Foglio 12 - Relazioni di ricorrenza

1. Trovare una relazione di ricorrenza per il numero di modi di distribuire n oggetti distinti in 4 scatole. Qual è la condizione iniziale?

   Soluzione: la condizione iniziale è determinata dal numero di modi di distribuire un oggetto in 4 scatole: $a_1 = 4$. *Per trovare la relazione di ricorrenza, osserviamo che dati n oggetti distinti, possiamo distribuire i primi* $n-1$ *in* a_{n-1} *modi, mentre l'ennesimo potrà essere distribuito in* 4 *diversi modi. Dunque la relazione è* $a_n = 4a_{n-1}, a_1 = 4$.

2. Trovare una relazione di ricorrenza per l'ammontare del saldo in un conto deposito bancario dopo n anni se il tasso di interesse è del 6% e vengono aggiunti al conto 50 euro all'inizio di ogni anno.

   Soluzione: si ragiona esattamente come per l'esercizio visto a lezione il 31/05/2022, con l'unica differenza che i 50 euro vengono aggiunti all'inizio di ogni anno, dunque maturano interessi per quello stesso anno. Quindi, ponendo $a_n =$ *ammontare del saldo alla fine dell'anno n, abbiamo*

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 50 + \frac{6}{100} \times 50, \\
a_2 &= a_1 + \frac{6}{100} \times a_1 + 50 + \frac{6}{100} \times 50 = \frac{106}{100}(a_1 + 50), \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + \frac{6}{100} \times a_{n-1} + 50 + \frac{6}{100} \times 50 = \frac{106}{100}(a_{n-1} + 50).
\end{aligned}
$$

3. Trovare una relazione di ricorrenza per il numero di modi di accoppiare $2n$ persone per delle partite di tennis.

   Soluzione: la condizione iniziale è $a_1 = 1$ *(c'è un solo modo per accoppiare 2 persone). Osserviamo poi che date* $2n$ *persone, posso accoppiare la prima con una qualsiasi delle rimanenti* $2n-1$. *Rimangono allora* $2n-2 = 2(n-1)$ *persone (siamo quindi nel caso* $n-1$*) che si possono accoppiare in* a_{n-1} *modi. La relazione di ricorrenza è quindi* $a_n = (2n-1)a_{n-1}$, $a_1 = 1$.

4. Risolvere le seguenti relazioni di ricorrenza assumendo che n sia una potenza di 2 (trovare la soluzione generale).

   - $a_n = 4a_{\frac{n}{2}} + 3n$

- $a_n = a_{\frac{n}{2}} + 2n - 1$

Soluzione:

- *Questa relazione si risolve applicando direttamente la formula vista durante la lezione del 30/05/2022 (quarta riga della tabella sulle soluzioni generali delle relazioni divide-and-conquer):*

$$a_n = An^{\log_2 4} + \frac{2 \times 3}{2-4} n = An^2 - 3n.$$

- *Osserviamo che questa relazione non rientra tra i casi presenti nella tabella menzionata sopra. Facciamo dunque alcune osservazioni preliminari. Si può facilmente dimostrare per sostituzione diretta che:*
  - *Come al punto precedente, la soluzione generale della relazione di ricorrenza $a_n = a_{\frac{n}{2}} + dn$ è $a_n = An^{\log_2 1} + \frac{2d}{2-1} n$ (perché $c = 1$);*
  - *se $X(n)$ è soluzione generale di $a_n = ca_{\frac{n}{2}} + f(n)$ e $Y(n)$ è soluzione generale di $a_n = ca_{\frac{n}{2}} + f'(n)$, allora $X(n) + Y(n)$ è soluzione generale della relazione $a_n = ca_{\frac{n}{2}} + f(n) + f'(n)$. Vediamo cosa vuol dire questo applicandolo direttamente alla relazione che vogliamo risolvere.*

  Consideriamo le due relazioni $a'_n = a'_{\frac{2}{2}} + 2n$ e $a''_n = a''_{\frac{n}{2}} - 1$, le cui soluzioni generali si possono trovare utilizzando la tabella e sono rispettivamente $a'_n = A + 4n$ e $a'' = A - \log_2 n$. La soluzione generale di $a_n = a_{\frac{n}{2}} + 2n - 1$ sarà allora la somma di queste due, cioè

$$a_n = A + 4n - [\log_2 n].$$

5. Sono stati investiti 1000 euro in un conto deposito bancario che frutta l'8% di interessi alla fine di ogni anno. Trovare una formula per il saldo sul conto dopo n anni.

   Soluzione: la relazione di ricorrenza è $a_n = (1.08)a_{n-1}$, con condizione iniziale $a_1 = 1000$. La soluzione generale della relazione è $a_n = A(1.08)^n$, e imponendo la condizione iniziale si ottiene $a_n = (1.08)^n \times 1000$.

6. Risolvere le seguenti relazioni di ricorrenza:

   - $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, a_0 = a_1 = 1$
   - $a_n = a_{n-2}, a_0 = a_1 = 1$
   - $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}, a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2$
   - $a_n = 3a_{n-1} - 2, a_0 = 0$
   - $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2, a_0 = 3$

   Soluzione:

- *Sostituiamo* $a_k = x^k$, *e otteniamo*

$$x^n = 3x^{n-1} + 4x^{n-2}.$$

Dividiamo quindi per x^{n-2}, *e otteniamo*

$$x^2 = 3x + 4,$$

ovvero

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Quindi $x = (3 \pm \sqrt{9+16}) = 2$ *e gli zeri sono* $x = 4$, $x = -1$, *entrambi con molteplicità* 1. *La soluzione è* $a_n = A(-1)^n + B4^n$, *dove dobbiamo determinare le costanti* A *e* B *utilizzando le condizioni iniziali* $a_0 = a_1 = 1$. *Abbiamo quindi*

$$(a_0 =)\, 1 = A + B,$$
$$(a_1 =)\, 1 = -A + 4B.$$

Risolvendo il sistema, otteniamo $A = \frac{3}{5}$ *e* $B = \frac{2}{5}$. *Quindi la soluzione del sistema è*

$$a_n = \frac{3}{5}(-1)^n + \frac{2}{5}4^n.$$

Le rimanenti relazioni possono essere risolte in modo simile e le soluzioni sono:

- $a_n = 1$
- $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$
- $a_n = -3^n + 1$
- $a_n = 15 \times 2^n - 2n^2 - 8n - 12$