Automi e Linguaggi Formali
Esercizi di preparazione agli esami

Prima parte

1. Dati i linguaggi A e B, lo *shuffle perfetto* di A e B è il linguaggio

$$\{w \mid w = a_1b_1a_2b_2\dots a_kb_k, \text{ dove } a_1a_2\dots a_k \in A \text{ e } b_1b_2\dots b_k \in B, \text{ ogni } a_i, b_i \in \Sigma\}$$

Mostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto allo shuffle perfetto, cioè che se A e B sono linguaggi regolari allora anche il loro shuffle perfetto è un linguaggio regolare.

2. Sia A un linguaggio, e sia $DROPOUT(A)$ come il linguaggio contenente tutte le stringhe che possono essere ottenute togliendo un simbolo da una stringa di A:

$$DROPOUT(A) = \{xz \mid xyz \in A \text{ dove } x, z \in \Sigma^* \text{ e } y \in \Sigma\}.$$

Mostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione $DROPOUT$, cioè che se A è un linguaggio regolare allora $DROPOUT(A)$ è un linguaggio regolare.

3. Per una stringa $w = w_1w_2\dots w_n$, l'*inversa* di w è la stringa $w^R = w_n\dots w_2w_1$. Per ogni linguaggio A, sia $A^R = \{w^R \mid w \in A\}$. Mostrare che se A è regolare allora lo è anche A^R.

4. Sia $A/b = \{w \mid wb \in A\}$. Mostrare che se A è un linguaggio regolare e $b \in \Sigma$, allora A/b è regolare.

5. Sia $A/B = \{w \mid wx \in A \text{ per qualche } x \in B\}$. Mostrare che se A è un linguaggio regolare e B un linguaggio qualsiasi, allora A/B è regolare.

6. Il pumping lemma afferma che ogni linguaggio regolare ha una lunghezza del pumping p, tale che ogni stringa del linguaggio può essere iterata se ha lunghezza maggiore o uguale a p. La *lunghezza minima del pumping* per un linguaggio A è il più piccolo p che è una lunghezza del pumping per A. Per ognuno dei seguenti linguaggi, dare la lunghezza minima del pumping e giustificare la risposta.

(a) 110^*
(b) $1^*0^*1^*$
(c) $0^*1^*0^*1^* + 10^*1$
(d) $(01)^*$
(e) $\emptyset$
(f) $0^*01^*01^*$
(g) $10(11^*0)^*0$
(h) 101101
(i) $\{w \in \Sigma^* \mid w \neq 101101\}$
(j) 0001^*
(k) 0^*1^*
(l) $001 + 0^*1^*$
(m) ε
(n) $1^*01^*01^*$
(o) 1011
(p) Σ^*

7. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$, e considerate il linguaggio

$$D = \{w \mid w \text{ contiene un ugual numero di occorrenze di 01 e di 10}\}$$

Mostrare che D è un linguaggio regolare.

8. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Mostrare che il linguaggio $A = \{0^k u 0^k \mid k \geq 1 \text{ e } u \in \Sigma^*\}$ è regolare.
- Mostrare che il linguaggio $B = \{0^k 1 u 0^k \mid k \geq 1 \text{ e } u \in \Sigma^*\}$ non è regolare.

9. Dimostrare che i seguenti linguaggi non sono regolari.

(a) $\{0^n1^m0^m \mid m, n \geq 0\}$
(b) $\{0^n1^m \mid n \neq m\}$
(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ non è palindroma}\}$
(d) $\{wtw \mid w, t \in \{0,1\}^+\}$, dove $\{0,1\}^+$ è l'insieme di tutte le stringhe binarie di lunghezza maggiore o uguale a 1

10. Per ogni linguaggio A, sia $SUFFIX(A) = \{v \mid uv \in A \text{ per qualche stringa } u\}$. Mostrare che la classe dei linguaggi context-free è chiusa rispetto all'operazione di $SUFFIX$.

11. Dimostrare che i seguenti linguaggi sono context-free. Salvo quando specificato diversamente, l'alfabeto è $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) $\{w \mid w$ contiene almeno tre simboli uguali a $1\}$
(b) $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari$\}$
(c) $\{w \mid w$ inizia e termina con lo stesso simbolo $\}$
(d) $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari e il suo simbolo centrale è $0\}$
(e) $\{w \mid w = w^R$, cioè w è palindroma$\}$
(f) $\{w \mid w$ contiene un numero maggiore di 0 che di $1\}$
(g) Il complemento di $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
(h) Sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, $\{w\#x \mid w^R$ è una sottostringa di x e $w, x \in \{0, 1\}^*\}$
(i) $\{x\#y \mid x, y \in \{0, 1\}^*$ e $x \neq y\}$
(j) $\{xy \mid x, y \in \{0, 1\}^*$ e $|x| = |y|$ ma $x \neq y\}$
(k) $\{a^i b^j \mid i \neq j$ e $2i \neq j\}$

12. Se A e B sono linguaggi, definiamo $A \circ B = \{xy \mid x \in A, y \in B$ e $|x| = |y|\}$. Mostrare che se A e B sono linguaggi regolari, allora $A \circ B$ è un linguaggio context-free.

13. Dimostrare che se G è una CFG in forma normale di Chomsky, allora per ogni stringa $w \in L(G)$ di lunghezza $n \geq 1$, ogni derivazione di w richiede esattamente $2n - 1$ passi.

Seconda parte

14. Un *automa a coda* è simile ad un automa a pila con la differenza che la pila viene sostituita da una coda. Una *coda* è un nastro che permette di scrivere solo all'estremità sinistra del nastro e di leggere solo all'estremità destra. Ogni operazione di scrittura (*push*) aggiunge un simbolo all'estremità sinistra della coda e ogni operazione di lettura (*pull*) legge e rimuove un simbolo all'estremità destra. Come per un PDA, l'input è posizionato su un nastro a sola lettura separato, e la testina sul nastro di lettura può muoversi solo da sinistra a destra. Il nastro di input contiene una cella con un blank che segue l'input, in modo da poter rilevare la fine dell'input. Un automa a coda accetta l'input entrando in un particolare stato di accettazione in qualsiasi momento. Mostra che un linguaggio può essere riconosciuto da un automa deterministico a coda se e solo se è Turing-riconoscibile.

15. Una *Macchina di Turing a sola scrittura* è una TM a nastro singolo che può modificare ogni cella del nastro al più una volta (inclusa la parte di input del nastro). Mostrare che questa variante di macchina di Turing è equivalente alla macchina di Turing standard.

16. Chiamiamo k-PDA un automa a pila dotato di k pile.

(a) Mostrare che i 2-PDA sono più potenti degli 1-PDA
(b) Mostrare che i 2-PDA riconoscono esattamente la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili
(c) Mostrare che i 3-PDA *non* sono più potenti dei 2-PDA

17. Sia $ALL_{DFA} = \{\langle A \rangle \mid A$ è un DFA e $L(A) = \Sigma^*\}$. Mostrare che ALL_{DFA} è decidibile.

18. Sia $A_{\varepsilon CFG} = \{\langle G \rangle \mid G$ è una CFG che genera $\varepsilon\}$. Mostrare che $A_{\varepsilon CFG}$ è decidibile.

19. Sia $S_{REX} = \{\langle R, S \rangle \mid R, S$ sono espressioni regolari tali che $L(R) \subseteq L(S)\}$. Mostrare che S_{REX} è decidibile.

20. Sia $X = \{\langle M, w \rangle \mid M$ è una TM a nastro singolo che non modifica la porzione di nastro che contiene l'input $w\}$. X è decidibile? Dimostrare la vostra risposta.

21. Sia $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid G$ è una TM tale che $L(M) = \emptyset\}$. Mostrare che $\overline{E_{TM}}$, il complemento di E_{TM}, è Turing-riconoscibile.

22. Mostrare che se A è Turing-riconoscibile e $A \leq_m \overline{A}$, allora A è decidibile.

23. Sia A un linguaggio. Dimostrare che A è Turing-riconoscibile *se e solo se* esiste un linguaggio decidibile B tale che $A = \{x \mid$ esiste y tale che $\langle x, y \rangle \in B\}$.

24. $A \leq_m B$ e B è un linguaggio regolare implica che A è un linguaggio regolare? Perché si o perché no?

25. Mostrare che se A è Turing-riconoscibile e $A \leq_m \overline{A}$, allora A è decidibile.

26. Sia $J = \{w \mid w = 0x$ per qualche $x \in A_{TM}$ oppure $w = 1y$ per qualche $y \in \overline{A_{TM}}\}$. Mostrare che sia J che $\overline{J}$ non sono Turing-riconoscibili.

27. Sia $J = \{w \mid w = 0x$ per qualche $x \in A_{TM}$ oppure $w = 1y$ per qualche $y \in \overline{A_{TM}}\}$. Mostrare che sia J che $\overline{J}$ non sono Turing-riconoscibili.

28. Un circuito Hamiltoniano in un grafo G è un ciclo che attraversa ogni vertice di G esattamente una volta. Stabilire se un grafo contiene un circuito Hamiltoniano è un problema NP-completo.

(a) Un *circuito Toniano* in un grafo G è un ciclo che attraversa *almeno la metà* dei vertici del grafo (senza ripetere vertici). Il *problema del circuito Toniano* è il problema di stabilire se un grafo contiene un circuito quasi Hamiltoniano. Dimostrare che il problema è NP-completo.

(b) Un *circuito quasi Hamiltoniano* in un grafo G è un ciclo che attraversa esattamente una volta tutti i vertici del grafo *tranne uno*. Il *problema del circuito quasi Hamiltoniano* è il problema di stabilire se un grafo contiene un circuito quasi Hamiltoniano. Dimostrare che il problema del circuito quasi Hamiltoniano è NP-completo.

29. Considera i seguenti problemi:

$$\begin{aligned}
\textsc{SetPartitioning} = \{\langle S\rangle \mid\ & S \text{ è un insieme di numeri interi che può essere suddiviso} \\
& \text{in due sottoinsiemi disgiunti } S_1, S_2 \text{ tali che la somma dei numeri in } S_1 \\
& \text{è uguale alla somma dei numeri in } S_2\} \\
\textsc{SubsetSum} = \{\langle S, t\rangle \mid\ & S \text{ è un insieme di numeri interi, ed esiste } S' \subseteq S \\
& \text{tale che la somma dei numeri in } S' \text{ è uguale a } t\}
\end{aligned}$$

(a) Mostra che entrambi i problemi sono in NP.
(b) Mostra che SetPartitioning è NP-Hard usando SubsetSum come problema di riferimento.
(c) Mostra che SubsetSum è NP-Hard usando SetPartitioning come problema di riferimento.

30. Considerate la seguente variante del problema SetPartitioning, che chiameremo QuasiPartitioning: dato un insieme di numeri interi S, stabilire se può essere suddiviso in due sottoinsiemi disgiunti S_1 e S_2 tali che la somma dei numeri in S_1 è uguale alla somma dei numeri in S_2 *meno 1*. Dimostrare che il problema QuasiPartitioning è NP-completo.

31. "Colorare" i vertici di un grafo significa assegnare etichette, tradizionalmente chiamate "colori", ai vertici del grafo in modo tale che nessuna coppia di vertici adiacenti condivida lo stesso colore. Il problema k-COLOR è il problema di trovare una colorazione di un grafo non orientato usando k colori diversi.

(a) Mostrare che il problema k-COLOR è in NP per ogni valore di k
(b) Mostrare che 2-COLOR è in P
(c) Mostrare che 3-COLOR $\leq_P$ k-COLOR per ogni $k > 3$
(d) Considerate la seguente variante del problema, che chiameremo Almost3Color: dato un grafo non orientato G con n vertici, stabilire se è possibile colorare i vertici di G con tre colori diversi, in modo che ci siano al più $n/2$ coppie di vertici adiacenti dello stesso colore. Dimostrare che il problema Almost3Color è NP-completo.