Prova scritta

15 gennaio 2025

Nome: ___
Cognome: ___
Matricola: ___

Esercizio 1

Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono):

(i) X è una variabile aleatoria discreta tale che $P(X = -2) = 1/8$, $P(X = 1) = 3/8$, $P(X = 3) = 1/4$, $P(X = 5) = 1/4$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) = (x^3/27) \cdot 1_{(0,3)}(x) + 1_{[3,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X = 2 + e^Y$ per una variabile aleatoria Y esponenziale di parametro tre.

Esercizio 2

Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2. Poniamo

$X(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) + \xi_3(\omega))$, $Y(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) - \xi_3(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

Esercizio 3

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{1100}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro 1/550. Poniamo

$S(\omega) = \sum_{i=1}^{1100} X_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $N = \min\{n \in \mathbb{N} : P(S \leq n) \geq 0.97\}$.

Si dia una stima per N in tre modi diversi, usando:

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson (legge dei piccoli numeri);

c) l'approssimazione normale.

Esercizio 4

Un algoritmo di machine learning deve elaborare dati attraverso una rete di server collegati come in figura (si noti che le connessioni sono rappresentate da archi diretti):

```
O -----> I -----> K -----> A
    |         |         |
    |         v         |
    +-----> J -----> L --+
                     |
                     v
                     B
```

Ad ogni nodo il processo viene inoltrato scegliendo una connessione a caso tra quelle uscenti (indipendentemente dalle scelte precedenti). Per esempio, se il processo è nel nodo I, viene inoltrato con uguale probabilità verso K o J.

Si calcoli la probabilità che il processo (che parte da O) termini in A anziché in B.

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)