

1. (12 punti) Una macchina di Turing con “copia e incolla” (CPTM) è una macchina di Turing deterministica a singolo nastro, che può copiare e incollare porzioni di nastro. Le operazioni che una CPTM può fare sono le seguenti:

- selezionare l'inizio della porzione di nastro da copiare;
- selezionare la fine della porzione di nastro da copiare;
- copiare la porzione di nastro selezionata, sovrascrivendo il contenuto della cella corrente e di tante celle a destra della cella corrente quante sono le celle necessarie per effettuare la copia;
- fare le normali operazioni di scrittura e spostamento a sinistra o a destra della testina.

Fare una operazione di copia senza che sia stata selezionata una porzione di nastro non ha effetto.

- Dai una definizione formale della funzione di transizione di una CPTM.
- Dimostra che le CPTM riconoscono la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili. Usa una descrizione a livello implementativo per definire le macchine di Turing.

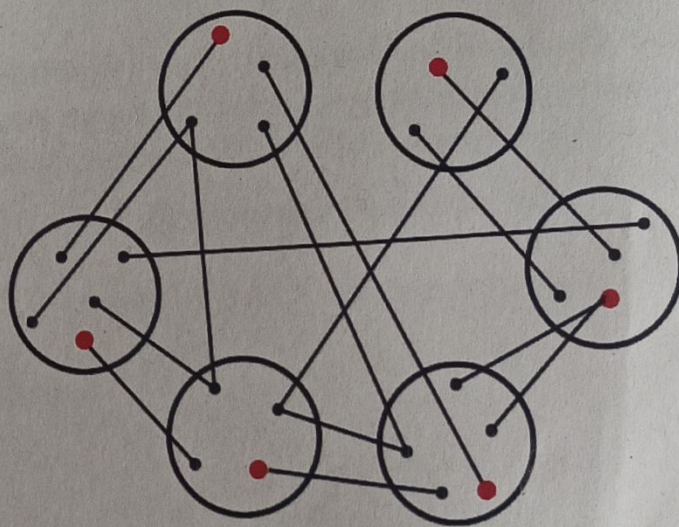
2. (12 punti) Una stringa w è *palindroma* se rimane uguale letta da sinistra a destra e da destra a sinistra, cioè se $w = w^R$. Un linguaggio $B \subseteq \{0, 1\}^*$ è *quasi-palindromo* se contiene al più una stringa non palindroma. Ad esempio, sia $\{00, 11011, 1001\}$ che $\{00, 101\}$ sono linguaggi quasi-palindromi, mentre $\{00, 10, 100\}$ non lo è. Considera il problema di determinare se il linguaggio di una TM M è quasi-palindromo.

- Formula questo problema come un linguaggio $QPAL_{TM}$.
- Dimostra che il linguaggio $QPAL_{TM}$ è indecidibile.

3. (12 punti) La Rettrice dell'Università di Padova vuole costituire una commissione selezionando un membro per ogni dipartimento dell'ateneo. Sappiamo che alcuni dei docenti si detestano a vicenda. Per evitare scontri, la Rettrice non vuole avere membri della commissione che si detestano tra di loro. Se ogni dipartimento è un insieme D_i di docenti, e se I è la relazione di inimicizia tra docenti, una *buona commissione* è un insieme C di docenti tali che:

- ogni dipartimento ha esattamente un rappresentante in commissione;
- non esistono coppie di docenti che si detestano.

La figura seguente mostra un esempio di istanza del problema dove i cerchi sono i dipartimenti, i punti sono i docenti e gli archi collegano docenti che si detestano. I docenti evidenziati in rosso sono i componenti di una buona commissione.



Definiamo il linguaggio

$$COMMITTEE = \{ \langle D_1, \dots, D_m, I \rangle \mid \text{esiste una buona commissione } C \}.$$

- Dimostra che $COMMITTEE$ è un problema NP.
- Dimostra che $COMMITTEE$ è NP-hard, usando $3SAT$ come problema NP-hard di riferimento.

- あ ア か が カ ガ さ ざ サ ザ た だ タ ダ な ナ は ば バ ま マ や ヤ ら ー わ ヲ
a a ka ga ka ga sa za sa za ta da ta da na na ha ba pa ha ba pa ma ma ya ya ra ra wa wa
- い イ き ぎ キ ギ し じ シ ジ ち ぢ チ チ に ニ ひ び ぴ ヒ ビ ぴ み ミ り リ
i i ki gi ki gi shi ji shi ji chi ji chi ji ni ni hi bi pi hi bi pi mi mi ri ri
- う ウ く ぐ ク グ す ず ス ズ つ づ ツ ツ ぬ ヌ ふ ぶ フ ブ ぷ ぷ む ム ゆ ユ る ル
u u ku gu ku gu su zu su zu tsu zu tsu zu nu nu fu bu pu fu bu pu mu mu yu yu ru ru
- え エ け げ ケ ゲ せ ぜ セ ゼ て で テ デ ね ネ へ べ ペ へ べ ペ め メ れ レ
e e ke ge ke ge se ze se ze te de te de ne ne he be pe he be pe me me re re
- お オ こ ご コ ゴ そ ぞ ソ ゾ と ど ト ド の ノ ほ ぼ ぽ ホ ボ ぽ も モ よ ヨ ろ ー 口 を ヲ
o o ko go ko go so zo so zo to do to do no no ho bo po ho bo po mo mo yo yo ro ro 口 を 口
o o ko go ko go so zo so zo to do to do no no ho bo po ho bo po mo mo yo yo ro ro 口 を 口
- ん ン
n n

Dimostra che se $L \subseteq \Sigma^*$ è un linguaggio regolare e T è una traslitterazione, allora anche il seguente linguaggio è regolare:

$$T(L) = \{w \in \Gamma^* \mid w = T(a_0)T(a_1)\dots T(a_n) \text{ per qualche } a_0a_1\dots a_n \in L\}.$$

2. (12 punti) Dimostra che il seguente linguaggio non è regolare:

$$L_2 = \{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ e } x \neq y\}.$$

3. (12 punti) Date due stringhe w e t , diciamo che t è una *permutazione* di w se t e ha gli stessi simboli di w con ugual numero di occorrenze, ma eventualmente in un ordine diverso. Per esempio, le stringhe 01011, e 00111 sono entrambe permutazioni di 11001.

Dimostra che se $B \subseteq \{0, 1\}^*$ è un linguaggio regolare, allora il linguaggio

$$\text{SCRAMBLE}(B) = \{t \in \{0, 1\}^* \mid t \text{ è una permutazione di qualche } w \in B\}$$

è un linguaggio context-free.