Soluzione esercizi sulle serie ~~[illegible]~~

Esercizio 1

1) è una serie geometrica del tipo $\sum_n r^n$ con

$$r = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{|1-\alpha|} \qquad \text{con } r \geq 0$$

Dunque converge se $\frac{\sqrt{1+\alpha}}{|1-\alpha|} < 1$, mentre diverge se $\frac{\sqrt{1+\alpha}}{|1-\alpha|} \geq 1$

$$\frac{\sqrt{1+\alpha}}{|1-\alpha|} - 1 < 0 \iff \frac{\sqrt{1+\alpha} - |1-\alpha|}{|1-\alpha|} < 0 \iff \sqrt{1+\alpha} < |1-\alpha| \iff$$

purché $\boxed{1+\alpha \geq 0}$

elevo entrambi al quadrato (sono positivi!)

$$1+\alpha < 1+\alpha^2 - 2\alpha \iff \alpha^2 - 3\alpha > 0 \qquad \alpha(\alpha-3) \geq 0 \quad \begin{array}{c|c|c} & 0 & 3 \\ + & - & + \end{array}$$

$\boxed{\alpha > 3,\ \alpha < 0}$ $\quad$ C.E $\alpha \geq -1$ $\Longrightarrow$ $\alpha > 3$ e $-1 < \alpha < 0$

La serie converge se $\alpha > 3$ oppure ~~[illegible]~~ $-1<\alpha<0$ e diverge se $\alpha \in [0, 3]$ ~~[illegible]~~

2) $\sum_n 3^n \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^{5/2}}$ è una serie a termini positivi.

Applico criterio della radice

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^{3/2}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_n 3 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^{3/2}}}_{e^{-1}} = \frac{3}{e} > 1$$

Dunque diverge.

3) $\sum_n \frac{n2^n + 5^n}{\alpha^n + 3^n}$ è una serie a termini positivi applico il criterio della radice

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \left(\frac{n2^n + 5^n}{\alpha^n + 3^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

NUMERATORE $\quad n2^n + 5^n = 5^n \Big[\underbrace{n\left(\tfrac{2}{5}\right)^n + 1}_{\to 1}\Big]$ $\qquad \left(n \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^n \to 0!\right)$

DENOMINATORE $\quad \alpha^n + 3^n = \begin{cases} 2 \cdot 3^n & \alpha = 3 \\ \alpha^n \Big(\underbrace{1 + \left(\tfrac{3}{\alpha}\right)^n}_{\to 1}\Big) & \alpha > 3 \\ 3^n \Big(\underbrace{\left(\tfrac{\alpha}{3}\right)^n + 1}_{\to 1}\Big) & \alpha < 3 \end{cases}$

Dunque $\alpha=3$ $\lim_n \frac{(5^n)^{1/n}(n(\frac{2}{5})^n+1)^{1/n}}{2^{1/n}(3^n)^{1/n}} = \lim_n \frac{5}{3}\boxed{\frac{(n(\frac{2}{5})^n+1)^{1/n}}{2^{1/n}}}_{\to 1} = \frac{5}{3} > 1$ (2)

$\alpha>3$ $\lim_n \frac{5\,[n(\frac{2}{5})^n+1]^{1/n}}{\alpha\,[1+(\frac{3}{\alpha})^n]^{1/n}} = \frac{5}{\alpha}$ $\begin{cases} >1 & \text{se } 5>\alpha \\ =1 & 5=\alpha \\ <1 & 5<\alpha \end{cases}$

$\alpha<3$ $\lim_n \frac{5\,[n(\frac{2}{5})^n+1]^{1/n}}{3\,(1+(\frac{\alpha}{3})^n)^{1/n}} = \frac{5}{3} > 1$

Dunque se $\boxed{\alpha<5}$ il limite è $>1 \Rightarrow$ LA SERIE DIVERGE

se $\boxed{\alpha>5}$ " " è $<1 \Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE

per $\underline{\alpha=5}$ il criterio non dà informazioni.

La serie diventa $\sum_n \left(\frac{n\,2^n+5^n}{5^n+3^n}\right)$

$\lim_n a_n = \lim_n \frac{\cancel{5^n}(n(\frac{2}{5})^n+1)}{\cancel{5^n}(1+(\frac{3}{5})^n)} = 1 \neq 0$ la serie diverge perché non è soddisfatta condiz. necessaria per la convergenza

4) Sono serie a termini positivi, applico criterio della radice. $a_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n}$ $b_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n^2}$

$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \left(1-\frac{1}{2n}\right)^5 = 1$

ma $\lim_n a_n = \lim_n \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n} = e^{-5/2} \neq 0$ la serie diverge

$\lim_n \sqrt[n]{b_n} = \lim_n \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n} = e^{-5/2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

La prima serie diverge (non è soddisfatta la condizione necessaria) mentre la seconda converge

5) applico criterio della radice (3)

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n 9n^3 \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_n 9n^3 \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \lim_n \frac{9}{6}\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}\left(1+o(1)\right)$$

$$= \frac{3}{2} > 1.$$

Diverge per il criterio della radice.

6) a) $$\lim_n \frac{n! + 5\,3^n}{n + n^n} = \lim_n \frac{n!\,\overbrace{\left(1 + 5\frac{3^n}{n!}\right)}^{\to 1}}{n^n\,\underbrace{\left(\frac{n}{n^n} + 1\right)}_{\to 1}} = 0$$ per confronto infiniti

b) applico criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)! + 5\,3^{n+1}}{n+1 + (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n + n^n}{n! + 5\,3^n} =$$

$$= \lim_n \frac{\cancel{(n+1)!}\left(1 + 5\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{(n+1)^{n\cancel{+1}}\left[\frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} + 1\right]} \cdot \frac{n^n\left(\frac{n}{n^n}+1\right)}{\cancel{n!}\left(1 + 5\frac{3^n}{n!}\right)} =$$

$$= \lim_n \frac{n^n}{(n+1)^n} \underbrace{\frac{\left(1+5\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\right)\left(\frac{n}{n^n}+1\right)}{\left(\frac{n+1}{(n+1)^{n+1}}+1\right)\left(1+5\frac{3^n}{n!}\right)}}_{\to 1} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\left(\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{e} < 1.$$

converge per il criterio del rapporto.

7) è una serie geometrica del tipo $\sum x^n$ con $x = 2\sin\alpha$

Converge se $|2\sin\alpha| < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{6} + k\pi$

diverge se $2\sin\alpha \geq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

è irregolare se $2\sin\alpha \leq -1 \Rightarrow -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < \alpha < -\pi/6 + 2k\pi$

Soluzione esercizi sulle serie - ~~foglio~~ Eserc. 2

Es 1

1) $$\sqrt{n^2+1}-n = \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

→ serie arm. generalizzata $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ converge

per il criterio del confronto asintotico, la serie converge dato che è asintotica alla serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ che è convergente.

2) $$\cosh\frac{1}{n^3} - 1 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 = \frac{1}{2}\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) - \frac{1}{n^{4/3}}\right| = \left|\cancel{\frac{1}{n^{4/3}}} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)^3 - \cancel{\frac{1}{n^{4/3}}}\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right| = \frac{1}{n^4}\left|-\frac{1}{6}+o(1)\right|$$

$$\frac{\cosh\frac{1}{n^3}-1}{\left|\sin\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) - \frac{1}{n^{4/3}}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{\left|-\frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right|} = \frac{\frac{1}{n^6}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\frac{1}{n^4}\left|-\frac{1}{6}+o(1)\right|} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\left|-\frac{1}{6}+o(1)\right|} \sim \frac{1}{n^2}$$

per il criterio del confronto asintotico la serie è convergente (dato che è asintotica alla serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{n^2}$)

3) $$\frac{1}{n^\alpha}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^\alpha}\left[\frac{3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[3+o(1)\right]$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\left(3+o(1)\right) \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico la serie è <u>convergente</u> se $\alpha+\frac{1}{2}>1 \iff \alpha>\frac{1}{2}$

<u>divergente</u> se $\alpha+\frac{1}{2}\leq 1 \iff \alpha\leq\frac{1}{2}$.

4) a) Studio numeratore

$$\left|\frac{a}{n^{3/2}}-6\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2}{n^2}\right|=\left|\frac{a}{n^{3/2}}-6\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right]-\frac{2}{n^2}\right|=$$

$$=\left|\frac{a}{n^{3/2}}-\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{2}{n^2}\right|=\begin{cases}\left|-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| & a=1\\ \left|\frac{a-1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| & a\neq 1\end{cases}$$

denominatore $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1=\cancel{1}+\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\cancel{1}=\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

se $a=1$

$$\lim_n a_n=\lim_n\frac{\left|-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_n\frac{\frac{1}{n^2}\left|-2+o(1)\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+o(1)\right)}=0$$

se $a\neq 1$

$$\lim_n a_n=\lim_n\frac{\left|\frac{a-1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_n\frac{\frac{1}{n^{3/2}}\left|a-1+o(1)\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+o(1)\right)}=0$$

il limite di a_n è sempre 0.

b) $a\neq 1$ $\quad a_n=\dfrac{\frac{1}{n^{3/2}}\left|a-1+o(1)\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+o(1)\right)}=\dfrac{1}{n}\dfrac{\left|a-1+o(1)\right|}{\left(1+o(1)\right)}\sim\dfrac{1}{n}$

$a=1$ $\quad a_n=\dfrac{\frac{1}{n^2}\left|-2+o(1)\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+o(1)\right)}=\dfrac{1}{n^{3/2}}\dfrac{\left|-2+o(1)\right|}{1+o(1)}\sim\dfrac{1}{n^{3/2}}$

Dunque per il confronto asintotico la serie converge se $a=1$, diverge se $a\neq 1$.

Es 3 1) $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ③

Studio la convergenza assoluta

$$\left|\cos(n\pi)\left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)\right| = \left|1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right| = \left|1-1+\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right|$$

$|a_n| \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ dunque la serie converge assolutamente (per criterio del confronto asintotico) se $2\alpha > 1$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$ mentre diverge assolutam. se $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Se $\alpha > \frac{1}{2}$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Se $\alpha \leq \frac{1}{2}$ la serie diverge assolutamente.

Studio la convergenza semplice

$$a_n = \cos(n\pi)\left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right) = (-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

serie a termini di segno alterno.

Applico Leibniz. $\cdot \lim_n \left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right) = 0$

inoltre $1-\cos\frac{1}{n^\alpha}$ è decrescente $\forall \alpha > 0$.

dunque la serie converge semplic. per ogni $\alpha > 0$

2) Studio conv. assoluta

$$|a_n| = \sqrt[n]{3}-1 = e^{\frac{1}{n}\lg 3}-1 = \frac{1}{n}\lg 3 \sim \frac{1}{n}$$

la serie diverge assolutam. (per criterio del confronto asintotico).

Studio conv. semplice con Leibniz.

$\lim_n \sqrt[n]{3}-1 = 0$ inoltre $\sqrt[n]{3}-1$ è decrescente

dunque $\sum a_n$ è convergente semplicemente per il criterio di Leibniz

~~3)~~ $\cancel{\sum_n \frac{1}{2\sqrt{n}}(1+x^3)^n}$.

Es 3 $\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt[3]{n}} (1+x^3)^n$

Studio la converg. assoluta

$$|a_n| = \frac{1}{2^n \sqrt[3]{n}} |1+x^3|^n .$$

criterio della radice $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{|1+x^3|}{2 \underbrace{(n)^{3/n}}_{\downarrow 1}} = \frac{|1+x^3|}{2}$

Dunque se $|1+x^3| < 2$ la serie converge assolutamente e anche semplicemente

se $|1+x^3| > 2$ la serie diverge assolutam.

se $|1+x^3| = 2$ il criterio non dà informazioni

$$|1+x^3| < 2 \iff \begin{cases} 1+x^3 < 2 \\ 1+x^3 > -2 \end{cases} \begin{cases} x^3 < 1 \\ x^3 > -3 \end{cases} \iff -\sqrt[3]{3} < x < 1$$

Se $|1+x^3| = 2$ considero la serie $|a_n| = \frac{|1+x^3|^n}{2^n \sqrt[3]{n}} = \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \sqrt[3]{n}}$

$|a_n| = \frac{1}{n^{1/3}} \Rightarrow$ la serie diverge perché è una serie armonica con $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.

Dunque riassumendo:

conv. assoluta

$-\sqrt[3]{3} < x < 1$ la serie converge assolutam. (e anche semplicemente)

$x \geq 1$ o $x \leq -\sqrt[3]{3}$ la serie diverge assolutamente

Studio la conv. semplice

5

se $-\sqrt[3]{3} < x < 1$ la serie converge semplicemente.

se $x > 1$ o $x < -\sqrt[3]{3}$ $\Rightarrow \lim_n a_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie non converge

(non è soddisfatta la condizione necessaria).

anzi se $x > 1$ la serie diverge e se $x < -\sqrt[3]{3}$ la serie è irregolare.

se $x = 1$ $a_n = \frac{(1+1)^n}{2^n \sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{1/3}} \Rightarrow$ la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata.

se $x = -\sqrt[3]{3} \Rightarrow a_n = \frac{(1-3)^n}{2^n \sqrt[3]{n}} = \frac{(-1)^n \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \sqrt[3]{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

$\lim_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ e $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \Rightarrow$

quindi la serie converge per Leibniz.

CONV. SEMPLICE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \text{CONVERGE} & -\sqrt[3]{3} \leq x < 1 \\ \text{DIVERGE} & x \geq 1 \\ \text{IRREGOLARE} & x < -\sqrt[3]{3}. \end{cases}$$