Appunti Geometria Analitica

Elementi di geometria analitica: la retta

- Distanza fra due punti. Punto medio di un segmento
- 2. Equazione della retta
- 3. Intersezione di due rette
- 4. Rette parallele e rette perpendicolari
- 5. Retta passante per un punto
- Retta passante per due punti
- 7. Distanza di un punto da una retta

Esercizi di riepilogo

Test

Scheda di autovalutazione

Esercizi proposti

Prof.ssa Chiara Muscianisi

Per affrontare questa Unità devi conoscere il sistema di riferimento cartesiano e saper risolvere le equazioni e i sistemi. Imparerai a riconoscere le equazioni della retta e della parabola, a rappresentarle nel piano cartesiano e a risolvere i problemi che riguardano la retta e la parabola.

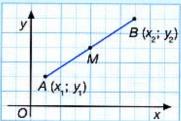
Distanza fra due punti. Punto medio di un segmento

Nel piano cartesiano consideriamo due punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$. La distanza AB, cioè la lunghezza del segmento AB, si calcola con la formula:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se si indica con *M* il punto medio del segmento *AB*, le sue coordinate sono:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
 $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$



ESERCIZI GUIDATI

Dati A (5; -1) e B (-2; 3), calcola la lunghezza del segmento AB.
Applicando la formula si ottiene

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-5)^2 + (3+1)^2} = \dots$$

Dati A (2; -3), B (4; 0) e C (-1; 2), determina le coordinate del punto medio M del segmento AB e del punto medio N del segmento BC.

$$x_M = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

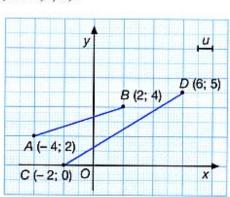
$$y_M = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_N = \dots \qquad y_N = \dots$$

Scrivi le coordinate dei punti medi M ed N dei segmenti aventi per estremi i punti A (-4; 2) e B (2; 4) e i punti C (-2; 0) e D (6; 5).

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \dots$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \dots$$



2. Equazione della retta

Quando si rappresentano nel piano cartesiano le funzioni algebriche di 1° grado, come ad esempio:

$$y = 3x$$
 $y = x + 3$ $y = 2x - 1$

il diagramma cartesiano è rappresentato da una retta.

Per questo motivo queste funzioni si dicono funzioni lineari.

Ogni equazione di 1° grado in due incognite x e y può essere scritta sotto forma di funzione lineare: basta risolverla rispetto alla variabile y.

Ad esempio:

$$3x + y - 1 = 0 \longrightarrow y = -3x + 1$$
$$x + 2y + 5 = 0 \longrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

Si può perciò concludere che ogni equazione di 1° grado in due incognite è rappresentata nel piano cartesiano da una retta.

In generale si dice che un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0$$

è l'equazione di una retta.

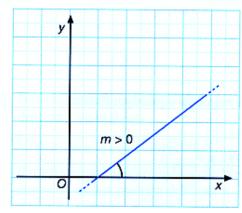
Se si risolve rispetto a y, l'equazione assume la forma:

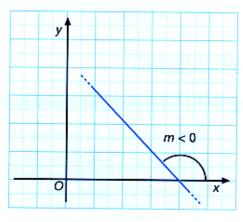
$$y = mx + n$$

che si dice equazione della retta in forma esplicita.

Il coefficiente numerico *m* prende il nome di **coefficiente angolare** della retta, perché da esso dipende la pendenza della retta:

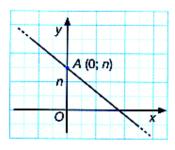
- se m > 0 la retta forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse delle ascisse;
- se m < 0 la retta forma un angolo ottuso con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.





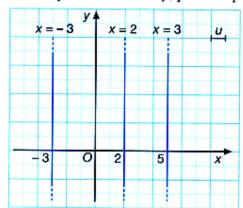
Prof.ssa Chiara Muscianisi pag 2

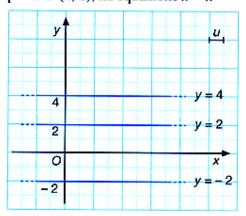
Il termine noto n dell'equazione in forma esplicita della retta prende il nome di **ordinata all'origine** e rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y.



Rette particolari

- L'asse x è costituito da tutti e soli i punti che hanno ordinata nulla. Quindi l'equazione dell'asse x è y = 0
- L'asse y è costituito da tutti e soli i punti che hanno ascissa nulla. Quindi l'equazione dell'asse y è x = 0
- Una retta parallela all'asse x, passante per il punto A(0; h), ha equazione y = h
- Una retta parallela all'asse y, passante per il punto B(k; 0), ha equazione x = k





• Una retta che passa per l'origine degli assi ha equazione ax + by = 0 oppure y = mx (forma esplicita) cioè nella sua equazione non c'è il termine noto.

ESERCIZI GUIDATI

Scrivi in forma esplicita ciascuna delle seguenti equazioni di rette.

$$x + y - 3 = 0$$
 $\longrightarrow y = -x + 3$
 $2x + 3y = 0$ $\longrightarrow 3y = -2x$ $\longrightarrow y = -\frac{2}{3}x$

$$5x + y + 1 = 0$$

$$2y - 3x + 6 = 0$$

Rappresenta nel piano cartesiano la retta di equazione 2x - y - 3 = 0.

Scrivi l'equazione in forma esplicita, ricavando y:

$$-y = -2x + 3$$

$$y = 2x - 3$$

Per ottenere le coordinate di due punti della retta si attribuiscono alla x due valori qualsiasi e si ricavano (sostituendo) i corrispondenti valori di y:

у	<u>u</u>
0	X

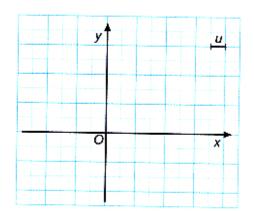
х	у	
0	-3	$\longrightarrow A(0;-3)$
1	-1	→

Individua i due punti A e B nel piano cartesiano: se li unisci ottieni la retta.

Rappresenta graficamente la retta di equazione 3x - y - 2 = 0.

La forma esplicita è:

Individua due punti della retta e disegnala:





Data la retta di equazione 2x - y + 1 = 0, indica le sue caratteristiche deducendole dall'equazione.

L'equazione in forma esplicita è:

Il termine noto indica che la retta interseca l'asse y nel punto

Scrivi l'equazione della retta che passa per l'origine degli assi e ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$. Rappresenta la retta nel piano cartesiano.

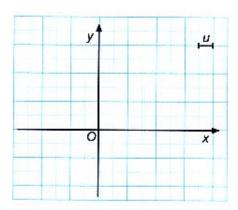
Le rette che passano per l'origine hanno equazione:

$$y = mx$$

L'equazione della retta è perciò:

Costruisci una tabella e disegna la retta:

x	у
0	0



Scrivi l'equazione della retta di coefficiente angolare $\frac{2}{3}$ che interseca l'asse y nel punto A(0; -3).

Nell'equazione generica della retta in forma esplicita y = mx + n

si ha
$$m=\frac{2}{3}$$
 ed $n=-3$

Quindi l'equazione della retta è:

7 Rappresenta nel piano cartesiano le rette di equazione x - 2 = 0 e y - 3 = 0.

Se si scrive l'equazione x - 2 = 0 nella forma:

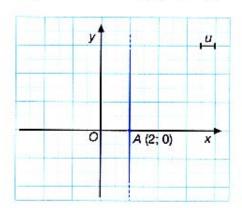
$$x = 2$$

si tratta della parallela all'asse y che passa per A(2; 0).

Se si scrive l'altra equazione nella forma:

$$y = 3$$

si tratta della



Stabilisci se il punto P(2; 3) appartiene alla retta di equazione 2x - 3y + 5 = 0.

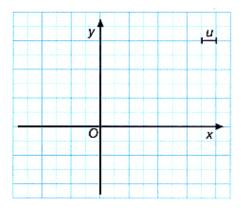
Sostituendo alla x e alla y le coordinate di P si ottiene:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 5 = 0 \longrightarrow 4 - 9 + 5 = 0 \longrightarrow 0 = 0$$

ESEGUI I SEGUENTI ESERCIZI

Rappresenta nel piano cartesiano le rette di equazioni y = x + 2 e y = -x + 4.

х	у	х	у



Verifica se i punti A(1; -5) e B(2; 4) appartengono alla retta di equazione y = 2x - 7.

3 Accanto a ciascuna equazione di retta scrivi il suo coefficiente angolare e il punto in cui la retta interseca l'asse y.

$$y = \frac{1}{3}x + 5$$

$$y = -2x - 1 \qquad \dots$$

$$y = -\frac{5}{7}x + \frac{3}{4}$$

Scrivi l'equazione della retta che ha coefficiente angolare $\frac{2}{3}$ e interseca l'asse y nel punto P(0; -2).

.....

5 Accanto a ciascuna equazione scrivi quale retta particolare rappresenta.

$$x + 1 = 0$$

3. Intersezione di due rette

Le coordinate del punto intersezione di due rette si trovano risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette.

Se il sistema risulta impossibile significa che le rette non si incontrano, cioè sono parallele.

ESERCIZI GUIDATI

1 Trova il punto di intersezione delle rette di equazione 3x - y - 1 = 0 e 2x + y - 4 = 0. Si risolve il sistema formato dalle due equazioni:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad \text{con il metodo di riduzione} \quad \begin{cases} 3x - y = 1 \\ \frac{2x + y = 4}{5x \text{ } // = 5} \end{cases} \longrightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Il punto intersezione è

Trova il punto di intersezione delle rette di equazione 3x - y + 1 = 0 e y = 2x - 3. Risolvi il sistema:

Il punto intersezione è

Trova le intersezioni con l'asse x e l'asse y della retta di equazione y = 3x - 1.

L'asse x ha equazione y = 0; si risolve perciò il sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

Trova le intersezioni con l'asse y:



4. Rette parallele e rette perpendicolari

Date le rette di equazioni:

$$y = mx + n$$
$$y = m'x + n'$$

a) se i loro coefficienti angolari m e m' sono uguali le due rette sono fra loro parallele:

condizione di parallelismo $\longrightarrow m = m'$

b) se il coefficiente angolare di una retta è l'inverso cambiato di segno del coefficiente angolare dell'altra retta, le due rette sono fra loro **perpendicolari**:

condizione di perpendicolarità $\longrightarrow m' = -\frac{1}{m}$ (cioè $m \cdot m' = -1$)

ESEMPI

- Le rette di equazioni y = 3x 7 e y = 3x + 15sono fra loro parallele, perché hanno entrambe coefficiente angolare uguale a 3.
- 2 Le rette di equazioni $y = \frac{1}{2}x 1$ e y = -2x + 5

sono fra loro perpendicolari, perché il coefficiente angolare della prima $\left(\frac{1}{2}\right)$ è l'inverso cambiato di segno del coefficiente angolare della seconda (-2); infatti:

$$m \cdot m' = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

Data la retta r di equazione y = -3x + 1 scrivi l'equazione della retta t parallela a r che intereseca l'asse y nel punto A(0; 5).

L'equazione della retta $t \ge y = mx + n$.

Il coefficiente angolare m deve essere uguale a quello di r (condizione di parallelismo) e quindi è -3.

L'ordinata all'origine di $t \in n = 5$.

L'equazione di t è quindi y = -3x + 5.

ESERCIZI GUIDAT

LJ	EKCIZI GOIDATI
1	Verifica se le rette di equazione $x + y - 1 = 0$ e $2x + 2y + 5 = 0$ sono parallele.
	Determina i coefficienti angolari, scrivendo le due equazioni in forma esplicita:
	$x+y-1=0 \longrightarrow y=-x+1$ $m=-1$
	$2x + 2y + 5 = 0 \longrightarrow$
	Le rette sono parallele perché
2	Verifica se le rette di equazione $3x - y - 1 = 0$ e $\frac{1}{3}x + y - 2 = 0$ sono perpendicolari.
	Determina i coefficienti angolari, scrivendo le due equazioni in forma esplicita:
	La condizione di perpendicolarità $m \cdot m' = -1$ è verificata: infatti
3	Scrivi l'equazione di tre rette parallele alla retta r di equazione $2x - 7y + 1 = 0$.
	Determina il coefficiente angolare della retta, scrivendola in forma esplicita:
	$2x - 7y + 1 = 0 \longrightarrow$
	Le tre rette parallele devono avere lo stesso coefficiente angolare di r ; scrivi le loro equazioni:
4	Scrivi l'equazione di tre rette perpendicolari alla retta $2x - 3y - 1 = 0$.
	Determina il coefficiente angolare della retta:
	Le tre rette person disabel de la
	Le tre rette perpendicolari devono avere il coefficiente angolare che è l'inverso,
	cambiato di segno, di quello della retta, cioè

Scrivi le equazioni delle tre rette:

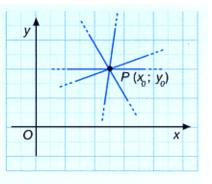
5. Retta passante per un punto

Se $P(x_0; y_0)$ è un punto del piano, esistono infinite rette passanti per P, che costituiscono il fascio di rette di centro P.

L'equazione della retta generica passante per il punto $P(x_0; y_0)$ è:

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

Conoscendo il valore del coefficiente angolare m, si può scrivere l'equazione di ciascuna delle rette del fascio di centro P.



ESERCIZI GUIDATI

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P (2; 3), cioè del fascio di rette di centro P.

Poiché $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$, sostituendo nella formula, si ottiene

.....

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P (-1; 2) e avente coefficiente angolare m = -3.

$$y - y_0 = m (x - x_0) \longrightarrow y - 2 = -3 (x + 1)$$

.....

.....

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto A(3; -1) e parallela alla retta di equazione y = 2x - 5.

Dovendo essere parallela, avrà lo stesso coefficiente angolare, cioè m=2

$$y - y_0 = m (x - x_0) \longrightarrow$$

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P(3; 5) e perpendicolare alla retta di equazione x - 3y + 2 = 0.

Determina il coefficiente angolare della retta:

.....

Il coefficiente angolare della perpendicolare deve essere l'inverso cambiato di segno: quindi è

$$y - y_0 = m (x - x_0) \longrightarrow \dots$$

6. Retta passante per due punti

Siano $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ due punti del piano.

L'equazione della retta passante per A e B si ottiene con la formula:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ESERCIZI GUIDATI

Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A (3; 2) e B (0; 1).

Sostituendo nella formula le coordinate di A (3; 2) e B (0; 1) si ottiene: $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{matrix}$

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y-2}{1-2}$$

Eseguendo i calcoli si ottiene l'equazione della retta:

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{-1} \longrightarrow$$

2 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A (0; 3) e B (1; 2).

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \longrightarrow \dots$$

3 Determina il coefficiente angolare della retta passante per i punti A (3; -1) e B(-2;1).

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \longrightarrow \dots$$

L'equazione della retta in forma esplicita è:

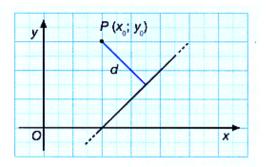
Il coefficiente angolare è $m = \dots$

7. Distanza di un punto da una retta

Dati un punto $P(x_0; y_0)$ e una retta di equazione ax + by + c = 0, la distanza del punto P dalla retta si calcola con la formula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

in cui il valore assoluto al numeratore è necessario, in quanto la distanza deve essere ovviamente positiva.



ESERCIZI GUIDATI

Calcola la distanza del punto P(2; 5) dalla retta di equazione 2x - 3y + 1 = 0.

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

$$d = \frac{|4 - 15 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \dots$$

Calcola la distanza del punto P(3; 4) dalla retta di equazione x - 2y + 5 = 0.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$x_0 = 3$$

$$y_0 = 4$$

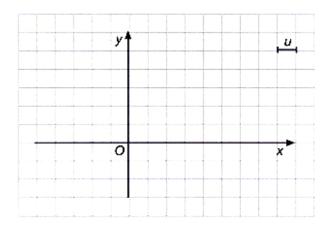
Calcola la distanza del punto A(2; -3) dalla retta di equazione 3x - y + 5 = 0.

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \\ x_0 = \dots \\ y_0 = \dots \end{cases} \qquad d = \dots$$

Esercizi di riepilogo

1 Calcola l'area del triangolo di vertici A (−2; 5), B (1; −1) e C (5; 1).

Disegna il triangolo ABC e considera come base il lato BC; disegna l'altezza relativa e chiamala AH.



Calcola la misura della base BC:

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \dots$$

Per calcolare la misura dell'altezza AH puoi applicare la formula della distanza punto-retta; è necessario però avere l'equazione della retta passante per $B \in C$:

	•	•	•	
retta RC>				
rema kr				

applica la formula del paragrafo 6

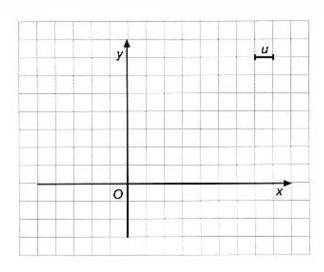
$$\overline{AH} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dots$$

Area =
$$\frac{b \cdot h}{2}$$
 =

Dati i punti A(-3; 4) e B(5; 2), scrivi l'equazione dell'asse del segmento AB.

Rappresenta il segmento AB: il suo asse è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio.

Determina le coordinate del punto medio M di AB:



	-
vedi	
Charles and Con-	
parag	rato 1

applica la formula del paragrafo 6

applica la formula del paragrafo 5

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P(-3; -1) e parallela alla retta di equazione 2x - y - 1 = 0.

Scrivi l'equazione della retta in forma esplicita e ricava il suo coefficiente angolare:

Scrivi l'equazione della retta generica passante per *P*:

applica la formula del paragrafo 5

Il coefficiente angolare m della retta parallela deve essere uguale al coefficiente angolare ricavato precedentemente; sostituendolo ottieni

Rappresenta nel piano cartesiano i punti A (4; 0) e B (0; 3). a) Scrivi l'equazione della retta r che passa per A e B; b) rappresenta la retta r nel piano cartesiano e calcola l'area del triangolo rettangolo AOB; c) scrivi l'equazione della retta perpendicolare a r che passa per B. 0

Esercizi proposti

- Dati i punti A(-3; 1), B(7; -4) e C(3; 7), calcola il perimetro del triangolo ABC.
- Dato il quadrilatero di vertici A (-3; -2), B (5; 2), C (7; 7) e D (-1; 3) verifica che i lati BC e AD sono congruenti.
- Verifica che è rettangolo il triangolo di vertici A(1; -2), B(2; -5) e $C(5; -\frac{2}{3})$.
- Dato il triangolo PQR di vertici P (-5; -10), Q (-13; 14) ed R (3; 2), indica con M ed N i punti medi dei lati PQ e QR e calcola la lunghezza del segmento MN.
 [2√13]
- Dato il segmento AB di estremi A (-5; 2) e B (6; -1), calcola la sua lunghezza e le coordinate del punto medio. $\left[\sqrt{130}: \left(\frac{1}{2}: \frac{1}{2}\right)\right]$

Equazione della retta

6 Rappresenta graficamente le rette di equazione:

$$2x - y + 3 = 0$$
 $4x - y = 0$ $y - 3x + 1 = 0$

7 Determina il punto intersezione delle rette di equazione:

$$y = x - 3$$
 e $x + y - 9 = 0$ [6:3]

8 Determina il punto intersezione delle rette di equazione:

$$2x - 5y - 7 = 0$$
 e $x - 3y - 1 = 0$ [16; 5]

Verifica che le seguenti coppie di rette sono parallele.

9
$$3x - 4y = 0$$
 e $4y - 3x - 4 = 0$

10
$$2x + 3y + 3 = 0$$
 e $3y + 2x = 0$

- Scrivi le equazioni di tre rette parallele alla retta $y \frac{1}{3}x + 1 = 0$.
- Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto P(-2; 1) ed è parallela alla retta 2x 3y 6 = 0. [2x 3y + 7 = 0]
- Scrivi l'equazione del fascio di rette di centro P(-3; 2). [y-2=m(x+3)]
- Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P(1; -2) e parallela alla retta x + 2y 5 = 0. [x + 2y + 3 = 0]

- Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P (0; 3) e perpendicolare alla ret- $\tan 3x + 2y - 6 = 0$. $y = \frac{2}{3}x + 3$
- 16 Scrivi l'equazione della retta passante per il punto A (2; 3) e perpendicolare alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 2$. [2x - y - 1 = 0]
- 17 Verifica se sono perpendicolari le rette di equazione

$$y = 2x + 1$$

$$y = 2x + 1$$
 e $\frac{1}{2}x - y - 2 = 0$

- 18 Scrivi l'equazione dell'asse del segmento i cui estremi sono A (1; 2) e B (5; 6). [x + y - 7 = 0]
- 19 Scrivi l'equazione della retta perpendicolare alla retta y = 3x, che passa per il punto intersezione delle rette

$$2x - y = 3$$

$$e x - 2y = 3$$

$$[x + 3y + 2 = 0]$$

Scrivi l'equazione della retta che passa per ciascuna delle seguenti coppie di punti.

$$B(-1;7)$$

$$[x+y-6=0]$$

21
$$H\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)$$
 $K\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

$$[6x - 42y + 17 = 0]$$

I punti A(-1; 2), B(2; -3) e C(1; 4) sono vertici del parallelogramma ABCD: indica le coordinate del quarto vertice D. [D(-2;9)]

Calcola la distanza del punto P dalla retta indicata.

$$x - y + 3 = 0$$

$$x - y - 4 = 0$$

$$\left[\frac{5}{2}\sqrt{2}\right]$$

Calcola la distanza dall'origine di ciascuna delle seguenti rette.

$$y = -2x + 5$$

$$2x - y - 3 = 0$$

$$\left[\frac{3}{5}\sqrt{5}\right]$$

Calcola l'area del triangolo ABC, date le coordinate dei tre vertici.

$$C(6; -2)$$

$$\left[\frac{9}{2}\right]$$