Gruppo 1: Derivazione con Regole Combinate

Esercizio 1.1

Calcola la derivata di $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^4$

Soluzione: Utilizzando la regola della catena:
$f'(x) = 4(3x^2 - 2x + 5)^3 \cdot (6x - 2) = 4(3x^2 - 2x + 5)^3 \cdot (6x - 2)$

Esercizio 1.2

Calcola la derivata di $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Soluzione: Utilizzando la regola del quoziente: $f'(x) = \frac{e^x \cdot (1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Esercizio 1.3

Calcola la derivata di $f(x) = x^2 \ln(x^3)$

Soluzione: Utilizzando la regola del prodotto e le proprietà dei logaritmi: $\ln(x^3) = 3\ln(x)$
$f'(x) = 2x \cdot 3\ln(x) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = 6x\ln(x) + 3x = 3x(2\ln(x) + 1)$

Esercizio 1.4

Calcola la derivata di $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

Soluzione: Utilizzando la regola del prodotto:
$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin^2(x) \cdot (-\sin(x))$ $f'(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$
$f'(x) = \sin(x)(2\cos^2(x) - \sin^2(x))$ $f'(x) = \sin(x)(2\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)))$
$f'(x) = \sin(x)(2\cos^2(x) - 1 + \cos^2(x))$ $f'(x) = \sin(x)(3\cos^2(x) - 1)$

Gruppo 2: Derivate e Tangenti

Esercizio 2.1

Trova l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ nel punto di ascissa $x = 3$.

Soluzione: Innanzitutto, troviamo $f(3)$: $f(3) = \frac{3^2-4}{3-2} = \frac{9-4}{1} = 5$

Ora calcoliamo $f'(x)$ usando la regola del quoziente: $f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2-4)}{(x-2)^2}$
$f'(x) = \frac{2x^2-4x-x^2+4}{(x-2)^2}$ $f'(x) = \frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}$ $f'(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} = 1$ per $x \neq 2$

Quindi $f'(3) = 1$

L'equazione della retta tangente è: $y - 5 = 1 \cdot (x - 3)$ $y = x + 2$

Esercizio 2.2

Trova i punti del grafico di $f(x) = x^3 - 3x + 2$ in cui la tangente è parallela all'asse x.

Soluzione: La tangente è parallela all'asse x quando $f'(x) = 0$. $f'(x) = 3x^2 - 3$ $3x^2 - 3 = 0$ $3x^2 = 3$ $x^2 = 1$ $x = \pm 1$

I punti sono $(1, f(1)) = (1, 0)$ e $(-1, f(-1)) = (-1, 4)$

Esercizio 2.3

Trova i punti del grafico di $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ in cui la tangente ha coefficiente angolare uguale a 3.

Soluzione: Dobbiamo trovare i valori di x per cui $f'(x) = 3$. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $3x^2 - 12x + 9 = 3$ $3x^2 - 12x + 6 = 0$ $x^2 - 4x + 2 = 0$

Usando la formula quadratica: $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

I punti sono:

- $(2 + \sqrt{2}, f(2 + \sqrt{2}))$
- $(2 - \sqrt{2}, f(2 - \sqrt{2}))$

Gruppo 3: Derivabilità e Punti Critici

Esercizio 3.1

Studia la derivabilità della funzione: $f(x) = \{x^2 - 1 \quad \text{se } x \leq 2 \; ax + b \quad \text{se } x > 2$

Determina i valori di a e b affinché la funzione sia derivabile in $x = 2$.

Soluzione: Per essere derivabile in $x = 2$, la funzione deve essere:

1. Continua in $x = 2$
2. Avere derivata destra e sinistra uguali in $x = 2$

Continuità in $x = 2$: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (ax + b) = 2a + b$

Uguagliando: $2a + b = 3$ (1)

Derivabilità in $x = 2$: $f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x^2-1)-(2^2-1)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$ $f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{(ax+b)-(2a+b)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$

Uguagliando: $a = 4$ (2)

Dalle equazioni (1) e (2): $a = 4$ $b = 3 - 2a = 3 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5$

Esercizio 3.2

Determina i valori di k per cui la funzione $f(x) = |x^2 - k|$ non è derivabile in $x = 2$.

Soluzione: La funzione non è derivabile nei punti in cui l'espressione dentro il valore assoluto si annulla, cioè quando $x^2 - k = 0$ con $x = 2$.

Quindi: $2^2 - k = 0 \implies k = 4$

Per $k = 4$, la funzione $f(x) = |x^2 - 4|$ non è derivabile in $x = 2$.

Gruppo 4: Applicazioni delle Derivate

Esercizio 4.1

Una particella si muove lungo una retta con legge oraria $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (con s in metri e t in secondi). Determina: a) La velocità all'istante $t = 2$ secondi b) Gli istanti in cui la particella inverte il senso di marcia

Soluzione: a) La velocità è la derivata della legge oraria: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$ m/s

b) La particella inverte il senso di marcia quando la velocità si annulla: $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0$ $t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6}$ $t = 1$ o $t = 3$

Esercizio 4.2

Un serbatoio conico ha raggio di base 3 metri e altezza 4 metri. Se viene riempito con acqua ad una velocità costante di 2 m³/min, a che velocità aumenta il livello dell'acqua quando l'altezza è 2 metri?

Soluzione: Il volume del cono è $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, dove r è il raggio della superficie dell'acqua.

Dalla similitudine dei triangoli: $\frac{r}{h} = \frac{3}{4}$, quindi $r = \frac{3h}{4}$

Sostituendo: $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3h}{4}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{9h^2}{16}h = \frac{3\pi h^3}{16}$

Derivando rispetto al tempo: $\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi h^2}{16}\frac{dh}{dt}$

Dato $\frac{dV}{dt} = 2$ m³/min e $h = 2$ m: $2 = \frac{9\pi \cdot 2^2}{16}\frac{dh}{dt}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{2 \cdot 16}{9\pi \cdot 4} = \frac{8}{9\pi}$ m/min

Esercizio 4.3

Un rettangolo ha un perimetro di 20 cm. Determina le dimensioni del rettangolo che ha area massima.

Soluzione: Se indichiamo con x e y i lati del rettangolo, abbiamo:
$2x + 2y = 20 \implies y = 10 - x$

L'area è: $A = x \cdot y = x(10 - x) = 10x - x^2$

Per trovare il massimo, deriviamo e impostiamo uguale a zero:
$A'(x) = 10 - 2x = 0 \implies x = 5$

Quindi $y = 10 - 5 = 5$

Il rettangolo che ha area massima è un quadrato di lato 5 cm.