

ATTENZIONE BATTAGLIONE

ESERCIZIO TIPO 9

LA BASE SI CALCOLA PRENDENDO LE COLONNE
DOMINANTI VISTE CON IL VALORE DEL PARAMETRO
RISPETTO ALLA MATRICE ORIGINALE

Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha + 2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovi una base \mathcal{B}_α di $C(\mathbf{A}_\alpha)$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha + 2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha + i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

1°CASO $\alpha = -i$: $\mathbf{B}_{-i} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{-i}$, quindi

$$rk(\mathbf{A}_{-i}) = 1 \text{ e } \mathcal{B}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2°CASO $\alpha \neq -i$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha + i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})E_2(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i \end{pmatrix} = \mathbf{C}_\alpha$$

1°Sottocaso $\alpha = i$: $\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_i$

$$rk(\mathbf{A}_i) = 2 \text{ e } \mathcal{B}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$$

2°Sottocaso $\alpha \neq -i, i$:

$$\mathbf{C}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-i})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\alpha}$$

$$rk(\mathbf{A}_{\alpha}) = 3 \text{ e } \mathbf{B}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ \alpha + 2i \\ 2i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \right\}$$

N.B.: Essendo in questo caso $C(\mathbf{A}_{\alpha}) \leq \mathbb{C}^3$ e $\dim(C(\mathbf{A}_{\alpha})) = 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$, allora $C(\mathbf{A}_{\alpha}) = \mathbb{C}^3$ e si sarebbe potuto prendere $\mathbf{B}_{\alpha} = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$.