Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

ESERCIZIO TIPO 8

Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\} \subset \mathbb{C}^3$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Facendo tutti i passaggi, dalla definizione si ottiene ...

Siano $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$(*) \qquad \mathbf{0} = \alpha\mathbf{v_1} + \beta\mathbf{v_2} + \delta\mathbf{v_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + 2\delta \end{pmatrix}.$$

Allora $(*)$ equivale a $(1) \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \beta + \delta & = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 2\delta & = 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite α, β, δ.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \,|\, \mathbf{0})$$

L'ultima colonna di $\left(\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\right)$, ossia $\mathbf{0}$, è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, il sistema (1) ha un'unica soluzione, quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è L.I.

$\Big[$ Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad (1′) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \quad \beta + \delta & = 0 \\ \quad\quad \delta & = 0 \end{cases}$

e con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = -\delta = 0 \\ \alpha = -2\beta - \delta = 0 \end{cases}$ $\Big]$

Possiamo abbreviare il procedimento

(ATTENZIONE: solo perchè $\mathcal{S}$ è un insieme di vettori colonna !)

nel seguente modo:

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Facendo una EG su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $\mathcal{S}$ è L.I.

Questo perchè, siccome $\mathcal{S}$ è un insieme di vettori colonna, la matrice A dei coefficienti del sistema (1) è proprio la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono gli elementi di $\mathcal{S}$.