Esercizi sui canali di trasmissione

Esercizio 1
Un canale ha una larghezza di banda di **4 kHz** e trasmette **2 livelli** distinti per simbolo (segnale binario). Calcola il tasso massimo di trasmissione.

Soluzione
Sappiamo che il tasso massimo di trasmissione si calcola come:

$$R_{max} = 2B \log_2 V$$

Dati: B=4.000Hz e V=2, avremo:

$$R_{max} = 2 \cdot 4.000 \log_2 2 = 8.000 \text{ bps} \text{ (bit per secondo)}$$

Esercizio 2
Un canale ha una larghezza di banda di **5 kHz** e deve raggiungere una velocità di trasmissione di **30 kbps**. Quanti livelli distinti V deve avere ogni simbolo?

Soluzione
Partiamo da una precisazione sul concetto di simbolo: **simbolo** = **unità base di trasmissione**.
Quando trasmetti su un canale, **non per forza ogni simbolo corrisponde a un solo bit**.

- **se hai solo 2 livelli** (es. alta/bassa tensione), ogni simbolo rappresenta **1 bit** (0 oppure 1), codifica informazione pari a 1 bit.
- **se hai 4 livelli distinti** (es. quattro diverse tensioni o fasi), ogni simbolo rappresenta **2 bit** (codifica informazione pari a 2 bit: 00, 01, 10, 11).
- **se hai 8 livelli**, ogni simbolo rappresenta **3 bit**, ecc.

In generale, **ogni simbolo rappresenta $\log_2 V$** bit, dove V è il numero di livelli distinti utilizzabili.
Partendo quindi dalla formula:

$$R_{max} = 2B \log_2 V$$

posso ricavare V dalla formula inversa dato che è l'unica incognita:

$$\log_2 V = \frac{R_{max}}{2B}$$

da cui:

$$V = 2^{\frac{R_{max}}{2B}} = 2^{\frac{30000}{2 \cdot 5000}} = 2^3 = 8$$

servono quindi **8 livelli distinti**.
Cosa significa ai fini pratici nella trasmissione? se ogni simbolo ha bisogno di più livelli per essere rappresentato (in questo caso 8 invece che magari 2 livelli) è un limite o un'opportunità?

- **in teoria (dal punto di vista della velocità di trasmissione) è un'opportunità** infatti:
  più livelli per simbolo → più bit trasmessi a ogni simbolo → più dati trasmessi a parità di banda (se hai 8 livelli, ogni simbolo rappresenta 3 bit) quindi trasmetti più bit al secondo senza aumentare la larghezza di banda!
- **nella pratica, introduce dei limiti (dal punto di vista della robustezza)** in quanto aumentare il numero di livelli significa che:
  - **i livelli sono più ravvicinati** tra loro.
  - serve un ricevitore **molto più preciso** per distinguere livelli simili (es: tensioni molto vicine).

- **il rumore** (inevitabile nella realtà) può **confondere i livelli**, causando **errori** nella decodifica

Più livelli sono quindi **un'opportunità teorica** per aumentare la velocità **ma** diventano **un limite pratico** a causa della presenza di rumore nei canali reali.

Serve un compromesso: scegliere **il numero di livelli** giusto rispetto alla qualità del canale, ad esempio:

- se il **canale** è **buono** (poco rumore), puoi aumentare V (es. usare la modulazione 64-QAM → 6 bit per simbolo)
- se il **canale** è **disturbato**, meglio abbassare V (es. usare la modulazione 4-QAM → 2 bit per simbolo) per evitare errori

Esercizio 3

Supponi un canale senza rumore di larghezza di banda **2 MHz**.
Se ogni simbolo può codificare **4 bit** di informazione, qual è il tasso massimo di trasmissione?
Quanti simboli al secondo devono essere trasmessi?

Soluzione

Ogni simbolo rappresenta 4 bit ⇒ $V=2^4=16$ livelli.
Calcoliamo prima il tasso massimo:

$$R_{max} = 2B \log_2 V = 2 \cdot 2 \cdot 10^6 \log_2 16 = 16 \cdot 10^6 = 16 \text{ Mbp}$$

Ora, il **numero di simboli al secondo** (tasso di simboli, o **baud rate**) è dato dalla formula:

$$\text{baud rate} = \frac{R_{max}}{bit\ per\ simbolo} = \frac{16 \cdot 10^6}{4} = 4 \cdot 10^6 \text{ baud (4 milioni di simboli al secondo)}$$

Esercizio 4

Un segnale analogico ha una frequenza massima di **4 kHz**.
Qual è la minima frequenza di campionamento che consente una ricostruzione perfetta del segnale?

Soluzione

Secondo il Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon, la frequenza di campionamento f_s deve essere **almeno il doppio** della massima frequenza presente nel segnale:

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max}$$

dunque:

$$f_s \geq 2 \cdot 4\text{KHz} = 8\text{kHz}$$

la frequenza minima di campionamento è **8 kHz**.

Esercizio 5

Un segnale viene campionato a **10 kHz**.
Qual è la massima frequenza che il segnale originale può contenere senza incorrere in **aliasing** (per cui il segnale campionato **non rappresenta più fedelmente** il segnale originale)?

Soluzione

Sempre secondo il teorema di Nyquist-Shannon, per evitare aliasing devo avere:

$$f_{max} \leq \frac{f_S}{2} = \frac{10.000}{2} = 5000$$

dunque la frequenza massima senza aliasing è **5 kHz**.

Esercizio 6
Un canale ha una larghezza di banda di **3 kHz** e un rapporto segnale/rumore (SNR) di **30 dB**.
Calcola la capacità massima di trasmissione.

Soluzione
Prima convertiamo l'SNR da dB a valore lineare:

$$\frac{S}{N} = 10^{\frac{30}{10}} = 10^3 = 1.000$$

poi applichiamo la formula di Shannon:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 3000\cdot\log_2(1+1000) = 3.000\cdot\log_2 1.001$$

essendo: $\log_2(1001) \approx 9{,}97$
avremo:

$$C \approx 3.000\cdot 9{,}97 = 29.910 \text{ bps}$$

e quindi la capacità massima è circa **29,9 kbps**.

Esercizio 7
La capacità di un canale è **1 Mbps** con una larghezza di banda di **200 kHz**.
Qual è il rapporto segnale/rumore S/N **in dB**?

Soluzione
Dalla formula di Shannon:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

da cui:

$$\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = \frac{C}{B}$$

$$1+\frac{S}{N} = 2^{\frac{C}{B}}$$

$$\frac{S}{N} = 2^{\frac{C}{B}} - 1 = 2^{\frac{10^6}{2\cdot 10^5}} - 1 = 2^5 - 1 = 31$$

Ora, per avere l'SNR in dB:

$$SNR(dB) = 10\log_{10}(31) \approx 10\cdot 1{,}491 = 14{,}91 \text{ dB}$$

il rapporto segnale/rumore è di circa **14,91 dB**.

Esercizio 8
Un sistema deve trasmettere dati a **100 kbps** su un canale con una larghezza di banda di **10 kHz**.
Il canale ha un rapporto segnale/rumore di **10 dB**.
È possibile trasmettere a questa velocità? Giustifica la risposta.

Soluzione
Convertiamo l'SNR da dB a valore lineare:

$$\frac{S}{N} = 10^{\frac{10}{10}} = 10$$

Calcoliamo la capacità massima teorica:

$$C = 10.000 \cdot \log_2(1+10)$$

$$\log_2(11) \approx 3,459$$

quindi:

$$C \approx 10.000 \cdot 3,459 = 34.590 \text{bps}$$

dal momento quindi che è richiesto che il canale trametta 100 kbps ma in realtà trasmette al massimo 34,59 kbps, è chiaro che **non è possibile raggiungere 100 kbps su quel canale**: la capacità massima è solo circa 34,6 kbps.