

(Introduzione veloce e pratica di vettori e matrici)

(In velocità sui numeri complessi)

Si calcoli la forma algebrica del coniugato \bar{z} di z , del modulo $|z|$ di z e di $\frac{1}{z}$ (dove $\frac{1}{z}$ è l'inversa di z rispetto alla moltiplicazione) nei seguenti casi:

(a) $z = 4 + 6i$

(b) $z = \frac{7+3i}{5i}$

(a) $z = 4 + 6i$

1. Coniugato di z (\bar{z}):

$$\bar{z} = 4 - 6i$$

2. Modulo di z ($|z|$):

$$|z| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

3. Inverso di z ($\frac{1}{z}$):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4+6i} = \frac{4-6i}{4^2+6^2} = \frac{4}{52} - \frac{6}{52}i = \frac{1}{13} - \frac{3}{26}i$$

(b) $z = \frac{7+31i}{5i}$

1. Coniugato di z (\bar{z}):

$$\bar{z} = \frac{7-31i}{5i}$$

2. Modulo di z ($|z|$):

$$|z| = \left| \frac{7+31i}{5i} \right| = \frac{\sqrt{7^2+31^2}}{|5i|} = \frac{\sqrt{1050}}{5} = 2\sqrt{21}$$

3. Inverso di z ($\frac{1}{z}$):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{7+31i}{5i}} = \frac{5i}{7+31i} = \frac{5i(7-31i)}{7^2+31^2} = \frac{35i-155i^2}{770} = \frac{155+35i}{770}$$

2. Si scrivano i seguenti numeri complessi in forma trigonometrica:

(a) $w = 4\sqrt{3} + 4i$

(b) $x = -4 + 4i$

Per scrivere un numero complesso in forma trigonometrica, spesso chiamata anche forma polare, dobbiamo rappresentarlo come un numero complesso con modulo r e argomento θ , dove r è la distanza del numero complesso dall'origine nel piano complesso e θ è l'angolo formato tra il numero complesso e l'asse reale positivo. La forma trigonometrica è espressa come:

$$z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Per il numero complesso $w = 4\sqrt{3} + 4i$, possiamo seguire questi passaggi per scrivere il numero in forma trigonometrica:

1. Calcoliamo il modulo r del numero complesso w :

$$r = |w| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8$$

2. Calcoliamo l'argomento θ del numero complesso w . Per fare ciò, possiamo usare la funzione arcotangente $\arg(w) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, dove a è la parte reale e b è la parte immaginaria di w :

$$\theta = \arg(w) = \arctan\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

3. Ora, possiamo scrivere w in forma trigonometrica:

$$w = 8 \cdot \left(\cos \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + i \sin \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right)$$

Nota: $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ rappresenta l'angolo θ il cui tangente è $\frac{1}{\sqrt{3}}$, che corrisponde a $\frac{\pi}{6}$ o 30° in radianti o gradi rispettivamente.

Questi passaggi ci permettono di scrivere il numero complesso $w = 4\sqrt{3} + 4i$ nella forma trigonometrica $w = 8 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

Regenerate

Per scrivere il numero complesso $x = -4 - 4i$ in forma trigonometrica, seguiamo gli stessi passaggi di prima:

1. Calcoliamo il modulo r del numero complesso x :

$$r = |x| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
2. Calcoliamo l'argomento θ del numero complesso x :

$$\theta = \arg(x) = \arctan\left(\frac{-4}{-4}\right) = \arctan(1)$$
3. Ora, possiamo scrivere x in forma trigonometrica:

$$x = 4\sqrt{2} \cdot (\cos \arctan(1) + i \sin \arctan(1))$$

Nota: $\arctan(1)$ rappresenta l'angolo θ il cui tangente è 1, che corrisponde a $\frac{\pi}{4}$ o 45° in radianti o gradi rispettivamente.

In conclusione, il numero complesso $x = -4 - 4i$ può essere scritto nella forma trigonometrica $x = 4\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

4. Si calcolino le n radici n -esime complesse del numero complesso u nei seguenti casi:

- (a) $u = w$ e $n = 3$
- (b) $u = x$ e $n = 4$
- (c) $u = y$ e $n = 5$
- (d) $u = z$ e $n = 2$

Per calcolare le radici n -esime complesse di un numero complesso u , possiamo utilizzare la formula delle radici n -esime in forma trigonometrica:

$$u_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right)$$

Dove:

- k varia da 0 a $n - 1$
- r è il modulo di u (la sua distanza dall'origine nel piano complesso)
- θ è l'argomento di u (l'angolo tra la retta che collega u all'origine e l'asse reale positivo nel piano complesso)

(b) $u = x$ e $n = 4$:

Dalla tua domanda precedente, so che $x = -\frac{5}{8} + \frac{3}{16}i$. Calcoliamo il modulo r e l'argomento θ di x :

$$r = |x| = \sqrt{\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2} = \frac{1}{16}\sqrt{25 + 9} = \frac{1}{16}\sqrt{34}$$

$$\theta = \arg(x) = \arctan\left(\frac{3/16}{-5/8}\right) = \arctan\left(-\frac{3}{10}\right)$$

Ora possiamo usare la formula delle radici n -esime:

$$x_k = \sqrt[4]{\frac{1}{16}\sqrt{34}} \left(\cos \left(\frac{\arctan(-\frac{3}{10}) + 2\pi k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\arctan(-\frac{3}{10}) + 2\pi k}{4} \right) \right)$$

(Parlare di tutti i tipi di matrici)

1. Si calcolino l'inversa di ognuna delle seguenti matrici:

(a) $A = E_{43}E_1\left(\frac{2}{3}\right)E_{21}(-3) \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

(b) $B = E_3(3 - 6i)E_{32}(2)E_1(4i) \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$.

(c) $C = E_{12}(5)E_{12}(-1) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Matrice A :

$$A = E_{43}E_1\left(\frac{2}{3}\right)E_{21}(-3) \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

Calcoliamo l'inversa di A attraverso le operazioni inverse delle matrici elementari:

1. Inversa dell'operazione $E_{21}(-3)$:

$$E_{21}\left(\frac{1}{-3}\right) = E_{21}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

2. Inversa dell'operazione $E_1\left(\frac{2}{3}E_{21}(-3)\right)$:

$$E_1\left(\frac{1}{\frac{2}{3}E_{21}(-3)}\right) = E_1\left(\frac{3}{2}E_{21}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

3. Inversa dell'operazione E_{43} :

$$E_{43}^{-1} = E_{43}$$

Pertanto, la matrice inversa di A è:

$$A^{-1} = E_1\left(\frac{3}{2}E_{21}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)E_{43}$$

(b) Matrice B :

$$B = E_3(3 - 6i)E_{32}(2)E_1(4i) \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$$

Calcoliamo l'inversa di B attraverso le operazioni inverse delle matrici elementari:

1. Inversa dell'operazione $E_1(4i)$:

$$E_1\left(\frac{1}{4i}\right) = E_1\left(-\frac{i}{4}\right)$$

2. Inversa dell'operazione $E_{32}(2)$:

$$E_{32}^{-1} = E_{32}$$

3. Inversa dell'operazione $E_3(3 - 6i)$:

$$E_3\left(\frac{1}{3 - 6i}\right) = E_3\left(\frac{3 + 6i}{45}\right)$$

Pertanto, la matrice inversa di B è:

$$B^{-1} = E_1\left(-\frac{i}{4}\right)E_{32}E_3\left(\frac{3 + 6i}{45}\right)$$

(c) Matrice C :

$$C = E_{12}(5)E_{12}(-1) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Calcoliamo l'inversa di C attraverso le operazioni inverse delle matrici elementari:

1. Inversa dell'operazione $E_{12}(-1)$:

$$E_{12}^{-1} = E_{12}$$

2. Inversa dell'operazione $E_{12}(5)$:

$$E_{12}\left(\frac{1}{5}\right) = E_{12}\left(\frac{1}{5}\right)$$

Pertanto, la matrice inversa di C è la matrice identità:

$$C^{-1} = I_{2 \times 2}$$

Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{C} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & i & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = (i \quad i+1 \quad i+2), E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni copia $X, Y \in \{A, B, C, D, E\}$, dire se ha senso la matrice XY e, se sì, calcolarla.

Le dimensioni delle matrici sono:

- A: 2×3
- B: 1×3
- C: 2×2
- D: 1×3
- E: 3×2

Ora esaminiamo tutte le possibili coppie:

1. AB: Non ha senso il prodotto in quanto il numero di colonne di A (3) è diverso dal numero di righe di B (1).
2. AC: Non ha senso il prodotto in quanto il numero di colonne di A (3) è diverso dal numero di righe di C (2).
3. AD: Non ha senso il prodotto in quanto il numero di colonne di A (3) è diverso dal numero di righe di D (1).

4. AE: Il prodotto ha senso, e sarà di dimensione 2×2 . Calcoliamo il prodotto:

markdown

Copy code

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & i & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1*1 + 0*0 + 3*0 & 1*2 + 0*4 + 3*(-4) & 1*0 + 0*(-4) + 3*0 & 1*4 + 0*(-4) + 3*0 \\ 2*1 + i*0 + 7*0 & 2*2 + i*4 + 7*(-4) & 2*0 + i*(-4) + 7*0 & 2*4 + i*0 + 7*0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 & 4 \\ 2 & -19 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. BC: Non ha senso il prodotto in quanto il numero di colonne di B (3) è diverso dal numero di righe di C (2).
2. BD: Non ha senso il prodotto in quanto il numero di colonne di B (3) è diverso dal numero di righe di D (1).
3. BE: Il prodotto ha senso, e sarà di dimensione 1×2 . Calcoliamo il prodotto:


scss

Copy code

$$\begin{aligned} BE &= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6*1 + 4*0 + 1*(-4) & 6*2 + 4*4 + 1*0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. CD: Il prodotto ha senso, e sarà di dimensione 2×3 . Calcoliamo il prodotto:

CSS

 Copy code

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & i+1 & i+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0*i + 0*(i+1) + 0*(i+2) & 0*i + 0*(i+1) + 0*(i+2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. CE: Non ha senso il prodotto in quanto il numero di colonne di C (2) è diverso dal numero di righe di E (3).

Si determini se i seguenti sistemi lineari possiedono soluzione. Nei casi positivi si risolvano i sistemi lineari su \mathbb{C} :

$$(a) \begin{cases} 2x - 5y + 8z = 0 \\ -2x - 7y + z = 0 \\ 4x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ -3x + 4y + 2z = 1 \\ 7x - 5y + 4z = 4 \\ 6x - 8y - 4z = -2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y + 2z = -3 \\ 2x + y + z = -4 \\ x - y + iz = i \end{cases}$$

(a)

Il sistema dato è:

diff

Copy code

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 8z &= 0 \\ -2x + 7y + z &= 0 \\ 4x + 2y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

Riscriviamo il sistema nella forma estesa $[A | b]$:

diff

Copy code

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

Ora eseguiamo l'eliminazione gaussiana:

1. Somma la prima riga alla seconda riga:

Copy code


$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

1. Sottrai la prima riga dalla terza riga moltiplicata per 2:

Copy code

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \end{array}$$


1. Sottrai la seconda riga moltiplicata per 6 dalla terza riga:

 Copy code

```
2  -5  8 | 0
0   2  9 | 0
0   0 -63 | 0
```

Ora possiamo risolvere per z:


diff

 Copy code

```
-63z = 0
z = 0
```

Sostituendo il valore di z nella seconda equazione:


makefile

 Copy code

```
2y + 9z = 0
2y = 0
y = 0
```

Sostituendo i valori di y e z nella prima equazione:


makefile

 Copy code

```
2x - 5y + 8z = 0
2x - 0 + 0 = 0
2x = 0
x = 0
```

La soluzione corretta per il sistema lineare è:

makefile

 Copy code

```
x = 0
y = 0
z = 0
```


(b)

Quando in un sistema lineare il numero di equazioni è maggiore del numero di incognite, significa che il sistema è sovradeterminato.

In particolare, per il sistema (b) abbiamo:

- 4 equazioni
- 3 incognite (x, y, z)

Questo è un sistema sovradeterminato. Ciò significa che:

- Se esiste una soluzione, è necessariamente unica (il sistema è compatibile determinato)
- Può però accadere che non esista alcuna soluzione, nel caso in cui le equazioni siano linearmente dipendenti (il sistema è incompatibile)

Facendo il pivoting, nessuna soluzione (testata, oltre 20 passaggi)

(c)

Il sistema dato è:

CSS

Copy code

```
x + 2y + 2z = -3
2x + y + z = -4
x - y + iz = i
```

Riscriviamo il sistema nella forma estesa $[A | b]$:

CSS

Copy code

```
1 2 2 | -3
2 1 1 | -4
1 -1 i | i
```

Ora eseguiamo l'eliminazione gaussiana:

1. Sottrai la prima riga dalla seconda riga moltiplicata per 2:

CSS

Copy code

```
1 2 2 | -3
0 -3 -3 | 2
1 -1 i | i
```

1. Sottrai la prima riga dalla terza riga:


CSS

Copy code

```
1 2 2 | -3
0 -3 -3 | 2
0 -3 i | 4
```

1. Dividi la seconda riga per -3:


css

 Copy code

```
1 2 2 | -3
0 1 1 | -2/3
0 -3 i | 4
```

1. Somma la seconda riga alla terza riga moltiplicata per 3:


css

 Copy code

```
1 2 2 | -3
0 1 1 | -2/3
0 0 i | 10/3
```

Ora possiamo risolvere per z:


css

 Copy code

```
i*z = 10/3
z = (10/3)i
```

Sostituendo il valore di z nella seconda equazione:


css

 Copy code

```
y + z = -2/3
y + (10/3)i = -2/3
y = -2/3 - (10/3)i
```

Sostituendo i valori di y e z nella prima equazione:


css

 Copy code

```
x + 2y + 2z = -3
x + 2(-2/3 - (10/3)i) + 2(10/3)i = -3
x - 4/3 - (20/3)i + (20/3)i = -3
x - 4/3 = -3
x = -3 + 4/3
x = -5/3
```

La soluzione corretta per il sistema lineare è:

makefile

 Copy code

```
x = -5/3
y = -2/3 - (10/3)i
z = 10/3i
```

3.² Risolvere e discutere in funzione dei parametri b_1, b_2, b_3, b_4 il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 3t = b_1 \\ x + 4y + 7z + 3t = b_2 \\ y + 2z = b_3 \\ x + 2y + 3z + 2t = b_4 \end{cases}$$

Possiamo scrivere il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Ora possiamo applicare l'eliminazione di Gauss per portare la matrice dei coefficienti alla forma triangolare superiore.

1. Sottraiamo la prima riga dalla seconda riga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -10 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

1. Aggiungiamo 3 volte la seconda riga alla terza riga e sottraiamo la seconda riga dalla quarta riga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ -3b_2 + b_1 + b_3 \\ b_4 - b_2 \end{bmatrix}$$

1. Moltiplichiamo la terza riga per $-\frac{1}{4}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ -\frac{3}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_3 \\ b_4 - b_2 \end{bmatrix}$$

1. Aggiungiamo la terza riga alla prima riga e aggiungiamo 3 volte la terza riga alla quarta riga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 + \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 2 + \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + \frac{3}{4}b_3 \\ b_2 - b_1 \\ -\frac{3}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_3 \\ b_4 - b_2 + 3\left(-\frac{3}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_3\right) \end{bmatrix}$$

Ora possiamo risolvere il sistema partendo dall'ultima equazione:

$$t = 2 + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}b_2 + \frac{3}{4}b_1 + \frac{3}{4}b_3 + b_4 - b_2 + \frac{9}{4}b_2 - \frac{3}{4}b_1 - \frac{3}{4}b_3$$

Semplificando otteniamo:

$$t = 2 + \frac{3}{4}b_1 - \frac{3}{4}b_2 + \frac{3}{4}b_3 + b_4$$

Ora possiamo sostituire questo valore di t nella terza riga:

$$z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(2 + \frac{3}{4}b_1 - \frac{3}{4}b_2 + \frac{3}{4}b_3 + b_4 \right)$$

Semplificando:

$$z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{3}{16}b_1 + \frac{3}{16}b_2 - \frac{3}{16}b_3 - \frac{1}{4}b_4$$

$$z = -\frac{1}{8} - \frac{3}{16}b_1 + \frac{3}{16}b_2 - \frac{3}{16}b_3 - \frac{1}{4}b_4$$

Ora possiamo sostituire z nella seconda riga:

$$y = b_3 - 2z = b_3 - 2 \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{16}b_1 + \frac{3}{16}b_2 - \frac{3}{16}b_3 - \frac{1}{4}b_4 \right)$$

Semplificando:

$$y = b_3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}b_1 - \frac{3}{8}b_2 + \frac{3}{8}b_3 + \frac{1}{2}b_4$$

$$y = \frac{5}{4} + \frac{3}{8}b_1 - \frac{3}{8}b_2 + \frac{11}{8}b_3 + \frac{1}{2}b_4$$

Infine, possiamo sostituire y nella prima riga:

$$x = b_1 - 3y - 5z - 3t = b_1 - 3 \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{8}b_1 - \frac{3}{8}b_2 + \frac{11}{8}b_3 + \frac{1}{2}b_4 \right) - 5 \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{16}b_1 + \frac{3}{16}b_2 - \frac{3}{16}b_3 - \frac{1}{4}b_4 \right) - 3t$$

Semplificando:

$$x = b_1 - \frac{15}{4} - \frac{9}{8}b_1 + \frac{9}{8}b_2 - \frac{33}{8}b_3 - \frac{3}{2}b_4 + \frac{5}{8} + \frac{15}{16}b_1 - \frac{15}{16}b_2 + \frac{15}{16}b_3 + \frac{5}{4}b_4 - 3t$$

$$x = -\frac{5}{8} + \frac{3}{16}b_1 - \frac{9}{16}b_2 - \frac{21}{8}b_3 - 2b_4 - 3t$$

Quindi, la soluzione del sistema lineare in funzione dei parametri b_1, b_2, b_3 e b_4 è:

$$x = -\frac{5}{8} + \frac{3}{16}b_1 - \frac{9}{16}b_2 - \frac{21}{8}b_3 - 2b_4$$

$$y = \frac{5}{4} + \frac{3}{8}b_1 - \frac{3}{8}b_2 + \frac{11}{8}b_3 + \frac{1}{2}b_4$$

$$z = -\frac{1}{8} - \frac{3}{16}b_1 + \frac{3}{16}b_2 - \frac{3}{16}b_3 - \frac{1}{4}b_4$$

$$t = 2 + \frac{3}{4}b_1 - \frac{3}{4}b_2 + \frac{3}{4}b_3 + b_4$$

Esercizio 1.24. Si discuta e si risolva il seguente sistema lineare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2ax_3 + ax_4 = 1 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - ax_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è la seguente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2a & a & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 1 & -1 & -a & 4 & 2 \end{array} \right)$$

Utilizziamo l'eliminazione di Gauss, usando esclusivamente operazioni elementari sulle righe. Se alla seconda riga sommiamo la prima e alla quarta riga sottraiamo la prima, otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a+2 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & -2a & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Ora scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & -a & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -2a & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Infine, alla quarta riga sottraiamo il doppio della terza, ottenendo la seguente matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & -a & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-2 & 0 \end{array} \right)$$

Possiamo ora osservare che, se $a \neq -1, 0$, il rango della matrice incompleta del sistema è massimo (pari a 4). Tale matrice è dunque invertibile e pertanto il sistema ammette un'unica soluzione. Il sistema corrispondente all'ultima matrice trovata è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)x_4 = -1 \\ -ax_3 + (a+2)x_4 = 1 \\ (-2a-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

il quale può essere facilmente risolto mediante una "sostituzione all'indietro," ottenendo la seguente soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a-1}{a} \\ x_2 = -\frac{1}{a} \\ x_3 = -\frac{1}{a} \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso $a = -1$. La matrice precedente diventa ora

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

In questo caso le due matrici, completa e incompleta, hanno lo stesso rango pari a 3. Per il Teorema di Rouché-Capelli ciò significa che il sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un parametro. Infatti, il sistema corrispondente all'ultima matrice è il seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il quale ammette infinite soluzioni date da

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 6x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 \text{ qualunque.} \end{cases}$$

Per terminare ci rimane solo da considerare il caso $a = 0$. La matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Questa matrice non è nella forma a scala. Alla quarta riga sommiamo dunque la terza, ottenendo la matrice seguente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Si scopre così che, in questo caso, la matrice incompleta ha rango 3, mentre la matrice completa ha rango 4 e dunque il sistema non ammette soluzioni (cosa del tutto ovvia, dato che l'equazione corrispondente all'ultima riga della matrice precedente sarebbe $0 = 1$).

1 Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Convienne sviluppare $\text{Det}(\mathbf{A})$ rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo rispetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{A}) &= (2-i)(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (2-i)(1+i-3) - (2-3i) = (2-i)(-2+i) - 2+3i = \\ &= -4+2i+2i-i^2-2+3i = -5+7i \end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{A}) &= 3(-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(2-i-i) + [(2-i)(1+i)-2] = \\ &= -3(2-2i) + 2-i+2i-i^2-2 = \\ &= -6+6i+2-i+2i+1-2 = -5+7i \end{aligned}$$

Sviluppiamo $\text{Det}(\mathbf{B})$, ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\begin{aligned} \text{Det}\begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix} &= i(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1 \end{pmatrix} + i(-1)^{3+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= i(1-2i) + [1-i(1+i)] + i[2-(1+i)] = \\ &= i-2i^2+1-i-i^2+2i-i-i^2 = \\ &= i+2+1-i+1+2i-i+1 = \\ &= 5+i \end{aligned}$$

Infine sviluppiamo $\text{Det}(\mathbf{C})$ ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\begin{aligned}\text{Det}\mathbf{C} &= \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{3+1} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= -(1+i-1) + 2(1+i-1) = -i + 2i = i$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i) - 1] + (0 - 2) = -(2 + 2i - 1) - 2 = -1 - 2i - 2 = -3 - 2i$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i) - 1] + 2 - 1 = -(2 + 2i - 1) + 1 = -1 - 2i + 1 = -2i$$

Quindi

$$\text{Det}(\mathbf{C}) = i - (-3 - 2i) - 2i = i + 3 + 2i - 2i = 3 + i.$$

Si determini se le seguenti matrici sono invertibili. In caso positivo si calcoli l'inversa.

(a)¹

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa affianchiamo alla matrice A la matrice identica, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A questo punto, utilizzando operazioni elementari sulle righe, cerchiamo di trasformare la matrice A nella matrice identica. Se riusciamo a fare ciò, la matrice che troveremo a destra sarà la matrice inversa di A .

In dettaglio le operazioni da fare sono, ad esempio, le seguenti: sottraiamo alla seconda riga la prima, e alla terza riga la prima, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ora sommiamo alla seconda riga la terza, mentre alla prima sottraiamo la terza, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ora sommiamo alla prima riga la seconda moltiplicata per -2 , ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Si ha pertanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sarebbe possibile verificare che una matrice sia esattamente inversa andando a fare il prodotto tra la matrice originale e la sua inversa; questa restituirebbe la matrice identità.

(b)

Innanzitutto, scriviamo la matrice A affiancata all'identità:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Ora applichiamo l'eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta a gradini:

1. Sottraiamo il doppio della prima riga dalla seconda riga:

$$R2 = R2 - 2R1$$

2. Sottraiamo la prima riga dalla terza riga:

$$R3 = R3 - R1$$

Otteniamo la seguente matrice:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Ora possiamo normalizzare la terza riga dividendo per 4:

$$R3 = \frac{1}{4}R3$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

Ora possiamo lavorare sulla riduzione dell'area sopra la terza riga:

1. Sottraiamo 2 volte la terza riga dalla seconda riga:

$$R2 = R2 - 2R3$$

2. Aggiungiamo 2 volte la terza riga alla prima riga:

$$R1 = R1 + 2R3$$

Otteniamo:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

La matrice a sinistra rappresenta la matrice inversa di A:

Due parole sul rango di una matrice:

- Eliminazione di Gauss (calcoli)
- Matrice a scala (0 che vanno a scala)
- Il rango corrisponde al numero di righe non nulle

Due parole sul teorema di Rouché – Capelli:

2. Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{R}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nella risoluzione di sistemi lineari, si utilizza spesso il Teorema di Rouché-Capelli, che ci dice quando un sistema di equazioni ha soluzioni e quando non ne ha. In termini semplici, stabilisce una condizione per determinare se un sistema di equazioni lineari abbia una soluzione, non abbia alcuna soluzione o abbia infinite soluzioni.

In modo più specifico, il teorema afferma che:

1. Se il numero di equazioni (righe) in un sistema è uguale al numero di incognite (colonne) e il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, allora il sistema ha una sola soluzione unica.
2. Se il numero di equazioni è maggiore del numero di incognite e il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, allora il sistema non ha soluzioni.
3. Se il numero di equazioni è minore del numero di incognite, il sistema ha infinite soluzioni o nessuna, e ciò dipende dalla specifica configurazione delle equazioni.

- (c) Si scrivano i sistemi lineari per cui le matrici indicate sopra sono le corrispondenti matrici aumentate, e si usi il Teorema di Rouché-Capelli per decidere se ognuno di questi sistemi ha o non ha soluzioni.

$$B = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{B'}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{rk } 4}$

Abbiamo che $\text{rk } B = \text{rk } B' < \# \text{ colonne di } B'$
 Quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

(Due parole sui determinanti e descrizione dei casi:

- 2×2
- 3×3
- Laplace

Proposizione 3.2.20 (FORMULA DI LAPLACE). Sia $A \in M_n(K)$. Per ogni indice di riga i si ha:

$$\det A = \sum_{h=1}^n (-1)^{i+h} a_{ih} |A_{ih}|. \quad (3.2.1)$$

Analogamente, per ogni indice di colonna j si ha:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}|. \quad (3.2.2)$$

La prima formula è detta sviluppo del determinante di A secondo la i -esima riga, mentre la seconda è lo sviluppo del determinante di A secondo la j -esima colonna.

Esempio 3.2.21. Utilizziamo la formula di Laplace per calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo sviluppare questo determinante secondo una riga o una colonna qualsiasi ma, ovviamente, converrà scegliere una riga (o una colonna) tra quelle che contengono il maggior numero di zeri. Scegliendo, ad esempio, la terza riga, si ottiene:

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Consideriamo il primo di questi due determinanti di ordine tre e sviluppiamolo secondo la seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) + 5 = 7.$$

Consideriamo ora il secondo determinante di ordine tre e sviluppiamolo secondo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 7 = -23.$$

In conclusione, si trova $\det A = -14 + 69 = 55$.

(Definizione di spazi vettoriali)

Definizione 1.3.10. Un *sottospazio vettoriale* W di V è un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ tale che la restrizione a W delle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite su V rende W uno spazio vettoriale sul campo K .

Dalla definizione si deduce che, affinché un sottoinsieme non vuoto W di V sia un sottospazio vettoriale, è necessario e sufficiente che valgano le seguenti proprietà:

- (1) per ogni $w_1, w_2 \in W$, si ha $w_1 + w_2 \in W$;
- (2) per ogni $w \in W$, anche $-w \in W$;
- (3) $\mathbf{0}_V \in W$;
- (4) per ogni $\lambda \in K$ e ogni $w \in W$, si ha $\lambda w \in W$.

In effetti, è sufficiente richiedere che W sia *chiuso* per le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare, cioè che si abbia

$$w_1 + w_2 \in W, \quad \forall w_1, w_2 \in W$$

e

$$\lambda w \in W, \quad \forall \lambda \in K, \forall w \in W.$$

Queste due condizioni possono essere raggruppate in una sola:

Proposizione 1.3.11. *Un sottoinsieme non vuoto W di uno spazio vettoriale V sul campo K è un sottospazio vettoriale di V se e solo se*

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W,$$

per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ e ogni $w_1, w_2 \in W$.

L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, per le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite rispettivamente da

$$x \oplus y = xy, \quad \forall x, y \in A$$

$$\lambda \cdot x = x^\lambda, \quad \forall x \in A, \lambda \in \mathbb{R}$$

1. **Chiusura rispetto alla somma:** Prendiamo due elementi $x, y \in A$, che sono numeri reali positivi. Se consideriamo $x \oplus y = xy$, il prodotto di due numeri positivi è ancora un numero positivo. Quindi, $x \oplus y$ appartiene ancora ad A , e questa proprietà è soddisfatta.
2. **Chiusura rispetto al prodotto per uno scalare:** Prendiamo un elemento $x \in A$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Il prodotto $\lambda \cdot x = x^\lambda$ è positivo se $\lambda > 0$ (anche se λ è negativo, l'esponente sarà un numero pari e quindi il risultato sarà positivo). Quindi, anche in questo caso, il risultato appartiene a A .
3. **Associatività della somma:** L'operazione di somma $x \oplus y = xy$ è associativa poiché la moltiplicazione è associativa.
4. **Elemento neutro rispetto alla somma:** L'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione nell'insieme A è 1. Poiché $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$, l'elemento neutro esiste.
5. **Esistenza dell'inverso rispetto alla somma:** L'insieme A non soddisfa questa proprietà. Infatti, non esiste un numero positivo y tale che $x \oplus y = 1$ per ogni $x \in A$, in quanto il prodotto xy può essere maggiore di 1.
6. **Distributività rispetto alla somma vettoriale:** Questa proprietà non è soddisfatta, poiché la distributività richiederebbe che $x \oplus (y + z) = x \oplus y + x \oplus z$, ma la moltiplicazione non soddisfa questa proprietà.
7. **Distributività rispetto al prodotto scalare:** Anche questa proprietà non è soddisfatta. La distributività richiederebbe che $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, ma il prodotto per uno scalare x^λ non soddisfa questa proprietà.

Rege

2.¹ Si dica se i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 sono dei sottospazi vettoriali:

(a) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1 - 3x_2 = 0 \right\}$

1. **Chiusura rispetto alla somma vettoriale:**

Prendiamo due vettori (x_1, x_2) e (y_1, y_2) in S_1 . Dobbiamo verificare se la somma $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ appartiene ancora a S_1 .

La somma vettoriale è $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Ora dobbiamo controllare se questa somma soddisfa l'equazione $2(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) = 0$:

$$2x_1 + 2y_1 - 3x_2 - 3y_2 = (2x_1 - 3x_2) + (2y_1 - 3y_2) = 0 + 0 = 0$$

Poiché la somma soddisfa l'equazione originale, la chiusura rispetto alla somma è verificata.

2. **Chiusura rispetto al prodotto per uno scalare:**

Prendiamo un vettore (x_1, x_2) in S_1 e uno scalare λ . Dobbiamo verificare se il prodotto scalare $\lambda \cdot (x_1, x_2)$ appartiene ancora a S_1 .

Il prodotto scalare è $(\lambda x_1, \lambda x_2)$. Ora dobbiamo controllare se soddisfa l'equazione

$$2(\lambda x_1) - 3(\lambda x_2) = 0:$$

$$\lambda(2x_1 - 3x_2) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Poiché il prodotto scalare soddisfa l'equazione originale, la chiusura rispetto al prodotto per uno scalare è verificata.

3. **Contiene il vettore nullo:**

Il vettore nullo è $(0, 0)$. Dobbiamo verificare se $(0, 0)$ appartiene a S_1 . L'equazione $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$ è chiaramente soddisfatta.

(Insiemi di generatori)

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K .

Definizione 1.3.25. Un sottoinsieme $S \subseteq V$ è detto un *insieme di generatori* di V se $L(S) = V$. In tal caso si dice anche che S *genera* V .

Dalla Proposizione 1.3.17 segue che, se S è un insieme di generatori di V , ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare finita di elementi di S :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

(Linearmente indipendenti e dipendenti)

Definizione 1.3.28. I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si dicono *linearmente dipendenti* se essi non sono linearmente indipendenti, cioè se esistono degli scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$, non tutti nulli, per cui si abbia

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Proposizione 1.3.29. I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono *linearmente dipendenti* se e solo se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti, cioè se e solo se esiste un indice i tale che si abbia

$$v_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j v_j,$$

con $\alpha_j \in K$.

(Applicazioni lineari)

1. Si dica se sono lineari le seguenti funzioni:

(a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 4z \\ x + y + z \end{pmatrix}$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Per verificare se una funzione è lineare, dobbiamo controllare se soddisfa due proprietà fondamentali: la proprietà di additività e la proprietà di omogeneità.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $f((x, y, z)) = (x - 4z, x + y + z)$:

1. **Proprietà di additività:** Una funzione f è additiva se $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ per ogni coppia di vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} nel dominio di f .

Prendiamo due vettori $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ in \mathbb{R}^3 . Calcoliamo $f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$:
$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = ((x_1 + x_2) - 4(z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2))$$

Ora calcoliamo $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$:

$$f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = (x_1 - 4z_1, x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 - 4z_2, x_2 + y_2 + z_2) = (x_1 + x_2 - 4(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$$

Possiamo notare che $f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ non è uguale a $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$, quindi la proprietà di additività non è soddisfatta e la funzione f non è lineare.

2. **Proprietà di omogeneità:** Una funzione f è omogenea se $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$ per ogni vettore \mathbf{v} nel dominio di f e ogni scalare λ .

Prendiamo un vettore $\mathbf{v} = (x, y, z)$ e uno scalare λ . Calcoliamo $f(\lambda \mathbf{v})$:

$$f(\lambda \mathbf{v}) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - 4(\lambda z), \lambda x + \lambda y + \lambda z)$$

Ora calcoliamo $\lambda f(\mathbf{v})$:

$$\lambda f(\mathbf{v}) = \lambda(x - 4z, x + y + z) = (\lambda x - 4\lambda z, \lambda x + \lambda y + \lambda z)$$

Possiamo notare che $f(\lambda \mathbf{v})$ non è uguale a $\lambda f(\mathbf{v})$, quindi la proprietà di omogeneità non è soddisfatta e la funzione f non è lineare.

In conclusione, la funzione f definita come $f((x, y, z)) = (x - 4z, x + y + z)$ non è lineare.