DISCRETO → [0; VALORE]

CONTINUO → $(-\infty; \infty)$ → VARIABILI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

$$\perp = \mathbb{1}_x = \begin{cases} 1 & x \in dom(f) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \int_0^1 f'(x) = [f(x)]_0^1$$

↑

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE / DENSITÀ

$$F(x) = P(X \leq x) \quad / \quad f(x) = \frac{1}{b-a}$$

[CONTINUA] (ES. 1) [DISCRETA]

LOGICA...

X ~ INSIEME DI EVENTI

$X_1, X_2 \ldots X_n$ → INSIEME DI EVENTI

I.I.D

⇓

IDENTICAMENTE DISTRIBUITI

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono):

$\doteq$ → DEFINITO COME

(i) $X \doteq Y$ per una variabile aleatoria Y uniforme continua su $[-1, 1]$;

UNIFORME CONTINUA

$$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

$$X \sim \mathrm{Unif}(-1,1) \to \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{(-1,1)}, \ x \in \mathbb{R}$$

CONTINUO → MEDIA, VARIANZA

① MEDIA / VALORE ATTESO $E[X]$ = EXPECTED VALUE

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x \, dx = F(x)$$

→ FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (F)

(f) DENSITÀ → DATA DALLA DISTRIBUZIONE

↑ INDEFINITO $(-\infty, \infty)$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

→ VARIANZA

∇

(i) $X \doteq Y$ per una variabile aleatoria Y uniforme continua su $[-1,1]$;

$\downarrow \frac{1}{2}$

DENSITÀ

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} * 1_{(a,b)}(x) \rightarrow \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Densità di probabilità

$$x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x\, dx$$

$$\frac{1}{2} \left[x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \left[(1)^2 - (-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (0) = 0$$

NOTA → VARIANZA NON È NEGATIVA (ASSUMILO !!)

→ VALOR MEDIO ≥ 0 (!)

E[x] serve per varianza

$$var(x) = E[x^2] - (E[x])^2$$

DENSITÀ = DISTRIBUZIONE

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx$$

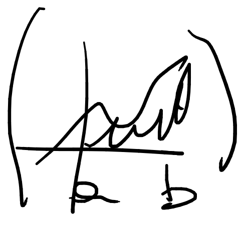
$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_x(x)\, dx$$

$\frac{1}{2}$ (SOSTITUISCO $-1 ; 1$)

$$f(x) = \frac{1}{b-a} * 1_{(a,b)}(x)$$

INTEGRALE

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$



$f(b) - f(a)$

RIEMANN

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

$\rightsquigarrow \quad var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3}.$

$\left(\frac{1}{3}\right) - (0)^2 =$

(ii) X con funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq (x^2/4) \cdot \mathbf{1}_{(0,2)}(x) + \mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

$F_X(x) = \left(\frac{x^2}{4}\right) \cdot \mathbf{1}_{(0,2)} \cdot \left(\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)\right)$

$f(x)$

CONTINUO = INTEGRALE

CONCETTO:
CI SERVE LA DENSITÀ!

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx$

$(F'(x)) = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot x^2 = \frac{1}{2} x$

DENSITÀ

DERIVARE LA RIPARTIZIONE

$\cancel{2}x \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} = \frac{x}{2}$

$f(x) \longrightarrow E[x]$

$E[x^2]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{TROVATO ORA}}\, dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$$

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(dx) = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \frac{16}{8} = 2$$

$$\rightsquigarrow \quad var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

(iii) $X = e^Y$ con $Y \sim Exp(4)$

RIPARTIZIONE

USANDO LA DISTRIBUZIONE PER TROVARE LA DENSITÀ

e^Y $\quad \lambda = 4$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} * 1_{(0,+\infty)}(x)$$

Densità di probabilità di parametro λ

$$\Rightarrow f(x) = 4e^{-4x} \cdot 1 = 4e^{-4x}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \qquad E[X^2] \ldots$$

= FALLO SOTTOPOS CON X

$$\rightsquigarrow \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} \cdot f_Y(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{x} \cdot (4 \cdot e^{-4x})\,dx$$

$$= 4 \int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx = 4 \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot e^{-3x}\right]_0^{\infty}$$

$$= 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} f_Y(x)\,dx = 4 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$$

$$= 4 \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\rightsquigarrow \quad var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

MAGGIORE DI $\emptyset$!

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/400$. Poniamo

$E[X]$

$E[X^2]$

I.I.D.

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{1000} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega, \qquad M \doteq \min\{m \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(S \leq m) \geq 0.99\}.$$

Sia dia una stima per M in tre modi diversi, usando

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson (legge dei piccoli numeri);

c) l'approssimazione normale.

Disuguaglianza di Chebyshev
$P(\lvert X - E(X)\rvert > \varepsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$ $\forall \varepsilon > 0$

→ BOUND BUONO ...

$$\sum_{i=1}^{1000} X_i(\omega)$$

Distribuzione di Bernoulli ($\sim Ber(q)$)

$q \in [0,1]$ se

$$p_x(z) = \begin{cases} q & se\ z = 1 \\ 1-q & se\ z = 0 \end{cases}$$

DISCRETO SI / NO

q SU TUTTI I 1000

$$E[S] = \cancel{1000}^{\,5} \cdot \frac{1}{\cancel{400}_{\,2}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{500}{500} - 1 = \frac{499}{500} \quad 1 - \frac{1}{500}$$

$$var(X_i) = \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{499}{500}\right)$$

PARAMETRO SSI $\left(\frac{1}{400}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{400}\right) = \frac{1}{400} \cdot \frac{399}{400}$

$= var(X_i)$

$$var(S) = var(X_i) \cdot 1000$$

$$\left(\frac{1}{\cancel{400}_{\,2}} \cdot \frac{399}{400}\right) \cdot \cancel{1000}^{\,5} = \frac{1995}{800}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \le \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

$\forall \varepsilon > 0$

$\le / \ge$

COMPLEMENTARE

Per $K \in \mathbb{N}$: $P(S \le K) = 1 - P(S > K)$

$$M \doteq \min\{m \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(S \le m) \ge 0.99\}.$$

Ora $P(S > K) = P(S \ge K+1)$ | S a valori in $\mathbb{N}_0$

Ora $P(S > K) = P(S \ge K+1)$ | S a valori in $\mathbb{N}_0$

$= P(S - E[S] \ge K + 1 - \underbrace{E[S]}_{\frac{5}{2}})$ | $E[S] = \frac{5}{2}$

$$\rightarrow 1 - \frac{5}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \left[P\left(|S - \overset{3/2}{E[S]}| \geq \overset{1^\circ ST}{k-1} \right) \right]$$

$$\overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \underbrace{\left[\frac{Var(S)}{(k-1)^2} \right]}_{2^\circ ND} = \frac{1\cancel{99}3}{8\cancel{00}} \cdot \frac{1}{(k-1)^2}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

$$P(|X - E(X)| > \overset{1^\circ ST}{\varepsilon}) \leq \overset{2^\circ ND}{\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$k-1 \qquad (k-1)$

$k \geq 2$

$$\rightsquigarrow \quad P(S \leq k) = 1 - P(S > k)$$

$$\geq 1 - \frac{1\cancel{99}3}{8\cancel{00}} \cdot \frac{1}{(k-1)^2}$$

Scegliere $k \in \mathbb{N}$ minimo tale che

$$1 - \overset{\frac{1993}{800}}{\cancel{}} \cdot \frac{1}{(k-1)^2} \geq \cancel{} = \cancel{0{,}98}\ 0{,}99$$

(i) $$m \geq \underbrace{\sqrt{\frac{399 \cdot 100}{160}}}\ + \frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{399 \cdot 5}{8}} \approx \sqrt{250} \approx 16$$

$$\rightsquigarrow \quad m > 17 \quad \rightsquigarrow \quad M_* = 18.$$

POISSON $\rightarrow$ BERNOULLI

$$F_{POISS(\frac{5}{2})} \geq 0.99$$

② $$S \sim Bin\left(1000;\ \frac{1}{400}\right)$$

$$\lambda = 1000 \cdot \frac{1}{400} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

λ	$x=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.02	0.980	1.000								
0.04	0.961	0.999	1.000							
0.06	0.942	0.998	1.000							
0.08	0.923	0.997	1.000							
0.10	0.905	0.995	1.000							
0.15	0.861	0.990	1.000	1.000						
0.20	0.819	0.983	0.999	1.000						
0.25	0.779	0.974	0.998	1.000						
0.30	0.741	0.963	0.996	1.000						
0.35	0.705	0.951	0.995	1.000						
0.40	0.670	0.938	0.992	0.999	1.000					
0.45	0.638	0.925	0.989	0.999	1.000					
0.50	0.607	0.910	0.986	0.998	1.000					
0.55	0.577	0.894	0.982	0.998	1.000					
0.60	0.549	0.878	0.977	0.997	1.000					
0.65	0.522	0.861	0.972	0.996	0.999	1.000				
0.70	0.497	0.844	0.966	0.994	0.999	1.000				
0.75	0.472	0.827	0.960	0.993	0.999	1.000				
0.80	0.449	0.809	0.953	0.991	0.999	1.000				
0.85	0.427	0.791	0.945	0.989	0.998	1.000				
0.90	0.407	0.772	0.937	0.987	0.998	1.000				
0.95	0.387	0.754	0.929	0.984	0.997	1.000				
1.00	0.368	0.736	0.920	0.981	0.996	0.999	1.000			

> 0.99

$\lambda = 7$
m

> 0.99

POISSON $= 7$