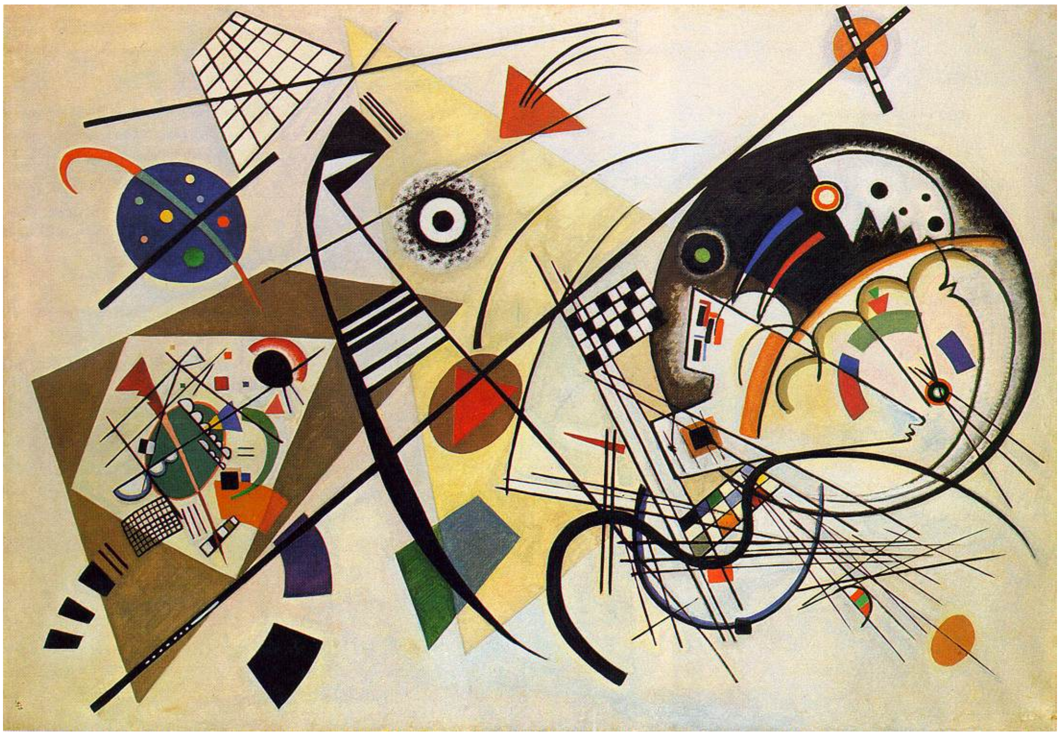

ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Francesco Bottacin

Padova, 24 febbraio 2012

Capitolo 1

Algebra Lineare

1.1 Spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 1.1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (0, 2, 0, -1)$ e $u_2 = (1, 1, 1, 0)$. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Si determini la dimensione e una base di $U \cap V$.

(b) Si determini la dimensione e una base di $U + V$.

Soluzione. Si verifica immediatamente che i vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti, quindi essi sono una base del sottospazio U, che ha pertanto dimensione 2.

Dal sistema di equazioni che definiscono il sottospazio V si ricava

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$$

Ci sono dunque due incognite libere di variare (x_2 e x_4), il che significa che V ha dimensione 2. Ponendo $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$ si trova $x_1 = 1$ e $x_3 = 0$; indichiamo con $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ il vettore corrispondente. Ponendo invece $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$ si trova $x_1 = 2$ e $x_3 = -1$. Il vettore così trovato è $v_2 = (2, 0, -1, 1)$. Una base di V è dunque costituita dai vettori v_1 e v_2.

Cerchiamo ora i vettori che appartengono a $U \cap V$. Detto w un tale vettore si deve avere $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, in quanto $w \in U$, ma anche $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$, in quanto $w \in V$. Si ottiene così l'uguaglianza $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$, che equivale al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_2 = -\beta_2 \\ -\alpha_1 = \beta_2 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = -\beta_2 \\ \beta_1 = -3\beta_2. \end{cases}$$

Questo sistema ammette dunque infinite soluzioni, per ogni valore di β_2 (ciò significa che l'insieme delle soluzioni, e quindi anche $U \cap V$, ha dimensione 1). Ponendo $\beta_2 = -1$ si ottiene $\beta_1 = 3$, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$. Il corrispondente vettore $w \in U \cap V$ è dunque dato da $w = u_1 + u_2$ o, equivalentemente, da $w = 3v_1 - v_2$. Si trova così $w = (1, 3, 1, -1)$. Da quanto visto, deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 1 ed è generato dal vettore w appena trovato.

Per quanto riguarda il sottospazio $U + V$, sicuramente esso è generato dai quattro vettori u_1, u_2, v_1, v_2 (dato che U è generato da u_1 e u_2 e V è generato da v_1 e v_2). Dalla formula di Grassmann si ricava che

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

quindi i quattro vettori u_1, u_2, v_1, v_2 non possono certo essere una base di $U+V$ (sicuramente uno di essi sarà una combinazione lineare degli altri tre). Scegliamo arbitrariamente di eliminare il vettore v_2. Ora bisogna controllare se i tre vettori u_1, u_2, v_1 sono linearmente indipendenti. Consideriamo una loro combinazione lineare $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 = \mathbf{0}$. Si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Si conclude così che i tre vettori u_1, u_2, v_1 sono linearmente indipendenti e sono quindi una base di $U + V$ (dato che $U + V$ ha dimensione 3).

Esercizio 1.2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, ove $u_1 = (-2, 1, 1, 3)$ e $u_2 = (0, -1, 2, 1)$.

(a) Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico.

(b) Dato il vettore $v_t = (t, 3, t-1, 1)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t \in U$.

(c) Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ e $x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$. Si determini una base di V e una base di $U \cap V$.

Soluzione. I vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti (la verifica è immediata), quindi il sottospazio U da essi generato ha dimensione 2. Dalla formula di Grassman segue che la dimensione di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ deve essere uguale a 2. Pertanto, per trovare una base di un tale sottospazio W, è sufficiente trovare due vettori w_1 e w_2 tali che $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$. Ci sono infinite scelte per i vettori w_1 e w_2; ad esempio si può prendere $w_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0, 0)$ (è facile verificare che con queste scelte i vettori $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di $\mathbb{R}^4$). Tuttavia si potrebbe anche prendere $w_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 0, 1)$, il che prova che un tale sottospazio W non è certamente unico.

Consideriamo ora il vettore $v_t = (t, 3, t-1, 1)$. Richiedere che v_t appartenga a U equivale a richiedere che v_t si possa scrivere come combinazione lineare dei vettori u_1 e u_2 (i quali formano una base di U):

$$v_t = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

Si ottiene così il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} t = -2\alpha_1 \\ 3 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ t - 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 1 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \\ t = -2. \end{cases}$$

Si conclude quindi che $v_t \in U$ se e solo se $t = -2$.

Il sottospazio V è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari:

$$V : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova che esso ammette infinite soluzioni, dipendenti da due parametri, date da

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = x_2 - 3x_4. \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$ si ottiene il vettore $v_1 = (-2, 1, 1, 0)$, mentre ponendo $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$ si ottiene il vettore $v_2 = (2, 0, -3, 1)$. I vettori v_1 e v_2 sono una base di V. Per terminare cerchiamo una base di $U \cap V$.

Ogni vettore $w \in U \cap V$ si scrive nella forma

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \qquad w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2.$$

L'uguaglianza $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 = -2\beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 - 3\beta_2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$$

il quale ammette infinite soluzioni (dipendenti da un parametro) date da

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \beta_2 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 = -\dfrac{2}{3}\,\alpha_2 \end{cases}$$

Una soluzione particolare è data, ad esempio, da $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = 3$ (come ora vedremo, non è importante calcolare anche i valori di β_1 e β_2). Possiamo dunque concludere che $U \cap V$ ha dimensione 1 e una sua base è costituita dal vettore

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = -2u_1 + 3u_2 = (4, -5, 4, -3).$$

Esercizio 1.3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (2, 0, 1, -1), \quad u_2 = (1, 1, 2, 0), \quad u_3 = (4, -2, -1, -3),$$

e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + y + 2z = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.
(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1 + t, 1, 3, -1)$ appartiene a U.
(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

Soluzione. Per determinare la dimensione di U dobbiamo scoprire quanti tra i vettori u_1, u_2 e u_3 sono linearmente indipendenti. Per fare ciò calcoliamo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Effettuiamo le seguenti operazioni elementari tra le righe: alla seconda riga sottraiamo il doppio della prima e alla terza riga sottraiamo la prima riga moltiplicata per 4. Si ottiene così la matrice seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Ora alla terza riga sottraiamo il triplo della seconda, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 2, il che significa che i vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti, mentre u_3 risulta essere combinazione lineare di u_1 e u_2.

La conclusione è che il sottospazio U ha dimensione 2 e una sua base è costituita dai vettori u_1 e u_2.

Dire che il vettore $v = (1 + t, 1, 3, -1)$ appartiene a U equivale a dire che esso si può scrivere come combinazione lineare dei vettori u_1 e u_2. L'equazione

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

fornisce il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_2 \\ 3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -1 = -\lambda_1, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} t = 2 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Si scopre così che $v \in U$ se e solo se $t = 2$.

Per trovare le equazioni cartesiane di U osserviamo che un generico vettore $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ appartiene a U se e solo se esso è combinazione lineare dei vettori u_1 e u_2, i quali formano una base di U. Scrivere

$$(x, y, z, w) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

equivale al seguente sistema

$$\begin{cases} x = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_2 \\ z = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ w = -\lambda_1. \end{cases}$$

Per trovare le equazioni cartesiane di U basta eliminare i due parametri λ_1 e λ_2 dalle equazioni precedenti. Si ha $\lambda_2 = y$ (dalla seconda equazione) e $\lambda_1 = -w$ (dalla quarta); sostituendo nelle due equazioni rimanenti, si trova il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2w = 0 \\ 2y - z - w = 0. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cartesiane di U.

Poiché ora conosciamo le equazioni di U, per determinare $U \cap W$ basta mettere a sistema le equazioni di U con quelle di W:

$$\begin{cases} x - y + 2w = 0 \\ 2y - z - w = 0 \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono date da

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3}\, w \\ y = \frac{2}{3}\, w \\ z = \frac{1}{3}\, w \\ w \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Ciò significa che $U \cap W$ ha dimensione 1 e una sua base è formata dal vettore $u = (-4, 2, 1, 3)$, ottenuto ponendo $w = 3$ nelle equazioni precedenti.

Se osserviamo che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da una sola equazione lineare, concludiamo che $\dim W = 3$ e dunque, utilizzando la formula di Grassmann, si ha

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Poiché $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4, deve necessariamente essere $U + W = \mathbb{R}^4$. Cercare una base di $U + W$ equivale dunque a cercare una base di $\mathbb{R}^4$ e si può quindi prendere la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Esercizio 1.4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, 4, -1, 1)$, $u_2 = (1, -2, -1, -3)$ e W il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e $2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si stabilisca se la somma di U e W è diretta e si determinino delle basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

(b) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Dato il vettore $v = (0, 1, -1, 3)$, si determini l'equazione del più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente U e v.

(d) Dato $\bar{v} = (2, -1, 0, 3)$ si consideri l'insieme $S = \bar{v} + U = \{\bar{v} + u \mid u \in U\}$. Si scriva un sistema lineare che abbia S come insieme delle soluzioni.

Soluzione. Cominciamo col determinare una base di W. I vettori di W sono le soluzioni del seguente sistema lineare

$$W : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Ricavando x_2 e x_4 in funzione di x_1 e x_3, si trova che il sistema precedente è equivalente a

$$W : \begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{2}x_1 + 2x_3 \\ x_4 = -2x_1 - 3x_3 \end{cases}$$

pertanto W ha dimensione 2 e una sua base è costituita dai vettori $w_1 = (2, 3, 0, -4)$ e $w_2 = (0, 2, 1, -3)$.

Cerchiamo ora una base di $U \cap W$. Se $v \in U \cap W$, si deve avere

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 = b_1w_1 + b_2w_2.$$

L'uguaglianza $a_1u_1 + a_2u_2 = b_1w_1 + b_2w_2$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 = 2b_1 \\ 4a_1 - 2a_2 = 3b_1 + 2b_2 \\ -a_1 - a_2 = b_2 \\ a_1 - 3a_2 = -4b_1 - 3b_2 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = 2a_2 \\ b_2 = -2a_2 \\ a_2 \text{ qualunque.} \end{cases}$$

Si deduce quindi che $U \cap W$ ha dimensione 1. Per trovare una sua base possiamo porre arbitrariamente $a_2 = 1$, ottenendo $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = -2$, da cui segue che $v = u_1 + u_2 = 2w_1 - 2w_2$. Effettuando i calcoli si trova $v = (4, 2, -2, -2)$. Questo vettore è dunque una base di $U \cap W$. Poiché $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$, possiamo affermare che la somma di U e W non è diretta. Dalla formula di Grassmann si deduce che

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3.$$

Poiché $U + W$ è generato dai quattro vettori u_1, u_2, w_1 e w_2, ma ha dimensione 3, per trovare una sua base bisognerà eliminare uno dei quattro vettori citati. Scegliamo (arbitrariamente) di eliminare u_2 e, dopo aver verificato che i vettori rimanenti u_1, w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, possiamo affermare che essi sono una base di $U + W$.

Il secondo punto richiede di determinare una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^4$. Poiché $\dim U = \dim W = 2$, dalla formula di Grassmann si deduce che anche L deve avere dimensione 2. Per trovare una base di L si tratta dunque di trovare due vettori ℓ_1 e ℓ_2 tali che $\{u_1, u_2, \ell_1, \ell_2\}$ e $\{w_1, w_2, \ell_1, \ell_2\}$ siano basi di $\mathbb{R}^4$. Possiamo porre (arbitrariamente) $\ell_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $\ell_2 = (0, 1, 0, 0)$: è facile verificare che sia i vettori $\{u_1, u_2, \ell_1, \ell_2\}$ che $\{w_1, w_2, \ell_1, \ell_2\}$ sono linearmente indipendenti, quindi i vettori ℓ_1 e ℓ_2 da noi scelti sono una base del sottospazio L cercato.

Facciamo notare che altre scelte di ℓ_1 e ℓ_2, come ad esempio $\ell_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $\ell_2 = (0, 0, 0, 1)$ andrebbero altrettanto bene (in effetti ci sono infinite scelte possibili), il che significa che il sottospazio L cercato non è unico.

Il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente U e $v = (0, 1, -1, 3)$ è il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2 e v. Se indichiamo con (x_1, x_2, x_3, x_4) il generico vettore di tale sottospazio, si deve quindi avere $(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3v$. Tale equazione equivale al seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 = 3a_1 + a_2 \\ x_2 = 4a_1 - 2a_2 + a_3 \\ x_3 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ x_4 = a_1 - 3a_2 + 3a_3 \end{cases}$$

Ricavando a_1, a_2 e a_3, si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} a_2 = x_1 - 3a_1 \\ a_3 = 2a_1 - x_1 - x_3 \\ a_1 = (3x_1 + x_2 + x_3)/12 \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

L'ultima equazione non contiene i parametri a_1, a_2 e a_3; essa è pertanto l'equazione cercata. Possiamo così concludere che il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$

contenente U e v è determinato dall'equazione

$$6x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0.$$

L'ultimo punto è simile a quanto abbiamo appena visto. Gli elementi dell'insieme $S = \bar{v} + U$ si scrivono nella forma $\bar{v} + a_1u_1 + a_2u_2$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Se indichiamo con (x_1, x_2, x_3, x_4) il generico vettore di S, si ha quindi $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{v} + a_1u_1 + a_2u_2$, che equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3a_1 + a_2 \\ x_2 = -1 + 4a_1 - 2a_2 \\ x_3 = -a_1 - a_2 \\ x_4 = 3 + a_1 - 3a_2 \end{cases}$$

Ricavando a_1 e a_2, si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} a_1 = -x_3 - a_2 \\ a_2 = (2 - x_1 - 3x_3)/2 \\ 2x_1 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni non contengono i parametri a_1 e a_2; esse formano quindi un sistema di equazioni lineari aventi S come insieme delle soluzioni

$$S : \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Esercizio 1.5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (12, 3, -2, 0)$ e sia W il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.

(a) Si dimostri che $U \subset W$ e si completi la base di U ad una base di W.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 3, 0)$ e $v_2 = (2, 3, 4, -1)$. Si determini una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, 0, 1, 2)$, si determini il valore di t per cui i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente dipendenti.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $W = \operatorname{Ker} f$ e $U = \operatorname{Im} f$.

Soluzione. Per dimostrare che $U \subset W$ basta osservare che $u \in W$ (infatti le coordinate di u soddisfano l'equazione di W).

Il sottospazio W ha dimensione 3, essendo definito da una equazione in $\mathbb{R}^4$. Pertanto per completare la base di U ad una base di W è sufficiente trovare due vettori $w_1, w_2 \in W$ tali che i vettori u, w_1 e w_2 siano linearmente indipendenti.

Dall'equazione di W si ricava

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4x_4.$$

Ponendo $w_1 = (2, 1, 0, 0)$ e $w_2 = (-3, 0, 1, 0)$ si scopre che $u = 3w_1 - 2w_2$, quindi i vettori u, w_1, w_2 sono linearmente dipendenti; bisogna quindi modificare la nostra scelta. Proviamo allora a porre $w_2 = (4, 0, 0, 1)$; ora è facile verificare che u, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di W.

Per determinare una base di $V \cap W$ possiamo cominciare col determinare le equazioni di V. Un generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ è combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2 che generano V; si ha quindi

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 v_1 + a_2 v_2,$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + 2a_2 \\ x_2 = 2a_1 + 3a_2 \\ x_3 = 3a_1 + 4a_2 \\ x_4 = -a_2 \end{cases}$$

Ricavando a_1 e a_2 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a_2 = -x_4 \\ a_1 = x_1 + 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che le equazioni cartesiane di V sono le seguenti:

$$V : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Il sottospazio $V \cap W$ è dunque descritto dal seguente sistema:

$$V \cap W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$V \cap W : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 2x_4 \\ x_4 \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Da ciò si deduce che $V \cap W$ ha dimensione 1 e una sua base è formata dal vettore $(0, 1, 2, 1)$. Dalla formula di Grassmann segue che

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4,$$

quindi si ha necessariamente $V + W = \mathbb{R}^4$. Come base di $V + W$ si può dunque prendere una qualunque base di $\mathbb{R}^4$ (ad esempio, la base canonica).

Cerchiamo ora per quale valore di t i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente dipendenti. La combinazione lineare

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_t = \mathbf{0}$$

fornisce il sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 t = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 = 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + a_3 = 0 \\ -a_2 + 2a_3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si trova che, se $t \neq -1$ allora si ha $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e quindi i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente indipendenti, altrimenti, se $t = -1$, essi sono linearmente dipendenti.

Per scoprire se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $W = \operatorname{Ker} f$ e $U = \operatorname{Im} f$ ricordiamo che, per ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ si deve avere

$$\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = 4.$$

Poiché $\dim W = 3$ e $\dim U = 1$, tale uguaglianza è verificata. Naturalmente ciò non basta per affermare che una tale f esiste!

Tuttavia ricordiamo che per definire una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è sufficiente assegnare le immagini tramite f dei vettori di una base di $\mathbb{R}^4$. Consideriamo allora una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W e sia $v \in \mathbb{R}^4$ un vettore tale che $\{w_1, w_2, w_3, v\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$ (un tale vettore v esiste sempre). Definiamo una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ponendo $f(w_1) = f(w_2) = f(w_3) = \mathbf{0}$ e $f(v) = u$. Per una siffatta f si ha $\operatorname{Ker}(f) = W$ e $\operatorname{Im}(f) = U$, come volevasi.

Esercizio 1.6. Sia $T \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 1, 2)$, $v_2 = (3, 0, 0, -1)$. Sia S il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite (x, y, z, w) delle equazioni

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare $S \cap T$ e dare una base di $S + T$.

(b) Determinare un sottospazio L di $\mathbb{R}^4$ per cui $(T + S) \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Determinare un altro L_1, $L_1 \neq L$ tale che $(T + S) \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus L_1$. Può essere $L \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$?

(d) Determinare un sottospazio M di $\mathbb{R}^4$ diverso da S e di dimensione 2, tale che $T + S = T + M$.

Soluzione. Il generico vettore di T è combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2; esso si scrive dunque come segue:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 = (a_1 + 3a_2, a_1, a_1, 2a_1 - a_2).$$

Affinché w appartenga a $S \cap T$, le sue componenti devono soddisfare le equazioni di S. Risolvendo il sistema così ottenuto si trova $a_1 = a_2$, da cui si deduce che $S \cap T$ ha dimensione 1 e una sua base è costituita dal vettore $w = (4, 1, 1, 1)$ (ottenuto ponendo $a_1 = a_2 = 1$).

Dalle equazioni di S

$$S : \begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

si ricava

$$S : \begin{cases} x = 2z + 2w \\ y = w \end{cases}$$

da cui segue che S ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $s_1 = (2, 0, 1, 0)$ e $s_2 = (2, 1, 0, 1)$.

Dalla formula di Grassmann si ha

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 3$$

e, poiché i vettori v_1, v_2, s_1 sono linearmente indipendenti (come si verifica facilmente) essi sono necessariamente una base di $S + T$.

Un sottospazio L di $\mathbb{R}^4$ tale che $(T + S) \oplus L = \mathbb{R}^4$ deve avere dimensione 1. Per determinare L basta quindi trovare un vettore ℓ tale che i vettori v_1, v_2, s_1, ℓ siano linearmente indipendenti. Esistono infinite scelte possibili per ℓ; ad esempio il vettore $\ell = (1, 0, 0, 0)$ soddisfa le richieste (lo si verifichi).

In modo del tutto analogo, anche L_1 deve avere dimensione 1 e una sua base deve essere costituita da un vettore ℓ_1 tale che i vettori v_1, v_2, s_1, ℓ_1 siano linearmente indipendenti. Se richiediamo inoltre che L e L_1 siano in somma diretta, ciò significa che $L \cap L_1 = \{\mathbf{0}\}$ e dunque che i vettori ℓ e ℓ_1 devono essere linearmente indipendenti. Basta pertanto prendere $\ell_1 = (0, 0, 0, 1)$ e verificare che, in effetti, v_1, v_2, s_1, ℓ_1 sono linearmente indipendenti. Naturalmente non può essere $L \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$ perché $\dim L + \dim L_1 = 2$.

Infine, per determinare un sottospazio M di $\mathbb{R}^4$ diverso da S e di dimensione 2, tale che $T + S = T + M$, ricordiamo che $T + S$ è il sottospazio generato dai vettori v_1, v_2, s_1. Una base di M dovrà dunque essere formata da due vettori scelti in modo tale da garantire che $T + S = T + M$ e, allo stesso tempo, che $M \neq S$. Dato che S è generato dai vettori s_1 e s_2, possiamo prendere $M = \langle s_1, v_2 \rangle$. È facile verificare che $M \neq S$ (perché M non contiene s_2) e che $T + M$ ha come base $\{v_1, v_2, s_1\}$ e quindi è uguale a $T + S$.

1.2 Funzioni lineari e matrici

Esercizio 1.7. Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(0,1,-1) = (3,-1,0)$, $f(-2,1,3) = (-t,-1,t+3)$ e il nucleo di f sia generato dal vettore $(1, t^2+3t, -2)$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.

Soluzione. Ricordiamo che una funzione lineare tra due spazi vettoriali V e W è determinata in modo unico quando si conoscono le immagini dei vettori di una base di V. Sapendo che il nucleo di f è generato dal vettore $(1, t^2+3t, -2)$, si deduce che $f(1, t^2+3t, -2) = (0,0,0)$. Pertanto conosciamo le immagini, tramite f, dei tre vettori $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (-2,1,3)$ e $v_3 = (1, t^2+3t, -2)$.

La prima cosa da fare è dunque quella di determinare per quali valori del parametro t i vettori v_1, v_2 e v_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0}.$$

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + (t^2+3t)\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ 2(t^2+3t)\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Se $t^2+3t \neq 0$, cioè se $t \neq 0, -3$, l'unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. In questo caso i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e sono quindi una base di $\mathbb{R}^3$. Possiamo dunque affermare che, per $t \neq 0, -3$, la funzione lineare f esiste ed è unica.

Analizziamo ora separatamente i due casi particolari $t = 0$ e $t = -3$. Se $t = 0$ il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il quale ammette infinite soluzioni (ciò significa che, in questo caso, i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti). Una soluzione particolare è data, ad esempio, da $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Ciò significa che, per $t = 0$, vale la seguente relazione di dipendenza lineare:

$$-v_1 + v_2 + 2v_3 = \mathbf{0}.$$

I vettori v_1, v_2, v_3 non sono dunque una base di $\mathbb{R}^3$, quindi non sono note le immagini dei vettori di una base del dominio della funzione f. Possiamo quindi concludere che, anche se una tale funzione f dovesse esistere, essa non sarebbe determinata in modo unico. Tuttavia, poiché f deve essere lineare, si dovrebbe avere

$$f(-v_1 + v_2 + 2v_3) = -f(v_1) + f(v_2) + 2f(v_3) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Sostituendo al posto di $f(v_1)$, $f(v_2)$ e $f(v_3)$ i valori dati dal problema, si ottiene l'uguaglianza

$$-(3, -1, 0) + (0, -1, 3) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

che non è verificata. Si conclude così che per $t = 0$ non può esistere una funzione lineare f che soddisfi tutte le richieste.

Passiamo ora al caso $t = -3$. Come nel caso precedente il sistema diventa

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il quale ammette infinite soluzioni. Una soluzione particolare è data, come prima, da $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Ciò significa che, per $t = -3$, vale la seguente relazione di dipendenza lineare:

$$-v_1 + v_2 + 2v_3 = \mathbf{0}.$$

Anche in questo caso i vettori v_1, v_2, v_3 non sono una base di $\mathbb{R}^3$, quindi, esattamente come prima, possiamo concludere che, anche se una tale funzione f dovesse esistere, essa non sarebbe determinata in modo unico. In questo caso però, se applichiamo f all'uguaglianza precedente, si ottiene

$$f(-v_1 + v_2 + 2v_3) = -f(v_1) + f(v_2) + 2f(v_3) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

e sostituendo al posto di $f(v_1)$, $f(v_2)$ e $f(v_3)$ i valori dati dal problema, si ottiene l'uguaglianza

$$-(3, -1, 0) + (3, -1, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

che ora è verificata. Ad ogni modo, per costruire una funzione lineare f che soddisfi i requisiti richiesti dovremmo trascurare il vettore v_3 (il quale è una combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2) e completare i vettori v_1, v_2 ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo un qualche vettore w (scelto in modo tale che i vettori v_1, v_2, w siano linearmente indipendenti). La funzione f risulterebbe univocamente determinata se conoscessimo anche l'immagine di w che però non è data e, anzi, può essere fissata (quasi*) arbitrariamente. Concludiamo così che, per $t = -3$, esistono infinite funzioni lineari f che soddisfano i requisiti imposti dal problema [*Esiste una tale funzione f per ogni scelta di $f(w) \in \mathbb{R}^3$. Tuttavia, per la precisione, $f(w)$ non può essere scelto in modo completamente arbitrario, altrimenti si potrebbe trovare una funzione f avente un nucleo di dimensione 2 e non 1 come richiesto dal problema! Per fare in modo che $\operatorname{Ker} f$ abbia dimensione 1 bisogna scegliere $f(w)$ in modo che l'immagine di f abbia dimensione 2, in altre parole, $f(w)$ deve essere linearmente indipendente da $f(v_1)$. Ci sono comunque infinite scelte per $f(w)$].

Esercizio 1.8. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f *non è* suriettiva. Per tali valori di t si determini una base di $\mathrm{Im}(f)$.

Soluzione. Dato che il dominio e il codominio di f hanno la stessa dimensione, la funzione f è suriettiva se e solo se essa è iniettiva (cioè se e solo se essa è biiettiva). In termini della matrice A, si ha che f è biiettiva se e solo se $\det A \neq 0$. Pertanto, richiedere che f non sia suriettiva equivale a richiedere che il determinante di A sia uguale a zero.

$$\begin{aligned} \det A &= -t \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -t \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2t - 18. \end{aligned}$$

Dal calcolo del determinante di A si scopre che esso si annulla per $t = -9$. Concludiamo quindi che la funzione f non è suriettiva per $t = -9$ (mentre per $t \neq -9$ essa è biiettiva).

Per $t = -9$ la matrice A diventa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A. D'altra parte, poiché f non è suriettiva, la dimensione di $\mathrm{Im}\, f$ sarà < 4 (le quattro colonne di A sono linearmente dipendenti, dato che $\det A = 0$). Escludiamo arbitrariamente l'ultima colonna e consideriamo le prime tre. Verifichiamo se esse sono linearmente indipendenti:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -9\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Si conclude così che le prime tre colonne della matrice A sono linearmente indipendenti (quindi il rango di A è 3) e sono pertanto una base dell'immagine di f (che ha dunque dimensione 3).

Esercizio 1.9. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$, ove $u_1 = (1, -1, 0, 2)$, $u_2 = (2, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, -4, 1, 4)$, $u_4 = (-3, -3, 2, -2)$, e U_2 di equazioni $3x_1 - 4x_2 = 0$ e $5x_1 + 7x_2 = 0$.

(a) Si determini una base di U_1 e una base di U_2. Si determini, se esiste, una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $U_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$.

(b) Dati $w_1 = (2, -1, 3)$, $w_2 = (1, 1, 2)$, $w_3 = (5, -4, t)$, si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(u_1) = w_1$, $g(u_2) = w_2$, $g(u_3) = w_3$. Si dica inoltre se tale g è unica.

Soluzione. I vettori u_1, u_2, u_3, u_4 generano U_1, quindi da essi si può estrarre una base di U_1. Per determinare la dimensione di U_1 calcoliamo il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \\ -3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il metodo di eliminazione di Gauss. Alla seconda riga sottraiamo il doppio della prima, alla terza riga sottraiamo la prima e alla quarta riga sommiamo il triplo della prima, ottenendo così la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora effettuiamo le seguenti operazioni elementari: alla terza riga sommiamo la seconda mentre alla quarta riga sommiamo la seconda moltiplicata per 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si scopre così che la matrice considerata ha rango 2. Ciò significa che il sottospazio U_1 ha dimensione 2 e una sua base è costituita, ad esempio, dai vettori u_1 e u_2 (naturalmente, come base di U_1 si potrebbero anche considerare i vettori u_3 e u_4, oppure anche u_1 e u_3, ecc.).

Il sottospazio U_2 è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$U_2 : \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni nelle *quattro* incognite x_1, x_2, x_3, x_4 (si ricordi che U_2 è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$), le cui soluzioni sono date da

$$U_2 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3,\ x_4 \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Ci sono dunque infinite soluzioni, dipendenti da due parametri liberi di variare, pertanto U_2 ha dimensione 2 e una sua base è costituita dai vettori $w_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 0, 1)$. Se ora poniamo $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$, $v_3 = w_1$ e $v_4 = w_2$, si ha $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $U_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$, come richiesto. Bisogna solo controllare se effettivamente i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono una base di $\mathbb{R}^4$, cioè se essi sono linearmente indipendenti. A tal fine calcoliamo il determinante della matrice le cui righe sono i vettori dati:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Poiché tale determinante è diverso da zero i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti e sono dunque una base di $\mathbb{R}^4$.

Consideriamo ora i vettori $w_1 = (2, -1, 3)$, $w_2 = (1, 1, 2)$, $w_3 = (5, -4, t)$. Abbiamo già visto che i vettori u_1, u_2 e u_3 sono linearmente dipendenti, quindi deve esistere una relazione di dipendenza lineare

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbf{0},$$

con λ_1, λ_2, λ_3 non tutti nulli. Sostituendo le componenti di u_1, u_2 e u_3 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3. \end{cases}$$

Una soluzione particolare è data da $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, che fornisce la seguente relazione di dipendenza lineare:

$$-3u_1 + u_2 + u_3 = \mathbf{0}.$$

Si ha dunque $u_3 = 3u_1 - u_2$. Affinché esista una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(u_1) = w_1$, $g(u_2) = w_2$, $g(u_3) = w_3$ si deve dunque avere

$$g(u_3) = g(3u_1 - u_2) = 3g(u_1) - g(u_2),$$

cioè $w_3 = 3w_1 - w_2$. Deve quindi sussistere la seguente uguaglianza

$$(5, -4, t) = 3(2, -1, 3) - (1, 1, 2),$$

da cui segue che deve essere $t = 7$.

Concludiamo quindi che una funzione lineare g con le proprietà richieste esiste se e solo se $t = 7$. Una tale funzione lineare tuttavia non è determinata in modo unico, dato che non sono note le immagini tramite g dei vettori di una base del suo dominio (in altre parole, per $t = 7$ esistono infinite funzioni lineari g con le proprietà richieste).

Esercizio 1.10. Siano V e W due spazi vettoriali, sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V e sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W. Indichiamo con $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che

$$f(v_1 - v_3) = w_1 - 2w_2 - 2w_3 \qquad f(v_1 - v_2 + v_3) = w_2$$
$$f(v_1 + v_3) = w_1 + 2w_2 \qquad f(v_1 - v_3 + v_4) = 5w_1 - 4w_3$$

(a) Si dica se f è univocamente determinata dalle condizioni date e si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.

(b) Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Si determini $f^{-1}(w_1 + w_3)$.

(d) Si dica se esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g : W \to W$ sia l'identità (**Attenzione:** non è richiesto di determinare una tale g, ma solo di dire se essa esiste oppure no, giustificando la risposta).

Soluzione. Per scrivere la matrice di f rispetto alle basi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di V e $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W dobbiamo calcolare $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ e $f(v_4)$. Sfruttando la linearità di f, si ha:

$$f(v_1 - v_3) + f(v_1 + v_3) = f(2v_1) = 2f(v_1),$$

e quindi

$$f(v_1) = \frac{1}{2}\big(f(v_1 - v_3) + f(v_1 + v_3)\big) = w_1 - w_3.$$

Similmente, si ha

$$f(v_1 + v_3) - f(v_1) = f(v_3),$$

e dunque

$$f(v_3) = f(v_1 + v_3) - f(v_1) = 2w_2 + w_3.$$

Si ha poi:

$$f(v_1 - v_2 + v_3) - f(v_1 + v_3) = f(-v_2) = -f(v_2),$$

da cui si ricava

$$f(v_2) = -\big(f(v_1 - v_2 + v_3) - f(v_1 + v_3)\big) = w_1 + w_2.$$

Infine, si ha

$$f(v_1 - v_3 + v_4) - f(v_1 - v_3) = f(v_4),$$

e pertanto

$$f(v_4) = f(v_1 - v_3 + v_4) - f(v_1 - v_3) = 4w_1 + 2w_2 - 2w_3.$$

La matrice di f rispetto alle basi assegnate è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

il che dimostra, tra l'altro, l'esistenza di un'unica funzione lineare f che soddisfa le richieste del problema.

Utilizzando la matrice A appena calcolata possiamo facilmente determinare il nucleo di f. Infatti i vettori $v \in \operatorname{Ker}(f)$ sono i vettori $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$ tali che si abbia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha infinite soluzioni, date da

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Si conclude quindi che il nucleo di f ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v = 2v_1 + 2v_2 - v_4$ (ottenuto ponendo $x_4 = -1$).

Dato che $\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim V = 4$, si ha $\dim \operatorname{Im}(f) = 3$, il che significa che f è suriettiva (infatti $\dim W = 3$). Visto che $\operatorname{Im}(f) = W$, come base dell'immagine di f si può prendere una qualunque base di W, ad esempio la base w_1, w_2, w_3 assegnata all'inizio.

Ricordando la definizione dell'immagine inversa, si ha

$$f^{-1}(w_1 + w_3) = \{v \in V \mid f(v) = w_1 + w_3\}.$$

A tal proposito facciamo notare che, nel nostro caso, la funzione f non è invertibile, quindi non esiste una "funzione inversa" di f, $f^{-1} : W \to V$.

Se poniamo $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$, richiedere che $v \in f^{-1}(w_1 + w_3)$, cioè che $f(v) = w_1 + w_3$, equivale a richiedere che si abbia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si tratta quindi di risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema ha infinite soluzioni, date da

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2x_4 \\ x_2 = 4 - 2x_4 \\ x_3 = -2 \\ x_4 \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Se poniamo $x_4 = \alpha$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_3) &= \{(-3 - 2\alpha)v_1 + (4 - 2\alpha)v_2 - 2v_3 + \alpha v_4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= -3v_1 + 4v_2 - 2v_3 + \mathrm{Ker}(f). \end{aligned}$$

Per rispondere all'ultima domanda ricordiamo che la funzione $f : V \to W$ è suriettiva. Ciò significa che per ogni vettore $w \in W$ esiste un vettore $u \in V$ tale che $f(u) = w$. In particolare, dati i vettori w_1, w_2, w_3 della base di W, esistono dei vettori u_1, u_2, $u_3 \in V$ tali che $f(u_i) = w_i$, per $i = 1, 2, 3$ (i vettori u_i non sono univocamente determinati, essi sono determinati solo a meno della somma di elementi del nucleo di f). Ricordiamo inoltre che per definire una funzione lineare $g : W \to V$ è sufficiente specificare chi sono le immagini tramite g dei vettori di una base di W. Possiamo dunque definire la funzione g ponendo $g(w_i) = u_i$, per $i = 1, 2, 3$. Con questa definizione si ha

$$(f \circ g)(w_i) = f\big(g(w_i)\big) = f(u_i) = w_i, \qquad \text{per } i = 1, 2, 3,$$

il che dimostra che la funzione composta $f \circ g : W \to W$ è l'identità. Concludiamo quindi che una siffatta funzione g esiste (ciò è dovuto al fatto che f è suriettiva), ma non è unica, dato che la sua definizione dipende dalla scelta dei vettori $u_i \in V$ tali che $f(u_i) = w_i$.

Esercizio 1.11. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$\begin{aligned} f(1,1,0,0) &= (3,1,2), \qquad & f(1,0,1,0) &= (2,0,2), \\ f(0,1,0,0) &= (-1,-2,1), \qquad & f(0,0,1,1) &= (1,-1,2). \end{aligned}$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(c) Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Soluzione. Poniamo $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$, $w_1 = (3, 1, 2)$, $w_2 = (-1, -2, 1)$, $w_3 = (2, 0, 2)$, $w_4 = (1, -1, 2)$; si ha quindi $f(v_i) = w_i$, per $i = 1, \dots, 4$.

Per determinare la matrice di f rispetto alle basi canoniche dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si ha $e_1 = v_1 - v_2$, da cui si ricava

$$f(e_1) = f(v_1) - f(v_2) = w_1 - w_2 = (4, 3, 1).$$

Notiamo poi che $e_2 = v_2$, quindi $f(e_2) = w_2 = (-1, -2, 1)$. Ora si ha $e_3 = v_3 - e_1$, da cui segue

$$f(e_3) = f(v_3) - f(e_1) = (-2, -3, 1).$$

Infine, è $e_4 = v_4 - e_3$, quindi

$$f(e_4) = f(v_4) - f(e_3) = (3, 2, 1).$$

La matrice di f rispetto alle basi canoniche è pertanto

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo di f è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 + 5x_3 \\ x_4 = -5x_2 - 6x_3. \end{cases}$$

Ci sono dunque infinite soluzioni, dipendenti da due parametri (x_2 e x_3); ciò significa che $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$. Una base del nucleo di f è costituita dai vettori $u_1 = (4, 1, 0, -5)$ e $u_2 = (5, 0, 1, -6)$, ottenuti ponendo $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ e $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, rispettivamente.

Per quanto riguarda l'immagine di f, si ha

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 2.$$

Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne di A, per trovare una base di $\mathrm{Im}\, f$ basta prendere due colonne linearmente indipendenti della matrice A, ad esempio le colonne $(4, 3, 1)$ e $(-1, -2, 1)$ (naturalmente, come base di $\mathrm{Im}\, f$ si potrebbero prendere anche i vettori w_1 e w_2, dato che essi sono linearmente indipendenti, oppure anche w_1 e w_3, ecc.).

Cerchiamo ora i vettori che appartengono al sottospazio $\mathrm{Ker}(f) \cap U$. Come abbiamo visto in precedenza, i vettori di $\mathrm{Ker}\, f$ sono dati dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 + 5x_3 \\ x_4 = -5x_2 - 6x_3. \end{cases}$$

Poiché i vettori di U sono le soluzioni dell'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$, per trovare i vettori di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$ basta mettere a sistema le equazioni di $\mathrm{Ker}\, f$ con quella di U:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 + 5x_3 \\ x_4 = -5x_2 - 6x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono date da

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}\, x_3 \\ x_2 = -\frac{11}{9}\, x_3 \\ x_4 = \frac{1}{9}\, x_3 \\ x_3 \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

La presenza di un parametro libero di variare significa che il sottospazio $\mathrm{Ker}(f) \cap U$ ha dimensione 1; esso è dunque generato dal vettore $(1, -11, 9, 1)$, ottenuto ponendo $x_3 = 9$.

Esercizio 1.12. (a) Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 2, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ e $w_1 = (2, 0, 1)$, $w_2 = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$, si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle w_1, w_2 \rangle$. Se una tale funzione esiste si dica se essa è unica e se ne determini il rango. Si scriva inoltre la matrice di una tale f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si consideri il vettore $w = (t, 2, -1)$. Si stabilisca per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ si ha $w \in \mathrm{Im}(f)$.

Soluzione. Richiedere che w_1 e w_2 appartengano all'immagine di f equivale a richiedere che esistano dei vettori $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(u_1) = w_1$ e $f(u_2) = w_2$. Decidiamo arbitrariamente che sia $u_1 = e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $u_2 = e_4 = (0, 0, 0, 1)$. In questo modo w_1 e w_2 saranno rispettivamente le immagini del terzo e quarto vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$, cioè saranno la terza e quarta colonna della matrice A di f. La matrice di f avrà dunque la seguente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & 2 & 1 \\ b & b' & 0 & -1 \\ c & c' & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Facciamo notare che la nostra scelta è del tutto arbitraria (il che fa capire che una tale funzione f non è certo unica). Ad esempio, se avessimo deciso che i vettori w_1 e w_2 dovevano essere le immagini del primo e secondo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$, cioè la prima e la seconda colonna della matrice A, la matrice di f rispetto alle basi canoniche avrebbe avuto la forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & a' \\ 0 & -1 & b & b' \\ 1 & 2 & c & c' \end{pmatrix}$$

Continuiamo comunque con la nostra prima scelta. Dobbiamo ora determinare i 6 coefficienti incogniti a, b, c, a', b', c'. Per fare ciò ricordiamo che i vettori v_1 e v_2 devono appartenere al nucleo di f. Ciò significa che si deve avere

$$\begin{pmatrix} a & a' & 2 & 1 \\ b & b' & 0 & -1 \\ c & c' & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & a' & 2 & 1 \\ b & b' & 0 & -1 \\ c & c' & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo i sistemi così ottenuti si trova

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a' = 0 \\ b' = 2 \\ c' = -3 \end{cases}$$

La matrice cercata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si può ora facilmente verificare che il nucleo di tale matrice ha dimensione 2 ed è generato dai vettori v_1 e v_2, mentre l'immagine, anch'essa di dimensione 2, è generata dai vettori w_1 e w_2, come richiesto. Da quanto appena visto si conclude così che una funzione f avente i requisiti richiesti esiste ma non è unica; il suo rango non è altro che la dimensione dell'immagine di f, cioè è pari a 2 (dato che i vettori w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti).

Infine, richiedere che il vettore $w = (t, 2, -1)$ appartenga all'immagine di f, equivale a richiedere che esso sia combinazione lineare dei vettori w_1 e w_2:

$$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2.$$

Si ottiene così il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} t = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2 = -\lambda_2 \\ -1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} t = 4 \\ \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Si conclude così che $w \in \operatorname{Im}(f)$ se e solo se $t = 4$.

Esercizio 1.13. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche. Dato il vettore $u = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$, si determini $f^{-1}(u)$. La funzione f è invertibile?

Soluzione. Una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non può certo essere invertibile (altrimenti sarebbe un isomorfismo e dunque $\mathbb{R}^3$ sarebbe isomorfo a $\mathbb{R}^2$, il che non è). Pertanto con la notazione $f^{-1}(u)$ non si intende la "funzione inversa di f applicata al vettore u" (dato che, in questo caso, la "funzione inversa di f" non esiste), ma piuttosto l'*immagine inversa* del vettore u, definita come segue:

$$f^{-1}(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = u\}.$$

Questa definizione ha perfettamente senso (anche se f non è invertibile), in quando non viene mai usata la funzione inversa f^{-1}.

Posto $v = (x_1, x_2, x_3)$, richiedere che $f(v) = u$ equivale a richiedere che si abbia

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Risolvendo si trova

$$\begin{cases} x_2 = 4 - x_1 \\ x_3 = 1 - 2x_1 \\ x_1 \text{ qualunque.} \end{cases}$$

Posto $x_1 = t$, si ha pertanto

$$f^{-1}(u) = \{(t, 4-t, 1-2t) \mid \forall t \in \mathbb{R}\} = (0,4,1) + \langle(1,-1,-2)\rangle.$$

Per terminare si può notare che il vettore $(1,-1,-2)$ è il generatore del nucleo di f.

Esercizio 1.14. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Dati i vettori $w_1 = (2,3,a,-1)$ e $w_2 = (1,4,-1,b)$, si determinino i valori di a e b in modo tale che $w_1, w_2 \in W$ (In tutte le domande seguenti si sostituiscano ad a e b i valori trovati).

(b) Si determini $w_3 \in W$ tale che $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di W.

(c) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = W$ e si dica se tale f è unica. Se una tale funzione esiste, se ne scriva la matrice rispetto alle basi canoniche e se ne calcoli il nucleo. È vero che, se una tale f esiste, essa deve necessariamente avere un autovalore uguale a zero?

(d) Dato il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (3,-1,2,2)$ e $u_2 = (1,2,-1,2)$, si determini una base di $U \cap W$.

Soluzione. Il vettore $w_1 = (2,3,a,-1)$ appartiene al sottospazio W se e solo se le sue componenti soddisfano l'equazione $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ di W. Sostituendo, si trova $a = 9$. Analogamente, sostituendo le componenti del vettore $w_2 = (1,4,-1,b)$ nell'equazione di W, si trova $b = -7$. D'ora in poi poniamo $w_1 = (2,3,9,-1)$ e $w_2 = (1,4,-1,-7)$.

Per determinare un vettore w_3 tale che $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di W osserviamo che il sottospazio W ha dimensione 3 (essendo determinato da *una* equazione lineare in *quattro* incognite). Pertanto è sufficiente trovare un vettore w_3 le cui componenti soddisfino l'equazione $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ e tale che i vettori w_1, w_2 e w_3 siano linearmente indipendenti. Naturalmente esistono infinite possibili scelte di un tale vettore; una delle più semplici è $w_3 = (1,0,1,0)$ (per verificare che i vettori w_1, w_2 e w_3 sono linearmente indipendenti si può calcolare il rango della matrice le cui righe sono i tre vettori dati; utilizzando l'eliminazione di Gauss è facile verificare che tale matrice ha rango 3).

Per stabilire se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = W$ basta ricordare che l'immagine di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è generata dalle immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^4$. Per definire una tale f basta quindi porre $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$ e $f(e_4) = \mathbf{0}$, ove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Naturalmente infinite altre scelte sono possibili, ad esempio $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$ e $f(e_4) = w_1$, oppure $f(e_1) = \mathbf{0}$, $f(e_2) = w_1$, $f(e_3) = w_2$ e $f(e_4) = w_3$, ecc. La conclusione è quindi che una funzione f

con le caratteristiche richieste esiste, ma non è unicamente determinata (anzi, ne esistono infinite). Scegliamo dunque una di tali funzioni, ad esempio quella definita ponendo $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$ e $f(e_4) = \mathbf{0}$. La matrice di tale funzione rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dalla definizione si deduce immediatamente che il nucleo di f è generato dal vettore e_4 (questo perché $f(e_4) = \mathbf{0}$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) = 4 - \dim(\operatorname{Im} f) = 4 - 3 = 1$). Infine osserviamo che ogni funzione f con le caratteristiche richieste deve necessariamente avere nucleo diverso da zero (più precisamente, deve avere nucleo di dimensione 1, dato che $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 4$). Per ogni vettore $v \in \operatorname{Ker} f$ si ha $f(v) = \mathbf{0} = 0\,v$, il che significa che v è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0$. Si conclude così che ogni tale funzione lineare f possiede necessariamente un autovalore uguale a zero.

Consideriamo ora il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 2, 2)$ e $u_2 = (1, 2, -1, 2)$. Il generico vettore $u \in U$ è una combinazione lineare dei vettori u_1 e u_2:

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 = (3\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta, 2\alpha + 2\beta).$$

Richiedere che u appartenga al sottospazio W equivale a richiedere che le sue componenti soddisfino l'equazione di W, cioè che si abbia

$$(3\alpha + \beta) + 3(-\alpha + 2\beta) - (2\alpha - \beta) + 2(2\alpha + 2\beta) = 0,$$

che equivale a $\alpha = -6\beta$. Il fatto che ci sia un solo parametro libero di variare (nel nostro caso, β) ci permette di concludere che $U \cap W$ ha dimensione 1. Per trovare una base possiamo porre $\beta = -1$, da cui si ottiene $\alpha = 6$. Si ottiene così il vettore

$$u = 6u_1 - u_2 = (17, -8, 13, 10)$$

il quale è una base del sottospazio $U \cap W$.

Esercizio 1.15. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 2, 2)$, $u_2 = (1, 2, -1, 3)$, $u_3 = (1, -5, 4, -4)$. Si indichi poi con W l'immagine della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x - y, x + 3z, 3x + y + z, 2y - 3z).$$

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Dato il vettore $\tilde{v} = (1, 4, t, -1)$, si stabilisca se esiste un valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$.

(e) Si stabilisca se esistono delle funzioni lineari $g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $g(U) = W$ e $h(W) = U$.

Soluzione. Si verifica facilmente che i vettori u_1, u_2 e u_3 sono linearmente dipendenti (infatti si ha $u_3 = u_1 - 2u_2$), mentre i vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti. Ciò permette di affermare che una base di U è costituita dai vettori u_1 e u_2. Un generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ si scrive dunque come combinazione lineare dei vettori u_1 e u_2:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(3, -1, 2, 2) + \beta(1, 2, -1, 3).$$

Questa equazione vettoriale equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1 = 3\alpha + \beta \\ x_2 = -\alpha + 2\beta \\ x_3 = 2\alpha - \beta \\ x_4 = 2\alpha + 3\beta \end{cases}$$

da cui, ricavando α e β da due delle quattro equazioni e sostituendo nelle due equazioni rimanenti, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Queste sono dunque le equazioni cartesiane del sottospazio U (come controllo, si può facilmente verificare che i vettori u_1 e u_2 soddisfano le equazioni appena trovate).

Dalla definizione della funzione f si deduce che la sua matrice rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha rango 3 (come si verifica facilmente), quindi $W = \operatorname{Im} f$ ha dimensione 3 e una base di W è costituita dalle colonne della matrice A. Per trovare l'equazione cartesiana di W possiamo usare un metodo analogo a quello utilizzato per determinare le equazioni di U. Un generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ si scrive come combinazione lineare delle tre colonne di A:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(2, 1, 3, 0) + \beta(-1, 0, 1, 2) + \gamma(0, 3, 1, -3).$$

Questa equazione vettoriale equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha + 3\gamma \\ x_3 = 3\alpha + \beta + \gamma \\ x_4 = 2\beta - 3\gamma \end{cases}$$

da cui, ricavando α, β e γ da tre delle quattro equazioni e sostituendo nell'equazione rimanente, si ottiene la seguente equazione

$$13x_1 + 19x_2 - 15x_3 + 14x_4 = 0,$$

la quale è dunque l'equazione cartesiana del sottospazio W.

Poiché abbiamo le equazioni cartesiane di U e di W, per trovare una base di $U \cap W$ basta mettere a sistema le equazioni trovate:

$$U \cap W : \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_3 - 5x_4 = 0 \\ 13x_1 + 19x_2 - 15x_3 + 14x_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si scopre che esso ammette infinite soluzioni (dipendenti da un parametro) e che lo spazio delle soluzioni è generato dal vettore $(17, -8, 13, 9)$. Questo vettore è dunque una base di $U \cap W$. Dalla formula di Grassmann si ricava poi

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4,$$

quindi $U + W = \mathbb{R}^4$ e come base di $U + W$ si può prendere una qualunque base di $\mathbb{R}^4$ (ad esempio la base canonica).

Dato il vettore $\tilde{v} = (1, 4, t, -1)$, richiedere che $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$, equivale a richiedere che $\tilde{v} \in \operatorname{Im} f = W$, il che equivale a richiedere che $\tilde{v}$ si possa scrivere come combinazione lineare dei vettori di una base di W:

$$(1, 4, t, -1) = \alpha(2, 1, 3, 0) + \beta(-1, 0, 1, 2) + \gamma(0, 3, 1, -3).$$

Si ottiene così il seguente sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - \beta \\ 4 = \alpha + 3\gamma \\ t = 3\alpha + \beta + \gamma \\ -1 = 2\beta - 3\gamma \end{cases}$$

risolvendo il quale si trova $t = 5$.

Per rispondere all'ultima domanda basta osservare che $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$. Una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g(U) = W$ non può esistere: se essa esistesse, i tre vettori di una base di W dovrebbero essere immagini tramite g di tre vettori linearmente indipendenti di U, ma questo è impossibile, dato che U ha dimensione 2. Viceversa, una funzione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $h(W) = U$ esiste certamente (anzi, ne esistono infinite). Una tale funzione h può essere definita nel modo seguente. Indichiamo con $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W e completiamo tale base ad una base $\{w_1, w_2, w_3, v\}$ di $\mathbb{R}^4$. Detta $\{u_1, u_2\}$ una base di U, definiamo una funzione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ponendo $h(w_1) = u_1$, $h(w_2) = u_2$, $h(w_3) = \mathbf{0}$ e $h(v) = \mathbf{0}$ (ricordiamo che per definire una funzione lineare tra due spazi vettoriali è sufficiente specificare le immagini dei vettori di una base del dominio). È immediato verificare che una tale h soddisfa la proprietà $h(W) = U$.

Esercizio 1.16. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

(a) Si determini la dimensione e una base di M.

(b) Indicato con S il sottospazio di M costituito dalle matrici simmetriche, si determini la dimensione e una base di S.

(c) Sia U il sottospazio vettoriale di M generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si scrivano le equazioni cartesiane di U e si determini una base di $U \cap S$.

(d) Sia $f : M \to \mathbb{R}$ la funzione che associa ad una matrice $X \in M$ la traccia della matrice prodotto XA, ove A è una matrice (qualunque) fissata (si ricordi che la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale). Si stabilisca se la funzione f è lineare.

(e) Sia $P \subset M$ l'insieme delle matrici i cui coefficienti sono ≥ 0. P è un sottospazio vettoriale di M? Se la risposta è No, chi è il sottospazio generato da P?

(f) Chi è il sottospazio vettoriale di M generato dall'insieme di tutte le matrici invertibili?

Soluzione. M è l'insieme delle matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dato che ogni tale matrice si scrive in modo unico nella forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si deduce che le matrici

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono una base di M e quindi $\dim M = 4$.

L'insieme S (formato dalle matrici simmetriche) è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,:\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ogni matrice di S si scrive in modo unico nella forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e pertanto le matrici

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono una base di S e quindi $\dim S = 3$.

Dato che U è generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

la generica matrice di U è una combinazione lineare delle due matrici date:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = -3\alpha + 2\beta \\ z = -2\alpha + 4\beta \\ w = 4\alpha \end{cases}$$

da cui si ricava $\alpha = \frac{1}{4} w$ e $\beta = x$. Sostituendo nelle rimanenti due equazioni si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 8x - 4y - 3w = 0 \\ 8x - 2z - w = 0. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cartesiane del sottospazio U. Richiedere che la generica matrice

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

di U appartenga all'insieme S delle matrici simmetriche equivale a richiedere che sia $y = z$. Da ciò segue che le equazioni del sottospazio $U \cap S$ sono

$$\begin{cases} 8x - 4y - 3w = 0 \\ 8x - 2z - w = 0 \\ y = z. \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni (dipendenti da un parametro), date da

$$\begin{cases} y = 8x \\ z = 8x \\ w = -8x \end{cases}$$

da cui si deduce che $U \cap S$ ha dimensione 1 e una sua base è costituita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$$

ottenuta ponendo $x = 1$ nel sistema precedente.

Consideriamo ora la funzione $f : M \to \mathbb{R}$ che associa ad una matrice $X \in M$ la traccia della matrice prodotto XA, ove A è una matrice fissata. Se poniamo

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si ha

$$XA = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + cw & bz + dw \end{pmatrix}$$

e quindi la funzione f è data dalla seguente espressione

$$f(X) = ax + cy + bz + dw.$$

Da questo calcolo esplicito si deduce immediatamente che f è una funzione lineare di X (cioè delle quattro variabili x, y, z, w).

Indichiamo ora con $P \subset M$ l'insieme delle matrici i cui coefficienti sono ≥ 0. Se $A \in P$, la matrice $-A$ avrà coefficienti ≤ 0 quindi, in generale, $-A \notin P$; ciò significa che P non è un sottospazio vettoriale. Notiamo che le quattro matrici di base E_1, E_2, E_3, E_4 appartengono a P, quindi appartengono anche al sottospazio vettoriale generato da P. Poiché queste quattro matrici sono una base di M, il più piccolo spazio vettoriale che le contiene è M stesso, quindi lo spazio vettoriale generato da P è M.

Indichiamo con I l'insieme di tutte le matrici invertibili

$$I = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}.$$

Per determinare lo spazio vettoriale generato da I basta osservare che è possibile trovare una base di M costituita da matrici invertibili. Ad esempio, le quattro matrici

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono invertibili e sono una base di M, come si può facilmente verificare (basta verificare che le matrici G_1, G_2, G_3, G_4 sono linearmente indipendenti). Ciò significa che lo spazio vettoriale generato da I coincide con lo spazio vettoriale generato dalle matrici G_1, G_2, G_3, G_4, cioè con M.

Esercizio 1.17. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Dato il vettore $u_t = (7, 2, t, 1)$ si determini t in modo che $u_t \in \mathrm{Ker}(f)$.

(c) Dato il vettore $w_t = (2, t, 0)$ si dica per quale valore di t si ha $f^{-1}(w_t) \neq \varnothing$.

(d) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 2, 2)$ e $u_2 = (1, 1, 1, 3)$. Si determini una base del sottospazio $f(U)$.

(e) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che la funzione composta $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste se ne determini la matrice.

Soluzione. Per determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni (dipendenti da due parametri), date da

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3 \\ x_4 = 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che il nucleo di f ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $(2, 1, 0, 2)$ e $(-1, 0, 1, 1)$.

Avendo visto che $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$ si deduce che $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, quindi una base dell'immagine di f è costituita da due colonne linearmente indipendenti della matrice A, ad esempio dai vettori $(-2, 0, -6)$ e $(0, -1, 2)$.

Facciamo notare che un altro modo per calcolare la dimensione dell'immagine di f sarebbe stato quello di calcolare il rango di A. Infatti, mediante operazioni elementari sulle righe, la matrice A può essere ridotta alla seguente forma a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che il rango di A (cioè $\dim \mathrm{Im}(f)$) è uguale a 2.

Consideriamo ora il vettore $u_t = (7, 2, t, 1)$. Richiedere che $u_t \in \mathrm{Ker}(f)$ equivale a richiedere che

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

che equivale a

$$\begin{pmatrix} 3+t \\ 6+2t \\ -3-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava $t = -3$.

Per il prossimo punto, si ha che $f^{-1}(w_t) \neq \varnothing$ equivale a richiedere che esista un vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tale che $f(v) = w_t$. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = t \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si scopre che esso ammette soluzioni se e solo se $t = 3$.

Un altro modo per affrontare la stessa questione è quello di osservare che $f^{-1}(w_t) \neq \varnothing$ se e solo se $w_t \in \mathrm{Im}(f)$, cioè se e solo se w_t è combinazione lineare dei due vettori della base di $\mathrm{Im}(f)$ scelti in precedenza. Si deve dunque avere

$$\begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava $t = 3$.

Consideriamo ora il sottospazio U generato da u_1 e u_2. Applicando la funzione f, si ha che $f(U)$ è generato dai vettori $f(u_1)$ e $f(u_2)$. Naturalmente il fatto che u_1 e u_2 siano linearmente indipendenti non implica che anche le loro immagini $f(u_1)$ e $f(u_2)$ lo siano. Si ha infatti $f(u_1) = (7, 5, 11)$, mentre $f(u_2) = (0, 0, 0)$. Da ciò segue che una base del sottospazio $f(U)$ è costituita dal solo vettore $f(u_1) = (7, 5, 11)$.

Veniamo ora all'ultimo punto. Per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$(f \circ g)(v) = f(g(v)) \in \operatorname{Im}(f).$$

Si ha pertanto $\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$ e poiché $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$, è necessariamente $\dim \operatorname{Im}(f \circ g) \leq 2$. Ciò significa che non può esistere una funzione g tale che $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, perché $\dim \operatorname{Im}(f \circ g) \leq 2$ mentre $\dim \operatorname{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 3$.

Esercizio 1.18. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0, 1)$, $f(1, 1, 0) = (1, 4, 2, 0)$, $f(1, 1, 1) = (2, 4, 5, 2)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle due equazioni $y_1 + y_2 + 7y_4 = 0$ e $5y_1 + 2y_3 + 8y_4 = 0$. Si dimostri che $f(U) = W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, -1, 1, 5) \in \mathbb{R}^4$, si determini il valore di t per cui si ha $f^{-1}(v_t) \neq \varnothing$.

Soluzione. Ricordiamo che le colonne di A sono le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0, 1)$ è dato. Si ha poi

$$\begin{aligned} f(0, 1, 0) &= f(1, 1, 0) - f(1, 0, 0) \\ &= (1, 4, 2, 0) - (2, 1, 0, 1) \\ &= (-1, 3, 2, -1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(0, 0, 1) &= f(1, 1, 1) - f(1, 1, 0) \\ &= (2, 4, 5, 2) - (1, 4, 2, 0) \\ &= (1, 0, 3, 2) \end{aligned}$$

La matrice A è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di f è costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

si ha pertanto $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Da ciò si deduce che l'immagine di f ha dimensione 3 e, poiché $\mathrm{Im}(f)$ è generata dalle colonne di A, le tre colonne di A sono dunque linearmente indipendenti e sono una base dell'immagine di f.

Consideriamo ora il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^3$ di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$. Ricavando x_2, si ha

$$U : x_2 = 2x_1 + 3x_3,$$

da cui segue che U ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $u_1 = (1, 2, 0)$ e $u_2 = (0, 3, 1)$.

Il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ è definito dal sistema

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 7y_4 = 0 \\ 5y_1 + 2y_3 + 8y_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} y_2 = -y_1 - 7y_4 \\ y_3 = -\dfrac{5}{2}y_1 - 4y_4 \end{cases}$$

Ciò significa che anche W ha dimensione 2 (non è necessario determinare una sua base).

Ora calcoliamo l'immagine tramite f dei vettori della base di U:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= Au_1 = (0, 7, 4, -1) \\ f(u_2) &= Au_2 = (-2, 9, 9, -1). \end{aligned}$$

Sostituendo le coordinate dei vettori $f(u_1)$ e $f(u_2)$ nelle equazioni del sottospazio W, si verifica che $f(u_1) \in W$ e $f(u_2) \in W$, da cui segue che $f(U) \subseteq W$. A questo punto basta osservare che i vettori $f(u_1)$ e $f(u_2)$ sono linearmente indipendenti, quindi $f(U)$ ha dimensione 2. Poiché anche W ha dimensione 2, dall'inclusione $f(U) \subseteq W$ si deduce che deve necessariamente valere l'uguaglianza $f(U) = W$.

Dato il vettore $v_t = (t, -1, 1, 5)$, si ha $f^{-1}(v_t) \neq \varnothing$ se e solo se $v_t \in \mathrm{Im}(f)$, cioè se e solo se v_t è combinazione lineare delle colonne di A. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + a_3 = t \\ a_1 + 3a_2 = -1 \\ 2a_2 + 3a_3 = 1 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 = 5 \end{cases}$$

da cui si ricava, dopo opportuni calcoli, $t = 6$.

Esercizio 1.19. Siano dati i vettori $v_1 = (4, -2, 6)$, $v_2 = (0, 4, 4)$, $v_3 = (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ e si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(1, 0, 1, 0) = v_1$, $f(1, 0, -1, 0) = v_2$ e tale che i vettori $(0, 1, 0, 0)$ e $(2, 0, -1, -3)$ appartengano a $f^{-1}(v_3)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$. Si determini una base di W e una base di $f(W)$. Si determini inoltre una base di $\operatorname{Ker}(f) \cap W$.

(c) Si scriva la matrice della funzione indotta da f, $f|_W : W \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base di W trovata nel punto (b) e alla base canonica del codominio.

Soluzione. Dire che i vettori $(0, 1, 0, 0)$ e $(2, 0, -1, -3)$ appartengano a $f^{-1}(v_3)$ significa che $f(0, 1, 0, 0) = v_3$ e $f(2, 0, -1, -3) = v_3$.

Si ha poi

$$f(2, 0, 0, 0) = f(1, 0, 1, 0) + f(1, 0, -1, 0) = v_1 + v_2 = (4, 2, 10)$$

e quindi $f(1, 0, 0, 0) = (2, 1, 5)$.

Ora abbiamo

$$f(0, 0, 1, 0) = f(1, 0, 1, 0) - f(1, 0, 0, 0) = (4, -2, 6) - (2, 1, 5) = (2, -3, 1)$$

e infine

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0, -3) &= f(2, 0, -1, -3) - 2f(1, 0, 0, 0) + f(0, 0, 1, 0) \\ &= (-1, 2, 0) - (4, 2, 10) + (2, -3, 1) \\ &= (-3, -3, -9) \end{aligned}$$

da cui segue $f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 3)$.

La matrice di f è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di f è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_2 = -8x_1 - 5x_4 \\ x_3 = -5x_1 - 3x_4 \end{cases}$$

Il nucleo di f ha dunque dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $(1, -8, -5, 0)$ e $(0, -5, -3, 1)$.

Poiché $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 4$, si ottiene $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ e pertanto come base dell'immagine di f si possono prendere due (qualsiasi) colonne linearmente indipendenti di A (ad esempio, le prime due).

Il sottospazio W ha equazione $x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$, da cui si ricava

$$x_1 = -3x_3 - x_4.$$

W ha pertanto dimensione 3 (non dimensione 2, perché anche x_2 è libero di variare!) e una sua base è formata dai vettori

$$w_1 = (0, 1, 0, 0), \quad w_2 = (-3, 0, 1, 0), \quad w_3 = (-1, 0, 0, 1).$$

L'immagine di W è dunque generata dalle immagini dei vettori w_1, w_2 e w_3:

$$\begin{aligned} f(w_1) &= Aw_1 = (-1, 2, 0), \\ f(w_2) &= Aw_2 = (-4, -6, -14), \\ f(w_3) &= Aw_3 = (-1, 0, -2). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che i vettori $f(w_1)$, $f(w_2)$, $f(w_3)$ sono linearmente dipendenti, infatti si ha $f(w_2) = -3f(w_1) + 7f(w_3)$, quindi essi non sono una base di $f(W)$. Eliminando, ad esempio, $f(w_2)$ i vettori rimanenti $f(w_1)$ e $f(w_3)$ sono linearmente indipendenti e sono ora una base di $f(W)$.

Abbiamo già visto che $\mathrm{Ker}(f)$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\mathrm{Ker}(f) : \begin{cases} x_2 = -8x_1 - 5x_4 \\ x_3 = -5x_1 - 3x_4 \end{cases}$$

Mettendo a sistema con l'equazione di W si ottiene

$$\mathrm{Ker}(f) \cap W : \begin{cases} x_2 = -8x_1 - 5x_4 \\ x_3 = -5x_1 - 3x_4 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo si trova

$$\mathrm{Ker}(f) \cap W : \begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{4}x_1 \\ x_3 = \dfrac{1}{4}x_1 \\ x_4 = -\dfrac{7}{4}x_1 \end{cases}$$

Si ha dunque $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap W) = 1$ e una sua base è formata dal vettore $(4, 3, 1, -7)$.

Sia B la matrice della funzione indotta da f, $f|_W : W \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base di W trovata in precedenza e alla base canonica del codominio. Le colonne di B sono quindi formate dalle coordinate delle immagini tramite f dei vettori w_1, w_2, w_3, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Poiché abbiamo già visto che è

$$f(w_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(w_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad f(w_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & -14 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.20.

(a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1,1,0)\rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(0,1,-1),(2,1,2)\rangle$. Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(b) Tale f è unica? Perché?

(c) Per la f di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1,1,1)$ e di $(2,2,1)$.

Soluzione. Per determinare la matrice di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con le proprietà richieste, ricordiamo che l'immagine di f è generata dalle colonne della sua matrice A. Poiché sappiamo che $\mathrm{Im}(f) = \langle(0,1,-1),(2,1,2)\rangle$, possiamo scrivere una matrice A che abbia i vettori $(0,1,-1)$ e $(2,1,2)$ come due delle sue tre colonne; ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ b & 1 & 1 \\ c & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora bisogna richiedere che il vettore $(1,1,0)$ appartenga al nucleo di una tale matrice, il che significa che deve essere

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ b & 1 & 1 \\ c & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + 1 = 0 \\ c - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

La matrice A cercata è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si osserva subito che la prima colonna è l'opposto della seconda, quindi il sottospazio vettoriale generato dalle tre colonne di A coincide con il sottospazio generato dalla seconda e terza colonna di A, che è precisamente $\mathrm{Im}(f)$.

Naturalmente una tale funzione f non è unica, viste le scelte arbitrarie che abbiamo fatto per costruire una matrice A con le proprietà richieste. Ad esempio, se fossimo partiti dalla matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

richiedendo che il vettore $(1,1,0)$ appartenga al nucleo di A' avremmo trovato

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

e avremmo così ottenuto la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che corrisponde dunque ad una diversa funzione lineare con le stesse proprietà richieste alla funzione f.

Ritorniamo ora alla funzione f di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'antiimmagine del vettore $(1,1,1)$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che si riscrive come segue

$$\begin{cases} 2z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Poiché tale sistema non ammette soluzioni, si ha $f^{-1}(1,1,1) = \varnothing$.

Infine, l'antiimmagine del vettore $(2,2,1)$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che si riscrive come segue

$$\begin{cases} 2z = 2 \\ -x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si trova

$$\begin{cases} z = 1 \\ x = y - 1 \\ y \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Ponendo $y = t$ si ha allora

$$f^{-1}(2,2,1) = \{(t-1,t,1) \mid \forall t \in \mathbb{R}\},$$

che si può anche riscrivere nella forma

$$f^{-1}(2,2,1) = (-1,0,1) + \langle (1,1,0) \rangle.$$

1.3 Eliminazione di Gauss

Esercizio 1.21. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & b+3 & -2 \\ -3 & 3a+6 & 3a-6 & 3 \\ 1 & a-b-1 & a-b+4 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Soluzione. Ricordiamo che le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, non alterano il rango di una matrice, tuttavia alcune di queste operazioni modificano il determinante. Poiché nel problema in questione è richiesto anche il calcolo del determinante della matrice A, sarà necessario tener conto delle eventuali modifiche del determinante provocate dalle operazioni elementari (sulle righe o sulle colonne) che andremo ad effettuare.

Iniziamo osservando che tutti gli elementi della prima riga di A sono divisibili per 2, mentre quelli della terza riga sono divisibili per 3. Se "raccogliamo" il 2 e il 3, otteniamo

$$\det A = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & b+3 & -2 \\ -1 & a+2 & a-2 & 1 \\ 1 & a-b-1 & a-b+4 & 0 \end{vmatrix}$$

Ora effettuiamo le seguenti operazioni elementari: alla seconda riga sottraiamo la prima, alla terza riga sommiamo la prima e alla quarta riga sottraiamo la prima. Ricordiamo che queste operazioni non modificano il determinante. Si ha quindi:

$$\det A = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & b & -1 \\ 0 & a & a+1 & 0 \\ 0 & a-b+1 & a-b+1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ora scambiamo la seconda colonna con la quarta; osserviamo che così facendo il determinante cambia di segno:

$$\det A = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 1 & a-b+1 & a-b+1 \end{vmatrix}$$

Il prossimo passo consiste nel sommare la seconda riga alla quarta (il determinante non cambia):

$$\det A = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & a+1 & a-b+2 \end{vmatrix}$$

Per terminare, alla quarta riga sottraiamo la terza (il determinante non cambia):

$$\det A = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -b+2 \end{vmatrix}$$

Abbiamo così trasformato la matrice A in una matrice triangolare superiore, come richiesto. Il calcolo del determinante è ora immediato:

$$\det A = 6(a+1)(2-b).$$

Il determinante di A si annulla quindi per $a = -1$, oppure per $b = 2$. Analizziamo separatamente i due casi.

Se $a = -1$, la matrice precedente diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -b+2 \end{pmatrix}$$

Essa ha rango 3 per ogni valore di b.

Se $b = 2$, si ottiene invece la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché gli elementi $a+1$ e a non si possono annullare contemporaneamente, questa matrice ha rango 3 per ogni valore di a.

Concludiamo quindi che la matrice A ha rango 3 se $a = -1$ oppure se $b = 2$ (in tutti gli altri casi è $\det A \neq 0$, quindi A ha rango 4).

Esercizio 1.22. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6-2a & 2a+4 & -4 \\ -1 & 2a+b-4 & -2a-4 & 2 \\ 0 & 4-a-2b & a-4 & 2 \\ 1 & a+6 & -a-11 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Soluzione. Ricordiamo che le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, non alterano il rango di una matrice, tuttavia alcune di queste operazioni modificano il determinante. Poiché nel problema in questione è richiesto anche il calcolo del determinante della matrice A, sarà necessario tener conto delle eventuali modifiche del determinante provocate dalle operazioni elementari (sulle righe o sulle colonne) che andremo ad effettuare.

Iniziamo osservando che tutti gli elementi della prima riga di A sono divisibili per 2, quindi si ha

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 3-a & a+2 & -2 \\ -1 & 2a+b-4 & -2a-4 & 2 \\ 0 & 4-a-2b & a-4 & 2 \\ 1 & a+6 & -a-11 & 1 \end{vmatrix}$$

Ora effettuiamo le seguenti operazioni elementari: alla seconda riga sommiamo la prima e alla quarta riga sottraiamo la prima (ricordiamo che queste operazioni non modificano il determinante). Si ha quindi:

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 3-a & a+2 & -2 \\ 0 & a+b-1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 4-a-2b & a-4 & 2 \\ 0 & 2a+3 & -2a-13 & 3 \end{vmatrix}$$

Ora scambiamo la seconda colonna con la quarta; osserviamo che così facendo il determinante cambia di segno:

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & a+2 & 3-a \\ 0 & 0 & -a-2 & a+b-1 \\ 0 & 2 & a-4 & 4-a-2b \\ 0 & 3 & -2a-13 & 2a+3 \end{vmatrix}$$

Per semplificare un po' la terza colonna decidiamo di sommare a questa la quarta colonna (il determinante non cambia):

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3-a \\ 0 & 0 & b-3 & a+b-1 \\ 0 & 2 & -2b & 4-a-2b \\ 0 & 3 & -10 & 2a+3 \end{vmatrix}$$

Ora scambiamo la seconda riga con la terza riga (così facendo il determinante cambia di segno) e poi "raccogliamo" il 2 da quella che è ora la seconda riga:

$$\det A = 4\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3-a \\ 0 & 1 & -b & 2-\frac{a}{2}-b \\ 0 & 0 & b-3 & a+b-1 \\ 0 & 3 & -10 & 2a+3 \end{vmatrix}$$

Il prossimo passo consiste nel sommare alla quarta riga la seconda moltiplicata per -3 (il determinante non cambia):

$$\det A = 4\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3-a \\ 0 & 1 & -b & 2-\frac{a}{2}-b \\ 0 & 0 & b-3 & a+b-1 \\ 0 & 0 & 3b-10 & \frac{7}{2}a+3b-3 \end{vmatrix}$$

Cerchiamo ora di ottenere un pivot uguale a 1 nella terza riga. Per fare ciò moltiplichiamo la terza riga per 3 (questa operazione modifica il determinante):

$$\det A = \frac{4}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3-a \\ 0 & 1 & -b & 2-\frac{a}{2}-b \\ 0 & 0 & 3b-9 & 3a+3b-3 \\ 0 & 0 & 3b-10 & \frac{7}{2}a+3b-3 \end{vmatrix}$$

e ora alla terza riga sottraiamo la quarta (il determinante non cambia):

$$\det A = \frac{4}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3-a \\ 0 & 1 & -b & 2-\frac{a}{2}-b \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\,a \\ 0 & 0 & 3b-10 & \frac{7}{2}\,a+3b-3 \end{vmatrix}$$

Per terminare, alla quarta riga sottraiamo la terza moltiplicata per $3b - 10$ (il determinante non cambia):

$$\det A = \frac{4}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3-a \\ 0 & 1 & -b & 2-\frac{a}{2}-b \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\,a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\,(a+2)(b-1) \end{vmatrix}$$

Abbiamo così trasformato la matrice A in una matrice triangolare superiore, come richiesto. Il calcolo del determinante è ora immediato:

$$\det A = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\,(a+2)(b-1) = 2(a+2)(b-1).$$

Il determinante di A si annulla quindi per $a = -2$, oppure per $b = 1$. Poiché i pivot delle prime tre righe sono diversi da zero (sono tutti uguali a 1), si conclude che, se $a = -2$ oppure $b = 1$, il rango della matrice A è 3, altrimenti tale rango è uguale a 4.

1.4 Sistemi lineari

Esercizio 1.23. Si determini l'intersezione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y - z + w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y + z - w = -1 \\ x + 2z - 2w = 0. \end{cases}$$

Soluzione. L'intersezione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi lineari dati è costituita dai valori di x, y, z e w che soddisfano contemporaneamente le equazioni del primo sistema e le equazioni del secondo sistema. Si tratta dunque delle soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y - z + w = 0 \\ 2y + z - w = -1 \\ x + 2z - 2w = 0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x = 2/7 \\ y = -3/7 \\ z = w - 1/7 \\ w \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Esercizio 1.24. Si discuta e si risolva il seguente sistema lineare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2ax_3 + ax_4 = 1 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - ax_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è la seguente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2a & a & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 1 & -1 & -a & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Utilizziamo l'eliminazione di Gauss, usando esclusivamente operazioni elementari sulle righe. Se alla seconda riga sommiamo la prima e alla quarta riga sottraiamo la prima, otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a+2 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & -2a & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Ora scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & -a & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -2a & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Infine, alla quarta riga sottraiamo il doppio della terza, ottenendo la seguente matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & -a & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-2 & 0 \end{array}\right)$$

Possiamo ora osservare che, se $a \neq -1, 0$, il rango della matrice incompleta del sistema è massimo (pari a 4). Tale matrice è dunque invertibile e pertanto il sistema ammette un'unica soluzione. Il sistema corrispondente all'ultima matrice trovata è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)x_4 = -1 \\ -ax_3 + (a+2)x_4 = 1 \\ (-2a-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

il quale può essere facilmente risolto mediante una "sostituzione all'indietro," ottenendo la seguente soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a-1}{a} \\ x_2 = -\frac{1}{a} \\ x_3 = -\frac{1}{a} \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso $a = -1$. La matrice precedente diventa ora

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In questo caso le due matrici, completa e incompleta, hanno lo stesso rango pari a 3. Per il Teorema di Rouché-Capelli ciò significa che il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un parametro. Infatti, il sistema corrispondente all'ultima matrice è il seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il quale ammette infinite soluzioni date da

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 6x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 \text{ qualunque.} \end{cases}$$

Per terminare ci rimane solo da considerare il caso $a = 0$. La matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Questa matrice non è nella forma a scala. Alla quarta riga sommiamo dunque la terza, ottenendo la matrice seguente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si scopre così che, in questo caso, la matrice incompleta ha rango 3, mentre la matrice completa ha rango 4 e dunque il sistema non ammette soluzioni (cosa del tutto ovvia, dato che l'equazione corrispondente all'ultima riga della matrice precedente sarebbe $0 = 1$).

1.5 Autovalori e autovettori

Esercizio 1.25. Si determini $t \in \mathbb{R}$ in modo tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & t-1 & -3 \end{pmatrix}$$

abbia -7 come autovalore. Per tale valore di t si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si stabilisca se A è diagonalizzabile.

Soluzione. La matrice A ha un autovalore uguale a -7 se e solo se

$$\det\bigl(A - (-7)\mathbf{1}\bigr) = 0.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \det\bigl(A - (-7)\mathbf{1}\bigr) &= \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & t-1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 6 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ t-1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 24(t+1). \end{aligned}$$

Tale determinante è nullo se e solo se $t = -1$. Concludiamo quindi che -7 è un autovalore di A se e solo se $t = -1$.

Per tale valore di t la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora gli autovalori di questa matrice:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & -4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2 + 8\lambda + 7). \end{aligned}$$

Poiché le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0$ sono $\lambda = -1$ e $\lambda = -7$, si conclude che gli autovalori di A sono i seguenti: $\lambda = -1$ (con molteplicità 2) e $\lambda = -7$.

Gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = -7$ sono le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni date da

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{3}\,x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore -7 ha dunque dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_1 = (-4, 6, 3)$ (ottenuto ponendo $x_3 = 3$).

Cerchiamo ora gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni date da

$$\begin{cases} x_1 \text{ qualsiasi} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Si scopre così che l'autospazio relativo all'autovalore -1 ha dimensione 1 (questa è la cosiddetta *molteplicità geometrica*) ed è generato dal vettore $v_2 = (1, 0, 0)$ (ottenuto ponendo $x_1 = 1$). Ricordando che l'autovalore $\lambda = -1$ aveva molteplicità 2 (questa è la *molteplicità algebrica*), si conclude che la matrice A non è diagonalizzabile, dato che per uno dei suoi autovalori le due molteplicità (algebrica e geometrica) non coincidono.

Esercizio 1.26. Dati i vettori $v_1 = (2, -3, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 1, -1)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$.

(a) Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(b) Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità (algebrica) 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

Soluzione. Osserviamo che i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi il nucleo di f e l'immagine di f hanno entrambi dimensione 2. Dire che $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(f)$ significa che esistono dei vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(w_1) = v_1$ e $f(w_2) = v_2$. Naturalmente w_1 e w_2 non sono dati (anzi, essi non sono neppure determinati in modo unico). Scegliamo arbitrariamente come w_1 e w_2 i primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$w_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0), \qquad w_2 = e_2 = (0, 1, 0, 0).$$

Ricordiamo che le colonne della matrice A di f, rispetto alla base canonica, non sono altro che le immagini tramite f dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Ciò significa che le prime due colonne di A sono $f(e_1) = v_1$ e $f(e_2) = v_2$. La matrice A ha dunque la forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a_1 & b_1 \\ -3 & -1 & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & a_3 & b_3 \\ 0 & -1 & a_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

ove $f(e_3) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $f(e_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Osserviamo che non abbiamo ancora usato l'informazione relativa al fatto che il nucleo di f deve essere generato dai vettori v_1 e v_2. Dire che $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ equivale a dire che

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a_1 & b_1 \\ -3 & -1 & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & a_3 & b_3 \\ 0 & -1 & a_4 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & a_1 & b_1 \\ -3 & -1 & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & a_3 & b_3 \\ 0 & -1 & a_4 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottengono così i due sistemi di equazioni lineari

$$\begin{cases} 4 + a_1 = 0 \\ -3 + a_2 = 0 \\ -1 + a_3 = 0 \\ 3 + a_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ 1 + a_2 - b_2 = 0 \\ -1 + a_3 - b_3 = 0 \\ 1 + a_4 - b_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = -4 \\ b_2 = 4 \\ b_3 = 0 \\ b_4 = -2 \end{cases}$$

La matrice A è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -4 & -4 \\ -3 & -1-\lambda & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4.$$

Ciò significa che la matrice A ha un unico autovalore $\lambda = 0$, con molteplicità (algebrica) 4. Gli autovettori relativi a tale autovalore sono le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè sono i vettori del nucleo di A (cioè di f). Poiché sappiamo già che il nucleo di f ha dimensione due, concludiamo che la molteplicità geometrica (cioè $\dim \mathrm{Ker}(f)$) è diversa dalla molteplicità algebrica, quindi la matrice A non è diagonalizzabile.

Esercizio 1.27. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e sia $f : V \to V$ la funzione lineare definita da $f(v_1) = 2v_1 + 3v_2$, $f(v_2) = 3v_1 + 2v_2$, $f(v_3) = v_1 + 3v_3 + 2v_4$, $f(v_4) = 2v_1 - v_2 + 2v_3 + 3v_4$. Si determinino tutti gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

Soluzione. La matrice di f rispetto alla base data è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \det(A - x \cdot \mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2-x & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 6x + 5). \end{aligned}$$

Il polinomio $x^2 - 4x - 5$ si annulla per $x = -1$ e per $x = 5$, mentre il polinomio $x^2 - 6x + 5$ si annulla per $x = 1$ e per $x = 5$. Gli autovalori della matrice A (cioè gli autovalori di f) sono dunque i seguenti: $\lambda_1 = -1$ (con molteplicità 1), $\lambda_2 = 1$ (con molteplicità 1) e $\lambda_3 = 5$ (con molteplicità 2).

Cerchiamo ora gli autovettori. Per l'autovalore $\lambda_1 = -1$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che fornisce il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ ha quindi dimensione 1 ed è generato dal vettore $w_1 = v_1 - v_2$ (l'autovettore w_1 ha coordinate $(1, -1, 0, 0)$ rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 di V).

Per l'autovalore $\lambda_2 = 1$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che fornisce il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = -2x_2. \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ ha quindi dimensione 1 ed è generato dal vettore $w_2 = v_1 - v_2 - 2v_3 + 2v_4$ (l'autovettore w_2 ha coordinate $(1, -1, -2, 2)$ rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 di V).

Infine, per l'autovalore $\lambda_3 = 5$ (il quale ha molteplicità algebrica pari a 2) si ha:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che fornisce il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 5$ ha quindi dimensione 1 ed è generato dal vettore $w_3 = v_1 + v_2$ (l'autovettore w_3 ha coordinate $(1, 1, 0, 0)$ rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 di V). Concludiamo così che la matrice A (cioè la funzione lineare f) non è diagonalizzabile, in quanto per l'autovalore $\lambda_3 = 5$ la molteplicità geometrica (cioè la dimensione dell'autospazio corrispondente) è diversa dalla molteplicità algebrica.

Esercizio 1.28. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ e $f(v_3) = w_3$, ove $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,-1,0)$, $v_3 = (0,-1,-1)$, $w_1 = (6,4,10)$, $w_2 = (5,-1,4)$, $w_3 = (-1,-2,-3)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

Soluzione. Per scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo calcolare $f(e_1)$, $f(e_2)$ e $f(e_3)$, ove $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. A tal fine cerchiamo di esprimere e_1 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2 e v_3:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = e_1,$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -3. \end{cases}$$

Si ha dunque $e_1 = -v_1 + v_2 - 3v_3$, da cui si ottiene

$$f(e_1) = -f(v_1) + f(v_2) - 3f(v_3) = -w_1 + w_2 - 3w_3 = (2,1,3).$$

Il procedimento per calcolare $f(e_2)$ e $f(e_3)$ è del tutto analogo. Scriviamo e_2 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2 e v_3:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = e_2.$$

Si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -6. \end{cases}$$

Si ha dunque $e_2 = -2v_1 + v_2 - 6v_3$, da cui si ottiene

$$f(e_2) = -2f(v_1) + f(v_2) - 6f(v_3) = -2w_1 + w_2 - 6w_3 = (-1,3,2).$$

Infine, esprimiamo e_3 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2 e v_3:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = e_3.$$

Si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 5. \end{cases}$$

Si ha dunque $e_3 = 2v_1 - v_2 + 5v_3$, da cui si ottiene

$$f(e_3) = 2f(v_1) - f(v_2) + 5f(v_3) = 2w_1 - w_2 + 5w_3 = (2, -1, 1).$$

La matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A si poteva anche determinare in un altro modo. Infatti, se A è la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, si deve avere

$$Av_1 = w_1, \quad Av_2 = w_2, \quad Av_3 = w_3,$$

il che equivale a

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Da questa uguaglianza si deduce che

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dobbiamo dunque calcolare l'inversa della matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Procediamo come segue. Scriviamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora effettuiamo le seguenti operazioni elementari *sulle righe*: alla seconda riga sottraiamo il doppio della prima e alla terza riga sottraiamo il triplo della prima:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora dividiamo la seconda riga per -5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Alla terza riga sommiamo la seconda moltiplicata per 6:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \end{array}\right)$$

Ora moltiplichiamo la terza riga per 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

Ora alla seconda riga sottraiamo la terza divisa per 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

Per terminare, alla prima riga sottraiamo il doppio della seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

Si conclude quindi che l'inversa della matrice P è

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha dunque

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

I vettori del nucleo di f sono i vettori (x_1, x_2, x_3) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{7}\, x_3 \\ x_2 = \frac{4}{7}\, x_3 \\ x_3 \text{ qualsiasi,} \end{cases}$$

da cui si deduce che $\operatorname{Ker}(f)$ ha dimensione 1 e una sua base è costituita dal vettore $v = (-5, 4, 7)$.

Poiché $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, si ha $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ e quindi per trovare una base dell'immagine di f basta trovare due vettori linearmente indipendenti che appartengano a $\operatorname{Im} f$. Si possono quindi scegliere le prime due colonne della matrice A, oppure i vettori w_1 e w_2, oppure w_2 e w_3, ecc.

Per calcolare gli autovalori di f (cioè di A) calcoliamo il suo polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 8).$$

Gli zeri di tale polinomio (cioè gli autovalori di A) sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$. Dato che la matrice A possiede tre autovalori distinti essa avrà anche tre autovettori linearmente indipendenti. Esisterà quindi una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A (cioè di f), il che equivale a dire che A (cioè f) è diagonalizzabile.

Ora non rimane altro da fare che determinare gli autovettori della matrice A. Per l'autovalore $\lambda_1 = 0$ bisogna risolvere il sistema

$$(A - 0 \cdot \mathbf{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono dunque i vettori del nucleo di f, che abbiamo già calcolato in precedenza.

Per l'autovalore $\lambda_2 = 2$ bisogna risolvere il sistema

$$(A - 2 \cdot \mathbf{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 \text{ qualunque} \end{cases}$$

quindi l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(-1, 2, 1)$.

Infine, per l'autovalore $\lambda_3 = 4$, bisogna risolvere il sistema

$$(A - 4 \cdot \mathbf{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ qualunque} \end{cases}$$

quindi l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 4$ ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(1, 0, 1)$.

Esercizio 1.29. Siano dati i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = 3v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3 + 2v_2$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.

(c) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Soluzione. Se A è la matrice di f rispetto alle basi canoniche, si deve avere

$$Av_1 = 3v_1, \qquad Av_2 = 2v_2, \qquad Av_3 = 2v_3 + 2v_2,$$

il che equivale a

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Posto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha dunque

$$AP = PD, \qquad \text{cioè} \qquad A = PDP^{-1}.$$

Per determinare la matrice A dobbiamo quindi calcolare l'inversa della matrice P. Procediamo come segue. Scriviamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora effettuiamo le seguenti operazioni elementari *sulle righe*: alla seconda riga sottraiamo la prima e alla terza riga sottraiamo la seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ora scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Alla terza riga sommiamo il doppio della seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Ora dividiamo la terza riga per 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ora alla seconda riga sottraiamo il doppio della terza e alla prima riga sottraiamo la terza:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Per terminare, alla prima riga sottraiamo il doppio della seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Si conclude quindi che l'inversa della matrice P è

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gli autovalori di f sono, naturalmente, gli autovalori della matrice A, ma questi coincidono con gli autovalori della matrice D, dato che A e D sono simili (A è la matrice di f rispetto alla base canonica, mentre D è la matrice di f rispetto alla base formata dai vettori v_1, v_2 e v_3 assegnati). Poiché D è una matrice triangolare superiore, si riconosce immediatamente che i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale. Possiamo quindi affermare che gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 2$, con molteplicità 2, e $\lambda_2 = 3$ (con molteplicità 1). L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ è generato dal vettore v_2 (si ricordi che si ha $f(v_2) = 2v_2$), quindi ha dimensione 1; da ciò si deduce che f non è diagonalizzabile. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ è generato dal vettore v_1 (si ricordi che si ha $f(v_1) = 3v_1$). Si noti che v_3 non è un autovettore di f, dato che $f(v_3) = 2v_3 + 2v_2$.

Per terminare, osserviamo che i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti e quindi l'intersezione tra i sottospazi da essi generati è nulla:

$$\langle v_1 \rangle \cap \langle v_2 \rangle = \varnothing.$$

Ciò significa che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 1.30. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -t & 3+t & -t \\ 3-t & t & 3-t \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

Soluzione. Per vedere se A è invertibile calcoliamo il suo determinante. Se alla prima riga sottraiamo la seconda, si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 3-t & t & 3-t \\ 6 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

Ora alla terza riga sommiamo il doppio della prima, ottenendo così

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 3-t & t & 3-t \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dato che il determinante di A è nullo per ogni valore di t, si conclude che la matrice A non è invertibile per alcun valore del parametro t. (Naturalmente, per concludere che $\det A = 0$ bastava osservare che la matrice A ha due colonne uguali, la prima e la terza).

Cerchiamo ora gli autovalori di A. Il polinomio caratteristico è

$$\det(A - x \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -t-x & 3+t & -t \\ 3-t & t-x & 3-t \\ 6 & -6 & 6-x \end{vmatrix}$$

Per calcolare questo determinante alla prima riga sottraiamo la seconda, ottenendo
$$\det(A - x\cdot\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -3-x & 3+x & -3 \\ 3-t & t-x & 3-t \\ 6 & -6 & 6-x \end{vmatrix}$$
Ora alla prima colonna sommiamo la seconda:
$$\det(A - x\cdot\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 0 & 3+x & -3 \\ 3-x & t-x & 3-t \\ 0 & -6 & 6-x \end{vmatrix}$$
Ora possiamo sviluppare il determinante secondo la prima colonna:
$$\begin{aligned} \det(A - x\cdot\mathbf{1}) &= -(3-x)\begin{vmatrix} 3+x & -3 \\ -6 & 6-x \end{vmatrix} \\ &= -(3-x)(3x-x^2) \\ &= -x(3-x)^2. \end{aligned}$$
Gli autovalori della matrice A sono dunque $\lambda_1 = 0$, con molteplicità 1, e $\lambda_2 = 3$, con molteplicità 2.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono le soluzioni del seguente sistema lineare
$$\begin{pmatrix} -t & 3+t & -t \\ 3-t & t & 3-t \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
cioè sono i vettori che appartengono al nucleo di A. Risolvendo il sistema si scopre che esso ammette infinite soluzioni, date da
$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$
Ciò significa che l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ (cioè il nucleo di A) ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_1 = (1, 0, -1)$.

Passiamo ora agli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 3$. Essi sono le soluzioni del seguente sistema lineare
$$\begin{pmatrix} -t-3 & 3+t & -t \\ 3-t & t-3 & 3-t \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Le soluzioni di questo sistema sono date da
$$\begin{cases} x_3 = 2x_2 - 2x_1 \\ (t-3)(x_1 - x_2) = 0. \end{cases}$$
Distinguiamo quindi due casi. Se $t \neq 3$, il sistema precedente diventa
$$\begin{cases} x_3 = 2x_2 - 2x_1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da
$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

In questo caso l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_2 = (1, 1, 0)$. La matrice A non è quindi diagonalizzabile, dato che la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda_2 = 3$ è diversa dalla sua molteplicità geometrica.

Se invece $t = 3$, il sistema precedente si riduce alla singola equazione
$$x_3 = 2x_2 - 2x_1.$$

In questo caso si hanno infinite soluzioni, dipendenti da *due* parametri (x_1 e x_2). L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ ha ora dimensione 2 ed è generato dai vettori $v_2 = (1, 0, -2)$ e $v_3 = (0, 1, 2)$. Concludiamo così che, per $t = 3$, la matrice A è diagonalizzabile. Le matrici P e D richieste sono
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.31. Siano dati i vettori $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (-1, 2, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare il cui nucleo è generato da v_1 e tale che $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = v_3$.

(a) Utilizzando la formula di cambiamento di basi, si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f$ sia invertibile.

Soluzione. Dato che $\mathrm{Ker}(f)$ è generato da v_1, si ha $f(v_1) = \mathbf{0} = 0v_1$, quindi v_1 è autovettore di f relativo all'autovalore 0. Sapendo poi che $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = v_3$, si conclude che v_2 è autovettore relativo all'autovalore 2 e v_3 è autovettore relativo all'autovalore 1. Se poniamo
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
si ha dunque $AP = PD$, ove A è la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Poiché i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, la matrice P è invertibile e si può quindi ricavare la matrice A usando la formula
$$A = PDP^{-1}.$$

Ora non rimane altro che determinare l'inversa di P. Procediamo come segue. Scriviamo la matrice
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora effettuiamo le seguenti operazioni elementari *sulle righe*: alla seconda riga sommiamo la prima e alla terza riga sottraiamo il doppio della prima:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ora alla terza riga sottraiamo il doppio della seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Moltiplichiamo la terza riga per -1, ottenendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Ora alla seconda riga sottraiamo la terza:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Per terminare, alla prima riga sommiamo la seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Si conclude quindi che l'inversa della matrice P è

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per rispondere alla seconda domanda basta ricordare che $f(v_1) = \mathbf{0}$. Pertanto, per ogni funzione lineare g, si ha

$$(g \circ f)(v_1) = g(f(v_1)) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

quindi $v_1 \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Ciò significa che $\mathrm{Ker}(g \circ f) \neq \{\mathbf{0}\}$ e dunque $g \circ f$ non è iniettiva. Non essendo iniettiva non può essere invertibile!

Esercizio 1.32. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, con base v_1, v_2, v_3, v_4. Sia $f : V \to V$ la funzione lineare definita da $f(v_1) = v_1 + 3v_3$, $f(v_2) = v_2 + v_4$, $f(v_3) = 2v_1 + 2v_3$, $f(v_4) = -2v_2 - 2v_4$.

(a) Si stabilisca se f è suriettiva e si determini una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si determini, se possibile, una base w_1, w_2, w_3, w_4 di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

(c) Si dica se esistono due vettori linearmente indipendenti $u_1, u_2 \in V$ tali che $f(u_1) = f(u_2)$.

Soluzione. Dalla definizione di f si deduce subito che la sua matrice rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che il rango di A è 3 (si osservi che ci sono due righe uguali), quindi f non è suriettiva, $\dim \operatorname{Im}(f) = 3$ e una base di $\operatorname{Im}(f)$ è formata dai vettori le cui coordinate sono rappresentate dalle prime tre colonne di A (che sono linearmente indipendenti). Una base di $\operatorname{Im}(f)$ è dunque costituita dai vettori

$$v_1 + 3v_3, \quad v_2 + v_4, \quad 2v_1 + 2v_3.$$

Per determinare una base di V rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale basta calcolare gli autovalori e gli autovettori di f (cioè di A) e vedere se A è diagonalizzabile oppure no.

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A - x \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2-x \end{vmatrix}$$

Scambiando la seconda riga con la terza, si ha

$$\det(A - x \cdot \mathbf{1}) = - \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2-x \end{vmatrix}$$

Scambiando ora la seconda colonna con la terza, si ottiene

$$\det(A - x \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2-x \end{vmatrix}$$

Dalle proprietà dei determinanti, si ha

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2-x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} \\ &= (x^2-3x-4)(x^2+x).\end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono dunque le soluzioni delle equazioni

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + x = 0,$$

da cui si ricava che gli autovalori sono $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (entrambi con molteplicità 1) e $x_3 = x_4 = -1$ (con molteplicità 2).

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore $x_1 = 0$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'autospazio relativo all'autovalore 0 (cioè il nucleo di f) ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $w_1 = 2v_2 + v_4$.

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore $x_2 = 4$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'autospazio relativo all'autovalore 4 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $w_2 = 2v_1 + 3v_3$.

Infine, gli autovettori corrispondenti all'autovalore -1 sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'autospazio relativo all'autovalore -1 ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $w_3 = -v_1 + v_3$ e $w_4 = v_2 + v_4$.

Da quanto visto si conclude che la matrice A è diagonalizzabile, che una base di V rispetto alla quale la matrice di f è diagonale è costituita dagli autovettori w_1, w_2, w_3, w_4 indicati e che la matrice di f rispetto a tale base è la seguente:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Infine, dato che f non è iniettiva (perché $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$), esistono sicuramente due vettori linearmente indipendenti $u_1, u_2 \in V$ tali che $f(u_1) = f(u_2)$. Basta prendere, ad esempio, $u_1 = v_1$ e $u_2 = u_1 + w_1 = v_1 + 2v_2 + v_4$. u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti e si ha $f(u_2) = f(u_1 + w_1) = f(u_1) + f(w_1) = f(u_1)$, perché $f(w_1) = \mathbf{0}$, dato che $w_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

Esercizio 1.33. Sia data la matrice, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di h dire se la matrice A_h è diagonalizzabile o meno (sul campo dei numeri reali).

(b) Trovare per ogni $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori con molteplicità maggiore di uno tutti gli autospazi.

(c) Per $h = 3$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_3P$ sia diagonale.

(d) Per gli $\bar{h}$ del punto (b) mostrare che $(A_{\bar{h}})^3 = 0$. Per tali $\bar{h}$, è $A_{\bar{h}}$ simile alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A_h è

$$\det(A_h - x \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ h & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x(x^2 - 1 - h).$$

Dall'equazione $x(x^2 - 1 - h) = 0$ si ricava $x = 0$, $x^2 = 1 + h$. Possiamo allora distinguere i seguenti tre casi:

- Se $h > -1$ la matrice A_h ha tre autovalori reali distinti: 0, $-\sqrt{1+h}$, $\sqrt{1+h}$. In questo caso A_h è diagonalizzabile.

- Se $h < -1$ la matrice A_h ha un solo autovalore reale, 0, e due autovalori complessi coniugati. In questo caso A_h non è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali (ma lo è sul campo dei numeri complessi).
- Se $h = -1$ la matrice A_h ha un autovalore reale, 0, con molteplicità 3. In questo caso, per scoprire se A_h è diagonalizzabile o meno bisogna calcolare la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 (la molteplicità geometrica).

Analizziamo allora l'unico caso dubbio, cioè il caso $h = -1$. La matrice diventa allora

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio relativo all'autovalore 0 (cioè il nucleo di A_{-1}) è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che tale autospazio ha dimensione 1 ed è generato dall'autovettore $(1, 0, 1)$. Ciò significa che la molteplicità geometrica è pari a 1 ed è quindi diversa dalla molteplicità algebrica dell'autovalore (che è 3). La matrice A_{-1} non è quindi diagonalizzabile.

L'unico $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori con molteplicità maggiore di uno è $\bar{h} = -1$. Come abbiamo già visto, l'unico autospazio della matrice A_{-1} è quello relativo all'autovalore 0, di cui abbiamo già trovato una base.

Consideriamo ora il caso $h = 3$. La matrice diventa

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto visto nel punto (a), la matrice A_3 è diagonalizzabile ed i suoi autovalori sono 0, -2 e 2. Gli autovettori relativi all'autovalore 0 sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 0 è data quindi dal vettore $(1, 0, -3)$.

Gli autovettori relativi all'autovalore -2 sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Una base dell'autospazio relativo all'autovalore -2 è data quindi dal vettore $(1, -2, 1)$.

Infine, gli autovettori relativi all'autovalore 2 si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 2 è data quindi dal vettore $(1, 2, 1)$.

La matrice P cercata è la matrice le cui colonne sono i tre autovettori appena trovati

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se poniamo

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha $A_3 P = PD$, cioè $D = P^{-1} A_3 P$.

Infine, poiché l'$\bar{h}$ del punto (b) è $\bar{h} = -1$, dobbiamo calcolare $(A_{-1})^3$. Si ha

$$(A_{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$(A_{-1})^3 = A_{-1} (A_{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

come volevasi dimostrare. Le matrici

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non sono simili. Per scoprirlo basta osservare che $(A_{-1})^2 \neq 0$, mentre $B^2 = 0$. Più semplicemente, basta notare che $\text{rango}(A_{-1}) = 2$ mentre $\text{rango}(B) = 1$ quindi, avendo ranghi diversi, le matrici A_{-1} e B non possono corrispondere alla stessa funzione lineare.

Esercizio 1.34. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $f(x, y, z) = (2x + y - 3z, -x + 2z, x - 2y - 4z)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio.

(b) Si determinino delle basi di $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ e si dica se $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ sono in somma diretta.

(c) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (0, -1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$, $w_3 = (1, -1, 0)$ del codominio.

(d) Si determini una matrice S tale che $B = SA$.

(e) Le matrici A e B sono simili? Perché?

Soluzione. Le colonne della matrice A sono le componenti delle immagini, tramite f, dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si ha pertanto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

I vettori del nucleo di f sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, si trova

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

da cui segue che $\mathrm{Ker}(f)$ ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $(2, -1, 1)$.

Dato che

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 3,$$

si ha $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ e quindi una base di $\mathrm{Im}(f)$ è formata da due colonne linearmente indipendenti di A, ad esempio $(2, -1, 1)$ e $(1, 0, -2)$. Poiché il vettore $(2, -1, 1)$ appartiene sia al nucleo che all'immagine di f, si conclude che $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ non sono in somma diretta.

Consideriamo ora la base $w_1 = (0, -1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$, $w_3 = (1, -1, 0)$ del codominio di f. Poiché nel dominio di f abbiamo mantenuto la base canonica, per determinare le colonne della matrice B bisogna operare come segue. Iniziamo dal primo vettore della base (canonica) del dominio, $e_1 = (1, 0, 0)$. La sua immagine tramite f è $f(e_1) = (2, -1, 1)$. Ora bisogna esprimere il vettore $f(e_1)$ come combinazione lineare dei vettori della base scelta per il codominio, cioè dei vettori w_1, w_2 e w_3:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I tre coefficienti a_1, a_2 e a_3 costituiscono la prima colonna della matrice B cercata. Risolvendo il sistema di trova

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

Per determinare la seconda colonna di B bisogna ripetere quanto abbiamo appena fatto partendo dal secondo vettore $e_2 = (0, 1, 0)$ della base canonica del dominio:

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I coefficienti b_1, b_2 e b_3 costituiscono la seconda colonna di B. Risolvendo il sistema di trova

$$\begin{cases} b_1 = -3/2 \\ b_2 = -1/2 \\ b_3 = 3/2 \end{cases}$$

Infine, per trovare la terza colonna di B si considera il terzo vettore $e_3 = (0, 0, 1)$ della base canonica del dominio:

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I coefficienti c_1, c_2 e c_3 costituiscono la terza colonna di B. Risolvendo il sistema di trova

$$\begin{cases} c_1 = -3/2 \\ c_2 = -5/2 \\ c_3 = -1/2 \end{cases}$$

La matrice B è dunque

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 1 & -1/2 & -5/2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ora, se indichiamo con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori della nuova base w_1, w_2, w_3, rispetto alla base canonica, dalla formula di cambiamento di base sappiamo che $PB = A$ (uguaglianza che si può anche verificare con un calcolo diretto), da cui si ricava $B = P^{-1}A$ (si noti che la matrice P è invertibile, essendo w_1, w_2, w_3 una base). Calcolando l'inversa di P si trova

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Questa è dunque la matrice S cercata.

Attenzione: dalla formula $B = SA$ non si può ricavare la matrice S semplicemente scrivendo $S = BA^{-1}$. Ricordiamo infatti che $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$, quindi la funzione f e, di conseguenza, anche la matrice A, non è invertibile!

Infine, per stabilire se A e B sono simili, proviamo a calcolare i loro polinomi caratteristici. Si trova

$$\det(A - x \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & -3 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & -2 & -4-x \end{vmatrix} = -x^3 - 2x^2,$$

mentre

$$\det(B - x \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -x & -3/2 & -3/2 \\ 1 & -1/2 - x & -5/2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 - x \end{vmatrix} = -x^3 - x^2 - 7x.$$

Le matrici A e B hanno dunque polinomi caratteristici diversi, pertanto non possono essere simili.

[*Domanda per il lettore*: Come è possibile che le matrici A e B non siano simili, dato che esse corrispondono entrambe alla *stessa* funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rispetto a scelte diverse di basi?]

Esercizio 1.35. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il valore di t in modo che il vettore $v = (1, 1, -1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(c) È possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Perché?

(d) Esiste una matrice *non diagonale* simile alla matrice A?

Soluzione. Dire che v è un autovettore di A significa che $Av = \lambda v$, per un qualche numero λ. Si ha

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che deve essere $\lambda = 6$ e $t = 7$.

Per $t = 7$ la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

e calcolando il suo polinomio caratteristico si trova

$$\det(A - x \cdot \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 8-x & -1 & 1 \\ 0 & 7-x & 1 \\ -2 & 2 & 6-x \end{vmatrix} = -x^3 + 21x^2 - 146x + 336.$$

Abbiamo già scoperto che A possiede un autovalore pari a 6, quindi il polinomio caratteristico di A deve essere divisibile per $x - 6$. Si ha infatti

$$-x^3 + 21x^2 - 146x + 336 = -(x-6)(x^2 - 15x + 56).$$

Gli altri due autovalori di A sono quindi le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 15x + 56 = 0,$$

da cui si ricava $x = 7$, $x = 8$. La matrice A ha dunque tre autovalori distinti, dati da $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 7$ e $\lambda_3 = 8$. Poiché tutti e tre gli autovalori sono reali e distinti, la matrice A è sicuramente diagonalizzabile.

Abbiamo già visto che un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 6$ è $v = (1, 1, -1)$.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 7$ si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore 7 ha quindi dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $(1, 1, 0)$.

Infine, gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_3 = 8$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore 8 ha quindi dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $(0, 1, 1)$.

Gli autospazi di A sono generati, rispettivamente, dai vettori $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$; questi tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ ma non sono a due a due ortogonali. Pertanto non esiste una base ortogonale (e quindi nemmeno una base ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

In effetti si poteva giungere subito a questa conclusione, semplicemente ricordando che una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di una matrice di ordine 3 esiste se e solo se la matrice in questione è simmetrica (e la nostra matrice A non è simmetrica!).

L'ultima domanda ammette una risposta banale: esiste certamente una matrice non diagonale simile ad A, ad esempio la matrice A stessa (A è certamente simile ad A, sono addirittura uguali, e non è diagonale).

1.6 Forme bilineari simmetriche, spazi vettoriali euclidei

Esercizio 1.36. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Soluzione. Per dimostrare che g è non degenere è sufficiente verificare che il determinante di G sia diverso da 0. In effetti si ha $\det G = 44$, quindi g è non degenere. Per trovare una base ortogonale applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$.

Poniamo $w_1 = e_1$; si ha $g(w_1, w_1) = g(e_1, e_1) = 4$. Poniamo ora $w_2 = e_2 + \alpha_1 w_1$. Imponendo $g(w_2, w_1) = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{g(e_2, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_2, e_1)}{g(e_1, e_1)} = 0.$$

Si ha quindi $w_2 = e_2$ (ciò era evidente fin dall'inizio dato che, osservando la matrice di g, si vede che e_2 è ortogonale a e_1).

Poniamo ora $w_3 = e_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. Imponendo che sia $g(w_3, w_1) = 0$ e $g(w_3, w_2) = 0$, si trova

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{g(e_3, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_3, e_1)}{g(e_1, e_1)} = -\frac{1}{4} \\ \alpha_2 &= -\frac{g(e_3, w_2)}{g(w_2, w_2)} = -\frac{g(e_3, e_2)}{g(e_2, e_2)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

quindi

$$w_3 = e_3 - \frac{1}{4}\, w_1 + \frac{1}{2}\, w_2 = -\frac{1}{4}\, e_1 + \frac{1}{2}\, e_2 + e_3.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} g(w_3, w_3) &= g\Big(-\frac{1}{4}\, e_1 + \frac{1}{2}\, e_2 + e_3, -\frac{1}{4}\, e_1 + \frac{1}{2}\, e_2 + e_3\Big) \\ &= \frac{1}{16}\, g(e_1, e_1) + \frac{1}{4}\, g(e_2, e_2) + g(e_3, e_3) \\ &\quad -\frac{1}{4}\, g(e_1, e_2) - \frac{1}{2}\, g(e_1, e_3) + g(e_2, e_3) \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

e analogamente

$$g(e_4, w_3) = -\frac{1}{4}\, g(e_4, e_1) + \frac{1}{2}\, g(e_4, e_2) + g(e_4, e_3) = -1.$$

Infine poniamo $w_4 = e_4 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$. Imponendo che sia $g(w_4, w_1) = 0$, $g(w_4, w_2) = 0$ e $g(w_4, w_3) = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{g(e_4, w_1)}{g(w_1, w_1)} = 0$$
$$\alpha_2 = -\frac{g(e_4, w_2)}{g(w_2, w_2)} = 1$$
$$\alpha_3 = -\frac{g(e_4, w_3)}{g(w_3, w_3)} = \frac{4}{13}$$

quindi

$$w_4 = e_4 + w_2 + \frac{4}{13}\, w_3 = -\frac{1}{13}\, e_1 + \frac{15}{13}\, e_2 + \frac{4}{13}\, e_3 + e_4.$$

Si trova poi

$$\begin{aligned} g(w_4, w_4) &= g\Big(-\frac{1}{13}\, e_1 + \frac{15}{13}\, e_2 + \frac{4}{13}\, e_3 + e_4, -\frac{1}{13}\, e_1 + \frac{15}{13}\, e_2 + \frac{4}{13}\, e_3 + e_4\Big) \\ &= \frac{22}{13}. \end{aligned}$$

La base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è una base ortogonale e la matrice di g rispetto a questa base è la seguente matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22/13 \end{pmatrix}$$

il che, tra l'altro, dimostra che g è non degenere. La matrice di cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/13 \\ 0 & 1 & 1/2 & 15/13 \\ 0 & 0 & 1 & 4/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto si potrebbe verificare con un calcolo diretto che si ha $D = {}^tPGP$.

Esercizio 1.37. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g definita da

$$g(v, w) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3,$$

ove $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Si scriva la matrice di g rispetto alla base canonica.

(b) Si dica se g è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.

(c) Si determini una base ortogonale.

(d) Si stabilisca se esistono vettori isotropi e, in caso affermativo, se ne determini almeno uno.

Soluzione. Sia $G = \big(g_{ij}\big)$ la matrice di g rispetto alla base canonica. Per definizione si ha $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. D'altra parte, se $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$, si ha anche

$$g(v, w) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j,$$

e dunque il coefficiente del termine in $x_i y_j$ nell'espressione di g è precisamente l'elemento g_{ij} della matrice di g rispetto alla base canonica. La matrice G è quindi data da

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Notiamo ora che l'elemento $g_{11} = 1$ è positivo e che il minore di ordine 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

è anch'esso positivo. Tuttavia il determinante di G è

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

pertanto g è non degenere (perché $\det G \neq 0$), ma essa è indefinita.

Il procedimento di Gram-Schmidt, applicato alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, permette di costruire una base ortogonale (come vedremo, il fatto che g non sia definita positiva non ha alcuna influenza).

Poniamo $w_1 = e_1$; si ha $g(w_1, w_1) = g(e_1, e_1) = 1$. Poniamo ora $w_2 = e_2 + \alpha_1 w_1$. Richiedendo che w_2 sia ortogonale a w_1, cioè che $g(w_2, w_1) = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{g(e_2, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_2, e_1)}{g(e_1, e_1)} = 1.$$

Si ha quindi $w_2 = e_2 + e_1$. Calcoliamo ora $g(w_2, w_2)$:

$$g(w_2, w_2) = g\big(e_2 + e_1, e_2 + e_1\big) = 1.$$

Poniamo infine $w_3 = e_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. Imponendo che sia $g(w_3, w_1) = 0$ e $g(w_3, w_2) = 0$, si trova

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{g(e_3, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_3, e_1)}{g(e_1, e_1)} = -2 \\ \alpha_2 &= -\frac{g(e_3, w_2)}{g(w_2, w_2)} = -\frac{g\big(e_3, e_2 + e_1\big)}{g(w_2, w_2)} = -1, \end{aligned}$$

quindi

$$w_3 = e_3 - 2w_1 - w_2 = -3e_1 - e_2 + e_3.$$

Si ha infine:

$$g(w_3, w_3) = g(-3e_1 - e_2 + e_3, -3e_1 - e_2 + e_3) = -1.$$

La base $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortogonale e la matrice di g rispetto a questa base è la seguente matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il che, tra l'altro, dimostra che g è non degenere e indefinita (perché sulla diagonale sono presenti sia numeri positivi che negativi). La matrice di cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si potrebbe verificare con un calcolo diretto che vale l'uguaglianza $D = {}^tPGP$.

Il fatto che la forma bilineare g sia indefinita implica che esistono certamente dei vettori isotropi. Per trovarne uno possiamo osservare che $g(w_1, w_1) = 1$ mentre $g(w_3, w_3) = -1$. Ponendo $u = w_1 + w_3$ si ha pertanto

$$g(u, u) = g(w_1 + w_3, w_1 + w_3) = g(w_1, w_1) + 2g(w_1, w_3) + g(w_3, w_3) = 1 - 1 = 0,$$

quindi $u = w_1 + w_3 = -2e_1 - e_2 + e_3 = (-2, -1, 1)$ è un vettore isotropo.

Esercizio 1.38. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Soluzione. Per dimostrare che g è non degenere è sufficiente verificare che il determinante di G sia diverso da 0. Si ha

$$\det G = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

quindi g è non degenere. Per trovare una base ortogonale applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Poniamo $w_1 = e_1$; si ha $g(w_1, w_1) = g(e_1, e_1) = 2$. Poniamo ora $w_2 = e_2 + \alpha_1 w_1$. Richiedendo che w_2 sia ortogonale a w_1, cioè che $g(w_2, w_1) = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{g(e_2, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_2, e_1)}{g(e_1, e_1)} = \frac{1}{2}.$$

Si ha quindi $w_2 = e_2 + \frac{1}{2}\, e_1$. Calcoliamo ora $g(w_2, w_2)$:

$$g(w_2, w_2) = g\big(e_2 + \tfrac{1}{2}\, e_1, e_2 + \tfrac{1}{2}\, e_1\big) = \frac{5}{2}.$$

Poniamo infine $w_3 = e_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. Imponendo che sia $g(w_3, w_1) = 0$ e $g(w_3, w_2) = 0$, si trova

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{g(e_3, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_3, e_1)}{g(e_1, e_1)} = -\frac{1}{2}\\ \alpha_2 &= -\frac{g(e_3, w_2)}{g(w_2, w_2)} = -\frac{g\big(e_3, e_2 + \frac{1}{2}\,e_1\big)}{g(w_2, w_2)} = -\frac{3}{5},\end{aligned}$$

quindi

$$w_3 = e_3 - \tfrac{1}{2}\,w_1 - \tfrac{3}{5}\,w_2 = -\tfrac{4}{5}\,e_1 - \tfrac{3}{5}\,e_2 + e_3.$$

Si ha infine:

$$g(w_3, w_3) = g\big(-\tfrac{4}{5}\,e_1 - \tfrac{3}{5}\,e_2 + e_3, -\tfrac{4}{5}\,e_1 - \tfrac{3}{5}\,e_2 + e_3\big) = \frac{3}{5}.$$

La base $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortogonale e la matrice di g rispetto a questa base è la seguente matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

il che, tra l'altro, dimostra che g è non degenere. La matrice di cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -4/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si potrebbe ora verificare che vale l'uguaglianza $D = {}^tPGP$.

Esercizio 1.39. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x + y - z = 0$. Si esprima il vettore $v = (3, -2, 4)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Dall'equazione $x+y-z = 0$ di U ricaviamo $z = x+y$. I vettori di U dipendono quindi da due parametri liberi di variare, il che significa che U ha dimensione 2 (è un piano in $\mathbb{R}^3$). Una base di U è data (ad esempio) dai vettori $u_1 = (1, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 1)$. Un vettore $w = (a, b, c)$ appartiene al sottospazio ortogonale di U se e solo se

$$\begin{cases} w \cdot u_1 = a + c = 0 \\ w \cdot u_2 = b + c = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro), date da

$$\begin{cases} a = -c \\ b = -c \\ c \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

il che significa che $U^\perp$ ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $w = (1, 1, -1)$ (si noti che il vettore w ha come componenti i coefficienti che compaiono nell'equazione di U).

Cerchiamo ora due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ tali che $v_1 + v_2 = v$. Dato che $v_1 \in U$, si deve avere $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, mentre $v_2 \in U^\perp$ implica che $v_2 = \beta w$. Si deve quindi avere $v = v_1 + v_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta w$. Si ottiene così il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta = 3 \\ \alpha_2 + \beta = -2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \beta = 4 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = -1 \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$v_1 = 4u_1 - u_2 = (4, -1, 3), \qquad v_2 = -w = (-1, -1, 1)$$

(il vettore v_1 è detto la proiezione ortogonale di v sul sottospazio U).

Consideriamo ora la funzione f che associa ad ogni vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale su U. Le colonne della matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono pertanto le proiezioni ortogonali dei vettori $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ sul sottospazio U. I calcoli necessari a determinare le proiezioni ortogonali di questi vettori su U sono del tutto analoghi a quelli svolti in precedenza per determinare la proiezione ortogonale del vettore v. Ad esempio, per determinare la proiezione ortogonale del vettore e_1 su U bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta = 1 \\ \alpha_2 + \beta = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \beta = 0 \end{cases}$$

che non è altro che il sistema precedente in cui la colonna dei termini noti è ora data dalle componenti del vettore e_1. La soluzione di questo sistema è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2/3 \\ \alpha_2 = -1/3 \\ \beta = 1/3 \end{cases}$$

da cui si ricava la proiezione ortogonale $f(e_1)$ del primo vettore della base canonica:

$$f(e_1) = \tfrac{2}{3}\, u_1 - \tfrac{1}{3}\, u_2 = (2/3, -1/3, 1/3);$$

questa è la prima colonna della matrice cercata. La seconda e la terza colonna si determinano in modo del tutto analogo, ripetendo il procedimento appena descritto per i vettori e_2 e e_3. Si ottiene così la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.40. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Soluzione. Per dimostrare che g è non degenere è sufficiente verificare che il determinante di G sia diverso da 0. Si ha $\det G = 22$, quindi g è non degenere. Per trovare una base ortogonale applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$.

Poniamo $w_1 = e_1$; si ha $g(w_1, w_1) = g(e_1, e_1) = 1$. Poniamo ora $w_2 = e_2 + \alpha_1 w_1$. Imponendo $g(w_2, w_1) = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{g(e_2, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_2, e_1)}{g(e_1, e_1)} = 1.$$

Si ha quindi $w_2 = e_2 + w_1 = e_2 + e_1$. Si trova poi $g(w_2, w_2) = g(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 3$.

Poniamo ora $w_3 = e_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. Imponendo che sia $g(w_3, w_1) = 0$ e $g(w_3, w_2) = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{g(e_3, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -\frac{g(e_3, e_1)}{g(e_1, e_1)} = 0$$
$$\alpha_2 = -\frac{g(e_3, w_2)}{g(w_2, w_2)} = -\frac{g(e_3, e_1 + e_2)}{g(w_2, w_2)} = 0,$$

quindi

$$w_3 = e_3.$$

Infine poniamo $w_4 = e_4 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$. Imponendo che sia $g(w_4, w_1) = 0$, $g(w_4, w_2) = 0$ e $g(w_4, w_3) = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{g(e_4, w_1)}{g(w_1, w_1)} = -1$$
$$\alpha_2 = -\frac{g(e_4, w_2)}{g(w_2, w_2)} = \frac{1}{3}$$
$$\alpha_3 = -\frac{g(e_4, w_3)}{g(w_3, w_3)} = -\frac{1}{5}$$

quindi

$$w_4 = e_4 - w_1 + \tfrac{1}{3}\, w_2 - \tfrac{1}{5}\, w_3 = -\tfrac{2}{3}\, e_1 + \tfrac{1}{3}\, e_2 - \tfrac{1}{5}\, e_3 + e_4.$$

Si trova poi

$$g(w_4, w_4) = g\big(-\tfrac{2}{3}\, e_1 + \tfrac{1}{3}\, e_2 - \tfrac{1}{5}\, e_3 + e_4, -\tfrac{2}{3}\, e_1 + \tfrac{1}{3}\, e_2 - \tfrac{1}{5}\, e_3 + e_4\big) = \frac{22}{15}.$$

La base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è una base ortogonale e la matrice di g rispetto a questa base è la seguente matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22/15 \end{pmatrix}$$

il che, tra l'altro, dimostra che g è non degenere. La matrice di cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto si potrebbe verificare con un calcolo diretto che si ha $D = {}^tPGP$.

Esercizio 1.41. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, 2, -3, 1)$ e $u_2 = (0, 2, -1, 2)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, 3, -1, 1)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.

Soluzione. Possiamo cominciare col determinare una base del sottospazio $U^\perp$, ortogonale di U. Un generico vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ di $\mathbb{R}^4$ appartiene a $U^\perp$ se e solo se $v \cdot u_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ e $v \cdot u_2 = 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$. Il sottospazio $U^\perp$ è quindi l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 2x_2 + 2x_4, \end{cases}$$

per ogni $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. Il sottospazio $U^\perp$ ha dunque dimensione 2 e una sua base è costituita dai vettori $w_1 = (4, 1, 2, 0)$ e $w_2 = (5, 0, 2, 1)$, ottenuti ponendo $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, rispettivamente.

Ricordando che $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$, si conclude che i vettori u_1, u_2, w_1 e w_2 formano una base di $\mathbb{R}^4$. Il vettore $v = (2, 3, -1, 1)$ si può dunque scrivere nel modo seguente

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2.$$

Si ottiene così il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\beta_1 + 5\beta_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_1 = 3 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\beta_1 + 2\beta_2 = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$v = \frac{1}{2}\,u_1 + \frac{1}{2}\,u_2 + w_1 - \frac{1}{2}\,w_2.$$

Ricordando che $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $U^\perp = \langle w_1, w_2 \rangle$, ponendo

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{2}\,u_1 + \frac{1}{2}\,u_2 = (1/2, 2, -2, 3/2) \\ v'' &= w_1 - \frac{1}{2}\,w_2 = (3/2, 1, 1, -1/2) \end{aligned}$$

si ha $v' \in U$, $v'' \in U^\perp$ e $v = v' + v''$. Il vettore v' è precisamente la proiezione ortogonale del vettore v sul sottospazio U (mentre v'' è la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$). Osservando ora che $v - v'' = v' \in U$, da quanto detto in precedenza si conclude che il vettore w cercato (cioè il vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$) è dato da $w = -v'' = (-3/2, -1, -1, 1/2)$.

Esercizio 1.42. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, sia U il sottospazio di equazioni $2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0$ e $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Si determini una base di U e una base del sottospazio $U^\perp$ ortogonale a U. Dato il sottospazio W di equazione $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$, si determini una base di $W \cap U^\perp$ e si completi tale base a una base ortogonale di W.

Soluzione. Il sottospazio U è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che è equivalente al seguente sistema:

$$U : \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3x_4 \\ x_3 = -5x_1 + 6x_4. \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da due parametri (x_1 e x_4), quindi il sottospazio U ha dimensione 2. Una sua base è costituita dai vettori

$$u_1 = (1, -2, -5, 0), \qquad u_2 = (0, 3, 6, 1),$$

ottenuti ponendo $x_1 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, rispettivamente.

Cerchiamo ora una base del sottospazio $U^\perp$, ortogonale di U. Un vettore $w = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartiene a $U^\perp$ se e solo se

$$\begin{cases} u_1 \cdot w = x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ u_2 \cdot w = 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 5x_3 \\ x_4 = -3x_2 - 6x_3. \end{cases}$$

Queste sono dunque le equazioni del sottospazio $U^\perp$. Tale sottospazio ha dunque dimensione 2 e una sua base è costituita dai vettori

$$w_1 = (2, 1, 0, -3), \qquad w_2 = (5, 0, 1, -6),$$

ottenuti ponendo, nel sistema precedente, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ e $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, rispettivamente.

Per determinare una base di $W \cap U^\perp$ osserviamo che i vettori appartenenti a $W \cap U^\perp$ devono soddisfare contemporaneamente le equazioni di $U^\perp$ e di W, cioè sono le soluzioni del seguente sistema:

$$W \cap U^\perp : \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 5x_3 \\ x_4 = -3x_2 - 6x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono date da

$$\begin{cases} x_1 = -11x_3 \\ x_2 = -8x_3 \\ x_4 = 18x_3 \\ x_3 \text{ qualunque} \end{cases}$$

da cui si deduce che $W \cap U^\perp$ ha dimensione 1 e una sua base è costituita dal vettore $v_1 = (-11, -8, 1, 18)$.

Il sottospazio $W : x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ ha dimensione 3, quindi per completare la base v_1 di $W \cap U^\perp$ a una base ortogonale di W, dobbiamo determinare due vettori $v_2, v_3 \in W$ in modo tale che i vettori v_1, v_2, v_3 siano linearmente indipendenti (e siano dunque una base di W) e siano inoltre a due a due perpendicolari.

Cominciamo dal vettore v_2. Se poniamo $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, si ha

$$v_2 \in W \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0,$$
$$v_2 \perp v_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 \cdot v_2 = -11x_1 - 8x_2 + x_3 + 18x_4 = 0.$$

Il vettore cercato è dunque una delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -11x_1 - 8x_2 + x_3 + 18x_4 = 0 \end{cases}$$

che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 4x_4 \\ x_3 = -5x_1 + 14x_4. \end{cases}$$

Come vettore v_2 possiamo dunque prendere il seguente:

$$v_2 = (1, -2, -5, 0),$$

ottenuto ponendo $x_1 = 1$ e $x_4 = 0$.

Per terminare, poniamo $v_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Tale vettore deve appartenere al sottospazio W e deve essere ortogonale ai vettori v_1 e v_2:

$$\begin{aligned} v_3 \in W \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ v_3 \perp v_1 \quad &\Leftrightarrow \quad v_1 \cdot v_3 = -11x_1 - 8x_2 + x_3 + 18x_4 = 0, \\ v_3 \perp v_2 \quad &\Leftrightarrow \quad v_2 \cdot v_3 = x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{aligned}$$

Il vettore cercato è dunque una delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -11x_1 - 8x_2 + x_3 + 18x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Ricordando che il sistema costituito dalle prime due equazioni era equivalente a

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 4x_4 \\ x_3 = -5x_1 + 14x_4 \end{cases}$$

si deduce che il vettore v_3 è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 4x_4 \\ x_3 = -5x_1 + 14x_4 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni (dipendenti da un parametro) e una di esse è

$$\begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = 5. \end{cases}$$

Come terzo (e ultimo) vettore della base di W possiamo dunque prendere il vettore $v_3 = (13, -6, 5, 5)$.

Esercizio 1.43. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare che soddisfa la seguente uguaglianza:

$$g(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Calcolare $g(2, 3, 1)$.

(b) Scrivere la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(c) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(g)$ e una base di $\mathrm{Im}(g)$.

(e) Dimostrare che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$ e che $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)^\perp$.

Soluzione. Poniamo $v = (2, 3, 1)$ e $g(v) = (a, b, c)$. Se scegliamo $w = e_1 = (1, 0, 0)$, si ha $g(v) \cdot w = (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = a$. D'altra parte, si ha $v \cdot f(w) = (2, 3, 1) \cdot (2, 1, 3) = 10$ e dall'uguaglianza $g(v) \cdot w = v \cdot f(w)$ si ottiene $a = 10$. In modo del tutto analogo si possono ricavare i valori di b e c. Ponendo $w = e_2 = (0, 1, 0)$, si ha infatti

$$\begin{aligned} g(v) \cdot w &= (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = b \\ &= v \cdot f(w) = (2, 3, 1) \cdot (-1, 2, 1) = 5, \end{aligned}$$

infine, ponendo $w = e_3 = (0, 0, 1)$, si ottiene

$$\begin{aligned} g(v) \cdot w &= (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = c \\ &= v \cdot f(w) = (2, 3, 1) \cdot (3, 1, 4) = 13. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto $g(2, 3, 1) = (10, 5, 13)$.

Per determinare la matrice di g rispetto alle basi canoniche basterebbe calcolare $g(e_1)$, $g(e_2)$ e $g(e_3)$ (queste sono le tre colonne della matrice di g), utilizzando lo stesso metodo appena impiegato per calcolare $g(2, 3, 1)$. Procediamo invece come segue. Sia $v = (x, y, z)$ e poniamo $g(v) = (a, b, c)$. Se indichiamo con B la matrice di g rispetto alle basi canoniche, si deve avere

$$g(v) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sia ora $w = (\alpha, \beta, \gamma)$. L'uguaglianza $g(v) \cdot w = v \cdot f(w)$ si riscrive come segue:

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = v \cdot f(w) = (x, y, z) A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Poiché questa uguaglianza deve valere per ogni vettore w (cioè per ogni α, β, γ), deve necessariamente essere

$$(a, b, c) = (x, y, z) A.$$

Trasponendo ambo i membri si ottiene

$$g(v) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = {}^t\!A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $B = {}^t\!A$. La matrice di g è quindi la trasposta della matrice A di f.

Il nucleo di f è dato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo si trova

$$\begin{cases} x = -7z/5 \\ y = z/5 \\ z \text{ qualunque} \end{cases}$$

da cui si deduce che il nucleo di f ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $u = (-7, 1, 5)$. L'immagine di f ha dunque dimensione 2 e una sua base è costituita, ad esempio, dalle prime due colonne della matrice A, $w_1 = (2, 1, 3)$ e $w_2 = (-1, 2, 1)$.

In modo analogo si possono determinare il nucleo e l'immagine di g. Il nucleo di g è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo si trova

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z \text{ qualunque} \end{cases}$$

da cui si deduce che $\mathrm{Ker}(g)$ ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $u' = (1, 1, -1)$. L'immagine di g ha pertanto dimensione 2 e una sua base è costituita dalle prime due colonne della matrice ${}^tA$ di g, cioè dalle prime due righe di A: $w'_1 = (2, -1, 3)$ e $w'_2 = (1, 2, 1)$.

Per dimostrare che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$ osserviamo che essi hanno la stessa dimensione, infatti si ha

$$\dim \mathrm{Ker}(f)^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 1 = 2.$$

Basta quindi dimostrare che i vettori di una base di $\mathrm{Im}(g)$ sono ortogonali ai vettori di una base di $\mathrm{Ker}(f)$. Si ha infatti

$$\begin{cases} w'_1 \cdot u = (2, -1, 3) \cdot (-7, 1, 5) = 0 \\ w'_2 \cdot u = (1, 2, 1) \cdot (-7, 1, 5) = 0, \end{cases}$$

come volevasi dimostrare.

Analogamente, si ha

$$\dim \mathrm{Ker}(g)^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(g) = 3 - 1 = 2$$

quindi $\dim \mathrm{Ker}(g)^\perp = \dim \mathrm{Im}(f)$. Per dimostrare l'uguaglianza tra questi due sottospazi basta pertanto dimostrare che i vettori di una base di $\mathrm{Im}(f)$ sono ortogonali ai vettori di una base di $\mathrm{Ker}(g)$. Infatti, si ha

$$\begin{cases} w_1 \cdot u' = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ w_2 \cdot u' = (-1, 2, 1) \cdot (1, 1, -1) = 0, \end{cases}$$

come volevasi.

Esercizio 1.44. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -2, 0)$, $u_2 = (-3, -6, 6, 2)$ e $u_3 = (0, 3, 0, -1)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U e del sottospazio $U^\perp$ (ortogonale di U).

(b) Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determinino il nucleo e l'immagine di π.

(c) Dato il vettore $v = (1, 1, 1, 1)$ si scriva v nella forma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$.

Soluzione. Per determinare la dimensione di U calcoliamo il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alla seconda riga sommiamo il triplo della prima, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ora dividiamo la seconda riga per 2 e poi alla terza riga sommiamo la seconda riga così ottenuta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2, il che significa che dei tre vettori u_1, u_2 e u_3 solamente due sono linearmente indipendenti. Si ha dunque $\dim U = 2$ e come base di U si possono prendere i vettori $u_1 = (1, 0, -2, 0)$ e $u_3 = (0, 3, 0, -1)$.

Un generico vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) appartiene al sottospazio U se e solo se si ha

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha u_1 + \beta u_3,$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 3\beta \\ x_3 = -2\alpha \\ x_4 = -\beta. \end{cases}$$

Eliminando i due parametri α e β si ottengono le seguenti equazioni (cartesiane) per il sottospazio U:

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Un vettore $w = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartiene al sottospazio $U^\perp$ se e solo se esso è ortogonale ai vettori di una base di U:

$$\begin{cases} w \cdot u_1 = x_1 - 2x_3 = 0 \\ w \cdot u_3 = 3x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Queste sono dunque le equazioni cartesiane di $U^\perp$. Le soluzioni di questo sistema sono date da

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_4 = 3x_2 \\ x_2, x_3 \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Si conclude così che $U^\perp$ ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $w_1 = (0, 1, 0, 3)$ e $w_2 = (2, 0, 1, 0)$.

Rispondiamo ora alla terza domanda (i calcoli che faremo ci saranno utili per rispondere anche alla seconda). Dato che $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$, i vettori u_1, u_3, w_1, w_2 sono una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo dunque scrivere

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2,$$

cioè

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + 2\lambda_4 \\ 1 = 3\lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = -2\lambda_1 + \lambda_4 \\ 1 = -\lambda_2 + 3\lambda_3. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1/5 \\ \lambda_2 = 1/5 \\ \lambda_3 = 2/5 \\ \lambda_4 = 3/5 \end{cases}$$

e dunque si ha

$$v = -\tfrac{1}{5}\, u_1 + \tfrac{1}{5}\, u_3 + \tfrac{2}{5}\, w_1 + \tfrac{3}{5}\, w_2.$$

Se poniamo

$$v' = -\tfrac{1}{5}\, u_1 + \tfrac{1}{5}\, u_3 \in U, \qquad v'' = \tfrac{2}{5}\, w_1 + \tfrac{3}{5}\, w_2 \in U^\perp$$

otteniamo la decomposizione del vettore v come somma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$, come richiesto (i vettori v' e v'' così trovati sono le proiezioni ortogonali di v sui sottospazi U e $U^\perp$, rispettivamente). Sviluppando i calcoli, si trova

$$v' = \left(-\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{1}{5}\right), \qquad v'' = \left(\tfrac{6}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{6}{5}\right).$$

Consideriamo ora la funzione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. In altri termini, dato $v \in \mathbb{R}^4$ si tratta di decomporre v come somma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$, esattamente come abbiamo appena fatto per il vettore $v = (1, 1, 1, 1)$. La funzione π è definita ponendo $\pi(v) = v''$.

Dalla definizione della funzione π possiamo subito dedurre che $\mathrm{Im}(\pi) = U^{\perp}$ e $\mathrm{Ker}(\pi) = U$ (gli unici vettori la cui proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ è nulla sono i vettori ortogonali a $U^{\perp}$, cioè i vettori di U). Ricordiamo inoltre che le colonne della matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ sono le immagini, tramite π, dei vettori della base canonica, cioè sono le proiezioni ortogonali su $U^{\perp}$ dei vettori e_1, e_2, e_3, e_4.

Cominciamo dal vettore $e_1 = (1, 0, 0, 0)$. Scrivendo

$$e_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_4 = 1 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1/5 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 2/5. \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$e_1 = \tfrac{1}{5}\, u_1 + \tfrac{2}{5}\, w_2.$$

Da ciò si deduce che la proiezione ortogonale del vettore e_1 sul sottospazio $U^{\perp}$ è

$$\pi(e_1) = \tfrac{2}{5}\, w_2 = \big(\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{2}{5}, 0\big).$$

Questa è dunque la prima colonna della matrice di π.

Consideriamo ora il vettore $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. Scrivendo

$$e_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3/10 \\ \lambda_3 = 1/10 \\ \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$e_2 = \tfrac{3}{10}\, u_3 + \tfrac{1}{10}\, w_1.$$

Da ciò si deduce che la proiezione ortogonale del vettore e_2 sul sottospazio $U^{\perp}$ è

$$\pi(e_2) = \tfrac{1}{10}\, w_1 = \big(0, \tfrac{1}{10}, 0, \tfrac{3}{10}\big).$$

Questa è dunque la seconda colonna della matrice di π.

Passiamo ora al vettore $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Scrivendo

$$e_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_4 = 1 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2/5 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 1/5. \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$e_3 = -\tfrac{2}{5}\, u_1 + \tfrac{1}{5}\, w_2.$$

Da ciò si deduce che la proiezione ortogonale del vettore e_3 sul sottospazio $U^\perp$ è

$$\pi(e_3) = \tfrac{1}{5}\, w_2 = \left(\tfrac{2}{5}, 0, \tfrac{1}{5}, 0\right).$$

Questa è dunque la terza colonna della matrice di π.

Infine consideriamo il vettore $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Scrivendo

$$e_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1/10 \\ \lambda_3 = 3/10 \\ \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$e_4 = -\tfrac{1}{10}\, u_3 + \tfrac{3}{10}\, w_1.$$

Da ciò si deduce che la proiezione ortogonale del vettore e_4 sul sottospazio $U^\perp$ è

$$\pi(e_4) = \tfrac{3}{10}\, w_1 = \left(0, \tfrac{3}{10}, 0, \tfrac{9}{10}\right).$$

Questa è dunque la quarta colonna della matrice di π. In conclusione, la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & 0 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.45. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ (dotato del prodotto scalare usuale) sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (2, 0, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, -2, -1, 0)$. Si scriva la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini inoltre una base ortonormale di V.

Soluzione. Ricordiamo che il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica (definita positiva). Per definizione, la sua matrice $G = (g_{ij})$ rispetto a una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è definita ponendo $g_{ij} = v_i \cdot v_j$, per $i, j = 1, \dots, n$. Nel caso in questione si ha:

$$\begin{array}{lll} v_1 \cdot v_1 = 6 & v_1 \cdot v_2 = 1 & v_1 \cdot v_3 = 1 \\ v_2 \cdot v_2 = 3 & v_2 \cdot v_3 = 3 & v_3 \cdot v_3 = 6 \end{array}$$

e quindi la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V, rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, è

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Per determinare una base ortonormale applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di V.

Poniamo $w_1 = v_1 = (2, 0, 1, -1)$; si ha $w_1 \cdot w_1 = 6$. Poniamo ora $w_2 = v_2 + \alpha_1 w_1$. Richiedendo che w_2 sia ortogonale a w_1, cioè che $w_2 \cdot w_1 = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{1}{6}.$$

Si ha quindi

$$w_2 = v_2 - \tfrac{1}{6}\, v_1 = \left(\tfrac{2}{3}, -1, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{6}\right),$$

da cui si deduce che

$$w_2 \cdot w_2 = \frac{17}{6}.$$

Poniamo infine $w_3 = v_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. Imponendo che sia $w_3 \cdot w_1 = 0$ e $w_3 \cdot w_2 = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = -\tfrac{1}{6}$$
$$\alpha_2 = -\frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = -1,$$

quindi

$$w_3 = v_3 - \tfrac{1}{6}\, w_1 - w_2 = v_3 - v_2 = (0, -1, -1, -1).$$

Si ha così

$$w_3 \cdot w_3 = 3.$$

La base $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortogonale di V e le norme di questi vettori sono le seguenti:

$$\|w_1\| = \sqrt{w_1 \cdot w_1} = \sqrt{6}, \quad \|w_2\| = \sqrt{w_2 \cdot w_2} = \sqrt{\tfrac{17}{6}}, \quad \|w_3\| = \sqrt{w_3 \cdot w_3} = \sqrt{3}.$$

Per ottenere una base ortonormale di V basta ora dividere ogni vettore w_i della base ortogonale per la sua norma. Si ottengono così i vettori

$$w_1' = \frac{w_1}{\|w_1\|}, \quad w_2' = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad w_3' = \frac{w_3}{\|w_3\|},$$

i quali formano una base ortonormale di V.

Esercizio 1.46. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x - 2y + 3z + 2w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, 1, 0, -2)$ sul sottospazio U.

Soluzione. Dall'equazione di U si ricava $x = 2y - 3z - 2w$. Attribuendo a y, z e w i valori $1, 0, 0$; $0, 1, 0$ e $0, 0, 1$ si ottengono i tre vettori

$$u_1 = (2, 1, 0, 0), \quad u_2 = (-3, 0, 1, 0), \quad u_3 = (-2, 0, 0, 1)$$

i quali formano una base del sottospazio U, che ha pertanto dimensione 3.

Applichiamo ora il procedimento di Gram-Schmidt alla base appena trovata. Poniamo $w_1 = u_1 = (2, 1, 0, 0)$; si ha $w_1 \cdot w_1 = 5$. Sia ora $w_2 = u_2 + \alpha_1 w_1$. Richiedendo che w_2 sia ortogonale a w_1, cioè che sia $w_2 \cdot w_1 = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{u_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = \frac{6}{5}.$$

Si ottiene così

$$w_2 = u_2 + \frac{6}{5}\, w_1 = \Big(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1, 0\Big)$$

e si ha $w_2 \cdot w_2 = \frac{14}{5}$. Poniamo ora $w_3 = u_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. Richiedendo che w_3 sia ortogonale a w_1 e w_2, cioè che sia $w_3 \cdot w_1 = w_3 \cdot w_2 = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{u_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = \frac{4}{5}, \qquad \alpha_2 = -\frac{u_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = -\frac{3}{7}.$$

Si ottiene così

$$w_3 = u_3 + \frac{4}{5}\, w_1 - \frac{3}{7}\, w_2 = \Big(-\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, 1\Big)$$

e si ha $w_3 \cdot w_3 = \frac{9}{7}$. I vettori w_1, w_2 e w_3 sono una base ortogonale del sottospazio U; le loro norme sono date rispettivamente da:

$$\begin{aligned} \|w_1\| &= \sqrt{w_1 \cdot w_1} = \sqrt{5} \\ \|w_2\| &= \sqrt{w_2 \cdot w_2} = \sqrt{14/5} \\ \|w_3\| &= \sqrt{w_3 \cdot w_3} = \sqrt{9/7} = \tfrac{3}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Per ottenere una base ortonormale di U è ora sufficiente dividere i vettori w_1, w_2 e w_3 per le loro norme:

$$\begin{aligned}
w_1' &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0\Big) \\
w_2' &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \Big(-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{14}}, \frac{6}{5}\sqrt{\frac{5}{14}}, \sqrt{\frac{5}{14}}, 0\Big) \\
w_3' &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \Big(-\frac{\sqrt{7}}{21}, \frac{2\sqrt{7}}{21}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big).
\end{aligned}$$

Per determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, 1, 0, -2)$ sul sottospazio U possiamo iniziare con l'osservare che, dall'equazione di U

$$x - 2y + 3z + 2w = 0,$$

si deduce che il vettore $n = (1, -2, 3, 2)$ è una base del sottospazio $U^\perp$. Dato che $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$ e ricordando che $u_1 = (2, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-3, 0, 1, 0)$, $u_3 = (-2, 0, 0, 1)$ è una base di U, si deduce che i vettori u_1, u_2, u_3 e n formano una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo dunque esprimere il vettore v come combinazione lineare di questi vettori, come segue:

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 n.$$

Si ottiene così il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 3 \\ \lambda_1 - 2\lambda_4 = 1 \\ \lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 2\lambda_4 = -2 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2/3 \\ \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_3 = -5/3 \\ \lambda_4 = -1/6. \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$v = \tfrac{2}{3}\, u_1 + \tfrac{1}{2}\, u_2 - \tfrac{5}{3}\, u_3 - \tfrac{1}{6}\, n.$$

Ponendo

$$\begin{aligned}
v' &= \tfrac{2}{3}\, u_1 + \tfrac{1}{2}\, u_2 - \tfrac{5}{3}\, u_3 = \Big(\frac{19}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\Big) \\
v'' &= -\tfrac{1}{6}\, n = \Big(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\Big)
\end{aligned}$$

si ottiene la decomposizione $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$; i vettori v' e v'' sono quindi le proiezioni ortogonali di v sui sottospazi U e $U^\perp$, rispettivamente.

Il vettore v', proiezione ortogonale di v su U, si può determinare anche in un altro modo. Abbiamo già osservato che una base del sottospazio $U^\perp$ è costituita dal vettore $n = (1, -2, 3, 2)$. Poiché tale vettore non ha norma unitaria, lo normalizziamo ottenendo così il versore

$$\hat{n} = \frac{n}{\|n\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -2, 3, 2).$$

Ora possiamo calcolare la proiezione ortogonale del vettore v sul sottospazio $U^\perp$ generato da $\hat{n}$, cioè il vettore v'', utilizzando la formula seguente:

$$v'' = (v \cdot \hat{n})\,\hat{n} = -\tfrac{1}{6}\,n = \Big(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\Big).$$

Ricordando che $v = v' + v''$, si può ora calcolare la proiezione ortogonale di v sul sottospazio U come segue:

$$v' = v - v'' = \Big(\frac{19}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\Big).$$

Esercizio 1.47. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (1, -1, 2, 3)$ e sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U.

(a) Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trasformi la base trovata nel punto (a) in una base ortogonale.

(c) Dato il vettore $v = (3, -1, 5, 2)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ tali che $v = v_1 + v_2$.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi è il nucleo di f?

Soluzione. Un generico vettore $w = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ deve essere ortogonale al vettore $u = (1, -1, 2, 3)$, generatore del sottospazio U. Il sottospazio W è dunque l'insieme delle soluzioni della seguente equazione (cartesiana):

$$W : u \cdot w = x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$

Da tale equazione si ricava $x_2 = x_1 + 2x_3 + 3x_4$ e attribuendo a x_1, x_3 e x_4 i valori $1, 0, 0$; $0, 1, 0$ e $0, 0, 1$ si ottengono i tre vettori

$$w_1 = (1, 1, 0, 0), \quad w_2 = (0, 2, 1, 0), \quad w_3 = (0, 3, 0, 1)$$

i quali formano una base del sottospazio W, che ha pertanto dimensione 3.

Applichiamo ora il procedimento di Gram-Schmidt alla base appena trovata. Poniamo $w_1' = w_1 = (1, 1, 0, 0)$; si ha $w_1' \cdot w_1' = 2$. Sia ora $w_2' = w_2 + \alpha_1 w_1'$. Richiedendo che w_2' sia ortogonale a w_1', cioè che sia $w_2' \cdot w_1' = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{w_2 \cdot w_1'}{w_1' \cdot w_1'} = -1.$$

Si ottiene così

$$w_2' = w_2 - w_1' = (-1, 1, 1, 0)$$

e si ha $w_2' \cdot w_2' = 3$. Poniamo ora $w_3' = w_3 + \alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2'$. Richiedendo che w_3' sia ortogonale a w_1' e w_2', cioè che sia $w_3' \cdot w_1' = w_3' \cdot w_2' = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{w_3 \cdot w_1'}{w_1' \cdot w_1'} = -\frac{3}{2}, \qquad \alpha_2 = -\frac{w_3 \cdot w_2'}{w_2' \cdot w_2'} = -1.$$

Si ottiene così
$$w_3' = w_3 - \frac{3}{2}\, w_1' - w_2' = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1\Big).$$
I vettori w_1', w_2' e w_3' sono una base ortogonale del sottospazio W.

Cerchiamo ora due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ tali che $v = v_1 + v_2$, ove $v = (3, -1, 5, 2)$ (notiamo che ciò equivale a dire che v_1 è la proiezione ortogonale del vettore v sul sottospazio U, mentre v_2 è la proiezione ortogonale di v sul sottospazio $U^\perp$). A tal fine osserviamo che sarà sufficiente determinare v_1, dato che si avrà poi $v_2 = v - v_1$.

Poiché U è generato dal vettore $u = (1, -1, 2, 3)$, dire che $v_1 \in U$ equivale a dire che $v_1 = \lambda u$, per qualche scalare λ. Si ha, di conseguenza, $v_2 = v - \lambda u$. Abbiamo dunque una sola incognita λ e ci servirà quindi una sola equazione. Tale equazione si trova osservando che richiedere che v_2 appartenga al sottospazio $U^\perp$ equivale a richiedere che v_2 sia ortogonale al vettore u, generatore del sottospazio U. Si deve quindi avere $v_2 \cdot u = (v - \lambda u) \cdot u = 0$, da cui si ricava
$$\lambda = \frac{v \cdot u}{u \cdot u}.$$
Si trova così che il vettore v_1 (il quale è la proiezione ortogonale di v sul sottospazio U) è dato dalla formula seguente:
$$v_1 = \Big(\frac{v \cdot u}{u \cdot u}\Big) u.$$
Effettuando i calcoli indicati si trova
$$v_1 = \frac{4}{3}\, u = \Big(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4\Big)$$
e dunque
$$v_2 = v - v_1 = \Big(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -2\Big).$$
Per scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ ricordiamo che le colonne di tale matrice sono le immagini tramite f dei vettori della base canonica. Per ogni $i = 1, 2, 3, 4$, il vettore $f(e_i)$ è la proiezione ortogonale di e_i sul sottospazio U; esso può essere dunque calcolato con una formula analoga a quella trovata in precedenza:
$$f(e_i) = \Big(\frac{e_i \cdot u}{u \cdot u}\Big) u.$$
Effettuando i calcoli si trova:
$$\begin{aligned}
f(e_1) &= \tfrac{1}{15}\, u = \big(\tfrac{1}{15}, -\tfrac{1}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{1}{5}\big)\\
f(e_2) &= -\tfrac{1}{15}\, u = \big(-\tfrac{1}{15}, \tfrac{1}{15}, -\tfrac{2}{15}, -\tfrac{1}{5}\big)\\
f(e_3) &= \tfrac{2}{15}\, u = \big(\tfrac{2}{15}, -\tfrac{2}{15}, \tfrac{4}{15}, \tfrac{2}{5}\big)\\
f(e_4) &= \tfrac{1}{5}\, u = \big(\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\big).
\end{aligned}$$
La matrice di f è dunque
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Per determinare il nucleo di f basta osservare che gli unici vettori la cui proiezione ortogonale su U è il vettore nullo sono i vettori ortogonali a U, cioè i vettori che appartengono al sottospazio $U^\perp$. Ciò significa che $\operatorname{Ker} f = U^\perp$.

Esercizio 1.48. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u_1 = (2, -1, 0, 3)$ e $u_2 = (1, 3, -1, 2)$. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $f(v) = (u_1 \cdot v, u_2 \cdot v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dimostri che f è lineare e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Dato il vettore $w = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $f^{-1}(w)$.

(d) Si determini una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(e) Si dimostri che per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ avrà sempre un autovalore uguale a 0, con molteplicità ≥ 2.

Soluzione. La linearità della funzione f è una conseguenza diretta della bilinearità del prodotto scalare. Ad ogni modo lo si può verificare direttamente come segue: dati $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \big(u_1 \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), u_2 \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)\big) \\
&= (\lambda_1 u_1 \cdot v_1 + \lambda_2 u_1 \cdot v_2, \lambda_1 u_2 \cdot v_1 + \lambda_2 u_2 \cdot v_2) \\
&= \lambda_1 (u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_1) + \lambda_2 (u_1 \cdot v_2, u_2 \cdot v_2) \\
&= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).
\end{aligned}$$

Il nucleo di f è l'insieme dei vettori $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = \mathbf{0}$. Si ha $f(v) = (2x_1 - x_2 + 3x_4, x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4)$, quindi l'equazione $f(v) = \mathbf{0}$ equivale al sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 3x_4 \\ x_3 = 7x_1 + 11x_4. \end{cases}$$

Il nucleo di f ha dunque dimensione 2 ed è generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 7, 0)$ e $v_2 = (0, 3, 11, 1)$, ottenuti ponendo rispettivamente $x_1 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_1 = 0$, $x_4 = 1$ nel sistema precedente. Osservando che $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 4$, si conclude che l'immagine di f ha dimensione 2 e dunque $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Come base dell'immagine di f si può dunque prendere una qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio la base canonica.

Dalla definizione di f segue subito che la matrice di f rispetto alle basi canoniche è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

le cui righe sono i vettori u_1 e u_2.

Dato il vettore $w = (1,2)$, la sua antiimmagine $f^{-1}(w)$ è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 3x_4 - 1 \\ x_3 = 7x_1 + 11x_4 - 5, \end{cases}$$

il che equivale a dire che

$$f^{-1}(w) = (0,-1,-5,0) + \operatorname{Ker} f.$$

Per determinare una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ basta osservare che, per definizione della funzione f, si ha $u_1 \cdot v = u_2 \cdot v = 0$, per ogni $v \in \operatorname{Ker} f$. Ciò significa che i vettori u_1 e u_2 sono ortogonali a $\operatorname{Ker} f$. Ora basta osservare che $\dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = 4 - \dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ e che i vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti per concludere che una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ è costituita proprio dai vettori u_1 e u_2.

Infine, data una qualunque funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, consideriamo la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Per ogni vettore $v \in \operatorname{Ker} f$, si ha $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, il che significa che tutti i vettori del nucleo di f sono autovettori della funzione composta $g \circ f$, relativi all'autovalore 0. Poiché $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$, esistono almeno due autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore 0, quindi la molteplicità (algebrica) dell'autovalore 0 deve essere ≥ 2.

Esercizio 1.49. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 - x_2 + x_4 = 0$, $3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ e $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v_1 = (2,1,-2,3)$ si trovino due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v_1 = u + u'$.

(c) Dati i vettori $v_2 = (5,-3,9,1)$ e $w = (1,2,1,-1)$ si determini (se possibile) l'equazione cartesiana di un sottospazio W, di dimensione 3, di $\mathbb{R}^4$, tale che w sia la proiezione ortogonale di v_2 su W.

(d) Si determini una base ortogonale del sottospazio W trovato nel punto (c).

Soluzione. Il sottospazio U è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova

$$U : \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 \\ x_3 = 4x_2 - x_4 \end{cases}$$

da cui si deduce che U ha dimensione 2 e una sua base è costituita dai vettori $u_1 = (1, 1, 4, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, -1, 1)$, ottenuti ponendo rispettivamente $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ nel sistema precedente.

Per determinare una base di $U^\perp$ osserviamo che un generico vettore $u' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartiene a $U^\perp$ se e solo se $u' \cdot u_1 = x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ e $u' \cdot u_2 = -x_1 - x_3 + x_4 = 0$. Il sottospazio $U^\perp$ è quindi dato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova

$$U^\perp : \begin{cases} x_2 = -x_1 - 4x_3 \\ x_4 = x_1 + x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che $U^\perp$ ha dimensione 2 e una sua base è costituita dai vettori $u'_1 = (1, -1, 0, 1)$ e $u'_2 = (0, -4, 1, 1)$, ottenuti ponendo rispettivamente $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ e $x_1 = 0$, $x_3 = 1$ nel sistema precedente.

Consideriamo ora il vettore $v_1 = (2, 1, -2, 3)$ e scriviamolo come combinazione lineare dei vettori u_1, u_2, u'_1 e u'_2 trovati in precedenza:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 u'_1 + \beta_2 u'_2 = v_1.$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 = 2 \\ \alpha_1 - \beta_1 - 4\beta_2 = 1 \\ 4\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 = -2 \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 3 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 = 3 \\ \beta_2 = -1 \end{cases}$$

Si ha dunque

$$v_1 = u_2 + 3u'_1 - u'_2$$

e i vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ cercati sono $u = u_2 = (-1, 0, -1, 1)$ e $u' = 3u'_1 - u'_2 = (3, 1, -1, 2)$.

Consideriamo ora i vettori $v_2 = (5, -3, 9, 1)$ e $w = (1, 2, 1, -1)$. Detto w' un vettore tale che $v_2 = w + w'$, si ha $w' = v_2 - w = (4, -5, 8, 2)$ e si osserva che $w' \cdot w = 0$, cioè i vettori w e w' sono ortogonali. Ciò significa che il sottospazio tridimensionale W per il quale il vettore w è la proiezione ortogonale di v_2 su W non è altro che il sottospazio ortogonale al vettore w'. Tale sottospazio W è quindi l'insieme dei vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) tali che

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot w' = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0.$$

Questa è precisamente l'equazione cartesiana del sottospazio W cercato.

Determiniamo infine una base ortogonale di W. Decidiamo di non ricorrere al procedimento di Gram-Schmidt. Cominciamo scegliendo (arbitrariamente) un vettore $w_1 \in W$; ad esempio $w_1 = (1, 0, 0, -2)$. Per scegliere un secondo vettore w_2 notiamo che esso deve soddisfare l'equazione $4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0$ di W e deve inoltre essere ortogonale al vettore w_1, cioè si deve avere $w_1 \cdot w_2 = x_1 - 2x_4 = 0$. Per determinare w_2 basta quindi trovare una delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Ad esempio, si può scegliere $w_2 = (2, 2, 0, 1)$.

Dato che $\dim W = 3$, per terminare non rimane altro che trovare un terzo vettore $w_3 \in W$, ortogonale a w_1 e w_2. Tale vettore deve essere una soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ w_1 \cdot w_3 = x_1 - 2x_4 = 0 \\ w_2 \cdot w_3 = 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ammette infinite soluzioni (dipendenti da un parametro) e una di esse è data dal vettore $w_3 = (32, -40, -45, 16)$. Una base ortogonale del sottospazio W è quindi costituita dai vettori w_1, w_2 e w_3 appena trovati.

Esercizio 1.50. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (2, 2, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, -4, -1)$.

(a) Dato il vettore $v = (3, -2, 1, 2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$, $L \neq U^\perp$, tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini una base ortonormale di U.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Soluzione. Iniziamo col determinare una base di $U^\perp$. Se $w = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp$, si ha

$$\begin{cases} w \cdot u_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ w \cdot u_2 = x_2 + x_3 = 0 \\ w \cdot u_3 = x_1 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \text{ qualsiasi} \\ x_3 = -x_2 \\ x_4 = 2x_2 \end{cases}$$

Ciò significa che $U^\perp$ ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $w = (-2, 1, -1, 2)$.

Scriviamo ora il vettore v come segue: $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$. Il vettore v' è la proiezione ortogonale di v su U (mentre v'' è la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$).

Dato che $U^\perp$ è generato dal vettore w, possiamo scrivere $v'' = \lambda w$ e quindi $v' = v - v'' = v - \lambda w$. Poiché v' e w sono ortogonali, si ha $v' \cdot w = 0$, che fornisce la seguente equazione:

$$v' \cdot w = (v - \lambda w) \cdot w = v \cdot w - \lambda w \cdot w = 0$$

da cui si ricava

$$\lambda = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} = -\frac{1}{2}.$$

Si ha dunque

$$v' = v + \frac{1}{2} w = \Big(2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 3\Big).$$

Poiché $\dim U = 3$, per determinare un sottospazio $L \neq U^\perp$, tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$, basta determinare un vettore ℓ linearmente indipendente da w e tale che i vettori $\{u_1, u_2, u_3, \ell\}$ siano una base di $\mathbb{R}^4$. Esistono infiniti vettori ℓ siffatti; ad esempio, è facile verificare che il vettore $\ell = (1, 0, 0, 0)$ soddisfa le condizioni richieste. Come L si può quindi scegliere il sottospazio generato dal vettore ℓ indicato.

Per determinare una base ortonormale di U possiamo applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U. Poniamo $w_1 = u_1 = (2, 2, 0, 1)$; si ha $w_1 \cdot w_1 = 9$. Sia ora $w_2 = u_2 + \alpha_1 w_1$. Richiedendo che w_2 sia ortogonale a w_1, cioè che sia $w_2 \cdot w_1 = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{u_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{2}{9}.$$

Si ottiene così

$$w_2 = u_2 - \frac{2}{9}\, w_1 = \Big(-\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, 1, -\frac{2}{9}\Big).$$

Per semplificare un po' l'espressione di w_2 decidiamo di moltiplicare tutto per 9 e di porre pertanto

$$w_2 = (-4, 5, 9, -2).$$

Ora si ha $w_2 \cdot w_2 = 126$. Poniamo ora $w_3 = u_3 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. Richiedendo che w_3 sia ortogonale a w_1 e w_2, cioè che sia $w_3 \cdot w_1 = w_3 \cdot w_2 = 0$, si trova

$$\alpha_1 = -\frac{u_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{1}{9}, \qquad \alpha_2 = -\frac{u_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = \frac{19}{63}.$$

Si ottiene così

$$w_3 = u_3 - \frac{1}{9}\, w_1 + \frac{19}{63}\, w_2 = \Big(-\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{12}{7}\Big).$$

Come in precedenza, per semplificare un po' l'espressione di w_3 decidiamo di moltiplicare tutto per 7 e dividere per 3, ponendo pertanto

$$w_3 = (-1, 3, -3, -4).$$

Ora si ha $w_3 \cdot w_3 = 35$.

I vettori w_1, w_2 e w_3 sono una base ortogonale del sottospazio U; le loro norme sono date rispettivamente da:

$$\begin{aligned}
\|w_1\| &= \sqrt{w_1 \cdot w_1} = 3 \\
\|w_2\| &= \sqrt{w_2 \cdot w_2} = 3\sqrt{14} \\
\|w_3\| &= \sqrt{w_3 \cdot w_3} = \sqrt{35}.
\end{aligned}$$

Per ottenere una base ortonormale di U è ora sufficiente dividere i vettori w_1, w_2 e w_3 per le loro norme:

$$\begin{aligned}
w_1' &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \\
w_2' &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{4}{3\sqrt{14}}, \frac{5}{3\sqrt{14}}, \frac{9}{3\sqrt{14}}, -\frac{2}{3\sqrt{14}}\right) \\
w_3' &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, -\frac{4}{\sqrt{35}}\right).
\end{aligned}$$

Consideriamo infine la funzione lineare f che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. I vettori v tali che $f(v) = \mathbf{0}$ sono dunque tutti e soli i vettori ortogonali a U, si ha quindi $\operatorname{Ker}(f) = U^\perp$ e una base di $\operatorname{Ker}(f)$ è data dal vettore $w = (-2, 1, -1, 2)$ (che è la base di $U^\perp$ trovata all'inizio).

Esercizio 1.51. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale e nelle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) si consideri il sottospazio V dato dall'equazione

$$V : 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0.$$

(a) Dare una base di V.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di $v = (1, 1, 1, 1)$ su V.

(c) Dato $\langle(1, 2, -1, 0)\rangle$ sottospazio di V si determini M sottospazio di V tale che abbia dimensione due e che sia fatto da vettori ortogonali a $\langle(1, 2, -1, 0)\rangle$.

(d) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno come proiezione ortogonale su V il vettore $(1, 2, -1, 0)$.

Soluzione. Dall'equazione di V si ricava

$$V : x_2 = 3x_1 + x_3 - 2x_4$$

da cui si deduce che V ha dimensione 3 e una sua base è costituita dai vettori $v_1 = (1, 3, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, -2, 0, 1)$.

Sempre dall'equazione di V segue che il vettore $w = (3, -1, 1, -2)$ è ortogonale a V, anzi è una base di $V^\perp$.

Scriviamo ora il vettore v come somma $v = v' + v''$, con $v' \in V$ e $v'' \in V^\perp$. Poiché w è una base di $V^\perp$, si ha $v'' = \lambda w$ e quindi $v' = v - v'' = v - \lambda w$. Dato che $v' \in V$ esso deve essere ortogonale a w, deve dunque essere $v' \cdot w = 0$. Si ottiene così l'equazione

$$v' \cdot w = (v - \lambda w) \cdot w = v \cdot w - \lambda w \cdot w = 0$$

da cui si ricava
$$\lambda = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} = \frac{1}{15}.$$
Si ha dunque
$$v'' = \frac{1}{15}\, w = \Big(\frac{3}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{2}{15}\Big)$$
$$v' = v - v'' = \Big(\frac{12}{15}, \frac{16}{15}, \frac{14}{15}, \frac{17}{15}\Big).$$
Il vettore v' è la proiezione ortogonale di $v = (1, 1, 1, 1)$ su V.

Poiché M deve avere dimensione 2, una sua base deve essere costituita da due vettori di V che siano ortogonali al vettore $(1, 2, -1, 0)$. Indicato con (x_1, x_2, x_3, x_4) un generico vettore, imponendo le condizioni di appartenenza a V e di ortogonalità al vettore $(1, 2, -1, 0)$, si ottiene il sistema
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
da cui si ricava
$$\begin{cases} x_2 = -4x_1 + 2x_4 \\ x_3 = -7x_1 + 4x_4 \end{cases}$$
Una base di M è dunque formata dai vettori $m_1 = (1, -4, -7, 0)$ e $m_2 = (0, 2, 4, 1)$.

Infine, per trovare tutti i vettori che hanno come proiezione ortogonale su V il vettore $(1, 2, -1, 0)$, basta ricordare che $w = (3, -1, 1, -2)$ è una base di $V^\perp$. I vettori cercati sono dunque tutti e soli i vettori della forma
$$u_t = (1, 2, -1, 0) + t(3, -1, 1, -2) = (1 + 3t, 2 - t, -1 + t, -2t),$$
per ogni valore del parametro t.

Esercizio 1.52. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (3, -2, 1, -2)$ e $w = (1, -1, 0, 1)$.

(a) Si determini l'equazione di un sottospazio W, di dimensione 3, tale che il vettore w sia la proiezione ortogonale di u su W. Si determini inoltre una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W, tale che $w_1 = w$.

(b) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(v) = (v \cdot u)w + (v \cdot w)u$. Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Siano U_1 e U_2 i sottospazi generati, rispettivamente, da $u_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 1)$. Indichiamo con p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su U_1 e U_2. Si determini l'insieme F di tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\|p_1(v)\| = \|p_2(v)\|$ e si dica se F è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione. Se w deve essere la proiezione ortogonale di u su un sottospazio W, si deve avere $u = w + w'$, con $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Dato che conosciamo u e w, possiamo ricavare $w' = u - w = (2, -1, 1, -3)$. Naturalmente, affinché esista un sottospazio W con le proprietà richieste, i vettori w e w' devono essere ortogonali. Ciò è vero, dato che si ha $w \cdot w' = 0$.

Poiché W deve avere dimensione 3, si ha $\dim W^{\perp} = 1$, quindi il vettore $w' = (2, -1, 1, -3)$ risulta essere una base di $W^{\perp}$. Ma allora le componenti di w' non sono altro che i coefficienti che compaiono nell'equazione cartesiana di W. Il sottospazio W cercato ha dunque equazione

$$W : 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0.$$

Cerchiamo ora una base ortogonale di W di cui il primo vettore sia $w_1 = w = (1, -1, 0, 1)$. Se indichiamo con $w_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vettore incognito, dobbiamo richiedere che $w_2 \in W$ e che i vettori w_1 e w_2 siano ortogonali, cioè che $w_1 \cdot w_2 = 0$. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_4 \\ x_3 = -x_1 + 4x_4 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema (nel caso specifico la soluzione che si ottiene ponendo $x_1 = 1$ e $x_4 = 0$) fornisce il vettore $w_2 = (1, 1, -1, 0)$.

Il vettore w_3 si trova in modo analogo. Indicando con $w_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vettore incognito, dobbiamo richiedere che $w_3 \in W$ e che w_3 sia ortogonale ai vettori w_1 e w_2, deve cioè essere $w_1 \cdot w_3 = 0$ e $w_2 \cdot w_3 = 0$. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema fornisce il vettore $w_3 = (1, 2, 3, 1)$.

Dalla definizione della funzione f

$$f(v) = (v \cdot u)w + (v \cdot w)u$$

si vede che l'immagine di ogni vettore v è una combinazione lineare dei vettori w e u. Dato che w e u sono linearmente indipendenti, essi sono una base dell'immagine di f (che ha pertanto dimensione 2).

Per determinare il nucleo di f osserviamo che si ha $f(v) = \mathbf{0}$ se e solo se $v \cdot u = 0$ e $v \cdot w = 0$ (sempre perché w e u sono linearmente indipendenti), quindi $\mathrm{Ker}(f)$ è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} v \cdot u = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ v \cdot w = x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_4 \\ x_3 = -x_1 + 4x_4 \end{cases}$$

da cui si deduce che una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è costituita dai vettori $(1,1,-1,0)$ e $(0,1,4,1)$.

Se U è un sottospazio generato da un vettore $u \neq \mathbf{0}$, la proiezione ortogonale di un generico vettore v su U è data dalla formula seguente:

$$p_U(v) = \Big(\frac{v \cdot u}{u \cdot u}\Big) u$$

Dette p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su U_1 e U_2 rispettivamente e posto $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, si ha allora

$$\begin{aligned} p_1(v) &= \Big(\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\Big) u_1 = x_3 u_1 = (0,0,x_3,0) \\ p_2(v) &= \Big(\frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\Big) u_2 = \frac{x_2+x_4}{2}\, u_2 = \Big(0, \frac{x_2+x_4}{2}, 0, \frac{x_2+x_4}{2}\Big) \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \|p_1(v)\| &= \sqrt{x_3^2} \\ \|p_2(v)\| &= \sqrt{\frac{(x_2+x_4)^2}{2}} \end{aligned}$$

e l'uguaglianza $\|p_1(v)\| = \|p_2(v)\|$ si traduce nella seguente equazione che descrive l'insieme F

$$F : x_3^2 = \frac{1}{2}\,(x_2+x_4)^2$$

che equivale a

$$F : x_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x_2+x_4)$$

Poiché l'equazione di F non è lineare, si conclude che F non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Per convincersene basta osservare che i vettori $v_1 = (0,2,\sqrt{2},0)$ e $v_2 = (0,2,-\sqrt{2},0)$ appartengono a F, ma la loro somma è il vettore $v_1 + v_2 = (0,4,0,0)$ che non soddisfa l'equazione di F.

Esercizio 1.53. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i sottospazi V_1, generato dal vettore $v_1 = (1,2,-1)$ e V_2, generato dal vettore $v_2 = (1,1,-1)$.

(a) Si determini una base di $(V_1+V_2)^{\perp}$ e una base di $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $w = (1,-1,4)$ sul sottospazio $V_1 + V_2$.

(c) Dette p_{V_1} e p_{V_2} le proiezioni ortogonali su V_1 e V_2 rispettivamente, si determinino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

(d) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V_1 è il vettore $(2,4,-2)$.

Soluzione. I vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi una base di $V_1 + V_2$ è data da $\{v_1, v_2\}$. I vettori di $(V_1+V_2)^{\perp}$ sono dunque i vettori che sono ortogonali a v_1 e v_2. In $\mathbb{R}^3$ un vettore ortogonale a v_1 e v_2 è dato dal loro prodotto vettoriale

$$v_3 = v_1 \times v_2 = (-1,0,-1).$$

Si conclude quindi che $v_3 = (-1, 0, -1)$ è una base di $(V_1 + V_2)^\perp$.

Analogamente, i vettori di $V_1^\perp \cap V_2^\perp$ devono appartenere a $V_1^\perp$ e a $V_2^\perp$, essi devono dunque essere ortogonali a v_1 e a v_2. Ma questo significa che

$$V_1^\perp \cap V_2^\perp = (V_1 + V_2)^\perp.$$

Consideriamo ora il vettore $w = (1, -1, 4)$ e scriviamo $w = w' + w''$, con $w' \in V_1 + V_2$ e $w'' \in (V_1 + V_2)^\perp$. Dato che $(V_1 + V_2)^\perp$ è generato da v_3, si ha $w'' = \lambda v_3$ e quindi $w' = w - w'' = w - \lambda v_3$. Poiché w' è ortogonale a v_3, si ha

$$w' \cdot v_3 = (w - \lambda v_3) \cdot v_3 = w \cdot v_3 - \lambda v_3 \cdot v_3 = 0,$$

da cui si ricava

$$\lambda = \frac{w \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} = -\frac{5}{2}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} w'' &= -\frac{5}{2}\, v_3 = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right) \\ w' &= w - w'' = \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

e w' è la proiezione ortogonale di w sul sottospazio $V_1 + V_2$.

Il vettore $p_{V_1}(v)$ è la proiezione ortogonale di v sul sottospazio V_1, quindi è un multiplo di v_1. Analogamente, il vettore $p_{V_2}(v)$ è la proiezione ortogonale di v sul sottospazio V_2, quindi è un multiplo di v_2. Dato che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, si può avere $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$ se e solo se $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v) = \mathbf{0}$, il che equivale a dire che v deve essere ortogonale a v_1 e v_2. Ma abbiamo già visto che i vettori ortogonali a v_1 e v_2 sono tutti e soli i multipli di v_3. Si conclude quindi che i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$ sono tutti i vettori del tipo $v = \lambda v_3$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V_1 è il vettore $(2, 4, -2)$ è

$$S = (2, 4, -2) + V_1^\perp.$$

Il sottospazio $V_1^\perp$ è descritto dall'equazione

$$V_1^\perp : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

e quindi una sua base è costituita dai vettori $(-2, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$. Si ha quindi

$$S = \{(2, 4, -2) + \alpha(-2, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) \,|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Capitolo 2

Geometria Affine

Esercizio 2.1. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, -1, -4)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC.

(c) Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Soluzione. Per determinare l'equazione del piano π calcoliamo i vettori $v_1 = B - A = (-1, 1, 1)$ e $v_2 = C - A = (1, 0, -5)$; π sarà dunque il piano passante per A e parallelo ai vettori v_1 e v_2. La sua equazione parametrica è

$$\pi : X = A + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

cioè

$$\pi : \begin{cases} x = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = -1 + \lambda_1 \\ z = 1 + \lambda_1 - 5\lambda_2 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche del piano π. Per trovare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri λ_1 e λ_2. Si trova $\lambda_1 = y + 1$, $\lambda_2 = x + y + 1$ e sostituendo queste espressioni nella terza equazione si ottiene l'equazione cartesiana di π:

$$\pi : 5x + 4y + z + 3 = 0.$$

Da questa equazione si deduce che un vettore ortogonale al piano π è dato da

$$n_\pi = (5, 4, 1).$$

Calcoliamo ora il punto medio M del segmento BC:

$$M = \frac{B+C}{2} = (0, -1/2, -1).$$

Poiché la retta r passa per i punti A e M, un suo vettore direttore è

$$v_r = M - A = (0, 1/2, -2).$$

Le equazioni parametriche di r sono quindi $X = A + tv_r$, cioè

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \frac{1}{2}\,t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Se vogliamo le sue equazioni cartesiane basta ricavare $t = 2y + 2$ dalla seconda equazione e sostituire questa espressione nella terza. Si ottiene così

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ 4y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Per trovare la retta s abbiamo solo bisogno di conoscere un suo vettore direttore v_s. Tale vettore deve essere ortogonale a v_r (dato che le rette r e s devono essere perpendicolari) e "contenuto" nel piano π (cioè parallelo a π). Richiedere che il vettore v_s sia parallelo al piano π equivale a richiedere che tale vettore sia ortogonale al vettore n_π (dato che n_π è un vettore ortogonale al piano π). Concludiamo quindi che v_s deve essere un vettore ortogonale ad entrambi i vettori n_π e v_r. Possiamo quindi prendere $v_s = n_\pi \times v_r$ (il prodotto vettoriale di n_π e v_r). Si trova così

$$v_s = (-17/2, 10, 5/2).$$

La retta s è quindi data dalle seguenti equazioni parametriche: $X = A + tv_s$, cioè

$$s : \begin{cases} x = -\frac{17}{2}\,t \\ y = -1 + 10t \\ z = 1 + \frac{5}{2}\,t. \end{cases}$$

Esercizio 2.2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2z - 7 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $R \in r$ e $S \in s$ di minima distanza.

Soluzione. Vediamo se le due rette sono incidenti oppure no:

$$r \cap s : \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \\ x - 2z - 7 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che questo sistema non ammette alcuna soluzione, quindi $r \cap s = \varnothing$ e dunque le rette r e s non sono incidenti. Per controllare se esse sono parallele cerchiamo un vettore direttore di ciascuna retta. Utilizzando le equazioni di r si possono facilmente determinare due punti $A, B \in r$; ad esempio $A = (-1, 0, 3)$ e $B = (2, -1, 3)$. Un vettore direttore di r è quindi dato da $v_r = B - A = (3, -1, 0)$.

In modo del tutto analogo si possono determinare due punti $C, D \in s$, ad esempio $C = (1, 1, -3)$ e $D = (-1, 0, -4)$; si può poi prendere come vettore direttore della retta s il vettore $v_s = C - D = (2, 1, 1)$. È ora immediato osservare che i vettori v_r e v_s non sono multipli uno dell'altro, quindi le rette r e s non sono parallele. Abbiamo così dimostrato che r e s sono due rette sghembe, come richiesto.

Per determinare l'equazione della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe procediamo nel modo seguente: cerchiamo di determinare un punto $P \in r$ e un punto $Q \in s$ tali che il vettore $w = P - Q$ sia ortogonale ai vettori direttori di r e s; in questo modo la retta passante per i punti P e Q sarà la retta ℓ cercata. Così facendo risponderemo anche alle due domande successive; infatti la distanza tra le rette r e s coincide con la distanza tra i punti P e Q, i quali sono precisamente i punti di r e di s di minima distanza.

Dato che la retta r passa per il punto $A = (-1, 0, 3)$ ed è parallela al vettore $v_r = (3, -1, 0)$, un generico punto $P \in r$ si può scrivere nella forma $P = A + \lambda v_r = (-1 + 3\lambda, -\lambda, 3)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Analogamente, dato che la retta s passa per il punto $D = (-1, 0, -4)$ ed è parallela al vettore $v_s = (2, 1, 1)$, un generico punto $Q \in s$ si può scrivere nella forma $Q = D + \mu v_s = (-1 + 2\mu, \mu, -4 + \mu)$, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$. Il vettore $w = P - Q$ è quindi dato da $w = (3\lambda - 2\mu, -\lambda - \mu, 7 - \mu)$. Imponendo che w sia ortogonale ai vettori v_r e v_s si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} w \cdot v_r = 10\lambda - 5\mu = 0 \\ w \cdot v_s = 5\lambda - 6\mu + 7 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2. \end{cases}$$

I punti P e Q cercati sono pertanto

$$P = (2, -1, 3) \qquad \text{e} \qquad Q = (3, 2, -2).$$

La retta ℓ è la retta passante per P e Q, la cui equazione parametrica è $X = P + t(Q - P)$, che equivale al seguente sistema:

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

Se si vogliono determinare le equazioni cartesiane di ℓ si può ricavare $t = x - 2$ dalla prima equazione e sostituire nelle altre due, ottenendo il seguente sistema:

$$\ell : \begin{cases} 3x - y - 7 = 0 \\ 5x + z - 13 = 0. \end{cases}$$

Per terminare, osserviamo che i punti $R \in r$ e $S \in s$ di minima distanza sono precisamente $R = P = (2, -1, 3)$ e $S = Q = (3, 2, -2)$, e che la distanza di r da s è data da: $\mathrm{dist}(r, s) = \mathrm{dist}(P, Q) = \|w\| = \sqrt{35}$.

Esercizio 2.3. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati la retta

$$r : \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

e il punto $P = (1, 3, -2)$.

(a) Si determini l'equazione del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione della retta s passante per il punto P, perpendicolare alla retta r e contenuta nel piano π.

(c) Si determini infine il punto R di intersezione delle rette r e s e la distanza del punto P dalla retta r.

Soluzione. Per determinare l'equazione del piano π contenente la retta r e passante per il punto P consideriamo il fascio di piani di asse r, dato da

$$\lambda(x - 2y - 3) + \mu(2x + y + z + 1) = 0$$

e imponiamo la condizione di passaggio per P:

$$-8\lambda + 4\mu = 0.$$

Si trova così $\mu = 2\lambda$ e possiamo quindi prendere $\lambda = 1$ e $\mu = 2$. Sostituendo questi valori nell'equazione del fascio di piani, si ottiene l'equazione del piano π cercato:

$$\pi : 5x + 2z - 1 = 0.$$

Un vettore perpendicolare a tale piano è $n_\pi = (5, 0, 2)$.

Cerchiamo ora un vettore direttore v_r della retta r. A tal fine determiniamo due punti (arbitrari) di r, ad esempio i punti $A = (1, -1, -2)$ e $B = (3, 0, -7)$, e calcoliamo la loro differenza:

$$v_r = B - A = (2, 1, -5).$$

Poiché la retta s deve essere ortogonale alla retta r e contenuta nel piano π, un suo vettore direttore v_s deve essere ortogonale al vettore v_r e anche al vettore n_π, il quale è ortogonale al piano π. Come vettore v_s si può dunque prendere il prodotto vettoriale dei vettori v_r e n_π:

$$v_s = v_r \times n_\pi = (2, -29, -5).$$

La retta s è dunque la retta passante per il punto P e parallela al vettore v_s e quindi le sue equazioni parametriche sono date da $X = P + tv_s$, cioè

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 29t \\ z = -2 - 5t. \end{cases}$$

Il punto $R = r \cap s$ si determina mettendo a sistema le equazioni di r con quelle di s:

$$R = r \cap s : \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 3 - 29t \\ z = -2 - 5t. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova $R = \left(\frac{19}{15}, -\frac{13}{15}, -\frac{8}{3}\right)$. La distanza di P dalla retta r non è altro che la distanza di P dal punto R, cioè la norma del vettore $R - P = \left(\frac{4}{15}, -\frac{58}{15}, -\frac{2}{3}\right)$. Si ha dunque

$$\operatorname{dist}(P, r) = \operatorname{dist}(P, R) = \|R - P\| = \tfrac{2}{15}\sqrt{870}.$$

Esercizio 2.4. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe e si calcoli la loro reciproca distanza. Si determini la retta ℓ passante per il punto $P = (2, 0, 1)$ e incidente alle rette r e s. Si calcolino le coordinate dei punti di intersezione $R = r \cap \ell$ e $S = s \cap \ell$.

Soluzione. Controlliamo se le rette r e s sono incidenti:

$$r \cap s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \\ x - y + 4z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che questo sistema non ammette soluzioni, quindi $r \cap s = \varnothing$. Le due rette sono pertanto parallele oppure sghembe.

Cerchiamo ora dei vettori direttori di r e s. Dalle equazioni parametriche della retta r si deduce immediatamente che un suo vettore direttore è $v_r = (-1, 2, 1)$. Per determinare un vettore direttore della retta s cerchiamo prima due punti di tale retta. Dalle equazioni di s si deduce che i punti $A = (1, 0, 0)$

e $B = (2, -2, -3/4)$ appartengono a tale retta, quindi un vettore direttore di s è dato da $v_s = B - A = (1, -2, -3/4)$. Come si vede, i vettori v_r e v_s non sono proporzionali, quindi le rette r e s non sono parallele. Abbiamo così dimostrato che r e s sono due rette sghembe.

Per determinare la distanza di r da s procediamo nel modo seguente. Scegliamo un punto della retta r, ad esempio il punto $C = (2, -1, 0)$, e un punto della retta s, ad esempio $A = (1, 0, 0)$. Consideriamo il vettore $w = C - A = (1, -1, 0)$. Ricordando che v_r e v_s sono vettori direttori delle rette r e s rispettivamente, si ha:

$$\mathrm{dist}(r, s) = \frac{|w \cdot (v_r \times v_s)|}{\|v_r \times v_s\|}.$$

Calcolando il prodotto vettoriale di v_r e v_s si ottiene

$$v_r \times v_s = (1/2, 1/4, 0),$$

e quindi $\|v_r \times v_s\| = \sqrt{5}/4$. Si ha poi

$$w \cdot (v_r \times v_s) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}.$$

Dalla formula precedente si ottiene così

$$\mathrm{dist}(r, s) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Per determinare la retta ℓ passante per il punto $P = (2, 0, 1)$ e incidente alle rette r e s consideriamo un generico punto di r, dato da $R_t = (2 - t, -1 + 2t, t)$, e indichiamo con ℓ_t la retta passante per i punti P e R_t:

$$\ell_t : \begin{cases} x = 2 + \lambda(-t) \\ y = \lambda(-1 + 2t) \\ z = 1 + \lambda(t - 1) \end{cases}$$

Si tratta in realtà di una "famiglia" di infinite rette ℓ_t, parametrizzate da $t \in \mathbb{R}$. Per costruzione, tutte queste rette passano per il punto P e intersecano la retta r (nel punto R_t). Si tratta solo di scoprire quale di queste rette interseca anche la retta s, cioè per quale t si ha $\ell_t \cap s \neq \varnothing$. Cerchiamo dunque l'intersezione tra le rette ℓ_t e s:

$$\ell_t \cap s : \begin{cases} x = 2 - \lambda t \\ y = (-1 + 2t)\lambda \\ z = 1 + (t - 1)\lambda \\ x - y + 4z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha un'unica soluzione, data da

$$\begin{cases} t = 1/2 \\ \lambda = 2 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Ciò significa che il valore di t per cui la retta ℓ_t è incidente alle rette r e s è $t = 1/2$ e in tal caso il punto S di intersezione tra s e ℓ_t ha coordinate $S = (1, 0, 0)$. La retta ℓ cercata ha dunque le seguenti equazioni parametriche:

$$\ell = \ell_{1/2} : \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

e il punto $R = r \cap \ell$ è dato da $R = R_{1/2} = (3/2, 0, 1/2)$.

Per terminare osserviamo che la retta ℓ si poteva anche determinare nel modo seguente. Consideriamo il piano π contenente la retta s e il punto P. Per trovare la sua equazione consideriamo il fascio di piani di asse s

$$\lambda(x - y + 4z - 1) + \mu(2x + y - 2) = 0$$

e imponiamo la condizione di passaggio per P

$$5\lambda + 2\mu = 0.$$

Ponendo $\lambda = -2$ e $\mu = 5$ e sostituendo tali valori nell'equazione del fascio di piani, si trova il piano cercato

$$\pi : 8x + 7y - 8z - 8 = 0.$$

Poiché la retta ℓ cercata deve passare per il punto P e deve intersecare la retta s, essa deve necessariamente essere contenuta nel piano π. Cerchiamo ora l'intersezione tra il piano π e la retta r:

$$\pi \cap r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \\ 8x + 7y - 8z - 8 = 0. \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è

$$\begin{cases} t = 1/2 \\ x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2. \end{cases}$$

Si scopre così che il piano π e la retta r si intersecano nel punto di coordinate $(3/2, 0, 1/2)$. Da quanto detto in precedenza si deduce che la retta ℓ cercata deve necessariamente intersecare la retta r nel punto $R = (3/2, 0, 1/2)$; essa è dunque la retta passante per P e parallela al vettore $R - P = (-1/2, 0, -1/2)$. Si ritrovano così le equazioni della retta ℓ scritte in precedenza.

Esercizio 2.5. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, -1, -4)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

(b) Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC.

(c) Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Infine, dato il punto $P = (1, 1, 1)$, si determinino le distanze di P dalla retta r e dal piano π.

Soluzione. Il piano π avrà un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$. Imponendo le condizioni di passaggio per i punti A, B e C, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} -b + c + d = 0 \\ -a + 2c + d = 0 \\ a - b - 4c + d = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} a = 5c \\ b = 4c \\ d = 3c \\ c \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Ponendo $c = 1$ si ottiene la seguente equazione cartesiana del piano π:

$$\pi : 5x + 4y + z + 3 = 0.$$

Calcoliamo le coordinate del punto medio M del segmento BC:

$$M = \frac{B + C}{2} = \left(0, -\tfrac{1}{2}, -1\right).$$

Il vettore direttore della retta r è dato da

$$v_r = M - A = \left(0, \tfrac{1}{2}, -2\right)$$

e quindi le equazioni parametriche di r sono $X = A + tv_r$, cioè

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \frac{1}{2}\,t \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$$

Se si vogliono le equazioni cartesiane della retta r si può ricavare t dalla seconda equazione, $t = 2y + 2$, e sostituire tale valore nella terza, ottenendo così

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ 4y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Indichiamo con v_s un vettore direttore della retta s. Poiché s deve essere contenuta nel piano π, il suo vettore direttore v_s deve essere ortogonale al vettore $n_\pi = (5, 4, 1)$, ortogonale al piano π. Inoltre v_s deve essere anche ortogonale al vettore v_r, dato che la retta s deve essere ortogonale alla retta r. Quindi come v_s dobbiamo prendere un vettore che sia ortogonale ad entrambi i vettori n_π e v_r; ad esempio possiamo prendere il loro prodotto vettoriale:

$$v_s = n_\pi \times v_r = \left(-\tfrac{17}{2}, 10, \tfrac{5}{2}\right).$$

Le equazioni parametriche della retta s sono quindi $X = A + tv_s$, cioè

$$s : \begin{cases} x = -\frac{17}{2}\, t \\ y = -1 + 10t \\ z = 1 + \frac{5}{2}\, t. \end{cases}$$

Per calcolare la distanza del punto P dalla retta r consideriamo il vettore $u = P - A = (1, 2, 0)$. Possiamo ora usare la seguente formula:

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{\|u \times v_r\|}{\|v_r\|}.$$

Effettuando i calcoli necessari, si trova $u \times v_r = (-4, 2, 1/2)$, $\|u \times v_r\| = 9/2$ e $\|v_r\| = \frac{1}{2}\sqrt{17}$. Si ha pertanto

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{9\sqrt{17}}{17}.$$

Infine, per la distanza di P dal piano π, si trova

$$\operatorname{dist}(P, \pi) = \frac{13}{\sqrt{42}} = \frac{13\sqrt{42}}{42}.$$

Esercizio 2.6. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (-1, 2, -3), \quad B = (2, -1, 3), \quad C = (-1, 0, 0).$$

(a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente il triangolo ABC e calcolare l'area di tale triangolo.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta s, perpendicolare al piano π e passante per il punto $P = (0, -3, 0)$.

(c) Calcolare la distanza tra la retta s e la retta r, passante per A e B.

(d) Determinare la proiezione ortogonale della retta OP sul piano π (ove O è il punto di coordinate $(0, 0, 0)$).

(e) Calcolare l'angolo fra il piano π e il piano XY.

Soluzione. Consideriamo i vettori $v = B - A = (3, -3, 6)$ e $w = C - A = (0, -2, 3)$. Le equazioni parametriche del piano π sono date da $X = A + \lambda v + \mu w$, cioè

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 3\lambda - 2\mu \\ z = -3 + 6\lambda + 3\mu. \end{cases}$$

Eliminando i due parametri λ e μ si trova la seguente equazione cartesiana per il piano π:

$$\pi : x - 3y - 2z + 1 = 0.$$

L'area del triangolo di vertici A, B e C si può calcolare utilizzando la formula seguente:

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}\,\|v \times w\|.$$

Calcolando il prodotto vettoriale di v e w si trova il vettore $v \times w = (3, -9, -6)$, la cui norma è $\|v \times w\| = 3\sqrt{14}$. Si ha quindi

$$\text{Area}(ABC) = \frac{3}{2}\sqrt{14}.$$

Un vettore ortogonale al piano π è $n_\pi = (1, -3, -2)$. La retta s, perpendicolare al piano π e passante per il punto $P = (0, -3, 0)$ ha dunque equazioni parametriche date da $X = P + tn_\pi$, cioè

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 3t \\ z = -2t. \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si trovano le seguenti equazioni cartesiane:

$$s : \begin{cases} 3x + y + 3 = 0 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

Per calcolare la distanza tra le rette r e s procediamo come segue. Scegliamo un punto della retta r, ad esempio $A = (-1, 2, -3)$, un punto della retta s, ad esempio $P = (0, -3, 0)$, e calcoliamo il vettore $w = A - P = (-1, 5, -3)$. Consideriamo ora un vettore direttore della retta r, ad esempio $v_r = (1, -1, 2)$ (è il vettore $B - A$ diviso per 3), e un vettore direttore della retta s, $v_s = n_\pi = (1, -3, -2)$. La distanza tra le rette r e s è data dalla seguente formula:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|(v_r \times v_s) \cdot w|}{\|v_r \times v_s\|}.$$

Si ha

$$|(v_r \times v_s) \cdot w| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\right| = 18,$$

$v_r \times v_s = (8, 4, -2)$, e quindi $\|v_r \times v_s\| = 2\sqrt{21}$. Si trova così

$$\text{dist}(r, s) = \frac{3}{7}\sqrt{21}.$$

Per trovare la proiezione ortogonale della retta OP sul piano π è sufficiente trovare la proiezione ortogonale su π di due punti di tale retta (ad esempio dei punti O e P); la retta cercata è la retta che passa per i punti così trovati. In alternativa si può procedere come segue. Dato che il punto O ha coordinate $O = (0, 0, 0)$, le equazioni parametriche della retta OP sono

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = 0. \end{cases}$$

Mettendo a sistema queste equazioni con l'equazione del piano π si trovano le coordinate del punto di intersezione T tra il piano π e la retta OP, $T = (0, 1/3, 0)$. Dato che $T \in \pi$, la sua proiezione ortogonale sul piano π è il punto T stesso.

Per calcolare la proiezione ortogonale del punto P sul piano π consideriamo la retta passante per P e ortogonale a π; questa è precisamente la retta s determinata in precedenza. Cerchiamo ora il punto $P' = s \cap \pi$:

$$s \cap \pi : \begin{cases} 3x + y + 3 = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - 3y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si trova $P' = (-5/7, -6/7, 10/7)$. Il vettore $P' - T$ è dato da

$$P' - T = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{25}{21}, \frac{10}{7}\right)$$

e dunque la retta passante per i punti T e P' ha le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{7}\,\lambda \\ y = \frac{1}{3} - \frac{25}{21}\,\lambda \\ z = \frac{10}{7}\,\lambda. \end{cases}$$

Questa retta è la proiezione ortogonale della retta OP sul piano π.

Il piano π, di equazione $x - 3y - 2z + 1 = 0$, ha un vettore normale dato da $n_\pi = (1, -3, -2)$. Indichiamo con σ il piano XY; esso ha equazione $z = 0$. Un vettore normale a tale piano è dunque il vettore $n_\sigma = (0, 0, 1)$. Osserviamo ora che l'angolo α formato dai due piani π e σ coincide con l'angolo formato dai due vettori n_π e n_σ. Si ha pertanto

$$\cos\alpha = \frac{n_\pi \cdot n_\sigma}{\|n_\pi\|\,\|n_\sigma\|} = -\frac{1}{7}\sqrt{14},$$

da cui si deduce che $\alpha = \arccos(-\sqrt{14}/7)$.

Esercizio 2.7. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il piano π di equazione $3x - y + z + 2 = 0$ e i punti $A = (0, 0, -2)$ e $B = (0, 2, 0)$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e ortogonale al piano π.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(c) Dato il punto $P = (3, 2, -1)$ si determinino le distanze di P dalla retta r e dal piano π. Si determini inoltre la proiezione ortogonale P' di P sul piano π.

(d) Si determinino tutti i punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Soluzione. Un vettore ortogonale al piano π è dato da $n_\pi = (3, -1, 1)$. Tale vettore è dunque il vettore direttore v_r della retta r, la quale ha pertanto le seguenti equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $t = -y$ e sostituendo nelle altre due si ottengono le seguenti equazioni cartesiane per la retta r:

$$r : \begin{cases} x + 3y = 0 \\ y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Si ha $B - A = (0, 2, 2) = 2(0, 1, 1)$, quindi come vettore direttore della retta passante per i punti A e B possiamo prendere il vettore $w = (0, 1, 1)$. Poiché la retta s deve essere ortogonale alla retta per A e B e contenuta nel piano π, un suo vettore direttore v_s deve essere ortogonale al vettore w e al vettore n_π, quindi possiamo prendere il vettore $v_s = w \times n_\pi = (2, 3, -3)$. La retta s cercata è dunque la retta passante per il punto B avente v_s come vettore direttore, e quindi le sue equazioni parametriche sono

$$s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3t. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $t = x/2$ e sostituendo nelle altre due si ottengono le seguenti equazioni cartesiane per la retta s:

$$s : \begin{cases} y = 2 + \frac{3}{2}\, x \\ z = -\frac{3}{2}\, x. \end{cases}$$

Per calcolare la distanza del punto P dalla retta r, poniamo $u = P - A = (3, 2, 1)$ e calcoliamo il prodotto vettoriale dei vettori u e $v_r = n_\pi$:

$$u \times v_r = (3, 2, 1) \times (3, -1, 1) = (3, 0, -9).$$

La distanza di P da r è data dalla seguente formula:

$$\operatorname{dist}(P,r) = \frac{\|u \times v_r\|}{\|v_r\|} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{11}}.$$

Per quanto riguarda il calcolo della distanza del punto P dal piano π, si ha:

$$\operatorname{dist}(P,\pi) = \frac{8}{\sqrt{11}}.$$

Per calcolare la proiezione ortogonale del punto P sul piano π, consideriamo la retta passante per P e ortogonale a π, le cui equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Intersecando tale retta con il piano π si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \\ 3x - y + z + 2 = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} t = -8/11 \\ x = 9/11 \\ y = 30/11 \\ z = -19/11. \end{cases}$$

Il punto P', proiezione ortogonale di P sul piano π, ha quindi le seguenti coordinate:

$$P' = \left(\frac{9}{11}, \frac{30}{11}, -\frac{19}{11}\right).$$

Consideriamo ora un generico punto $C = (a,b,c)$. La condizione di appartenenza del punto C al piano π fornisce una prima equazione $3a - b + c + 2 = 0$. Calcoliamo ora i quadrati delle distanze tra i tre punti A, B e C:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(A,B)^2 &= 8 \\ \operatorname{dist}(A,C)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 4c + 4 \\ \operatorname{dist}(B,C)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 4b + 4. \end{aligned}$$

L'uguaglianza $\operatorname{dist}(A,C)^2 = \operatorname{dist}(B,C)^2$ fornisce una seconda equazione, $4c = -4b$, mentre l'uguaglianza $\operatorname{dist}(A,C)^2 = \operatorname{dist}(A,B)^2$ fornisce la terza equazione, $a^2 + b^2 + c^2 + 4c + 4 = 8$. Mettendo a sistema le tre equazioni così trovate si ottiene il seguente sistema (di secondo grado)

$$\begin{cases} 3a - b + c + 2 = 0 \\ 4c = -4b \\ a^2 + b^2 + c^2 + 4c + 4 = 8, \end{cases}$$

le cui (due) soluzioni sono date da

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{\frac{3}{11}} \\ b = 1 + 3\sqrt{\frac{3}{11}} \\ c = -1 - 3\sqrt{\frac{3}{11}} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a = -2\sqrt{\frac{3}{11}} \\ b = 1 - 3\sqrt{\frac{3}{11}} \\ c = -1 + 3\sqrt{\frac{3}{11}} \end{cases}$$

Si conclude pertanto che esistono due punti $C \in \pi$ tali che il triangolo di vertici A, B e C sia equilatero; essi sono

$$C_1 = \left(2\sqrt{\tfrac{3}{11}}, 1+3\sqrt{\tfrac{3}{11}}, -1-3\sqrt{\tfrac{3}{11}}\right), \quad C_2 = \left(-2\sqrt{\tfrac{3}{11}}, 1-3\sqrt{\tfrac{3}{11}}, -1+3\sqrt{\tfrac{3}{11}}\right).$$

Esercizio 2.8. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y - z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π.

(d) Dato il vettore $v = (1, 4, -2)$ si determini la retta t parallela al vettore v e incidente le rette r e s.

(e) Posto $R = r \cap t$ e $S = s \cap t$, si calcoli l'area del triangolo PRS, ove $P = (2, 2, 1)$.

Soluzione. Per scoprire se le rette r e s sono incidenti, risolviamo il seguente sistema:

$$r \cap s : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

Si scopre facilmente che tale sistema non ammette soluzioni, quindi $r \cap s = \varnothing$: le rette r e s non sono incidenti.

Dalle equazioni della retta r è facile determinare due punti di r, ad esempio i punti $R_1 = (1, 0, 1)$ e $R_2 = (3, 1, -2)$. Un vettore direttore della retta r è quindi dato da $v_r = R_2 - R_1 = (2, 1, -3)$. In modo del tutto analogo si possono determinare due punti di s, ad esempio i punti $S_1 = (3/2, 2, 0)$ e $S_2 = (1/2, 1, -1)$. Un vettore direttore della retta s è quindi dato da $v_s = S_1 - S_2 = (1, 1, 1)$. Poiché i vettori v_r e v_s non sono l'uno multiplo dell'altro, le rette r e s non sono parallele. Da quanto appena visto si deduce pertanto che le due rette date sono sghembe.

Il piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r non è altro che il piano passante per un punto di s, ad esempio $S_1 = (3/2, 2, 0)$, e parallelo ai vettori v_r e v_s. Le sue equazioni parametriche sono quindi date da

$$\pi : \begin{cases} x = 3/2 + 2\lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = -3\lambda + \mu \end{cases}$$

Eliminando i parametri λ e μ dalle equazioni precedenti si ottiene la sequente equazione cartesiana del piano π:

$$4x - 5y + z + 4 = 0.$$

Per determinare la retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π, consideriamo il punto $R_1 = (1, 0, 1)$ di r e calcoliamo la sua proiezione ortogonale R'_1 su π. Per fare ciò consideriamo la retta ℓ passante per R_1 e ortogonale al piano π, le cui equazioni parametriche sono

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

e calcoliamo la sua intersezione con π

$$R'_1 = \ell \cap \pi : \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = 1 + \lambda \\ 4x - 5y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $R'_1 = (1/7, 15/14, 11/14)$. A questo punto basta osservare che la retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π, è la retta passante per il punto R'_1 e parallela al vettore $v_r = (2, 1, -3)$. Le sue equazioni parametriche sono pertanto

$$r' : \begin{cases} x = 1/7 + 2\lambda \\ y = 15/14 + \lambda \\ z = 11/14 - 3\lambda \end{cases}$$

Per determinare la retta t parallela al vettore $v = (1, 4, -2)$ e incidente le rette r e s possiamo procedere nel modo seguente. Indichiamo con R_λ il generico punto di r, dato da $R_\lambda = R_1 + \lambda v_r = (1 + 2\lambda, \lambda, 1 - 3\lambda)$, e consideriamo la retta t_λ passante per R_λ e parallela al vettore v, le cui equazioni parametriche sono date da

$$t_\lambda : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + 4\mu \\ z = 1 - 3\lambda - 2\mu. \end{cases}$$

Facciamo notare che, per ogni λ fissato, le precedenti equazioni parametriche descrivono i punti della retta t_λ, mentre le stesse equazioni considerate al variare di entrambi i parametri λ e μ, descrivono i punti di un *piano*, il quale è precisamente il piano contenente la retta r e parallelo al vettore v.

Calcolando l'intersezione tra la retta t_λ e la retta s si ottiene il sistema

$$t_\lambda \cap s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + 4\mu \\ z = 1 - 3\lambda - 2\mu \\ y - z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1/2 \\ x = 3/2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ciò significa che la retta t cercata è la retta che corrisponde al valore $\lambda = 0$ e dunque le sue equazioni parametriche sono

$$t = t_0 : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 4\mu \\ z = 1 - 2\mu. \end{cases}$$

I punti di intersezione tra la retta t e le rette r e s sono rispettivamente

$$R = t \cap r = (1, 0, 1), \qquad S = t \cap s = (3/2, 2, 0).$$

Per calcolare l'area del triangolo PRS determiniamo i vettori $\overrightarrow{PR} = R - P = (-1, -2, 0)$ e $\overrightarrow{PS} = S - P = (-1/2, 0, -1)$. Il prodotto vettoriale di questi due vettori è il vettore $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} = (2, -1, -1)$, la cui norma è $\|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}\| = \sqrt{6}$. Si ha quindi

$$\text{Area}(PRS) = \frac{1}{2}\, \|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Esercizio 2.9. Nello spazio affine euclideo tridimensionale si considerino i punti $A = (2, 3, 1)$, $B = (1, -2, -1)$ e il vettore $n = (2, 1, 1)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto medio M del segmento AB e ortogonale al vettore n.

(b) Si determini l'angolo α formato dalla retta r, passante per i punti A e B, e il piano π.

(c) Dato il punto $C = (2, -3, 4)$ se ne determinino le proiezioni ortogonali C', sulla retta r, e C'', sul piano π.

(d) Si determinino le equazioni della retta s passante per il punto M, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Soluzione. Le coordinate del punto medio M del segmento AB sono date da

$$M = \frac{A+B}{2} = \Big(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\Big).$$

L'equazione del generico piano ortogonale al vettore $n = (2, 1, 1)$ è

$$2x + y + z + d = 0.$$

Imponendo la condizione di passaggio per M, si ottiene $d = -7/2$, quindi l'equazione del piano π cercato è

$$\pi : 2x + y + z - 7/2 = 0.$$

Per determinare l'angolo α formato dalla retta r e dal piano π ci serve un vettore direttore v_r di r e un vettore n ortogonale al piano π. Si ha $v_r = A-B = (1, 5, 2)$, mentre $n = (2, 1, 1)$ è dato.

Se indichiamo con β l'angolo formato dai vettori v_r e n, si ha

$$\cos\beta = \frac{n \cdot v_r}{\|n\|\,\|v_r\|} = \frac{9}{6\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Se α è l'angolo formato dalla retta r e dal piano π, si ha $\alpha + \beta = 90°$, quindi

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

e dunque

$$\alpha = \arcsin\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Per determinare la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r procediamo come segue. Avendo determinato in precedenza un vettore direttore della retta r, $v_r = (1, 5, 2)$, possiamo scrivere le equazioni parametriche di r:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 5t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

e dunque il generico punto della retta r ha coordinate $X = (2+t, 3+5t, 1+2t)$. Calcoliamo ora il vettore $u = X - C = (t, 5t+6, 2t-3)$ e richiediamo che u sia ortogonale alla retta r:

$$u \cdot v_r = 30t + 24 = 0,$$

da cui si ricava $t = -4/5$. Sostituendo il valore di t appena trovato nelle coordinate del punto X si ottengono le coordinate del punto C', proiezione ortogonale di C su r:

$$C' = \Big(\frac{6}{5}, -1, -\frac{3}{5}\Big).$$

Determiniamo ora il punto C'', proiezione ortogonale di C sul piano π. A tal fine scriviamo le equazioni parametriche della retta r' passante per il punto C e ortogonale a π:

$$r' : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Il punto C'' è dato dall'intersezione tra r' e π e le sue coordinate si ottengono dunque risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + t \\ 2x + y + z - 7/2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$C'' = \left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}, \frac{15}{4}\right).$$

Infine, per determinare le equazioni della retta s dobbiamo determinare un suo vettore direttore v_s. Tale vettore deve essere ortogonale ai vettori n e v_r, si può dunque prendere come v_s il prodotto vettoriale dei vettori n e v_r

$$v_s = n \times v_r = (-3, -3, 9).$$

Le equazioni parametriche di s sono pertanto

$$s : \begin{cases} x = 3/2 - 3t \\ y = 1/2 - 3t \\ z = 9t \end{cases}$$

Esercizio 2.10. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (2, 1, -1)$, $B = (4, -2, 0)$ e la retta r di equazioni $x-2y-5 = 0$ e $2y-z = 0$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C equidistante da A e B.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.

Soluzione. Le equazioni della retta r si possono riscrivere come segue

$$r : \begin{cases} x = 2y + 5 \\ z = 2y \end{cases}$$

da cui si deduce che il generico punto X di r ha coordinate $X = (2y + 5, y, 2y)$. Richiedendo che la distanza di X da A sia uguale alla distanza di X da B, si ottiene l'equazione

$$(2y + 3)^2 + (y - 1)^2 + (2y + 1)^2 = (2y + 1)^2 + (y + 2)^2 + (2y)^2$$

che ha come unica soluzione $y = -1$. Si deduce quindi che l'unico punto C di r che è equidistante da A e B ha coordinate $C = (3, -1, -2)$. Il piano π è dunque il piano passante per i punti A, B e C. Per determinare la sua equazione cartesiana possiamo iniziare col determinare i vettori $C - A = (1, -2, -1)$ e $C - B = (-1, 1, -2)$. Il loro prodotto vettoriale

$$n = (C - A) \times (C - B) = (5, 3, -1)$$

è un vettore ortogonale al piano π e pertanto l'equazione di π deve avere la seguente forma

$$\pi : 5x + 3y - z + d = 0,$$

per un qualche termine noto d. Imponendo ora la condizione di passaggio per uno dei tre punti indicati (ad esempio, per il punto A), si ricava $d = -14$. Quindi il piano π cercato ha equazione

$$\pi : 5x + 3y - z - 14 = 0.$$

Poiché la retta s deve essere contenuta nel piano π, il suo vettore direttore v_s deve essere ortogonale al vettore n (che è ortogonale al piano π). Inoltre v_s deve essere anche ortogonale al vettore direttore della retta r, che si vede facilmente essere $v_r = (2, 1, 2)$. Possiamo quindi prendere come v_s il prodotto vettoriale dei vettori n e v_r

$$v_s = n \times v_r = (7, -12, -1),$$

Poiché s deve passare per il punto C, le sue equazioni parametriche sono

$$s : \begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 12t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Da queste, eliminando il parametro t, si ricavano le equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} x + 7z + 11 = 0 \\ y - 12z - 23 = 0. \end{cases}$$

Per determinare la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r, possiamo ragionare come segue. Considerato che il vettore direttore di r è $v_r = (2, 1, 2)$, l'equazione

$$2x + y + 2z + d = 0$$

rappresenta il generico piano ortogonale alla retta r (si tratta dell'equazione di un fascio di piani paralleli tra loro e tutti ortogonali a r). Imponendo la condizione di passaggio per il punto $A = (2, 1, -1)$, si trova $d = -3$ e pertanto il piano

$$\sigma : 2x + y + 2z - 3 = 0$$

è il piano ortogonale a r passante per A. La proiezione ortogonale A' del punto A sulla retta r non è altro che il punto di intersezione tra la retta r e il piano σ

$$A' = r \cap \sigma : \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$A' = \Big(\frac{31}{9}, -\frac{7}{9}, -\frac{14}{9}\Big).$$

Esercizio 2.11. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (3, -1, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e la retta r di equazioni $x - 3y = 2$ e $x + y - 2z = 6$.

(a) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per A e B.

(b) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(c) Si determini la distanza della retta r dalla retta s.

(d) Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo, con l'angolo retto in A.

(e) Dato il punto $P = (1, -3, 5)$ se ne determini la proiezione ortogonale sul piano π.

Soluzione. Un vettore direttore della retta s è $v_s = B - A = (-1, 2, 2)$ e quindi le equazioni parametriche di s sono

$$s : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si ottengono le equazioni cartesiane della retta s

$$s : \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + z = 7 \end{cases}$$

Vediamo ora se le rette r e s sono incidenti.

$$r \cap s : \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + y - 2z = 6 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + z = 7 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si scopre che esso non ammette soluzioni, quindi $r \cap s = \varnothing$. Ciò significa che r e s non sono incidenti.

Dalle equazioni di r possiamo determinare due punti di r, ad esempio $A' = (2, 0, -2)$ e $B' = (5, 1, 0)$. Ciò ci permette di determinare un vettore direttore della retta r, $v_r = B' - A' = (3, 1, 2)$. Dato che i vettori v_r e v_s non sono paralleli (non sono multipli uno dell'altro), le rette r e s non sono parallele. Si conclude quindi che r e s sono sghembe.

Per determinare la distanza tra le due rette r e s, consideriamo il vettore $u = A' - A = (-1, 1, -3)$. Allora la distanza è data dalla formula seguente:

$$\operatorname{dist}(r, s) = \frac{|u \cdot (v_r \times v_s)|}{\|v_r \times v_s\|}$$

Si ha $v_r \times v_s = (-2, -8, 7)$, quindi $\|v_r \times v_s\| = \sqrt{117}$ e $u \cdot (v_r \times v_s) = -27$. Si ottiene così

$$\operatorname{dist}(r, s) = \frac{27}{\sqrt{117}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

Per determinare il piano π determiniamo prima le coordinate del punto C. Le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

quindi le coordinate di un generico punto X della retta r sono $X = (2+3t, t, -2+2t)$. Possiamo ora calcolare il vettore $X - A = (3t - 1, t + 1, 2t - 3)$. Questo vettore deve essere ortogonale al vettore $B - A = v_s = (-1, 2, 2)$, si deve quindi avere

$$(X - A) \cdot v_s = 3t - 3 = 0,$$

da cui si ricava $t = 1$. Sostituendo il valore di t nelle coordinate di X, si ottiene il punto C cercato: $C = (5, 1, 0)$.

Per determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti A, B e C, possiamo scrivere l'equazione del fascio di piani di asse s (ogni piano passante per i punti A e B deve contenere la retta s)

$$\alpha(2x + y - 5) + \beta(2x + z - 7) = 0.$$

Imponendo la condizione di passaggio per il punto C si ottiene $\beta = -2\alpha$, per cui possiamo porre $\alpha = -1$ e $\beta = 2$. Si ottiene così l'equazione del piano cercato, che risulta essere

$$\pi : 2x - y + 2z = 9.$$

Per determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (1, -3, 5)$ sul piano π, consideriamo il vettore $n = (2, -1, 2)$ ortogonale a π e scriviamo le equazioni parametriche della retta ℓ passante per P e parallela a n (cioè ortogonale a π):

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale di P su π è il punto R di intersezione tra la retta ℓ e il piano π:

$$R = \ell \cap \pi : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 5 + 2t \\ 2x - y + 2z = 9 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$R = \Big(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{11}{3} \Big).$$