Domande

DERIVATE

1) Definizione di DERIVATA in un punto e significato di rapporto incrementale

*Il **rapporto incrementale** di una funzione $f(x)$ nel punto x_0 viene definito come:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nella formula è presente il rapporto tra la differenza delle ordinate $f(x_0 + h) - f(x_0)$ e la differenza delle relative ascisse $x_0 + h - x_0$ che è uguale all'incremento h.

Il valore del limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale della funzione nel punto x_0 se esiste ed è finito prende il nome di derivata prima nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*La **derivata prima** di una funzione in un punto è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto. Si tratta quindi di un numero che misura la pendenza della retta tangente in quel punto.*

2) Continuità e derivabilità

*La **continuità** è condizione **necessaria ma non sufficiente** per la derivabilità.*

Una funzione continua in un punto può quindi essere non derivabile in quel punto, ma una funzione derivabile in un punto è sempre continua in quel punto.

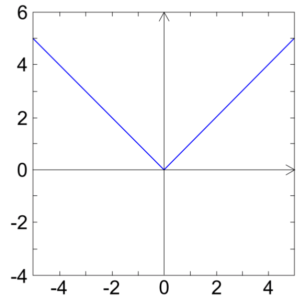
I punti di non derivabilità più frequenti sono:

- *Punti angolosi*
- *Cuspidi*
- *Flessi a tangente verticale*

3) Classificazione e studio dei punti di non derivabilità di funzioni continue ma non derivabili in punto

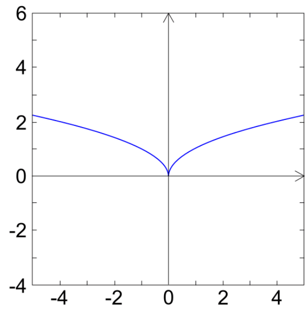
- **Punto angoloso**

  La derivata destra e la derivata sinistra nel punto x_0 esistono ma sono diverse fra loro (ex. $y = |x|$)



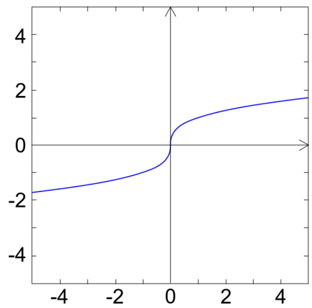
- **Cuspide**

  La derivata sinistra e la derivata destra nel punto x_0 sono infinite e di segno opposto, in particolare la tangente nel punto x_0 è verticale (ex. $y = \sqrt{|x|}$)



- **Flesso a tangente verticale**

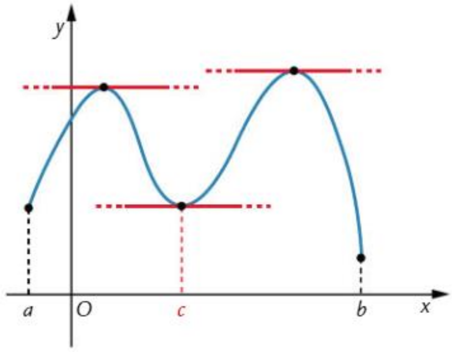
  La derivata sinistra e la derivata destra nel punto x_0 sono infinite e hanno lo stesso segno, in particolare la tangente nel punto x_0 è verticale (ex. $y = \sqrt[3]{x}$)



4) Teoremi sulle derivate

- **Teorema di Fermat** (Francia 1601-1665)

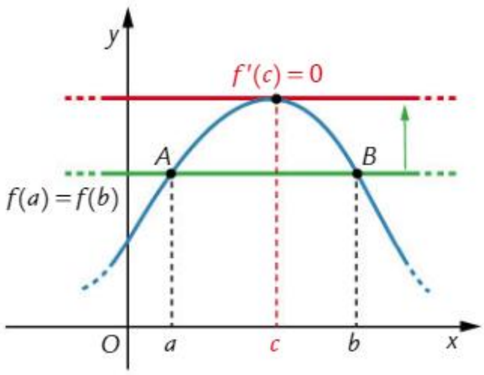
  Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a,b]$ e sia c un punto interno ad $[a,b]$ in cui $f(x)$ è derivabile. Se $f(x)$ ha in c un punto di estremo relativo (max o min relativo), allora $f'(c) = 0$.



- **Teorema di Rolle** (Francia 1652-1691)

  Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile in un intervallo $[a,b]$ e $f(a) = f(b)$.

  Allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo (a,b) per cui $f'(c) = 0$.

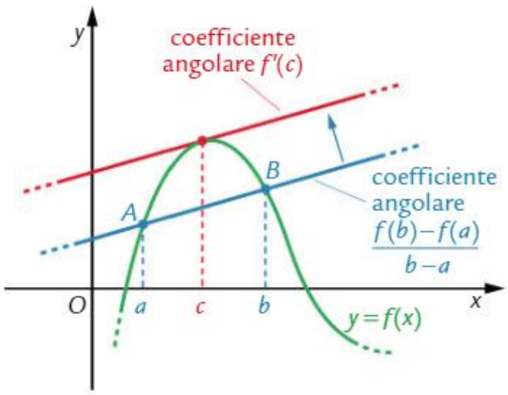


- **Teorema di Lagrange** (Italia 1736-1813)

  Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile in un intervallo $[a,b]$

  Allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo (a,b) per cui

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Il significato geometrico del teorema è che nell'intervallo $[a, b]$ esiste almeno una retta tangente al grafico parallela alla retta passante per a e b.

5) Criterio di **monotonia**

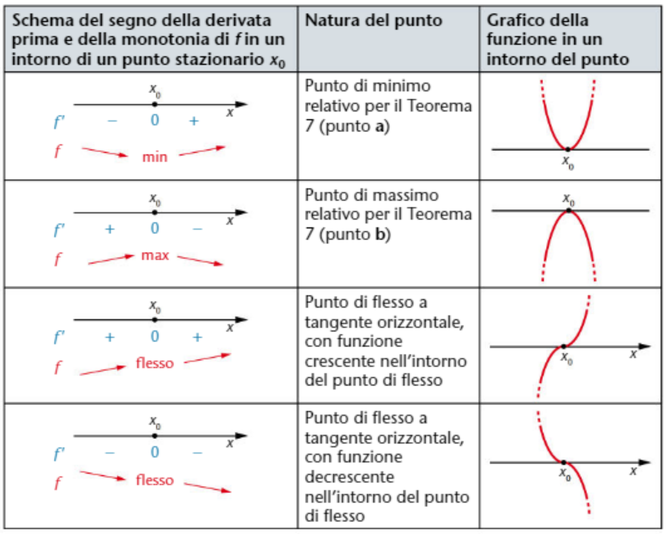
*Se una funzione è **strettamente crescente** in un dato intervallo, i coefficienti angolari delle rette tangenti saranno positivi, quindi la derivata della funzione in quell'intervallo sarà positiva.*

*Se una funzione è **strettamente decrescente** in un dato intervallo, i coefficienti angolari delle rette tangenti saranno negativi, quindi la derivata della funzione in quell'intervallo sarà negativa.*

6) Massimi e minimi relativi, flessi a tangente orizzontale

Se una funzione è derivabile in un intorno di x_0 e x_0 sia un punto stazionario, ossia $f'(x_0) = 0$, allora:

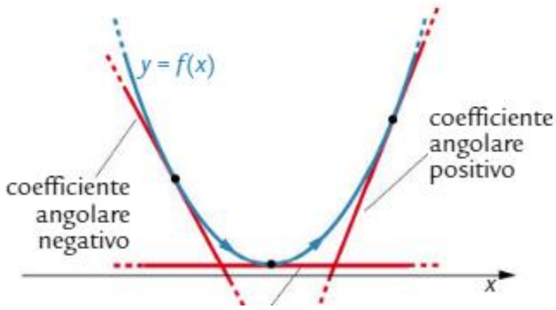
- *Se la derivata prima è positiva e poi è negativa si avrà un punto di **massimo relativo***
- *Se la derivata prima è negativa e poi è positiva si avrà un punto di **minimo relativo***
- *Se nell'intorno la derivata non cambia di segno si avrà **un flesso orizzontale***



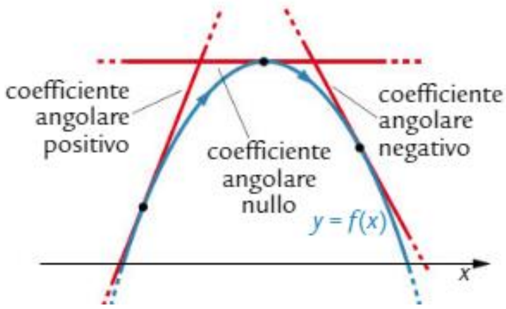
Schema del segno della derivata prima e della monotonia di f in un intorno di un punto stazionario x_0	Natura del punto	Grafico della funzione in un intorno del punto
x_0, x f' − 0 + f min	Punto di minimo relativo per il Teorema 7 (punto **a**)	x_0
x_0, x f' + 0 − f max	Punto di massimo relativo per il Teorema 7 (punto **b**)	x_0
x_0, x f' + 0 + f flesso	Punto di flesso a tangente orizzontale, con funzione crescente nell'intorno del punto di flesso	x_0, x
x_0, x f' − 0 − f flesso	Punto di flesso a tangente orizzontale, con funzione decrescente nell'intorno del punto di flesso	x_0, x

7) Concavità e convessità

*Se una funzione è **convessa** in una dato intervallo, al crescere dei valori di x cresceranno i coefficienti angolari delle rette tangenti, quindi la derivata seconda sarà positiva.*



*Se una funzione è **concava** in una dato intervallo, al crescere dei valori di x decresceranno i coefficienti angolari delle rette tangenti, quindi la derivata seconda sarà negativa.*

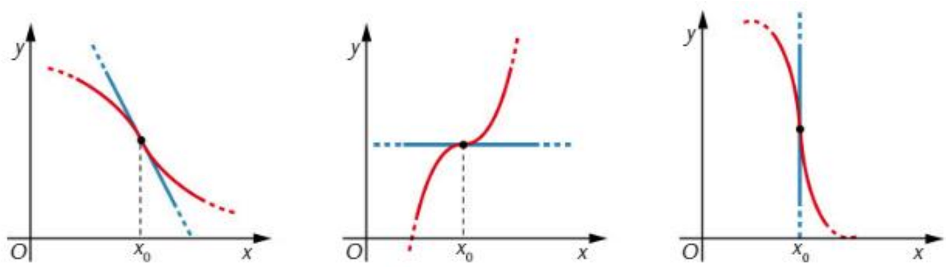


8) Punti di flesso

I punti di flesso di una funzione sono i punti in cui la funzione cambia la concavità.

Un punto di flesso si dice

- ***Flesso obliquo**: la tangente nel punto non è né parallela all'asse x né parallela all'asse y*
- ***Flesso orizzontale**: la tangente nel punto è parallela all'asse x*
- ***Flesso verticale**: la tangente nel punto è parallela all'asse y*



a. Punto di flesso obliquo b. Punto di flesso orizzontale c. Punto di flesso verticale