

ESERCIZIO TIPO 7

Si dica se l'insieme di vettori

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dello spazio vettoriale reale $V = M_2(\mathbb{R})$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} (*) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_3 + \alpha_4 \mathbf{A}_4 = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Allora (*) equivale a (1)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

(1) è un sistema lineare nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

$$(1) \text{ ha sempre la soluzione nulla } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (ossia } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \text{)}.$$

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora \mathcal{A} sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha più di una soluzione) allora \mathcal{A} è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{43}} \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}).
\end{aligned}$$

L'ultima colonna di $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$, ossia $\mathbf{0}$, è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè non tutte le colonne di \mathbf{U} sono dominanti (la terza è libera), il sistema (1) non ha un'unica soluzione, quindi \mathcal{A} è L.D.

$$\left[\text{Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad (1')} \right] \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di \mathbf{U} (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_3 = h \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 = -h \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - 2\alpha_3 = -(-h) - 2h = h - 2h = h \end{cases}$$

Il sistema (1') ha ∞^1 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\}$.

Prendendo ad esempio $h = 1$ si ottiene $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$ ed $\alpha_4 = 0$:

$$-\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = \mathbf{0}$$

è una combinazione lineare nulla di $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ con coefficienti non tutti nulli.]