

**(12 punti)** Data una Turing Machine  $M$ , definiamo

$$\text{HALTS}(M) = \{w \mid M \text{ termina la computazione su } w\}.$$

Considera il linguaggio

$$I = \{\langle M \rangle \mid \text{HALTS}(M) \text{ è un insieme infinito}\}.$$

Dimostra che  $I$  è indecidibile.

**Soluzione.** La seguente macchina  $F$  calcola una riduzione mediante funzione  $A_{TM} \leq_m I$ :

$F =$  “su input  $\langle M, w \rangle$ , dove  $M$  è una TM e  $w$  una stringa:

1. Costruisci la seguente macchina  $M'$ :

$M' =$  “Su input  $x$ :

1. Esegue  $M$  su input  $w$ .
2. Se  $M$  accetta, *accetta*.
3. Se  $M$  rifiuta, va in loop.”

2. Ritorna  $\langle M' \rangle$ .”

Mostriamo che  $F$  calcola una funzione di riduzione  $f$  da  $A_{TM}$  a  $I$ , cioè una funzione tale che

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \text{ se e solo se } M' \in I.$$

Se  $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$  allora la macchina  $M$  accetta  $w$ . In questo caso la macchina  $M'$  accetta tutte le parole, quindi  $\text{HALTS}(M') = \Sigma^*$  che è un insieme infinito. Di conseguenza  $M' \in I$ .

Viceversa, se  $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$ , allora la macchina  $M$  su input  $w$  rifiuta oppure va in loop. In entrambi i casi la macchina  $M'$  va in loop su tutte le stringhe, quindi  $\text{HALTS}(M') = \emptyset$  che è un insieme finito. Di conseguenza  $M' \notin I$ .