DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

DERIVATE USANDO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\dot{f}(x) \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

h = INCREMENTO

Vorrei capire come determinare il rapporto incrementale della seguente funzione razionale fratta, centrato nel punto $x_0 = 3$ e con incremento h:

$$y = \frac{7x + 3x^2 + 2}{x - 4} \Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$3+h$

$x_0 + h = 3+h$

$$\to f(x_0+h) = \frac{7(3+h) + 3(3+h)^2 + 2}{(3+h) - 4}$$

$$= \frac{21 + 7h + 3(9 + h^2 + 6h) + 2}{h - 1}$$

$$= \frac{21 + 7h + 27 + 3h^2 + 18h + 2}{h - 1}$$

$$= \frac{50 + 25h + 3h^2}{h - 1} \Rightarrow f(3+h)$$

$$= \frac{25(2+h) + 3h^2}{h - 1} = \frac{25[2 + h(1+3h)]}{h - 1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \frac{\frac{25[2+h(1+3h)]}{h-1}}{h}$$

$$= \frac{25[2+h(1+3h)]}{h-1} \cdot h \simeq \frac{3h+75}{h-1}$$

$\uparrow$

$x_0 = 3$

h

8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nel punto $x_0 = -2$ con incremento $\dfrac{3}{4}h$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f\left(x_0 + \frac{3}{4}h\right) - f(x_0)}{\frac{3}{4}h}$$

$f(x)\ \frac{1}{x^2} \rightarrow x_0 = 2$

$$\frac{f\left(-2+\frac{3}{4}h\right) - f(x_0)}{\frac{3}{4}h} \rightarrow \frac{\frac{1}{\left(-2+\frac{3}{4}h\right)^2} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}h}$$

$$\frac{\dfrac{1}{4+\frac{9}{16}h^2-3h}-\dfrac{1}{4}}{\frac{3}{4}h}$$

$$= \frac{4-\left(4+\frac{9}{16}h^2-3h\right)}{\cancel{4}_{1}\left(4+\frac{9}{16}h^2-3h\right)} \cdot \frac{\cancel{4}}{3}h$$

$$= \frac{h\left[4-\left(4+\frac{9}{16}h^2-3h\right)\right]}{\left(4+\frac{9}{16}h^2-3h\right)} \sim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{16-3h}{(-8+3h)^2}$$

1) Scriviamo l'equazione di una generica retta in forma esplicita.

$$\text{Consideriamo } y = mx + q$$

2) Valutiamo la funzione $f(x)$ nel punto $x = x_0$. In questo modo otteniamo l'ordinata $y = f(x_0)$ corrispondente. Il punto del grafico della funzione in cui la retta è tangente è proprio $(x_0, f(x_0))$.

$$\text{Valutiamo } f(x_0)$$

3) Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0 mediante la definizione:

$$\text{Calcoliamo } f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

4) Ricordiamo che la derivata $f'(x_0)$ nel punto $x = x_0$ è un numero, e che tale valore è il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico nel punto.

$$\text{Significato geometrico derivata}: \ m = f'(x_0)$$

5) Sostituiamo $m = f'(x_0)$ nella generica equazione della retta e imponiamo la condizione di passaggio della retta nel punto $(x_0, f(x_0))$.

$$\text{Sostituzioni}: \ f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + q$$

6) Ricaviamo il parametro incognito q (ordinata all'origine della retta tangente).

$$\text{Ricaviamo}: \ q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

7) Riscriviamo l'equazione della retta tangente: adesso possiamo specificare il coefficiente angolare m e l'ordinata all'origine q.

Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x) = x^3 + x$, nel suo punto P di ascissa 1.

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow P(1; y?)$

$f(1) = (1)^3 + 1 = 2$

$y - 2 = m(x - 1)$

$P(1; 2)$

$\Rightarrow m =$ COEFF. ANGOLARE $\rightarrow m = f'(1)$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

3) Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ 3x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$\rightarrow \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2$

$\rightarrow \lim_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2$

a) studiarne la continuità;

b) studiarne la derivabilità nel punto $x = 1$.

Dom $(f) \Rightarrow$ POLINOMIO $(\mathbb{R})$

DERIVABILITÀ $\rightarrow$ RAPP. INCREMENTALE SX e DX ESISTONO FINITI E UGUALI

$\left\{ x_0 = 1 \quad x^2 + 1 \text{ se } x < 1 \quad 3x - 1 \text{ se } x \geq 1 \right\}$

V

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = 2$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{3x - 1 - 2}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x - 3}{x - 1} = 3$$

CONTINUA MA NON DERIVABILE

(CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE)

$$A \Longleftrightarrow B$$

$$A \Longrightarrow B$$

$$B \not\Longrightarrow A$$

PARENTESI DIMOSTRAZIONE

- - - -

DERIVATE

DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ PUNTO STAZIONARIO

(CUSPIDE / PUNTO ANGOLOSO)

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ FLESSO

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

La sua derivata,

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2,$$

è, a sua volta, una funzione della variabile x, definita sempre per $x \in \mathbb{R}$. Anche di tale funzione possiamo calcolare la derivata:

$$\mathrm{D}\, y' = 6x.$$

Tale derivata prende il nome di **derivata seconda** della funzione $f(x)$ e si indica con il simbolo:

$$y'' \quad \text{oppure} \quad f''(x).$$

Per analogia, la derivata $y' = f'(x)$ è anche detta **derivata prima**.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata prima, seconda e terza della funzione $y = x^2 \cdot \ln x$.

Questa funzione è il prodotto di due funzioni. Utilizziamo quindi la relativa regola di derivazione:

$$\mathrm{D}\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \text{ ricordando che } \mathrm{D}\, x^n = n \cdot x^{n-1} \text{ e } \mathrm{D} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Derivata prima

$$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1).$$

Derivata seconda. Abbiamo di nuovo un prodotto e ci comportiamo come in precedenza:

$$y'' = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot \left(\frac{2}{x}\right) = 2 \ln x + 1 + 2 = 2 \ln x + 3.$$

Derivata terza

$$y''' = \frac{2}{x}.$$