

1. (12 punti) Una macchina di Turing con “copia e incolla” (CPTM) è una macchina di Turing deterministica a singolo nastro, che può copiare e incollare porzioni di nastro. Le operazioni che una CPTM può fare sono le seguenti:

- selezionare l’inizio della porzione di nastro da copiare;
- selezionare la fine della porzione di nastro da copiare;
- copiare la porzione di nastro selezionata, sovrascrivendo il contenuto della cella corrente e di tante celle a destra della cella corrente quante sono le celle necessarie per effettuare la copia;
- fare le normali operazioni di scrittura e spostamento a sinistra o a destra della testina.

Fare una operazione di copia senza che sia stata selezionata una porzione di nastro non ha effetto.

- Dai una definizione formale della funzione di transizione di una CPTM.
- Dimostra che le CPTM riconoscono la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili. Usa una descrizione a livello implementativo per definire le macchine di Turing.

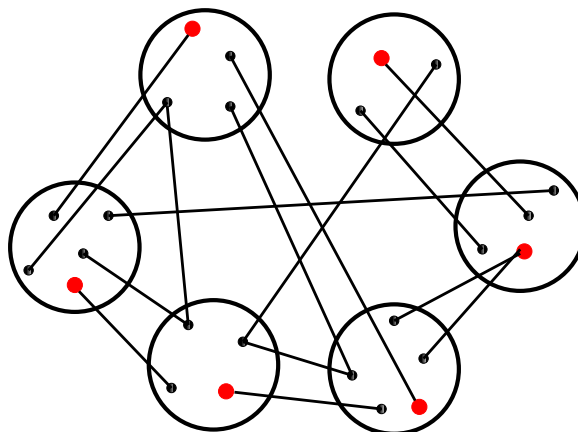
2. (12 punti) Una stringa w è *palindroma* se rimane uguale letta da sinistra a destra e da destra a sinistra, cioè se $w = w^R$. Un linguaggio $B \subseteq \{0, 1\}^*$ è *quasi-palindromo* se contiene al più una stringa non palindroma. Ad esempio, sia $\{00, 11011, 1001\}$ che $\{00, 101\}$ sono linguaggi quasi-palindromi, mentre $\{00, 10, 100\}$ non lo è. Considera il problema di determinare se il linguaggio di una TM M è quasi-palindromo.

- Formula questo problema come un linguaggio $QPAL_{TM}$.
- Dimostra che il linguaggio $QPAL_{TM}$ è indecidibile.

3. (12 punti) La Rettrice dell’Università di Padova vuole costituire una commissione selezionando un membro per ogni dipartimento dell’ateneo. Sappiamo che alcuni dei docenti si detestano a vicenda. Per evitare scontri, la Rettrice non vuole avere membri della commissione che si detestano tra di loro. Se ogni dipartimento è un insieme D_i di docenti, e se I è la relazione di inimicizia tra docenti, una *buona commissione* è un insieme C di docenti tali che:

- ogni dipartimento ha esattamente un rappresentante in commissione;
- non esistono coppie di docenti che si detestano.

La figura seguente mostra un esempio di istanza del problema dove i cerchi sono i dipartimenti, i punti sono i docenti e gli archi collegano docenti che si detestano. I docenti evidenziati in rosso sono i componenti di una buona commissione.



Definiamo il linguaggio

$$COMMITTEE = \{\langle D_1, \dots, D_m, I \rangle \mid \text{esiste una buona commissione } C\}.$$

- Dimostra che $COMMITTEE$ è un problema NP.
- Dimostra che $COMMITTEE$ è NP-hard, usando $3SAT$ come problema NP-hard di riferimento.