5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

ILLIMITATO ($\bar{c}_i \le 0$)

$B = [x_6\ x_2\ x_3]$ ↑ x_1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
	−10	0	0	−10	−1	0	0	−1	30
x_6	37	0	0	50	900	$\boxed{1}$	1	0	100
$x_1 - (x_2)$	19	$\boxed{1}$	0	−1	1	0	0	0	0 ⇒ x_2
x_3	−1	0	$\boxed{1}$	100	−1	0	23	0	200

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? È ottima? → NO, $\exists\, \bar{c}_i \le 0$

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (37)?

c. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland?

d. quali altri cambi base sono ammessi secondo le regole del simplesso (indipendentemente da regole anticiclo)? → 3 VAR. POTREBBERO ENTRARE

e. per uno a scelta dei cambi base ammessi, qual è il valore della funzione obiettivo che si otterrebbe se lo si eseguisse?

— DEGENERE ↓ 2 RAPP. MINIMO ↓ NO CAMBIO F.O.

RAPP. MIN → VAR. CHE ESCE · $\frac{\text{RAPP.}}{\text{MIN}}$ + (−1)·(−z) CAMBIO F.O.

SE x_1 (RAPP. MIN) $= -10\left(\frac{0}{19}\right) + 30 = 30$ (DEGENERE)

x_4:
- $\frac{100}{50} = 2 - x_6$
- $\frac{200}{100} - x_3$

(DEGENERE)

$x_3 < x_6$ (BLAND)

$$-10 \cdot \left(\frac{200}{100}\right) + (-1)(-30)$$

$$-20 + 30 = 10 \text{ (STESSO CON } x_6)$$

MIGLIORA (MA DEGENERE)

FORMA "CLASSICA" PROBLEMA PLI

$$\begin{bmatrix} \max c^T x \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{Z}^+ \end{bmatrix} \rightarrow$$

F. STD.

$\underline{\min}\ c^T x$

10 << 30 (MEGLIO!) :)

$- SS \ x_5$

$$(-1)\left(\frac{0}{1}\right) + (-1)(-30) = 0 + 30 = \underline{30}$$

NON CAMBIA!

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{llllllll} \min & -x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & -4 \\ & \mathbf{x_1 \leq 0} & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

→ SS MIN → NULLA!

SS MAX → PASSI A MIN!

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;
b) qual è il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo direttamente a partire dal risultato del punto precedente?

① SCRIVI FORMA STD

$$\min \ \hat{x}_1 - x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \quad -2\hat{x}_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$\hat{x}_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 4$$

≥ 0

② TABLEAU $\quad B = [x_4 \ x_5 \ x_6]$

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	1	-1	-3	0	0	0	-1	0
x_4	-2	-3	-3	1	0	0	0	2
x_5	0	1	1	0	1	0	0	2
x_6	1	1	2	0	0	1	0	4

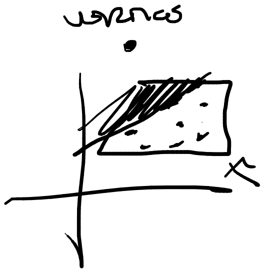
ENTRANO → x_4 x_5 x_6
LASCIANO → NESSUNO

AUMENTA SEMPRE! (POI −1)

PROBLEMA È DI MINIMO → (1) GESTIRE MEGLIO LA FEASIBLE REGION

SEMPRE

LOGICA TEORICA SIMPLESSO [PRIMA



DOPO (MEGLIO PERCHÉ IL PROBLEMA SI RIDUCE IN COMPLESSITÀ)

AUMENTA SOLO IL VALORE DELLA MATRICE AUMENTATA - TABLEAU!

LO

(2) TABLEAU $B = [x_4 \; x_5 \; x_6]$

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
$-z$	1	-1	-3	0	0	0	-1	0
x_4	-2	-3	-3	1	0	0	0	2
x_5	0	1	1	0	1	0	0	2
x_6	1	1	2	0	0	1	0	4

(POI)

$\left(\frac{27}{5}\right) \swarrow z$ → (PRIMALE OTTIMO → DUALE AMMISSIBILE)

DUALITÀ DEBOLE (PRIMALE ILLIMITATO → DUALE INAMMISSIBILE)

4. Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale.

Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (0, -2, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
\text{s.t.} & & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & \geq & 1 \\
 & x_1 & & & + & 2\,x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & -2 \\
\end{array}
$$

x_1 libera $\quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0$

① TEST x_1, x_2, x_3 CHE ABBIA SENSO

② PASSO AL DUALE

$$\min\ 2u_1 + u_2 + 3u_3 - 2u_4$$

$$\text{s.a}\quad 2u_2 + u_3 + u_4 = 2$$

$$- \; - \; \ldots \; \leq 1$$

$$- \; - \; \ldots \; \geq -1$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \leq 0,\ u_3 \geq 0,$$
u_4 LIBERA

③ CCPD

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ (2u_1 + u_3 - 3u_4)\, x_1 = 0 \end{cases}$$

→ SE MANCA UNA VARIABILE ↓ TORNA INDIETRO E PROVA CONDIZIONI

$= 3$

$$(2u_1)(x_1) = 0$$

$$u_1 = -6,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0$$

b. Secondo pezzo: vincoli duali
   i. Prendo x_i *con* "i" posizione della riga attuale e lo moltiplico per il vincolo duale in posizione i portando a sinistra il termine noto (cambiando quindi di segno)
   Es. $-u_1 - u_2 \leq 2 \Rightarrow (-u_1 - u_2 - 2)x_1$
   ii. Sostituisco il valore di x_i in quella posizione e faccio le stesse verifiche dei sottocasi (1) e (2) della seconda condizione del problema primale
   iii. Se ho vincoli di uguaglianza, devo verificare che non faccia già parte dei vincoli; nel qual caso lo considero (*deriva dall'ammissibilità duale*), altrimenti no

$$
\begin{aligned}
\min\ & u_1 + 2u_2 - 3u_3 + 2u_4 \\
s.t.\ & -u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0 \\
& -u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 1 \\
& 2u_1 + u_4 \leq 1 \\
& u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0, u_4 \ libera
\end{aligned}
$$

USUS CCPD

$\rightarrow$ $\underline{-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0}$

SI CONSIDERA!