Esercizi 10

Esercizi sulle serie

Esercizio 1. Risolvere i seguenti esercizi su serie, facendo ricorso al confronto con la serie geometrica o ai criteri di convergenza del rapporto o della radice (per serie a termini positivi).

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(\sqrt{1+\alpha})}{|1-\alpha|} \right)^n$$
converge.

2. Determinare il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^{5/2}}.$$

3. Dire per quali $\alpha \geq 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n + 5^n}{\alpha^n + 3^n}$$
converge.

4. Si studi la convergenza delle serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n^2}.$$

5. Determinare il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[9n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

6. Si consideri la successione
$$a_n = \frac{n! + 5 \cdot 3^n}{n + n^n}.$$
   (a) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
   (b) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

7. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2\sin\alpha)^n.$$

Esercizio 2. Risolvere i seguenti esercizi su serie a termini positivi, facendo ricorso ai criteri di convergenza del confronto asintotico (in particolare con la serie armonica generalizzata.)

1. Si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n}}.$$

2. Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\cosh \frac{1}{n^3} - 1\right)}{|\sin \frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{n^{4/3}}|}.$$

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \arctan \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

4. Si consideri la successione

$$a_n = \frac{\left| \frac{a}{n^{3/2}} - 6\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \frac{2}{n^2} \right|}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}$$

   (a) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Risolvere i seguenti esercizi sulla convergenza assoluta e semplice facendo ricorso eventualmente ai criteri di convergenza del confronto asintotico per le serie a termini positivi, e al criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno.

1. Studiare al variare di $\alpha > 0$ la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \left(1 - \cos \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

   Notare che $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

2. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1).$$

3. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sqrt[3]{n}} (1 + x^3)^n.$$