TIPO A: RADEMACHER/BERNOULLI (95% dei casi)

STEP 0: RICONOSCI IL TIPO

- **RADEMACHER:** $P(\xi_i = +1) = P(\xi_i = -1) = 1/2$
- **BERNOULLI:** $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = 0) = 1/2$

NUMERI MAGICI DA MEMORIZZARE:

RADEMACHER: $E[\xi_i] = 0$, $E[\xi_i^2] = 1$, $Var(\xi_i) = 1$, **$\xi_i^2 = 1$ SEMPRE** **BERNOULLI:** $E[\xi_i] = 1/2$, $E[\xi_i^2] = 1/2$, $Var(\xi_i) = 1/4$, **$\xi_i^2 = \xi_i$ SEMPRE**

PUNTO (i) - ALGORITMO MECCANICO:

STEP 1: Scrivi X = ... e Y = ... **STEP 2:** Calcola $E[X]$

- Sviluppa $X = \xi_1 \pm \xi_2 \pm ...$
- Applica $E[\xi_1 \pm \xi_2] = E[\xi_1] \pm E[\xi_2]$
- Sostituisci $E[\xi_i] = 0$ (Rademacher) o 1/2 (Bernoulli)

STEP 3: Calcola $E[X^2]$

- Sviluppa $X^2 = (\xi_1 \pm \xi_2 \pm ...)^2$
- **TRUCCO:** $\xi_i^2 = 1$ (Rademacher) o ξ_i (Bernoulli)
- **TRUCCO:** $E[\xi_i \cdot \xi_j] = 0$ (Rademacher) o 1/4 (Bernoulli) se $i \neq j$

STEP 4: $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$ **STEP 5:** Ripeti per Y

PUNTO (ii) - ALGORITMO MECCANICO:

STEP 1: $Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$ **STEP 2:** Calcola $X \cdot Y$ (moltiplica le espressioni) **STEP 3:** Applica $E[X \cdot Y]$ sviluppando tutti i prodotti **STEP 4:** Se $Cov(X,Y) = 0 \rightarrow$ INDIPENDENTI, altrimenti NO

PUNTO (iii) - ALGORITMO MECCANICO:

STEP 1: Elenca TUTTI i valori possibili:

- Rademacher: $\xi_i \in \{-1, +1\}$
- Bernoulli: $\xi_i \in \{0, 1\}$

STEP 2: Costruisci tabella:

```
ξ₁ | ξ₂ | ξ₃ | X | Y | P
-1 | -1 | -1 | ? | ? | 1/8
-1 | -1 | +1 | ? | ? | 1/8
... (8 righe totali)
```

STEP 3: Per ogni riga calcola X e Y **STEP 4:** Raggruppa per coppie (X,Y) e somma le probabilità

TIPO B: INDICATRICI DI COPPIE

Setup: X, Y indipendenti a valori in {0,1}, $Z = a\cdot 1_{(0,0)}(X,Y) + b\cdot 1_{(0,1),(1,0)}(X,Y) + c\cdot 1_{(1,1)}(X,Y)$

FORMULE BASE:

- **P(X=0) = 1-p, P(X=1) = p**
- **P(Y=0) = 1-q, P(Y=1) = q**
- **P(X=i,Y=j) = P(X=i)·P(Y=j)** (indipendenza)

SCHEMA PUNTI (i), (ii), (iii):

(i) E[Z] in termini di p, q:

- E[Z] = a·P(X=0,Y=0) + b·[P(X=0,Y=1) + P(X=1,Y=0)] + c·P(X=1,Y=1)
- E[Z] = a·(1-p)·(1-q) + b·[(1-p)·q + p·(1-q)] + c·p·q

(ii) Var[Z] in termini di p, q:

- $E[Z^2] = a^2\cdot(1-p)\cdot(1-q) + b^2\cdot[(1-p)\cdot q + p\cdot(1-q)] + c^2\cdot p\cdot q$
- $Var(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2$

(iii) Calcolo numerico con valori specifici

TIPO C: SUCCESSIONI MIN/MAX

Setup: $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. ~ Exp(λ), $M_n = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$ (o max)

FORMULE FONDAMENTALI:

- **$F_1(x) = (1 - e^{(-\lambda x)})\cdot 1_{(0,\infty)}(x)$** (CDF esponenziale)
- **$P(X_1 > x,\ldots,X_n > x) = [P(X_1 > x)]^n = [1-F_1(x)]^n$**

SCHEMA PUNTI (i), (ii), (iii):

(i) Esprimere $P(X_1 > x,...,X_n > x)$:

- $= \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = [1-F_1(x)]^n$

(ii) Calcolare F_n:

- **Per MIN:** $F_n(x) = P(M_n \leq x) = 1 - P(M_n > x) = 1 - [1-F_1(x)]^n$
- **Per MAX:** $G_n(x) = P(M_n \leq x) = [F_1(x)]^n$

(iii) Convergenza in distribuzione:

- Dimostrare che $F_n(x) \to G(x)$ per qualche G

TIPO D: TRASFORMAZIONE UNIFORME

Setup: $\xi \sim \text{Unif}[0,1]$, trova $\Psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ tale che $Y = \Psi(\xi)$ abbia distribuzione data

METODO INVERSO:

1. **Definisci intervalli:** $[0, p_1)$, $[p_1, p_1+p_2)$, ..., dove $p_i = P(Y = y_i)$
2. **Costruisci Ψ:**
   - $\Psi(u) = y_1$ se $u \in [0, p_1)$
   - $\Psi(u) = y_2$ se $u \in [p_1, p_1+p_2)$
   - ...

RICETTE MECCANICHE:

QUANDO VEDI $(\xi_1 - \xi_2)^2$:

- **Rademacher:** $= \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 = 1 - 2\xi_1\xi_2 + 1 = 2 - 2\xi_1\xi_2$
- **Bernoulli:** $= \xi_1 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2$

QUANDO VEDI $\xi_1 \cdot \xi_2$ (con $i\neq j$):

- **Rademacher:** $E[\xi_1 \cdot \xi_2] = E[\xi_1] \cdot E[\xi_2] = 0 \cdot 0 = 0$
- **Bernoulli:** $E[\xi_1 \cdot \xi_2] = E[\xi_1] \cdot E[\xi_2] = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

QUANDO VEDI $\xi_1 \cdot (\xi_1 + \xi_2)$:

- **Sempre:** $= \xi_1^2 + \xi_1\xi_2$

- **Rademacher:** = $1 + \xi_1\xi_2$
- **Bernoulli:** = $\xi_1 + \xi_1\xi_2$

REGOLA D'ORO:

- **Covarianza = 0** → INDIPENDENTI
- **Covarianza ≠ 0** → NON INDIPENDENTI
- **Fine. Non pensare.**