Modellazioni

1. Un'agenzia turistica deve organizzare la risalita dei suoi clienti sciatori dal Parcheggio a Cortina alla Pista dei Cacciatori. I clienti sono il Gruppo 1, composto da 30 persone, il Gruppo 2, composto da 40 persone, e altri 30 sciatori individuali. La risalita è composta da due tratte, la prima dal parcheggio a Piè Tofana, la seconda da Piè Tofana alla Pista. Per la prima tratta sono disponibili, in alternativa, la funivia A, la cabinovia B e la sciovia C. Per la seconda tratta, le alternative sono la seggiovia D e l'ovovia E. Le caratteristiche delle diverse modalità sono riportate nella seguente tabella:

	A	B	C	D	E
Capacità	50	40	30	60	40
Costo (euro a persona individuale)	20	15	10	15	25
Costo (euro a persona in un gruppo)	16	12	8	12	20
Tempo (minuti)	15	10	20	15	10

Le persone in uno stesso gruppo devono viaggiare insieme e, inoltre, si vuole che il tempo complessivo della risalita lungo le due tratte sia, per ciascun gruppo, al massimo di 30 minuti. L'agenzia non vuole far spendere ai suoi clienti, complessivamente, più di 2750 euro. Scrivere il modello di programmazione lineare per stabilire come assegnare i gruppi e i clienti individuali ai diversi impianti in modo da minimizzare la differenza tra i tempi di risalita dei due gruppi, tenendo conto che:

- almeno 10 sciatori individuali vogliono utilizzare l'impianto D sulla seconda tratta;
- gli sciatori individuali non possono utilizzare l'impianto A, se questo è utilizzato anche dal gruppo 1.

1. Una ludoteca vuole rinnovare il parco dei giocattoli disponibili, ricomponendo in modo diverso le parti dei vecchi giocattoli. I vecchi giocattoli sono divisi in tre tipi: il tipo "1" è composto da 4 ruote, un corpo centrale e una marmitta; il tipo "2" da 3 ruote, un corpo centrale e 2 ali; il tipo "3" da 6 ruote, 2 corpi centrali e 3 personaggi. I nuovi giocattoli saranno di tre tipi e composti come segue: il tipo "A" con 2 ruote, un personaggio e un corpo centrale; il tipo "B" con 3 ruote, due corpi centrali, 2 personaggi e una marmitta; il tipo "C" con un corpo centrale, un'ala e una ruota. Sono disponibili 20, 30 e 15 giocattoli del tipo 1, 2 e 3, rispettivamente. Le operazioni di smontaggio dei vecchi giocattoli richiedono 15, 10 e 20 minuti per il tipo 1, 2 e 3, rispettivamente, e le operazioni di montaggio dei tipi A, B e C richiedono, rispettivamente, 15, 25 e 20 minuti. Tutte le operazioni saranno svolte da volontari, che mettono a disposizione 25 ore in tutto. Ciascun giocattolo di tipo A, B o C ha un indice di gradimento pari a 2, 9 e 3, rispettivamente. Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare il massimo indice di gradimento complessivamente ottenibile dai giocattoli ricombinati che saranno disponibili nella ludoteca, tenendo conto che:

- si vuole disporre di almeno 7 giocattoli di tipo A e 8 di tipo C;
- si vuole che rimangano almeno 12 dei vecchi giochi, complessivamente;
- per almeno due dei tipi A, B o C si vuole disporre di almeno 10 giocattoli di quel tipo;
- in caso di mancanza di personaggi, sarà possibile reperirne un numero sufficiente in una ludoteca gemellata, che però è distante e occupa due ore di disponibilità di un volontario per andare a prenderli;
- è possibile montare giocattoli di tipo B solo con la consulenza di un negozio di giocattoli, che verrà ricompensata, nel caso, con 3 giocattoli di tipo A, 2 di tipo B e 5 di tipo C.

Simplesso

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & x_1 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & - & 2\,x_3 & \leq & 1 \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
& x_1 & & & - & 2\,x_3 & \geq & -4
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;
b) cosa possiamo dire sulla soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo direttamente a partire dal risultato del punto precedente?

AMPL

6. Si consideri il seguente modello di programmazione lineare relativo a un problema di produzione di un insieme di prodotti K, da realizzare con materie prime nell'insieme J, fornite da fornitori nell'insieme I. Sono definiti i parametri: P_k (prezzo di vendita del prodotto k), C_{ij} (costo unitario della materia prima j presso il fornitore i), F_i (costo fisso per fornirsi dal fornitore i), Q_{jk} (quantità di materia j consumata da un'unità di prodotto k), M_i (limite massimo agli acquisti dal fornitore i), e B (budget disponibile).

$$
\begin{aligned}
\max \; & \sum_{k \in K} P_k\, x_k \\
\text{s.t.} \; & \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij}\, y_{ij} + \sum_{i \in I} F_i\, z_i \le B \\
& \sum_{i \in I} y_{ij} \ge \sum_{k \in K} Q_{jk}\, x_k \quad , \forall j \in J \\
& \sum_{j \in J} y_{ij} \le M_i\, z_i \quad , \quad \forall i \in I \\
& x_k \in \mathbb{Z}_+, y_{ij} \in \mathbb{R}_+, \; z_i \in \{0,1\}, \\
& \qquad \forall i \in I, \; j \in J, \; k \in k
\end{aligned}
$$

a. Si traduca nel linguaggio **AMPL** il modello proposto (**file .mod**).

b. Si produca un **file .dat** di esempio per 3 fornitori, 2 materie prime e 3 prodotti.

c. Si scriva uno script di AMPL (**file .run**) che risolve l'istanza specificata e visualizza il valore della funzione obiettivo e delle variabili per una soluzione ottima.

Dualità

4. a) Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale.

b) Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -2, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \ge & -5 \\
& x_1 & + & 2x_2 & & & & & \le & 1 \\
& x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\
& x_1 \text{ libera} & & x_2 \text{ libera} & & x_3 \le 0 & & x_4 \ge 0 & &
\end{array}
$$