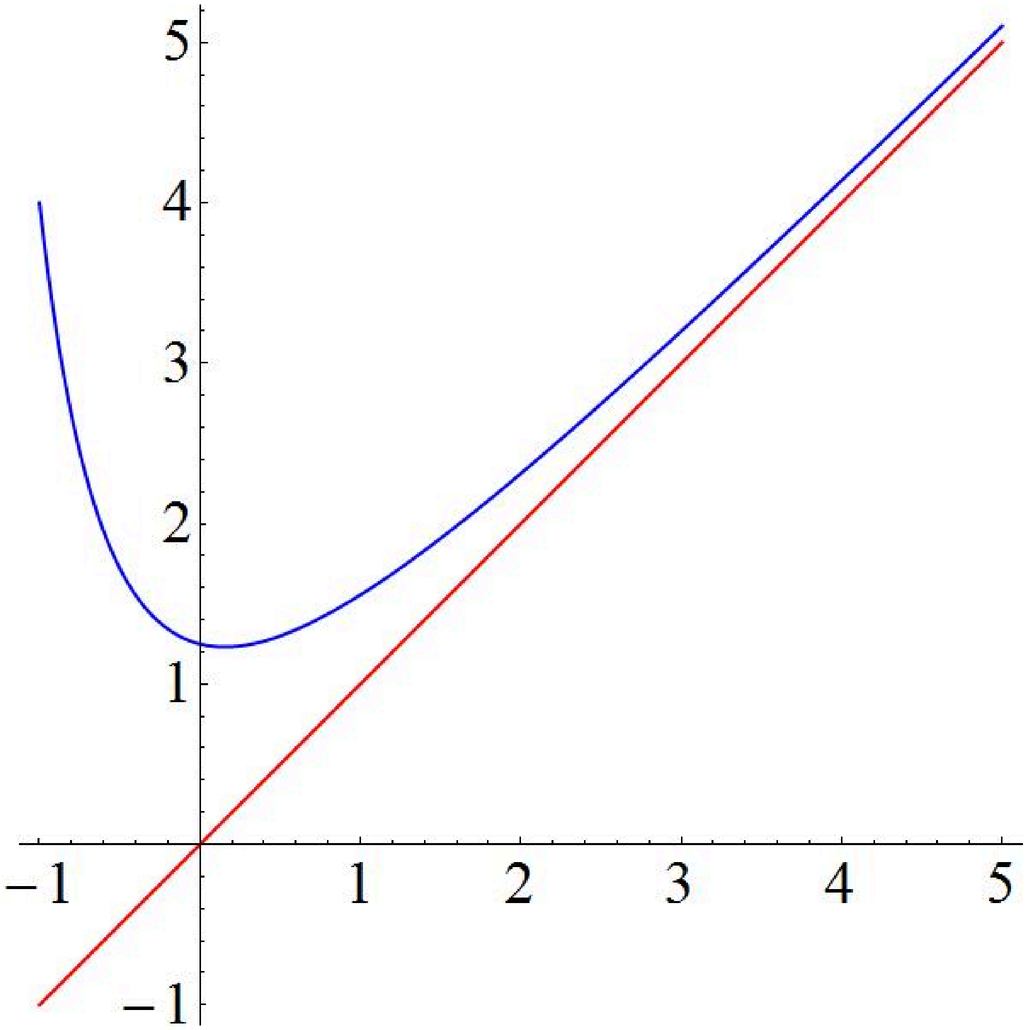
Asintoto obliquo

3'

Una **funzione** $f(x)$ che ha un **dominio** **non limitato** e che tende a infinito per $x \to \infty$, può avere asintoti obliqui.

Un **asintoto obliquo** è una retta obliqua (cioè, non orizzontale né verticale) a cui il grafico della funzione si avvicina sempre di più quando $x \to \infty$, come ad esempio nella figura sottostante:



- se la funzione ha un insieme di definizione limitato non ha asintoti obliqui perchè $f(x)$ non è definita per $x \to \infty$;
- se $f(x)$ è periodica (come il seno o il coseno) non ha asintoti obliqui;
- se $f(x)$ ha asintoti orizzontali non ha asintoti obliqui;
- se risulta $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ non è comunque detto che la funzione abbia un asintoto obliquo, perchè non è detto che il suo grafico si avvicini sempre di più a una retta.

Come si fa quindi a riconoscere **quando esiste un asintoto obliquo** e a **calcolarne l'equazione**? Abbiamo bisogno di qualche definizione più precisa.

Una retta di equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$ è un asintoto obliquo per il grafico della funzione $f(x)$ se

$$\boxed{\lim_{x\longrightarrow\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0}$$

ossia se la differenza tra il valore di $f(x)$ e la corrispondente ordinata sulla retta $y = mx + q$ si annulla al tendere di x verso l'infinito: questo significa che, nel piano cartesiano, il grafico della funzione f e la retta rappresentata dall'equazione $y = mx + q$ si avvicinano sempre più al tendere di x all'infinito.

Supponiamo adesso che la funzione $f(x)$ che stiamo studiando ammetta un asintoto obliquo e vediamo come calcolarne il coefficiente angolare m e l'intercetta q.

Osserviamo che se $\lim_{x\longrightarrow\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0$, allora vale anche (per l'algebra dei limiti):

E dato che $\lim_{x \to \infty} m = m$ e $\lim_{x \to \infty} \frac{q}{x} = 0$, deve valere anche

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Quindi l'esistenza del limite finito $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ ci permette di calcolare il **coefficiente angolare** m dell'asintoto.

Per trovare l'**intercetta** q riprendiamo il limite iniziale e vediamo che:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = q$$

Quindi **se la funzione** $f(x)$ **ha un asintoto obliquo**, i coefficienti m e q si trovano calcolando i due limiti:

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx}$$

Viceversa se vogliamo **verificare che** $f(x)$ **ha un asintoto obliquo**, dobbiamo fare diversi controlli:

1. Prima di tutto deve valere

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

.

2. Quindi dobbiamo calcolare $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. **Se questo limite esiste finito e non nullo** allora abbiamo il coefficente angolare del possibile asintoto:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

limite esiste finito, allora l'asintoto esiste ed è dato dalla retta $y = mx + q$ con

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$$

.

Se quanto abbiamo detto vale solo per $x \to -\infty$ si parla di asintoto obliquo sinistro, se invece vale solo per $x \to +\infty$ si parla di asintoto obliquo destro.

VAI ALLA PROSSIMA LEZIONE 5

Testo su Studio di funzione

Relatori

Francesca Gatti

Lezioni correlate

Lo studio del segno di una funzione: spiegazione ed esempi

Asintoto verticale, orizzontale ed obliquo: calcolo ed esercizi

Studio di funzione

Dominio di una funzione

Segno della derivata prima e monotonia di una funzione