

1. **(12 punti)** L'*or bit a bit* è un'operazione binaria che prende due stringhe binarie di uguale lunghezza ed esegue l'or logico su ogni coppia di bit corrispondenti. Il risultato è una stringa binaria in cui ogni posizione è 0 se entrambi i bit sono 0, 1 altrimenti. Date due stringhe binarie x e y di uguale lunghezza, $x \sqcup y$ rappresenta l'or bit a bit di x e y . Per esempio, $0011 \sqcup 0101 = 0111$.

Dimostra che se L ed M sono linguaggi regolari sull'alfabeto $\{0, 1\}$, allora anche il seguente linguaggio è regolare:

$$L \sqcup M = \{x \sqcup y \mid x \in L, y \in M \text{ e } |x| = |y|\}.$$

2. **(12 punti)** Considera il linguaggio

$$L_2 = \{x\#y \mid x, y \in \{0, 1\}^* \text{ sono numeri binari tali che } x \text{ è un divisore di } y\}.$$

L'alfabeto di questo linguaggio è $\{0, 1, \#\}$. Ad esempio, $10\#100 \in L_2$ perché 2 è un divisore di 4, mentre $10\#0101 \notin L_2$ perché 2 non è divisore di 5. Dimostra che L_2 non è regolare.

3. **(12 punti)** Dati due linguaggi A, B , definiamo il linguaggio $MIX(A, B)$ come

$$MIX(A, B) = \{x_1y_1x_2y_2 \dots x_ny_n \mid n \geq 0, x_i \in A, y_i \in B\}.$$

Si noti che ciascun x_i, y_i è una *stringa*. Dimostra che la classe dei linguaggi context free è chiusa per l'operazione MIX .