Introduzione alle Serie Numeriche

Una serie numerica è la somma dei termini di una successione, indicata con:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Per studiare una serie, definiamo le somme parziali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Una serie si dice:

- **Convergente** se esiste finito il limite delle somme parziali: $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$
- **Divergente** se il limite delle somme parziali è infinito: $\lim_{n \to +\infty} S_n = \pm\infty$
- **Irregolare** se il limite delle somme parziali non esiste

Serie Geometriche

Una serie geometrica ha la forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

o anche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Convergenza della Serie Geometrica

1. Se $|q| < 1$, la serie **converge** a $\frac{1}{1-q}$
2. Se $|q| \geq 1$, la serie **diverge**

Come Affrontare gli Esercizi con Serie Geometriche

1. Identifica il rapporto q tra un termine e il precedente
2. Verifica se $|q| < 1$ (convergenza) o $|q| \geq 1$ (divergenza)
3. Se converge, calcola la somma utilizzando la formula $S = \frac{1}{1-q}$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Qui $q = \frac{2}{3}$. Poiché $|q| = \frac{2}{3} < 1$, la serie converge a:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Serie Telescopiche

Una serie telescopica ha termini che, quando scritti in forma opportuna, permettono di semplificare la somma grazie a cancellazioni tra termini adiacenti.

La forma tipica è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$$

Come Affrontare gli Esercizi con Serie Telescopiche

1. Identifica se i termini possono essere scritti come differenza
2. Scrivi le somme parziali ed osserva le cancellazioni
3. Calcola il limite della somma parziale

Esempio (Serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Ogni termine può essere riscritto come:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La somma parziale diventa:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Calcolando il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1$$

Quindi la serie converge a 1.

Serie Armonica

La serie armonica è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Convergenza della Serie Armonica

La serie armonica è **divergente**, cioè $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Serie Armonica Generalizzata

La serie armonica generalizzata ha la forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Convergenza:

- Se $p > 1$, la serie **converge**
- Se $p \leq 1$, la serie **diverge**

Come Affrontare gli Esercizi con Serie Armoniche

1. Identifica se la serie ha la forma $\sum \frac{1}{n^p}$
2. Determina il valore di p
3. Verifica se $p > 1$ (convergenza) o $p \leq 1$ (divergenza)

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Qui $p = 2 > 1$, quindi la serie converge. (Questa è nota come serie di Basilea e converge a $\frac{\pi^2}{6}$).

Metodi per Verificare la Convergenza/Divergenza

1. **Condizione necessaria**: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, la serie diverge
2. **Test del confronto**: Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum b_n$ converge, allora anche $\sum a_n$ converge
3. **Test del rapporto**: Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$
   - Se $L < 1$, la serie converge
   - Se $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie diverge
   - Se $L = 1$, il test non è conclusivo

Suggerimenti per gli Esercizi

1. Osserva attentamente la forma della serie per identificare di quale tipo si tratta
2. Per le serie geometriche, identifica il rapporto q
3. Per le serie telescopiche, cerca di riscrivere i termini come differenze
4. Per le serie armoniche, determina l'esponente p

5. Se la serie non rientra in queste categorie, utilizza i criteri di convergenza

Esempio di Risoluzione Completa

Esempio 1: Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Soluzione: Identifichiamo $q = \frac{3}{4}$. Poiché $|q| = \frac{3}{4} < 1$, la serie converge a:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Esempio 2: Serie Telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Soluzione: Scomponiamo in frazioni parziali:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$

Troviamo A e B:

$$1 = A(n+2) + Bn$$
$$1 = An + 2A + Bn$$
$$1 = (A+B)n + 2A$$

Quindi: $A + B = 0$ e $2A = 1$, da cui $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$.

Quindi:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

La somma parziale diventa:

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Calcolando il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Quindi la serie converge a $\frac{3}{4}$.

Ricorda che la comprensione di questi concetti richiede pratica costante e applicazione dei metodi a diversi tipi di esercizi.