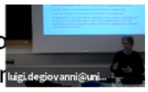
23/02/2021



1. Una società di distribuzione di bevande dispone di due camion per il trasporto tipi di bevanda. La bevanda A è distribuita in contenitori di vetro e in confezio bottiglie da un litro, la bevanda B in contenitori di vetro e in confezioni di 5 bottiglie da 2 litri, la bevanda C in contenitori di plastica e confezioni di 6 bottiglie da 1,5 litri. Una volta a destinazione, le bottiglie sono vendute al prezzo di 2, 3 e 1 euro per bottiglia di bevanda A, B e C, rispettivamente. Il primo camion può trasportare fino a un massimo di 2000 litri al costo di 5 centesimi al litro, il secondo fino a 3000 litri al costo di 4 centesimi al litro. Il budget complessivo per il trasporto è di 300 euro. Si scriva un modello di programmazione lineare che massimizzi il ricavo tenendo conto che:
   - il primo camion non può trasportare più di 100 confezioni di bevanda B;
   - il secondo camion non può trasportare contenitori di vetro differenti;
   - a destinazione, si ha la possibilità di comporre dei cestini assortiti che contengono 4 bottiglie di bevanda A, 3 bottiglie di bevanda B e 2 bottiglie di bevanda C. Ogni cestino comporta un ricavo extra, rispetto a quello derivante dalle singole bottiglie in esso contenute, di 11 euro.

// x_{ij} : # CONFEZ. bevande $i \in \{A, B, C\}$ su camion $j \in \{1, 2\}$

$$\max\ 2 \cdot 12 (x_{A1} + x_{A2}) + 3 \cdot 5 (x_{B1} + x_{B2}) + 1 \cdot 6 \cdot (x_{C1} + x_{C2})$$

$$x_{B1} \leq 100$$

$$x_{A1} \cdot 12 \cdot 1 + x_{B1} \cdot 5 \cdot 2 + x_{C1} \cdot 6 \cdot 1{,}5 \leq 2000 \quad \text{// lt}$$

$$x_{A2} \cdot 12 \cdot 1 + x_{B2} \cdot 5 \cdot 2 + x_{C2} \cdot 6 \cdot 1{,}5 \leq 3000$$

$$0{,}05 \, / \, 12 (x_{A1} + \cancel{x_{A2}}) + 10 (x_{B1} + \cancel{x_{B2}}) + 9 (x_{C1} + \cancel{x_{C2}}) + 0.04 \, (12 x_{A2} + 10 \, x_{B2} + 9 x_{C2}) \leq 300$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+$$

// y_{ij} : 1 se trasporto $i \in \{A, B\}$ su $j \in \{2\}$, 0 else

$$y_{A2} + y_{B2} \leq 1$$

$$x_{A2} \leq M \, y_{A2} \qquad x_{B2} \leq M \, y_{B2}$$

// 4 A 3 B 2 C

// z : # cestini

$$4z \leq 12 (x_{A1} + x_{A2})$$

$$3z \leq 5 (x_{B1} + x_{B2})$$

$$2z \leq 6 (x_{C1} + x_{C2})$$

$$z \in \mathbb{Z}$$

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{llrrrl}
\max & & & x_2 & -\ 4\,x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 & -\ 2\,x_2 & +\ x_3 & \leq & 2 \\
& x_1 & -\ x_2 & +\ 2\,x_3 & \geq & -2 \\
& -2\,x_1 & +\ x_2 & -\ x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

3. $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;

b) possiamo dedurre qualche informazione sul corrispendente problema duale direttamente a partire dal risultato del punto precedente? in base a quale teorema?

Punto (a)

B_0 ~ VAR SLACK/SURPLUS

entra x_2, esce x_6

entra 1 esce x_2

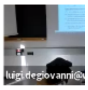
0	0	-1	0	3	-1	-1	4
0	0	-1	1	2	-1	0	8
1	0	4	0	1	-1	0	2
0	1	3	0	2	-1	0	4

ILLIM !

Punto (b)

In base al fatto che il problema primale è illimitato, il problema duale è inammissibile (teorema della dualità debole).

(Esercizio 4 – Dualità)



5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
0	− 1	0	− 31	0	− 2	0	− 1	− 7
0	10	0	400	0	0	1	0	100
1	− 33	0	15	− 2	1	0	0	330
0	32	1	1	5	− 1	0	0	320

Senza operazioni di pivot e fornendo **giustificazione teorica delle risposte**:

a) si può individuare una soluzione di base corrispondente? qual è? è ottima?

b) su quali elementi sarebbe possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

c) considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland?

d) Qual è il valore della funzione obiettivo dopo il cambio base del punto c)?

e) La soluzione di base ottenuta in seguito al cambio base del punto c) è degenere oppure no?

a) Soluzione di base ottima data da $B = [x_7\ x_1\ x_3]$, in quanto ci sono le colonne della matrice identità

Avrò sicuramente una soluzione ammissibile perché $\bar{c} < 0$ (costo ridotto negativo), $\theta > 0$ (rapporto minimo positivo), dunque l'incremento della funzione obiettivo è positivo e migliora, dato che avremo

$$z_{min} = z + \bar{c}\theta > 0$$

b) Candidati per il cambio base (rapporti minimi) → x_2, x_4, x_6

c) Con Bland esce x_3

d) $z_{new} = -(-z) + (-1)\frac{320}{32} = 7 - 10 = -3$ (si nota anche da qui non è ottima)

e) La soluzione è degenere in quanto x_3 esce dalla base, ma x_7 assume valore 0, assieme alle altre rimanendo in base.

(Esercizio 6 – Branch and Bound)