NUM. COMPLESSI

$z = a + ib$ → CONIUGATO

$\bar{z} = a - ib$

$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

MODULO

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Si calcoli la forma algebrica del coniugato $\bar{z}$ di z, del modulo $|z|$ di z e di $\frac{1}{z}$ (dove $\frac{1}{z}$ è l'inversa di z rispetto alla moltiplicazione) nei seguenti casi:

(a) $z = 4 + 6i$

(b) $z = \frac{7+3i}{5i}$

$z = 4 + 6i \rightarrow \bar{z} = a - ib \rightarrow 4 - 6i$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\frac{1}{z} = \frac{4-6i}{4^2+6^2} \quad \dots = \frac{1}{13} - \frac{3}{20}i$

2. Si scrivano i seguenti numeri complessi in forma trigonometrica:

(a) $w = 4\sqrt{3} + 4i$

$z = r \cdot \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$

① r = MODULO

② CALCOLARE θ (THETA)

③ SCRIVERE

① $r = |w| = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2}$

$= \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$

② $\theta = \arg(r) = \arctan\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$z \Rightarrow 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right. + i\sin\left.\frac{\pi}{6}\right)$

4. Si calcolino le n radici n-esime complesse del numero complesso u nei seguenti casi:

(a) $u = w$ e $n = 3$

$u_k = \sqrt[n]{M}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$

k varia da 0 a $n-1$,

M modulo di u

θ è l'argomento

↑ APPLICA QUESTA FORMULA

MATRICI → VETTORI

V_RIGA = [. . . . . . .]

V_COLONNA = $\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$

SCALARI → NUM. "SEMPLICI" → S.N

PRODOTTI / SOMME

$a \cdot b$ $\quad a+b$

MATRICI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

DIMENSIONE → $m \times n$

TIPI → MATR. QUADRATA (= RIGHE = COLONNE)

MATR. IDENTITÀ → $A \cdot A^{-1} = I$

(CALCOLO INVERSA) → A^{-1}

$A\ (3 \times 3)$ $\quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

TRIANGOLARI < SUPERIORI / INFERIORI

SUP. → $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

INF. → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

SCALINI → $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

PIVOT → a^{ij}

TRASPOSTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

OPER. TRA MATRICI

$$A+B=\begin{pmatrix}-1&8&4\\3&-2&6\\9&-5&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&-2&3\\2&1&1\\-5&2&3\end{pmatrix}=$$

A + B → (STESSO NUM. DI COLONNE)

$$=\begin{pmatrix}-1+10&8+(-2)&4+3\\3+2&-2+1&6+1\\9+(-5)&-5+2&-3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6&7\\5&-1&7\\4&-3&0\end{pmatrix}$$

PRODOTTO → MATRICE 1 CON STESSE RIGHE DELLA PRIMA E COLONNE

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&-1\end{pmatrix}}_{(2,3)}\quad B=\underbrace{\begin{pmatrix}4&1\\-2&2\\0&3\end{pmatrix}}_{(3,2)}$$

$R_1(A) = (1\ 0\ 2)$ $\quad C_1(B) = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$

$1 \cdot 4 + 0 \cdot -2 + 2 \cdot 0 = 4$

Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{C}$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&i&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}i&i+1&i+2\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\\-4&0\end{pmatrix}.$$

Per ogni copia $X,Y\in\{A,B,C,D,E\}$, dire se ha senso la matrice XY e, se sì, calcolarla.

AB → A → 2 RIGHE 3 COLONNE

B → 1 COLONNA 3 RIGHE

NO (n. col (A) ≠ n. righe (B))

AC → A → 2 RIGHE 3 COLONNE

C → 2 RIGHE 2 COLONNE

NO (n col (A) ≠ n col. (B))

AE → SI! :)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&i&7\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\\-4&0\end{pmatrix}$$

AE = (1 0 3 2 1 7) · (1 2 0 4 -4 0)

= (1 · 1 + 0 · 0 + 3 · -4 1 · 2 + 0 · 4 + 3 · (0)

= (1 - 12 0 4 - 13 - 0)

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ & \end{pmatrix}}_{AB}$$

ELIMINAZ. DI GAUSS

(3) → (1) SOMMO A I-ESIMA DI A LA J-ESIMA RIGA DI A * UNO SCALARE

$R_1 \to R_1 + 2R_3$

(2) MOLTIPLICO RIGA PER UN $C \neq 0$

$R_2 \to 2R_2$

(3) SCAMBIO DI RIGHE

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

→ TROVA LA F. RIDOTTA DI GAUSS (MATRICE A SCALINI)

$$\xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \dots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

rk(A)

→ INS. COLONNE L.I. → 2

ROUCHÉ-CAPELLI

$Ax=b$

Si determini se i seguenti sistemi lineari possiedono soluzione. Nei casi positivi si risolvano i sistemi lineari su $\mathbb{C}$:

(a) $\begin{cases} 2x-5y+8z &= 0 \\ -2x-7y+z &= 0 \\ 4x+2y+7z &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 5x-5y &= 0 \\ -3x+4y+2z &= 1 \\ 7x-5y+4z &= 4 \\ 6x-8y-4z &= -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+2y+2z &= -3 \\ 2x+y+z &= -4 \\ x-y+iz &= i \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -2 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right] \rightarrow [A|b]$$

Mez $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$ $\rightarrow$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \end{array}\right]$$

$\ldots\ldots \rightarrow$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -63 & 0 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ SOST. ALL' INDIETRO

$-63z = 0 \rightarrow z$ LA SOST. IN x e y

$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

ROUCHÉ - CAPELLI

$\rightarrow$ n. righe(A) $=$ col. det.(A) $\rightarrow$ 1 sola sol.

$\rightarrow$ n. eq. $>$ n. incognite e det $\neq 0 \Rightarrow$ no sol.

$\rightarrow$ n. eq. $<$ n. incognite $\rightarrow$ INF. SOL.

Esercizio 1.24. Si discuta e si risolva il seguente sistema lineare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2ax_3 + ax_4 = 1 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - ax_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

1)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2a & a & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 1 & -1 & -a & 4 & 2 \end{array}\right)$$

METODO DI GAUSS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & -a & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-2 & 0 \end{array}\right)$$

MATRICE A SCALINI

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)x_4 = -1 \\ -ax_3 + (a+2)x_4 = 1 \\ (-2a-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

→ SCRIVO IN FORMA DI EQ.

MI TROVO UNA X E SOST. ALL'UNDIETRO

$a \neq 0$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a-1}{a} \\ x_2 = -\frac{1}{a} \\ x_3 = -\frac{1}{a} \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

$a = -1$

N. EQ. > N. INCOG.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

⋮

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 6x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 \text{ qualunque} \end{cases}$$

Si determini se le seguenti matrici sono invertibili. In caso positivo si calcoli l'inversa.

(a)[1]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Det(A) → $2 \times 2 \to \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = a \cdot d + b \cdot c$

$3 \times 3 \to a_{11} a_{21} a_{33} + \dots$

LAPLACE → $(-1)^{i+3} \cdot (\dots)$
A_{12}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2 \leftarrow R_2 + R_3,\ R_1 \leftarrow R_1 - R_3$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

[MEG] ...

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{\cancel{A}\cdot A^{-1}}{\cancel{A}} = \frac{I}{A} \to A = I \cdot A^{-1}$$

INVERTIBILE $\to$ $Det(A) \neq 0$
(O NON SINGOLARE)

$(a+3i)\cdot(a-i) + a(a+3i)$

$\boxed{11}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & \alpha \\ \alpha+3i & \alpha-i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

NON SING. $\to Det(A) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$(a+3i)(a-i) - a(a+3i) =$$
$$= -i(a+3i) \neq 0$$

$a = -3i \to 0$

$a \neq -3i \to$ LA MATRICE È INVERTIBILE

SP. VETTORIALI

$\forall u, v, w \in V$ (VETTORI)

$\forall \alpha, \beta \in K$ (SCALARI)

$\to$ "Qualcosa" è sp. vett.?

$\boxed{1}$ $\emptyset \in$ Qualcosa

$\boxed{2}$ $u_1 + u_2 \in$ Qualcosa

$\boxed{3}$ $\alpha u \in$ Qualcosa

α SCALARE

2.[1] Si dica se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono dei sottospazi vettoriali:

(a) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1 - 3x_2 = 0 \right\}$

① CHIUSURA RISPETTO ALLA SOMMA

(x_1, x_2) e $(y_1, y_2) \in S_1$

$(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$2(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) = 0$

$2x_1 + 2y_1 - 3x_2 - 3y_2 = 0$

$0 = 0$

② CH. PRODOTTO PER UNO SC. α

$\alpha \cdot (x_1, x_2) = 0$

$2(\alpha \cdot x_1) - 3(\alpha x_2) = 0$

$\alpha(2x_1 - 3x_2) = 0$

$\rightarrow \boxed{\alpha \cdot 0 = 0}$

③ CH. VETTORE NULLO

$2x_1 - 3x_2 = 0$

$2(0) - 3(0) = 0$

$0 = 0$

COMB. LINEARE

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \rightarrow$ SCALARI

$v_1, v_2 \ldots \rightarrow$ VETTORI

$$\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_n v_n}_{\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}_i}$$

LO SPAZIO VETTORIALE GENERATO DA V è $Span(V_1 \ldots V_n)$

$\rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 \ldots a_n v_n = 0$

$a_1 = a_2 \dots = 0$

→ LIN. INDIPENDENTI

→ $a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots a_n v_n = 0$
LIN. DIPENDENTI → PIÙ VALORI
CHE
DANNO $\emptyset$

SISTEMA DI GENERATORI

$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = w$
SSE È UN INSIEME DI GENERATORI

ES. $\{(0,2), (1,0), (1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$(w_1, w_2) = a_1(0,2) + a_2(1,0) + a_3(1,1)$

$\forall$

$w_1 = 27 \quad , w_2 = 4$

$a_1 = 2 \quad , a_2 = 27, \ a_3 = 0$

$2 \cdot (0,2) + 27(1,0) + 0 \cdot (1,1) =$
$(0,4) + 27(0) + (0,0) = (27,4)$

BASE

SP. VETTORIALE → INS. DI VETT.
INS. DI SC.

① $\{v_1, v_2 \dots v_n)$ → SIST. DI GENERATORI
$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = w$

② $v_1, v_2 \dots v_n$
LIN. INDIP.

① $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots a_n v_n$

② $b_1 v_1 + b_2 v_2 \dots b_n v_n = 0$

2.[1] Si dica se è possibile estrarre dal sottoinsieme $\mathcal{C}$ delle basi di V nei seguenti casi:

(a)[1] Lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 2 con sottoinsieme $\mathcal{C} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ dove

$$p_1(x) = x^2 + x(1-x) + (1-x)^2$$
$$p_2(x) = x^2 + (1-x)^2$$
$$p_3(x) = x^2 + 1 + (1-x)^2$$
$$p_4(x) = x(1-x).$$

(a) $\rightarrow a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 + d \cdot p_4 = 0$

$a(x^2 + x(1-x) + (1-x)^2) + b(x^2 + (1-x)^2) \ldots$

$\ldots = 0$

$(3a + 2c - d)x^2 + (-2a + b + 2c + d)x + (a + 2b + 2c) \cdot 1 = 0$

$$\begin{cases} 3a + 2c - d = 0 \\ -2a + b + 2c + d = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 4 \end{bmatrix}$$

BASE

Si studi la dipendenza o l'indipendenza lineare dei vettori seguenti, e si determini in ogni caso una base del sottospazio da essi generato.

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

GAUSS PER SCALINI

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$rk(A) = 3 \quad B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\7\\1\end{bmatrix} \right\}$

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \rightarrow rk(A) = 2$$

$B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$

CI SONO PIÙ COMBIN. DI ~~VETTORI~~ A $\emptyset$

$\rightarrow$ LIN. DIP.