Foglio 11 - Metodi di conteggio

1. In quanti modi si possono scegliere un uomo e una donna che non sono sposati da un gruppo di n coppie sposate?

   Soluzione: Scelgo prima una donna qualsiasi (n possibili modi) e poi un uomo che non sia marito della donna scelta ($n-1$ possibili modi). Dunque il numero totale di modi è $n(n-1)$.

2. In quanti modi si possono prendere due carte distinte da un mazzo standard di 52 carte in modo tale che:

   - la prima carta è un asso e la seconda carta non è una regina?
   - la prima carta è di picche e la seconda carta non è una regina?

   Soluzione:

   - *Prima scelgo un asso (4 modi possibili) poi una carta qualsiasi tra le 51 rimaste che non sia una regina (47 di queste carte non sono una regina, quindi ho 47 possibilità per la seconda scelta). In totale ho 4×47 modi possibili.*
   - *Devo distinguere due sottocasi: se la prima carta è la regina di picche oppure no. Quindi:*

     (a) Se la prima carta è la regina di picche (1 solo modo per "sceglierla") devo poi scegliere una carta qualsiasi tra le 51 rimaste che non sia una regina (rimangono 48 carte). Quindi ho 1×48 modi possibili.

     (b) Se la prima carta non è la regina di picche (ho 12 scelte possibili sulle rimanenti carte di picche) poi devo scegliere la seconda carta tra le 51 rimaste che non sia una regina (47 carte). Quindi ho 12×47 modi possibili.

     Dunque il numero totale di casi è dato dalla somma dei modi possibili dei due sottocasi: $1 \times 48 + 12 \times 47$.

3. Lanciando due dadi distinti a sei facce (numerate da 1 a 6), in quanti modi si può ottenere un risultato la cui somma sia divisibile per 3?

   Soluzione: La somma dei due dadi è divisibile per 3 se e solo se abbiamo uno dei seguenti sottocasi:

   (a) su entrambi i dadi esce un 3 o un 6;

(b) *sul primo dado esce un* 1 *o un* 4 *e sul secondo dado esce un* 2 *o un* 5*;*

(c) *sul primo dado esce un* 2 *o un* 5 *e sul secondo dado esce un* 1 *o un* 4*.*

Ognuno dei tre sottocasi elencati si può ottenere in $\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 2 \times 2 = 4$ *modi diversi, dunque il numero totale di modi possibili è* $4 + 4 + 4 = 12$*.*

4. Quanti numeri di quattro cifre si possono ottenere a partire dalle cifre 1,2,3,4,5 (con possibili ripetizioni)? Quanti di questi numeri sono divisibili per 4?

   Soluzione: Per rispondere al primo quesito osserviamo che abbiamo 5 *scelte possibili per ognuna delle* 4 *cifre che compongono il numero. Per il principio di moltiplicazione la risposta è dunque* $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ *numeri. Per quanto riguarda il secondo quesito, ricordiamo che un numero è divisibile per* 4 *se e solo se le sue ultime due cifre sono un multiplo di* 4 *(es.* $435\boldsymbol{12}$ *è divisibile per* 4 *perché* 12 *è divisibile per* 4*). Dunque abbiamo* 5×5 *scelte possibili per le prime due cifre (nessun vincolo), mentre le ultime due devono essere necessariamente* $12, 24, 32, 44$ *oppure* 52*, ovvero ci sono* 5 *possibilità. Dunque i numeri divisibili per* 4 *sono* $(5 \times 5) \times 5$*.*

5. Quante sono le terne di interi distinti compresi tra 1 e 90 (inclusi) tali che la loro somma sia:

   - un numero pari?
   - un numero divisibile per 3?

   Soluzione:

   - *Ci sono* 45 *numeri pari e* 45 *dispari tra* 1 *e* 90*. La somma è un numero pari se scelgo tre numeri pari (tra i* 45 *possibili) oppure due numeri dispari (tra i* 45 *possibili) e uno pari (tra i* 45 *possibili). Dunque le terne possibili sono:*

     $$\binom{45}{3} + \binom{45}{2} \times \binom{45}{1}.$$

   - *La somma di tre interi è un numero divisibile per* 3 *se e solo se i tre interi hanno lo stesso valore mod* 3 *oppure tre valori distinti mod* 3*. Nel primo caso ho* $3 \times \binom{30}{1}$ *scelte possibili (*3 *modi di scegliere il valore mod* 3*, cioè una possibile scelta tra* $\{0, 1, 2\}$*, e, fissato tale valore,* $\binom{30}{1}$ *possibili scelte) mentre nel secondo caso ho* $\binom{30}{1}^3$ *scelte possibili (cioè* $\binom{30}{1}$ *scelte per ognuno dei tre valori mod* 3*). Dunque il numero totale di modi è:*

     $$3 \times \binom{30}{1} + \binom{30}{1}^3.$$

6. In quanti modi diversi si possono disporre sei persone in fila indiana? E se Paolo deve essere il secondo della fila?

   Soluzione: Per rispondere al primo quesito osserviamo che si tratta di una permutazione di $n = 6$ *oggetti, dunque ci sono* $6!$ *modi distinti di disporre le sei persone. Se Paolo deve essere il secondo della fila, posso disporre le* 5 *persone rimanenti nelle altre* 5 *posizioni in* $5!$ *modi diversi.*

7. Quanti sono gli anagrammi (anche privi di significato) della parola MATEMATICA? Quanti di questi anagrammi sono tali che:

   - la E è subito dopo una M?
   - la E è vicina ad una M (prima o dopo)?
   - non ci sono due M vicine?

   Soluzione: La prima domanda chiede di calcolare una combinazione con ripetizione. La parola MATEMATICA è composta da 10 *lettere:* 1 *C,* 1 *E,* 1 *I,* 2 *M,* 2 *T,* 3 *A. Quindi il numero totale di anagrammi è*

   $$\frac{10!}{2!2!3!}$$

   - *Per trovare gli anagrammi dove la E è subito dopo una M, basta considerare "ME" come una unica lettera. Quindi le lettere sono* 9*:* 1 *C,* 1 *ME,* 1 *I,* 1 *M,* 2 *T,* 3 *A. Il numero totale di anagrammi è*

     $$\frac{9!}{2!3!}$$

     In alternativa, si possono prima disporre tutte le lettere tranne la E, e poi, essendoci due M, ci sono due possibilità su dove inserire la E (ovvero subito dopo la prima M che appare nell'anagramma oppure dopo la seconda). Quindi il numero totale di anagrammi è

     $$\frac{9!}{2!2!3!} \times 2 = \frac{9!}{2!3!}$$

     Ottenendo così lo stesso risultato che con il primo metodo.

   - *In questo esercizio bisogna fare attenzione a non contare lo stesso anagramma più volte. (Inserire la E subito dopo una M può coincidere con l'inserirla subito prima della seconda.) Contiamo quindi gli anagrammi in cui compare ME, quelli in cui compare EM, sommiamo questi due casi e poi sottraiamo il numero di anagrammi in cui compare MEM (perché questi vengono contati in entrambi i casi considerati prima).*
     Seguendo lo stesso ragionamento del punto precedente, abbiamo quindi che il numero di anagrammi in cui compare ME è

     $$\frac{9!}{2!3!}$$

Il numero di anagrammi in cui compare EM è di nuovo

$$\frac{9!}{2!3!}$$

Infine, il numero di anagrammi in cui compare MEM è

$$\frac{8!}{2!3!}$$

Quindi, il numero di anagrammi in questo caso è

$$2 \times \frac{9!}{2!3!} - \frac{8!}{2!3!}$$

- *Sottraiamo al numero totale di anagrammi, trovato a inizio esercizio, il numero di anagrammi in cui compare MM. Quindi il numero di anagrammi in questo caso è*

$$\frac{10!}{2!2!3!} - \frac{9!}{2!3!}$$

8. Quanti sono gli anagrammi (anche privi di significato) della parola MATRICE in cui le vocali compaiono in ordine alfabetico? Di questi anagrammi, in quanti anche le consonanti appaiono in ordine alfabetico?

   Soluzione: Scelgo tre delle 7 *posizioni disponibili per le lettere, dove mettere le vocali A,E,I. Scelte le posizioni, l'ordine delle tre vocali è forzato: A,E,I perché deve essere in ordine alfabetico. Quindi ho*

$$\binom{7}{3}$$

   modi per posizionare le vocali. A questo punto, rimangono 4 *spazi vuoti per le* 4 *lettere distinte rimanenti M,T,R,C, che possono apparire in qualunque modo, quindi in* 4! *modi diversi. In totale, quindi ci sono*

$$\binom{7}{3} \times 4!$$

   anagrammi di MATRICE in cui le vocali compaiono in ordine alfabetico. Se inoltre, oltre alle vocali in ordine alfabetico, richiediamo anche le consonanti in ordine alfabetico, una volta fissate le vocali c'è un solo modo per inserire le consonanti nei 4 *spazi rimanenti, e quindi ci sono*

$$\binom{7}{3}$$

   modi.

9. Quanti numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 3,5,7? Di questi numeri, quanti hanno esattamente tre 3, due 5 e due 7?

   Soluzione: Per rispondere alla prima domanda, non ci sono restrizioni e quindi ho tre scelte (ovvero $3, 5$ *o* 7*) per ognuna delle* 7 *cifre che costituiscono il numero, per cui* 3^7 *modi.*
   Per la seconda domanda, ho 7 *cifre totali: tre* 3*, due* 5 *e due* 7 *(le cifre uguali sono indistinguibili, come le lettere uguali negli anagrammi). Quindi ho*

   $$\frac{7!}{3!2!2!}$$

   modi.

10. In quanti modi si possono distribuire 8 palline in 6 scatole se:

    - le palline sono tutte uguali?
    - le palline sono tutte distinte?

    Soluzione:

    - *Posso pensare al problema come a una stringa di lunghezza* $8 + (6 - 1) = 13$*, dove devo disporre* 8 *palline (indistinguibili) e* $6 - 1$ *separatori. Quindi per esempio, indicando con* X *le palline e con* $|$ *i separatori fra una scatola e l'altra, un'opzione è* $XX \mid XX \mid X \mid XX \mid X \mid$*, dove l'ultima scatola è vuota. Quindi, scelgo dove posizionare le* X *nella stringa e calcolo che ci sono*

      $$\binom{13}{8}$$

      modi.
    - *Se le palline sono tutte distinte, per ogni pallina ho* 6 *possibili destinazioni (ovvero una delle sei scatole), per un totale di* 6^8 *modi.*

11. In quanti modi si possono distribuire 36 caramelle (tutte uguali) tra quattro bambini:

    - senza restrizioni?
    - ogni bambino riceve lo stesso numero di caramelle?
    - ogni bambino riceve almeno una caramella?

    Soluzione:

    - *Ragiono come nell'esercizio precedente, ho una stringa formata da* 36 X *(le caramelle) e* $4 - 1$ *separatori* $|$*. Quindi il totale di modi è*

      $$\binom{36 + 4 - 1}{36}$$

- *L'unico modo è dare* $36/4 = 9$ *caramelle ad ognuno dei* 4 *bambini, quindi c'è un solo modo (le caramelle non sono distinguibili).*
- *Come prima cosa distribuisco una caramella a ciascuno dei* 4 *bambini, mi rimangono quindi* $36-4 = 32$ *caramelle da distribuire senza restrizioni ai* 4 *bambini, ragionando come al primo punto il totale di modi è quindi*

$$\binom{32+4-1}{32}$$

12. In quanti modi si possono distribuire 36 caramelle, di cui 10 alla menta, 10 al limone e 16 alla fragola tra quattro bambini:
    - senza restrizioni?
    - ogni bambino riceve almeno una caramella alla menta?
    - ogni bambino riceve almeno una caramella per tipo?

    Soluzione:

    - *Distribuisco prima tutte le caramelle alla menta, poi tutte quelle al limone e infine tutte quelle alla fragola. Per quelle alla menta, ho una stringa di* $10 + 4 - 1$ *(*10 *caramelle e* $4 - 1$ *separatori) e scelgo come posizionare le caramelle in questa stringa, quindi ho*

    $$\binom{10+4-1}{10}$$

    modi. In modo simile, distribuisco le caramelle al limone e quelle alla fragola e trovo che il totale dei modi è

    $$\binom{10+4-1}{10} \times \binom{10+4-1}{10} \times \binom{16+4-1}{16}$$

    - *Come prima cosa distribuisco una caramella alla menta a ciascuno dei* 4 *bambini. Mi rimangono quindi* $10-4 = 6$ *caramelle alla menta,* 10 *al limone e* 16 *alla fragola da distribuire senza vincoli. Ragionando come al primo punto, il totale dei modi è quindi*

    $$\binom{6+4-1}{6} \times \binom{10+4-1}{10} \times \binom{16+4-1}{16}$$

    - *Come prima cosa distribuisco una caramella alla menta, una al limone e una alla fragola a ciascuno dei* 4 *bambini. Mi rimangono quindi* $10 - 4 = 6$ *caramelle alla menta,* $10 - 4 = 6$ *al limone e* $16 - 4 = 12$ *alla fragola da distribuire senza vincoli. Ragionando come al primo punto, il totale dei modi è quindi*

    $$\binom{6+4-1}{6} \times \binom{6+4-1}{6} \times \binom{12+4-1}{12}$$