Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2 (cioè $\mathbf{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$). Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) - \xi_2(\omega), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

RADEMACHER $\left.\begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}\right] p = \frac{1}{2}$

$X \to 1 - 1 = 0$

$Y = \bar{1}1\,(1 + 1) = 2 / -2$

$\{-2; 0; 2\} \to X / Y$

VAR I.I.D $\sim$ DISCRETO (SOMMA)

$E[X] = E[\xi_1 - \xi_2]$

$= E[\xi_1] - E[\xi_2] = 1 - 1 = 0$

$E[X^2] = E[\xi_1 - \xi_2]^2$

$= E[\xi_1]^2 - E[\xi_2]^2 - 2E[\xi_1 \cdot \xi_2]$

$$1 + 1 - 2[1] = 2 - 2 = 0$$

$$\underline{E[X] = VAR \cdot P}$$

$$P = \frac{1}{2}, \{-1, 1\} \to \text{I.I.D}$$

$$-1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E[Y] = E[\xi_3(\xi_1 + \xi_2)]$$

$$= \underbrace{E[\xi_3]}_{0} \cdot \underbrace{E[(\xi_1 + \xi_2)]}_{0}$$

$$\leadsto var(Y) = E[Y^2] = E[\xi_3^2 (\xi_1 + \xi_2)^2]$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} \underbrace{E[\xi_3^2]}_{=1 \text{ (v.s.)}} \cdot E[\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2]$$

$$\overset{\text{lin.}}{=} \underbrace{E[\xi_1^2]}_{=1} + 2E[\xi_1\xi_2] + \underbrace{E[\xi_2^2]}_{=1}$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} 1 + \underbrace{2E[\xi_1] \cdot E[\xi_2]}_{=0} + 1$$

$$\leadsto \underline{\underline{var(Y) = 2.}}$$

Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2 (cioè $\mathbf{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$). Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) - \xi_2(\omega), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - \underbrace{E[X]}_{0})(Y - \underbrace{E(Y)}_{0})]$$

$\mathrm{cov} = 0 \to$ INDIPENDENTI

$$E[(X)\cdot(Y)]$$

$$= E[\underbrace{\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)}_{y} \cdot \underbrace{(\xi_1 - \xi_2)}_{x}]$$

$$(E[\xi_1 - \xi_2])^2 = \underbrace{E(\xi_1^2 - \xi_2^2)}_{\emptyset}$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{-1; 1\}$

X, Y — valori in $\{-2; 0; 2\}$

$\mathrm{COV}(X,Y)=0 \Rightarrow$ INCORRELATE

(CORRELAZIONE)

$\not\Leftarrow$

NON NECESSARIAMENTE

INDIPENDENTI

$X = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

QUANDO Ø AVENDO $\frac{1}{2}$?

$1 - 1 = 0$

OPPURE

$(-1) - (-1) = -1 + 1 = 0$

$P(X=0) = P(\varepsilon_1 = \varepsilon_2) =$

$P(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1) +$

$P(\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1)$

$$P(\varepsilon_1 = 1) \cdot P(\varepsilon_2 = 1) +$$

$$P(\varepsilon_1 = -1) \cdot P(\varepsilon_2 = -1) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$$

---

③ LEGGE CONGIUNTA DI X e Y

$$(X, Y) \sim \{\underline{-2; 0; 2}\}^2 = 3^2$$

X	Y
-2	0
-2	-2
-2	2
0	0
0	2
0	-2

2 0
2 -2

$\Big\}$ 9 CORRO

$P(X = -2, Y = -2)$

CONGIUNTA

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$X = -2$

$Y = -2$

$\varepsilon_3 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

$\boxed{\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1 \to X}$

$X = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -2$

$(-1) - (1) = -1 - 1 = -2$

$\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = 1$

$Y = \underbrace{\varepsilon_3}_{1} \cdot \underbrace{(-1 - 1)}_{-2} = -2 \cdot 1 = -2$

$P(X = -2, Y = -2)$

$= P(X = -2) \cdot P(Y = -2)$

$P(X = -2) = [P(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -2)]$

$= P(\varepsilon_1 = -1) \cdot P(\varepsilon_2 = 1)$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$P(Y = -2)$$

$$P(\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = 1)$$

$$P(\varepsilon_1 = -1) \cdot P(\varepsilon_2 = -1) \cdot P(\varepsilon_3 = 1)$$

$$\left(-1 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot +\frac{1}{2} = +\frac{1}{8}$$

$$P(X = 1, Y = -2)$$

$$= P(\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = -1)$$

$$+ P(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = -1)$$

$$-1 \cdot (1 \cdot (-1))$$

IMPOSSIBILIS!

:-) ...

La probabilità $P(X=0, Y=0)$ risulta 0 perché rappresenta un evento impossibile date le definizioni delle variabili.

Analizzando:

- $X = \xi_1 - \xi_2$
- $Y = \xi_3(\xi_1 + \xi_2)$

Per avere $X = 0$, deve valere $\xi_1 = \xi_2$, quindi entrambe le variabili devono assumere lo stesso valore (o entrambe +1 o entrambe -1).

Ma se $\xi_1 = \xi_2$, allora la somma $\xi_1 + \xi_2$ può essere solo:

- Se $\xi_1 = \xi_2 = +1 \rightarrow \xi_1 + \xi_2 = 2$
- Se $\xi_1 = \xi_2 = -1 \rightarrow \xi_1 + \xi_2 = -2$

In entrambi i casi, $Y = \xi_3(\xi_1 + \xi_2)$ non può mai essere 0, perché ξ_3 vale ±1 e verrebbe moltiplicato per ±2.

L'evento $\{X=0, Y=0\}$ richiederebbe simultaneamente:

- $\xi_1 = \xi_2$ (per avere $X = 0$)
- $\xi_1 + \xi_2 = 0$ (per avere $Y = 0$, dato che $\xi_3 \neq 0$)

Queste condizioni sono incompatibili: gli insiemi $\{\xi_1 = \xi_2\}$ e $\{\xi_1 + \xi_2 = 0\}$ hanno intersezione vuota, come indicato nei tuoi appunti con $\{\xi_1 = \xi_2\} \cap \{\xi_1 \neq \xi_2\} = \emptyset$.

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) - \xi_2(\omega), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

$P(X = -2, Y = 0) \rightarrow$ PRODOTTO TRA LORO MA SOMMA DI TUTTE LE POSSIBILITÀ

- $X = \xi_1 - \xi_2$

$$\left[\begin{array}{l} \xi_1 = -1, \ \xi_2 = 1 \\ X = -1 - (1) = -2 \end{array}\right]$$

- $Y = \xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)$

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1 \\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = 1 \\ \varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = -1 \\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = -1 \end{array}\right]$$

NO, $P(\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1)$

$\downarrow$

APRESSUNDOSNO

$y = 0$

$$P(\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1) + P(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) =$$

Vediamo perché $P(X=2, Y=0) = 1/4$.

Per $X = 2$, deve valere $\xi_1 - \xi_2 = 2$, che si verifica solo quando $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = -1$.

Per $Y = 0$, serve che $\xi_3(\xi_1 + \xi_2) = 0$. Con $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = -1$, abbiamo $\xi_1 + \xi_2 = 0$, quindi $Y = 0$ indipendentemente dal valore di ξ_3.

La probabilità dell'evento congiunto è:
$P(X=2, Y=0) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1)$

Poiché ξ_1 e ξ_2 sono indipendenti:
$P(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1) = P(\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_2 = -1) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

L'aspetto fondamentale è capire che con $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = -1$:

1. Otteniamo $X = 2$
2. La somma $\xi_1 + \xi_2 = 0$, quindi $Y = 0$ per qualsiasi valore di ξ_3

Il valore di ξ_3 non influisce sul risultato quando $\xi_1 + \xi_2 = 0$, quindi non serve considerarlo nel calcolo della probabilità.