Verifica sommatorie, serie geometrica, telescopica e armonica.
Convergenza e divergenza

[SERIE] → SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

?

$$S_n = \sum_{n=1}^{100} a_n = \underline{a_1 + a_2 + a_3} \dots + a_{100}$$

RIDOTTE

(DI ORDINE n => es. $n=3$)

RIDOTTA DI ORDINE 3 → SOMMO 3 NUMERI

$$\sum_{n=5}^{\infty} \log(n) = \log(5) + \log(6) + \log(7)$$

NON PARTIAMO DA $n=1$, MA DALLA BASE DELLA SERIE

SERIE
- GEOMETRICA
- ARMONICA
- TELESCOPICA

SERIE
- CONVERGENTE $\rightarrow$ $\boxed{K}$ (AD UN VALORE FINITO) es. 100
- DIVERGENTE $\rightarrow \infty$

OGNI SERIE HA DEI CRITERI DI CONVERGENZA!

SERIE **GEOMETRICA** → RAGIONE $= q$

① $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots$$

② $$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \underbrace{q^{1-1}}_{q^0 = 1} + q^{2-1} + q^{3-1} \dots$$

QUANDO CONVERGE?

↓

SULLA BASE DI "q"

$|q| < 1 \rightarrow \frac{1}{1-q}$

$|q| \geq 1 \rightarrow$ DIVERGE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(4 - \sqrt{15}\right)^n \rightarrow \text{SERIE GEOMETRICA}$$

① CONVERGE?

② SOMMA?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (q)^n$$

$q = 4 - \sqrt{15} \approx$
$= 4 - 3.87 =$
$0.13 < 1$

se $q \geq 1 \rightarrow$ DIVERGE

se $q < 1 \rightarrow$ CONVERGE A $\dfrac{1}{1-q}$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(4-\sqrt{15})}$$

$$= \frac{1}{1-4+\sqrt{15}} = \frac{1}{-3+\sqrt{15}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{15}-3)} \frac{(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15}+3)} = \frac{\sqrt{15}+3}{15-9} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$$

SERIE CONVERGE A

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|-1|^n}{2^{n+4}}\right] \rightarrow \text{GEOMETRICA}$$

$$\rightarrow q \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n \end{cases}$$

$$q \begin{cases} \text{CONVERGE} \\ \text{DIVERGE} \end{cases} \quad (?)$$

$\Rightarrow$ TROVA VALORE DI "q"

$$\begin{cases} |q| < 1 \rightarrow \dfrac{1}{1-q} \\ |q| \geq 1 \rightarrow \text{DIVERGE} \end{cases}$$

$$q = \frac{(-1)^n}{\boxed{2^{n+4}}} \begin{cases} \geq 1 \\ < 1 \end{cases}$$

$$n = 1 \rightarrow \frac{(-1)^1}{2^{1+4}} = -\frac{1}{32} < 1$$

$$\left[\text{CONVERGE a } \frac{1}{1-q} \right] \rightarrow S_n = \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}} \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{32}}$$

$$= \frac{1}{\frac{32-1}{32}} = \frac{1}{\frac{31}{32}} = \frac{32}{31} \quad \Big] \text{CONVERGE}$$

[SERIE TELESCOPICA]

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$$ → RAGIONE

CHE DIFFERENZA TRA LE SERIE?

↓

CAMBIA "SOLO" LA RAGIONE!

SERIE DI MENGOLI = TELESCOPICA

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1}$$

RIUSCIAMO A RIDURLA A QUESTO?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La somma parziale diventa:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Calcolando il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1$$

Quindi la serie converge a 1.

Come Affrontare gli Esercizi con Serie Telescopiche

1. Identifica se i termini possono essere scritti come differenza
2. Scrivi le somme parziali ed osserva le cancellazioni
3. Calcola il limite della somma parziale

8. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right)$ → TELESCOPICA

$a_n - a_{n+1}$

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} (a_n - a_{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) = S_K$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_K = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6}$$

$\left(\frac{1}{\infty} \approx 0 \right)$

$$= -\frac{6-5}{30}$$ (CONS[illegible])

$$= -\frac{11}{30}$$