Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ definita da

$$T(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4a+b \\ 3a \\ a-2b \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}(T(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(T(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix})) \right).$$

Poichè

$$T(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}) \right).$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix})$, e calcoliamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta \\ 3\beta \\ \alpha-\delta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha+\delta=a \\ 3\beta=b \\ \alpha-\delta=c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha=(a+c)/2 \\ \beta=b/3 \\ \delta=(a-c)/2 \end{cases} \implies C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ b/3 \\ (a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a=14$, $b=6$ e $c=-10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$; ponendo $a=4$, $b=6$ e $c=10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autovettori corrispondenti. Dire quali matrici sono diagonalizzabili.

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Sol. (i) Si ha

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}=(1-\lambda)^3.$$

La matrice ha pertanto l'unico autovalore $\lambda=1$, con molteplicità algebrica 3. La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è

$$\dim(V_1)=\dim\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$=\dim\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3-\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è minore della sua molteplicità algebrica: la matrice non è diagonalizzabile. Gli 1-autovettori si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

dunque una base per V_1 è $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

(ii) Si ha

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 5 & -1-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2+4$$

La matrice non ha autovalori reali: non è diagonalizzabile. Ovviamente, non essendoci autovalori reali non ci sono neppure autovettori.

(iii) Si ha

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

La matrice ha pertanto due autovalori: l'autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore $\lambda = 3$, con molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 3$ è necessariamente uguale alla sua molteplicità algebrica in quanto per ogni autovalore vale

$$1 \leq \text{molteplicità geometrica}(\lambda) \leq \text{molteplicità algebrica}(\lambda)$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è invece

$$\dim(V_1) = \dim\ker\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \dim\ker\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 3 - \text{rango}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 2$$

Anche la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è uguale alla sua molteplicità algebrica: la matrice è diagonalizzabile. I 3-autovettori sono gli elementi di

$$\ker\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \ker\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

e si ottengono pertanto risolvendo il sistema

$$\begin{cases}-2x - z = 0\\ -2y = 0\\ 0 = 0\end{cases}$$

da cui si vede facilmente che una base per V_3 è costituita dal vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. Analogamente, gli 1-autovettori si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases}-z = 0\\ 0 = 0\\ 2z = 0\end{cases}$$

dunque una base per V_1 è $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

4.[1] Si trovi una base ortonormale del sottospazio $C(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 3 & -8 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ora applichiamo l'eliminazione di Gauss per ridurre questa matrice a una forma echelon: Step 1: Aggiungi la riga 1 alla riga 2, la riga 1 alla riga 3 e la riga 1 alla riga 4 per ottenere:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Step 2: Moltiplica la riga 2 per -1/2 per ottenere:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Step 3: Sottrai 4 volte la riga 2 dalla riga 3 e 2 volte la riga 2 dalla riga 4:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Step 4: Moltiplica la riga 3 per -1/16 e la riga 4 per -1/12:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Step 5: Sottrai la riga 3 dalla riga 4:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Iniziamo normalizzando il primo vettore:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Ora sottraiamo la proiezione di v_2 su u_1 da v_2 per ottenere un vettore ortogonale:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo la proiezione di v_2 su u_1:

$$\text{proj}_{u_1}(v_2) = (v_2 \cdot u_1)u_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ora sottraiamo questa proiezione da v_2:

$$v_2' = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 18 \\ -28 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Ora normalizziamo v_2' per ottenere u_2:

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{468}} \begin{bmatrix} 18 \\ -28 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Quindi, la base ortogonale per $C(A)$ è $\{u_1, u_2\}$, dove

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{468}} \begin{bmatrix} 18 \\ -28 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

2.[1] Si consideri il sottospazio $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$. Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di U.

Passo 1: Calcolo della base ortogonale

Per trovare una base ortogonale, possiamo utilizzare il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Iniziamo con i vettori dati:

$v_1 = (3, -4, 5)$ e $v_2 = (-3, 14, -7)$.

Definiamo due nuovi vettori ortogonali, u_1 e u_2:

$u_1 = v_1 = (3, -4, 5)$ (poiché è il primo vettore)

Ora calcoliamo u_2:

$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1$

Dove $\cdot$ rappresenta il prodotto scalare tra due vettori. Calcoliamo i prodotti scalari necessari:

$v_2 \cdot u_1 = (-3) * 3 + 14 * (-4) + (-7) * 5 = -9 - 56 - 35 = -100$

$u_1 \cdot u_1 = 3^2 + (-4)^2 + 5^2 = 9 + 16 + 25 = 50$

Ora possiamo calcolare u_2:

$$u_2 = (-3, 14, -7) - \frac{-100}{50} \cdot (3, -4, 5)$$

$$u_2 = (-3, 14, -7) + (2, 2. - 2) = (-1, 16, -9)$$

Ora abbiamo ottenuto due vettori ortogonali u_1 e u_2.

Passo 2: Normalizzazione per ottenere una base ortonormale

Per ottenere una base ortonormale, dobbiamo normalizzare i vettori u_1 e u_2. La normalizzazione di un vettore comporta la divisione per la sua norma (lunghezza).

La norma di un vettore u è definita come $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.

Calcoliamo le norme per u_1 e u_2:

$$\|u_1\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 16^2 + (-9)^2} = \sqrt{1 + 256 + 81} = \sqrt{338}$$

Ora normalizziamo i vettori:

u_1 normalizzato: $\frac{1}{\sqrt{50}}(3, -4, 5)$

u_2 normalizzato: $\frac{1}{\sqrt{338}}(-1, 16, -9)$

Ora possiamo scrivere la base ortonormale B di U in LaTeX:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{50}}(3, -4, 5), \frac{1}{\sqrt{338}}(-1, 16, -9) \right\}$$

Questi sono i due vettori ortonormali che compongono la base B per lo spazio U generato da v_1 e v_2.

1. Si dica se sono lineari le seguenti funzioni:

(c) $g \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dove $g\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $w, z \in \mathbb{C}$.

Per determinare se la funzione g è lineare, dobbiamo verificare due proprietà fondamentali per le funzioni lineari:

1. La somma di due vettori di ingresso viene mappata nella somma dei loro mapping.
2. La moltiplicazione di un vettore di ingresso per uno scalare viene mappata nella moltiplicazione del suo mapping per lo stesso scalare.

Nel nostro caso, la funzione g è definita come segue:

$$g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

$$g\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per ogni } w, z \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo la proprietà 1 (somma di vettori):

Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ due vettori qualsiasi in $\mathbb{C}^2$, cioè:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} w_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo $g(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$:

$$g(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = g\left(\begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo la proprietà 2 (moltiplicazione per uno scalare):

Sia $\mathbf{v}$ un vettore qualsiasi in $\mathbb{C}^2$, cioè:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

Sia c uno scalare qualsiasi. Ora calcoliamo $g(c\mathbf{v})$:

$$g(c\mathbf{v}) = g\left(c\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} cw \\ cz \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} cw \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo $c \cdot g(\mathbf{v})$:

$$c \cdot g(\mathbf{v}) = c \cdot \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cw \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $g(c\mathbf{v}) = c \cdot g(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v}$ e c, la proprietà 2 è soddisfatta.

Quindi, poiché g soddisfa entrambe le proprietà delle funzioni lineari, possiamo concludere che g è una funzione lineare da $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}^2$.

2.[1] Si dica se è possibile estrarre dal sottoinsieme C delle basi di V nei seguenti casi:

(a) Lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ con sottoinsieme $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Per estrarre una base da un sottoinsieme C di un dato spazio vettoriale V, dobbiamo verificare se i vettori in C soddisfano due condizioni fondamentali:

1. I vettori in C devono essere linearmente indipendenti.
2. I vettori in C devono generare tutto lo spazio V.

Passo 1: Verifica della linearmente indipendenza

Iniziamo verificando se i vettori in C sono linearmente indipendenti. Per farlo, possiamo organizzare i vettori come righe in una matrice e ridurla alla sua forma più semplice, ad esempio, mediante la riduzione gaussiana.

La matrice con i vettori in C come righe è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora applichiamo la riduzione gaussiana per ottenere la sua forma più semplice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Continuiamo con la riduzione gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto una colonna di zeri nell'ultima colonna. Questo significa che il terzo vettore in C è una combinazione lineare degli altri due. Pertanto, i vettori in C non sono linearmente indipendenti.

Passo 2: Verifica della generazione di tutto lo spazio V

Poiché i vettori in C non sono linearmente indipendenti, non possono costituire una base per V. Inoltre, poiché un sottoinsieme di una base deve essere linearmente indipendente e generare tutto lo spazio V, questo sottoinsieme C non può essere utilizzato come base per V.

In conclusione, non è possibile estrarre una base di V dal sottoinsieme C fornito perché i vettori in C non sono linearmente indipendenti. Una base per V dovrebbe consistere di vettori linearmente indipendenti che generano tutto lo spazio V.

3.[1] Si studi la dipendenza o l'indipendenza lineare dei vettori seguenti, e si determini in ogni caso una base del sottospazio da essi generato.

(c) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^5$.

Passo 1: Verifica della linearmente indipendenza

Per verificare la linearmente indipendenza dei vettori dati, organizziamoli come colonne in una matrice e applichiamo la riduzione gaussiana per ottenere la sua forma più semplice.

La matrice con i vettori dati come colonne è la seguente:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & 1\\1 & 2 & 1 & 0\\2 & 1 & 1 & 0\\1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ora applichiamo la riduzione gaussiana per semplificare la matrice:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & -3 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Dopo la riduzione, notiamo che ci sono due colonne di zeri nella parte inferiore della matrice. Questo indica che due dei vettori originali sono linearmente dipendenti dagli altri. Per essere specifici, il terzo e il quinto vettore sono dipendenti dagli altri tre.

Pertanto, i vettori dati non sono linearmente indipendenti. Ora dobbiamo trovare una base per il sottospazio da essi generato, escludendo i vettori linearmente dipendenti.

Passo 2: Determinare una base per il sottospazio generato

Poiché il terzo e il quinto vettore sono dipendenti dagli altri tre, possiamo escluderli dalla base. Quindi, una base per il sottospazio generato dai vettori dati è costituita dai vettori rimanenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Questi tre vettori sono linearmente indipendenti tra loro e generano lo stesso sottospazio generato dai quattro vettori originali. Puoi rappresentare questa base in LaTeX nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Questi tre vettori costituiscono una base per il sottospazio generato dai vettori dati in $\mathbb{R}^5$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Poichè $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 0$

$$\mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U_0}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U_0})_0 - \text{ rk } (\mathbf{U_0}) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U_0}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U_0}$, ossia la 2^a e la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 & = & h \\ x_3 & = & k \\ x_4 & = & 0 \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & -2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A_0}) = N(\mathbf{U_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Siano $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\mathbf{v_2}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A_0})$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{B_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U_\alpha}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_{\alpha} - \text{ rk } (\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$, ossia la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 & = & h & & \\ x_4 & = & 0 & & \\ x_2 & = & -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 & = & -h \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & 2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$.

Sia $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ che s ottiene ponendo $h = 1$: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Siano

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} \text{ (da } \boldsymbol{\mathcal{B}}' \text{ a } \boldsymbol{\mathcal{B}}\text{) e } \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}' \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}} \text{ (da } \boldsymbol{\mathcal{B}} \text{ a } \boldsymbol{\mathcal{B}}'\text{).}$$

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e di $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ rispettivamente. Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, occorre provare che $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ hanno entrambe rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) $= 3$, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 3$.

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left(C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1') \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_2') \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_3')\right) =$$

$$= \left(C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right).$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right), C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ e $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$ per un generico vettore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+2\beta+\delta\\\alpha+\beta+\delta\\\beta+\delta\end{pmatrix},$$

α, β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases}\alpha+2\beta+\delta = a\\ \alpha+\beta+\delta = b\\ \beta+\delta = c\end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di $(*)$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\1&1&1&b\\0&1&1&c\end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&-1&0&b-a\\0&1&1&c\end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&1&0&a-b\\0&0&1&c-a+b\end{array}\right)$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases}\delta = c-a+b\\ \beta = a-b\\ \alpha = -2\beta-\delta+a = -2a+2b-c+a-b+a = b-c\end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b-c\\ a-b\\ c-a+b\end{pmatrix}$, per cui

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Analogamente si ha:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \left(C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right),$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left(\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \mid \mathbf{I}_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_3(1/2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2\end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(1)} \quad .$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2\end{array}\right).$$

Dunque $\quad \mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+y+6z \end{pmatrix}$.

(a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$.

(c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$.

(d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e la base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

L'applicazione lineare f è definita come:

$$f((x;y;z)) = (x+2y+3z; -x+y+6z)$$

La base canonica per $\mathbb{R}^3$ è $\{e_1, e_2, e_3\}$, dove:

$$e_1 = (1,0,0)$$

$$e_2 = (0,1,0)$$

$$e_3 = (0,0,1)$$

Ora possiamo calcolare le immagini di questi vettori sotto l'applicazione f:

$$f(e_1) = (1+2(0)+3(0), -1+1(0)+6(0)) = (1,-1)$$

$$f(e_2) = (0+2(1)+3(0), 0+1(1)+6(0)) = (2,1)$$

$$f(e_3) = (0+2(0)+3(1), 0+1(0)+6(1)) = (3,6)$$

Quindi, la matrice A associata a f rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) Determinare la matrice B associata a f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$.

La base B di $\mathbb{R}^3$ è data da:

$$B = \{(2;1;2),(0;-1;0),(1;1;2)\}$$

La base canonica per $\mathbb{R}^2$ è $\{e_1', e_2'\}$, dove:

$$e_1' = (1,0)$$

$$e_2' = (0,1)$$

Ora dobbiamo trovare la matrice di passaggio da B alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, chiamiamola P. P sarà la matrice contenente i vettori di B come colonne.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ora calcoliamo la matrice A' associata a f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$ utilizzando la formula:

$$A' = P^{-1}AP$$

Calcoliamo P^{-1}, l'inversa di P:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ora calcoliamo P^{-1}, l'inversa di P. Puoi usarlo per trovare A' come descritto sopra. Ecco P^{-1}:

Per calcolare P^{-1}, possiamo utilizzare la riduzione gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora applichiamo la riduzione gaussiana per ottenere la forma identità a sinistra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora abbiamo P^{-1}. Ora calcoliamo A' come descritto sopra:

$A' = P^{-1}AP$

Calcoliamo A associata a f rispetto alla base canonica:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Ora calcoliamo A':

$A' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ora calcoliamo la moltiplicazione delle tre matrici. Il risultato è la matrice associata a f rispetto a B e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(c) Determinare la matrice D associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$:

La base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $\{e_1, e_2, e_3\}$, dove:

$e_1 = (1, 0, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1)$

La base D di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$D = \{(-2, -1), (0, 1)\}$

Per calcolare D, dobbiamo trovare le immagini di e_1 e e_2 sotto l'applicazione f:

$f(e_1) = (1 + 2(0) + 3(0), -1 + 1(0) + 6(0)) = (1, -1)$

$f(e_2) = (0 + 2(1) + 3(0), 0 + 1(1) + 6(0)) = (2, 1)$

Ora possiamo scrivere D come una matrice contenente $f(e_1)$ e $f(e_2)$ come colonne:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Determinare la matrice C associata a f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$:

Per trovare la matrice C associata a f rispetto a B e D, possiamo utilizzare la procedura di cambio di base. Dalla parte (b), abbiamo già calcolato A', che è la matrice associata a f rispetto a B e la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Ora dobbiamo trovare la matrice di passaggio da D a B, chiamiamola Q. Q sarà la matrice contenente i vettori di D come colonne:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora possiamo calcolare C utilizzando la seguente formula:

$$C = Q^{-1}A'P$$

Calcoliamo Q^{-1}, l'inversa di Q:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & | & 1 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo la riduzione gaussiana per ottenere la forma identità a sinistra:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & -2 & | & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ora abbiamo Q^{-1}. Ora calcoliamo C:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ora calcoliamo la moltiplicazione delle tre matrici. Il risultato è la matrice C associata a f rispetto a B e D.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\left(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array}\right) = \left(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\right).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = -i \qquad \left(\mathbf{B}(-i) \quad | \quad \mathbf{c}(-i)\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

è una forma ridotta di Gauss per $\left(\mathbf{A}(-i) \quad | \quad \mathbf{b}(-i)\right)$, quindi $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}$(-i) è libera, $\mathbf{B}$(-i) $\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}$(-i) ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{c}$(-i) ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}$(-i) (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{c}$(-i) (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$(-i)) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \neq -i$

$$(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = (\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = i$ $\quad (\mathbf{C}(i) \quad | \quad \mathbf{d}(i)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(i) \quad | \quad \mathbf{b}(i))$, quindi $\mathbf{A}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{b}$(i) è equivalente a $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{d}$(i) che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$(i) è libera, $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{d}$(i) ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(\mathrm{i})$ sono dominanti, $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ (e quindi di $\mathbf{A}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathrm{i})$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha \notin \{i, -i\}$

$$\left(\mathbf{C}(\alpha) \middle| \quad \mathbf{d}(\alpha)\right) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha - i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{D}(\alpha) \middle| \quad \mathbf{e}(\alpha)\right)$$

è una forma ridotta di Gauss per $\left(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\right)$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.