(Dipendenza e indipendenza lineare)

1.[1] Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi (a coefficienti reali) nella variable x di grado ≤ 3. Si verifichi che gli insiemi seguenti sono delle basi di V:

(a) $\{1, x, x^2, x^3\}$
(b) $\{1, 1-x, x-x^2, x^2-x^3\}$
(c) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$

(a) {1, x, x^2, x^3}:

Linearmente indipendenza:
Gli elementi dell'insieme sono tutti polinomi di gradi diversi, quindi per dimostrare la linearmente indipendenza, consideriamo l'equazione:

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 = 0$$

dove a, b, c, d sono coefficienti reali. Poiché i polinomi sono diversi e non possono essere ridotti uno all'altro, l'unico modo in cui l'equazione può essere soddisfatta è quando tutti i coefficienti sono nulli ($a = b = c = d = 0$). Quindi, gli elementi sono linearmente indipendenti.

Generazione:
Ogni polinomio di grado ≤ 3 può essere espresso come combinazione lineare dei polinomi $1, x, x^2$ e x^3, ad esempio, un polinomio $ax^2 + bx^3$ può essere ottenuto da $x^2 \cdot a + x^3 \cdot b$, dove a e b sono coefficienti reali. Quindi, l'insieme genera V.

Poiché l'insieme è sia linearmente indipendente che genera V, è una base di V.

(b) {1, 1-x, x-x^2, x^2-x^3}:

Linearmente indipendenza:
Osserviamo che ogni polinomio nell'insieme può essere ottenuto come differenza di polinomi consecutivi. Ad esempio, $1 - x$ è la differenza di 1 e x, $x - x^2$ è la differenza di x e x^2, e così via. Questo implica che c'è una dipendenza lineare tra gli elementi, quindi l'insieme non è linearmente indipendente.

Generazione:
Nonostante la mancanza di linearmente indipendenza, possiamo ancora ottenere ogni polinomio di grado ≤ 3 combinando i polinomi nell'insieme. Ad esempio, $x^2 - x^3$ può essere ottenuto come $(x^2 - x) + (x - x^3)$. Quindi, l'insieme genera V.

Poiché l'insieme non è linearmente indipendente, non può essere una base di V.

(c) {1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3}:

Linearmente indipendenza:
Ogni elemento nell'insieme è un polinomio con coefficienti diversi, quindi l'insieme è linearmente indipendente.

Generazione:
Ogni polinomio di grado ≤ 3 può essere ottenuto sommando i polinomi nell'insieme. Ad esempio, il polinomio $ax^2 + bx^3$ può essere ottenuto come $x^2 \cdot a + x^3 \cdot b$, dove a e b sono coefficienti reali. Quindi, l'insieme genera V.

Poiché l'insieme è sia linearmente indipendente che genera V, è una base di V.

2.[1] Si dica se è possibile estrarre dal sottoinsieme $\mathcal{C}$ delle basi di V nei seguenti casi:

(a)[1] Lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 2 con sottoinsieme $\mathcal{C} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ dove

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 + x(1-x) + (1-x)^2 \\ p_2(x) &= x^2 + (1-x)^2 \\ p_3(x) &= x^2 + 1 + (1-x)^2 \\ p_4(x) &= x(1-x). \end{aligned}$$

Per verificare se è possibile estrarre una base dal sottoinsieme C nello spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 2, dobbiamo analizzare i polinomi in C per determinare se sono linearmente indipendenti. Se sono linearmente indipendenti, allora possiamo estrarre una base dal sottoinsieme C. In caso contrario, dovremo cercare di combinare i polinomi in C in modo da ottenere una base.

Gli elementi del sottoinsieme C sono:

$$p1(x) = x^2 + x(1-x) + (1-x)^2$$
$$p2(x) = x^2 + (1-x)^2$$
$$p3(x) = x^2 + 1 + (1-x)^2$$
$$p4(x) = x(1-x)$$

Vediamo se questi polinomi sono linearmente indipendenti calcolando un'eventuale combinazione lineare che li annulla:

$$a \cdot p1(x) + b \cdot p2(x) + c \cdot p3(x) + d \cdot p4(x) = 0$$

Semplificando ulteriormente:

$$a \cdot p1(x) + b \cdot p2(x) + c \cdot p3(x) + d \cdot p4(x) = 0$$
$$a \cdot (x^2 + x(1-x) + (1-x)^2) + b \cdot (x^2 + (1-x)^2) + c \cdot (x^2 + 1 + (1-x)^2) + d \cdot (x(1-x)) = 0$$

Eseguendo le operazioni algebriche:

$$a \cdot (3x^2 - 2x + 1) + b \cdot (2 - 2x) + c \cdot (2x^2 - 2x + 2) + d \cdot (x - x^2) = 0$$

Espandendo ulteriormente:

$$(3a + 2c - d)x^2 + (-2a + b + 2c + d)x + (a + 2b + 2c) = 0$$

Affinché questa equazione sia soddisfatta per ogni x, i coefficienti dei polinomi devono essere tutti nulli:

$$3a + 2c - d = 0$$
$$-2a + b + 2c + d = 0$$
$$a + 2b + 2c = 0$$

Ora dobbiamo risolvere questo sistema di equazioni per a, b, c, d. Tuttavia, notiamo che il sistema ha più variabili (4) rispetto al numero di equazioni (3), il che significa che ci saranno soluzioni non triviali e i polinomi non sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, non è possibile estrarre una base dal sottoinsieme C poiché i polinomi non formano un insieme di vettori linearmente indipendenti.

(a) Lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ con sottoinsieme $C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Per verificare se è possibile estrarre una base dal sottoinsieme C nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$, dobbiamo determinare se i vettori in C sono linearmente indipendenti. Se sono linearmente indipendenti, allora possiamo estrarre una base dal sottoinsieme C. Altrimenti, dovremo cercare di combinare i vettori in C per ottenere una base.

Gli elementi del sottoinsieme C sono:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\6\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Per verificare la linearmente indipendenza, possiamo creare una matrice con questi vettori come colonne e calcolarne il determinante. Se il determinante è diverso da zero, i vettori sono linearmente indipendenti; se è zero, i vettori sono linearmente dipendenti.

Creiamo la matrice M con i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ come colonne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di M:

$$\det(M) = 1\cdot(0\cdot1-6\cdot1)-2\cdot(1\cdot1-0\cdot1)+0\cdot(1\cdot0-0\cdot1)-1\cdot(1\cdot1-0\cdot6) = -6-2+0-1 = -9$$

Poiché il determinante è diverso da zero ($-9 \neq 0$), i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, poiché stiamo lavorando nello spazio vettoriale R^3 e abbiamo quattro vettori linearmente indipendenti, non possiamo estrarre una base da C, poiché una base di R^3 dovrebbe contenere esattamente tre vettori linearmente indipendenti. Quindi, C non può essere una base per R^3.

3.[1] Si studi la dipendenza o l'indipendenza lineare dei vettori seguenti, e si determini in ogni caso una base del sottospazio da essi generato.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^5$.

Per studiare la dipendenza o l'indipendenza lineare dei vettori dati e determinare una base del sottospazio da essi generato, dobbiamo eseguire due passaggi: calcolare il rango della matrice formata dai vettori e determinare se il rango è uguale al numero dei vettori.

(a) $(1\ 0\ 1), (0\ 2\ 2), (3\ 7\ 1)$ **in** $\mathbb{R}^3$**:**

Costruiamo una matrice A usando i vettori come colonne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A. Applichiamo le operazioni di riga per portare la matrice in forma scalini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 3. Inoltre, il numero di vettori è anche 3. Poiché il rango è uguale al numero dei vettori, possiamo concludere che i vettori sono linearmente indipendenti. Una base del sottospazio generato da questi vettori è proprio il set dei vettori stessi:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) $(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 1), (1\ 1\ 1)$ in R^3: Costruiamo una matrice B usando i vettori come colonne:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di B. Applichiamo le operazioni di riga per portare la matrice in forma scalini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2. Tuttavia, il numero di vettori è 3. Poiché il rango è inferiore al numero dei vettori, possiamo concludere che i vettori sono linearmente dipendenti. Una base del sottospazio generato da questi vettori è $(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 1)$, poiché il terzo vettore è una combinazione lineare dei primi due. (c) $(1\ 2\ 1\ 2\ 1), (2\ 1\ 2\ 1\ 2), (1\ 0\ 1\ 1\ 0), (0\ 1\ 0\ 0\ 1)$ in R^5:** Costruiamo una matrice C usando i vettori come colonne:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di C. Applichiamo le operazioni di riga per portare la matrice in forma scalini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 3. Il numero di vettori è 4. Poiché il rango è inferiore al numero dei vettori, possiamo concludere che i vettori sono linearmente dipendenti. Una base del sottospazio generato da questi vettori è $(1\,2\,1\,2\,1), (0\,1\,0\,0\,-1), (0\ 0\ 0\ 1\ 1)$, poiché il quarto vettore è una combinazione lineare dei primi tre.

4.[1] In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determino delle base dei sottospazi $U \cap V$, U, V e $U + V$.

Per determinare le basi dei sottospazi $U \cap V, U, V$, e $U + V$ in $\mathbb{R}^4$, possiamo eseguire diverse operazioni su questi vettori, come calcoli di intersezione, somma e span.

Dati i vettori:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo le basi dei vari sottospazi:
Sottospazio U: Poiché U è generato dai primi tre vettori, calcoliamo la forma ridotta della matrice U ottenuta mettendo i vettori come colonne:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la terza colonna non ha un pivot, il che significa che v_3 è combinazione lineare dei vettori precedenti. Quindi, una base per U è $\{v_1, v_2\}$. Sottospazio V: Il sottospazio V è generato dai vettori v_4 e v_5, quindi una sua base è $\{v_4, v_5\}$. Sottospazio $U \cap V$: Il sottospazio $U \cap V$ è l'intersezione tra U e V, quindi cercare gli elementi in comune nei due sottospazi. Vediamo se i vettori v_1 e v_2 possono essere scritti come combinazione lineare di v_4 e v_5:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} v_4 + \frac{2}{3} v_5$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} v_4 + \frac{2}{3} v_5$$

Pertanto, sia v_1 che v_2 possono essere espressi come combinazione lineare di v_4 e v_5, il che implica che $U \cap V$ è generato da v_4 e v_5, e una base per $U \cap V$ è $\{v_4, v_5\}$. Sottospazio $U + V$: Il sottospazio $U + V$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori in U e V. Poiché abbiamo già trovato le basi di U e V, possiamo semplicemente unirle per ottenere una base per $U + V$:

$$\text{Base di } U + V = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$$

In sintesi: - Base per U è $\{v_1, v_2\}$. - Base per V è $\{v_4, v_5\}$. - Base per $U \cap V$ è $\{v_4, v_5\}$. - Base per $U + V$ è $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$.

(Applicazioni lineari)

2.[2] Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ y+z \\ 2z-x \end{pmatrix}$. Si determinino delle basi dello spazio nullo $N(f)$ e dell'immagine $\operatorname{Im}(f)$ di f.

1. **Matrice associata a f nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$:**

   La matrice associata all'applicazione lineare f è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. **Trovare il rango di A:**

   Calcoliamo il rango della matrice A. Riducendo A alla forma canonica a gradini otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Il rango di A è quindi 3, poiché tutte le sue righe sono indipendenti. Ma il rango di A è anche 2 poiché la terza riga è una combinazione lineare delle prime due righe. Pertanto, $r(A) = 2$.

1. **Spazio nullo $N(f)$:**

   La dimensione dello spazio nullo è $3 - r(A) = 3 - 2 = 1$. Quindi, $N(f)$ è generato dal vettore $(2, -1, 1)$.
2. **Immagine $\operatorname{Im}(f)$:**

   La dimensione dell'immagine è $r(A) = 2$. Una base di $\operatorname{Im}(f)$ è data da due vettori linearmente indipendenti. Possiamo prendere $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ come base di $\operatorname{Im}(f)$.

In sintesi, la correzione basata sui passaggi forniti da Claude.ai è la seguente:

- **Base dello spazio nullo $N(f)$:** $\{(2, -1, 1)\}$
- **Base dell'immagine $\operatorname{Im}(f)$:** $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

3.[2] Si determinino le dimensioni dello spazio nullo $N(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ e del sottospazio $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ e delle basi di tali sottospazi per le seguenti matrici:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Per la matrice (a):

1. Calcoliamo le dimensioni dello spazio nullo $N(A)$:

Per trovare lo spazio nullo, dobbiamo risolvere il sistema di equazioni $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{x}$ è un vettore colonna.

Riducendo la matrice aumentata $[A \mid \mathbf{0}]$ alla forma canonica a gradini otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione libera corrisponde a x_3 e x_4, quindi $N(A)$ è generato da $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

La dimensione dello spazio nullo $N(A)$ è 2.

1. Calcoliamo le dimensioni del sottospazio colonna $C(A)$:

Per trovare lo spazio colonna, possiamo ridurre la matrice A alla sua forma canonica a gradini, contando il numero di colonne pivot.

Riducendo A otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le colonne pivot sono 1 e 2, quindi la dimensione di $C(A)$ è 2.

Per la matrice (b):

1. Calcoliamo le dimensioni dello spazio nullo $N(A)$:

Riducendo la matrice aumentata $[A \mid \mathbf{0}]$ alla forma canonica a gradini otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Poiché non ci sono righe completamente nulle, il sistema ha solo la soluzione triviale. Quindi $N(A)$ consiste solo nel vettore nullo.

La dimensione dello spazio nullo $N(A)$ è 0.

1. Calcoliamo le dimensioni del sottospazio colonna $C(A)$:

Riducendo A otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Tutte le colonne sono pivot, quindi la dimensione di $C(A)$ è 3.

In sintesi:

(a)

- Dimensione dello spazio nullo $N(A)$: 2
- Dimensione del sottospazio colonna $C(A)$: 2

(b)

- Dimensione dello spazio nullo $N(A)$: 0
- Dimensione del sottospazio colonna $C(A)$: 3

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+y+6z \end{pmatrix}$.

(a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$.

(a) Matrice A rispetto alla base canonica:

L'applicazione lineare è $f((x,y,z)) = (x+2y+3z, -x+y+6z)$.

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (spazio di partenza) e $\mathbb{R}^2$ (spazio di arrivo) è data da:

$$A = \begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & f(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$$

Dove $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ sono i vettori di base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Calcoliamo:

$$f(\mathbf{e}_1) = (1+2\cdot 0+3\cdot 0, -1+0+6\cdot 0) = (1,-1)$$
$$f(\mathbf{e}_2) = (0+2\cdot 1+3\cdot 0, 0-1+6\cdot 0) = (2,-1)$$
$$f(\mathbf{e}_3) = (0+2\cdot 0+3\cdot 1, 0-0+6\cdot 1) = (3,6)$$

Quindi la matrice A è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) Matrice B rispetto alla base B:

La matrice associata ad f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$B = [[f]_B]$$

Dove $[f]_B$ è la matrice dei coefficienti di f rispetto alla base B.

Per calcolare $[f]_B$, applichiamo f ai vettori della base B:

$$f((2,1,2)) = (2+2\cdot 1+3\cdot 2, -2+1+6\cdot 2) = (10,11)$$
$$f((0,-1,0)) = (0+2\cdot(-1)+3\cdot 0, 0-(-1)+6\cdot 0) = (-2,1)$$
$$f((1,1,2)) = (1+2\cdot 1+3\cdot 2, -1+1+6\cdot 2) = (10,11)$$

Quindi la matrice B è:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 10 \\ 11 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

(c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$.

(d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e la base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^2$.

(c) Matrice D rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base d di $\mathbb{R}^2$:

La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base d di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$D = [[f]_d]$$

Dove $[f]_d$ è la matrice dei coefficienti di f rispetto alla base d.

Per calcolare $[f]_d$, applichiamo f ai vettori della base d:

$$f((-2,-1)) = (-2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0, 2 + (-1) + 6 \cdot 0) = (-5, 1)$$
$$f((0,1)) = (0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 0 + 1 + 6 \cdot 0) = (2, 1)$$

Quindi la matrice D è:

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Matrice C rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$:

La matrice associata a f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$C = [[f]_{BD}]$$

Dove $[f]_{BD}$ è la matrice dei coefficienti di f rispetto alle basi B e D.

Per calcolare $[f]_{BD}$, dobbiamo calcolare $[f]_{B\to\text{canonica}}$ e $[f]_{\text{canonica}\to D}$ e moltiplicarle:

1. Calcoliamo $[f]_{B\to\text{canonica}}$:

$$[f]_{B\to\text{canonica}} = B^{-1}A$$

Dove A è la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e B è la matrice i cui vettori sono i vettori di base B di $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolando $[f]_{B\to\text{canonica}}$ otteniamo:

$$[f]_{B\to\text{canonica}} = B^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcoliamo $[f]_{\text{canonica}\to D}$:

$$[f]_{\text{canonica}\to D} = D$$

Dove D è la matrice associata a f rispetto alla base D di $\mathbb{R}^2$.

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora moltiplichiamo le due matrici:

$$C = [f]_{B\to\text{canonica}} \cdot [f]_{\text{canonica}\to D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

In sintesi:

(c) Matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base d di $\mathbb{R}^2$:

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Matrice associata a f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

5.[2] Siano V e W due spazi vettoriali di basi rispettivamente $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2\}$, e sia $f\colon V \to W$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice (rispetto alle basi date):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Si prenda per V la nuova base $v_1' = v_2 + v_3$, $v_2' = v_1 + v_3$, $v_3' = v_1 + v_2$. Qual è la nuova matrice A' rispetto alle basi $\{v_1', v_2', v_3'\}$ e $\{w_1, w_2\}$?

(b) Si prenda per W la nuova base $w_1' = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ e $w_2' = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$. Qual è la matrice A'' di f rispetto alle basi $\{v_1', v_2', v_3'\}$ e $\{w_1', w_2'\}$?

(a) I nuovi vettori di base di V sono:

$$v_1' = v_2 + v_3$$
$$v_2' = v_1 + v_3$$
$$v_3' = v_1 + v_2$$

Per trovare la matrice A', dobbiamo esprimere questi vettori nella base originale $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$v_1' = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3$$
$$v_2' = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3$$
$$v_3' = 1v_1 + 1v_2 + 0v_3$$

Quindi la matrice di cambio di base è:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per il cambio di base, abbiamo:

$A' = P^{-1}AP$

Calcolando:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) I nuovi vettori di base di W sono:

$$w_1' = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$$
$$w_2' = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$$

Esprimendoli nella base originale:

$$w_1' = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$$
$$w_2' = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

Quindi la matrice di cambio di base è:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Per il cambio di base:

$A'' = Q^{-1}A'Q$

Calcolando:

$$A'' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Sia $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+iy \\ y+ix \end{pmatrix}$.

(a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -2i \end{pmatrix} \right\}$$

del dominio e la base canonica del codominio.

(c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica del dominio e la base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

del codominio.

(d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e la base $\mathcal{D}$ del codominio.

(a) La base canonica di $\mathbb{C}^2$ è \{(1, 0), (0, 1)\}. Per determinare la matrice associata \(A rispetto a questa base, calcoliamo f applicato ai vettori di base e scriviamo i risultati in termini della base di arrivo:

$$f((1,0)) = (1 + i \cdot 0, 0 + i \cdot 1) = (1, i)$$
$$f((0,1)) = (0 + i \cdot 1, 1 + i \cdot 0) = (i, 1)$$

Ora possiamo esprimere questi vettori rispetto alla base di arrivo:

$$(1, i) = 1 \cdot (1,0) + i \cdot (0,1)$$
$$(i, 1) = i \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$$

Quindi la matrice A sarà:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Rispetto alla base $B = \{(6,1), (i, -2i)\}$, dobbiamo calcolare f applicato a ciascun vettore di base e quindi esprimere i risultati rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$:

$$f((6,1)) = (6 + i \cdot 1, 1 + i \cdot 6) = (6 + i, 1 + 6i)$$
$$f((i, -2i)) = (i + i \cdot (-2i), -2i + i \cdot i) = (i + 2, 1)$$

Ora esprimiamo questi risultati rispetto alla base canonica:

$$(6 + i, 1 + 6i) = (6 + i) \cdot (1,0) + (1 + 6i) \cdot (0,1)$$
$$(i + 2, 1) = (i + 2) \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$$

La matrice B sarà quindi:

$$B = \begin{bmatrix} 6 + i & i + 2 \\ 1 + 6i & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Rispetto alla base canonica del dominio e $D = \{(0, 3 + i), (1, 3)\}$ del codominio, eseguiamo un calcolo simile:

$$f((1,0)) = (1 + i \cdot 0, 0 + i \cdot 1) = (1, i)$$
$$f((0,1)) = (0 + i \cdot 1, 1 + i \cdot 0) = (i, 1)$$

Esprimendo questi risultati rispetto a D:

$$(1, i) = \frac{1}{3 + i} \cdot (0, 3 + i) + \frac{i}{3 + i} \cdot (1, 3)$$
$$(i, 1) = \frac{1}{3 + i} \cdot (0, 3 + i) + \frac{1}{3 + i} \cdot (1, 3)$$

La matrice D sarà:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3+i} & \frac{1}{3+i} \\ \frac{i}{3+i} & \frac{1}{3+i} \end{bmatrix}$$

(d) Ora, per determinare la matrice C rispetto alla base B del dominio e la base D del codominio, dobbiamo trovare la matrice di cambio di base da B a quella canonica e da D a quella canonica, quindi ottenere la matrice C attraverso queste matrici di cambio di base:

La matrice di cambio di base da B alla base canonica sarà:

$$P = \begin{bmatrix} 6 & i \\ 1 & -2i \end{bmatrix}$$

La matrice di cambio di base da D alla base canonica sarà:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3+i & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice C sarà quindi:

$$C = P^{-1}AQ$$

Calcolando:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3+i & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & i \\ 1 & -2i \end{bmatrix}$$

(Basi ortonormali e ortogonali, etc. etc.)

1.[1] Si consideri il sottospazio $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si trovi una base ortonormale $\mathcal{A}$ di U.

Passo 1: I vettori dati sono $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Passo 2: Normalizziamo il primo vettore v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-5)^2+1^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Passo 3: Calcoliamo la proiezione di v_2 su u_1 e sottraiamo dalla seconda colonna:

$$u_2 = v_2 - \text{proiezione}_{u_1}(v_2)$$

Calcoliamo il prodotto scalare $v_2 \cdot u_1$:

$$v_2 \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \frac{8}{\sqrt{30}} + \frac{5}{\sqrt{30}} + \frac{2}{\sqrt{30}} = \frac{15}{\sqrt{30}}$$

Calcoliamo la proiezione:

$$\text{proiezione}_{u_1}(v_2) = \frac{15}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{30} \\ -\frac{75}{30} \\ \frac{15}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sottraiamo questa proiezione da v_2 per ottenere u_2:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Passo 4: Normalizziamo il secondo vettore u_2:

$$u_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Ora hai ottenuto due vettori ortogonali u_1 e u_2 nel sottospazio U. Tuttavia, devono essere ancora normalizzati per ottenere una base ortonormale.

Quindi, una base ortonormale per il sottospazio U è:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$$

3.[1] Si trovi una base ortonormale del sottospazio $C(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Passo 1: La matrice A data è: $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

Passo 2: Estrai le colonne di A come vettori colonna:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Applichiamo il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:
Passo 3.1: Normalizza il primo vettore $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

Passo 3.2: Calcola la proiezione di $\mathbf{v}_2$ su $\mathbf{u}_1$ e sottrai dalla seconda colonna:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proiezione}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \right) \mathbf{u}_1$$

Calcoliamo il prodotto scalare $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = -\frac{8}{\sqrt{20}}$$

Calcoliamo la proiezione:

$$\text{proiezione}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = -\frac{8}{\sqrt{20}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{20} \\ -\frac{4}{20} \\ \frac{4}{20} \\ -\frac{12}{20} \end{bmatrix}$$

Sottraiamo questa proiezione da $\mathbf{v}_2$ per ottenere $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{12}{20} \\ -\frac{4}{20} \\ \frac{4}{20} \\ -\frac{12}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{40}{20} \\ \frac{24}{20} \\ \frac{20}{20} \\ -\frac{68}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ -\frac{17}{5} \end{bmatrix}$$

Passo 3.3: Calcola la proiezione di $\mathbf{v}_3$ su $\mathbf{u}_1$ e su $\mathbf{u}_2$, poi sottrai entrambe le proiezioni dalla terza colonna:

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proiezione}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - \text{proiezione}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3)$$

Calcoliamo $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = \frac{10}{\sqrt{20}}$$

Calcoliamo la proiezione:

$$\text{proiezione}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) = \frac{10}{\sqrt{20}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{20} \\ \frac{10}{20} \\ -\frac{10}{20} \\ \frac{30}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ -\frac{17}{5} \end{bmatrix} = -\frac{50}{5} = -10$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-20}{14} \\ \frac{2}{14} \\ \frac{10}{14} \\ \frac{-42}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -3 \end{bmatrix}$$

Passo 3.3: Sottraiamo questa proiezione da $\mathbf{v}_2$ per ottenere il secondo vettore ortogonale:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proiezione}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{10}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{20}{7} \\ -4 \end{bmatrix}$$

Passo 3.4: Normalizziamo il secondo vettore ortogonale $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{845}{49}}} \begin{bmatrix} -\frac{25}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{20}{7} \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{\sqrt{169}} \\ \frac{2}{\sqrt{169}} \\ \frac{10}{\sqrt{169}} \\ -\frac{28}{\sqrt{169}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} \\ \frac{10}{13} \\ -\frac{28}{13} \end{bmatrix}$$

Quindi, la base ortonormale del sottospazio delle colonne di A ottenuta tramite il processo di Gram-Schmidt è:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} \\ \frac{10}{13} \\ -\frac{28}{13} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo la proiezione:

$$\text{proiezione}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3) = -10 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ -\frac{17}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -12 \\ -10 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Sottraiamo le proiezioni per ottenere $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ -12 \\ -10 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2} - 20 \\ 1 - \frac{1}{2} + 12 \\ -2 + \frac{1}{2} + 10 \\ 8 - \frac{3}{2} - 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{17}{2} \\ -\frac{33}{2} \end{bmatrix}$$

Passo 3.4: Normalizza i vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{u}_3$ per ottenere la base ortonormale

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ -\frac{17}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{21}{\sqrt{502}} \\ \frac{11}{\sqrt{502}} \\ \frac{17}{\sqrt{502}} \\ -\frac{33}{\sqrt{502}} \end{bmatrix}$$

Quindi, una base ortonormale per lo spazio delle colonne di A è:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ -\frac{17}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{21}{\sqrt{502}} \\ \frac{11}{\sqrt{502}} \\ \frac{17}{\sqrt{502}} \\ -\frac{33}{\sqrt{502}} \end{bmatrix} \right\}$$

5. Si calcolino i coefficienti di $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base ortonormale $\mathcal{A}$ dell'Esercizio 1.

Coefficiente rispetto al primo vettore A_1:

$$\frac{u \cdot A_1}{\|A_1\|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \right\|}$$

Calcoliamo il prodotto scalare:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \frac{4}{\sqrt{30}} + \frac{5}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{10}{\sqrt{30}}$$

Calcoliamo la norma di A_1:

$$\|A_1\| = \left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{30}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{30} + \frac{25}{30} + \frac{1}{30}} = \sqrt{\frac{30}{30}} = 1$$

Ora possiamo calcolare il coefficiente:

$$\frac{u \cdot A_1}{\|A_1\|} = \frac{\frac{10}{\sqrt{30}}}{1} = \frac{10}{\sqrt{30}}$$

Coefficiente rispetto al secondo vettore A_2:

$$\frac{u \cdot A_2}{\|A_2\|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\|}$$

Calcoliamo il prodotto scalare:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{6}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{4\sqrt{6}} + \frac{3}{4\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Calcoliamo la norma di A_2:

$$\|A_2\| = \left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{3}{4\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{3}{4\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{24} + \frac{9}{48} + \frac{9}{48}} =$$
$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

Ora possiamo calcolare il coefficiente:

$$\frac{u \cdot A_2}{\|A_2\|} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{4}} = 4\sqrt{6}$$

In sintesi, i coefficienti di $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base ortonormale A sono $\frac{10}{\sqrt{30}}$ rispetto al primo vettore A_1 e $4\sqrt{6}$ rispetto al secondo vettore A_2.