Esercizio 1

Sia X una variabile aleatoria reale su (Ω, 𝒯, P). Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono):

(i) X è una variabile aleatoria discreta tale che P(X = -2) = 1/8, P(X = 1) = 3/8, P(X = 3) = 1/4, P(X = 5) = 1/4;

(ii) X ha funzione di ripartizione FX *data da F_X(x) = (x³/27) · 1*(0,3)(x) + 1_[3,∞)(x), x ∈ ℝ;

(iii) X = 2 + e^Y per una variabile aleatoria Y esponenziale di parametro tre.

DISCENDONO...

$$E[X] = -2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4}$$

$$E[X^2] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1)^2 \cdot \frac{3}{8} \;\ldots$$

$$\mathrm{var}(X) = E[X^2] - [E(X)]^2 = \ldots$$

~~NO~~

GOOD!

≥ 0

$\cancel{\leq 0}$

② $$\underline{F(x)} = \frac{x^3}{27} \cdot \mathbb{1}_{(0,3)}(x) + \mathbb{1}_{(3,\infty)}\Big]\Big)$$

RIPARTIZIONE

$$f'(x) = \frac{1}{27} \cdot x^3 = \frac{1}{\cancel{27}_{9}} \cdot \cancel{3}^{1} x^2 = \frac{1}{9} x^2$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underline{f_X(x)}\, dx = \int_0^3 x \cdot \frac{1}{9} x^2\, dx$$

DENSITÀ

$$= \frac{1}{9} \int_0^3 x^3\, dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^3 \to F(b) - F(a)$$

$$E[X^2] = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{9} x^2\, dx \;\ldots$$

$\text{var}(x) \dots > 0$

(iii) $x = 2 + e^{x} \to x = 3$

$f(x) = x \cdot e^{-x} = 3 \cdot e^{-3} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$

$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} \cdot f_{Y}(x)\,dx = \int_{0}^{3} e^{x}[2 + (3 \cdot e^{-3})]\,dx$

$= 2\int_{0}^{3} e^{x} + 3\int_{0}^{3} e^{-3x}\,dx = \int e^{-3x}\,dx$

CAMBIO VARIABILE

$t = -3x$

$\frac{dt}{-3} = \frac{-3\,dx}{-3}$

$-\frac{1}{3}dt = dx$

$= 2[e^{x}]_{0}^{3} + -\frac{1}{3}\int_{0}^{-9} e^{t}\,dt$

$(-3x)$: $0 \to -3 \cdot 0 = 0$; $3 \to -3 \cdot 3 = -9$

$= 2[e^{3} - e^{0}] - \frac{1}{3}(e^{-9} - e^{0}) \dots$

Esercizio 2

Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2. Poniamo

$X(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) + \xi_3(\omega)),\ Y(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) - \xi_3(\omega)),\ \omega \in \Omega.$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

$$X(\omega) = \varepsilon_1(\omega) \cdot (\varepsilon_2(\omega) + \varepsilon_3(\omega))$$

$$E[X] = E[\varepsilon_1 \cdot (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] =$$

$$= E[\varepsilon_1 \varepsilon_2 + E[\varepsilon_1 \varepsilon_3)] = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} E(\varepsilon_i) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ E(\varepsilon_i)^2 = \text{---} = 1 \end{array}\right]$$

$$Y = \varepsilon_1 \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 0$$

$$E[X^2] = (\varepsilon_1 \cdot (\varepsilon_2 + \varepsilon_3))^2$$

$$\overset{!}{=} \varepsilon_1^2 \cdot (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2$$

$$= \varepsilon_1^2 \cdot (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3)$$

$$= \underbrace{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}_{1} + \underbrace{\varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2}_{1} + \underbrace{\overset{1}{\varepsilon_1^2} \overset{0}{(2\varepsilon_1 \varepsilon_3)}}_{0}$$

$$\underbrace{1 \quad 1}_{2}$$

(II) $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \ldots$

$$\overset{!}{=} \ldots\ldots \quad E(XY) = 0$$

$\mathrm{COV}(X,Y) = 0 \rightarrow$ INCORRELATE MA NON INDIPENDENTI

Esatto! Per dimostrare che **non sono indipendenti** quando `Cov(X,Y) = 0`, basta trovare **un controesempio**

Strategia per il punto (ii):

Se `Cov(X,Y) = 0`:
- Le variabili sono **INCORRELATE**
- Ma questo **NON implica indipendenza**

Per dimostrare NON indipendenza:
Basta trovare **una coppia (x,y)** tale che:

```
P(X = x, Y = y) ≠ P(X = x) · P(Y = y)
```

Esempio pratico negli esercizi tipo:

Quando hai la **legge congiunta** (tabella), prendi una cella qualsiasi e verifica:

X\Y	-2	0	2
-2	1/8	0	1/8
0	0	1/4	0
2	1/8	0	1/8

Controesempio:
- `P(X = -2, Y = -2) = 1/8`
- `P(X = -2) = 1/4`, `P(Y = -2) = 1/4`
- `P(X = -2) · P(Y = -2) = 1/16`
- `1/8 ≠ 1/16` ✓

Conclusione: Incorrelate ma NON indipendenti.

Regola pratica: Covarianza zero + un controesempio = dimostrazione completa di non indipendenza.

Esercizio 2

Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2. Poniamo

$X(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) + \xi_3(\omega))$, $Y(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_2(\omega) - \xi_3(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

$\rightarrow$ (iii)

$$X = \underset{1}{\underline{\varepsilon_1}} \cdot (\underset{1}{\underline{\varepsilon_2}} + \underset{(-1)}{\underline{\varepsilon_3}}) = 2$$
$$= -2$$
$$= 0$$

ε_1	ε_2	ε_3	X	Y
1	1	1	2	0
-1	1	1	-2	0
1	-1	1	.	.
1	1	-1	⋮	⋮
-1	-1	1		
1	-1	1		
-1	1	-1		
-1	-1	-1		
1	-1	-1		

$X = \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$

$Y = \varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$

(ASSUNTO)
ANSATZ

$\downarrow$

L'HO FATTO!

$\downarrow$

CONGIUNTA

$\downarrow$

$P(X = x, Y = y) =$

1 ESEMPIO $\to P(X = 2, Y = 0)$

$P(X=2, Y=0) = P(\xi_1(\xi_2 + \xi_3) = 2, \xi_3(\xi_1 + \xi_2) = 0)$

$$
\begin{aligned}
\underline{P(X=2,}\ Y=0) &= P(\xi_1=+1,\ \xi_2=+1,\ \xi_3=+1,\ \xi_1+\xi_2=0)\\
&= P(\xi_1=+1,\ \xi_2=+1,\ \xi_3=+1,\ +1+1=0)\\
&= P(\xi_1=+1,\ \xi_2=+1,\ \xi_3=+1,\ 2=0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$(\varepsilon_1 = 1;\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1) \quad \bullet \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$(\varepsilon_1 = 1 \cdot \varepsilon_2 = 1\ \ \varepsilon_3 = -1)$ ✓ PER FARE Ø DOVREBBERO ESSERE DIVERSI MA NON POSSIBILE

✗ Ø

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{1100}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro 1/550. Poniamo

$S(\omega) = \sum_{i=1}^{1100} X_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $N = \min\{n \in \mathbb{N} : P(S \le n) \ge 0.97\}$.

Si dia una stima per N in tre modi diversi, usando:

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson (legge dei piccoli numeri);

c) l'approssimazione normale.

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{1100} X(\omega) \sim Ber\left(\frac{1}{550}\right)$$

$$E[X_i] = \left.\frac{1}{550}\right) \quad P = \frac{1}{550}$$

$$E[S] = \underbrace{\frac{1}{550}}_{p} \cdot \underbrace{1100}_{n} = 2$$

$$var(X_i) = p \cdot (1-p) = \frac{1}{550}\left(1 - \frac{1}{550}\right)$$

$p(1-p)\cdot S$ $= \frac{1}{550}\left(\cdot \frac{549}{550}\right)$

$$\mathrm{var}(S) = \overset{1\ 2}{\cancel{1100}} \cdot \frac{1}{\underset{275}{\cancel{550}}} \cdot \frac{549}{\underset{1}{\cancel{550}}} = \frac{549}{275}$$