

1. **(12 punti)** Data una stringa $w \in \Sigma^*$, definiamo una operazione che scambia di posizione i caratteri della stringa a due a due:

$$\text{SWAP}(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } w = \varepsilon \\ a & \text{se } w = a \text{ con } a \in \Sigma \\ a_1 a_0 \text{SWAP}(u) & \text{se } w = a_0 a_1 u \text{ con } a_0, a_1 \in \Sigma, u \in \Sigma^* \end{cases}$$

Per esempio, $\text{SWAP}(\text{ABCDE}) = \text{BADCE}$.

Dimostra che se $L \subseteq \Sigma^*$ è un linguaggio regolare, allora anche il seguente linguaggio è regolare:

$$\text{SWAP}(L) = \{\text{SWAP}(w) \mid w \in L\}.$$

2. **(12 punti)** Date due stringhe u e v , diciamo che u è una *permutazione* di v se u ha gli stessi simboli di v con ugual numero di occorrenze, ma eventualmente in un ordine diverso. Per esempio, le stringhe 01011, e 00111 sono entrambe permutazioni di 11001. Dimostra che il seguente linguaggio non è regolare:

$$L_2 = \{uv \mid u, v \in \{0, 1\}^* \text{ e } u \text{ è una permutazione di } v\}.$$

3. **(12 punti)** Dimostra che se B è un linguaggio regolare, allora il linguaggio

$$\text{PALINDROMIZE}(B) = \{ww^R \mid w \in B\}$$

è un linguaggio context-free.