🎯 Come Usare Questa Guida

Questa guida copre **ogni tipo di esercizio** di Analisi 1. Ogni sezione ha:

- ✅ **Identificazione del tipo**: Come riconoscere l'esercizio
- ✅ **Metodo sistematico**: Procedura step-by-step
- ✅ **Esempi completi**: Dagli appelli reali
- ✅ **Trucchi e trabocchetti**: Errori da evitare

📚 Indice Completo

---

1. Riconoscimento del Tipo di Esercizio {#riconoscimento}

🔍 Diagramma di Riconoscimento

```
LEGGI IL TESTO DELL'ESERCIZIO
|
├─ Contiene "determinare il dominio" → DOMINI
├─ Contiene "calcolare il limite" → LIMITI
├─ Contiene "serie" o "Σ" → SERIE NUMERICHE
├─ Contiene "studiare la funzione" → STUDIO FUNZIONE
├─ Contiene "calcolare l'integrale" → INTEGRALI
```

```
├─ Contiene "equazione differenziale" → EQ. DIFFERENZIALI
├─ Contiene "successione" o "lim n→∞" → SUCCESSIONI
└─ Contiene "numeri complessi" → NUMERI COMPLESSI
```

📋 Checklist Pre-Risoluzione

Per OGNI esercizio:

1. 🎯 **Identifica il tipo** usando il diagramma
2. 🔧 **Verifica i prerequisiti** (dominio, continuità, ecc.)
3. 📝 **Scegli il metodo** dalla sezione specifica
4. ✅ **Controlla il risultato** con casi limite

---

2. Domini di Funzioni {#domini}

🎯 Come Riconoscere

- "Determinare il dominio di f"
- "Trovare il dominio naturale"
- Funzioni con radici, logaritmi, frazioni

🔧 Metodo Sistematico

STEP 1: Identifica le Restrizioni

Espressione	Condizione
$\frac{1}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
$\sqrt[2n]{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
$\sqrt[2n+1]{g(x)}$	$g(x) \in \mathbb{R}$
$\log g(x)$	$g(x) > 0$
$\arcsin g(x)$	$-1 \leq g(x) \leq 1$
$\arccos g(x)$	$-1 \leq g(x) \leq 1$
$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

STEP 2: Risolvi le Disequazioni

STEP 3: Fai l'Intersezione

Esempio Completo:

$$f(x) = \log\left(\frac{|x+2|}{x}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$$

STEP 1: Restrizioni

- $\frac{|x+2|}{x} > 0$ (per il logaritmo)
- $-1 \leq \frac{1}{x^2-1} \leq 1$ (per l'arcoseno)
- $x \neq 0$ (denominatore)
- $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

STEP 2: Risolvi

- $\frac{|x+2|}{x} > 0$:
  - Se $x > 0$: $|x+2| > 0$ sempre vera
  - Se $x < 0$ e $x \neq -2$: $\frac{x+2}{x} > 0$ se $x \in (-2, 0)$
- $\left|\frac{1}{x^2-1}\right| \leq 1$:
  - $\frac{1}{|x^2-1|} \leq 1 \Rightarrow |x^2-1| \geq 1$
  - $x^2 - 1 \geq 1$ o $x^2 - 1 \leq -1$
  - $x^2 \geq 2$ o $x^2 \leq 0$
  - $|x| \geq \sqrt{2}$ o $x = 0$ (ma $x \neq 0$)

STEP 3: Intersezione

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \cap ((-2, 0) \cup (0, +\infty)) \cap \mathbb{R} \setminus \pm 1$$

Risultato: $\text{Dom}(f) = (-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \setminus -1, 1$

---

3. Limiti e Forme Indeterminate {#limiti}

🎯 Come Riconoscere

- "Calcolare il limite"
- $\lim_{x \to a} f(x)$ con a finito o infinito

🔧 Identificazione della Forma Indeterminata

Forma	Strategia
$\frac{0}{0}$	L'Hôpital o sviluppi di Taylor
$\frac{\infty}{\infty}$	L'Hôpital o raccoglimento
$0 \cdot \infty$	Trasforma in $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Forma	Strategia
$\infty - \infty$	Razionalizza o fattorizza
1^∞, 0^0, ∞^0	Forma esponenziale

📊 Gerarchia degli Infiniti

Per $x \to +\infty$:

$$(\log x)^a \ll x^b \ll c^x \ll x! \ll x^x$$

🔧 Metodo Sistematico

Forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

OPZIONE 1: Teorema di L'Hôpital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OPZIONE 2: Sviluppi di Taylor (preferibile per $x \to 0$)

Forma $0 \cdot \infty$

Trasforma: $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$ o $\frac{g(x)}{1/f(x)}$

Forma $\infty - \infty$

Per radici: Razionalizza

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

Forme Esponenziali 1^∞, 0^0, ∞^0

Metodo: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$

Calcola $\lim g(x) \log f(x)$, poi e^{limite}

Esempio dall'Appello:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\sin(x^2) - \sin(2x^2)}{\sqrt{1+2x^6} - \cos(2x^3)}$$

STEP 1: Forma $\frac{0}{0}$, usiamo Taylor

STEP 2: Sviluppi

- $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$

- $\sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{6} + o(x^6) = 2x^2 - \frac{8x^6}{6} + o(x^6)$

Numeratore:

$$2\sin(x^2) - \sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{x^6}{3} - 2x^2 + \frac{4x^6}{3} = x^6$$

- $\sqrt{1+2x^6} = 1 + x^6 + o(x^6)$
- $\cos(2x^3) = 1 - 2x^6 + o(x^6)$

Denominatore:

$$\sqrt{1+2x^6} - \cos(2x^3) = 1 + x^6 - 1 + 2x^6 = 3x^6$$

STEP 3: Risultato

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^6}{3x^6} = \frac{1}{3}$$

---

4. Sviluppi di Taylor {#taylor}

🎯 Come Riconoscere

- Limiti della forma $\frac{0}{0}$ con $x \to 0$
- Espressioni complicate con funzioni elementari

📖 Sviluppi Fondamentali

Base (in $x = 0$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Derivati Utili

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$$

🔧 Regole per Sviluppi Composti

Regola 1: Sostituzione

Se $f(x) = g(h(x))$ e $h(x) \to 0$:

1. Sviluppa $h(x)$ fino all'ordine necessario
2. Sostituisci in $g(u)$
3. Raccogli per potenze

Regola 2: Operazioni

- **Somma/Sottrazione**: Sviluppa termine per termine
- **Prodotto**: Moltiplica e raccogli (attenzione all'ordine!)
- **Quoziente**: Usa $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$

Regola 3: Ordine degli Sviluppi

Per $\frac{N(x)}{D(x)}$ con $N(0) = D(0) = 0$:

- Sviluppa fino al primo termine non nullo
- Se $N(x) \sim ax^n$ e $D(x) \sim bx^m$, allora $\frac{N}{D} \sim \frac{a}{b}x^{n-m}$

Esempio Dettagliato dall'Appello:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(x^2) - \sin(x^2) + x(\sin x - x)}{\sqrt{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^4}}$$

PASSO 1: Sviluppiamo ogni termine

- $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
- $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
- $\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$
- $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $x(\sin x - x) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$

PASSO 2: Numeratore

$$N = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^4}{6} = \frac{5x^4}{6} + o(x^4)$$

PASSO 3: Denominatore

- $\sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
- $\sqrt[3]{1+x^4} = 1 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$$D = 1 + \frac{x^4}{2} - 1 - \frac{x^4}{3} = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

PASSO 4: Limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{5x^4}{6}}{\frac{x^4}{6}} = 5$$

---

5. Successioni {#successioni}

🎯 Come Riconoscere

- $\lim_{n \to \infty} a_n$
- Espressioni con indice n

🔧 Tipologie e Metodi

Tipo 1: Potenze e Esponenziali

$$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \cdot r^n$$

Metodo:

- Se $|r| < 1$: $\lim a_n = 0$
- Se $|r| > 1$: $\lim a_n = \pm\infty$ (segno dipende da P/Q)
- Se $r = 1$: $\lim a_n = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$

Tipo 2: Fattoriali

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \text{ecc.}$$

Metodo: Usa Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Tipo 3: Forme Esponenziali

$$a_n = \left(1 + \frac{f(n)}{n}\right)^{g(n)}$$

Metodo: Se $f(n) \to a$ e $g(n) \to \infty$:

$$\lim a_n = e^{\lim g(n) \cdot \frac{f(n)}{n}} = e^{a \lim \frac{g(n)}{n}}$$

Tipo 4: Con Funzioni Trigonometriche

$$a_n = \frac{\sin(h(n))}{k(n)}, \quad n\cos(1/n), \quad \text{ecc.}$$

Metodo: Usa limitatezza di $\sin, \cos$ e teorema del confronto

Esempio dall'Appello:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\alpha-1}}{1/n^\alpha - \sin(1/n)}$$

PASSO 1: Studiamo il denominatore

$$\frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

PASSO 2: Casi per α

Caso 1: $\alpha < 1$

$$\frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

$$a_n \sim n^{2\alpha-1} \cdot n^\alpha = n^{3\alpha-1}$$

- Converge se $3\alpha - 1 < 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{3}$

Caso 2: $\alpha = 1$

$$\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{6n^3}$$

$$a_n \sim n^1 \cdot 6n^3 = 6n^4 \to +\infty$$

Caso 3: $\alpha > 1$

$$\frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

$$a_n \sim n^{2\alpha-1} \cdot (-n) = -n^{2\alpha} \to -\infty$$

---

6. Serie Numeriche {#serie}

🎯 Come Riconoscere

- Simbolo $\sum_{n=1}^{\infty}$ o $\sum_{n=0}^{\infty}$
- "Studiare la convergenza della serie"
- "Per quali valori di α la serie converge"

🔧 Algoritmo di Risoluzione

STEP 1: Analisi Preliminare

1. **Condizione necessaria**: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. **Serie a termini definitivamente positivi/negativi?**
3. **Serie alternante?**

STEP 2: Comportamento Asintotico

Calcola $a_n \sim ?$ per $n \to \infty$ usando sviluppi di Taylor

STEP 3: Scelta del Criterio

Situazione	Criterio
a_n semplice, conosci serie simile	Confronto/Confronto asintotico
Rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ calcolabile	Criterio del rapporto
Radice $\sqrt[n]{a_n}$ calcolabile	Criterio della radice
Serie alternante con $a_n \searrow 0$	Criterio di Leibniz

STEP 4: Casi con Parametri

Distingui tutti i casi possibili per il parametro

📊 Serie di Riferimento

Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ converge} \Leftrightarrow |r| < 1$$

Armonica Generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Esponenziale vs Potenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\beta}{a^n} \text{ converge per ogni } \beta \text{ se } a > 1$$

🔧 Criteri in Dettaglio

Criterio del Confronto Asintotico

Se $a_n \sim b_n$ (cioè $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$), allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Criterio del Rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{convergente} \\ > 1 & \Rightarrow \text{divergente} \\ = 1 & \Rightarrow \text{indeterminato} \end{cases}$$

Criterio della Radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{convergente} \\ > 1 & \Rightarrow \text{divergente} \\ = 1 & \Rightarrow \text{indeterminato} \end{cases}$$

Criterio di Leibniz

Per $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n > 0$: Se $a_n \searrow 0$ (decrescente e tendente a 0), allora la serie **converge**.

Esempio Completo dall'Appello:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^{2n}) \tan(1/n)}{\cos(1/n^2)}$$

STEP 1: Analisi preliminare

- Termini sempre positivi (per x reale)
- No alternanza

STEP 2: Comportamento asintotico per $n \to \infty$

- $\tan(1/n) \sim \frac{1}{n}$
- $\cos(1/n^2) \sim 1$

STEP 3: Distingui i casi per x

Caso 1: $|x| > 1$

- $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \arctan(x^{2n}) = \frac{\pi}{2}$
- $a_n \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}$
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ serie diverge

Caso 2: $|x| = 1$

- $\arctan(x^{2n}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
- $a_n \sim \frac{\pi}{4n}$
- Serie diverge

Caso 3: $|x| < 1$

- $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$
- $\arctan(x^{2n}) \sim x^{2n}$ per $n \to \infty$
- $a_n \sim \frac{x^{2n}}{n}$

STEP 4: Studio di $\sum \frac{x^{2n}}{n}$ con criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2(n+1)}/(n+1)}{x^{2n}/n} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = x^2$$

Poiché $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$, la serie converge.

STEP 5: Caso $x = 0$

- $a_n = 0$ per ogni n
- Serie converge banalmente

RISPOSTA: La serie converge per $|x| < 1$.

---

7. Calcolo Differenziale {#differenziale}

🎯 Come Riconoscere

- "Calcolare la derivata"
- "Studiare la derivabilità"
- "Determinare monotonia"
- "Trovare estremi"

🔧 Regole di Derivazione Fondamentali

Derivate Base

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[\log x] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Regole di Derivazione

- **Somma**: $(f+g)' = f' + g'$
- **Prodotto**: $(fg)' = f'g + fg'$
- **Quoziente**: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
- **Composizione**: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- **Funzione inversa**: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

🔧 Derivazione di Funzioni Complesse

Esempio dall'Appello

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)$$

STEP 1: Identifico la struttura: $f(x) = \arctan(g(x))$

STEP 2: Derivata della composizione

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)'$$

STEP 3: Calcolo la derivata del quoziente

$$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x-2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

STEP 4: Semplificazione del denominatore

$$1+\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)^2 = \frac{(x+1)^2+(x^2+x-2)^2}{(x+1)^2}$$

STEP 5: Risultato finale

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2 + (x^2 + x - 2)^2}$$

📊 Teoremi Fondamentali

Teorema di Fermat

Se f ha un estremo locale in c e f è derivabile in c, allora $f'(c) = 0$.

Teorema di Rolle

Se f è continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e $f(a) = f(b)$, allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$
.

Teorema di Lagrange (Valor Medio)

Se f è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b), allora $\exists c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema de L'Hôpital

Per forme $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(se il limite a destra esiste)

🔧 Studio di Monotonia e Estremi

STEP 1: Calcola $f'(x)$

STEP 2: Trova i punti critici ($f'(x) = 0$ o $f'(x)$ non definita)

STEP 3: Studia il segno di $f'(x)$

STEP 4: Classifica gli estremi

Variazione di f'	Tipo di estremo
$+ \to -$	Massimo locale
$- \to +$	Minimo locale
Non cambia	Nessun estremo

8. Studio di Funzione Completo {#studio-funzione}

🎯 Come Riconoscere

- "Studiare la funzione f(x)"
- "Fare il grafico qualitativo"
- Richiesta di dominio, limiti, derivate, monotonia

🔧 Schema Completo di Studio

STEP 1: Dominio e Simmetrie

1. **Dominio**: Vedi sezione Domini
2. **Simmetrie**:
    - Pari: $f(-x) = f(x)$
    - Dispari: $f(-x) = -f(x)$
    - Periodica: $f(x+T) = f(x)$

STEP 2: Limiti agli Estremi del Dominio

Per ogni estremo a del dominio (finito o infinito):

- Calcola $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$
- Se il limite è infinito → asintoto verticale
- Se $x \to \pm\infty$ → possibili asintoti orizzontali/obliqui

STEP 3: Asintoti

Asintoti Verticali

Se $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$, allora $x = a$ è asintoto verticale.

Asintoti Orizzontali

Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ finito, allora $y = L$ è asintoto orizzontale.

Asintoti Obliqui

Se non ci sono asintoti orizzontali:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Se m, q finiti, allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo.

STEP 4: Derivata Prima e Monotonia

1. Calcola $f'(x)$
2. Trova i punti critici
3. Studia il segno di $f'(x)$
4. Determina intervalli di crescenza/decrescenza
5. Classifica i punti di estremo

STEP 5: Derivata Seconda e Convessità

1. Calcola $f''(x)$
2. Studia il segno di $f''(x)$
3. Determina intervalli di convessità/concavità
4. Trova i punti di flesso

STEP 6: Grafico Qualitativo

Combina tutte le informazioni per tracciare il grafico.

Esempio Completo dall'Appello:

$$f(x) = e^x \frac{x^2}{x+6}$$

STEP 1: Dominio e simmetrie

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus -6$
- Non ha simmetrie

STEP 2: Limiti agli estremi

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (esponenziale vince)
- $\lim_{x \to -6^+} f(x) = +\infty$ (numeratore $\to e^{-6} \cdot 36 > 0$, denominatore $\to 0^+$)
- $\lim_{x \to -6^-} f(x) = -\infty$ (numeratore > 0, denominatore $\to 0^-$)
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (esponenziale vince sul polinomio)

STEP 3: Asintoti

- Verticale: $x = -6$
- Orizzontale: $y = 0$ per $x \to -\infty$
- Obliquo per $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x x^2/(x+6)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x x}{x+6} = +\infty$$

Quindi no asintoto obliquo.

STEP 4: Derivata prima

$$f'(x) = e^x \left(\frac{x^2}{x+6} + \frac{2x(x+6) - x^2}{(x+6)^2} \right) = e^x \frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{(x+6)^2} = e^x \frac{x(x+3)(x+4)}{(x+6)^2}$$

Punti critici: $x = 0, -3, -4$

Studio del segno:

- $x \in (-\infty, -6)$: $f'(x) = e^x \frac{(-)(-)(-)=-}{(+)} < 0$ (decrescente)
- $x \in (-6, -4)$: $f'(x) = e^x \frac{(-)(-)(-)=-}{(+)} < 0$ (decrescente)
- $x \in (-4, -3)$: $f'(x) = e^x \frac{(-)(-)(-)=-}{(+)} < 0$ (decrescente)
- $x \in (-3, 0)$: $f'(x) = e^x \frac{(-)(+)(-)=+}{(+)} > 0$ (crescente)
- $x \in (0, +\infty)$: $f'(x) = e^x \frac{(+)(+)(+)=+}{(+)} > 0$ (crescente)

Estremi:

- $x = -4$: minimo relativo
- $x = -3$: massimo relativo
- $x = 0$: minimo relativo

---

9. Calcolo Integrale {#integrale}

🎯 Come Riconoscere

- "Calcolare l'integrale"
- Simbolo $\int$ con o senza estremi
- "Studiare la convergenza dell'integrale improprio"

🔧 Integrali Indefiniti - Tecniche

1. Integrali Immediati

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

2. Integrazione per Parti

Formula: $\int u, dv = uv - \int v, du$

Regola ILATE:

- **I**nverse trig functions
- **L**ogarithmic functions
- **A**lgebraic functions
- **T**rigonometric functions
- **E**xponential functions

Esempio dall'Appello:

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

Suggerimento: $x^3 = x \cdot x^2$

SOLUZIONE: Poniamo $u = x^2$, $du = 2x, dx$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 e^{x^2} \cdot 2x, dx = \frac{1}{2} \int u e^u du$$

Per $\int u e^u du$ usiamo integrazione per parti:

- $f = u$, $df = du$
- $dg = e^u du$, $g = e^u$

$$\int u e^u du = u e^u - \int e^u du = (u-1)e^u + C$$

Quindi:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + C$$

3. Integrazione per Sostituzione

Se $\int f(g(x))g'(x)dx$, poni $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$

Sostituzioni Trigonometriche Standard:

- $\sqrt{a^2 - x^2} \to x = a \sin t$
- $\sqrt{a^2 + x^2} \to x = a \tan t$
- $\sqrt{x^2 - a^2} \to x = a \sec t$

4. Frazioni Razionali

Per $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\deg P < \deg Q$:

STEP 1: Fattorizza $Q(x)$ **STEP 2**: Decomposizione in frazioni parziali **STEP 3**: Integra termine per termine

Tipi di frazioni parziali:

- Fattore $(x - a)$: $\frac{A}{x-a}$
- Fattore $(x - a)^n$: $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
- Fattore $x^2 + px + q$ irriducibile: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

🔧 Integrali Definiti

Teorema Fondamentale del Calcolo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dove $F'(x) = f(x)$

Proprietà Utili

- **Linearità**: $\int_a^b (af(x) + bg(x))dx = a\int_a^b f(x)dx + b\int_a^b g(x)dx$
- **Additività**: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Simmetria pari**: Se f è pari, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- **Simmetria dispari**: Se f è dispari, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

🔧 Integrali Impropri

Definizioni

Tipo I (Estremi Infiniti)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$$

Tipo II (Singolarità)

Se f ha singolarità in $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx \right]$$

Criteri di Convergenza

Integrali di Riferimento

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Criterio del Confronto

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$:

- $\int g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int f(x)dx$ converge
- $\int f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int g(x)dx$ diverge

Criterio del Confronto Asintotico

Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a$, allora $\int f(x)dx$ e $\int g(x)dx$ hanno lo stesso carattere.

Esempio dall'Appello: Studiare la convergenza di $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x} \arctan x)^\alpha}{x^2 - 5x + 4} dx$

SOLUZIONE: Per $x \to +\infty$:

- $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$
- $(\sqrt{x} \arctan x)^\alpha \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha x^{\alpha/2}$
- $x^2 - 5x + 4 \sim x^2$

Quindi: $f(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha x^{\alpha/2 - 2}$

L'integrale converge se $\frac{\alpha}{2} - 2 < -1$, cioè $\alpha < 2$.

---

10. Equazioni Differenziali {#equazioni-diff}

🎯 Come Riconoscere

- Presenza di y', y'', $\frac{dy}{dx}$, etc.
- "Risolvere l'equazione differenziale"
- "Problema di Cauchy"

🔧 Classificazione e Metodi

Equazioni del Primo Ordine

1. A Variabili Separabili

Forma: $y' = f(x)g(y)$

Metodo:

1. Separa: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
2. Integra: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$
3. Risolvi per y

2. Lineari del Primo Ordine

Forma: $y' + a(x)y = b(x)$

Formula Risolutiva:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[\int b(x)e^{A(x)}dx + C \right]$$

dove $A(x) = \int a(x)dx$

Metodo Pratico:

1. Calcola $A(x) = \int a(x)dx$
2. Moltiplica l'equazione per $e^{A(x)}$
3. Riconosci $(ye^{A(x)})'$ al primo membro
4. Integra entrambi i membri

Esempio dall'Appello:

$$y' + 2xy = x^3, \quad y(0) = 2025$$

PASSO 1: $a(x) = 2x \Rightarrow A(x) = \int 2xdx = x^2$

PASSO 2: Moltiplica per e^{x^2}:

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = x^3e^{x^2}$$

PASSO 3: $(ye^{x^2})' = x^3e^{x^2}$

PASSO 4: Integra

$$ye^{x^2} = \int x^3e^{x^2}dx$$

Usando l'integrazione per parti dell'esempio precedente:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + C$$

PASSO 5: Risolvi per y:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$$

PASSO 6: Condizione iniziale

$$y(0) = \frac{1}{2}(-1) + C = 2025 \Rightarrow C = 2025 + \frac{1}{2}$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + \left(2025 + \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$

Equazioni del Secondo Ordine

Lineari Omogenee a Coefficienti Costanti

Forma: $y'' + ay' + by = 0$

Metodo:

1. Equazione caratteristica: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
2. Discriminante $\Delta = a^2 - 4b$

Soluzioni:

- $\Delta > 0$: $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ → $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
- $\Delta = 0$: $\lambda = -\frac{a}{2}$ → $y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$
- $\Delta < 0$: $\lambda = \alpha \pm \beta i$ → $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

Esempio: $y'' - 2y' + 5y = 0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow \lambda = 1 \pm 2i$$

Soluzione: $y = e^x(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$

---

11. Numeri Complessi {#complessi}

🎯 Come Riconoscere

- Presenza di i (unità immaginaria)
- "Calcolare le radici n-esime"
- "Forma trigonometrica"

🔧 Rappresentazioni

Forma Algebrica

$$z = a + bi$$

dove $a = \Re(z)$ (parte reale), $b = \Im(z)$ (parte immaginaria)

Forma Trigonometrica

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

dove:

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (modulo)
- $\theta = \arg(z)$ (argomento)

Conversione:

- $a = r\cos\theta$
- $b = r\sin\theta$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (attenzione al quadrante!)

🔧 Operazioni

Somma e Sottrazione

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Prodotto

- **Forma algebrica**: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- **Forma trigonometrica**: $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Quoziente

- **Forma algebrica**: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$
- **Forma trigonometrica**: $\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Potenze (Formula di De Moivre)

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Radici n-esime

Le radici n-esime di $z = re^{i\theta}$ sono:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Esempio: Radici cubiche di $8i$

PASSO 1: Forma trigonometrica di $8i$

- $r = |8i| = 8$
- $\theta = \arg(8i) = \frac{\pi}{2}$
- $8i = 8e^{i\pi/2}$

PASSO 2: Radici cubiche

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{\pi/2+2\pi k}{3}} = 2e^{i\frac{\pi(1+4k)}{6}}$$

Per $k = 0, 1, 2$:

- $z_0 = 2e^{i\pi/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$
- $z_1 = 2e^{i5\pi/6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$
- $z_2 = 2e^{i9\pi/6} = 2e^{i3\pi/2} = 2(0 - i) = -2i$

---

12. Formule Flash {#formule-flash}

🚀 Sviluppi di Taylor Essenziali

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^6)$$

🎯 Limiti Notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

📊 Serie di Riferimento

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \quad \text{se } |r| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

🔧 Derivate Standard

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[\log x] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1 + x^2}$$

∫ Integrali Base

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$\int \sin x, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C$$

🏆 Criteri per Serie

Criterio	Condizione	Risultato
Rapporto	$\lim \left	\frac{a_{n+1}}{a_n}\right
Radice	$\lim \sqrt[n]{	a_n
Leibniz	$a_n \searrow 0$, serie alternante	Converge

📐 Integrali Impropri di Riferimento

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

🎯 Strategia d'Esame Finale

⏰ Gestione del Tempo (2 ore)

- **Esercizio 1** (Studio di funzione): 45-50 minuti
- **Esercizio 2** (Serie): 25-30 minuti
- **Esercizio 3** (Limite): 20-25 minuti
- **Esercizio 4** (Integrali/Eq. Diff.): 25-30 minuti
- **Controllo finale**: 10-15 minuti

✅ Checklist Pre-Esame

- [ ] Conosci tutti gli sviluppi di Taylor
- [ ] Sai riconoscere il tipo di esercizio in 30 secondi
- [ ] Hai memorizzato i criteri per serie
- [ ] Sai le tecniche di integrazione base
- [ ] Conosci la formula per eq. diff. lineari primo ordine

⚠️ Errori da Evitare Assolutamente

1. **Serie**: Non studiare tutti i casi del parametro
2. **Integrali impropri**: Non verificare la convergenza
3. **Sviluppi**: Sbagliare l'ordine di sviluppo
4. **Derivate**: Errori nei prodotti/quozienti
5. **Domini**: Dimenticare le condizioni

🏆 Trucchi da Ricordare

- **Nei limiti**: Se $x \to 0$, usa sempre Taylor
- **Nelle serie**: Studia sempre il comportamento asintotico prima
- **Negli integrali**: Cerca sempre simmetrie
- **Nello studio di funzione**: Parti sempre dal dominio
- **Nelle eq. differenziali**: Identifica subito il tipo

Con questa guida hai tutto quello che serve per dominare Analisi 1! 🚀