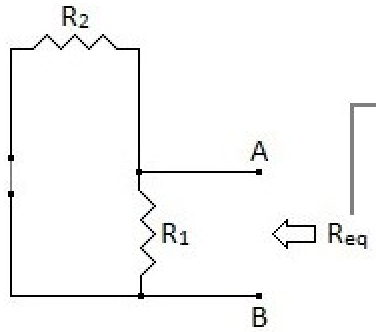
$R_L = 2{,}2\ k\Omega$

**Soluzione.** Si scompone il circuito in due reti:

- **RETE 1:** partitore di tensione di cui non interessa compiere l'analisi;
- **RETE 2:** resistenza di carico $R_L$ di cui interessa calcolare i valori di $I_o$ e $V_o$.

Si applica il teorema di Thevenin alla **RETE 1** per determinare:

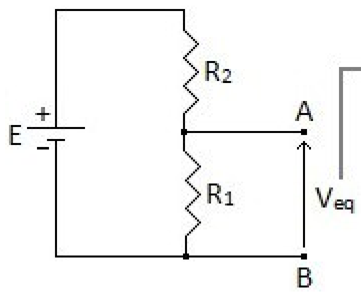
- **Resistenza equivalente**




Resistenza equivalente vista ai morsetti A e B corrisponde al parallelo tra $R_1$ e $R_2$.

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1000 \cdot 1000}{1000 + 1000} = \frac{1000 \cdot 10\cancel{00}}{2\cancel{000}} = 500\ \Omega$$

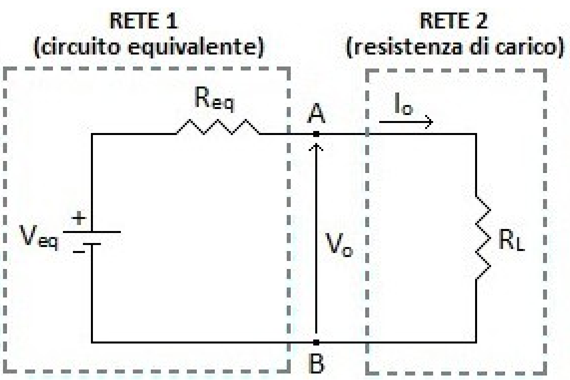
- **Tensione equivalente**




Tensione tra morsetti A e B a vuoto è la tensione che cade sulla resistenza $R_1$.

$$V_{eq} = E\,\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 1000}{1000 + 1000} = \frac{10\cancel{000}}{2\cancel{000}} = 5\ V$$

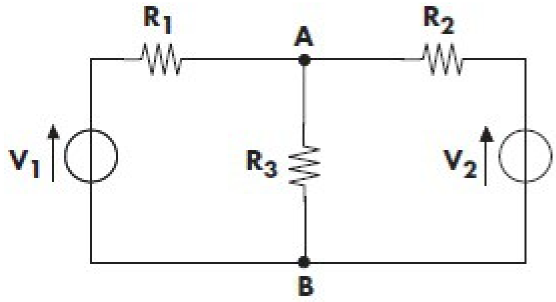
Collegando il circuito di Thevenin della **RETE 1** alla **RETE 2** si calcola corrente e tensione sul carico.




$$\begin{cases} I_o = \dfrac{V_{eq}}{R_{eq} + R_L} = \dfrac{5}{500 + 2200} = 1{,}85\ mA \\ V_o = R_L \cdot I_o = 2200 \cdot 1{,}85 \cdot 10^{-3} = 4{,}07\ V \end{cases}$$

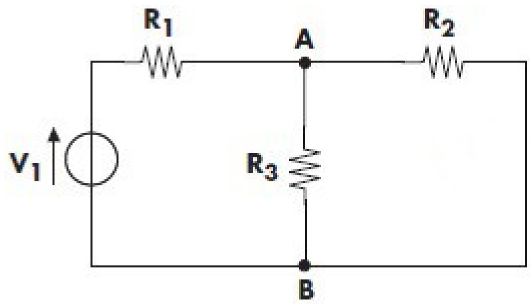
- **Nota.** La tensione del partitore a vuoto $V_{eq}$ = 5 V si riduce a $V_o$ = 4 V una volta connesso al carico. Questo perchè il partitore di tensione è un generatore reale di tensione la cui resistenza interna è data da $R_{eq}$. Quindi la tensione mancante in uscita (1 V) è caduta sulla resistenza $R_{eq}$.

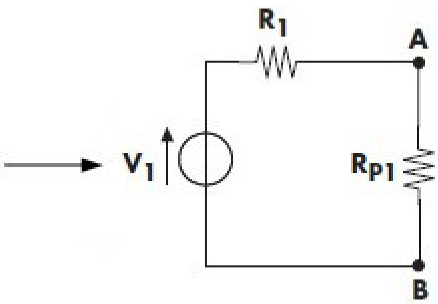
**2. Calcolare, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, la tensione $V_{AB}$.**




$V_1 = 10$ V; $V_2 = 5$ V
$R_1 = 1$ kΩ; $R_2 = 2{,}2$ kΩ;
$R_3 = 10$ kΩ
$V_{AB} = ?$

**Soluzione.**
Considero solo $V_1$ ed annullo $V_2$ ($V_2 = 0$ ). Ridisegno il circuito sostituendo $V_2$ con un cortocircuito:



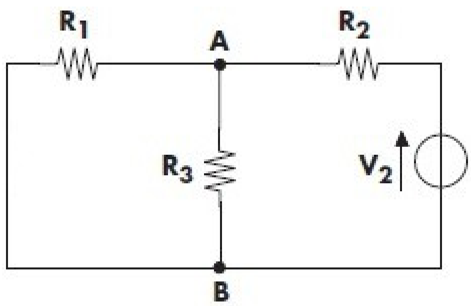



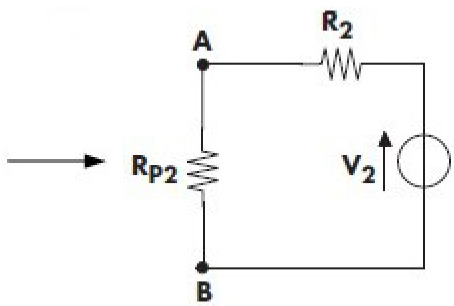

$R_{p1} = R_2 // R_3$ (**regola del parallelo di due resitenze**) → $R_{p1} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2200 \cdot 10000}{2200 + 10000} \approx 1803\,\Omega$

Applicando il partitore di tensione calcoliamo la tensione $V'_{AB}$ con il solo generatore $V_1$ attivo:

$$V'_{AB} = \frac{R_{p1} \cdot V_1}{R_1 + R_{p1}} = \frac{1803 \cdot 10}{1000 + 1803} \approx 6{,}43\text{ V}$$

Considero solo $V_2$ ed annullo $V_1$ ($V_1 = 0$). Ridisegno il circuito sostituendo $V_1$ con un cortocircuito:




$R_{p2} = R_1 // R_3$ (**regola del parallelo di due resitenze**) → $R_{p2} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1000 \cdot 10000}{1000 + 10000} \approx 909\,\Omega$

Applicando il partitore di tensione calcoliamo la tensione $V''_{AB}$ con il solo generatore $V_2$ attivo:

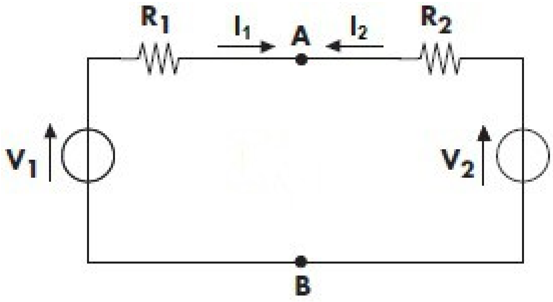
$$V''_{AB} = \frac{R_{p2} \cdot V_2}{R_2 + R_{p2}} = \frac{909 \cdot 5}{2200 + 909} \approx 1{,}46\text{ V}$$

Infine la somma dei due effetti fornisce la tensione totale del ramo AB:

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = 6{,}43 + 1{,}46 = 7{,}89\text{ V}$$

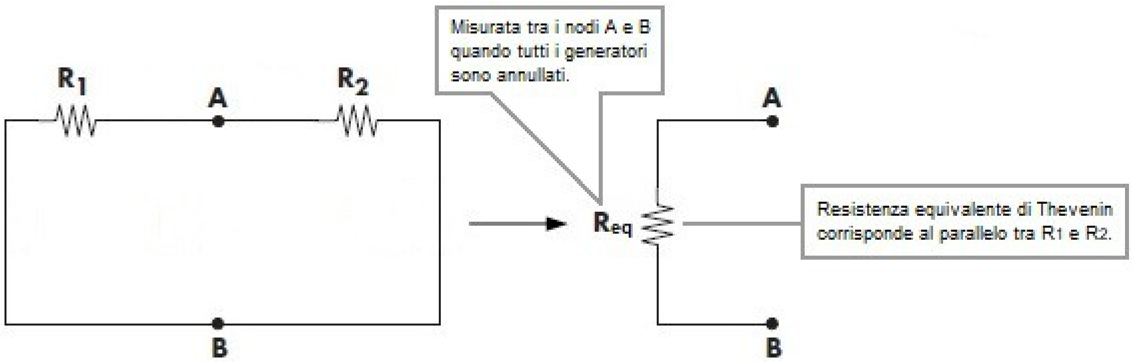
**3. Risolvere l'esercizio precedente utilizzando il principio di Thevenin.**

**Soluzione.** Si può staccare il resistore $R_3$ e quindi il circuito diventa il seguente:



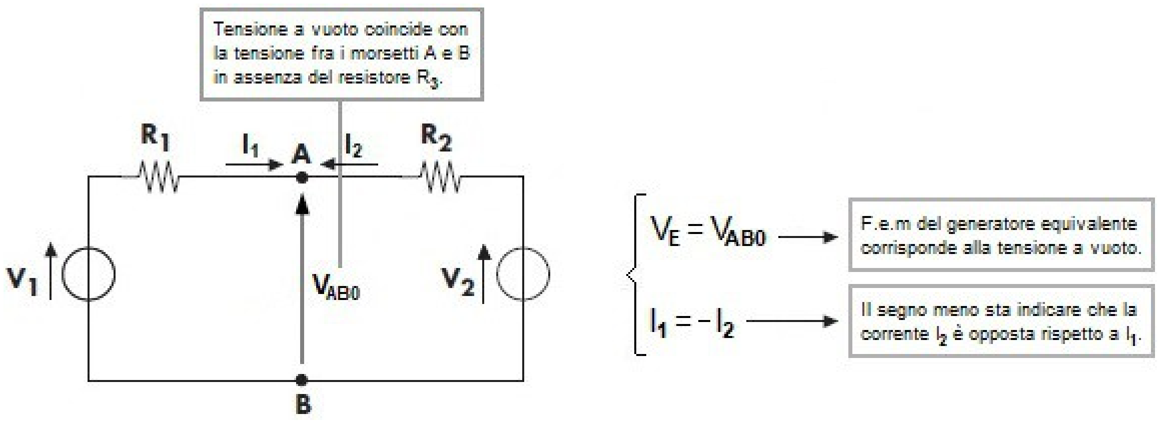

Si applica il teorema di Thevenin per ricavare il generatore equivalente visto dai morsetti A e B. In particolare si determina:

▪ **Resistenza equivalente**




$R_E = R_1 // R_2$ **(regola del parallelo di due resitenze)** → $R_E = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{1000 \cdot 2200}{1000 + 2200} \approx 687\,\Omega$

▪ **Tensione equivalente**




I due rami sono connessi in parallelo rispetto ai morsetti A e B, pertanto il calcolo della tensione a vuoto $V_{AB}$ è la stessa; quindi impongo l'equazione:

$$V_E = V_{AB0} = V_1 - R_1 \cdot I_1 = V_2 - R_2 \cdot I_2 = V_2 - R_2 \cdot (-I_1) = V_2 + R_2 \cdot I_1 \; (\ast)$$

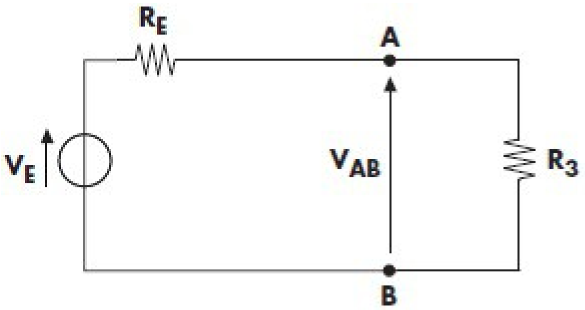
da cui si ricava il valore della corrente incognita $I_1$:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 - 5}{1000 + 2200} = \frac{5}{3200} \approx 1{,}56\,\text{mA}$$

Sostituendo il valore di $I_1$ nell'espressione (*) si trova la tensione del generatore equivalente $V_E$:

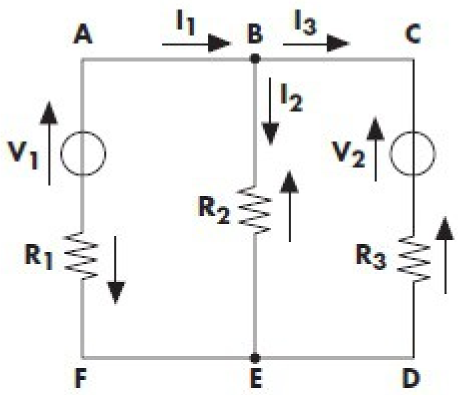
$$V_E = V_1 - R_1 \cdot I_1 = 10 - 1 \cdot 10^3 \cdot 1{,}56 \cdot 10^{-3} \approx 8{,}44\,\mathrm{V}$$

Se ora si sostituisce il circuito privato del ramo AB con il suo generatore equivalente e si ricollega la resistenza $R_3$ tra i punti A e B si trova subito la tensione cercata:




$$V_{AB} = \frac{V_E \cdot R_3}{R_E + R_3} = \frac{8{,}44 \cdot 10000}{687 + 10000} \approx 7{,}89\,\Omega$$

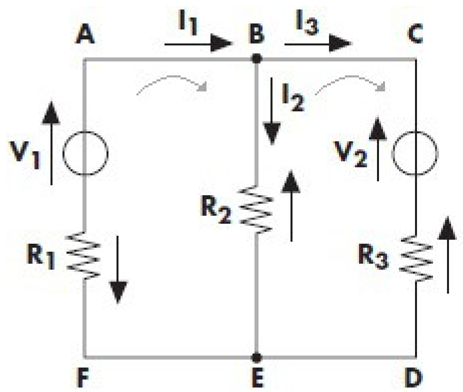
**4. Calcolare, con Kirchhoff, le tre correnti $I_1$, $I_2$ e $I_3$.**




$V_1 = 50$ V
$V_2 = 10$ V
$R_1 = 4{,}7$ kΩ
$R_2 = 1$ kΩ
$R_3 = 6{,}2$ kΩ

$I_1 = ?$, $I_2 = ?$, $I_3 = ?$

**Soluzione.** Indicare i versi delle c.d.t. sulle resistenze (in senso opposto al verso delle correnti), poi fissare a piacere il verso di percorenza delle maglie (nel nostro esempio verso orario). Ora si tratta di individuare quante equazioni indipendenti (pari al numero dei rami) è possibile scrivere.




- n = 2 ⇒ n - 1 = 2 - 1 = 1 ⇒ Esempio nodo B
- r = 3 ⇒ r - n + 1 = 3 - 1 = 2 ⇒ Maglie adiacenti ABEFA BCDEB

Quindi possiamo scrivere una sola equazione indipendente ai nodi applicando Kirchhoff ai nodi e due equazioni indipendenti alle maglie applicando Kirchhoff alle maglie.

Un possibile sistema risolutivo è il seguente:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \text{ -------------} \rightarrow \text{Nodo B} \\ V_1 - R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0 \text{ --------} \rightarrow \text{Maglia ABEFA} \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - V_2 = 0 \text{ --------} \rightarrow \text{Maglia BCDEB} \end{cases}$$

Divido e moltiplico ambo i membri la seconda equazione per 50, la terza equazione per 10.

Ricaviamo la $I_1$ dalla prima equazione

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ V_1 - R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - V_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 50 - 1000 I_2 - 4700 I_1 = 0 \\ 1000 I_2 - 6200 I_3 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 1 - 20 I_2 - 94 I_1 = 0 \\ 100 I_2 - 620 I_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sostituiamo a $I_1$ nella seconda equazione l'espressione trovata.

Ricaviamo la $I_2$ dalla terza equazione

$$\begin{cases} I_1 = \boxed{I_2 + I_3} \\ 1 - 20 I_2 - 94 I_1 = 0 \\ 100 I_2 - 620 I_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 1 - 20 I_2 - 94 ( \boxed{I_2 + I_3} ) = 0 \\ 100 I_2 - 620 I_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 1 - 20 I_2 - 94 I_2 - 94 I_3 = 0 \\ 100 I_2 - 620 I_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sostituiamo a $I_2$ nella seconda equazione l'espressione trovata.

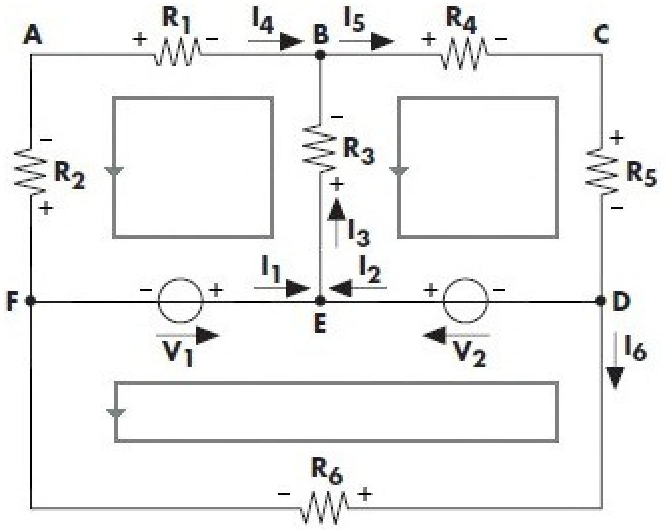
Ricaviamo i valori di $I_2$ e $I_1$ dalla I e III equazione

Ricaviamo il valore di $I_3$ dalla seconda equazione

$$\begin{cases} I_2 = \boxed{\dfrac{620 I_3 + 1}{100}} \\ 1 - 114 I_2 - 94 I_3 = 0 \\ I_1 = I_2 + I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 1 - 114 \left( \boxed{\dfrac{620 I_3 + 1}{100}} \right) - 94 I_3 = 0 \\ I_2 = \dfrac{620 I_3 + 1}{100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = \dfrac{620 I_3 + 1}{100} \\ \boxed{1 - 706{,}8 I_3 - 1{,}14 - 94 I_3 = 0} \\ I_1 = I_2 + I_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_2 = 8{,}92 \text{ mA} \\ I_3 = -0{,}175 \text{ mA} \\ I_1 = 8{,}74 \text{ mA} \end{cases}$$

**5. Scrivere un sistema di equazioni risolutivo di questo circuito.**



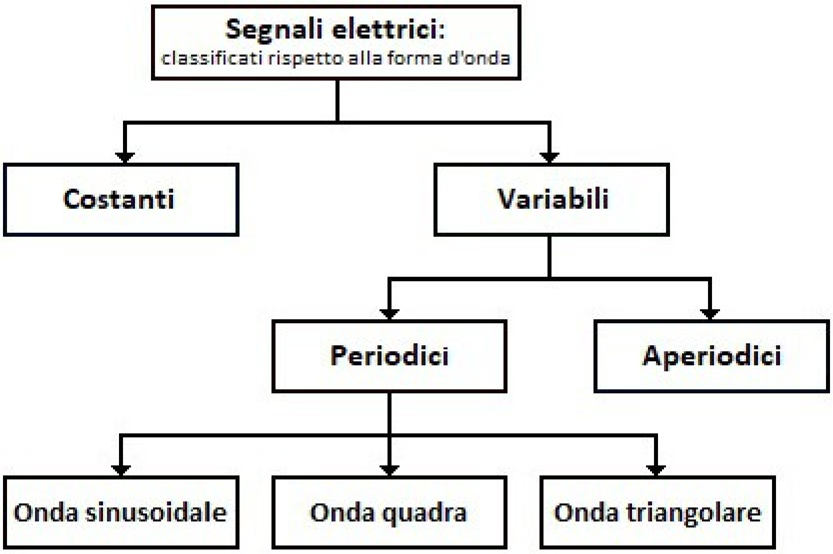

- n (numero nodi) = 4
- r (numero maglie) = 6
- n – 1 = 4 – 1 = 3 Equaz. indip. nodi
- r – (n – 1) = 6 – 3 = 3 Equaz. indip. maglie

Un possibile sistema risolutivo è il seguente:

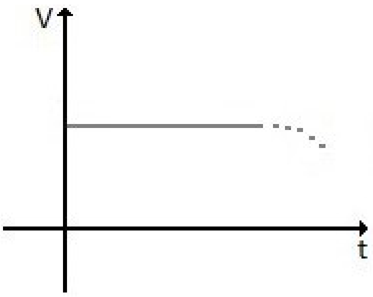
$$\begin{cases} I_4 - I_5 + I_3 = 0 \dashrightarrow \text{Nodo B} \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \dashrightarrow \text{Nodo E} \\ I_6 - I_1 - I_4 = 0 \dashrightarrow \text{Nodo F} \\ V_1 - R_3 I_3 + R_1 I_4 + R_2 I_4 = 0 \dashrightarrow \text{Maglia FEBAF} \\ -V_2 + R_5 I_5 + R_4 I_5 + R_3 I_3 = 0 \dashrightarrow \text{Maglia EDCBE} \\ -V_1 + V_2 + R_6 I_6 = 0 \dashrightarrow \text{Maglia FEDF} \end{cases}$$

## 17. I segnali

- **Segnale**: una qualunque grandezza fisica variabile nel tempo usata per trasportare l'informazione. L'informazione può essere contenuta nei parametri che caratterizzano il segnale.
- Si assumono particolare importanza i segnali di tipo elettrico; tra questi sono molto utilizzati nelle applicazioni di laboratorio quelli **periodici**.

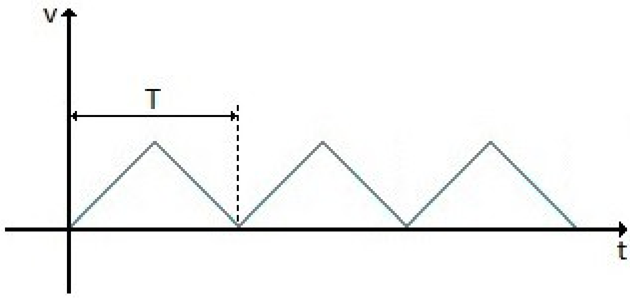



- **Segnale continuo**




Le grandezze costanti possono essere dei segnali:
1. perchè a volte sono costanti solo sul breve periodo e variano su tempi lunghi; esempio: tensione fornita da un trasduttore di temperatura;
2. perchè può essere che l'informazione sia contenuta nel valore della grandezza; esempio: misure dei parametri in un circuito.

- **Segnale periodico**: segnale che dopo un certo intervallo di tempo torna a ripetersi ancora uguale.




- **T (periodo)**: intervallo di tempo necessario affinchè il segnale si ripeta.
- **F (frequenza)**: numero di volte che il segnale si ripete in un secondo.
- Sussiste la seguente relazione tra F e T:

$$F = \frac{1}{T}\ [Hz] \quad \text{oppure} \quad T = \frac{1}{F}\ [s]$$

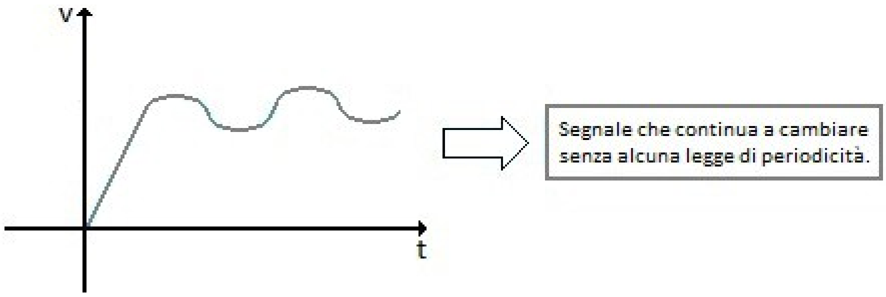
- **Nota**. Al crescere di T cala F in quanto le due grandezze sono inversamente proporzionali.

- Dunque i segnali periodici sono quelli descritti da una formula matematica del tipo:

$$\boxed{v(t) = v(t + nT) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3\ldots}$$

- Questa relazione afferma sinteticamente che il segnale v(t) all'istante t presenta un valore uguale a quello che assume negli istanti t+nT.
- E' da notare che l'espressione matematica di variazione dei segnali periodici non trasporta alcuna informazione, ma è presente in una eventuale variazione imprevista di qualche parametro.
- I segnali periodici sono tipicamente prodotti da appositi strumenti di laboratorio (un caso classico è quello del generatore di funzioni).

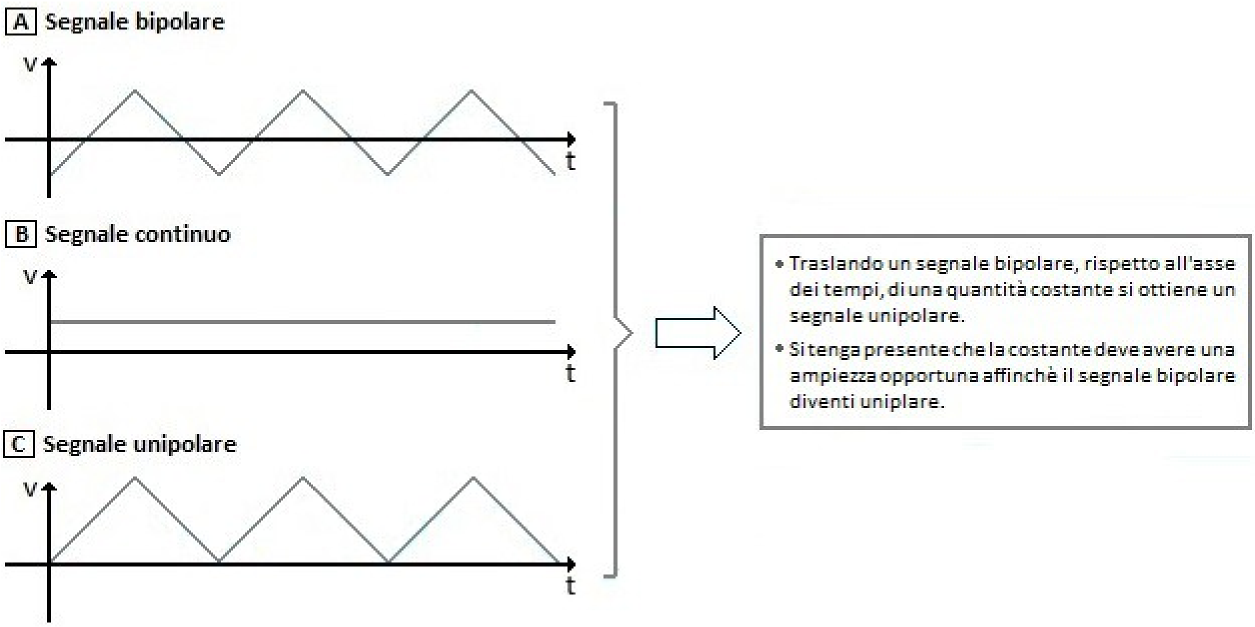
▪ **Segnale aperiodico**: segnale privato di legge di periodicità (non si ripete ciclicamente). In natura i segnali aperiodici sono i più diffusi; per esempio la voce umana o la musica.



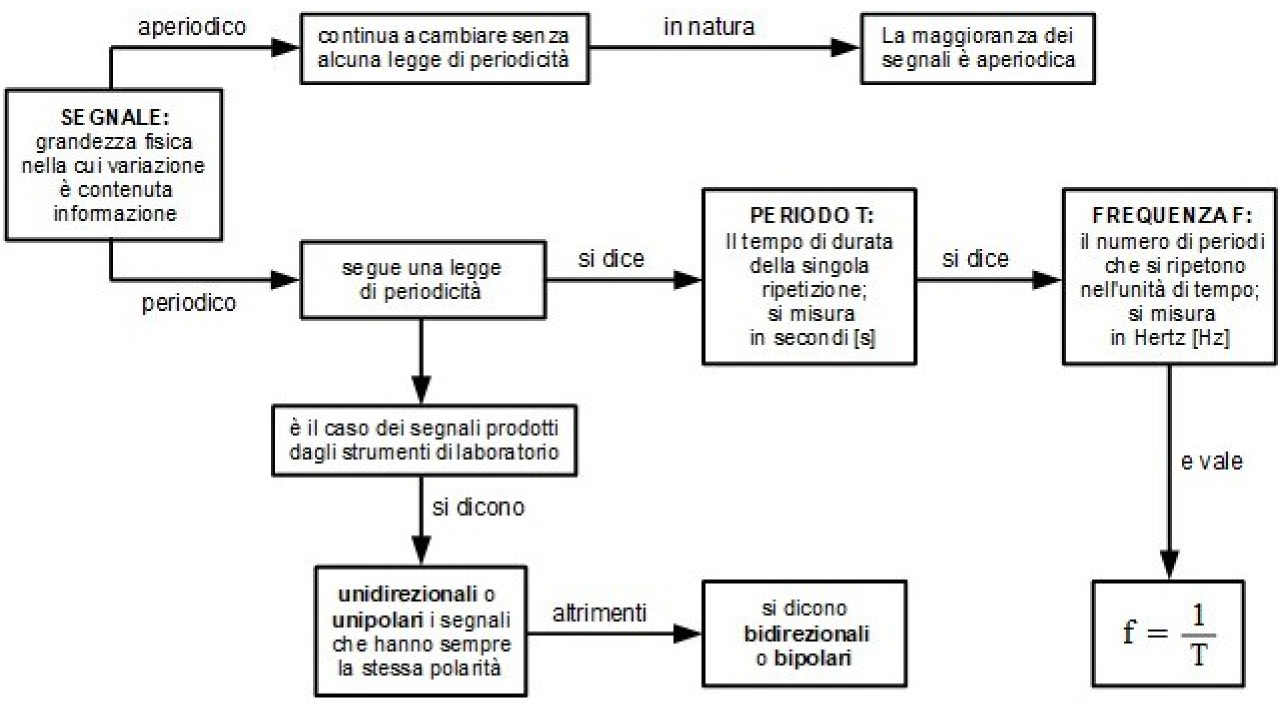

▪ Si noti che il generico valore istantaneo di una grandezza variabile nel tempo v(t) viene denotata con una lettera minuscola, mentre le grandezze costanti nel tempo (definite continue nel tempo) vengono indicate con lettere maiuscole.

▪ **Segnale bipolare**: la grandezza fisica assume nel tempo sia valori positivi sia valori negativi.

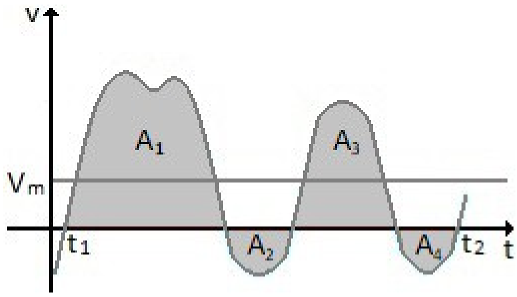
▪ **Segnale unipolare**: la grandezza fisica assume nel tempo solo valori negativi o solo valori positivi e può essere pensato come ottenuto dalla somma tra un segnale bipolare e uno continuo.




▪ **Mappa riassuntiva**



▪ **Valore medio**. Si consideri una generica funzione nel tempo v(t) definita in un intervallo di tempo, il suo valore medio si esprime come il rapporto tra l'area sottesa dalla curva nel suddetto intervallo e l'intervallo stesso; tale area è la somma algebrica delle aree sottese dalla curva, superiormente e inferiormente all'asse t.



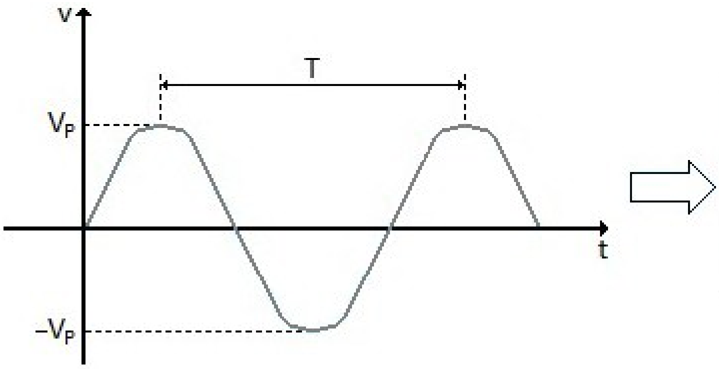

$$V_m = \frac{A_1 - A_2 + A_3 - A_4}{t_2 - t_1}$$

▪ Se il segnale è periodico la componente continua coincide con il suo valor medio, cioè un segnale periodico a valor medio nullo è privo di componente continua.

▪ **Segnale alternato**: un segnale periodico a valore medio nullo (privo di componente continua). Un caso particolare di segnale alternato è quello **sinusoidale** espresso dalla relazione matematica:

$$v(t) = V_p sen(\omega t + \varphi)$$

dove $V_p$ è il **valore massimo** o di **picco** del segnale mentre ω è la **pulsazione** e φ **fase** del segnale.

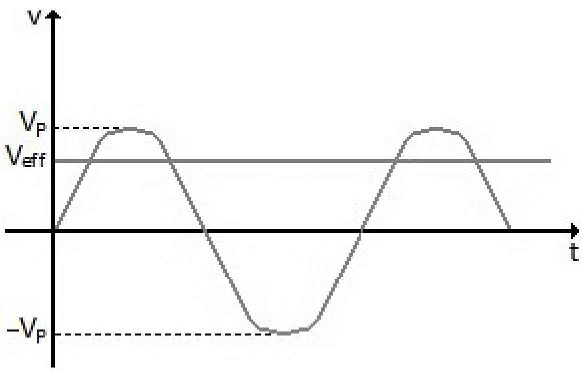



- $V_p$ = valore di picco
- ω = pulsazione
- φ = fase del segnale
- T = periodo
- f = frequenza

▪ La frequenza, la pulsazione e il periodo non sono tra loro indipendenti, ma legati dalle relazioni:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{e} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

▪ **Valore efficace**: parametro molto importante usato soprattutto con correnti e tensioni alternate, ma estensibile al più generale caso periodico; definisce quel valore di corrente continua che causa su una resistenza, in un tempo uguale a T, lo stesso effetto termico della corrente periodica.



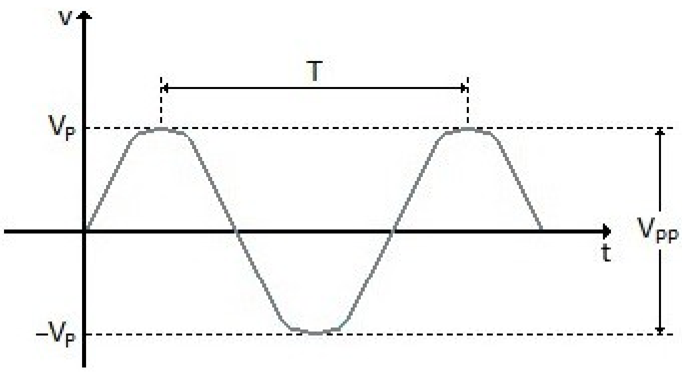

$$V_{eff} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

▪ **Esempio**. Se si dice che una lampadina alimentata con una tensione alternata di 220 $V_{eff}$ presenta una potenza di 60 W, si vuol dire che la stessa lampadina alimentata con una tensione continua da 220 V produrrebbe la stessa potenza.

| Parametri | Significato |
|---|---|
| **Valore di picco $V_p$** | Valore massimo assunto dal segnale in un periodo |
| **Valore di picco-picco $V_{pp}$** | Differenza tra il valore massimo e il valore minimo |
| **Valore medio $V_m$** | Media dei valori assunti dal segnale in un periodo |
| **Valore efficace $V_{eff}$** | Valore continuo che causa gli stessi effetti termici |

▪ **Alcuni segnali tipici**.

**1. Segnale armonico:** segnale alternato a valore medio nullo.



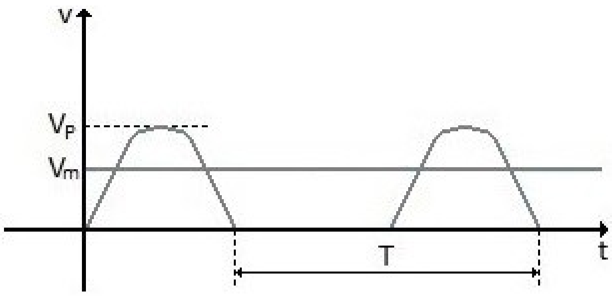

$V_P$ = valore di picco o massimo

$V_{PP}$ = valore picco-picco = 2 $V_P$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}}$$

▪ **Dal segnale sinusoidale derivano quelli raddrizzati a semionda e a onda intera.**

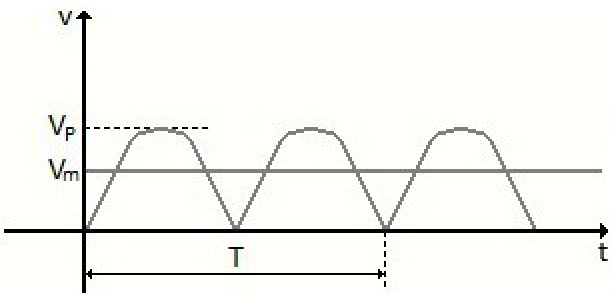
**1a. Segnale raddrizzato a semionda**: segnale unidirezionale a valore medio non nullo.




$$\boxed{V_m = \text{valore medio} = \frac{V_P}{\pi}}$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_P}{2}}$$

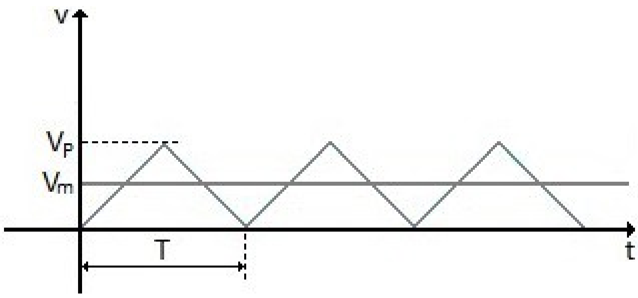
**1b. Segnale raddrizzato a doppia semionda**: segnale unidirezionale e nota che il periodo T è quello del segnale sinusoidale da cui si ricava quello raddrizzato.




$$\boxed{V_m = \frac{2V_P}{\pi}}$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}}$$

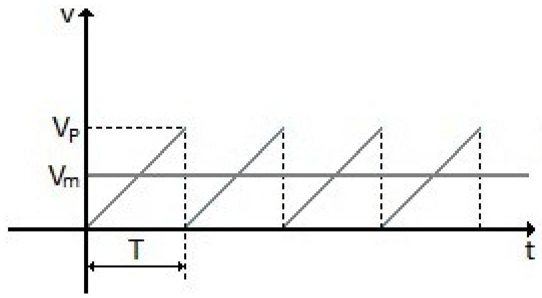
**2. Segnale triangolare**: segnale unidirezionale a valore minimo nullo.




$$\boxed{V_m = \frac{V_P}{2}}$$

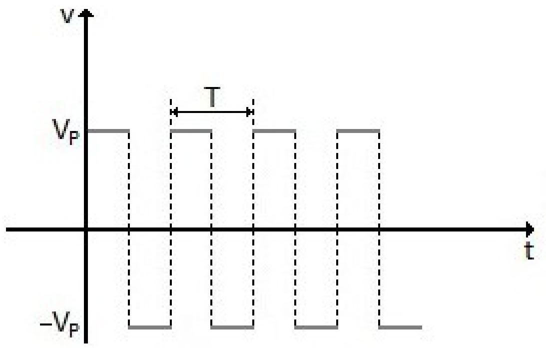
$$\boxed{V_{eff} = \frac{V_P}{\sqrt{3}}}$$

**2a. Segnale triangolare a dente di sega**: segnale unidirezionale a valore minimo nullo.



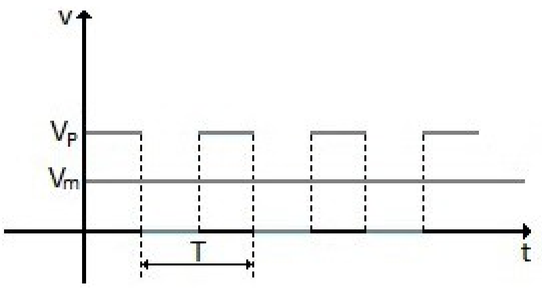

$$V_m = \frac{V_P}{2}$$
$$V_{eff} = \frac{V_P}{\sqrt{3}}$$

**3. Segnale a onda quadra alternato**: segnale a due livelli di pari durata a valore medio nullo.



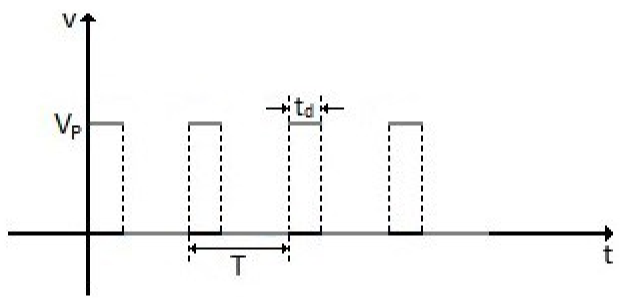

$$V_m = 0$$
$$V_{eff} = V_P$$

**3a. Segnale a onda quadra unipolare**: segnale a due livelli di pari durata a valore medio non nullo.




$$V_m = \frac{V_P}{2}$$
$$V_{eff} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

▪ Se i due livelli hanno durata diversa, si parla di **segnale impulsivo**. Un parametro particolarmente importante è il **duty cycle** (ciclo utile): il rapporto tra il tempo di durata del livello alto (o basso) e il periodo (tempo di ripetizione) dell'onda.




$$D = \frac{t_d}{T}$$

▪ Spesso questo parametro è espresso in forma percentuale. Se il segnale a due livelli presenta un duty cycle del 50 % è un onda quadra.

▪ Se $t_d$ si riferisce alla durata del livello alto, si parla di **impulsi positivi** (D < 50%), se si riferisce alla durata del livello basso, si parla di **impulsi negativi**.

▪ I termini "impulsi positivi" e "impulsi negativi" non significano che sono positivi oppure negativi nel senso numerico, ma convenzionalmente si basano sul fatto che il ciclo utile venga valutato sul livello alto anziché su quello basso.

Ricordiamo:

▪ Il **valore medio** di un segnale in un certo intervallo di tempo esprime il rapporto tra l'area sottesa dalla curva del segnale e l'intervallo dello stesso.

▪ Il **valore efficace** di una grandezza periodica esprime la grandezza continua equivalente dal punto di vista energetico.

## Domande

**1. Un segnale contiene l'informazione nella variazione nel tempo di un suo parametro; come mai la tensione continua può comunque considerarsi un segnale?**

Se il valore continuo non è noto o subisce una variazione rispetto al valore previsto si ha comunque informazione. Esempio: le misure che si fanno in un circuito (se il valore letto è differente da quello che dovrebbe essere significa che è presente un guasto).

**2. Un segnale sinusoidale varia nel tempo e quindi è un segnale. Se no, perchè?**

No, perchè l'informazione è relativa ad una variazione non prevista; per esempio varia l'ampiezza o la frequenza. L'informazione non è nella sua legge di variazione nota ma nel suo cambiamento.

**3. Quanto vale il valore continuo di una tensione alternata?**

Si definisce tensione alternata un segnale periodico a valor medio nullo e siccome il valore medio è la sua componente continua la risposta è zero.

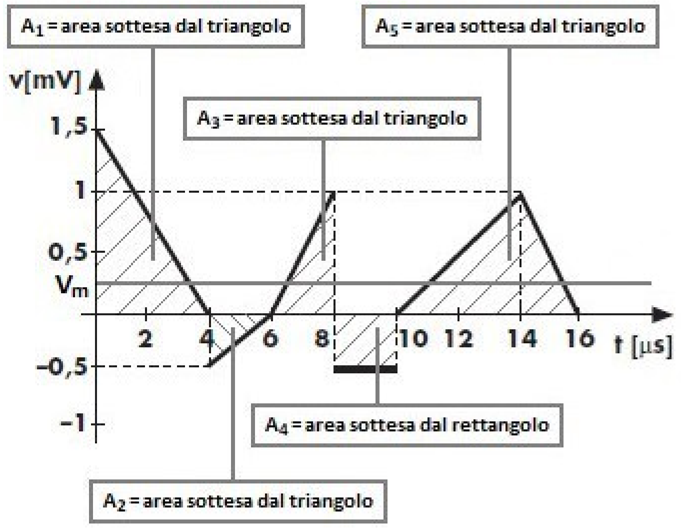
**4. Cos'è il duty cycle di un segnale impulsivo? E quanto vale in un'onda quadra?**

Se ci si riferisce al livello alto, il duty cycle è definito come il rapporto tra la durata del livello alto ed il periodo. Nel caso di onda quadra si ha D = 50 %.

## Esercizi

**1. Facendo riferimento alla seguente figura, calcolare il valore medio nell'intervallo tra 0 e 16 μs.**

**Soluzione.** Si tratta di calcolare l'area contenuta in ciascuna figura geometrica.




$$
\begin{cases}
\cdot A_1 = \dfrac{4\mu s \cdot 1{,}5\,mV}{2} = 3 \cdot 10^{-9} sV \\
\cdot A_2 = \dfrac{2\mu s \cdot (-0{,}5\,mV)}{2} = -0{,}5 \cdot 10^{-9} sV \\
\cdot A_3 = \dfrac{2\mu s \cdot 1\,mV}{2} = 1 \cdot 10^{-9} sV \\
\cdot A_4 = 2\mu s \cdot (-0{,}5\,mV) = -1 \cdot 10^{-9} sV \\
\cdot A_5 = \dfrac{6\mu s \cdot 1\,mV}{2} = 3 \cdot 10^{-9} sV
\end{cases}
$$

Quindi il valore medio del segnale è la somma algebrica delle aree sottese dalla curva sopra e sotto l'asse dei tempi diviso l'intervallo di tempo considerato.

$$V_m = \frac{A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5}{t_2 - t_1} = \frac{(3 \cdot 10^{-9} - 0{,}5 \cdot 10^{-9} + 1 \cdot 10^{-9} - 1 \cdot 10^{-9} + 3 \cdot 10^{-9})\,sV}{16 \cdot 10^{-6}\,s} = 0{,}343\,mV$$

**2. Calcolare il valore efficace di un segnale armonico raddrizzato a semionda, sapendo che il suo valore medio corrisponde a 1 V.**

**Soluzione.** Basta applicare le relazioni:

$$
\begin{cases}
V_m = \dfrac{V_p}{\pi} \rightarrow V_p = V_m \cdot \pi = 1 \cdot \pi = 3{,}14\,V \\
V_{eff} = \dfrac{V_p}{2} = \dfrac{3{,}14}{2} = 1{,}57\,V
\end{cases}
$$

**3. Consideriamo un segnale bipolare avente un periodo T di 20 ms (il tempo corrispondente alla durata di una semionda positiva più una negativa), calcolarne la frequenza.**

**Soluzione.** La frequenza del segnale è 50 Hz o è di 50 cicli; infatti:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}\,s} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 s^{-1} = 50\,Hz$$

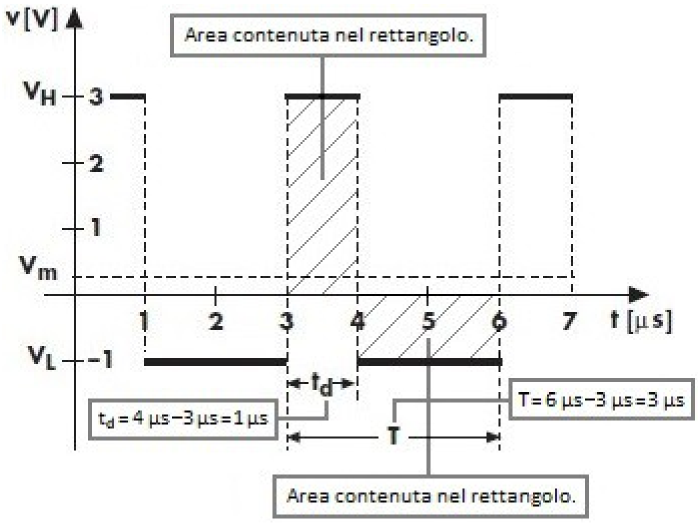
In altri temini per ogni secondo passano 50 semionde positive e 50 negative, quindi la f è di 50 Hz.

**4. Un segnale alternato triangolare presenta un valore efficace corrispondente a 3,5 mV. Quanto vale il suo valore di picco?**

**Soluzione.** Basta applicare la relazione:

$$V_{eff} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} \rightarrow V_p = V_{eff} \cdot \sqrt{3} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{3} = 6{,}06\,\text{mV}$$

**5. Dal segnale impulsivo indicato in figura valutare la frequenza, il duty cycle e il valore medio.**




**Soluzione.** Il periodo risulta T = 3 µs, quindi la frequenza vale:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} \approx 333\,\text{kHz}$$

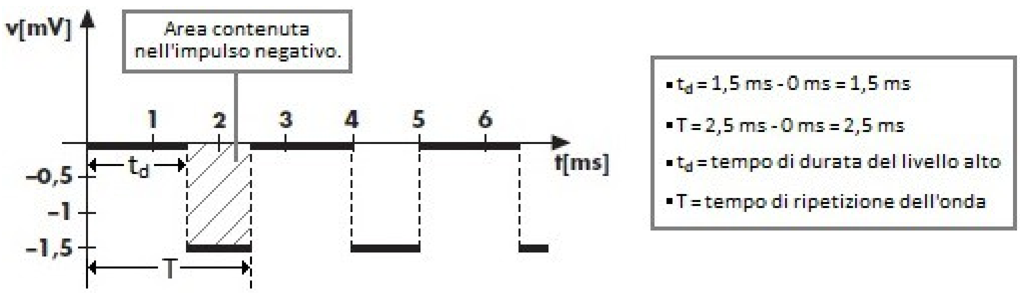
Valutando il duty cycle rispetto al livello alto e applicando la formula si ottiene:

$$D = \frac{t_d}{T} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Infine valutiamo il valore medio applicando la formula:

$$V_m = \frac{V_H \cdot \overbrace{\boxed{t_d}}^{\text{Tempo di durata dell'impulso positivo}} + V_L \cdot \overbrace{\boxed{(T - t_d)}}^{\text{Tempo di durata dell'impulso negativo}}}{T} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}33\,\text{V}$$

**6. Valutare la frequenza, il duty cycle e il valore medio del segnale indicato in figura.**




**Soluzione.** Il periodo risulta T = 2,5 ms, quindi la frequenza vale:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 400\,\text{Hz}$$

Valutando il duty cycle rispetto al livello alto e applicando la formula si ottiene:

$$D = \frac{t_d}{T} = \frac{1{,}5}{2{,}5} \cdot 100 = 60\,\%$$

Infine valutiamo il valore medio applicando la formula:

$$V_m = \frac{V_H \cdot t_d + V_L \cdot (T - t_d)}{T} = \frac{0 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} - 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = -\,0{,}6\,\mathrm{mV}$$

▪ **Nota**. Questa relazione è esprimibile anche in funzione del duty cycle:

$$V_m = \frac{V_H \cdot t_d + V_L \cdot (T - t_d)}{T} = \frac{V_H \cdot t_d}{T} + V_L \cdot \left(\frac{T}{T} - \frac{t_d}{T}\right) = V_H \cdot D + V_L \cdot (1 - D)$$

Si può anche dimostrare che il valore efficace risulta:

$$V_{eff} = \sqrt{V_H^2 \cdot D + V_L^2 \cdot (1 - D)}$$

**7. Un segnale a due livelli, con valore minimo $V_L = 0$ ed ampiezza picco-picco di 10 V, presenta un valore medio $V_m = 2{,}5$ V; determinare il valore del duty cycle.**

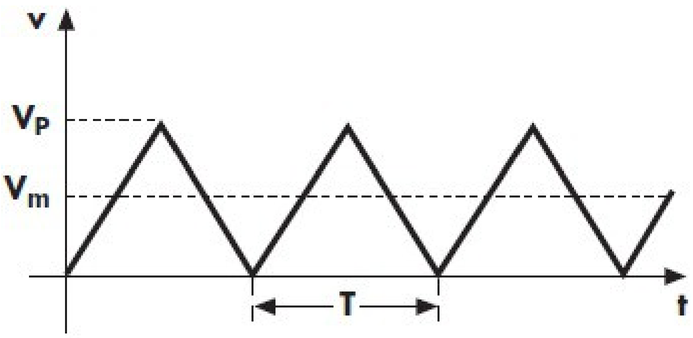
**Soluzione.** Poichè sappiamo che il valore di picco-picco è pari alla differenza tra il valore massimo e il valore minimo, si trova facilmente il valore massimo dalla relazione:

$$V_{pp} = V_H - V_L \rightarrow 10 = V_H - 0 \rightarrow V_H = 10\,\mathrm{V}$$

Quindi si valuta il valore del duty cycle rispetto al livello alto attraverso la relazione:

$$V_m = V_H \cdot D + V_L \cdot (1 - D) \rightarrow V_H + 0 \cdot (1 - D) \rightarrow V_H \cdot D \rightarrow D = \frac{V_m}{V_H} = \frac{2{,}5}{10} \cdot 100 = 25\%$$

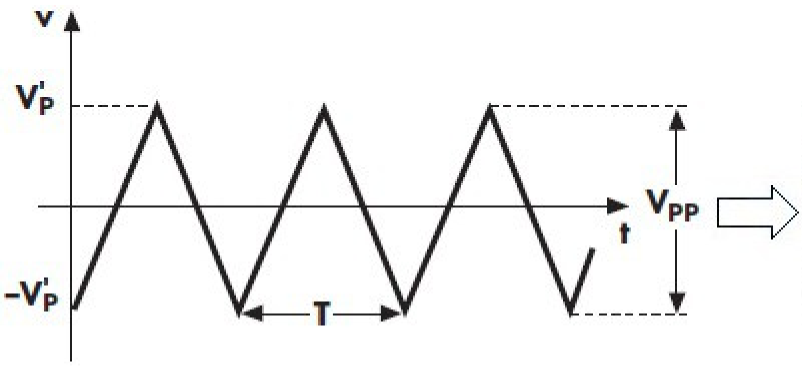
**8. Se al segnale triangolare rappresentato in figura con $V_{eff} = 5{,}77$ V sommi una tensione di – 5 V, che segnale ottieni? Quanto vale il suo valore efficace?**




**Soluzione.** Basta applicare la relazione e si trova il valore di picco del segnale:

$$V_{eff} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} \rightarrow V_p = V_{eff} \cdot \sqrt{3} = 5{,}77 \cdot \sqrt{3} \approx 10\,\mathrm{V}$$

Guardando la figura risulta ora evidente che se sommi ad un segnale triangolare unidirezionale una tensione di – 5 V il segnale si abbassa diventando bidirezionale con un valore di picco $V'_p = 5$ V.

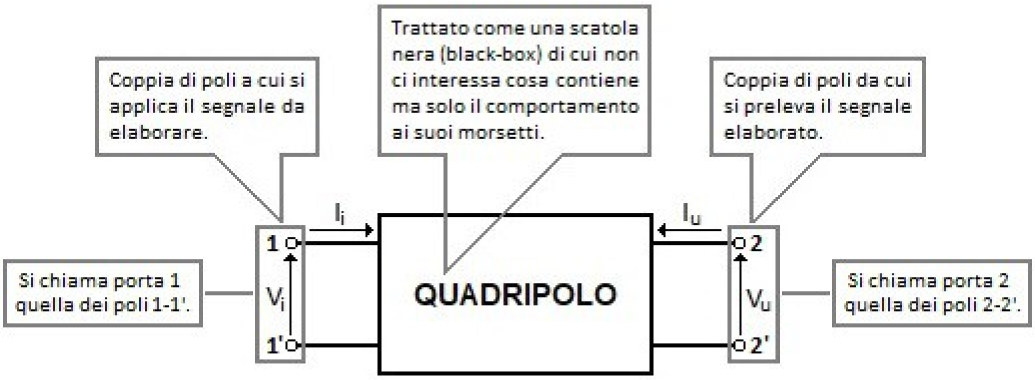



Il nuovo valore efficace si ottiene quindi dalla relazione:

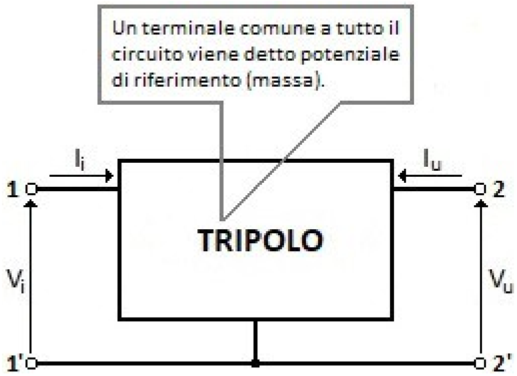
$$V_{eff} = \frac{V'_p}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2{,}89\,\mathrm{V}$$

## 18. Quadripoli (o doppi bipoli)

- Una rete elettrica comunque complessa in cui si individuano una **coppia di morsetti di ingresso** e una **coppia di morsetti di uscita**.
- Dal punto di vista elettrico il doppio bipolo è caratterizzato da quattro parametri: $\mathbf{V_i}$, $\mathbf{I_i}$ ai morsetti di ingresso e $\mathbf{V_u}$, $\mathbf{I_u}$ ai morsetti di uscita.
- I versi delle correnti e tensioni siano fissati con la **convenzione degli utilizzatori**, come in figura.




- Nel caso uno dei due poli sia comune all'ingresso e all'uscita il quadripolo viene chiamato **tripolo**.




- **Esempi** di componenti elettrici modellabili come quadripoli: trasformatori, linee elettriche a due conduttori e tutti i tripoli in generale.
- Descrivere elettricamente un quadripolo significa imporre specifici legami tra i quattro parametri, che tipicamente possono essere espressi con due equazioni quante sono le porte.
- Queste equazioni permettono di determinare due dei quattro parametri (**variabili dipendenti**) in funzione degli altri due (**variabili indipendenti**).
- A seconda dei parametri scelti come indipendenti, si possono avere quattro coppie di equazioni:

$$\begin{cases} V_i = f[I_i, I_u] \\ V_u = f[I_i, I_u] \end{cases} \quad \begin{cases} I_i = f[V_i, I_u] \\ V_u = f[V_i, I_u] \end{cases} \quad \begin{cases} I_i = f[V_i, V_u] \\ I_u = f[V_i, V_u] \end{cases} \quad \begin{cases} V_i = f[I_i, V_u] \\ I_u = f[I_i, V_u] \end{cases}$$

- Si può osservare che in ogni coppia di equazioni le variabili indipendenti (e conseguentemente le rispettive funzioni) sono costituite da un parametro d'ingresso e uno di uscita.
- **Quadripoli passivi**: l'ampiezza del segnale di uscita è minore di quella del segnale di ingresso.
- **Quadripoli attivi**: l'ampiezza del segnale di uscita è maggiore di quella del segnale di ingresso.
- Per i quadripoli attivi è possibile definire i seguenti **parametri**:
  - **guadagno o amplificazione di tensione**;
  - **guadagno o amplificazione di corrente**;
  - **guadagno o amplificazione di potenza**.
- Per i quadripoli passivi si definiscono i seguenti **parametri**:
  - **attenuazione di tensione**;
  - **attenuazione di corrente**;
  - **attenuazione di potenza**.

▪ **Nota**. La particolare categoria dei quadripoli ai quali si fa rifemento in questo contesto sono quelli **lineari tempo-invarianti**, che presentano relazioni tra tensioni e correnti che non dipendono dalle loro leggi di variazione temporale e quindi espresse da equaz. algebriche di primo grado (lineari).

## 19. Guadagno di tensione e di corrente

▪ **Guadagno di tensione**: il rapporto tra la tensione di uscita $\mathbf{V_u}$ e la tensione di ingresso $\mathbf{V_i}$, cioè:

$$\boxed{G_V = \frac{V_u}{V_i}}$$

▪ **Guadagno di corrente**: il rapporto tra la corrente di uscita $\mathbf{I_u}$ e la corrente di ingresso $\mathbf{I_i}$, cioè:

$$\boxed{G_I = \frac{I_u}{I_i}}$$

▪ In un **quadripolo attivo** i guadagni di tensione e di corrente sono sempre **maggiori di 1**.

## 20. Attenuazione di tensione e di corrente

▪ **Attenuazione di tensione**: il rapporto tra la tensione di ingresso $\mathbf{V_i}$ e la tensione di uscita $\mathbf{V_u}$, cioè:

$$\boxed{A_V = \frac{V_i}{V_u}}$$

▪ **Attenuazione di corrente**: il rapporto tra la corrente di ingresso $\mathbf{I_i}$ e la corrente di uscita $\mathbf{I_u}$, cioè:

$$\boxed{A_i = \frac{I_i}{I_u}}$$

▪ In un **quadripolo passivo** le attenuazioni di tensione e di corrente sono sempre **maggiori di 1**.

## 21. Guadagno e attenuazione di potenza

▪ **Guadagno di potenza**: il rapporto tra la potenza di uscita $\mathbf{P_u}$ e quella di ingresso $\mathbf{P_i}$, cioè:

$$\boxed{G_p = \frac{P_u}{P_i}}$$

▪ **Attenuazione di potenza**: il rapporto tra la potenza di ingresso $\mathbf{P_i}$ e quella di uscita $\mathbf{P_u}$, cioè:

$$\boxed{A_p = \frac{P_i}{P_u}}$$

▪ Si può facilmente dimostrare che il guadagno e l'attenuazione di potenza sono esprimibili come prodotto di guadagni/attenuazioni di tensione e di corrente, cioè:

$$G_p = \frac{P_u}{P_i} = \frac{V_u \cdot I_u}{V_i \cdot I_i} = \overbrace{\boxed{\frac{V_u}{V_i}}}^{\text{Guadagno di tensione}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{I_u}{I_i}}}_{\text{Guadagno di corrente}} = G_V\, G_I$$

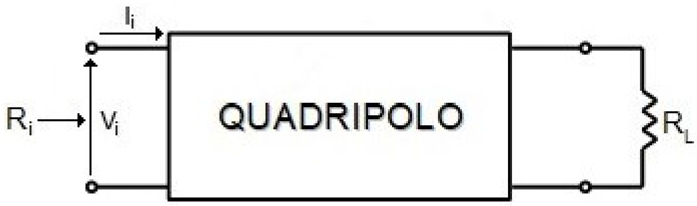
$$A_p = \frac{P_i}{P_u} = \frac{V_i \cdot I_i}{V_u \cdot I_u} = \overbrace{\boxed{\frac{V_i}{V_u}}}^{\text{Attenuaz. di tensione}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{I_i}{I_u}}}_{\text{Attenuaz. di corrente}} = A_V\, A_I$$

▪ **Nota**. L'attenuazione e il guadagno di corrente sono scarsamente utilizzati, in quanto in genere si preferisce operare con le tensioni e le potenze.

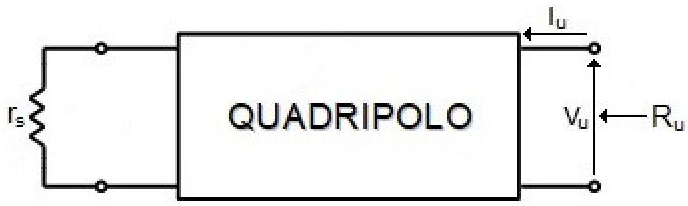
## 22. Resistenza di ingresso e di uscita

▪ Si consideri una rete a due porte al cui ingresso è collegato un generatore reale di tensione (ossia un generatore ideale di tensione + resistenza interna) e all'uscita un carico:

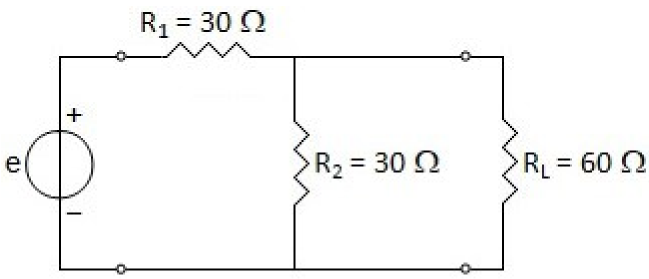

▪ Imponendo la condizione che la porta d'ingresso sia a vuoto si determina la **resistenza d'ingresso**: resistenza equivalente misurata ai morsetti di ingresso quando all'uscita è applicato il carico $R_L$.



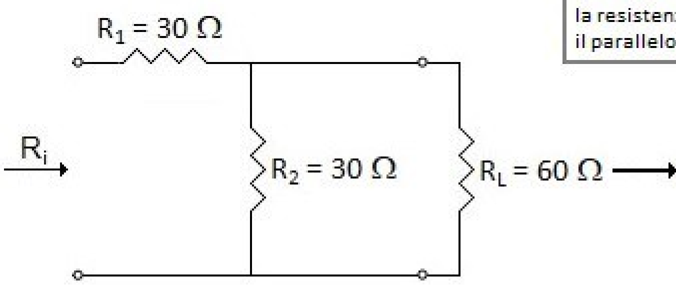

▪ Invece imponendo la condizione che la porta di uscita sia a vuoto si calcola la **resistenza di uscita**: resistenza equivalente misurata ai morsetti di uscita quando il generatore è cortocircuitato.




▪ **Esempio.** Determinare le resistenze d'ingresso e di uscita del quadripolo in figura.



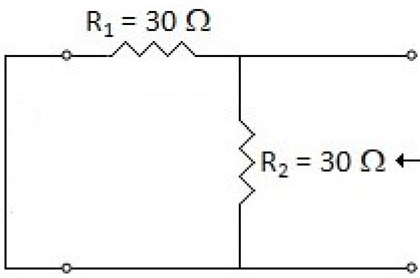

▪ Si determina la resistenza d'ingresso $\mathbf{R_i}$, ovvero la resistenza equivalente che si vede ai morsetti di ingresso quando all'uscita è applicato il carico $\mathbf{R_L}$, quindi si ha:




Si calcola la serie di $R_1$ con la resistenza risultante tra il parallelo di $R_2$ e $R_L$.

$$R_i = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L} = 30 + \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 50\,\Omega$$

▪ Si determina la resistenza di uscita **$R_u$**, ovvero la resistenza equivalente che si vede dai morsetti di uscita quando il generatore **e** è cortocircuitato, quindi si ha:




Si calcola il parallelo tra la resistenza $R_1$ e $R_2$.

$$R_u \longrightarrow R_u = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{30 \cdot 30}{30+30} = 15\,\Omega$$

## 23. Unità di misura logaritmica

▪ In elettronica è d'uso comune esprimere i guadagni/attenuazioni (rapporti adimensionali) in unità logaritmiche definite dal **decibel** (impiegato anche in ascustica per misurare l'intensità dei suoni).

▪ I motivi di utilizzo delle unità logaritmiche sono essenzialmente due:

**1.** ampliare intervalli più piccoli e comprimere quelli più grandi;

**2.** trasformare i prodotti/divisioni in somme/differenze (proprietà utili nelle cascate di quadripoli).

▪ I guadagni/attenuazioni sono cosi definiti:

$$\boxed{G_p(dB) = 10\log\frac{P_u}{P_i} \qquad G_V(dB) = 20\log\frac{V_u}{V_i}}$$

$$\boxed{A_p(dB) = 10\log\frac{P_i}{P_u} \qquad A_V(dB) = 20\log\frac{V_i}{V_u}}$$

▪ Supponiamo che le potenze **$P_u$** e **$P_i$** siano misurate sulla stessa resistenza:

Il logaritmo della potenza corrisponde al prodotto dell'esponente per il logaritmo.

$$G_p(dB) = 10\log\frac{P_u}{P_i} = 10\log\frac{\frac{V_u^2}{R}}{\frac{V_i^2}{R}} = 10\log\frac{V_u^2}{\cancel{R}}\cdot\frac{\cancel{R}}{V_i^2} = 10\log\left(\frac{V_u}{V_i}\right)^2 = 20\log\frac{V_u}{V_i} = G_V(dB)$$

quindi il guadagno di potenza in decibel corrisponde al guadagno di tensione in decibel.

▪ **Nota**. Il **fattore 20** che appare nella definizione del guadagno/attenuazione di tensione è dovuto al fatto che la potenza è proporzionale al quadrato della tensione o della corrente.

| **Gv/Gp** | **Gv(dB)** | **Gp(dB)** |
|---|---|---|
| $10^{-2}$ | –40 | –20 |
| $10^{-1}$ | –20 | –10 |
| 0,5 | –6 | –3 |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 6 | 3 |
| 10 | 20 | 10 |
| $10^2$ | 40 | 20 |

▪ Analizzando la tabella si possono desumere alcune considerazioni pratiche:

▪ il guadagno di tensione (o di potenza) unitario corrisponde a 0 dB;

▪ un guadagno di tensione maggiore di uno diventa un valore in decibel maggiore di zero;

▪ un guadagno di tensione minore di uno (attenuaz.) diventa un valore in decibel minore di zero;

▪ un dimezzamento del guadagno di potenza corrisponde ad una attenuazione di 3 dB.

▪ **Esempi**.

**1. Calcolare il valore di $G_v$ (dB) corrispondente a $G_v = 40$.**

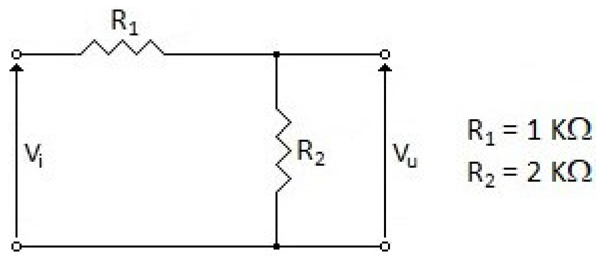
**Soluzione**. Applicando la formula del guadagno di tensione espresso in dB si ottiene:

$$G_v\ (\mathrm{dB}) = 20\log 40 = 32\ \mathrm{dB}$$

In alternativa, usando la tabella si ricava:

$$G_v\ (\mathrm{dB}) = 20\log 2 + 20\log 2 + 20\log 10 = 6 + 6 + 20 = 32\ \mathrm{dB}$$

**2. Calcolare il guadagno in tensione del partitore di figura espresso in dB.**




**Soluzione**. A partire dalla formula del partitore di tensione:

$$V_u = V_i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

dividendo entrambi i membri per $V_i$ si ricava il guadagno di tensione:

$$G_v = \frac{V_u}{V_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$$

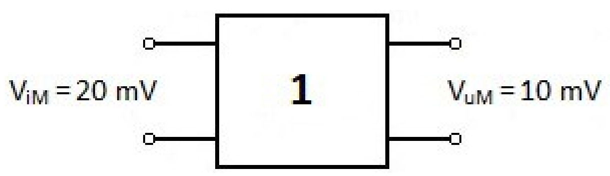
Poichè il guadagno di tensione $G_v < 1$, il segnale in uscita è attenuato rispetto a quello di ingresso e pertanto il valore in dB risulta negativo:

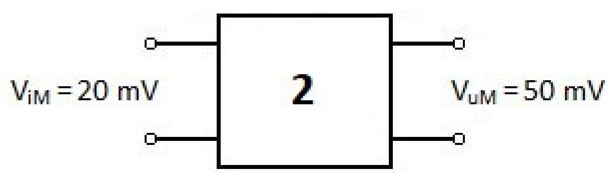
$$G_v\ (\mathrm{dB}) = 20\log 0{,}66 = -\,3{,}5\ \mathrm{dB}$$

Visto che il quadripolo è passivo, si poteva decidere di calcolare l'attenuazione e si sarebbe trovato:

$$A_v(\mathrm{dB}) = 20\log\frac{V_i}{V_u} = 20\log\frac{3}{2} = 3{,}5\ \mathrm{dB}$$

**3. Si considerino i due quadripoli delle seguenti figure.**
**Applicando all'ingresso del primo una tensione sinusoidale di ampiezza $V_{iM}$ = 20 mV, in uscita si ottiene una tensione sinusoidale avente ampiezza $V_{uM}$ = 10 mV.**
**Applicando all'ingresso del secondo la stessa tensione di ingresso del primo, in uscita si ottiene una tensione sinusoidale di ampiezza $V_{uM}$ = 10 mV.**
**Verificare se i quadripoli sono attivi o passivi e determinare i relativi guadagni/attenuazioni.**




**Soluzione.** Il quadripolo 1 è passivo in quanto l'ampiezza della tensione di uscita è minore di quella della tensione di ingresso, per cui è possibile determinare l'attenuazione che risulta:

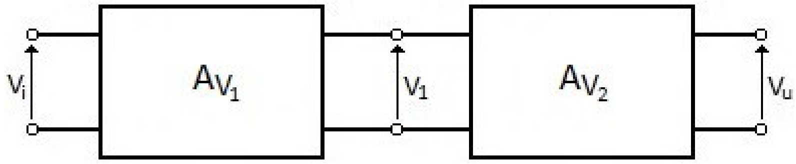
$$A(\mathrm{dB}) = 20\log\frac{V_{iM}}{V_{uM}} = 20\log\frac{20}{10} \approx 6\ \mathrm{dB}$$

Il quadripolo 2 è invece attivo, poichè l'ampiezza della tensione di uscita è maggiore di quella della tensione di ingresso; in tal caso è possibile determinare il guadagno che vale:

$$G(\mathrm{dB}) = 20\log\frac{V_{uM}}{V_{iM}} = 20\log\frac{50}{20} \approx 8\ \mathrm{dB}$$

## 24. Quadripoli in cascata

- Più quadripoli sono in cascata quando l'uscita dell'N-esimo è collegata all'ingresso del N+1-esimo.
- Consideriamo la cascata di due quadripoli passivi, aventi attenuazioni di tensione pari a $A_{v1}$ e $A_{v2}$:




l'attenuazione di tensione $A_v$ complessiva della cascata vale:

$$A_V = \frac{V_i}{V_u}$$

Poichè risulta:

$$V_i = A_{V_1} \cdot V_1 \qquad V_1 = A_{V_2} \cdot V_u$$

sostituendo la seconda equazione nella prima, si ha:

$$V_i = A_{V_1} \cdot A_{V_2} \cdot V_u$$

da cui dividendo ambo i membri per la tensione di uscita $V_u$ si ottiene:

$$A_V = \frac{V_i}{V_u} = A_{V_1} \cdot A_{V_2}$$

- Quindi l'attenuazione di tensione totale è pari al prodotto delle attenuazioni dei due quadripoli.
- In generale l'attenuazione complessiva di una cascata di N quadripoli è uguale al prodotto delle singole attenuazioni, ovvero:

$$\boxed{A_V = \frac{V_i}{V_u} = A_{V_1} \cdot A_{V_2} \dots \cdot A_{V_N}}$$

- Convertendo l'attenuazione totale $A_v$ in decibel e ricordando che log(a · b) = loga + logb, diventa:

$$A_V(dB) = 20\log(A_V) = 20\log(A_{V_1} \cdot A_{V_2} \cdots A_{V_N}) = 20\log(A_{V_1}) + 20\log(A_{V_2}) + \dots + 20\log(A_{V_N})$$

- Essendo le potenze d'ingresso e d'uscita (**$P_u$** e **$P_i$**) misurate sulla stessa resistenza, le attenuazioni di tensione coincidono con quelle di potenza, quindi la precedente equazione diventa:

$$\boxed{A(dB) = A_1(dB) + A_2(dB) + \dots + A_N(dB)}$$

- Si conclude pertanto che in una cascata di N quadripoli passivi, l'attenuazione complessiva è pari al prodotto (o somma se espresso in decibel) delle attenuazioni dei vari stadi che costituiscono la cascata. Lo stesso risultato vale anche per una cascata di N quadripoli attivi in cui si considerano i guadagni; in tal caso si ha infatti:

$$\boxed{G_V = G_{V_1} \cdot G_{V_2} \dots \cdot G_{V_N}}$$

$$\boxed{G(dB) = G_1(dB) + G_2(dB) + \dots + G_N(dB)}$$

- Nel caso la cascata sia composta da quadripoli attivi e passivi (cascata mista), utilizzando le unità logaritmiche è necessario tenere presente che nei quadripoli passivi l'attenuazione è considerata negativa, mentre nei quadripoli attivi il guadagno è positivo (cioè amplificano il segnale): occorre pertanto eseguire la somma algebrica dei guadagni e delle attenuazioni.

**Nota**. E' facile dimostrare che valgono le relazioni:

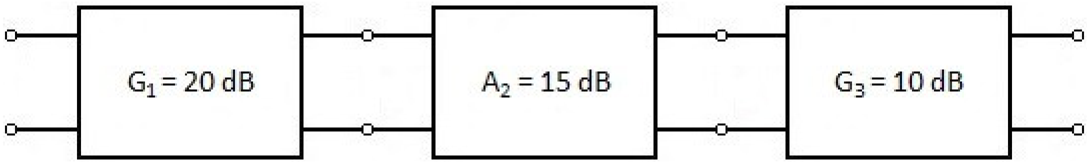
$$G_p(dB) = -A_p(dB) \quad e \quad G_v(dB) = -A_v(dB)$$

Quindi il **guadagno** e l'**attenuazione** espressi in decibel hanno **segno opposto**. Infatti applicando le regole dei logaritmi si ha:

$$G_p(dB) = 10\log\left(\frac{P_u}{P_i}\right) = 10\log\left(\frac{P_i}{P_u}\right)^{-1} = -10\log\left(\frac{P_i}{P_u}\right) = -A_p(dB)$$

▪ **Esempi**.

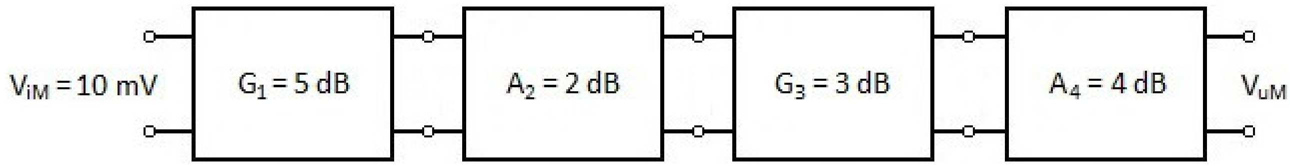
**1. Calcolare il guadagno complessivo G della cascata di quadripoli di figura in scala logaritmica.**




**Soluzione**. La cascata è composta da **due quadripoli attivi** (il **primo** e il **terzo**) e da **uno passivo** (il **secondo**), dei quali si conoscono i guadagni e l'attenuazione in decibel. Poichè l'esempio richiede il guadagno complessivo, le attenuazione degli stadi passivi devono essere considerate negative, e i guadagni degli stadi attivi positivi, per cui si ha:

$$G(dB) = G_1 - A_2 + G_3 = 20 - 15 + 10 = 15\ dB$$

**2. Data la catena di quadripoli di figura, calcolare l'ampiezza $V_{uM}$ della tensione di uscita, nel caso all'ingresso sia applicata una tensione sinusoidale avente ampiezza $V_{iM}$ = 10 mV.**




**Soluzione**. La cascata di quadripoli equivale a un unico quadripolo attivo di guadagno G uguale a (si considerano i guadagni positivi e le attenuazioni negative):

$$G(dB) = G_1 - A_2 + G_3 - A_4 = 5 - 2 + 3 - 4 = 2\ dB$$

Poichè per **definizione** il **logaritmo** di un **numero A**, espresso in una **base b**, è il valore di **x** per cui occorre elevare la base (b) per ottenere il numero dato (A), cioè:

$$x = \log_b A \quad \rightarrow \quad A = b^x$$

essendo:

$$G(dB) = 20\log\frac{V_{uM}}{V_{iM}}$$

si ha:

$$2 = 20\log\frac{V_{uM}}{V_{iM}} \quad \rightarrow \quad \log\frac{V_{uM}}{V_{iM}} = \frac{2}{20} = 0{,}1 \quad \rightarrow \quad \frac{V_{uM}}{V_{iM}} = 10^{0,1} = 1{,}25$$

L'ampiezza della tensione di uscita risulta pertanto:

$$V_{uM} = 1{,}25 \cdot V_{iM} = 1{,}25 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 12{,}5\ mV$$

## Domande

**1. Fornire una definizione di quadripolo.**

Si dice quadripolo l'elemento a due porte caratterizzate ciascuna da una tensione ed una corrente.

**2. Cos'è un quadripolo attivo?**

Un quadripolo è attivo se l'ampiezza del segnale di uscita è maggiore di quella del corrispondente segnale di ingresso. Parametri caratteristici: guadagno di tensione, di corrente e di potenza.

**3. Cosa si intende per attenuazione di tensione di un quadripolo passivo?**

Per attenuazione di tensione si intende il rapporto tra la tensione di ingresso e la tensione di uscita ed è espresso da un numero adimensionale maggiore di uno.

**4. Come è definita la resistenza di ingresso di un quadripolo?**
La resistenza di ingresso del quadripolo rappresenta la resistenza equivalente misurata ai morsetti di ingresso quando all'uscita è applicato un carico.

**5. Quando due o più quadripoli si dicono collegati in cascata?**
Più quadripoli sono in cascata quando l'uscita dell'N-esimo è collegata all'ingresso del N+1-esimo.

**6. Cosa rappresenta la resistenza di uscita di un quadripolo?**
La resistenza di uscita del quadripolo rappresenta la resistenza equivalente misurata ai morsetti di uscita quando il generatore è cortocircuitato.

**7. Cos'è un quadripolo passivo?**
Un quadripolo è passivo se l'ampiezza del segnale di uscita è minore di quella del corrispondente segnale di ingresso. Parametri caratteristici: attenuazione di tensione, di corrente e di potenza.

**8. L'ampiezza della tensione di ingresso di un quadripolo è 35 mV e quella della corrispondente tensione di uscita vale 25 mV. Il quadripolo è attivo o passivo?**
Essendo l'ampiezza della tensione d'uscita minore di quella della tensione d'ingresso, il quadripolo è passivo per cui è possibile calcolare l'attenuazione in decibel che vale:

$$A(dB) = 20\log\frac{V_{iM}}{V_{uM}} = 20\log\frac{35}{25} \approx 3\,dB$$

**9. Quanto vale il guadagno complessivo espresso in scala lineare di una cascata di N quadripoli attivi aventi tutti lo stesso guadagno G?**
Per una cascata di N quadripoli attivi il guadagno complessivo vale:

$$G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_N$$

Poichè gli N quadripoli hanno lo stesso guadagno G, per cui il guadagno complessivo risulta:

$$G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_N = G \cdot G \cdot \ldots \cdot G = G^N$$

**10. Quanto vale l'attenuazione complessiva espressa in dB di una cascata di N quadripoli passivi aventi la stessa attenuazione A?**
Per una cascata di N quadripoli passivi l'attenuazione complessiva in dB vale:

$$A\,(dB) = A_1\,(dB) + A_2\,(dB) + \ldots + A_N\,(dB)$$

Poichè gli N quadripoli hanno la stessa attenuazione A, per cui l'attenuazione complessiva risulta:

$$A\,(dB) = A_1\,(dB) + A_2\,(dB) + \ldots + A_N\,(dB) = A\,(dB) + A\,(dB) + \ldots + A\,(dB) = NA\,(dB)$$

## Esercizi

**1. Esprimere in dB, rispetto alla potenza di riferimento $P_0$ = 1 mW, le seguenti potenze:**

**$P_1$ = 10 mW; $P_2$ = 1 W; $P_3$ = 10 W; $P_4$ = 50 W; $P_5$ = 200 W;**

**Soluzione**. Essendo $P_0$ la potenza rispetto a cui si esprimono le potenze in dB, risulta:

$$P_1(dB) = 10\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 10\log\left(\frac{10 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}}\right) = 10\log 10 = 10 \cdot 1 = 10\,dB$$

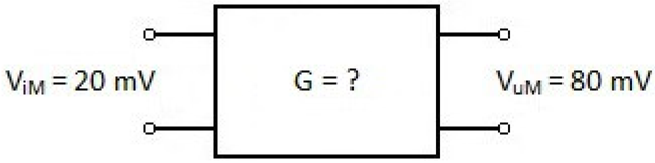
$$P_2(dB) = 10\log\left(\frac{P_2}{P_0}\right) = 10\log\left(\frac{1}{1 \cdot 10^{-3}}\right) = 10\log 10^3 = 10\log 1000 = 10 \cdot 3 = 30\,dB$$

$$P_3(dB) = 10\log\left(\frac{P_3}{P_0}\right) = 10\log\left(\frac{10}{1 \cdot 10^{-3}}\right) = 10\log 10^4 = 10\log 10000 = 10 \cdot 4 = 40\,dB$$

$$P_4(dB) = 10\log\left(\frac{P_4}{P_0}\right) = 10\log\left(\frac{50}{1 \cdot 10^{-3}}\right) = 10\log 50 \cdot 10^3 = 10\log 50000 = 47\,dB$$

$$P_5(dB) = 10\log\left(\frac{P_5}{P_0}\right) = 10\log\left(\frac{200}{1 \cdot 10^{-3}}\right) = 10\log 200 \cdot 10^3 = 10\log 200000 = 53\,dB$$

**2. Applicando all'ingresso del quadripolo una tensione sinusoidale avente ampiezza $V_{iM}$ = 20 mV, si determini il guadagno in decibel che deve avere il quadripolo affinchè in uscita si ottenga una tensione sinusoidale avente ampiezza $V_{uM}$ = 80 mV.**




**Soluzione**. Essendo note le tensioni di ingresso e di uscita del quadripolo, il guadagno in dB risulta:

$$G(dB) = 20\log\frac{V_{uM}}{V_{iM}} = 20\log\frac{80}{20} = 20\log 4 = 12\,dB$$

**3. Determinare l'attenuazione di tensione espressa in dB di un quadripolo avente ampiezze delle tensioni d'ingresso e uscita pari a $V_{iM}$ = 5 V e $V_{uM}$ = 3,5 V.**

**Soluzione**. L'attenuazione di tensione espressa in dB risulta:

$$A(dB) = 20\log\frac{V_{iM}}{V_{uM}} = 20\log\frac{5}{3{,}5} = 20\log 1{,}43 = 3{,}1\,dB$$

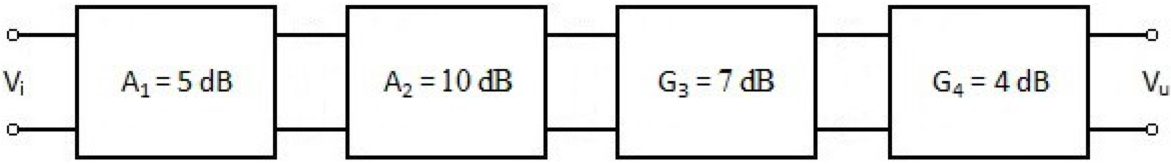
**4. Il guadagno di potenza di un quadripolo corrisponde a 7 dB; quanto vale in scala lineare?**

**Soluzione**. Per calcolare il valore in scala lineare del guadagno di potenza a cui corrisponde un dato valore espresso in dB è sufficiente applicare la definizione di logaritmo:

$$G(dB) = 10\log G \rightarrow \log G = \frac{G(dB)}{10} \rightarrow G = 10^{\frac{G(dB)}{10}} = 10^{\frac{7}{10}} = 10^{0{,}7} = 5$$

Quindi possiamo affermare che il guadagno in scala logaritmica diviso 10 è l'esponente da dare alla base 10 per ottenere il guadagno in scala lineare.

**5. Calcolare l'attenuazione complessiva A dalla cascata di quadripoli di figura in scala logaritmica.**




**Soluzione**. Poichè l'esercizio richiede l'attenuazione complessiva, le attenuazione degli stadi passivi devono essere considerate positive, e i guadagni degli stadi attivi negativi, per cui si ha:

$$A(dB) = A_1 + A_2 - G_3 - G_4 = 5 + 10 - 7 - 4 = 4\ dB$$