Percorso delle idee

L'integrale indefinito

Primitiva

Si dice **primitiva** di una funzione $f(x)$ in un insieme D (unione di uno o più intervalli) una funzione $F(x)$, derivabile in D, tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$.

Integrale indefinito

Tutte e sole le primitive di $f(x)$ in un **intervallo** I differiscono da $F(x)$ per una costante. L'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ in I si chiama **integrale indefinito** e si indica con il simbolo $\int f(x)\,dx$. Valgono le proprietà:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)]\,dx = a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx$$

Metodi di integrazione

integrali immediati

Potenze

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbf{R} \text{ con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

In generale

$$\int f'(x)[f(x)]^\alpha\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbf{R} \text{ con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Esponenziali

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

In generale

$$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

Seno e coseno

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

In generale

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin(f(x)) + c$$

$$\int f'(x)\sin f(x)\,dx = -\cos(f(x)) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + c$$

Funzioni le cui primitive sono goniometriche inverse

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{k} + c$$

In generale

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}\,dx = \arctan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{f(x)}{k} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{k^2-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin\frac{f(x)}{k} + c$$