Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Svolgimento degli Esercizi per casa 8 (2^a parte)

$\boxed{5}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

Fissato $i \in \{1, 2\}$, per vedere che $f_i : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$;

(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

- f_1 verifica la condizione (1) ?

Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte si ha:

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque f_1 verifica la condizione (1).

f_1 verifica la condizione (2) ?

Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$f_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha f_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_1 verifica la condizione (2).

Verificando entrambe le condizioni (1) e (2), f_1 è un'applicazione lineare.

- f_2 verifica la condizione (1) ?

Essendo

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 \\ f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \\ f_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 \end{cases}$$

se fosse $f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_n}$.

Dunque f_2 non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $f : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo (il nucleo) $\mathrm{N}(f)$ e l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f.

(a) $M_2(\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}^2$ sono entrambi spazi vettoriali complessi. Verificare che f è un'applicazione lineare significa verificare che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $f(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(1): $f(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e_1} = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{B}\mathbf{e_1} = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

Dunque f verifica la condizione (1).

(2): $f(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e_1} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{e_1}) = \alpha f(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Dunque f verifica anche la condizione (2), per cui è un'applicazione lineare.

(b) Poichè $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$ è la 1^a colonna di $\mathbf{A}$, allora

• $\mathrm{N}(f) = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) | f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$ è l'insieme delle matrici complesse 2×2 con la prima colonna nulla, ossia

$$\mathrm{N}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \Big| a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

• $\mathrm{Im}(f) = \{f(\mathbf{A}) | \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})\}$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^2$ che siano prime colonne di matrici complesse 2×2. Poichè per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ esiste $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ tale che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sia la prima colonna di $\mathbf{A}$ (si prenda, ad esempio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$), allora $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^2$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$(\bullet)$ Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \quad \forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \quad \forall \alpha, a, b \in \mathbb{R}$

1.
$$f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 & b_2 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

2.
$$f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(a + b) \\ \alpha(a - b) & \alpha b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & a + b \\ a - b & b \end{pmatrix} = \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$$

$(\bullet\bullet)$ La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}.$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix})\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\\\gamma\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \\ &= \alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}2\gamma & \alpha+\beta\\\beta+\delta & \beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2\gamma &= a\\ \alpha+\beta &= b\\ \beta+\delta &= c\\ \beta &= d\end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \beta &= d\\ \gamma &= a/2\\ \alpha = b-\beta = b-d\\ \delta = c-\beta = c-d\end{cases}$,

quindi

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}b-d\\d\\c-d\\a/2\end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1/2\end{pmatrix}, \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1/2\end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\\-1 & -3\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Siano

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} \text{ (da } \boldsymbol{\mathcal{B}}' \text{ a } \boldsymbol{\mathcal{B}}\text{) e } \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}' \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}} \text{ (da } \boldsymbol{\mathcal{B}} \text{ a } \boldsymbol{\mathcal{B}}'\text{).}$$

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e di $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ rispettivamente. Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, occorre provare che $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ hanno entrambe rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) $= 3$, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 3$.

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} &= \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_1'}) & C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_2'}) & C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_3'}) \end{pmatrix} = \\ &= \left(C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}) \right).\end{aligned}$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}), C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+2\beta+\delta\\ \alpha+\beta+\delta\\ \beta+\delta\end{pmatrix},$$

α, β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha+2\beta+\delta = a \\ \alpha+\beta+\delta = b \\ \beta+\delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di $(*)$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 0 & | & b-a \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & c-a+b \end{pmatrix}$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c-a+b \\ \beta = a-b \\ \alpha = -2\beta-\delta+a = -2a+2b-c+a-b+a = b-c \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ c-a+b \end{pmatrix}$, per cui

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ha:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \left(C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right),$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left(\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \mid \mathbf{I}_3\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)} .$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\quad \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$.

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Allora

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \quad \text{ e}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = |v_i| \text{ dove } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ è tale che } |v_i| \geq |v_j| \quad \forall j \neq i.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1 \quad &\iff |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \\ &\iff |v_j| = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\iff v_j = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\iff \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b}_{\mathbf{1}}, \mathbf{b}_{\mathbf{2}}, \ldots \ \ldots, \mathbf{b}_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Poiché $\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}$, allora

$$\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = (\mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}})^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}.$$

Da $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ segue che

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ii},$$

quindi in conclusione abbiamo:

$$\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = a_{ii}.$$