Problema 2023_TM: Indecidibilità del Movimento Posizionale

Parte (a): Formulazione del Linguaggio

Definizione Formale

2023_TM = {⟨M,w⟩ | M è una TM che durante la computazione su input w sposta la testina dalla cella 2023 alla cella 2022}

Formalizzazione Precisa

Configurazione: Una configurazione di M è una tupla (q, i, tape) dove:

- $q \in Q$ è lo stato corrente
- $i \in \mathbb{Z}$ è la posizione della testina
- tape: $\mathbb{Z} \to \Gamma$ rappresenta il contenuto del nastro

Transizione: Una transizione da configurazione C_1 a C_2 si denota $C_1 \vdash\_M\ C_2$

Definizione del Linguaggio:

```
⟨M,w⟩ ∈ 2023_TM ⟺
∃ sequenza di configurazioni C₀, C₁, ..., Cₖ, Cₖ₊₁, ... tale che:
  1. C₀ è la configurazione iniziale di M su input w
  2. ∀i ≥ 0: Cᵢ ⊢_M Cᵢ₊₁
  3. ∃j ≥ 0: posizione(Cⱼ) = 2023 ∧ posizione(Cⱼ₊₁) = 2022
```

Chiarificazione Interpretativa

Il linguaggio cattura esattamente il comportamento richiesto:

- La testina deve **fisicamente transitare** dalla posizione 2023 alla 2022
- Non è sufficiente visitare entrambe le posizioni separatamente
- La transizione deve avvenire in un singolo passo computazionale

Parte (b): Dimostrazione di Indecidibilità

Teorema

Teorema: Il linguaggio 2023_TM è indecidibile.

Strategia: Riduzione dal problema della fermata (HALT_TM ≤_m 2023_TM)

Costruzione della Riduzione

Dato: Una coppia ⟨M,w⟩ per il problema della fermata

Obiettivo: Costruire ⟨M',w'⟩ tale che M si ferma su w ⟺ ⟨M',w'⟩ ∈ 2023_TM

Costruzione di M'

```
TM M'(input x):
1. Ignora l'input x
2. Simula M su w mantenendo il nastro di lavoro a destra della posizione 2024
3. Se M raggiunge uno stato finale:
   a. Sposta la testina alla posizione 2023
   b. Scrivi un simbolo dummy
   c. Sposta la testina a sinistra (posizione 2022)
   d. Entra in uno stato finale
4. Se M non termina, continua la simulazione indefinitamente
```

Algoritmo Formale di M'

Stati: Q' = Q_M × {sim, goto2023, move_left, done} ∪ {q_0', q_final'}

Fase 1 - Inizializzazione:

```
δ'(q₀', σ, X) = ((q₀^M, sim), X, R)
```

Inizia simulazione partendo da una posizione sicura (> 2024).

Fase 2 - Simulazione:

```
∀(q,a) ∈ Q_M × Γ_M: se δ_M(q,a) = (q',a',D)
δ'((q,sim), σ, a) = ((q',sim), a', D)
```

Simula fedelmente M, mantenendo la testina lontana dalle posizioni critiche.

Fase 3 - Transizione al comportamento 2023:

```
∀q_f ∈ F_M, ∀a ∈ Γ:
δ'((q_f,sim), σ, a) = ((q_f,goto2023), a, L)
```

Quando M termina, inizia la fase di posizionamento.

Fase 4 - Raggiungimento posizione 2023:

```
δ'((q,goto2023), σ, a) = {
  ((q,goto2023), a, L)    se posizione corrente > 2023
  ((q,move_left), #, L)   se posizione corrente = 2023
}
```

Fase 5 - Movimento cruciale 2023→2022:

```
δ'((q,move_left), σ, a) = (q_final', a, S)
```

Questo è l'unico passo che sposta dalla 2023 alla 2022.

Correttezza della Riduzione

Lemma 1: M si ferma su w ⟹ ⟨M',ε⟩ ∈ 2023_TM

Dimostrazione:

- Se M(w) termina, M' completa la simulazione
- M' raggiunge la Fase 4, posiziona la testina in 2023
- M' esegue la Fase 5: movimento 2023 → 2022
- Quindi ⟨M',ε⟩ ∈ 2023_TM □

Lemma 2: M non si ferma su w ⟹ ⟨M',ε⟩ ∉ 2023_TM

Dimostrazione:

- Se M(w) non termina, M' rimane indefinitamente nella Fase 2
- La testina di M' non raggiungerà mai la posizione 2023
- Quindi M' non può mai eseguire il movimento 2023 → 2022
- Pertanto ⟨M',ε⟩ ∉ 2023_TM □

Conseguenza dell'Indecidibilità

Corollario: Se 2023_TM fosse decidibile, allora HALT_TM sarebbe decidibile.

Dimostrazione: La riduzione f: ⟨M,w⟩ ↦ ⟨M',ε⟩ è computabile e:

```
⟨M,w⟩ ∈ HALT_TM ⟺ ⟨M',ε⟩ ∈ 2023_TM
```

Quindi un decisore per 2023_TM indurrebbe un decisore per HALT_TM, contraddicendo il teorema di Rice. □

Analisi della Costruzione

Aspetti Critici

1. **Isolamento Spaziale**: La simulazione avviene in regioni del nastro distanti dalla posizione critica 2023
2. **Controllo Temporale**: Il movimento 2023→2022 avviene se e solo se la simulazione termina
3. **Univocità**: Esiste un solo modo per M' di eseguire la transizione richiesta

Robustezza della Dimostrazione

La costruzione è robusta rispetto a:

- **Variazioni della posizione**: Funziona per qualsiasi posizione k fissa
- **Direzione del movimento**: Funziona anche per movimento destro (k→k+1)
- **Modelli di TM**: Vale per TM multi-nastro, non deterministiche, etc.

Generalizzazione

Teorema Generale: Per ogni k ∈ ℕ fissato, il linguaggio:

```
k_TM = {⟨M,w⟩ | M sposta la testina dalla posizione k alla k±1 durante M(w)}
```

è indecidibile.

La dimostrazione si adatta sostituendo 2023 con k nella costruzione.

Implicazioni Teoriche

Questo risultato mostra che anche proprietà **geometriche molto specifiche** del comportamento computazionale sono indecidibili. Il fatto che una TM attraversi una particolare "soglia spaziale" durante la computazione non può essere determinato algoritmicamente in generale.

La posizione 2023, pur essendo arbitraria, diventa un "landmark" computazionale che eredita l'indecidibilità del problema della fermata attraverso la nostra riduzione.