

Per dimostrare che qualsiasi macchina di Turing ad albero binario può essere simulata da una macchina di Turing standard, costruirò una simulazione formale.

Codifica dell'albero binario

Ogni nodo dell'albero binario infinito può essere univocamente identificato da una stringa finita $w \in \{L,R\}^*$ che rappresenta il cammino dalla radice al nodo:

- ε (stringa vuota) = radice
- wL = figlio sinistro del nodo w
- wR = figlio destro del nodo w

Costruzione della macchina simulatrice

Data una macchina di Turing ad albero binario $M = (Q, \Gamma, \delta, q_0, F)$, costruisco una macchina di Turing standard $M' = (Q', \Gamma', \delta', q_0', F')$ che simula M .

Alfabeto esteso: $\Gamma' = \Gamma \cup \{L, R, \#, \$\}$

Configurazione del nastro: Il nastro di M' ha la forma:

```
# posizione_corrente $ contenuto_nodi #
```

dove:

- `posizione_corrente` $\in \{L,R\}^*$ codifica la posizione attuale nell'albero
- `contenuto_nodi` è una sequenza di triple (w, a, \sqcup) dove $w \in \{L,R\}^*$, $a \in \Gamma$

Simulazione delle operazioni

Inizializzazione: La stringa di input $x_1x_2\dots x_n$ viene posizionata lungo il ramo sinistro:

- Nodo ε contiene x_1
- Nodo L contiene x_2
- Nodo L^2 contiene x_3 , etc.

Simulazione di una transizione: Per $\delta(q,a) = (q',a',d)$ dove $d \in \{P,L,R\}$:

1. **Lettura:** M' localizza la posizione corrente w nel nastro e legge il contenuto a
2. **Scrittura:** Aggiorna il contenuto del nodo w con a'
3. **Movimento:**
 - Se $d = L$: $w \leftarrow wL$ (aggiungi L)
 - Se $d = R$: $w \leftarrow wR$ (aggiungi R)

- Se $d = P: w \leftarrow w'$ dove $w = w'x$ per qualche $x \in \{L,R\}$ (rimuovi ultimo carattere)

Gestione della radice: Il movimento P dalla radice ($w = \epsilon$) mantiene la posizione alla radice.

Correttezza

La simulazione è corretta perché:

1. **Biiezione:** La codifica $w \in \{L,R\}^*$ stabilisce una biiezione tra nodi dell'albero e stringhe finite
2. **Preservazione delle transizioni:** Ogni movimento nell'albero corrisponde a una manipolazione deterministica della stringa di posizione
3. **Accesso finito:** In ogni computazione, solo un numero finito di nodi viene visitato, quindi M' usa solo spazio finito

La macchina standard M' simula fedelmente M , dimostrando che le macchine di Turing ad albero binario non hanno potenza computazionale superiore alle macchine di Turing standard.