

1. Una *macchina di Turing con reset a sinistra* è una variante delle comuni macchine di Turing, dove la funzione di transizione ha la forma:

$$\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{R, RESET\}.$$

Se  $\delta(q, a) = (r, b, RESET)$ , quando la macchina si trova nello stato  $q$  e legge  $a$ , la testina scrive  $b$  sul nastro, salta all'estremità sinistra del nastro ed entra nello stato  $r$ . Per sapere su quale cella saltare la macchina usa il simbolo speciale  $\triangleright$  per identificare l'estremità di sinistra del nastro. Questo simbolo si può trovare solo in una cella del nastro, e non può essere sovrascritto o cancellato. La computazione di una macchina di Turing con reset a sinistra sulla parola  $w$  inizia con  $\triangleright w$  sul nastro. Si noti che queste macchine non hanno la solita capacità di muovere la testina di una cella a sinistra.

Mostrare che le macchine di Turing con reset a sinistra riconoscono la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili.

1. Per risolvere l'esercizio dobbiamo dimostrare che (a) ogni linguaggio riconosciuto da una TM con reset a sinistra è Turing-riconoscibile e (b) ogni linguaggio Turing-riconoscibile è riconosciuto da una TM con reset a sinistra.

(a) Mostriamo come convertire una TM con reset a sinistra  $M$  in una TM standard  $S$  equivalente.  $S$  simula il comportamento di  $M$  nel modo seguente. Se la mossa da simulare prevede uno spostamento a destra, allora  $S$  esegue direttamente la mossa. Se la mossa prevede un *RESET*, allora  $S$  scrive il nuovo simbolo sul nastro, poi scorre il nastro a sinistra finché non trova il simbolo  $\triangleright$ , e riprende la simulazione dall'inizio del nastro. Per ogni stato  $q$  di  $M$ ,  $S$  possiede uno stato  $q_{RESET}$  che serve per simulare il reset e riprendere la simulazione dallo stato corretto.

$S =$  "Su input  $w$ :

1. scrive il simbolo  $\triangleright$  subito prima dell'input, in modo che il nastro contenga  $\triangleright w$ .
2. Se la mossa da simulare è  $\delta(q, a) = (r, b, R)$ , allora  $S$  la esegue direttamente: scrive  $b$  sul nastro, muove la testina a destra e va nello stato  $r$ .
3. Se la mossa da simulare è  $\delta(q, a) = (r, b, RESET)$ , allora  $S$  esegue le seguenti operazioni: scrive  $b$  sul nastro, poi muove la testina a sinistra e va nello stato  $r_{RESET}$ . La macchina rimane nello stato  $r_{RESET}$  e continua a muovere la testina a sinistra finché non trova il simbolo  $\triangleright$ . A quel punto la macchina sposta la testina un'ultima volta a sinistra, poi di una cella a destra per tornare sopra al simbolo di fine nastro. La computazione riprende dallo stato  $r$ .
4. Se non sei nello stato di accettazione o di rifiuto, ripeti da 2."

(b) Mostriamo come convertire una TM standard  $S$  in una TM con reset a sinistra  $M$  equivalente.  $M$  simula il comportamento di  $S$  nel modo seguente. Se la mossa da simulare prevede uno spostamento a destra, allora  $M$  può eseguire direttamente la mossa. Se la mossa da simulare prevede uno spostamento a sinistra, allora  $M$  simula la mossa come descritto dall'algoritmo seguente. L'algoritmo usa un nuovo simbolo  $\triangleleft$  per identificare la fine della porzione di nastro usata fino a quel momento, e può marcare le celle del nastro ponendo un punto al di sopra di un simbolo.

$M =$  "Su input  $w$ :

1. Scrive il simbolo  $\triangleleft$  subito dopo l'input, per marcare la fine della porzione di nastro utilizzata. Il nastro contiene  $\triangleright w \triangleleft$ .
2. Simula il comportamento di  $S$ . Se la mossa da simulare è  $\delta(q, a) = (r, b, R)$ , allora  $M$  la esegue direttamente: scrive  $b$  sul nastro, muove la testina a destra e va nello stato  $r$ . Se muovendosi a destra la macchina si sposta sulla cella che contiene  $\triangleleft$ , allora questo significa che  $S$  ha spostato la testina sulla parte di nastro vuota non usata in precedenza. Quindi  $M$  scrive un simbolo blank marcato su questa cella, sposta  $\triangleleft$  di una cella a destra, e fa un reset a sinistra. Dopo il reset si muove a destra fino al blank marcato, e prosegue con la simulazione mossa successiva.
3. Se la mossa da simulare è  $\delta(q, a) = (r, b, L)$ , allora  $S$  esegue le seguenti operazioni:
  - 3.1 scrive  $b$  sul nastro, marcandolo con un punto, poi fa un reset a sinistra
  - 3.2 Se il simbolo subito dopo  $\triangleright$  è già marcato, allora vuol dire che  $S$  ha spostato la testina sulla parte vuota di sinistra del nastro. Quindi  $M$  scrive un blank e sposta il contenuto del nastro di una cella a destra finché non trova il simbolo di fine nastro  $\triangleleft$ . Fa un reset a sinistra e prosegue con la simulazione della prossima mossa dal nuovo blank posto subito dopo l'inizio del nastro. Se il simbolo subito dopo  $\triangleright$  non è marcato, lo marca, resetta a sinistra e prosegue con i passi successivi.
  - 3.3 Si muove a destra fino al primo simbolo marcato, e poi a destra di nuovo.
  - 3.4 se la cella in cui si trova è marcata, allora è la cella da cui è partita la simulazione. Toglie la marcatura e resetta. Si muove a destra finché non trova una cella marcata. Questa cella è quella immediatamente precedente la cella di partenza, e la simulazione della mossa è terminata
  - 3.5 se la cella in cui si trova non è marcata, la marca, resetta, si muove a destra finché non trova una marcatura, cancella la marcatura e riprende da 3.3.
4. Se non sei nello stato di accettazione o di rifiuto, ripeti da 2."