

ESERCIZIO TIPO 11

Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definita da

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4a + b \\ 3a \\ a - 2b \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice \mathbf{A} associata ad T rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}} \left(T \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \right) \quad C_{\mathcal{D}} \left(T \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \right) \right).$$

Poichè

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix} \right)$ e $C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$, e calcol-

iamo $C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula

ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \delta \\ 3\beta \\ \alpha - \delta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha + \delta = a \\ 3\beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a + c)/2 \\ \beta = b/3 \\ \delta = (a - c)/2 \end{cases} \implies C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (a + c)/2 \\ b/3 \\ (a - c)/2 \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 14$, $b = 6$ e $c = -10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$; ponendo

$a = 4$, $b = 6$ e $c = 10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}.$$