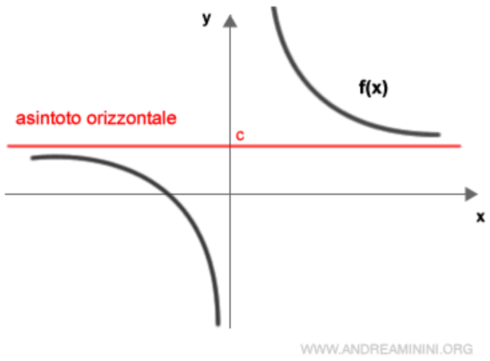
Gli asintoti

Cosa sono gli asintoti

In matematica un asintoto è una retta (o una curva) che si avvicina al grafico della funzione in modo indefinito quando la variabile indipendente x tende a più o meno infinito.



In pratica, la distanza tra l'asintoto e il grafico della funzione tende a zero.

- Se l'asintoto è una retta si parla di **retta asintotica**.
- Se l'asintoto è una curva si parla di **curva asintotica**.

Esistono tre tipologie di asintoti: orizzontali, verticali e obliqui.

- L'asintoto orizzontale
- L'asintoto verticale
- L'asintoto obliquo

L'asintoto orizzontale

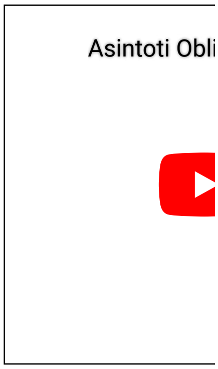
L'asintoto orizzontale si calcola con il limite della funzione per x tendente a +∞ o -∞

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$$

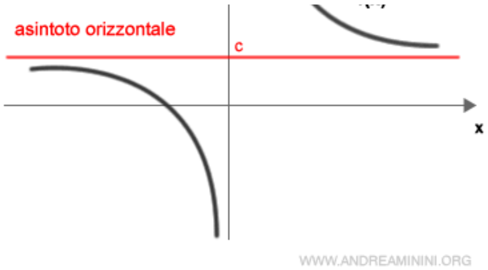
L'asintoto orizzontale esiste se il limite esiste ed è un numero reale finito.

Ecco un esempio pratico di asintoto orizzontale.

Altre risorse utili



Le funzioni



In pratica, l'asintoto orizzontale è una retta parallela o coincidente all'asse dell'ascisse.

Ovviamente gli asintoti orizzontali per x tendente a +∞ e a -∞ possono anche non coincidere.

Esempio

Devo calcolare gli asintoti orizzontali della funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x}$$

Calcolo il limite per x tendente a +∞

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

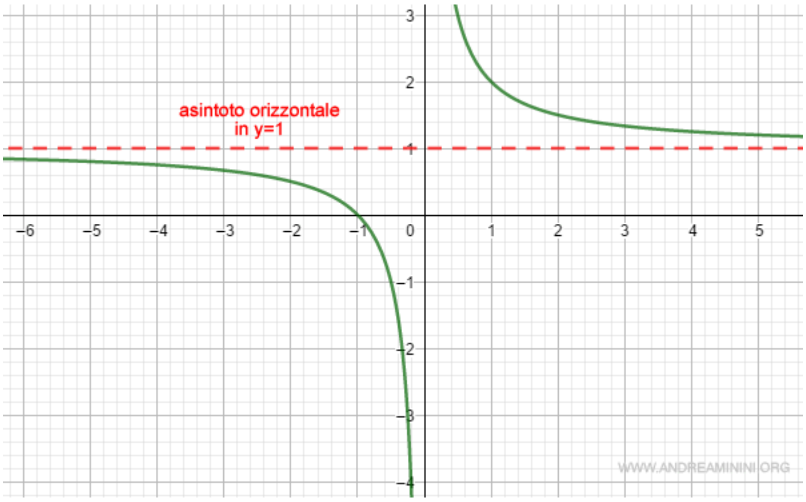
Quindi, la funzione ha un asintoto orizzontale in y=1 per x→+∞

> **Nota**. E' una forma indeterminata di limite ∞/∞ che si risolve facilmente con il teorema di L'Hopital.

Ora calcolo il limite per x tendente a -∞

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Pertanto, la funzione ha un asintoto orizzontale in y=1 per x→-∞



L'asintoto verticale

L'asintoto verticale si calcola nei punti in cui la funzione non è definita con il limite per x tendente x_0 da destra e da sinistra.

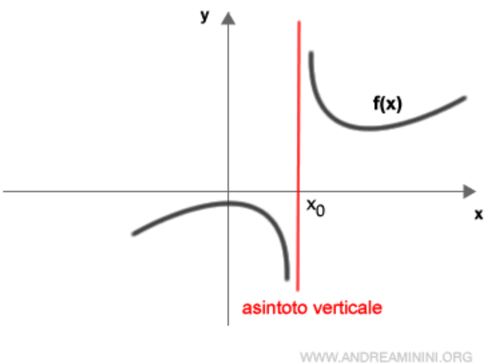
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Dove x_0 è un punto in cui la funzione non è definita.

L'asintoto verticale esiste in x_0 se il limite è più o meno infinito.

Ecco un esempio pratico di asintoto verticale.



In pratica, l'asintoto verticale è una retta parallela o coincidente all'asse delle ordinate.

Esempio

Devo verificare se la funzione ha asintoti verticali

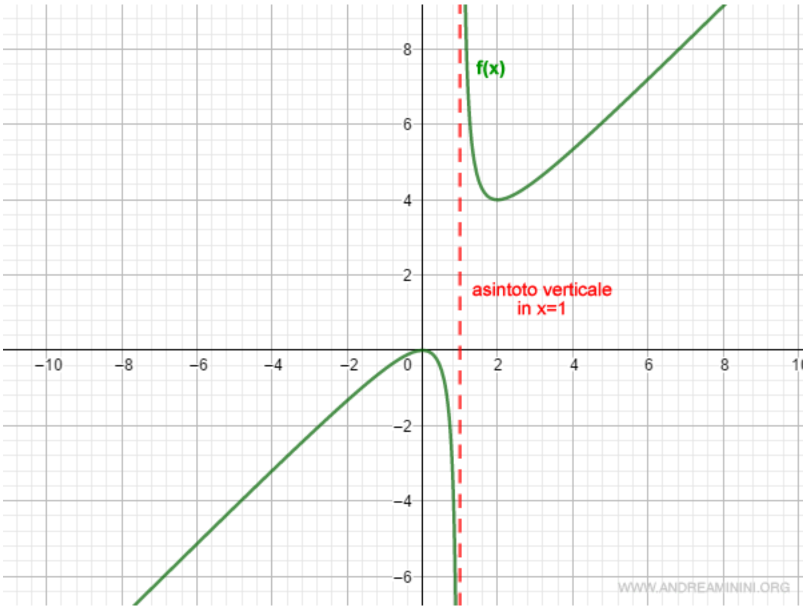
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Quindi, calcolo il limite per $x_0=1$ da destra e da sinistra.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

Ho così trovato l'asintoto verticale in $x_0=1$

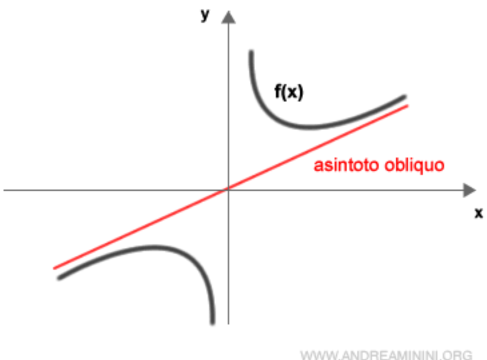


L'asintoto obliquo

L'asintoto obliquo esiste se il limite per x tendente a +∞ o -∞ della differenza tra la funzione f(x) e la retta y=mx+q è uguale a zero

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (mx+q) = 0$$

Ecco un esempio pratico di asintoto obliquo



$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\quad}{x} \neq 0$$

Dimostrazione. Se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

per determinare il coefficiente angolare annullo il termine noto q=0.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = 0$$

Essendo il limite uguale a zero per x→∞, non cambia se divido tutto per x.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Se il coefficiente angolare m esiste ed è diverso da zero, calcolo un secondo limite per individuare il termine noto q della retta.

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx \neq \infty$$

Dimostrazione. Se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx - q = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$$

Se il termine noto q esiste ed è diverso da infinito, allora la funzione ha un asintoto obliquo y=mx+q per x tendente a +∞. In caso contrario non ce l'ha.

Con la stessa procedura verifico anche l'esistenza dell'asintoto obliquo per x tendente a -∞.

Esempio

Devo verificare se la funzione ha un asintoto obliquo

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Per prima cosa verifico se il limite per x tendente a infinito è infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

Nota. Si tratta di una forma indeterminata di limite ∞/∞ che si risolve facilmente con il

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x-1)}$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(x-1)} = 1$$

Il coefficiente angolare m=1 esiste ed è diverso da zero.

A questo punto verifico se l'intercetta è diversa da ±∞.

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} - mx$$

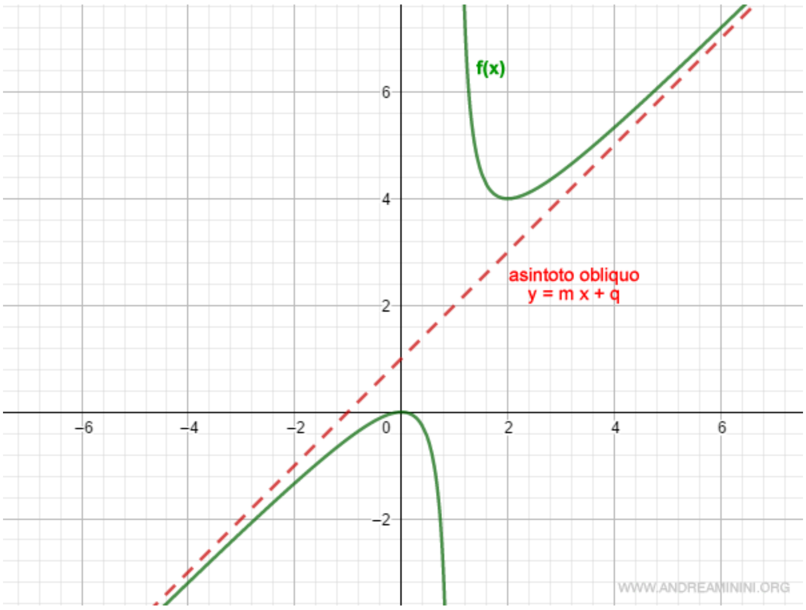
poiché m=1

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} - x$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Ho così trovato il coefficiente angolare m=1 e l'intercetta q=1 della retta asintotica obliqua.



E così via.