ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D5480

c. Utilizza la regola di derivazione del quoziente:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{D(x^2+2x)}^{\text{derivata del numeratore}}\cdot\overbrace{(\ldots\ldots)}^{\text{denominatore}}-\overbrace{(x^2+2x)}^{\text{numeratore}}\cdot\overbrace{D(\ldots\ldots)}^{\text{derivata del denominatore}}}{\underbrace{(\ldots\ldots)^2}_{\text{quadrato del denominatore}}}=\frac{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)-(x^2+2x)\cdot\ldots\ldots}{(\ldots\ldots)^2}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni, utilizzando la proprietà di linearità della derivata.

115 $f(x)=x^3+1$ $[f'(x)=3x^2]$

116 $f(x)=x+x^2$ $[f'(x)=1+2x]$

117 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^3$ $\left[f'(x)=2x^3-\frac{9}{2}x^2\right]$

118 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2-5$ $[f'(x)=2x^3-2x^2-4x]$

119 $f(x)=\frac{1}{5}x^{10}-\frac{1}{3}x^6-6x-7$ $[f'(x)=2x^9-2x^5-6]$

120 $f(x)=3x-\frac{1}{x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x^2}+3\right]$

121 $f(x)=5x^2-\frac{1}{x^2}$ $\left[f'(x)=10x+\frac{2}{x^3}\right]$

122 $f(x)=\frac{2}{x^2}-x^3$ $\left[f'(x)=-3x^2-\frac{4}{x^3}\right]$

123 $f(x)=2\sqrt{x}+3$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$

124 $f(x)=4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$ $\left[f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$

125 $f(x)=\sin x+\cos x$ $[f'(x)=\cos x-\sin x]$

126 $f(x)=\sin x-x$ $[f'(x)=\cos x-1]$

127 $f(x)=\ln x+x$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x}+1\right]$

128 $f(x)=x^2-2\ln x+e^x$ $\left[f'(x)=2x-\frac{2}{x}+e^x\right]$

129 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ $\left[f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}\right]$

130 $f(x)=x^3-2\ln x$ $\left[f'(x)=3x^2-\frac{2}{x}\right]$

131 $f(x)=2^x-\log_2 x$ $\left[f'(x)=2^x\ln 2-\frac{1}{x\ln 2}\right]$

132 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $\left[f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}\right]$

133 $f(x)=2\sin x+\cos x$ $[f'(x)=2\cos x-\sin x]$

134 $f(x)=x-2e^x-\ln x^2$ $\left[f'(x)=1-2e^x-\frac{2}{x}\right]$

135 $f(z)=\frac{1}{z}+z^4$ $\left[f'(z)=-\frac{1}{z^2}+4z^3\right]$

136 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ $\left[f'(t)=1-\frac{1}{t^2}\right]$

137 $f(m)=km^2-\frac{k^2}{m}$ $\left[f'(m)=2km+\frac{k^2}{m^2}\right]$

138 $f(k)=km^2-\frac{k^2}{m}$ $\left[f'(k)=m^2-\frac{2k}{m}\right]$

139 $f(x)=ax-\frac{1}{a^2x^3}$ $\left[f'(x)=a+\frac{3}{a^2x^4}\right]$

---

140 **E se?** $f(x)=k^2x-\frac{1}{kx^3}$ $\left[f'(x)=k^2+\frac{3}{kx^4};\ f'(k)=2kx+\frac{1}{k^2x^3}\right]$

▸ Come cambierebbe la risposta se k fosse la variabile indipendente e x fosse una costante?

Calcola le derivate delle seguenti funzioni, utilizzando il teorema sulla derivata del prodotto.

141 $f(x)=(3x-1)(2x+5)$ $[f'(x)=12x+13]$

142 $f(x)=(3x^2-1)(2x^2+5)$ $[f'(x)=24x^3+26x]$

143 $f(x)=(x-1)(2x^2-1)$ $[f'(x)=6x^2-4x-1]$

144 $f(x)=(3x-2)(5x^2+7)$ $[f'(x)=45x^2-20x+21]$

145 $f(x)=(x^2+1)(x+1)$ $[f'(x)=3x^2+2x+1]$

146 $f(x)=(x^5-1)(x^2+3)$ $[f'(x)=7x^6+15x^4-2x]$

147 $f(x)=(x^3+2)(x^2-1)$ $[f'(x)=5x^4-3x^2+4x]$

148 $f(x)=x^2\ln x$ $[f'(x)=x(2\ln x+1)]$

149 $f(x)=e^x\sin x$ $[f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)]$

150 $f(x)=xe^x$ $[f'(x)=(x+1)e^x]$

151 $f(x)=e^x\sqrt{x}$ $\left[f'(x)=e^x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$

152 $f(x)=x\ln x$ $[f'(x)=\ln x+1]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

153 $f(x) = x^2 e^x$ $\quad [f'(x) = (x^2 + 2x)e^x]$

154 $f(x) = x \sin x$ $\quad [f'(x) = x \cos x + \sin x]$

155 $f(x) = \sqrt{x}\,(1 + e^x)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{e^x(2x+1)+1}{2\sqrt{x}}\right]$

156 $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$ $\quad [f'(x) = e^x(x^2 + 1)]$

157 $f(x) = (x^2 + x) \ln x$ $\quad [f'(x) = (2x + 1) \ln x + x + 1]$

158 **Videolezione** $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^x + \ln x)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{e^x(x-1) - \ln x + 1}{x^2}\right]$

159 $f(t) = t^2 \sin t$ $\quad [f'(t) = t(2 \sin t + t \cos t]$

160 $f(u) = (u^2 + vu)\, e^u$ $\quad [f'(u) = (u^2 + v + vu + 2u)e^u]$

161 $f(k) = e^k(k^2 - \sqrt{k})$ $\quad \left[f'(k) = e^k\left(k^2 + 2k - \sqrt{k} - \dfrac{1}{2\sqrt{k}}\right)\right]$

162 $f(x) = (ax + b)(ax^2 + b^2)$ $\quad [f'(x) = 3a^2x^2 + 2abx + ab^2]$

163 **E se?** $f(x) = (kx^2 - 1)(k^3x - 1)$

▶ Come cambierebbe la risposta se k fosse la variabile indipendente e x fosse una costante?

$[f'(x) = 3k^4x^2 - 2kx - k^3;\ f'(k) = 4k^3x^3 - x^2 - 3k^2x]$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni, utilizzando il teorema sulla derivata del quoziente.

164 $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{2}{(2x+3)^2}\right]$

165 $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+3}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2x^2+6x}{(2x+3)^2}\right]$

166 $f(x) = \dfrac{5}{1-x^2}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{10x}{(x^2-1)^2}\right]$

167 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\right]$

168 $f(x) = \dfrac{2x^2}{5-2x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{20x-4x^2}{(2x-5)^2}\right]$

169 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2+3}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{2x^2-4x-3}{(2x^2+3)^2}\right]$

170 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}\right]$

171 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}\right]$

172 $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{10x}{(x^2-4)^2}\right]$

173 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right]$

174 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\right]$

175 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1-3\ln x}{x^4}\right]$

176 $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ $\quad [f'(x) = x(2-x)\, e^{-x}]$

177 $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{3-2\ln x}{x^3}\right]$

178 $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{(2x-1)e^x}{2x\sqrt{x}}\right]$

179 $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x - 1)^2}\right]$

180 $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2}{x(\ln x + 1)^2}\right]$

181 $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right]$

182 $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 1}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{1}{\sin x + 1}\right]$

183 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x - 1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}\right]$

184 $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+2}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+2)^2}\right]$

185 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}\right]$

186 $f(x) = \dfrac{x^2}{x+e^x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{x^2 - xe^x(x-2)}{(x+e^x)^2}\right]$

187 $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x - 1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{e^x(x\ln x - x - 1)}{x(\ln x - 1)^2}\right]$

188 $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$ $\quad \left[f'(x) = e^x\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x}\right)\right]$

189 $f(x) = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\right]$

190 $f(u) = \dfrac{\tan u}{u}$ $\quad \left[f'(u) = \dfrac{u - \sin u \cos u}{u^2 \cos^2 u}\right]$

191 $f(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$ $\quad \left[f'(t) = -\dfrac{4t}{(t^2-1)^2}\right]$

192 $f(x) = \dfrac{tx+1}{tx-1}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{2t}{(tx-1)^2}\right]$

193 $f(x) = \dfrac{a^2x^2-1}{ax+2}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{a^3x^2 + 4a^2x + a}{(ax+2)^2}\right]$

194 $f(x) = ax^2 + \dfrac{ax+1}{x-a^2}$ $\quad \left[f'(x) = 2ax - \dfrac{a^3+1}{(x-a^2)^2}\right]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

195 **Calcolo rapido.** Quando l'espressione analitica di una funzione si presenta sotto forma di *quoziente*, per calcolarne la derivata può essere utile, se possibile, riscriverla come *somma* o *differenza*, perché il procedimento di calcolo della derivata risulta più rapido. Per esempio, per derivare la funzione $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, invece di utilizzare la regola del quoziente può essere più utile osservare che $f(x)=x+\frac{1}{x}$, da cui segue subito che $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.
Ragionando in modo simile a quest'ultimo esempio, calcola nel modo più rapido le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$ **b.** $f(x)=\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ **c.** $f(x)=\frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x}$

196 **Calcolo rapido.** Prima di calcolare la derivata di una funzione conviene verificare se quest'ultima è semplificabile, eventualmente ricorrendo a prodotti notevoli o sviluppi algebrici: spesso ciò consente di sveltire i conti. Osserva le funzioni che seguono e cerca di calcolarne le rispettive derivate a mente, dopo averle semplificate.

a. $f(x)=(x^4+3)(x^4-3)$ **b.** $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ **c.** $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

Esercizi riassuntivi: l'algebra delle derivate

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

197 $f(x)=3x^3-4x^2+5x-1$ $[f'(x)=9x^2-8x+5]$

198 $f(x)=(2x^2-1)(3x+5)$ $[f'(x)=18x^2+20x-3]$

199 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ $\left[f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}\right]$

200 $f(x)=3x^2+\frac{2}{x^2}$ $\left[f'(x)=6x-\frac{4}{x^3}\right]$

201 $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{x^2}\right]$

202 $f(x)=\frac{2}{3x^2+5}$ $\left[f'(x)=-\frac{12x}{(3x^2+5)^2}\right]$

203 $f(x)=\frac{3x-1}{2x+5}$ $\left[f'(x)=\frac{17}{(2x+5)^2}\right]$

204 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2}$ $\left[f'(x)=\frac{2}{x^3}\right]$

205 $f(x)=x^3(x-1)^2$ $[f'(x)=x^2(x-1)(5x-3)]$

206 $f(x)=\frac{2x^2}{x+4}$ $\left[f'(x)=\frac{2x^2+16x}{(x+4)^2}\right]$

207 $f(x)=\frac{x-1}{2x+3}$ $\left[f'(x)=\frac{5}{(2x+3)^2}\right]$

208 $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^3}$ $\left[f'(x)=-\frac{2x^2+3}{x^4}\right]$

209 $f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$ $\left[f'(x)=-\frac{3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right]$

210 $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-1}$ $\left[f'(x)=-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}\right]$

211 $f(x)=x^2+\sin x+e^x$ $[f'(x)=2x+\cos x+e^x]$

212 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ $[f'(x)=3x^2-12x+11]$

213 $f(x)=\tan x+\frac{1}{\cos x}$ $\left[f'(x)=\frac{\sin x+1}{\cos^2 x}\right]$

214 $f(x)=(x-1)^2(x+1)$ $[f'(x)=3x^2-2x-1]$

215 $f(x)=\frac{x^2(x^3+1)}{x+4}$ $\left[f'(x)=\frac{x(4x^4+20x^3+x+8)}{(x+4)^2}\right]$

216 $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$ $[f'(x)=2e^x\sin x]$

217 $f(t)=\sin t+\frac{1}{\cos t}$ $\left[f'(x)=\cos t+\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right]$

218 $f(x)=\sin x-x\cos x$ $[f'(x)=x\sin x]$

219 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$ $\left[f'(x)=-\frac{1+2\ln x}{x^3}\right]$

220 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}\right]$

221 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$ $[f'(x)=x\ln x]$

222 $f(x)=x\tan x$ $\left[f'(x)=\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}\right]$

223 $f(t)=te^t-\sin t$ $[f'(t)=e^t(t+1)-\cos t]$

224 $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\right]$

225 $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$ $\left[f'(x)=\frac{1}{\sin x-1}\right]$

226 $f(x)=e^x(\ln x-1)$ $\left[f'(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)\right]$

227 $f(x)=x\ln x+\frac{\ln x}{x}$ $\left[f'(x)=\frac{(x^2-1)\ln x+x^2+1}{x^2}\right]$

228 $f(x)=x\,e^x+x^2$ $[f'(x)=e^x(x+1)+2x]$

229 $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$ $\left[f'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}\right]$

230 $f(x)=\frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a}$ $\left[f'(x)=\frac{a}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+a)^2}\right]$

231 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ $\left[f'(x)=\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}\right]$

232 $f(\alpha)=\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$ $[f'(\alpha)=\alpha\cos\alpha]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

233 $f(x)=\frac{x^2+x^3}{\sqrt{x}}$ $\left[f'(x)=\frac{3x+5x^2}{2\sqrt{x}}\right]$

234 $f(x)=x^2\sqrt{x}\ln x$ $\left[f'(x)=x\sqrt{x}\left(\frac{5}{2}\ln x+1\right)\right]$

235 **Videolezione** $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}$ $\left[f'(x)=\sqrt{x}\ln x\right]$

236 $f(x)=x(\sin x)e^x$ $[f'(x)=e^x(x\cos x+x\sin x+\sin x)]$

237 $f(x)=\frac{x\ln x}{e^x}$ $\left[f'(x)=\frac{1-(x-1)\ln x}{e^x}\right]$

238 $f(x)=\frac{xe^x}{x-1}$ $\left[f'(x)=\frac{e^x(x^2-x-1)}{(x-1)^2}\right]$

239 $f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$ $\left[f'(x)=-\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\right]$

Calcola le derivate seconde delle seguenti funzioni.

240 $f(x)=x^2(x^3+1)$ $[f''(x)=20x^3+2]$

241 $f(x)=x^3(2x^2-1)$ $[f''(x)=40x^3-6x]$

242 $f(x)=(x^2+1)^2$ $[f''(x)=4(3x^2+1)]$

243 $f(x)=\frac{x^5+x^2}{x^3}$ $\left[f''(x)=\frac{2(x^3+1)}{x^3}\right]$

244 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ $\left[f''(x)=-\frac{2}{(x+1)^3}\right]$

245 $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ $\left[f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}\right]$

246 $f(x)=\frac{x^2+x^3}{x^4}$ $\left[f''(x)=\frac{2(x+3)}{x^4}\right]$

247 **Videolezione** $f(x)=e^x(x^2+2x+1)$ $[f''(x)=e^x(x^2+6x+7)]$

248 $f(x)=(\sin x-\cos x)e^x$ $[f''(x)=2e^x(\sin x+\cos x)]$

249 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ $\left[f''(x)=\frac{6\ln x-5}{x^4}\right]$

250 Verifica che la derivata della funzione $f(x)=\sin x\cos x$ è $f'(x)=\cos 2x$.

251 Verifica che la derivata della funzione $f(x)=\frac{\tan x-1}{\tan x+1}$ è $f'(x)=\frac{2}{1+\sin 2x}$.

Applicazioni

252 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^3-3x^2$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $[y=-3x+1]$

253 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=3x-\frac{2}{x}$ nel suo punto di ascissa $x=2$. $\left[y=\frac{7}{2}x-2\right]$

254 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ nel suo punto di ascissa 4. $\left[y=\frac{33}{4}x-15\right]$

255 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=\frac{x^2}{x+1}$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $\left[y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right]$

256 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\tan x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$. $\left[y=2x-\frac{\pi}{2}+1\right]$

257 Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=xe^x$ nel suo punto di ascissa $x=1$. $[y=2ex-e]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

258 ESERCIZIO SVOLTO

La concentrazione (in mg/L) del principio attivo di un farmaco nel sangue di un paziente dopo un tempo t (in ore) dall'assunzione di una compressa è ben modellizzata dalla funzione $C(t) = \dfrac{t}{2(t^2+1)}$.

a. Qual è la funzione che esprime il tasso di variazione istantaneo della concentrazione del farmaco, in dipendenza da t?

b. A quale velocità sta variando la concentrazione del farmaco dopo mezz'ora dall'assunzione? E dopo 2 ore?

---

a. La funzione richiesta non è altro che la derivata di $C(t)$ rispetto al tempo, quindi è definita da: $C'(t) = \dfrac{1-t^2}{2(t^2+1)^2}$.

b. Per rispondere alla domanda dobbiamo calcolare il valore della derivata di $C(t)$ per $t = 0{,}5$ (corrispondente a mezz'ora) e $t = 2$ (corrispondente a due ore). Si verifica che:

$$C'(0{,}5) = \frac{1-(0{,}5)^2}{2[(0{,}5)^2+1]^2} = \frac{6}{25} = 0{,}24 \qquad C'(2) = \frac{1-2^2}{2(2^2+1)^2} = -\frac{3}{50} = -0{,}06$$

Ciò significa che, dopo mezz'ora, la concentrazione del farmaco sta *crescendo* alla velocità di 0,24 mg/L all'ora, mentre dopo 2 ore sta *decrescendo* alla velocità di 0,06 mg/L all'ora.

Realtà e modelli

259 **Diffusione di una epidemia.** La funzione $f(t) = 60t^2 - 2t^3$, con $0 \le t \le 30$, esprime con buona approssimazione il numero degli abitanti di una città che hanno contratto una certa malattia in funzione del tempo t (misurato in giorni) trascorso dall'inizio dell'epidemia (corrispondente a $t = 0$).

a. Calcola $f'(5)$ e $f'(25)$ e interpreta il significato di queste derivate nel contesto del problema.

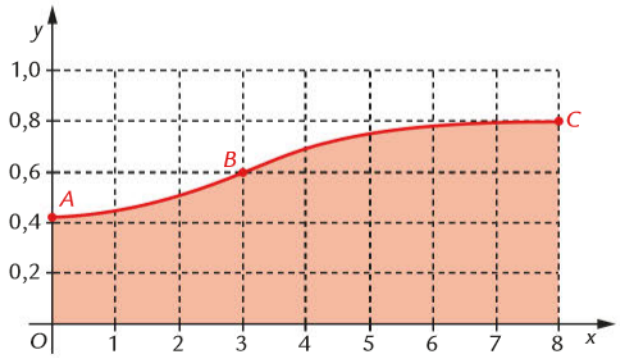
b. Dopo quanto tempo dall'inizio dell'epidemia la velocità di variazione del numero di abitanti che contraggono la malattia è massima? [a. 450, –750; b. dopo 10 giorni]

260 **Costo medio.** La produzione di una quantità q (misurata in kg) di un dato bene comporta un costo fisso di 1500 euro e un ulteriore costo di 10 euro per ogni kilogrammo prodotto.

a. Scrivi l'espressione analitica della funzione $C(q)$ che esprime il costo complessivo per la produzione della quantità q del bene e l'espressione analitica della funzione $\dfrac{C(q)}{q}$ che esprime il costo medio per la produzione della quantità q del bene.

b. Qual è il tasso di variazione del costo medio rispetto alla quantità prodotta, in corrispondenza di una produzione di 10 kg? [b. –15 €/kg]

261 **Collegamento tra due città.** In una regione montagnosa, si sta progettando la realizzazione di una strada per collegare due paesi, rappresentati dai punti A e C in figura. In uno dei progetti che si stanno esaminando il profilo della strada è rappresentato dal grafico della funzione $y = \dfrac{4(e^x+10)}{5(e^x+20)}$, con $0 \le x \le 8$. La variabile y rappresenta l'altitudine corrispondente a un punto di ascissa x e l'unità di misura è il kilometro, sia sull'asse x sia sull'asse y.



a. A quale differenza di altitudine si trovano i due paesi da collegare? Esprimi la risposta in metri.

b. Il progetto della strada sarà approvato a condizione che siano soddisfatte le seguenti tre condizioni: la pendenza della strada nel punto A deve essere inferiore al 2%, la pendenza nel punto B (di ascissa 3) deve essere inferiore al 12% e la pendenza della strada in C deve essere inferiore all'1%. Ritieni che il progetto sarà approvato? [a. Circa 378 m; b. sì]

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

ESERCIZI

5. Derivata della funzione composta e della funzione inversa

Teoria p. 271

Esercizi introduttivi

Test

262 La funzione $y = \sin(x^2)$ si può vedere come funzione composta $f \circ g$ delle due funzioni:

A $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$ B $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$ C $f(x) = \sin^2 x$ e $g(x) = x$ D $f(x) = x$ e $g(x) = \sin^2 x$

263 Sia f una funzione derivabile; qual è la derivata della funzione $y = f(3x)$?

A $y' = 3f(3x)$ B $y' = f'(3x)$ C $y' = 3f'(3x)$ D $y' = 3f'(x)$

264 Sia f una funzione derivabile; qual è la derivata della funzione $y = [f(x)]^2$?

A $y' = [f'(x)]^2$ B $y' = 2f'(x)$ C $y' = 2f(x)f'(x)$ D $y' = 2f(x)$

265 Per derivare, per quali delle seguenti funzioni utilizzeresti il teorema di derivazione delle *funzioni composte*?

a. $y = x \sin x$ c. $y = \sqrt{xe^x}$ e. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ g. $y = x^2 \ln x$

b. $y = e^{\cos x}$ d. $y = \frac{x-1}{x+2}$ f. $y = \ln(2x^2+1)$ h. $y = x \ln^2 x$

---

266 Completa.

a. $D(x^4 - 2x)^3 = 3(x^4 - 2x)^{\cdots}(4x^3 - \ldots)$

b. $D\sqrt{x^2+1} = D(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot(x^2+1)^{\cdots}\cdot \ldots = \frac{x}{\ldots}$

c. $D \sin(\ln x + 1) = \frac{1}{\ldots}\cos(\ldots)$

d. $De^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{\ldots}e^{\frac{1}{\ldots}}$

e. $D \ln(\sin x + 1) = \cos x \cdot \frac{1}{\ldots} = \frac{\cos x}{\ldots}$

267 Caccia all'errore. Nel derivare le seguenti funzioni sono stati commessi alcuni errori. Individuali e correggili.

a. $y = \cos x^2 \Rightarrow y' = 2x \sin x^2$

b. $y = \frac{1}{x^2+x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2x+1}$

c. $y = (x^5+x)^3 \Rightarrow y' = 3(x^5+x)^2$

d. $y = \ln^2(\sin x^3) \Rightarrow y' = 2(\ln \sin x^3)\cos x^3$

e. $y = \sqrt{\pi^2+1} \Rightarrow y' = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$ (π costante)

Il calcolo delle derivate delle funzioni composte

268 **ESERCIZIO GUIDATO**

Calcola le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$ b. $f(x) = \ln \sin(x^2+1)$

a. $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^3+x^2}}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (la radice quadrata) valutata sulla funzione «interna»}} \cdot \underbrace{D(x^3+x^2)}_{\text{derivata della funzione «interna»}} = \frac{\ldots\ldots}{2\sqrt{\ldots\ldots}}$

b. $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sin(x^2+1)}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (il logaritmo) valutata sulla funzione «interna»}} \cdot \underbrace{D[\sin(x^2+1)]}_{\text{derivata della funzione «interna»}} = \frac{1}{\sin(x^2+1)}\cdot(\ldots)\cdot\cos(\ldots)$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

269 $f(x) = (x^5 - x^3)^2$ $[f'(x) = 2(x^5 - x^3)(5x^4 - 3x^2)]$

270 $f(x) = (x^3+1)^3$ $[f'(x) = 9x^2(x^3+1)^2]$

271 $f(x) = (2x+3)^4$ $[f'(x) = 8(2x+3)^3]$

272 $f(x) = (2x^2+1)^3$ $[f'(x) = 12x(2x^2+1)^2]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

273 $f(x)=\frac{1}{5x+2}$ $\left[f'(x)=-\frac{5}{(5x+2)^2}\right]$

274 $f(x)=\frac{3}{(2x+3)^2}$ $\left[f'(x)=-\frac{12}{(2x+3)^3}\right]$

275 $f(x)=(3x^2-x)^2$ $[f'(x)=2\,(6x-1)\,(3x^2-x)]$

276 $f(x)=\frac{2}{(3x-1)^3}$ $\left[f'(x)=-\frac{18}{(3x-1)^4}\right]$

277 $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$ $\left[f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\right]$

278 $f(x)=\cos\ln x$ $\left[f'(x)=-\frac{\sin\ln x}{x}\right]$

279 $f(x)=\sqrt[3]{x+\ln x}$ $\left[f'(x)=\frac{x+1}{3x\sqrt[3]{(x+\ln x)^2}}\right]$

280 $f(x)=\cos x^2$ $[f'(x)=-2x\sin x^2]$

281 $f(x)=e^{2x}(e^{3x}+1)$ $[f'(x)=5e^{5x}+2e^{2x}]$

282 $f(x)=\ln(x^2+1)$ $\left[f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\right]$

283 $f(x)=\sin^2 x$ $[f'(x)=2\sin x\cos x]$

284 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $\left[f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

285 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ $\left[f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right]$

286 $f(x)=2^{x^2-3x+1}$ $[f'(x)=(2x-3)2^{x^2-3x+1}\ln 2]$

287 $f(x)=\sin^2(3x)$ $[f'(x)=6\sin 3x\cos 3x]$

288 $f(x)=\sin^2\ln x$ $\left[f'(x)=\frac{2(\sin\ln x)(\cos\ln x)}{x}\right]$

289 $f(x)=\ln\sin x^2$ $\left[f'(x)=\frac{2x\cos x^2}{\sin x^2}\right]$

290 $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[f'(x)=\frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

Metodi a confronto

291 Calcola la derivata della funzione $f(x)=(2x^3+x+1)^2$ in tre modi:

a. sviluppando il quadrato del trinomio e applicando la proprietà di linearità della derivazione;
b. applicando la regola di derivazione di un prodotto all'espressione $(2x^3+x+1)(2x^3+x+1)$;
c. applicando la regola di derivazione di una funzione composta.

Quale metodo preferisci?

292 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo la derivata della seguente funzione:

$$f(x)=(x^2+1)^2(2x+1)^3$$

$$f'(x)=[D(x^2+1)^2](2x+1)^3+(x^2+1)^2\,D(2x+1)^3=$$ Regola di derivazione del prodotto

$$=\underbrace{2\cdot 2x\cdot(x^2+1)}_{D(x^2+1)^2}(2x+1)^3+(x^2+1)^2\cdot\underbrace{3\cdot 2\cdot(2x+1)^2}_{D(2x+1)^2}=$$ Teorema di derivazione delle funzioni composte

$$=2(x^2+1)(2x+1)^2\,[2x\,(2x+1)+3(x^2+1)]=$$ Raccogliendo

$$=2(x^2+1)(2x+1)^2\,(7x^2+2x+3)$$ Svolgendo i calcoli dentro la parentesi quadra

Nota Osserva che, nello svolgere i calcoli, anziché sviluppare potenze e moltiplicazioni abbiamo cercato ovunque possibile di eseguire dei *raccoglimenti*. Nel calcolo delle derivate è bene seguire sempre questo accorgimento perché così si giunge a un'espressione della derivata *scomposta in fattori* (più facile da trattare, per esempio, per studiare gli zeri o il segno).

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

293 $f(x)=(x^2+1)^3(x^3-1)^2$ $[f'(x)=6x(x^2+1)^2(x^3-1)(2x^3+x-1)]$

294 $f(x)=(x^2+1)^3(2x+1)$ $[f'(x)=2(x^2+1)^2(7x^2+3x+1)]$

295 $f(x)=(3x^2+x)^2(2x-1)$ $[f'(x)=2x(3x+1)(15x^2-3x-1)]$

296 $f(x)=\frac{x^2+4}{(x^2+1)^4}$ $\left[f'(x)=-\frac{6x(x^2+5)}{(x^2+1)^5}\right]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

297 $f(x) = \frac{2x^2-1}{(x+2)^3}$ $\left[f'(x) = -\frac{2x^2-8x-3}{(x+2)^4}\right]$

298 $f(x) = (x^2 + \sin x)^2$ $[f'(x) = 2(x^2 + \sin x)(2x + \cos x)]$

299 $f(x) = x^2 \sin 2x$ $[f'(x) = 2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x]$

300 $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$ $[f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2x \cos x^2]$

301 $f(x) = x^2 e^{1+x^3}$ $[f'(x) = e^{1+x^3}(3x^4 + 2x)]$

302 $f(x) = \frac{\ln^2 x}{\ln x + 1}$ $\left[f'(x) = \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x(\ln x + 1)^2}\right]$

303 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right]$

304 $f(t) = e^{-2t} + e^{-3t}$ $[f'(t) = -2e^{-2t} - 3e^{-3t}]$

305 $f(\omega) = r\omega \sin \omega t$ $[f'(\omega) = r(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)]$

306 $f(s) = \frac{(s^2+1)^2}{s-1}$ $\left[f'(s) = \frac{(s^2+1)(3s^2-4s-1)}{(s-1)^2}\right]$

307 $f(x) = xe^{-kx}$ $[f'(x) = e^{-kx}(1-kx)]$

308 $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2}$ $\left[f'(x) = \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$

309 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{ax+b}}$ $\left[f'(x) = \frac{ax+2b}{2\sqrt{(ax+b)^3}}\right]$

Il calcolo delle derivate delle funzioni inverse

310 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ b. $f(x) = \arctan x^2$

Ricordando le derivate delle funzioni arcoseno e arcotangente e il teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo che:

a. $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (arcoseno) valutata sulla funzione «interna» } (\sqrt{x})} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{derivata della funzione «interna» cioè di } \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

b. $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+(x^2)^2}}_{\text{derivata della funzione «esterna» (arcotangente) valutata sulla funzione «interna» } (x^2)} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivata della funzione «interna» cioè di } x^2} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

311 $f(x) = \arcsin 2x$ $\left[f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right]$

312 $f(x) = \arccos \ln x$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\right]$

313 $f(x) = x \arcsin x$ $\left[f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

314 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\right]$

315 $f(x) = \sqrt{1-x^2}\, e^{\arcsin x}$ $\left[f'(x) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{\arcsin x}\right]$

316 $f(x) = \ln \arccos x$ $\left[f'(x) = -\frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}\right]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

317 $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ $\quad [f'(x) = 0]$

318 $f(t) = \sqrt{1-t^2}\, \arcsin t$ $\quad \left[f'(t) = 1 - \dfrac{t \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\right]$

319 $f(u) = \sqrt{\arctan u}$ $\quad \left[f'(u) = \dfrac{1}{2(u^2+1)\sqrt{\arctan u}}\right]$

320 $f(x) = \arctan \dfrac{kx+1}{kx-1}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{k}{k^2x^2+1}\right]$

---

321 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^3 + e^{2x}$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(0))$, cioè $g'(1)$. $\quad \left[\dfrac{1}{2}\right]$

322 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^5 + x^3$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(1))$, cioè $g'(2)$. $\quad \left[\dfrac{1}{8}\right]$

323 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^2 + \ln x$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(1))$, cioè $g'(1)$. $\quad \left[\dfrac{1}{3}\right]$

324 Giustifica perché la funzione $f(x) = \ln x + \arctan x$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(1))$, cioè $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. $\quad \left[\dfrac{2}{3}\right]$

Metodi a confronto

325 Calcola la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ in tre modi:

a. sulla base della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale;
b. applicando la regola di derivazione per funzioni del tipo potenza;
c. sfruttando il fatto che la funzione $\sqrt{x}$ è la funzione inversa della funzione x^2, con $x \geq 0$, e applicando il teorema di derivazione delle funzioni inverse.

Esercizi riassuntivi: il calcolo delle derivate

Interpretazione di grafici

326 Siano f e g le funzioni aventi i grafici in figura. Considera le funzioni:

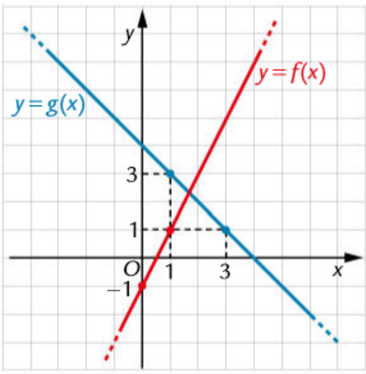
$v(x) = f(x)g(x)$ $\qquad w(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$r(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ $\qquad s(x) = \dfrac{1}{f(x)g(x)}$

Utilizzando le informazioni deducibili dai grafici, calcola:

a. $v'(1)$ $\quad$ b. $w'(1)$ $\quad$ c. $r'(1)$ $\quad$ d. $s'(1)$

$\left[\textbf{a. } v'(1) = 5;\ \textbf{b. } w'(1) = \dfrac{7}{9};\ \textbf{c. } r'(1) = -7;\ \textbf{d. } s'(1) = -\dfrac{5}{9}\right]$



Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

327 $f(x) = \dfrac{1}{4}x^{12} - x^3$ $\quad [f'(x) = 3x^{11} - 3x^2]$

328 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$ $\quad [f'(x) = x]$

329 $f(x) = \dfrac{4}{x} - 5x$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - 5\right]$

330 $f(x) = \ln x - x^4$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{x} - 4x^3\right]$

331 $f(x) = \dfrac{1}{(5x-4)^2}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{10}{(5x-4)^3}\right]$

332 $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2}{x^2}\right]$

333 $f(x) = (2x^2 - 1)(x+5)$ $\quad [f'(x) = 6x^2 + 20x - 1]$

334 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{6}{(x-4)^2}\right]$

335 $f(x) = \ln(x^4 - x^2 - 1)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2x(2x^2-1)}{x^4-x^2-1}\right]$

336 $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{10x}{(x^2+1)^2}\right]$

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

337 $f(x) = 3e^{2x} - 1$ $\quad [f'(x) = 6e^{2x}]$

338 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x+2}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}\right]$

339 $f(x) = x^2(2x+1)^3$ $\quad [f'(x) = 2x(2x+1)^2(5x+1)]$

340 $f(x) = x^2 e^{2x-1}$ $\quad [f'(x) = 2xe^{2x-1}(x+1)]$

341 $f(x) = (2x-1)e^{-3x}$ $\quad [f'(x) = e^{-3x}(5-6x)]$

342 $f(x) = 2x^5 \ln x$ $\quad [f'(x) = 10x^4 \ln x + 2x^4]$

343 $f(x) = (x^2-1)^2(x+1)^3$
$[f'(x) = (x+1)^2\,(x^2-1)(7x^2+4x-3)]$

344 $f(x) = (x-1)(\sqrt{x}+1)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{3x + 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}\right]$

345 $f(x) = \sin(\ln x)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{\cos \ln x}{x}\right]$

346 $f(x) = \ln \ln x$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}\right]$

347 $f(x) = x \ln(x^2+1)$ $\quad \left[f'(x) = \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}\right]$

348 $f(x) = \sqrt{\sin^3 x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{3}{2}\cos x \sqrt{\sin x}\right]$

349 $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x^2$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2\ln x - 6}{x}\right]$

350 $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}}\right]$

351 $f(x) = e^{2x} + \sqrt[3]{e^x}$ $\quad \left[f'(x) = 2e^{2x} + \dfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\right]$

352 $f(x) = (x^2-1)\,e^{2x}$ $\quad [f'(x) = 2e^{2x}(x^2+x-1)]$

353 $f(x) = \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\right]$

354 $f(x) = \sin^3 x - \sin x^3$
$[f'(x) = 3\sin^2 x \cos x - 3x^2 \cos x^3]$

355 $f(x) = e^x \tan x$ $\quad \left[f'(x) = e^x\left(\tan x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\right]$

356 $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^2}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{(x-7)(x+2)^2}{(x-1)^3}\right]$

357 $f(x) = \ln|\sin x|$ $\quad [f'(x) = \cot x]$

358 $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2}$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}\right]$

359 $f(x) = \tan^2(2x+1)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{4\tan(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}\right]$

360 $f(x) = \ln|x^3 - 1|$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3-1}\right]$

361 $f(x) = x^4 \ln^3 x^2$ $\quad [f'(x) = 8x^3 \ln^2|x|\,(4\ln|x| + 3)]$

362 $f(x) = 2^{\sqrt{x} + \ln x}$ $\quad \left[f'(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right)2^{\sqrt{x}+\ln x}\ln 2\right]$

363 $f(x) = \ln(e^{2x} - x^2)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2e^{2x} + 2x}{e^{2x} + x^2}\right]$

364 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

365 $f(x) = \ln(2x) + \dfrac{1}{2x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}\right]$

366 $f(x) = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$ $\quad [f'(x) = x^2 \cos x]$

367 $f(x) = e^{\sin^2 x + \cos x}$ $\quad [f'(x) = \sin x\,(2\cos x - 1)\,e^{\sin^2 x + \cos x}]$

368 $f(x) = \dfrac{x}{x-1} - \ln x$ $\quad \left[f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x}\right]$

369 $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}\right]$

370 $f(x) = (x - \ln x)(x + \ln x)$ $\quad \left[f'(x) = 2x - \dfrac{2\ln x}{x}\right]$

371 $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 2x}{x+1}\right)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x(x+1)(x-2)}\right]$

372 $f(x) = x(1 + \ln|x|)^2$ $\quad [f'(x) = \ln^2|x| + 4\ln|x| + 3]$

373 $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x - x^2}}\right]$

374 $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}+1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x(\sqrt{x}+1)}}\right]$

375 $f(x) = \ln^2 \sin x^3$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{6x^2 \cos x^3 \ln \sin x^3}{\sin x^3}\right]$

376 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}+1)^2}\right]$

377 $f(x) = \ln \sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^4}}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2(3-x)}{3(x^2-1)}\right]$

378 $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x}\right]$

379 $f(x) = x^3\sqrt{x^2-1}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{x^2(4x^2-3)}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

ESERCIZI

ALESSANDRO PRIVITERA PRVLSN06T17D548O

380 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\right]$

381 $f(x)=e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right]$

382 $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}\right]$

383 $f(x)=5^{-3+\sin^3 4x}$ $[f'(x)=12\ln 5(\sin^2 4x)(\cos 4x)5^{-3+\sin^3 4x}]$

384 $f(x)=\dfrac{x\ln x+x^2\ln^3 x}{x^2\ln x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right]$

385 $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{(e^{2x}-1)^2}$ $\left[f'(x)=\dfrac{e^{3x}(e^{2x}+3)}{(1-e^{2x})^3}\right]$

386 $f(x)=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\cos^3 x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}\right]$

387 $f(x)=\arctan(\arcsin x)$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin^2 x+1)}\right]$

388 $f(x)=\sin\ln(e^{2x-1}-1)$ $\left[f'(x)=\dfrac{2e^{2x-1}\cos\ln(e^{2x-1}-1)}{e^{2x-1}-1}\right]$

389 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+1)^3}$ $\left[f'(x)=\dfrac{3-x}{(x+1)^3}\right]$

390 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}}\,\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right]$

391 $f(x)=x^2e^{2x-1}$ $[f'(x)=2(x^2+x)e^{2x-1}]$

392 $f(x)=(\sin x)\cos^2 x$ $[f'(x)=\cos x(\cos^2 x-2\sin^2 x)]$

393 $f(x)=(\sin x)e^{\cos x}$ $[f'(x)=(\cos x-\sin^2 x)e^{\cos x}]$

394 $f(x)=x\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$ $\left[f'(x)=\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\dfrac{x}{x^2+1}\right]$

395 $f(x)=\sin\sqrt{1+\ln x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{1+\ln x}}{2x\sqrt{1+\ln x}}\right]$

396 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{\ln x+1}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\ln^2 x+2\ln x}{x(\ln x+1)^2}\right]$

397 $f(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)$ $[f'(x)=4x(x^2+2)(2x^4+8x^2+7)]$

398 $f(x)=\dfrac{x^3(x-1)^4}{(x+2)^2}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x^2(x-1)^3(5x^2+13x-6)}{(x+2)^3}\right]$

399 $f(x)=e^{2x}(e^x-1)^4$ $[f'(x)=2e^{2x}(e^x-1)^3(3e^x-1)]$

400 $f(x)=(x-1)(x+2)(x+1)e^{-x}$ $[f'(x)=-(x^3-x^2-5x-1)e^{-x}]$

401 $f(x)=\left(\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ $\left[f'(x)=2\left(\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{6x\sqrt[6]{x}}\right)\right]$

402 $f(x)=x(e^{kx}+k)$ $[f'(x)=e^{kx}(kx+1x)+k]$

403 $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}-1}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{\sqrt{ax}}{2x(\sqrt{ax}-1)^2}\right]$

404 **E se?** $f(x)=\dfrac{x^2-k^2}{x+2k}$

▶ Come cambierebbe la risposta se k fosse la variabile indipendente e x fosse una costante?

$\left[f'(x)=\dfrac{x^2+4kx+k^2}{(x+2k)^2};\, f'(k)=\dfrac{-2(x^2+kx+k^2)}{(x+2k)^2}\right]$

405 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+a})$ $\left[f'(x)=\dfrac{x}{(x^2+a)\ln a}\right]$

406 $f(x)=\arctan(ax)+\ln(ax)$ $\left[f'(x)=\dfrac{a}{a^2x^2+1}+\dfrac{1}{x}\right]$

407 $f(x)=\ln\left|\dfrac{kx+1}{k^2x^2+1}\right|$ $\left[f'(x)=-\dfrac{k(k^2x^2+2kx-1)}{(kx+1)(k^2x^2+1)}\right]$

408 $f(x)=\sqrt{\sin(\alpha x+\beta)}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\alpha\cos(\alpha x+\beta)}{2\sqrt{\sin(\alpha x+\beta)}}\right]$

409 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2+a^2}$ $\left[f'(x)=\dfrac{x(3a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2\sqrt{x^2-a^2}}\right]$