LIVELLO FISICO

È il livello più basso del nostro modello di organizzazione dei protocolli.
Definisce gli aspetti elettrici, di temporizzazione e le alte modalità con cui i bit. Sotto forma di segnai elettromagnetici, vengono spediti sui canali di comunicazione.

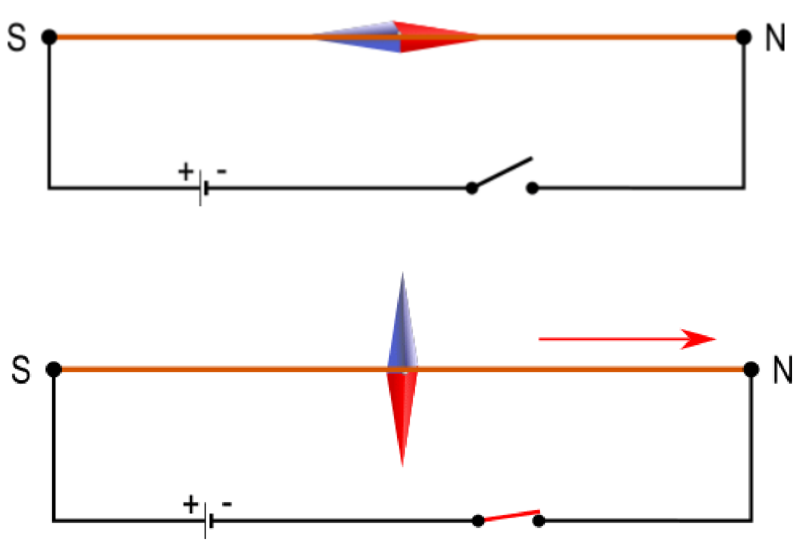
Indice

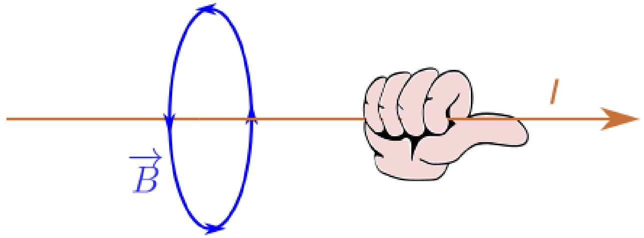
Onde elettromagnetiche

Onde elettromagnetiche

Come il campo elettrostatico è generato da cariche elettriche in quiete, così il campo magnetico è generato da cariche elettriche in movimento.
Hans Christian Ørsted (1777 - 1851) notò che un conduttore percorso da cariche elettriche in movimento genera nello spazio circostante un campo magnetico (effetto Ørsted), perciò i fenomeni elettrici e quelli magnetici erano strettamente legati.

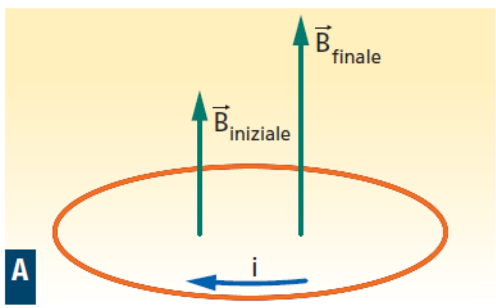
<u>Esperimento di Ørsted:</u>
fissò un cavo elettrico lungo la direzione nord-sud e sotto mise una bussola; l'ago era orientato nella medesima maniera.
Quando chiuse il circuito, l'ago cambiò direzione, ponendosi perpendicolare al filo se la corrente era abbastanza intensa, come se gli fosse stata avvicinata una calamita.



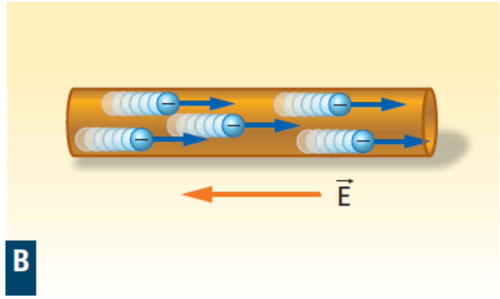


Per induzione elettromagnetica, un campo magnetico **che varia** genera un campo elettrico indotto le cui linee di campo sono chiuse su se stesse e poste in un piano perpendicolare al campo magnetico:

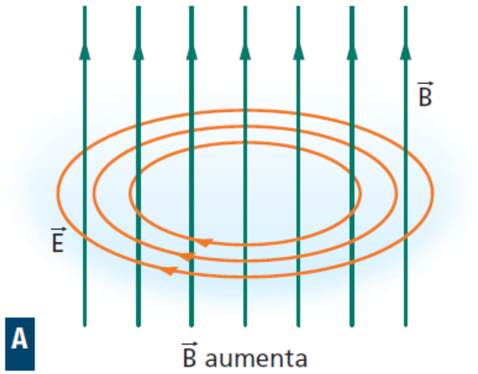
Un campo magnetico che aumenta genera, in una spira di metallo, una corrente indotta.



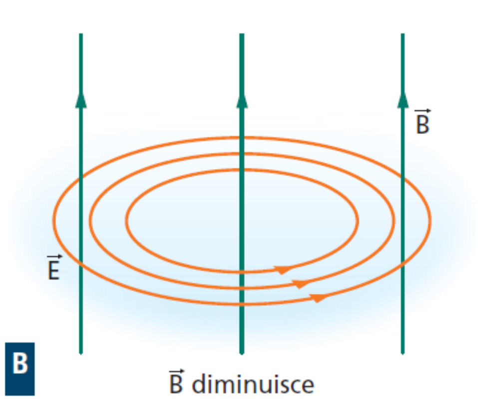
Gli elettroni della spira sono messi in movimento, tutti nello stesso senso, da un campo elettrico.



Se B aumenta, le linee del campo elettrico si avvolgono tutte nello stesso senso.



Se *B* diminuisce, le linee del campo elettrico si avvolgono in senso opposto.



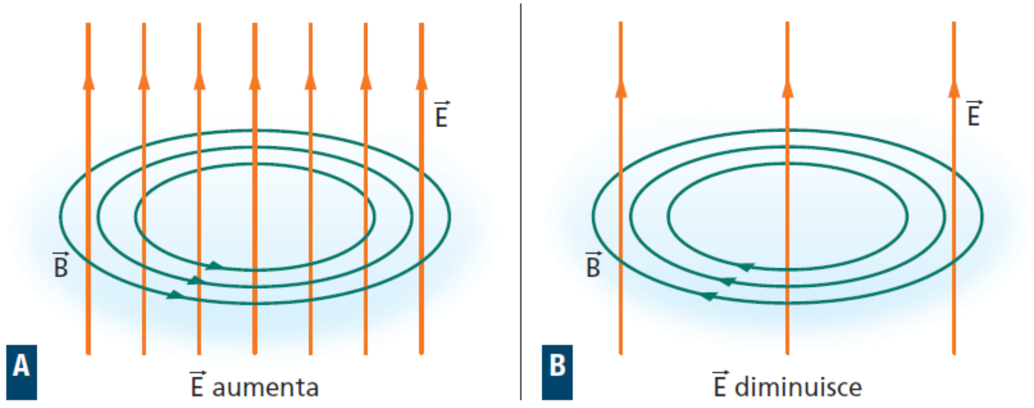
Il culmine nella comprensione dei fenomeni elettrici e magnetici venne raggiunto nel XIX secolo dal fisico scozzese **James Clerk Maxwell** (1831-1879) che riuscì a fornire un quadro unitario di tali fenomeni sulla base di **sole considerazioni teoriche** e senza evidenze sperimentali.

Nel 1873 James C. Maxwell pubblicò il suo fondamentale lavoro *Treatise on Electricity and Magnetism* (Trattato sull'elettricità e sul magnetismo) in cui faceva l'ipotesi che: **un campo elettrico variabile genera un campo magnetico.**

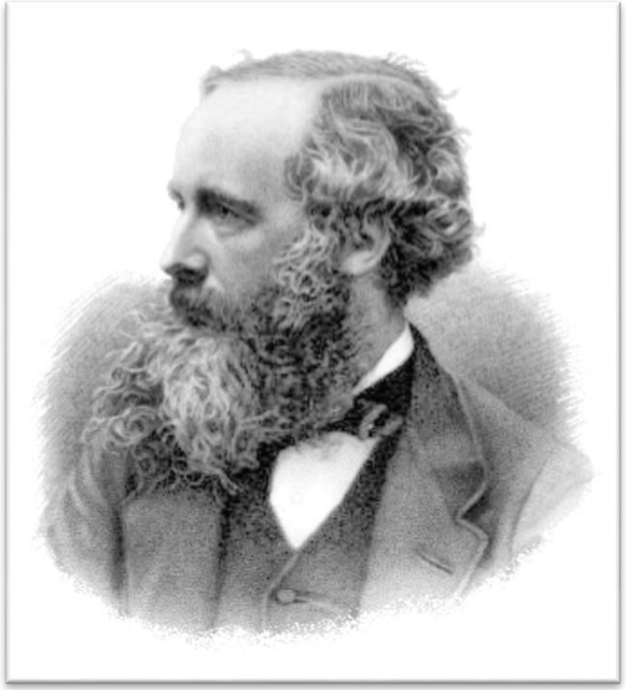
Secondo questa ipotesi, le linee del campo magnetico si chiudono su se stesse su un piano perpendicolare alle linee del campo elettrico:

Se E aumenta, le linee del campo magnetico si avvolgono tutte nello stesso senso.

Se E diminuisce, le linee del campo magnetico si avvolgono in senso opposto.



Le **equazioni di Maxwell** forniscono una visione unitaria dei fenomeni elettrici e magnetici e costituiscono le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo.
In questa teoria i due tipi di campi sono due aspetti di una stessa entità: il **campo elettromagnetico**.



Campo elettromagnetico	**Sorgenti**
Campo elettrico	• Cariche ferme e in movimento • Campi magnetici variabili
Campo magnetico	• Cariche in movimento (correnti elettriche) • Campi elettrici variabili

LEGAMI FONDAMENTALI TRA CAMPO ELETTRICO E CAMPO MAGNETICO:

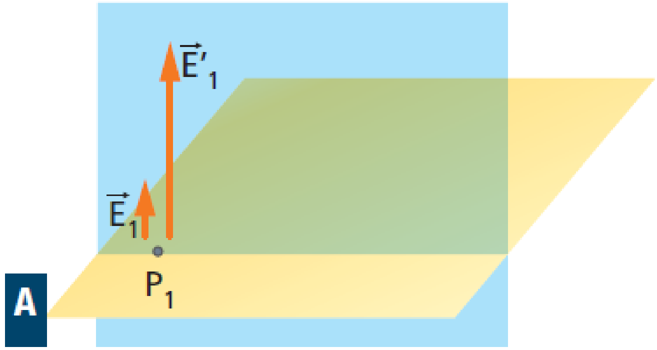
1. Una corrente elettrica genera un campo magnetico (Ørsted)
2. Un campo magnetico esercita una forza su una carica elettrica che si muova al suo interno e, di conseguenza su un conduttore percorso da corrente in esso immerso
3. La **variazione** di un campo magnetico induce in un conduttore in esso immerso una forza elettromotrice. Più in generale, **se in un punto dello spazio vi è un campo magnetico che varia nel tempo, in quel punto nasce un campo elettrico**

un campo magnetico variabile genera un campo elettrico
un campo elettrico variabile genera un campo magnetico

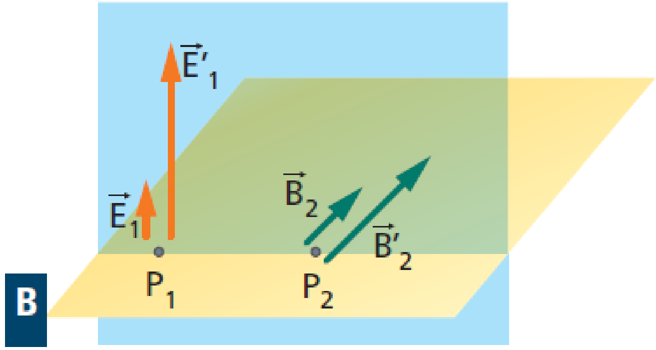
produzione di
ONDE ELETTROMAGNETICHE

Il campo elettromagnetico si propaga nello spazio. Per capire come fa, immaginiamo di tenere in movimento una carica Q, facendola oscillare molto rapidamente avanti e indietro (corrente alternata). Questo movimento dà origine a un campo elettrico e a un campo magnetico oscillanti perpendicolari, che si generano l’un l’altro:

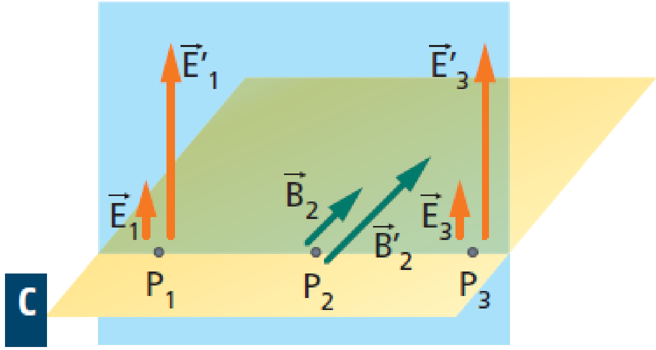
per effetto del movimento di *Q*, in un punto *P*1 si genera un campo *elettrico* variabile;



questo, a sua volta, genera un campo *magnetico* variabile in un punto *P*2 spostato rispetto a *P*1



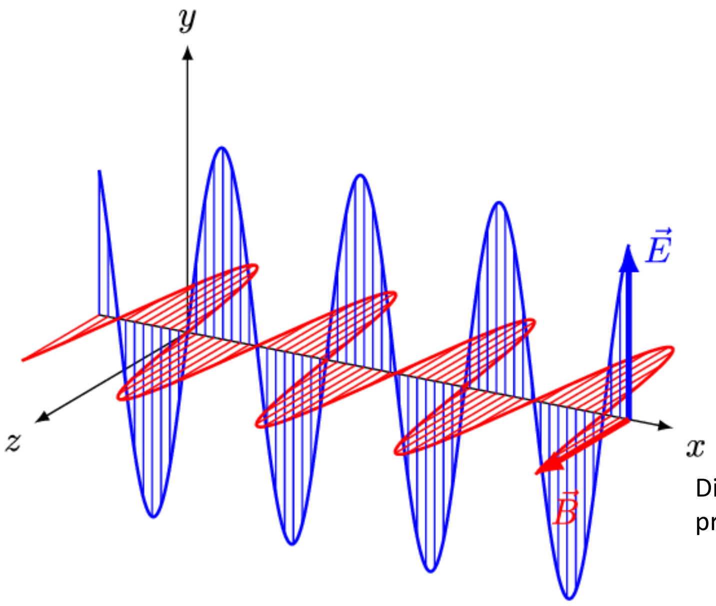
ma il campo magnetico variabile in *P*2 crea un campo elettrico indotto in un altro punto *P*3



In realtà, in P_1 c’è anche un campo magnetico variabile, che genera in P_2 un campo elettrico variabile, che genera in P_3 un ulteriore campo magnetico…
I campi elettrici e magnetici oscillano perpendicolari l’uno all’altro e si generano con continuità propagandosi sempre più lontano dalla carica che li ha creati all’inizio. Anche quando la carica smette di oscillare, essi continuano a generarsi l’un l’altro in punti sempre più distanti.
Il campo elettromagnetico ha un’esistenza autonoma: si propaga nello spazio e trasporta energia.

L'oscillazione di un campo elettrico, cioè la variazione della sua intensità in un punto al variare del tempo, genera l'oscillazione di un campo magnetico in punti vicini e così via: l'oscillazione si propaga nello spazio sotto forma di **onda elettromagnetica**.

L'onda elettromagnetica è allora data da due componenti, **campo elettrico *E*** e **campo magnetico *B*** che oscillano in fase perpendicolari tra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione.



Diversamente dalle onde meccaniche che si propagano solo in un mezzo elastico, le onde elettromagnetiche si propagano anche nello spazio vuoto, privo di materia. Nelle onde elettromagnetiche infatti non oscillano le particelle di un mezzo materiale, ma le intensità dei campi elettrico e magnetico variano nello spazio e nel tempo.

La velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è numericamente uguale alla **velocità della luce *c*** (3×10^8 m/s).

L'uguaglianza della velocità di propagazione nel vuoto della luce e delle onde elettromagnetiche suggerisce una conclusione di importanza fondamentale:
la luce è costituita da onde elettromagnetiche.

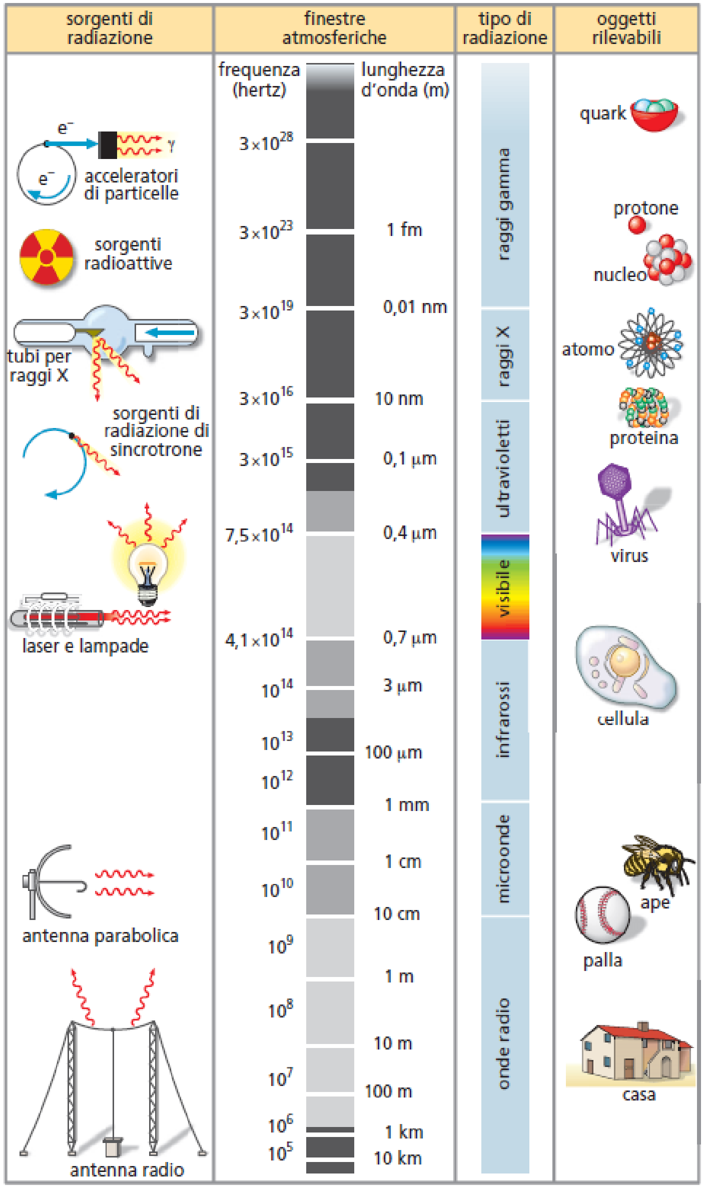
La luce visibile è un particolare tipo di onda elettromagnetica. Altri tipi sono, per esempio, le onde radio, i raggi ultravioletti e i raggi X.
Ciò che differenzia le diverse onde elettromagnetiche è la loro frequenza di oscillazione.
Si chiama **spettro elettromagnetico** l'insieme delle frequenze delle onde elettromagnetiche.

La figura a fianco riporta le principali proprietà dello spettro elettromagnetico. La colonna delle *finestre atmosferiche* indica qualitativamente quali radiazioni sono assorbite dall'atmosfera. Per esempio, l'atmosfera assorbe i raggi X e gamma che arrivano dallo spazio (striscia scura), impedendo che queste radiazioni danneggino la vita sulla Terra. È invece trasparente (striscia chiara) alla luce visibile e alle onde radio che provengono dal Sole e dalle stelle.

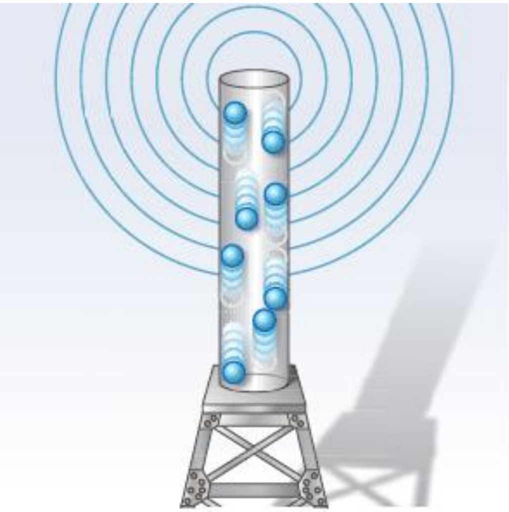
In un'onda periodica, la **lunghezza d'onda** (distanza tra due creste o due ventri dell'onda) è legata alla frequenza di un'onda elettromagnetica dalla relazione:

$$f\lambda = v$$

dove v è la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica, che nel vuoto è uguale alla velocità della luce c.



L'esistenza delle onde elettromagnetiche fu dimostrata **sperimentalmente** dal fisico tedesco **Heinrich Hertz** (1857-1894) quando nel 1888 riuscì a generare **onde radio** (un tipo di onda elettromagnetica) nelle quali campi elettrici variabili generano campi magnetici variabili e viceversa.



Un'**antenna trasmittente** è una struttura di metallo, lungo la quale gli elettroni vengono fatti oscillare avanti e indietro molto rapidamente (corrente alternata).
Il moto degli elettroni è guidato dalla tensione fornita da un apposito circuito oscillante, che determina la frequenza f.
Mentre gli elettroni oscillano di moto armonico, l'antenna emette un'onda elettromagnetica di frequenza f che si propaga nello spazio.

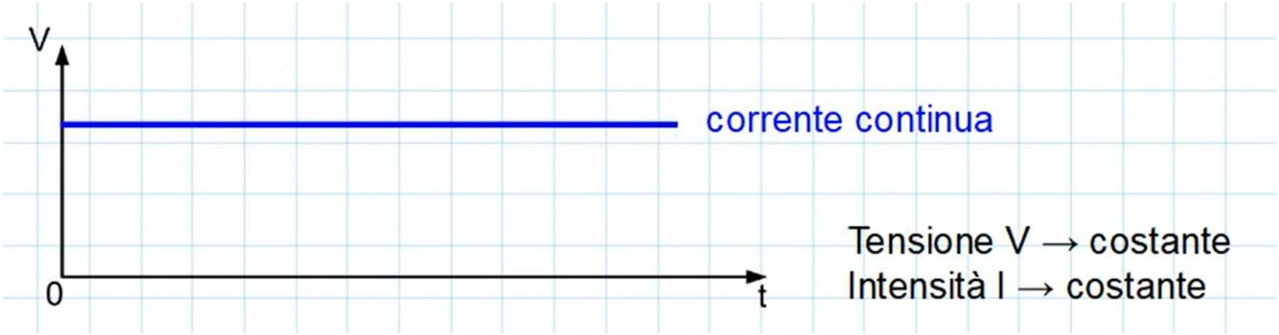
Gli elettroni nell'antenna ricevente (anch'essa metallica) si muovono sotto l'effetto dei due campi e creano una corrente che può essere captata e amplificata.

La possibilità di trasmettere e ricevere onde elettromagnetiche (in particolare radioonde e microonde) aprì nuove prospettive nel campo della comunicazione:

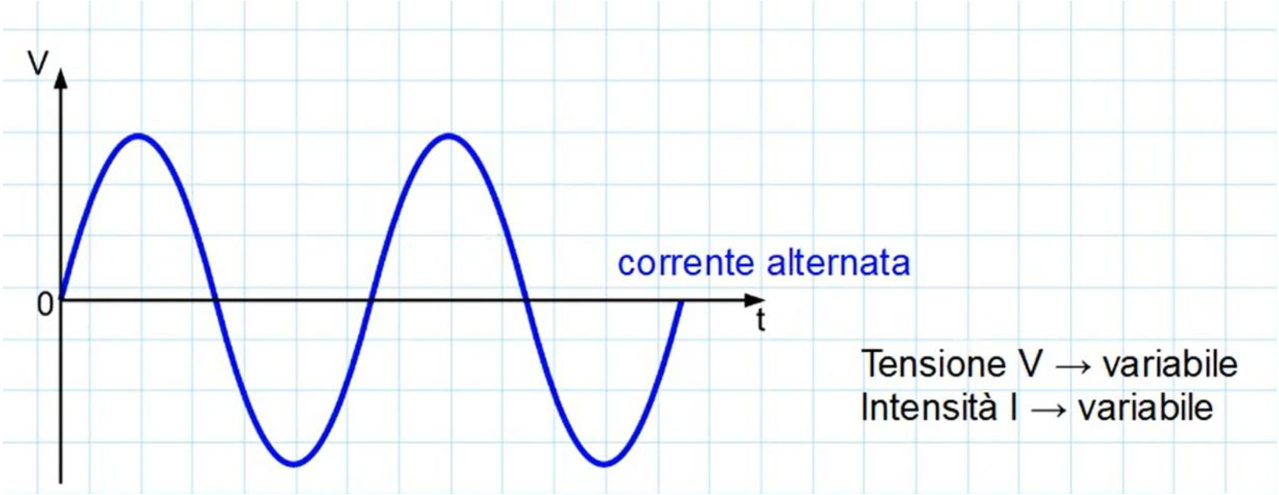
- telegrafo senza fili (Guglielmo Marconi)
- radio e televisione
- telefonia cellulare (WiFi e Bluethooth)
- comunicazioni via satellite

Onde radio

La corrente prodotta dalle pile è continua: se rappresento su un grafico la variazione della tensione ai capi del filo rispetto al tempo, questa si mantiene costante.
Come conseguenza, anche l'intensità di corrente nel circuito si mantiene costante: gli elettroni si muovono conservando la stessa velocità, senza accelerazioni, e mantenendo la stessa direzione.



La corrente prodotta da un campo magnetico variabile (un magnete che gira su se stesso in prossimità di un avvolgimento di filo di rame) genera una corrente alternata. La tensione ai due capi del filo varia nel tempo (cresce, si annulla, si inverte).
Come conseguenza, anche l'intensità di corrente nel circuito è variabile: gli elettroni si muovono subendo accelerazioni e rallentamenti e invertendo la direzione di movimento (nella rete elettrica italiana cambiano direzione 50 volte in un secondo).

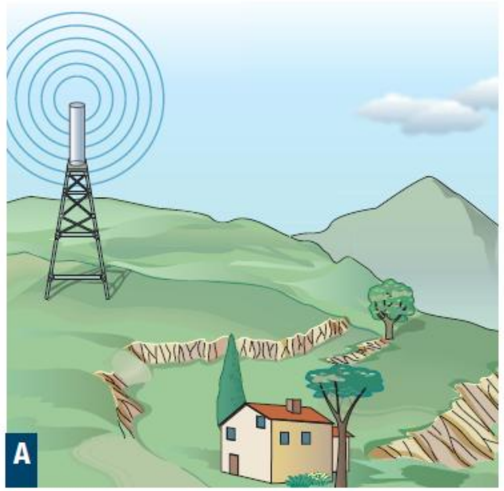


La corrente alternata produce onde radio: quando gli elettroni vengono bruscamente accelerati e frenati all'interno di un conduttore, l'oscillazione di campo produce una perturbazione che si propaga a distanza sotto forma di un'onda che ha lo stesso aspetto della forma d'onda di corrente alternata.
L'onda radio quindi non è altro che **una radiazione elettromagnetica generata da una corrente alternata.**

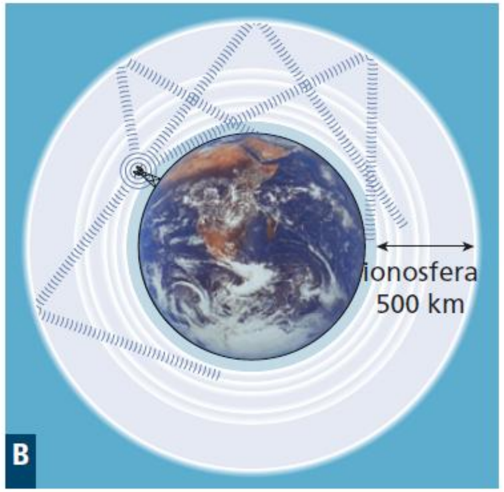
Le onde radio occupano la parte a bassa frequenza dello spettro, con **lunghezze d'onda comprese tra 10 km e 10 cm**.

Per le trasmissioni radio si utilizzano diverse onde elettromagnetiche a seconda delle differenti esigenze. Per esempio a lato:

Le onde medie hanno lunghezze d'onda attorno a 300 m. Grazie alla diffrazione, queste onde aggirano facilmente ostacoli piccoli come alberi e case. Sono invece fermate dalle montagne.



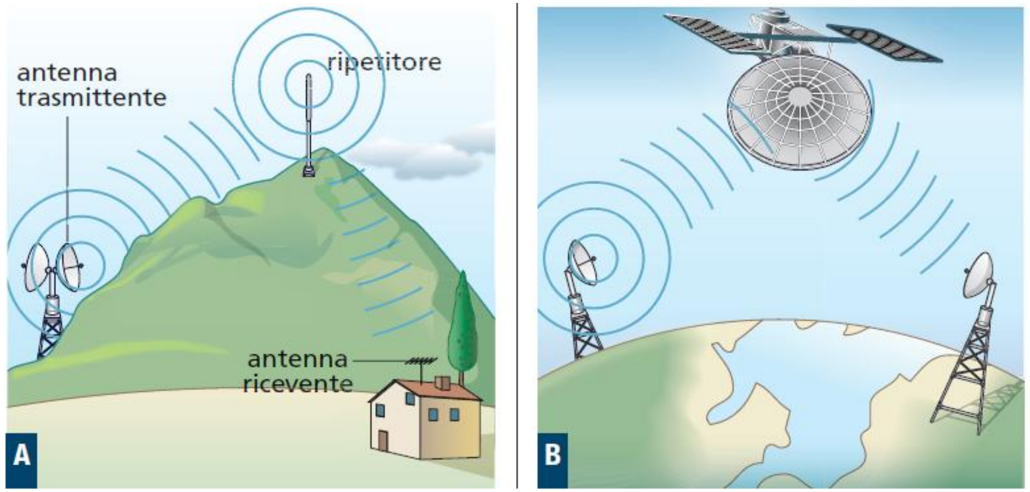
Per trasmissioni a lunga distanza sono usate onde radio con λ compresa tra 10 km e 30 m. Queste onde sono riflesse dagli strati ionizzati dell'atmosfera e possono così superare la curvatura terrestre.0



I segnali televisivi viaggiano su onde che hanno una lunghezza d'onda dell'ordine del metro.
Esse possono essere bloccate facilmente anche da ostacoli di piccole dimensioni. Quindi, i segnali televisivi possono essere captati soltanto da antenne che "vedono" il trasmettitore.

Per fare in modo che il segnale televisivo possa essere visto ovunque (e anche per rinforzarlo), tra la stazione televisiva e gli utenti sono situati molti ripetitori, che ricevono il segnale e lo inviano di nuovo dopo averlo amplificato.

In alternativa, il segnale televisivo è inviato a un satellite in orbita, che lo amplifica e lo rimanda verso Terra. Poiché tutte le antenne riceventi "vedono" il satellite, non c'è bisogno di installare dei ripetitori.



Nella **telefonia mobile** vengono invece usate le microonde (lunghezze d'onda comprese fra 30 cm e 1 mm), in particolare le frequenze di 800, 1500, 2100, 2600 MHz (dove, ad esempio, a 2100 MHz la lunghezza d'onda è circa 14 cm).

Il segnale

Il segnale

Tutte le informazioni (i dati necessari a trasferire suoni, immagini, video, file, pagine web, ecc.) possono essere tramesse via cavo o via etere (aria) variando alcune proprietà fisiche delle onde elettromagnetiche:

- nel cavo (rete cablata), l'onda elettromagnetica è confinata all'interno o molto vicino al cavo e il segnale è una variazione di tensione/corrente che viaggia in un filo (o una luce nella fibra).
- nell'etere, l'onda si propaga liberamente nello spazio e il segnale è una variazione del campo elettromagnetico che si propaga nell'aria

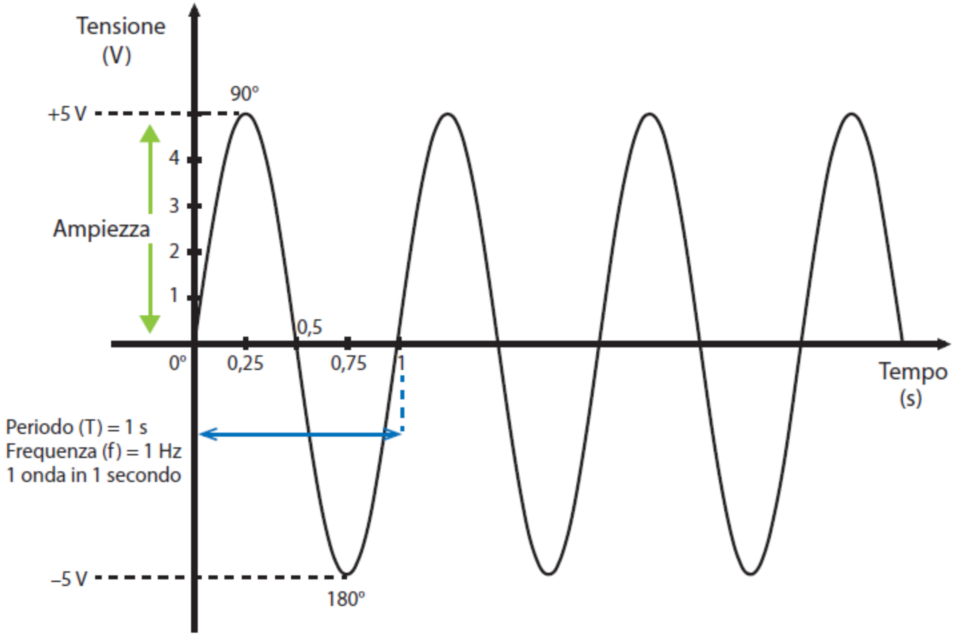
Un **segnale** è una **variazione di una grandezza fisica** (come tensione elettrica, corrente, onde radio o luce) usata per **trasportare informazioni**.

> <u>*Esempi:*</u>
> Una **canzone** che ascolti in cuffia? → È una variazione di tensione elettrica che muove le membrane degli auricolari.
> Un **video** su YouTube? → È una sequenza di segnali digitali che rappresentano immagini e suoni.
> Una **telefonata in viva voce**? → È un segnale radio (via etere) che trasporta la tua voce trasformata in onde.

Tale variazione si propaga, con una certa velocità, lungo il mezzo di trasmissione e dopo un certo tempo arriva all'altra estremità del mezzo, dove può essere rilevata.
Per esempio, se il mezzo è un cavo elettrico, si può variare la tensione applicata a un'estremità. Tale variazione di tensione verrà successivamente rilevata all'altra estremità.

Qualunque sia il mezzo trasmissivo e il fenomeno fisico utilizzato, i segnali trasmessi possono essere di due tipi: **analogici** e **digitali**.

I **segnali analogici** possono assumere *un qualsiasi valore* all'interno di un determinato intervallo. Un segnale analogico **periodico**, cioè che si ripete ciclicamente nel tempo, è particolarmente adatto a trasportare i bit.
I segnali periodici più utilizzati sono quelli **sinusoidali**, che consentono di comporre e descrivere qualsiasi altro segnale periodico (teorema di Fourier).
Ogni segnale sinusoidale fa riferimento a una grandezza che varia nel tempo e che viene scelta per descrivere il segnale, per esempio una differenza di potenziale, un'intensità di corrente o un'intensità luminosa.

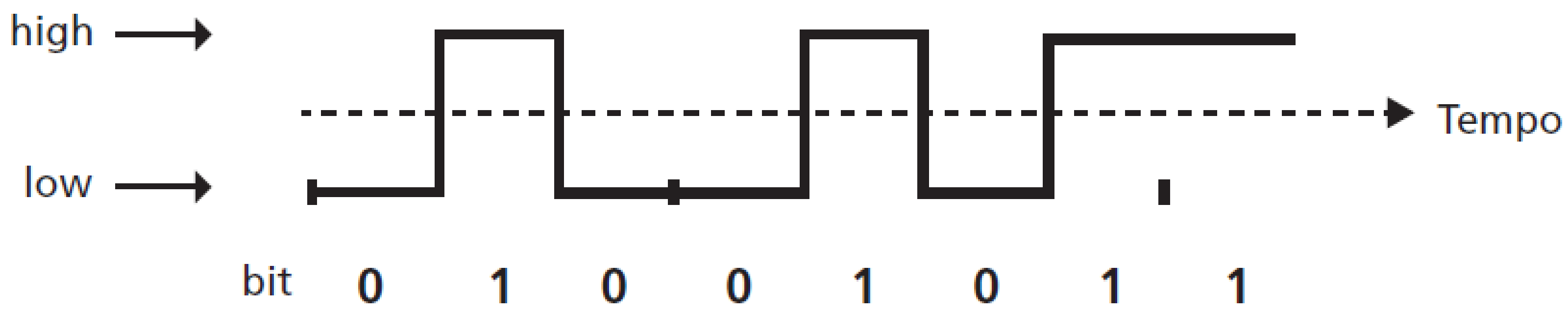


I **segnali digitali** hanno due caratteristiche che li distinguono dai segnali analogici:

- possono assumere solo un numero limitato di valori *discreti* (due nel caso di segnali **binari**)
- la transizione da un valore all'altro avviene in modo quasi istantaneo.

Un segnale digitale è rappresentato con un'onda rettangolare, che nel caso di segnali digitali binari è costituita da due possibili valori: uno alto (*high*), che rappresenta un 1, e uno basso (*low*), che rappresenta uno 0.

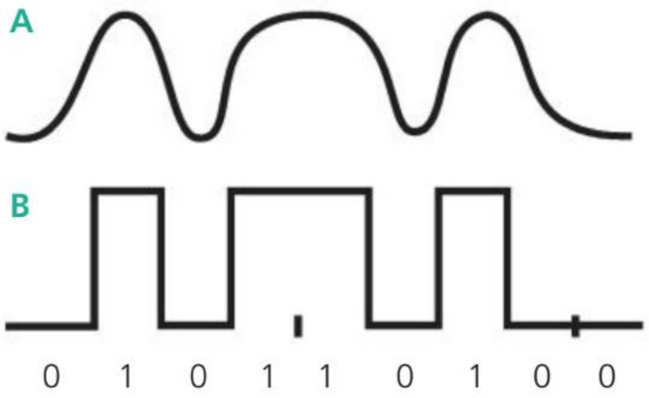
Un esempio di segnale digitale binario costituito da 8 bit (un byte):



Segnale digitale VS Segnale analogico

MAGGIOR ROBUSTEZZA RISPETTO AL RUMORE
Rumore e disturbi, per quanto possano essere minimi, sono sempre presenti, sia nel trasmettitore, sia nel ricevitore, ma sono soprattutto presenti nel mezzo di comunicazione, sia esso un cavo o l’aria. I **segnali digitali** per loro natura sono **meno soggetti ai disturbi** rispetto ai segnali analogici.

- i segnali analogici sono costituiti da funzioni continue che possono assumere infiniti valori: il rumore inevitabilmente si sovrappone al segnale trasmesso e lo modifica rendendo difficile risalire al segnale originario
- i segnali digitali, invece, presentano solamente un numero finito di valori separati da un “salto” tra uno e l’altro, determinato dal superamento di una soglia. Se il rumore non ha ampiezza (e potenza) tale da determinare il superamento della soglia e quindi il salto tra due valori, allora il rumore non riesce ad alterare il segnale. Il destinatario, ricevendo un valore non ammissibile, (affetto da rumore e diverso da "low" e "high") provvederà a convertirlo nel valore accettabile più vicino, annullando l’effetto del disturbo (**autorigenerazione**).



Segnale digitale binario affetto da rumore

Segnale digitale binario autorigenerato

Segnale digitale VS Segnale analogico

MAGGIOR INTEGRAZIONE DEI SISTEMI DI TRASMISSIONE
La conversione in digitale di tutte le trasmissioni (audio, video, dati, testo, ecc.) rende ogni invio simile a tutti gli altri: un flusso di bit aperto da una intestazione (bit di *header* che specificano il tipo di informazioni trasmesse in ogni blocco) e chiuso da una coda (bit di *trailer* per marcare la fine del flusso trasmesso). Qualunque apparato dotato di connessione di rete è in grado di inviare e ricevere qualsiasi tipo di trasmissione digitale.
Anche la scelta del mezzo fisico (cavo, fibra, aria) e della tecnologia (elettrica, ottica, wireless) diventano irrilevanti, non influiscono, nella decodifica delle informazioni digitalizzate. I **flussi di bit**, raggruppati in byte e poi in pacchetti (*packet*) aventi regole precise, **uniformano le fasi di invio, trasferimento e ricezione**.

MAGGIOR ADATTAMENTO A ESSERE ESEGUITI E MEMORIZZATI
Il linguaggio dei segnali digitali è lo stesso dei microprocessori: un linguaggio binario. Con le opportune interfacce, le sequenze di bit trasmesse possono facilmente essere lette ed eventualmente eseguite o memorizzate.
I dispositivi di memoria sono in grado di conservare grosse quantità di dati con l'utilizzo di tecniche digitali. La presenza di due soli stati fisici nei supporti di memoria, associati rispettivamente a 0 e 1, rende la **tecnologia** dei circuiti integrati **robusta e in grado di leggere e scrivere sempre più velocemente**.

Segnale digitale VS Segnale analogico

MAGGIORE ADATTABILITÀ A TECNICHE DI ELABORAZIONE DEL SEGNALE
Mentre l'elaborazione dei segnali analogici è generalmente limitata alle operazioni di amplificazione, di modulazione e di filtraggio, l'elaborazione dei segnali digitali può consentire operazioni complesse:

- **rilevazione e correzione degli errori**: nei sistemi digitali si possono realizzare circuiti e algoritmi per la rilevazione e la correzione degli errori in trasmissione.
- **crittografia**: con un sistema digitale l'informazione è codificata ed è quindi possibile adottare forme di crittografia per rendere incomprensibili, tranne che al destinatario, le informazioni trasmesse;
- **incapsulamento**: protezione dei dati in trasmissione con l'aggiunta di ulteriori header;
- **privacy**: i sistemi digitali consentono di modificare degli indirizzi privati dei mittenti e dei destinatari;
- **compressione**: è possibile ridurre la quantità di dati digitali da trasmettere, comprimendo opportunamente il segnale ed evitando di ripetere l'invio delle informazioni che si ripetono uguali (ad esempio le immagini in sequenza hanno spesso sfondi che restano a lungo invariati)

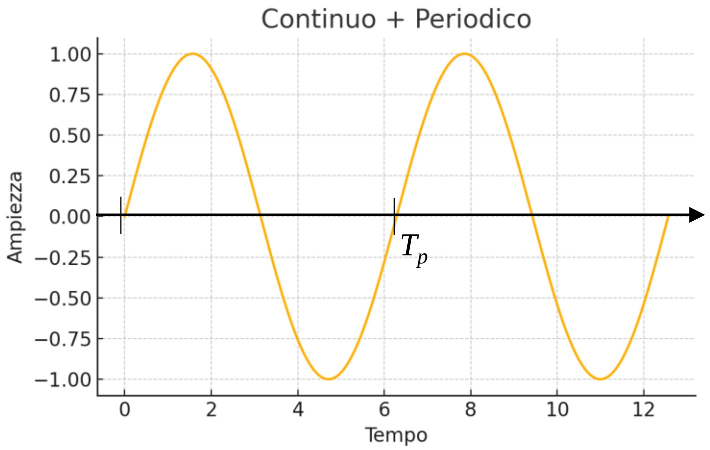
Classificazione dei segnali

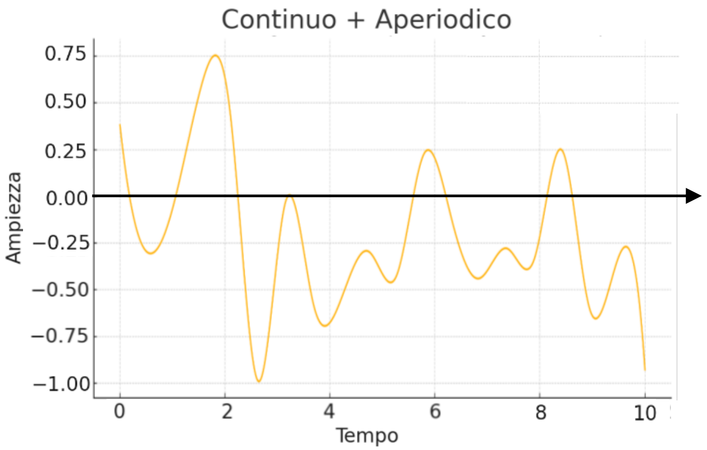
I segnali in via generale possono essere classificati come segue:

- periodici o aperiodici
- discreti o continui nel tempo
- discreti o continui nelle ampiezze

Un segnale a tempo continuo si dice **periodico** se esiste un numero reale $\boldsymbol{T_p} > 0$ detto periodo del segnale, tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si abbia:

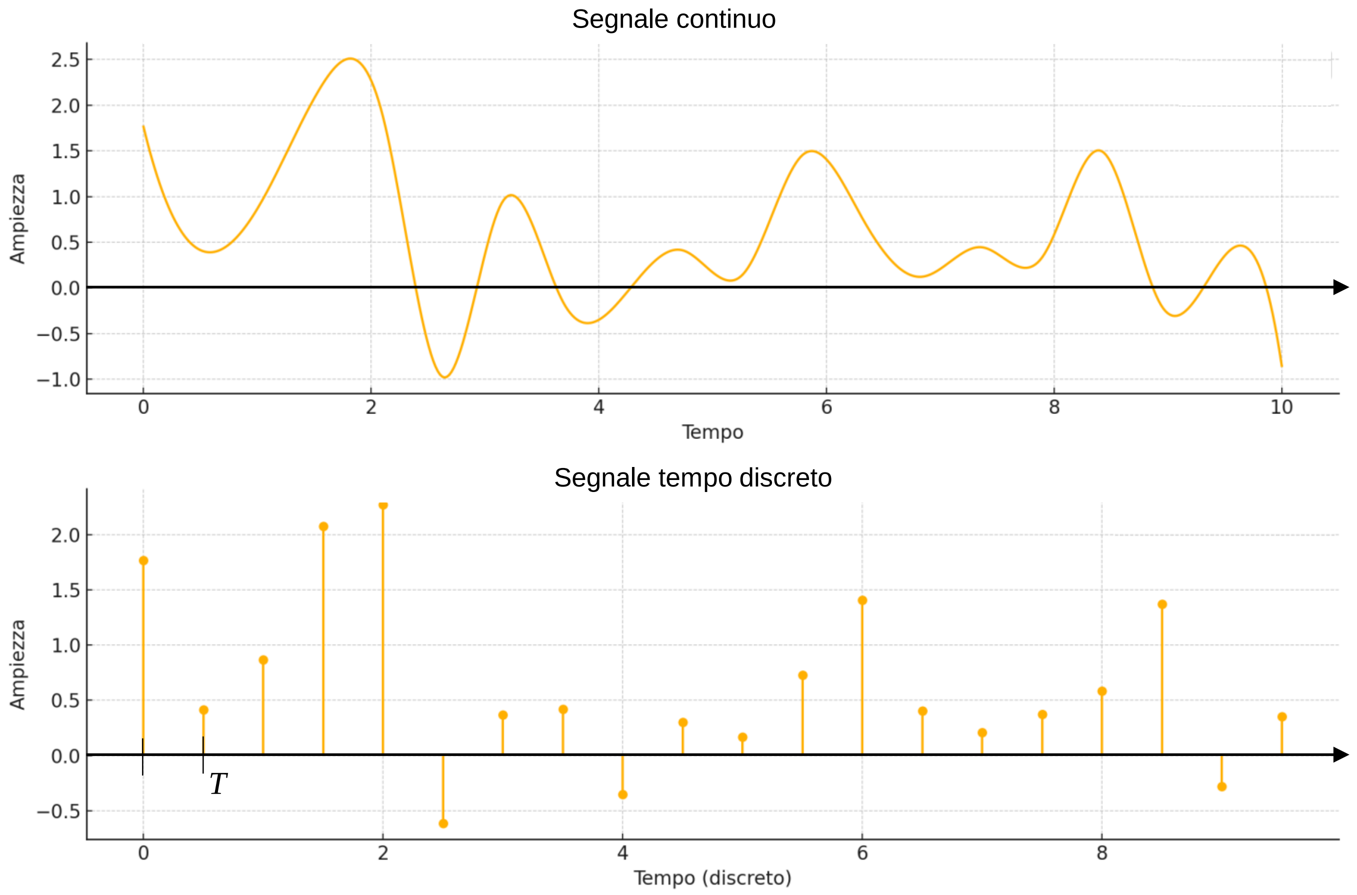
$$s(t+T_p) = s(t)$$



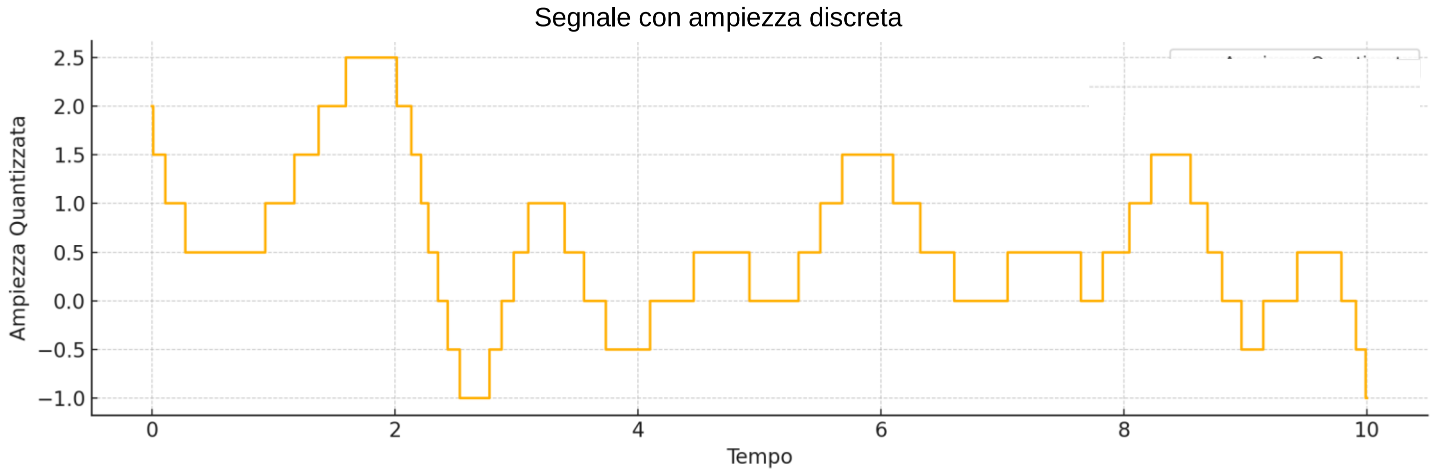


Un segnale si dice a **tempo discreto** se il suo dominio, anziché essere l'intero asse reale $\mathbb{R}$, è un suo sottoinsieme, costituito da istanti equispaziati di una medesima quantità $\boldsymbol{T} > 0$ chiamata **quanto temporale**:

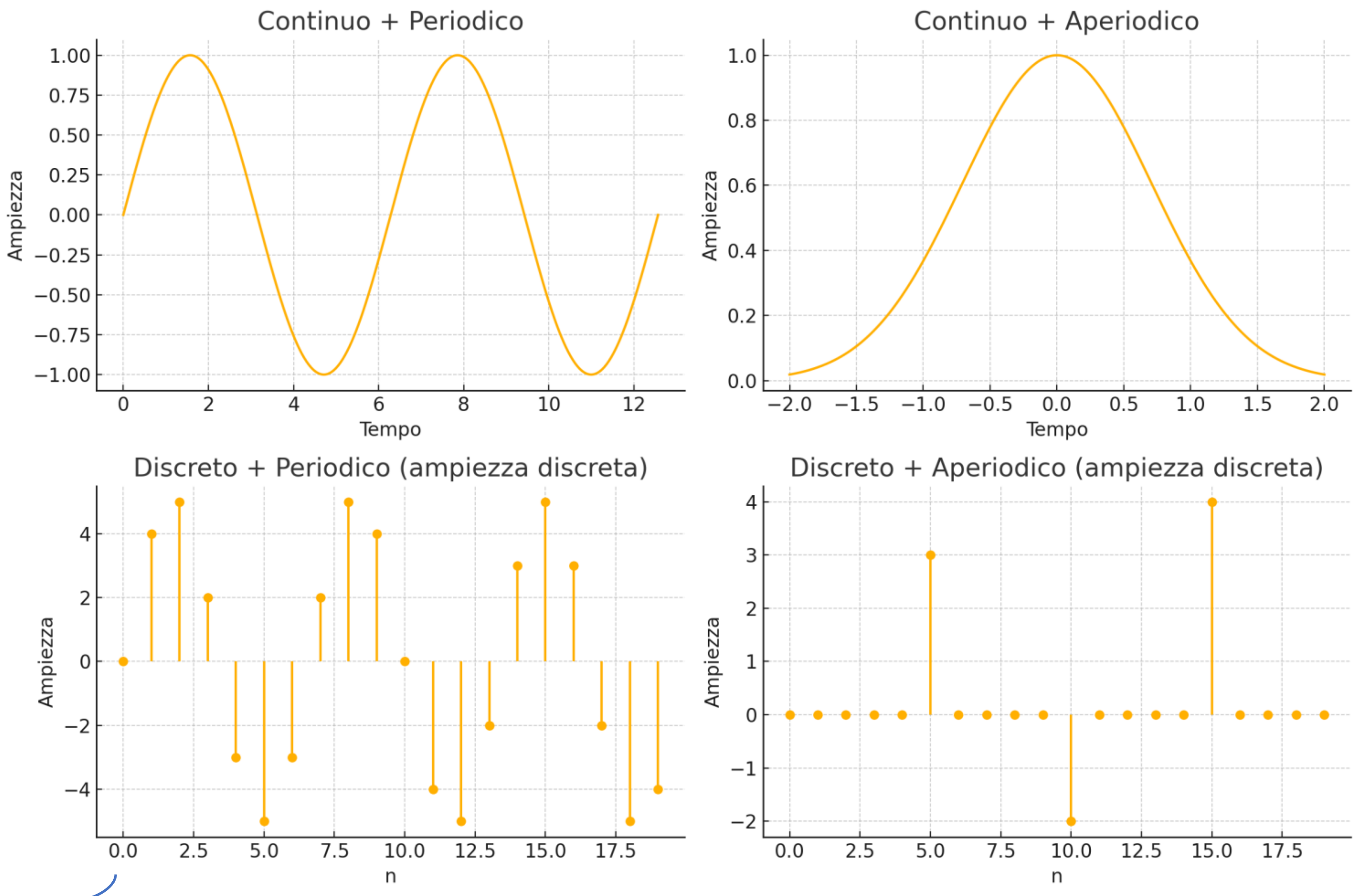
$$\boldsymbol{s(t)} \ \ \textbf{con} \ \ \boldsymbol{t \in \mathbb{Z}(T)} = \{ nT \mid n \in \mathbb{Z} \} = \{ \ldots, -2T, -T, 0, T, 2T, \ldots \} \text{ dove } \mathbb{Z} \text{ è l'insieme dei numeri interi}$$



Un segnale si dice ad **ampiezza continua** se l'ampiezza assume valori in un insieme continuo (ℝ - campo dei reali - o **C** – campo dei complessi - o loro sottoinsiemi non discreti), ad **ampiezza discreta** se l'ampiezza può assumere valori solo in un insieme finito o infinito ma numerabile (come l'insieme ℕ dei naturali):



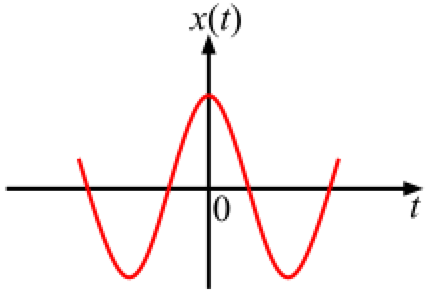
Posso poi avere delle combinazioni di queste caratteristiche, ad esempio:



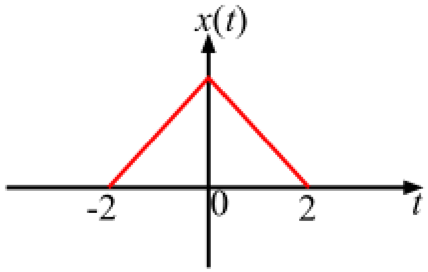
Nota bene: se il numero di campioni mostrati non corrisponde a un intero numero di periodi, la periodicità potrebbe non essere evidente, ma ciò non toglie che il segnale sia periodico

Segnali pari e segnali dispari

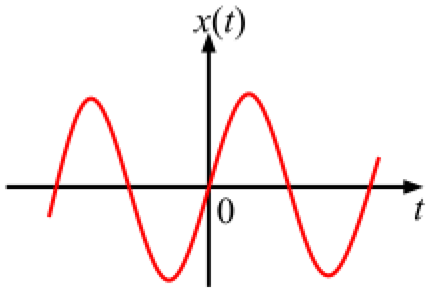
Una segnale e in generale una **funzione** si definisce **pari** se $x(t) = x(-t)$ e quindi se assume valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Un classico esempio è la funzione coseno:



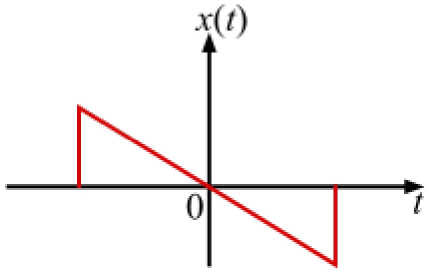
o un esempio diverso potrebbe essere:



Una segnale e in generale una **funzione** si definisce **dispari** se $x(t) = -x(-t)$ e quindi se assume valori simmetrici rispetto all'origine. Un classico esempio è la funzione seno:



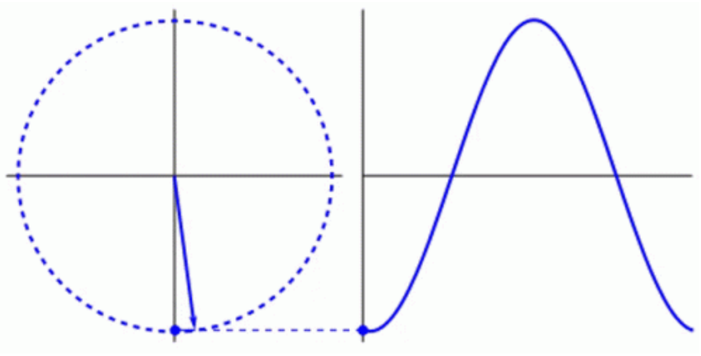
o un esempio diverso potrebbe essere:

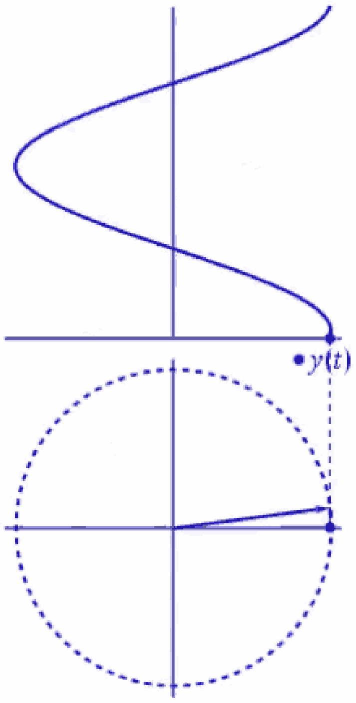


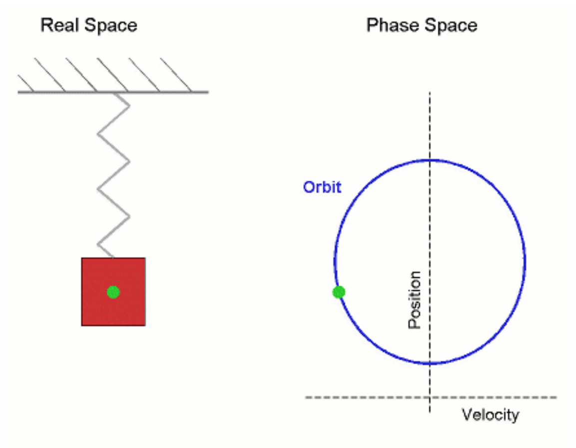
Nel caso non dovesse sussistere alcuna delle precedenti condizioni, diremo che a funzione considerata non è **né pari né dispari.**

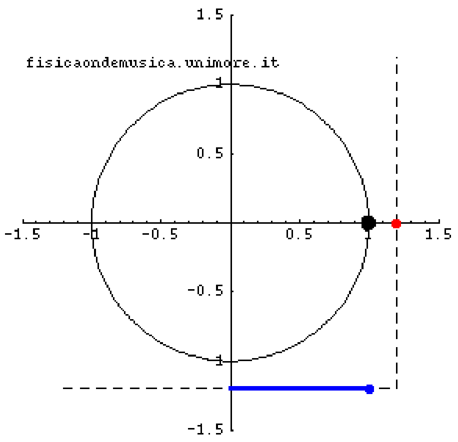
Segnali sinusoidali

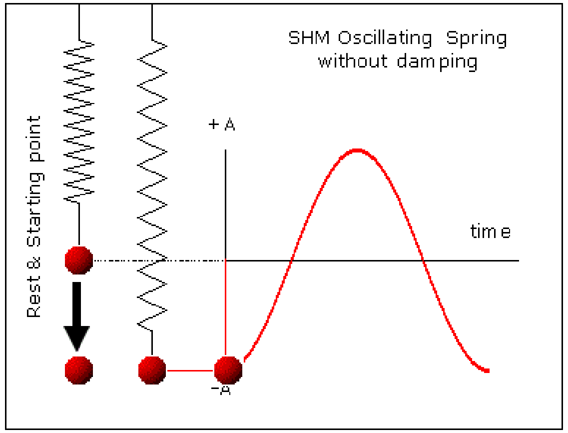
Qualsiasi movimento che si ripeta ad intervalli regolari è chiamato **moto periodico**.
Il **moto armonico semplice** è una forma di moto periodico che ha la caratteristica di poter essere ricondotto alla proiezione lungo un asse di una particella che si muove di moto circolare uniforme.

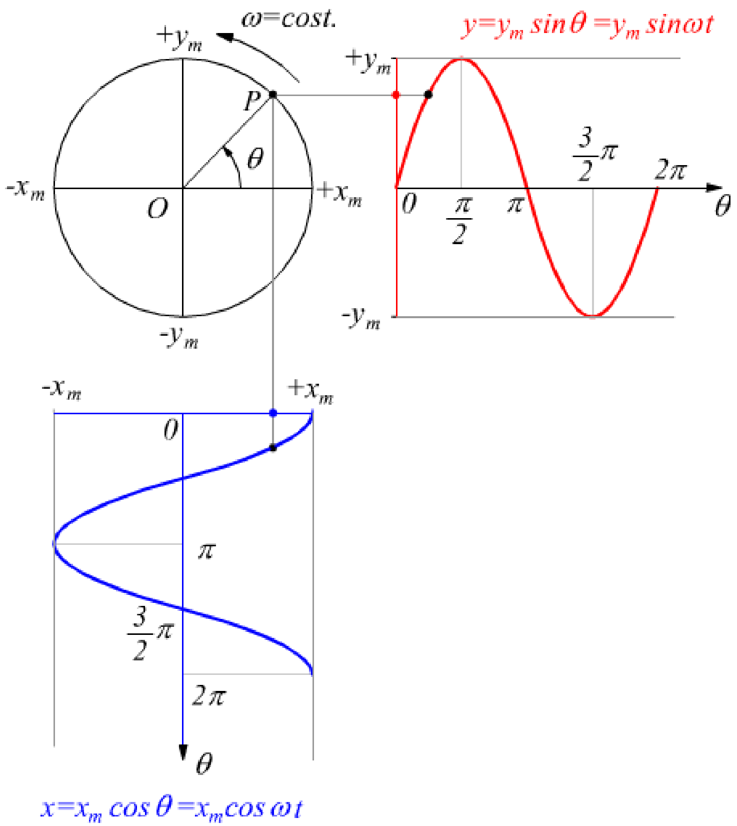












Immaginiamo di proiettare la posizione della particella P, rotante lungo la circonferenza di centro O, sull'asse orizzontale x, osserveremo la proiezione oscillare avanti e indietro di una ugual distanza x_m a destra e a sinistra rispetto all'origine.
Il valore x_m ($-x_m$) rappresenta, dunque, il valore massimo (minimo) dell'elongazione lungo l'asse x (**ampiezza**).

Se il punto materiale che percorre la circonferenza esegue un giro completo in un tempo T, allora $\boldsymbol{T}$ viene chiamato **periodo**, mentre $\boldsymbol{f = 1/T}$ viene chiamata **frequenza** e definisce il numero di giri che la particella esegue in un secondo.

Per percorrere un giro completo la particella deve coprire un angolo $\theta=2\pi$ in un tempo di T secondi con **velocità angolare** $\boldsymbol{\omega = \theta/T = 2\pi f}$

La **legge oraria** che definisce la posizione lungo l'asse x sarà: $\boldsymbol{x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)}$

mentre per la posizione lungo l'asse y: $\boldsymbol{y(t) = y_m\, sen\, (\omega t + \varphi)}$

con $\boldsymbol{\varphi}$ **fase iniziale** (gradi della posizione di partenza)

Per descrivere un segnale sinusoidale periodico si utilizzano quindi tre parametri:

- **ampiezza**: la distanza tra il valore medio e quello massimo della grandezza scelta;
- **frequenza**: il numero di volte in cui si ripete il segnale in un secondo (viene misurata in hertz);
- **fase**: intervallo di tempo, espresso in gradi, tra l'inizio di un segnale sinusoidale e un tempo prefissato preso come riferimento. Ne deriva che lo **sfasamento** tra due segnali è l'intervallo di tempo, sempre espresso in gradi, che intercorre tra due segnali sinusoidali con la stessa frequenza.

Esempio:

I due segnali analogici rappresentati in figura hanno una differenza di fase di 90°. Il calcolo dello sfasamento tra due segnali con la stessa frequenza si ottiene tenendo conto che alla durata di un periodo T, corrispondono 360°, quindi si misura l'intervallo I e il periodo T sull'asse del tempo e successivamente si imposta la proporzione: I : T = θ : 360°

Risulta quindi che θ = (360° · I)/T (espresso in gradi), dove θ indica lo sfasamento.

Nell'esempio si ha quindi:

θ = (360° · 0,25)/1 = 90° (il segnale rosso equivale al nero anticipato di 90°)

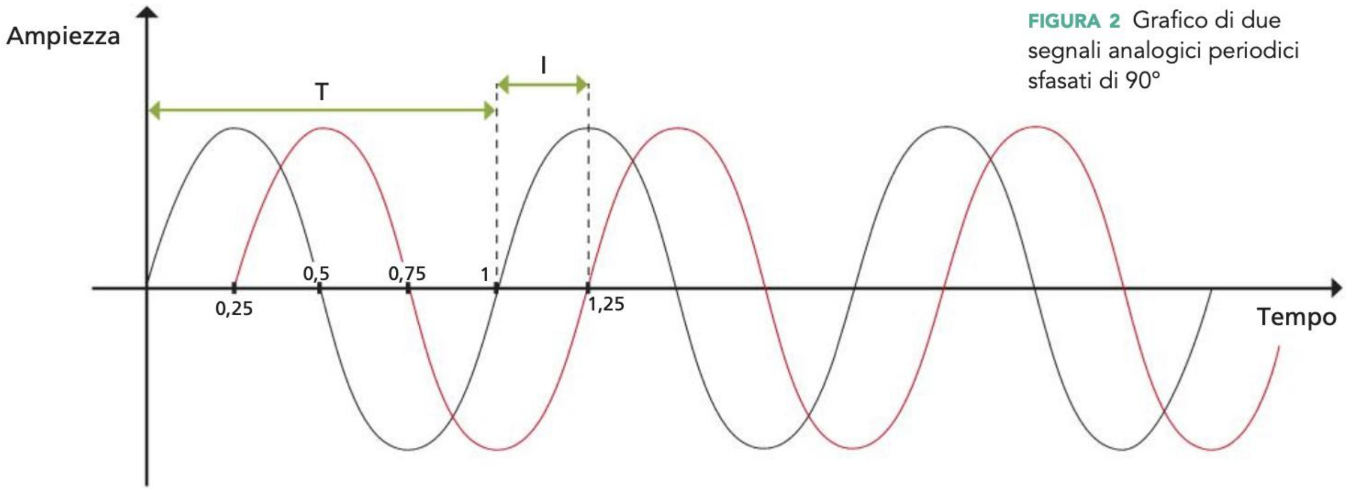


FIGURA 2 Grafico di due segnali analogici periodici sfasati di 90°

Analisi di Fourier

Molti segnali reali non sono semplici onde sinusoidali… sono più complessi, sembrano caotici, ma… e se ci fosse un modo per **scomporli** in onde semplici (come quando scomponiamo un numero in fattori primi, o una forza in componenti)?

Il matematico francese **Joseph Fourier**, nel 1807 ebbe un'intuizione geniale:
*qualunque **funzione periodica** sufficientemente regolare con **periodo T*** (ad esempio un segnale sonoro, luminoso, di trasmissione ecc.) *può essere **ottenuta sommando un numero anche infinito di funzioni seno e coseno*** (serie trigonometrica) *ciascuna con una certa frequenza, ampiezza e fase.* Ognuna di queste onde ha una frequenza ben precisa: la **fondamentale**, e poi i suoi **multipli**. Questi multipli si chiamano **armoniche**.

$$s(t) = \frac{1}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\,\pi n f t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\,\pi n f t)$$

con:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(2\,\pi n f t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(2\,\pi n f t)\,dt$$

$$c = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt$$

dove $f=1/T$ rappresenta la frequenza fondamentale,
$\boldsymbol{a_n}$ e $\boldsymbol{b_n}$ sono le ampiezze di seno e coseno delle armoniche n-esime (che scalano l'ampiezza di seno e coseno che sarebbe 1)
e ***c*** è una costante in grado di traslare il segnale di un offset positivo o negativo lungo l'asse delle ordinate

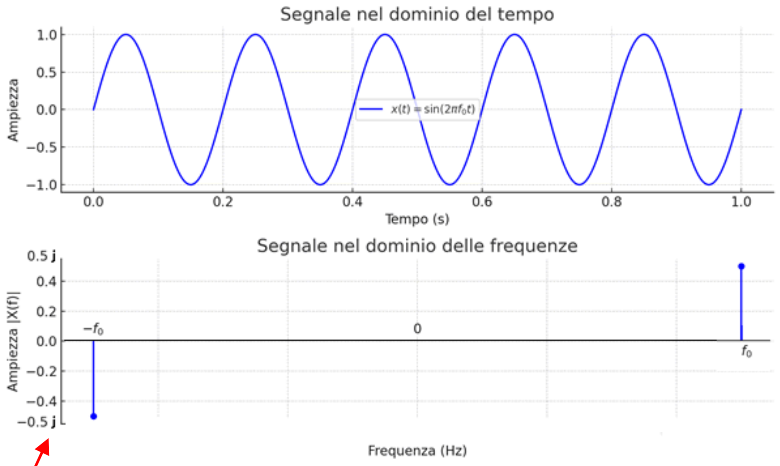
Si parla di sviluppo in **serie di Fourier** della funzione periodica $s(t)$.

OSSERVAZIONE 1:
una **funzione reale pari** (come il coseno, dove $s(t) = s(-t)$) ha una **serie di Fourier reale pari** del tipo:

$$s(t) = \frac{1}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\,\pi n f t)$$

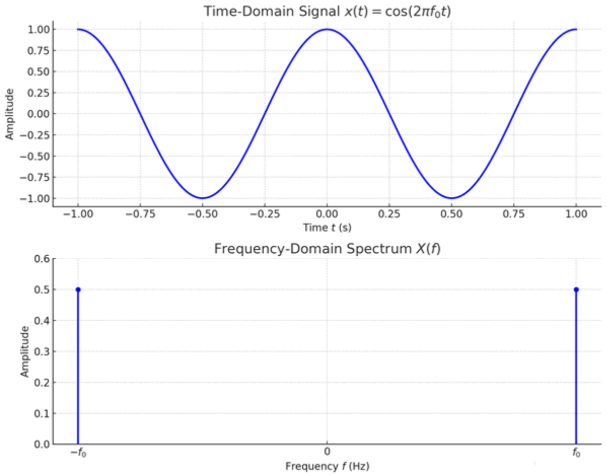
mentre una **funzione reale dispari** (come il seno, dove $s(t) = -s(-t)$) ha una **serie di Fourier immaginaria dispari** del tipo:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\,\pi n f t)$$



componente
immaginaria

Trasformata del seno



Trasformata del coseno

OSSERVAZIONE 2:
Quando fai la **trasformata di Fourier** di un segnale (soprattutto se il segnale è reale), **ottieni componenti spettrali sia nel semipiano positivo che in quello negativo delle frequenze**.
Il motivo sta nel fatto che la sinusoide in forma complessa, per la formula di Eulero, si può scrivere come:

$$e^{ix} = cosx + isenx \qquad \text{per ogni numero } x \text{ reale } (x \in \mathbb{R})$$

dove ***i*** è detta **unità immaginaria** ed è un numero complesso che soddisfa la proprietà: $\boldsymbol{i^2 = -1}$
La formula di Eulero permette anche di interpretare le funzioni seno e coseno come semplici varianti della funzione esponenziale:

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{e} \qquad senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dalla prima formula si deduce che il coseno è la parte la parte reale di una sinusoide scritta in forma complessa (mentre il seno è la parte immaginaria) e dalla seconda formula (facendo la sostituzione $x=\omega t=2\pi f$) si deduce che questa parte reale è in realtà somma di due onde complesse:

- una che ruota in senso **orario** ($e^{i\omega t}$ frequenza **positiva** dato che: $e^{i\omega t} = e^{i2\pi(+f)t}$)
- una che ruota in senso **antiorario** ($e^{-i\omega t}$ frequenza **negativa** dato che: $e^{-i\omega t} = e^{+i2\pi(-f)t}$)

Una **sinusoide reale** nasce proprio dalla **somma di questi due movimenti opposti**, perfettamente bilanciati. Quando analizzi un segnale reale trovi **frequenze positive e negative** ma **non rappresentano fisicamente due segnali diversi**: sono la **conseguenza matematica** del fatto che hai usato esponenziali complessi per rappresentare **coseni e seni reali**.

Si è dimostrato quindi che la **frequenza reale positiva** ha anche la sua **gemella negativa**, con cui forma una cosenoide reale. Anche se nel mondo fisico lavoriamo con frequenze positive, nella matematica della trasformata di Fourier le **frequenze negative compaiono naturalmente**. Lo spettro ci mostra entrambe le componenti, ma nel mondo reale vediamo solo la **somma** (ed ecco perché l'ampiezza dello spettro di un coseno è dimezzata rispetto all'ampiezza del segnale nel tempo).

Se $s(t)$ è **reale**, allora la sua trasformata $S(\omega)$ ha la seguente proprietà:

$$\boldsymbol{S(-\omega) = S^*(\omega)}$$

dove $\boldsymbol{S^*(\omega)}$ è il **complesso coniugato** di $S(\omega)$ ovvero:

- la **parte reale** è **pari**: $\Re\{S(-\omega)\} = \Re\{S(\omega)\}$
- la **parte immaginaria** è **dispari**: $\Im\{S(-\omega)\} = -\Im\{S(\omega)\}$

e quindi:

- $\boldsymbol{|S(-f)| = |S(f)|}\ \forall\, f \in R$ => il diagramma delle ampiezze sarà pari
- $\boldsymbol{\angle S(-f) = -\angle S(f)}\ \forall\, f \in R$ => il diagramma delle fasi sarà dispari

cioè **lo spettro è simmetrico** rispetto all'asse ω=0 (asse delle ordinate), **a meno di un cambio di segno nella parte immaginaria** (nel caso in cui la funzione fosse dispari, come nel caso della funzione seno per esempio).

Cosa cambia nei casi pratici?

Se lavori con segnali reali:

- si mostrano solo le **frequenze positive**, perché le negative non aggiungono informazione
- ma **matematicamente** lo spettro è **completo** solo considerando entrambe

Se lavori con segnali complessi:

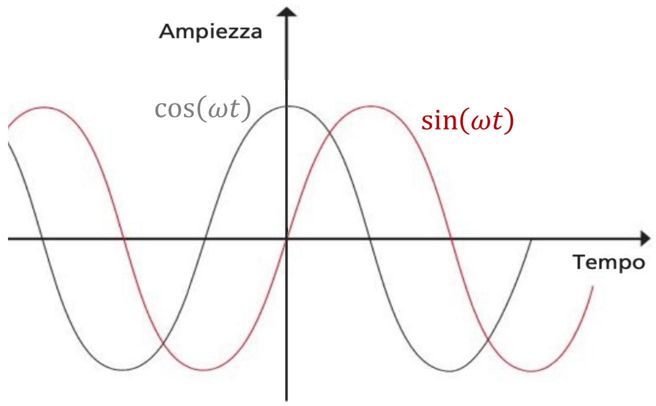
- frequenze positive e negative possono rappresentare **informazioni diverse**
- usato, ad esempio, nell'elaborazione di segnali complessi, nei radar etc.

Per analizzare lo spettro di un segnale periodico seguo alcune **regole e convenzioni pratiche**:

- l'angolo di fase è misurato rispetto al coseno, pertanto le eventuali componenti seno devono essere **convertite in coseno** ritardato di 90°:

$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90°)$$

dai grafici a fianco si può notare come il seno
sia un coseno in ritardo (parte dopo) di ¼ di periodo,
T/4 ovvero 2π/4= π/2= 90°
(allo stesso modo potremmo dire che il coseno
è un seno in anticipo di ¼ di periodo)



- l'**ampiezza A del coseno deve essere positiva**. Le eventuali ampiezze $-A\cos(\omega t)$ devono essere trasformate in $A\cos(\omega t \pm 180°)$:

$$-A\cos(\omega t) = A\cos(\omega t \pm 180°)$$

  dove la scelta +180° o -180° è indifferente

- l'**argomento (angolo) del coseno** deve essere **indicato sulla base di 2π** (ovvero se avessi una fase di 380°, dovrebbe essere sostituita con 20°, che è equivalente ragionando in modulo 2π = 360). Questo permette di rappresentare lo spettro delle ampiezze e delle fasi.

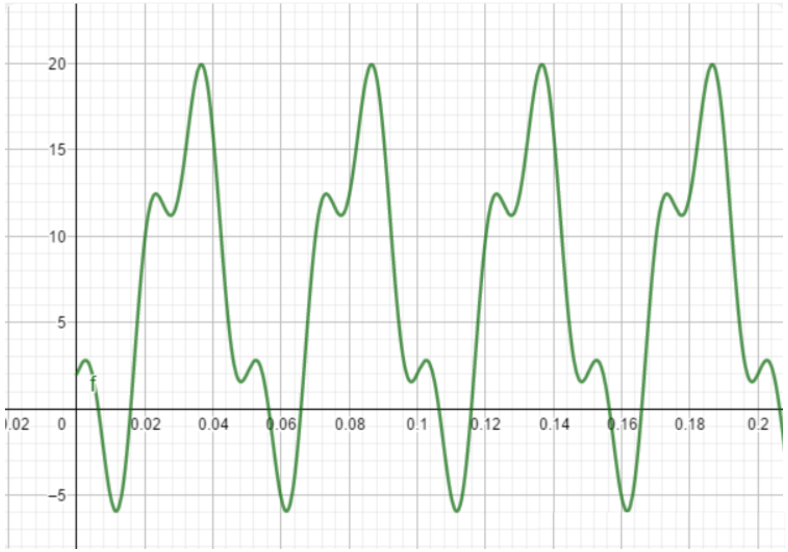
Esercizio 1:

Ho il seguente segnale: $s(t)=7-10\cos(40\pi t-60°)+4\sin 120\pi t$

Il mio obiettivo è portarlo il più possibile nella forma vista per la serie di Fourier per cui:

- trasformo le costanti in termini di frequenza zero: $s(t)=7\cos 2\pi 0t-10\cos(40\pi t-60°)+4\sin 120\pi t$
- converto l'ampiezza negativa in positiva aggiungendo +180°: $s(t)=7\cos 2\pi 0t+10\cos(40\pi t-60°+180°)+4\sin 120\pi t$
  $s(t)=7\cos 2\pi 0t+10\cos(40\pi t+120°)+4\sin 120\pi t$
- trasformo il seno in coseno riducendo l'argomento di -90°: $s(t)=7\cos 2\pi 0t+10\cos(40\pi t+120°)+4\cos(120\pi t-90°)$
- trasformo gli argomenti in 2π: $s(t)=7\cos 2\pi 0t+10\cos(2\pi\cdot 20\cdot t+120°)+4\cos(2\pi\cdot 60\cdot t-90°)$

La forma d'onda del segnale nel dominio del tempo è la seguente:



l'onda ha:

- frequenza di 20Hz (periodo T = 1/20 = 0,05 sec) in linea con il fatto che tutte le componenti di g(t) sono armoniche multiple di 20Hz (che è quindi la frequenza fondamentale)
- offset di +7 determinato dalla costante iniziale (che scosta la media del segnale dall'asse delle ascisse)

L'analisi dello spettro di frequenze parte dalla forma:

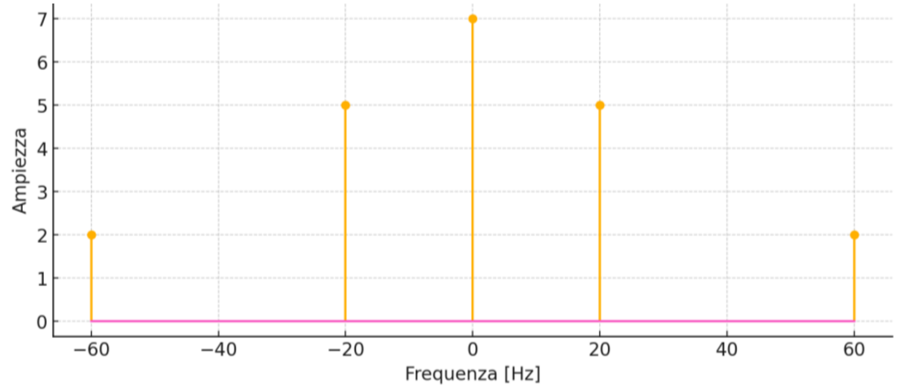
$$s(t)=7\cos 2\pi 0t+10\cos(2\pi\cdot 20\cdot t+120°)+4\cos(2\pi\cdot 60\cdot t-90°)$$

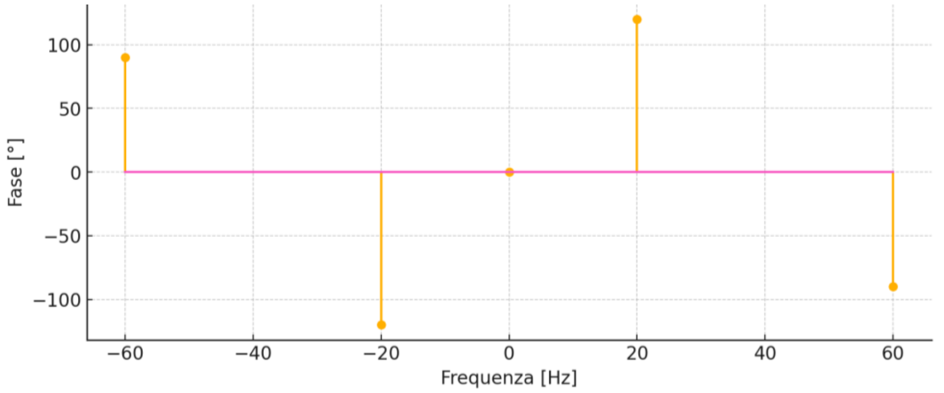
e da questa posso associare le ampiezze (7, 10, 4) delle componenti del segnale alle relative frequenze (0, 20, 60). Questo mi permette di rappresentare lo spettro delle frequenze rispetto all'ampiezza e alla fase.

Vediamo subito che, **essendo *s(t)* reale,** per quanto visto in slide 34, **la sua trasformata di Fourier $S(f)$ soddisfa la relazione $S(-f)=S^*(f)$** dove $S^*(f)$ è il complesso coniugato di $S(f)$ per cui:

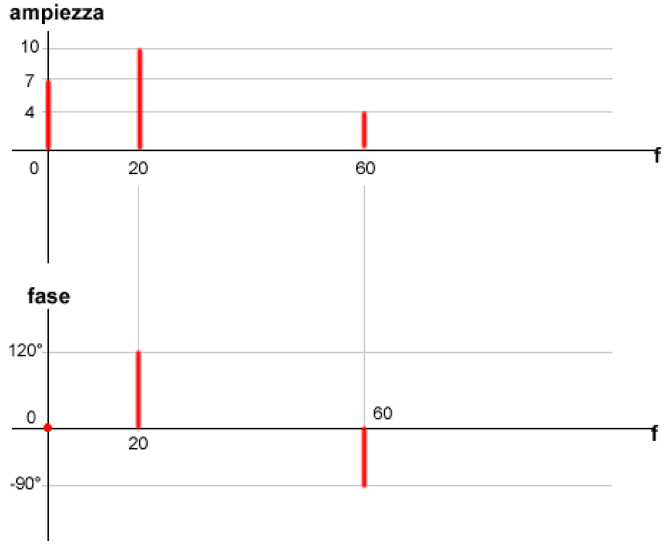
- **$|S(-f)| = |S(f)|$** $\forall\, f\in R$ e quindi il diagramma delle ampiezze sarà pari (simmetrico rispetto l'asse delle ordinate);
- **$\angle S(-f)=-\angle S(f)$** $\forall\, f\in R$ e quindi quello delle fasi sarà dispari (simmetrico rispetto all'origine)

Come sappiamo, le ampiezze nello spettro saranno dimezzate, distribuite tra semipiano positivo e speculare negativo per cui le ampiezze saranno (7, 5, 2); la componente costante $7\cos 2\pi 0t$ (con *f=0*) non sarà dimezzata in quanto non ha una speculare nel semipiano negativo.



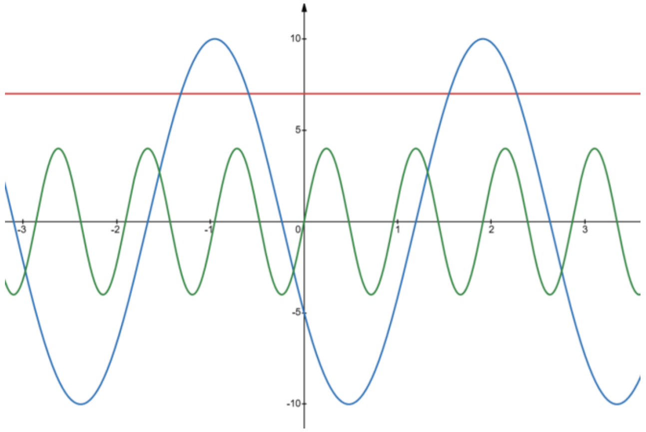


Per **convenzione** poi, con **segnali reali**, dato che lo spettro delle ampiezze è pari (e quindi è speculare a quanto rappresentato nel semipiano positivo) e quello delle fasi dispari, **si rappresenta solo il semipiano positivo dello spettro** facendo attenzione di rappresentare in questo caso l'**ampiezza complessiva** delle componenti (7,10,4) e **non quella dimezzata** (7, 5, 2).



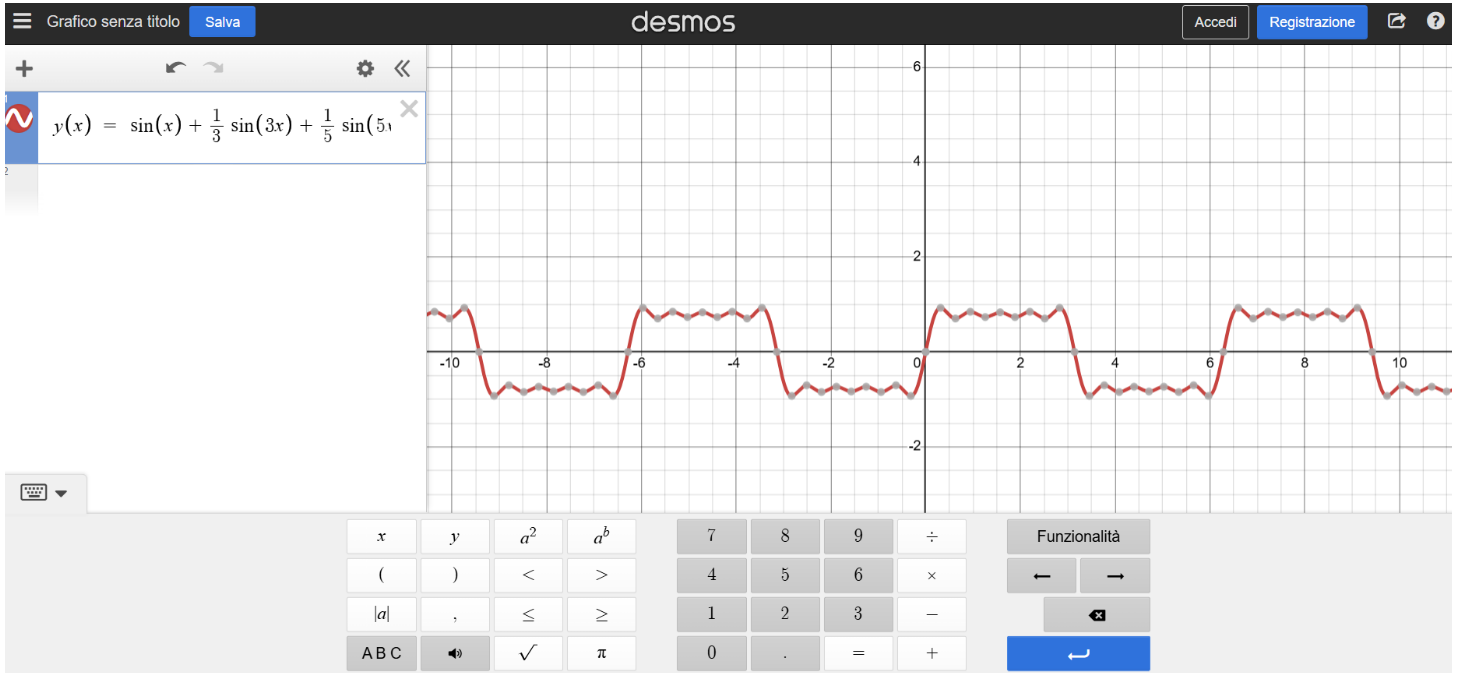
È possibile ovviamente anche partire dallo spettro e ricostruire la forma d'onda nel tempo sommando tra loro le 3 componenti cosinusoidali rappresentate di fianco a partire dalle informazioni dello spettro:

- una costante di ampiezza 7 (segnale a frequenza 0)
- un coseno ritardato di 120° = T/3, ampiezza 10, frequenza 20Hz
- un coseno anticipato di 90° = T/4, ampiezza 4 e frequenza 60Hz

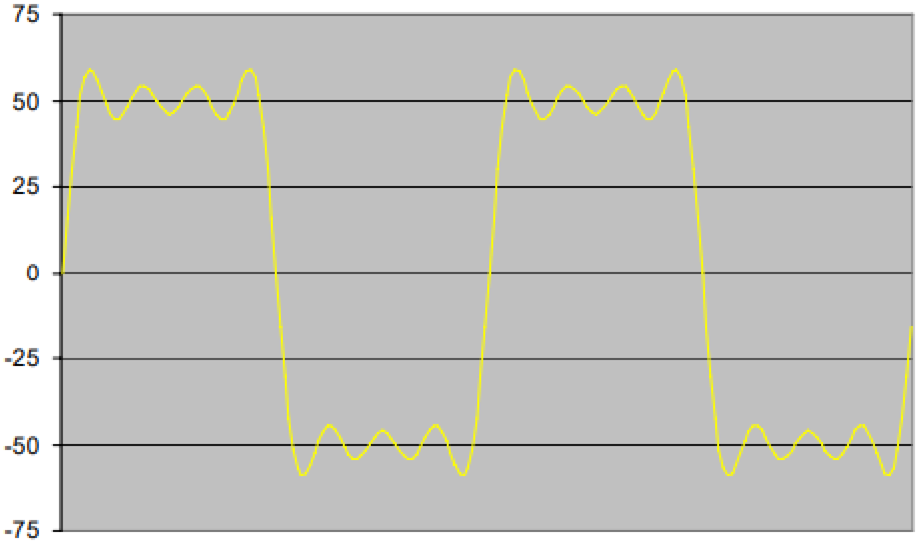


Esercizio 2:
possiamo provare a costruire un’onda quadra sommando diversi seni con frequenze multiple. Man mano che aggiungiamo armoniche, la forma si avvicina sempre di più a un’onda quadra.
Proviamo a visualizzarlo con piattaforme come Desmos (https://www.desmos.com/calculator?lang=it) o GeoGebra:

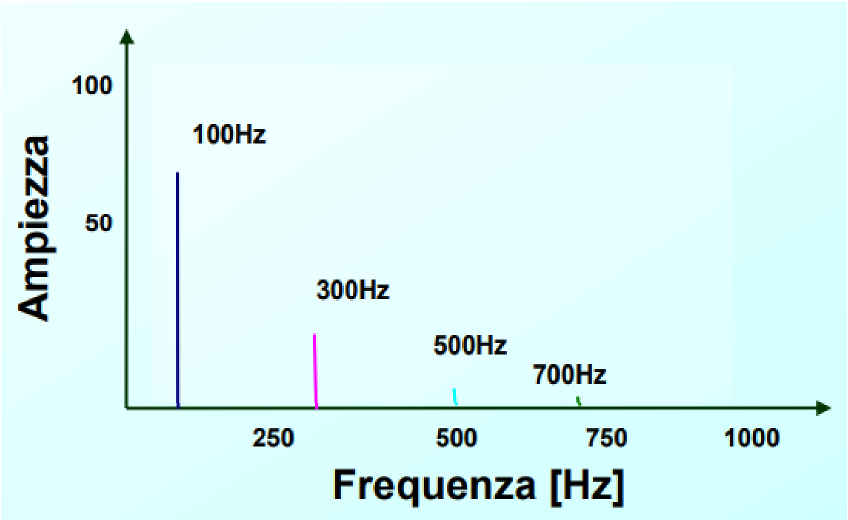
$$y(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \frac{1}{9}\sin(9x)$$

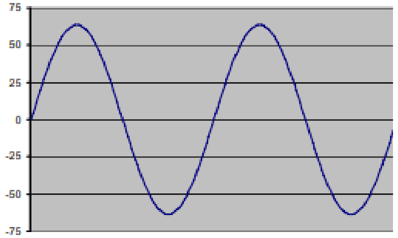


Lo spettro è la somma degli spettri dei sinusoidi che compongono l'onda. Il segnale è una somma di sinusoidi di frequenza multiple intere della frequenza del segnale (f_0).



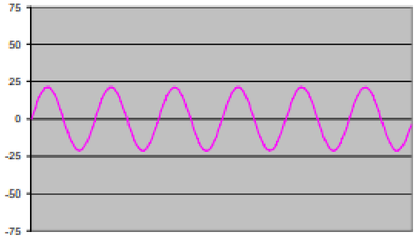
f_0 = 100Hz





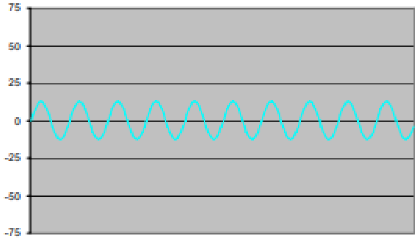
f = 100Hz, A = 64

+



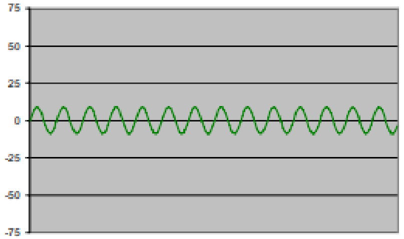
f = 300Hz, A = 21

+



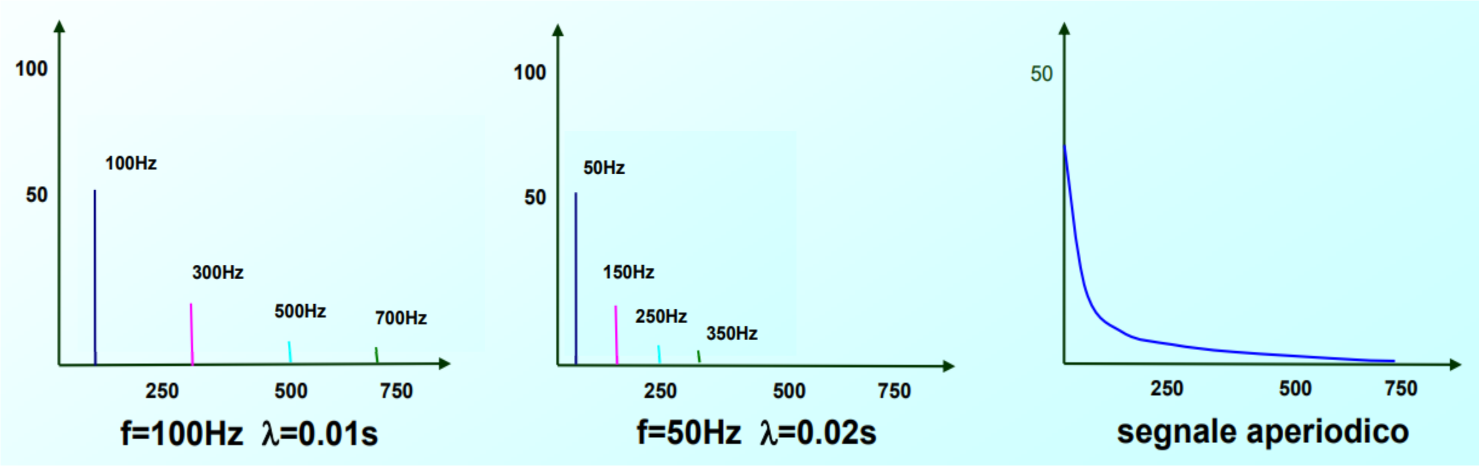
f = 500Hz, A = 6

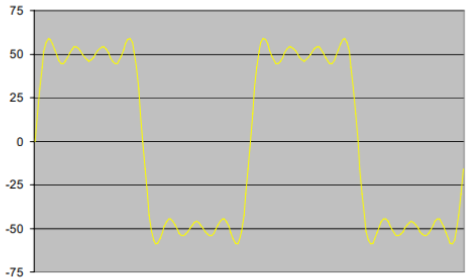
+

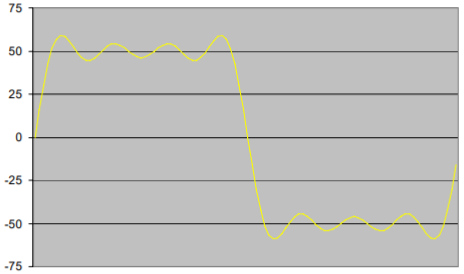


f = 700Hz, A = 4

OSSERVAZIONE 3:
Aumentando la lunghezza d'onda di un segnale (il suo periodo), quindi diminuendo la sua frequenza, le barre dello spettro tendono a spostarsi verso l'origine degli assi ed ad avvicinarsi le une alle altre. Intuitivamente, possiamo immaginare che se la lunghezza d'onda diventa infinita (ossia il segnale si ripete in un periodo infinito: è **non-periodico**), le barre dello **spettro si fondono in una linea continua**.







Esiste allora una forma di **dualità**:

Periodicità ↔ Discrezione

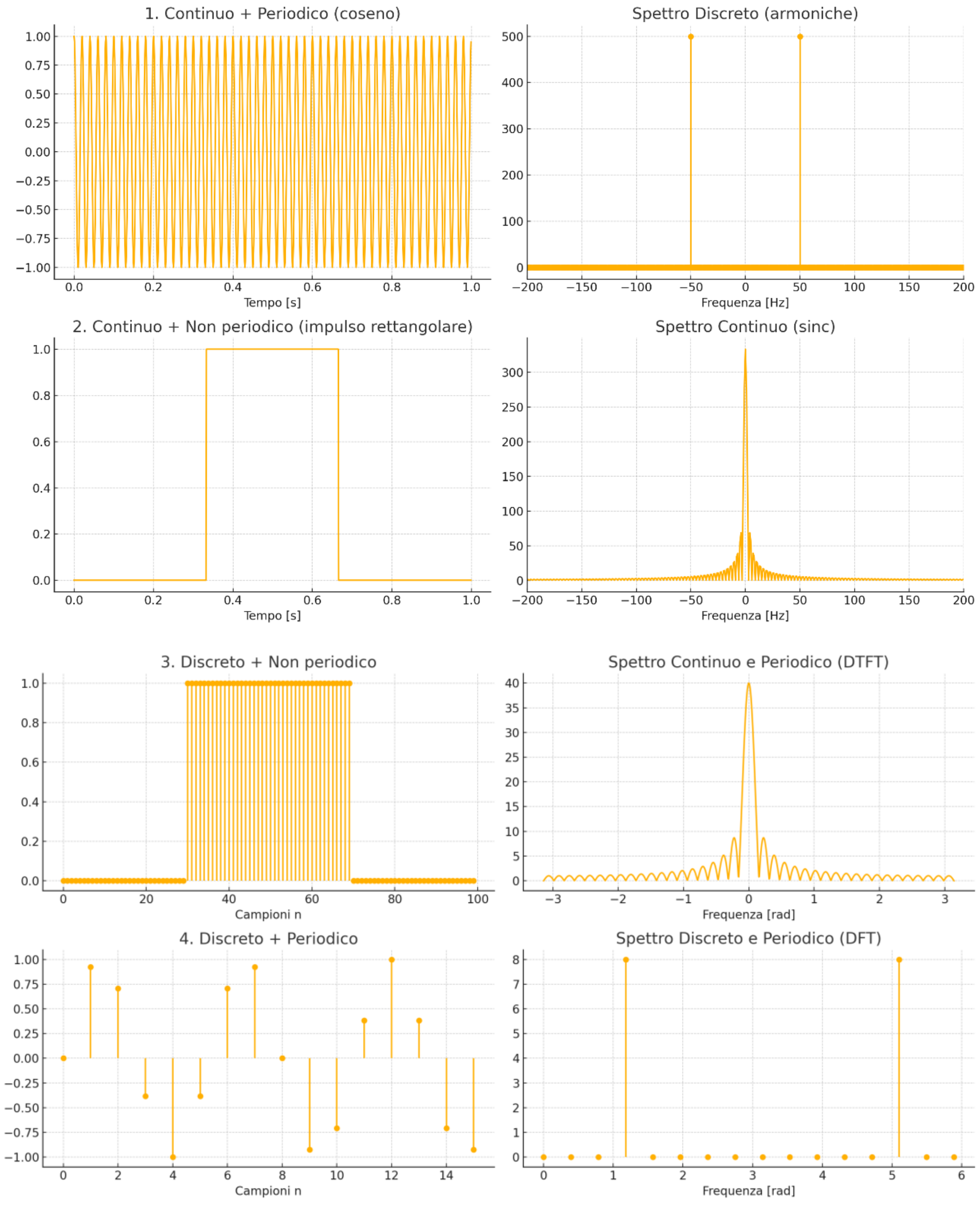
Se il segnale è periodico in un dominio, è discreto nell'altro:

- se un segnale è **periodico nel tempo**, la sua trasformata è **discreta** in frequenza (spettro è composto da **frequenze discrete**, cioè **una serie di impulsi (delta)**)
- se un segnale **non è periodico nel tempo**, allora ha **infinità di frequenze**, distribuite in modo **continuo** nello spettro.
- se un segnale è **discreto nel tempo**, la sua trasformata è **periodica** in frequenza (è il caso della DFT, *Discrete Fourier Transform*)

Tempo	Spettro
Periodico	Discreto
Non periodico	Continuo
Discreto	Periodico
Continuo	Non periodico

da cui:

Tempo	Spettro
Continuo + periodico	Discreto (Serie di Fourier)
Continuo + non periodico	Continuo (Trasformata di Fourier)
Discreto + non periodico	Continuo e periodico (DTFT, *Discrete Time Fourier Transform*)
Discreto + periodico	Discreto e periodico (DFT, *Discrete Fourier Transform*/FFT, *Fast Fourier Transform*)



Tempo	Spettro
Continuo + periodico	Discreto (Serie di Fourier)
Continuo + non periodico	Continuo (Trasformata di Fourier)
Discreto + non periodico	Continuo e periodico (DTFT, *Discrete Time Fourier Transform*)
Discreto + periodico	Discreto e periodico (DFT, *Discrete Fourier Transform*/FFT, *Fast Fourier Transform*)

Nota sugli spettri del segnali tempo discreti:

- Il grafico della DTFT convenzionalmente mostra un solo periodo. Se allargassimo l’asse delle frequenze, vedremmo che il pattern si ripete ogni 2π;
- il grafico della DFT per convenzione standard mostra le frequenze da 0 a 2π: la DFT calcola solo un periodo, ma matematicamente lo spettro si ripete all’infinito

Il passaggio dalla descrizione di un segnale (inteso come fenomeno periodico) dal punto di vista del suo andamento temporale alla sua descrizione dal punto di vista della decomposizione in somma di armoniche, viene spesso chiamato **passaggio dal dominio dei tempi al dominio delle frequenze**.

Pochi ne sono consapevoli ma la trasformata di Fourier é usata di continuo in decine di campi a prima vista inconciliabili tra loro, come ad esempio l'elettronica, la musica, la medicina, la fisica, la chimica . . . Per calcolare una trasformata basta infatti ascoltare. L'orecchio esegue automaticamente un calcolo che il nostro intelletto puó effettuare solo dopo anni di studio della matematica. Usate il cellulare? Guardate la tv? Ascoltate musica? Allora questa formula (in realtá è piú corretto parlare di una coppia di formule) merita di essere compresa, almeno nelle sue basi piú semplici e "pratiche" e nella sua **definizione generale** (**senza il vincolo della periodicità** del segnale) ha la seguente formulazione:

Trasformata di Fourier $$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i2\pi ft} dt \qquad f \in \mathbb{R}$$

Antitrasformata di Fourier $$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{i2\pi ft} df \qquad t \in \mathbb{R}$$

La **trasformata di Fourier consente di scomporre un'onda qualsiasi**, anche molto complessa e "rumorosa" (un segnale telefonico o televisivo, la musica, la voce) in un **continuo di più sotto-componenti sinusoidali** (non più frequenze discrete come nella serie, bensì un continuo di frequenze).

Perché nella **serie** di Fourier le **armoniche** sono **multipli della frequenza fondamentale?**
Un segnale **periodico** è una funzione $s(t)$ che **si ripete identica ogni T secondi**.

$$s(t) = s(t+T) \quad \forall t \in R$$

La **frequenza fondamentale** è:

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

Questa è la **frequenza più bassa** che "sta bene" con la periodicità del segnale.

Fourier vuole **ricostruire** $s(t)$ usando **onde sinusoidali** (seni e coseni).
Ma **quali** sinusoidi possiamo usare per essere sicuri che la somma risultante sia **anch'essa periodica con periodo T**?
solo quelle con periodo compatibile, cioè:

periodo: $\frac{T}{n}$ ovvero frequenza: nf_0

Quindi Fourier può usare solo multipli interi della fondamentale: $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, $5f_0$, etc.
Nella pratica, se una corda di chitarra vibra a 100 Hz, **automaticamente produce** vibrazioni anche a 200 Hz, 300 Hz, 400 Hz… → **armoniche**.

La **trasformata di Fourier** (non la **serie**) si applica anche a **segnali non periodici**. In quel caso, le frequenze **non** devono essere multipli di nulla: possono essere **continue**. Parliamo allora di **spettro continuo** (non di armoniche discrete).

La larghezza di banda

La larghezza di banda nello spettro delle frequenze è l'intervallo di frequenze all'interno del quale è concentrata la maggior parte dell'energia di un segnale, dove si definisce **energia di un segnale** $s(t), t \in \mathbb{R}$:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt \quad , t \in \mathbb{R}$$

e con segnale periodico di periodo T_p:

$$E_s(Tp) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2 \, dt$$

La **larghezza di banda B** è quindi definibile come la differenza tra la frequenza massima e quella minima in cui il segnale ha componenti significative (frequenze trasmesse senza una forte attenuazione, in genere si considera **attenuazione < 50%**):

$$\mathbf{B} = f_{max} - f_{min}$$

dove f_{max} è la frequenza massima significativa nello spettro mentre f_{min} è la frequenza minima significativa.

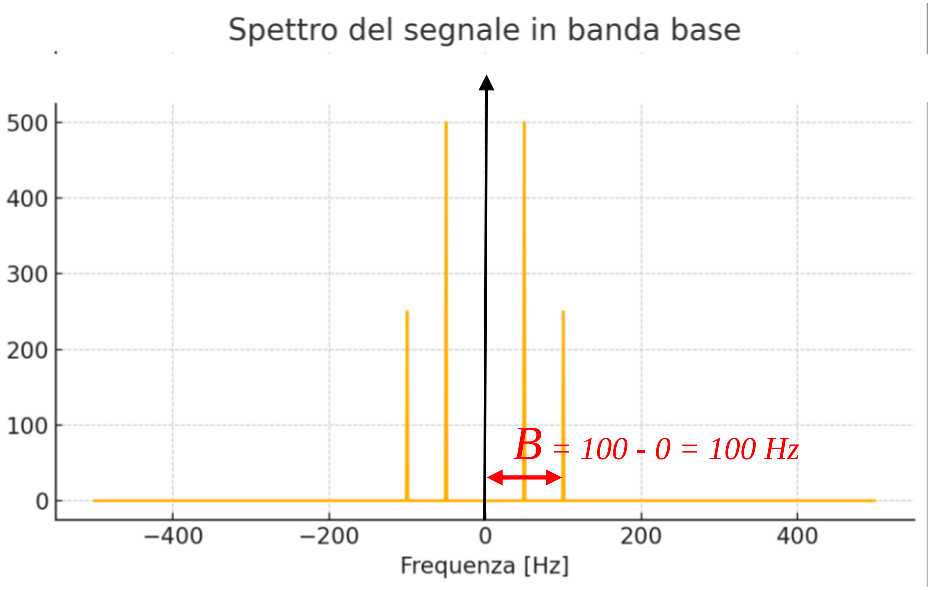
Ad esempio, se un segnale ha componenti frequenziali che vanno da 100 Hz a 1000 Hz, la larghezza di banda sarà:

B = 1000Hz − 100Hz = 900Hz

In sintesi, la larghezza di banda rappresenta l’ampiezza del "range" di frequenze utilizzato dal segnale e influisce direttamente sulle prestazioni dei sistemi di trasmissione.

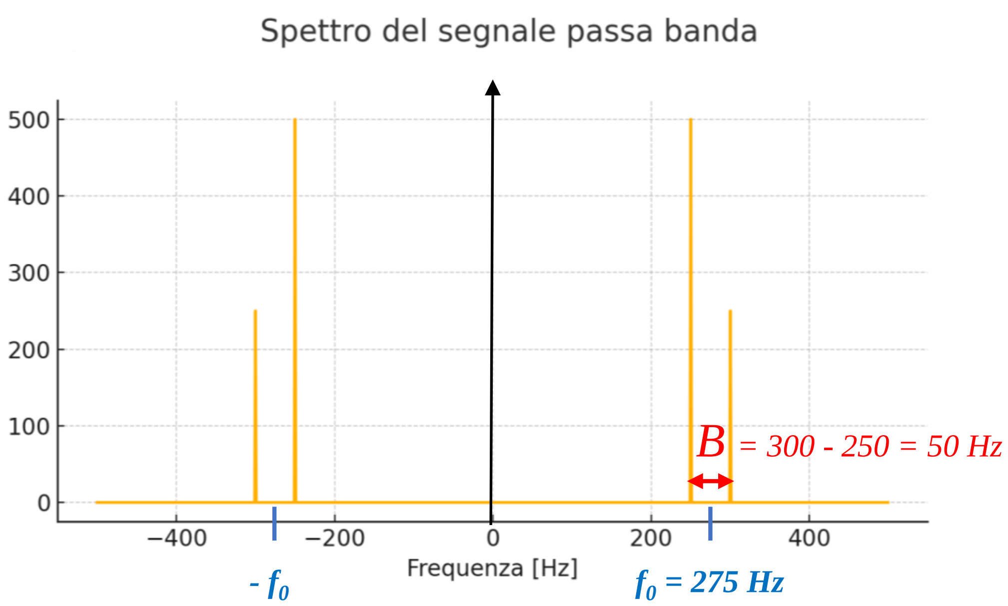
Un segnale in banda base ha lo spettro distribuito intorno a $f=0$ per cui la sua banda sarà:

$$B = f_{max} - 0 = f_{max}$$



Un segnale passa banda ha lo spettro distribuito intorno a $f_0 \neq 0$ per cui la sua banda sarà:

$$B = f_{max} - f_{min}$$



In un sistema di telecomunicazioni, la larghezza di banda determina la quantità di informazioni che possono essere trasmesse. **Maggiore è la larghezza di banda, maggiore è la capacità di trasmettere dati**. Ogni segnale ha una larghezza di banda finita, che dipende dalla sua natura. Segnali a larga banda (con ampie gamme di frequenze) tendono a trasportare più informazioni rispetto ai segnali a banda stretta.