Concetti Fondamentali

Definizione di Derivata

La derivata di una funzione $f(x)$ nel punto x_0 è definita come:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Questo limite, se esiste, rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Rapporto Incrementale

Il rapporto incrementale di una funzione $f(x)$ nel punto x_0 con incremento h è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta secante passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Derivata Destra e Sinistra

- **Derivata destra**: $f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **Derivata sinistra**: $f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Una funzione è derivabile in x_0 se e solo se esistono entrambe le derivate destra e sinistra e sono uguali tra loro.

Derivate Fondamentali

Funzione	Derivata
$f(x) = c$ (costante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Funzione	Derivata
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Regole di Derivazione

Linearità

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ dove k è una costante

Prodotto

Se $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, allora:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quoziente

Se $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, allora:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Funzione Composta (Regola della Catena)

Se $h(x) = f(g(x))$, allora:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Interpretazione Geometrica

La derivata $f'(x_0)$ rappresenta:

- La pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x_0, f(x_0))$
- Il tasso di variazione istantanea della funzione f rispetto a x nel punto x_0

Punti di non derivabilità

Una funzione può non essere derivabile in un punto x_0 quando:

1. Il grafico presenta una cuspide in x_0
2. Il grafico presenta un punto angoloso in x_0
3. La funzione presenta una discontinuità in x_0
4. La tangente al grafico in x_0 è verticale

Applicazioni delle Derivate

1. **Crescenza e decrescenza**:
   - Se $f'(x) > 0$ in un intervallo, $f(x)$ è crescente in quell'intervallo
   - Se $f'(x) < 0$ in un intervallo, $f(x)$ è decrescente in quell'intervallo
2. **Punti stazionari**: Sono i punti in cui $f'(x) = 0$. Possono essere:
   - Massimi relativi: se $f'(x)$ passa da positiva a negativa
   - Minimi relativi: se $f'(x)$ passa da negativa a positiva
   - Punti di flesso a tangente orizzontale: se $f'(x)$ non cambia segno
3. **Concavità e convessità**:
   - Se $f''(x) > 0$ in un intervallo, il grafico è concavo verso l'alto
   - Se $f''(x) < 0$ in un intervallo, il grafico è concavo verso il basso
   - I punti in cui $f''(x) = 0$ e $f''(x)$ cambia segno sono flessi