DiPIC Dipartimento di Diritto Pubblico, Internazionale e Comunitario	Istituzioni di Matematica - Diritto e Tecnologia	
	nome e cognome :	data:

1° Prova Parziale 9/10/2023 (FAKE!)

N.B. : I punteggi sono solo indicativi

1. Algebra

(a) Semplificare la seguente frazione algebrica

$$\frac{x^4+1-2x^2}{2x+1+x^2} = \frac{x^4-2x^2+1}{x^2+2x+1} = \frac{(x^2-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)^2} =$$

$\boxed{(= (x-1)^2}$ [10]

(b) Sviluppare usando la formula del Binomio di Newton

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(2a+b^2)^5 = (2a)^5 + 5(2a)^4b^2 + 10(2a)^3b^4 + 10(2a)^2b^6 + 5(2a)b^8 + b^{10}$$
$$= 32a^5 + 80a^4b^2 + 80a^3b^4 + 40a^2b^6 + 10ab^8 + b^{10}$$

$\boxed{32a^5 + 80a^4b^2 + \ldots}$ [10]

(c) Scomposizione del trinomio di secondo grado

$\Delta = 1 + 4\cdot 10\cdot 3 = 121 = 11^2$ $\quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm 11}{6} \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{array} \right.$

$$3a^2 + a - 10 = 3(a-a_1)(a-a_2) = 3\left(a-\frac{5}{3}\right)(a+2)$$

$\boxed{3(a-5/3)(a+2)}$ [10]

(d) Scomposizione con Ruffini.

$$a^4 + 5a^3 + 5a^2 - 5a - 6 =$$

$\boxed{(a-1)(a+1)(a+3)(a+2)}$ [10]

2. Teoria: saranno richiesti due tra i seguenti:

(a) Definizione di scomposizione di un polinomio
(b) Enunciato e significato del Teorema di Ruffini).
(c) Scrivere e ricavare la Formula risolutiva delle equazioni di secondo grado usand il completamento del quadrato.
(d) Teorema Fondamentale dell'algebra (enunciato e significato)
(e) [EXTRA] valido solo se si ha risposto correttamente ai precedenti Teorema di fattorizzazione in R. (Dimostrazione usando il teorema fondamentale e le proprietà del coniugio in C)

[20]

3. Disequazioni razionali.

$$\frac{-x^2+9x-14}{2x^2-5x-3} < 0$$ $\boxed{x \leqslant -1/2 \vee 2 < x < 3 \vee x > 7}$

$$\begin{cases} x^2 - 9x > 0 \\ 5x^2 - 7x + 1 > 0 \end{cases}$$ $\boxed{x < 0 \vee x > 9}$

[10]

4. Numeri complessi
Scomposizione nell'insieme dei numeri complessi: fattorizzare completamente:

$$x^3 + 1 =$$

$\boxed{(x+1)(x^2-x+1) = (x+1)\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$ [10]

Sviluppare, semplificare e scrivere parte reale e parte immaginaria:

$$\left(\frac{5}{2+i}\right)^3 = \frac{125}{2^3 + 3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3} = \frac{125}{8 + 12i - 6 - i} = \frac{125}{2+11i} = \frac{125(2-11i)}{(2+11i)(2-11i)} = \frac{125(2-11i)}{2^2 - 11^2 i^2} = \frac{125(2-11i)}{125} =$$

$\boxed{2 - 11i}$ [10]

5. Geometria Analitica

(a) Trovare l'equazione della retta che passa per $C(-1,2)$ e con coefficiente angolare uguale a quello della retta che passa per $A(2,2)$ e $B(1,-4)$. $\boxed{y=6x+8}$ **[10]**

(b) Trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per i punti $A(0,3)$ e $B(1,4)$ ed è tangente alla retta di equazione $6x+y-19=0$.
$\boxed{y=-x^2+2x+3 \text{ e } y=-49x^2+50x+3}$ **[10]**

6. Goniometria

(a) Teoria: Formule di alcuni angoli associati:
Es. : Angoli supplementari:

$$\begin{cases} \cos(\pi-\alpha) = \boxed{-\cos(\alpha)} \\ \sin(\pi-\alpha) = \boxed{\sin(\alpha)} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \sin(\alpha)=\sin(\beta) \Longrightarrow \boxed{\beta=\alpha+2k\pi \vee \pi-\alpha+2k\pi}$$ **[10]**

(b) Risolvi:

$$\cos(2x+\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{x=k\pi \vee x=-\tfrac{\pi}{4}+k\pi} \qquad \cos^2(x)+\sin^2(2x)=1 \quad \boxed{x=k\frac{\pi}{3}} \ \forall k\in\mathbb{Z}$$

[10]

7. Esponenziali.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+4=0 \quad \boxed{x=-2,0} \qquad 25^x+9\cdot 5^{2x}\leqslant 2 \quad \boxed{x\leqslant -1/2}$$ **[10]**

(7a)

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-5\left(\frac{1}{2}\right)^x+4=0$$

$$t=\left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad t^2-5t+4=0$$

$$(t-1)(t-4)=0$$

$$t=1 \vee t=4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=1 \quad \vee\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$$

$$x=0 \quad \vee\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$x=0 \vee x=-2$$

(7b)

$$5^{2x}+9\cdot 5^{2x}\leq 2$$

$$10\cdot 5^{2x}\leq 2$$

$$5^{2x}\leq\frac{1}{5}$$

$$5^{2x}\leq 5^{-1}$$

la base e' >1

$$2x\leq -1$$

$$x\leq -1/2$$

1d

$$a^4 + 5a^3 + 5a^2 - 5a - 6 = \star$$

$a = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$a = 1 \quad 1 + 5 + 5 - 5 - 6 = 0$ ✓

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\
1 & & 1 & 6 & 11 & 6 \\
\hline
 & 1 & 6 & 11 & 6 & 0 \\
-1 & & -1 & -5 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & 0 & \\
-2 & & -2 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & &
\end{array}$$

$(\star) = (a-1)(a^3 + 6a + 11a + 6)$

$a = -1 \quad -1 + 6 - 11 + 6 = 0$ ✓

$(\star) = (a-1)(a+1)(a^2 + 5a + 6)$

$a = -2$

$4 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$ ✓

$(\star) = (a-1)(a+1)(a+2)(a+3)$

(3a)

$$\frac{-x^2 + 9x - 14}{2x^2 - 5x - 3} < 0$$

$NUM = -(x^2 - 9x + 14) = -(x-7)(x-2)$

$DEN:$ $\Delta = 25 - 4\cdot(-3)\cdot 2 = 49 = 7^2$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{12}{4} = 3 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$2x^2 - 5x - 3 = 2($

$$\frac{NUM}{DEN} = \frac{-(x-7)(x-2)}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} < 0$$

moltiplico per -1

$$\Rightarrow \frac{(x-7)(x-2)}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} > 0$$

		$-\frac{1}{2}$		2		3		7	
N1	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
N2	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
D1	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
D2	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$\frac{N}{D}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x < -\frac{1}{2} \lor 2 < x < 3 \lor x > 7$

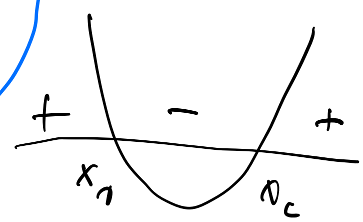
(3b)

$$\begin{cases} x^2 - 9x > 0 & ① \\ 5x^2 - 7x + 1 > 0 & ② \end{cases}$$

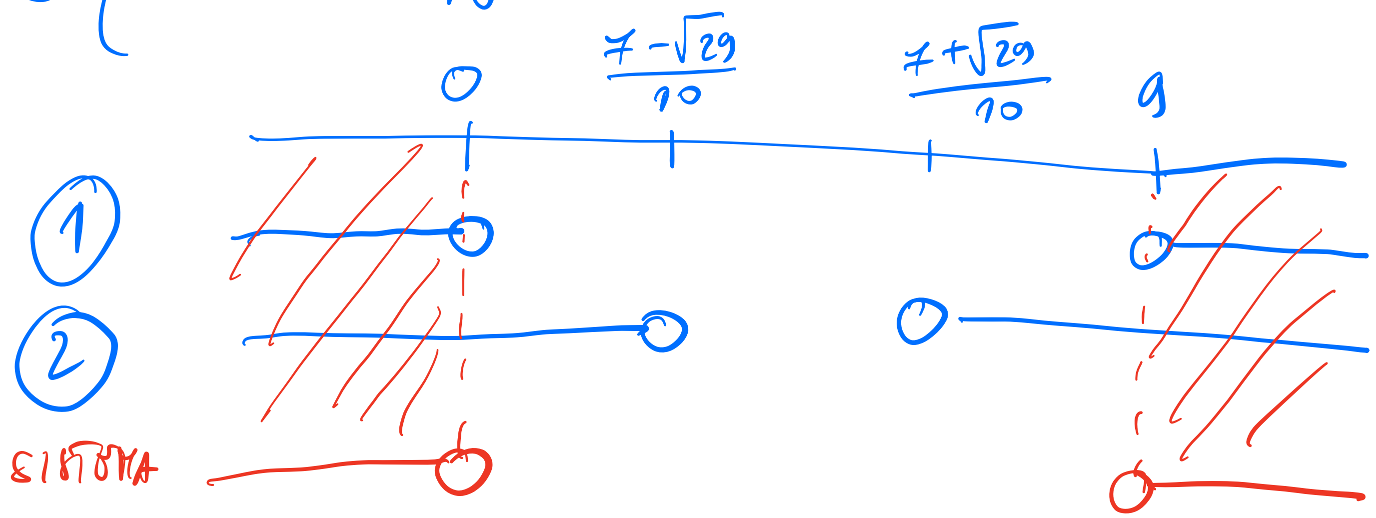
$$\begin{cases} x(x-9) > 0 \\ x < \dfrac{7-\sqrt{29}}{10} \ \vee \ x > \dfrac{7+\sqrt{29}}{10} \end{cases}$$

② : $\Delta = 49 - 4\cdot 5 \cdot 1 = 29 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$$



$$\begin{cases} ① \quad x < 0 \ \vee \ x > 9 \\ ② \quad x < \dfrac{7-\sqrt{29}}{10} \simeq \dfrac{1}{10} \ \vee \ x > \dfrac{7+\sqrt{29}}{10} \simeq \dfrac{12}{10} \end{cases}$$



$$x < 0 \ \vee \ x > 9$$

5. Geometria Analitica

(a) Trovare l'equazione della retta che passa per $C(-1,2)$ e con coefficiente angolare uguale a quello della retta che passa per $A(2,2)$ e $B(1,-4)$. $\boxed{y=6x+8}$

(5a)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-2}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6$$

Fascio di rette passanti per $C(-1,2)$

$$\mathcal{F}_C: \quad y - y_C = m(x - x_C) \quad \vee \quad x = x_C$$

(retta verticale del fascio

$$y - 2 = m(x - (-1))$$

nel nostro caso $\quad y - 2 = m_{AB}(x+1)$

$$y - 2 = 6(x+1)$$
$$y = 6x + 8$$

(5b)

(b) Trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per i punti $A(0,3)$ e $B(1,4)$ ed è tangente alla retta di equazione $6x + y - 19 = 0$.

$\boxed{y = -x^2 + 2x + 3 \ \textbf{ e } \ y = -49x^2 + 50x + 3}$

[10]

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{l} A: \\ B: \end{array}\begin{cases} 3 = c \\ 4 = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c = 3 \\ b = 4 - 3 - a = 1 - a \end{array}$$

$$y = ax^2 + (1-a)x + 3 \qquad \text{rimane un solo parametro}$$

Faccio intersezione retta $\cap$ parabola e impongo 1 soluzione cioè $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} y = ax^2 + (1-a)x + 3 \\ y = -6x + 19 \end{cases} \qquad \text{EQUAZIONE RISOLVENTE}$$

$$ax^2 + (1-a)x + 3 = -6x + 19$$
$$ax^2 + (1 - a + 6)x + 3 - 19 = 0$$
$$ax^2 + (7-a)x - 16 = 0$$

$$\Delta = (7-a)^2 - 4\cdot a\cdot(-16) =$$

$$= 49 - 14a + a^2 + 64a =$$

$$= a^2 + 50a + 49 = (a+49)(a+1)$$

$\Delta = 0$ SSE $a = -49 \lor a = -1$

PARABOLE PER A e B : $y = ax^2 + (1-a)x + 3$

$a = -49$: P_1: $y = -49x^2 + 50x + 3$

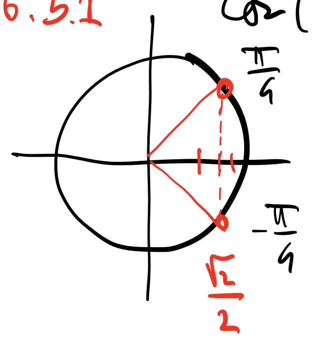
$a = -1$: P_2: $y = -x^2 + 2x + 3$

6 (b) Risolvi:

$\cos(2x + \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = k\pi \lor x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	$\cos^2(x) + \sin^2(2x) = 1$	$x = k\frac{\pi}{3}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

6.b.1

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \lor \quad 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = 2k\pi \quad \lor \quad 2x = -\pi/2 + 2k\pi$$

$$\boxed{x = k\pi \quad \lor \quad x = -\pi/4 + k\pi}$$

6.b.2

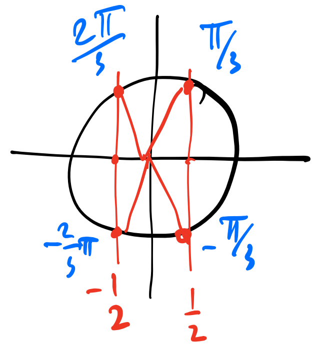
$$\cos^2(x) + \sin^2(2x) = 1$$

$$\cos^2(x) + (2\sin x \cos x)^2 = 1$$

$$\cos^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cancel{\cos^2 x} + 4\sin^2 x\cos^2 x - \cancel{\cos^2 x} - \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0$$

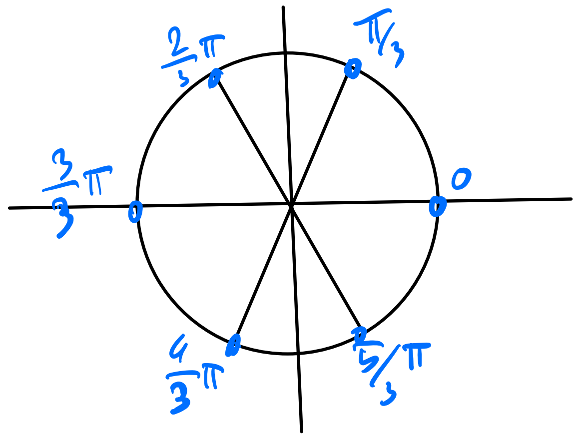


$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$



Posso riassumere la soluzione così:

$$x = k\frac{\pi}{3}$$