Automi e Linguaggi Formali – 15/6/2023
Seconda prova intermedia – Secondo Turno

1. (12 punti) Una macchina di Turing salva-nastro è simile a una normale macchina di Turing deterministica a nastro singolo semi-infinito, ma può spostare la testina al centro della parte non vuota del nastro. In particolare, se le prime s celle del nastro non sono vuote, allora la testina può spostarsi nella cella numero $\lfloor s/2 \rfloor$. A ogni passo, la testina della TM salva-nastro può spostarsi a sinistra di una cella (L), a destra di una cella (R) o al centro della parte non vuota del nastro (J).

(a) Dai una definizione formale della funzione di transizione di una TM salva-nastro.

(b) Dimostra che le TM salva-nastro riconoscono la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili. Usa una descrizione a livello implementativo per definire le macchine di Turing.

Soluzione.

(a) $\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{L, R, J\}$

(b) Per dimostrare che TM salva-nastro riconoscono la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili dobbiamo dimostrare due cose: che ogni linguaggio Turing-riconoscibile è riconosciuto da una TM salva-nastro, e che ogni linguaggio riconosciuto da una TM salva-nastro è Turing-riconoscibile.

La prima dimostrazione è banale: le TM deterministiche a singolo nastro sono un caso particolare di TM salva-nastro che non effettuano mai la mossa J per saltare al centro della parte non vuota del nastro. Di conseguenza, ogni linguaggio Turing-riconoscibile è riconosciuto da una TM salva-nastro.

Per dimostrare che ogni linguaggio riconosciuto da una TM salva-nastro è Turing-riconoscibile, mostriamo come convertire una macchina di Turing salva-nastro M in una TM deterministica a nastro singolo S equivalente.

$S =$ "Su input w:

1. Inizialmente S mette il suo nastro in un formato che gli consente di implementare l'operazione di salto al centro della parte non vuota del nastro, usando il simbolo speciale # per marcare l'inizio del nastro. Se w è l'input della TM, la configurazione iniziale del nastro è $\#w$.
2. La simulazione delle mosse del tipo $\delta(q, a) = (r, b, L)$ procede come nella TM standard: S scrive b sul nastro e muove la testina di una cella a sinistra. Se lo spostamento a sinistra porta la testina sopra il # che marca l'inizio del nastro, S si muove immediatamente di una cella a destra, lasciando inalterato il #. La simulazione continua con la testina in corrispondenza del simbolo subito dopo il #.
3. La simulazione delle mosse del tipo $\delta(q, a) = (r, b, R)$ procede come nella TM standard: S scrive b sul nastro e muove la testina di una cella a destra.
4. Per simulare una mossa del tipo $\delta(q, a) = (r, b, J)$ la TM S scrive b nella cella corrente, e poi sposta la testina a sinistra fino a ritornare in corrispondenza del # che marca l'inizio del nastro. A questo punto si sposta a destra: se il simbolo dopo il # è un blank, la simulazione continua con la testina in corrispondenza del blank. Se il simbolo dopo il # è diverso dal blank, la TM lo marca con un pallino, poi si sposta a destra fino ad arrivare al primo blank. Dopodiché marca l'ultimo cella non vuota prima del blank e procede a zig-zag, marcando via via una cella all'inizio e una alla fine della porzione di nastro non vuota. Quando la prossima cella da marcare è una cella che è già stata marcata, allora la TM si sposta a sinistra, e marca la cella con un simbolo diverso, come una barra. Poi scorre il nastro per togliere tutti i pallini, e riprende la simulazione con la testina in corrispondenza della cella marcata con la barra.
5. Se in qualsiasi momento la simulazione raggiunge lo stato di accettazione di M, allora S termina con accettazione. Se in qualsiasi momento la simulazione raggiunge lo stato di rifiuto di M, allora S termina con rifiuto. Negli altri casi continua la simulazione dal punto 2."

2. **(12 punti)** Considera il problema di determinare se i linguaggi di due DFA sono l'uno il complemento dell'altro.

(a) Formula questo problema come un linguaggio $COMPLEMENT_{\text{DFA}}$.

(b) Dimostra che $COMPLEMENT_{\text{DFA}}$ è decidibile.

Soluzione.

(a) $COMPLEMENT_{\text{DFA}} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ sono DFA e } L(A) = \overline{L(B)}\}$

(b) La seguente macchina N usa la Turing machine M che decide EQ_{DFA} per decidere $COMPLEMENT_{\text{DFA}}$:

$N =$ "su input $\langle A, B\rangle$, dove A e B sono DFA:
1. Costruisci l'automa $\overline{B}$ che riconosce il complementare del linguaggio di B
2. Esegui M su input $\langle A, \overline{B}\rangle$, e ritorna lo stesso risultato di M."

Mostriamo che N è un decisore dimostrando che termina sempre e che ritorna il risultato corretto. Sappiamo che esiste un algoritmo per costruire il complementare di un DFA (basta invertire stati finali e stati non finali nella definizione dell'automa). Di conseguenza, il primo step di N termina sempre. Il secondo step termina sempre perché sappiamo che EQ_{DFA} è un linguaggio decidibile. Quindi N termina sempre la computazione.

Vediamo ora che N dà la risposta corretta:

- Se $\langle A, B\rangle \in COMPLEMENT_{\text{DFA}}$ allora $L(A) = \overline{L(B)}$, e di conseguenza $L(A) = L(\overline{B})$ perché $\overline{B}$ è il complementare di B. Quindi $\langle A, \overline{B}\rangle \in EQ_{\text{DFA}}$, e l'esecuzione di M terminerà con accettazione. N ritorna lo stesso risultato di M, quindi accetta.
- Viceversa, se $\langle A, B\rangle \notin COMPLEMENT_{\text{DFA}}$ allora $L(A) \neq \overline{L(B)}$, e di conseguenza $L(A) \neq L(\overline{B})$ perché $\overline{B}$ è il complementare di B. Quindi $\langle A, \overline{B}\rangle \notin EQ_{\text{DFA}}$, e l'esecuzione di M terminerà con rifiuto. N ritorna lo stesso risultato di M, quindi rifiuta.

3. **(12 punti)** Considera il seguente problema: data una TM M a nastro semi-infinito, determinare se esiste un input w su cui M sposta la testina alla destra della cella del nastro numero 2023.

(a) Formula questo problema come un linguaggio 2023_{TM}.

(b) Dimostra che il linguaggio 2023_{TM} è indecidibile.

Soluzione.

(a) $2023_{\text{TM}} = \{\langle M\rangle \mid M$ è una TM ed esiste input w su cui M sposta la testina a destra della cella numero $2023\}$.

(b) **Il linguaggio 2023_{TM} è decidibile**. Questa non è una scelta voluta, ma la conseguenza di un errore nella definizione dell'esercizio. Di conseguenza, per il punto (b) sono stati valutati solo i criteri "sintattici" nella definizione della riduzione e la chiarezza espositiva, stralciando i criteri che valutano la correttezza della riduzione e della dimostrazione. Il punteggio totale dell'esercizio 3 rimane 12, in modo da mantenere 36 punti totali per il compito.