Serie Telescopiche

Definizione e Metodo di Risoluzione

Una serie telescopica ha la forma generale:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n) - f(n+1)]$$

Strategia di risoluzione:

1. **Identificazione**: Riconoscere se la serie può essere scritta come differenza di termini consecutivi
2. **Somma parziale**: Calcolare $S_N = \sum_{n=1}^{N}[f(n) - f(n+1)]$
3. **Telescoping**: La maggior parte dei termini si cancella, lasciando solo i primi e gli ultimi
4. **Limite**: $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n) - f(n+1)] = \lim_{N\to\infty} S_N = f(1) - \lim_{N\to\infty} f(N+1)$

Esempi Pratici

Esempio 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Decomposizione in frazioni parziali: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Somma parziale: $S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$

Limite: $\lim_{N\to\infty} S_N = 1$

Esempio 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

Fattorizzazione: $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

Frazioni parziali: $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

Risultato: $S = \frac{1}{2}$

Serie Geometriche

Forma Standard

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

dove a è il primo termine e r è la ragione.

Criteri di Convergenza

- **Converge** se e solo se $|r| < 1$
- **Somma**: $S = \frac{a}{1-r}$ quando $|r| < 1$
- **Diverge** se $|r| \geq 1$

Varianti Comuni

Serie geometrica traslata:

$$\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = ar^k \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{ar^k}{1-r}$$

Serie geometrica con segno alternato:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(-r)^n = \frac{a}{1+r} \text{ se } |r| < 1$$

Esempi Pratici

Esempio 1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

- $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$
- $|r| = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow$ converge
- $S = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$

Esempio 2: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- $a = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, $r = \frac{2}{3}$
- $S = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$

Serie Armonica Generalizzata

Definizione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

dove $p > 0$ è un parametro reale.

Criteri di Convergenza

Teorema fondamentale:

- **Converge** se e solo se $p > 1$
- **Diverge** se $p \leq 1$

Casi Particolari

1. $p = 1$: Serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → **DIVERGE**
2. $p > 1$: Serie iperarmonica → **CONVERGE**
   - Esempi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge
3. $0 < p < 1$: → **DIVERGE**
   - Esempi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$ diverge

Serie Armonica Generalizzata Modificata

Per serie del tipo $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (che inizia da $n = k$):

- I criteri di convergenza rimangono invariati
- Cambia solo il valore della somma, non la natura della serie

Applicazioni nei Criteri di Confronto

La serie armonica generalizzata è fondamentale per:

Criterio del confronto diretto: Se $0 \leq a_n \leq \frac{C}{n^p}$ con $p > 1$, allora $\sum a_n$ converge.

Criterio del confronto asintotico: Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = L > 0$, allora $\sum a_n$ e $\sum \frac{1}{n^p}$ hanno lo stesso carattere.

Strategia Generale di Risoluzione

Step 1: Identificazione del Tipo

- Cercare pattern telescopici (differenze, frazioni razionali)
- Verificare se è una progressione geometrica
- Controllare se assomiglia a una serie armonica generalizzata

Step 2: Applicazione della Tecnica Appropriata

- **Telescopiche**: Decomposizione e cancellazione
- **Geometriche**: Verifica di $|r| < 1$ e applicazione della formula
- **Armoniche**: Controllo del parametro p

Step 3: Verifica

- Controllare la validità delle condizioni di convergenza
- Verificare i calcoli delle somme parziali
- Confermare il comportamento asintotico

Errori Comuni da Evitare

- Non verificare le condizioni di convergenza prima di calcolare la somma

- Confondere l'indice di partenza nelle serie geometriche
- Applicare erroneamente i criteri per la serie armonica generalizzata