A. Definizione di serie

Una serie è un'espressione matematica che rappresenta la somma dei termini di una successione. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione, allora la serie associata si denota con $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e rappresenta la somma infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$. Formalmente, se definiamo la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, il valore della serie (se esiste) è il limite $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

B. Ridotte di ordine 3

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n}$

   La ridotta di ordine 3 è:

   $s_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-2)^n}{n} = \frac{(-2)^1}{1} + \frac{(-2)^2}{2} + \frac{(-2)^3}{3} = -2 + \frac{4}{2} + \frac{-8}{3} = -2 + 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$

   La ridotta di ordine 3 è:

   $s_3 = \sum_{n=0}^{3} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{0!}{1!} + \frac{1!}{2!} + \frac{2!}{3!} + \frac{3!}{4!}$

   Osserviamo che $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{n+1}$

   Quindi: $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{6+4+3}{12} = 1 + \frac{13}{12} = \frac{12+13}{12} = \frac{25}{12}$
3. $\sum_{n=4}^{+\infty} \log(n-3)$

   La ridotta di ordine 3 è:

   $s_3 = \sum_{n=4}^{6} \log(n-3) = \log(4-3) + \log(5-3) + \log(6-3) = \log(1) + \log(2) + \log(3)$

   Ricordiamo che $\log(1) = 0$, quindi:

   $s_3 = 0 + \log(2) + \log(3) = \log(2\cdot 3) = \log(6)$

C. Serie geometriche

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (4-\sqrt{15})^n$

   Questa è una serie geometrica di primo termine $a = 1$ e ragione $r = 4 - \sqrt{15}$.

   Calcoliamo il valore di r: $4 - \sqrt{15} \approx 4 - 3.873 \approx 0.127$

   Poiché $|r| = |4 - \sqrt{15}| \approx 0.127 < 1$, la serie converge.

   La somma è data da
   $S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(4-\sqrt{15})} = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{1}{\sqrt{15}-3} \cdot \frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3} = \frac{\sqrt{15}+3}{(\sqrt{15})^2-3^2} = \frac{\sqrt{15}+3}{15-9} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}$

Si tratta di una serie geometrica. Riscriviamola per identificare il primo termine e la ragione:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot 2^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

Abbiamo ottenuto una serie geometrica con:

- Primo termine: $a_1 = \frac{-1}{2}$
- Ragione: $r = \frac{-1}{2}$

Poiché $|r| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, la serie converge.

Per una serie geometrica che inizia da $n = 1$ con ragione $|r| < 1$, la somma è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^n = \frac{ar}{1-r}$$

Sostituendo i valori:

$$\frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{1}{16} \cdot \frac{\frac{-1}{2}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{16} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{-1}{3} = -\frac{1}{48}$$

Quindi la serie converge a $-\frac{1}{48}$.
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^{n+3/n}}{6^n}$

```
Riscriviamo la serie per comprendere meglio: $\sum_{n=1}^{+\infty}
\frac{18^{n+3/n}}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^n \cdot 18^{3/n}}
{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{18}{6}\right)^n \cdot 18^{3/n} =
\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \cdot 18^{3/n}$

Per $n$ grande, il termine $18^{3/n}$ tende a $18^0 = 1$, quindi la serie si
comporta asintoticamente come $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$, che è una serie
geometrica con ragione $r = 3 > 1$.

Quindi la serie diverge.
```

D. Serie telescopiche

Una serie telescopica è una serie in cui i termini possono essere scritti in modo tale che nella somma parziale la maggior parte dei termini si cancelli a coppie, lasciando solo pochi termini alle estremità. Questo avviene tipicamente quando il termine generale può essere espresso come differenza di due funzioni consecutive: $a_n = f(n) - f(n+1)$.

La serie telescopica più famosa è probabilmente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Notando che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si può dimostrare che questa serie converge a 1.

E. Studio di serie telescopiche

7. $\sum_{n=0}^{+\infty}[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$

   Scriviamo la somma parziale:
   $s_N = \sum_{n=0}^{N}[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \ldots + (\sqrt{N+1} - \sqrt{N})$

   Questa è una somma telescopica dove molti termini si cancellano, ottenendo:
   $s_N = \sqrt{N+1} - \sqrt{0} = \sqrt{N+1}$

   Quando $N \to +\infty$, abbiamo $s_N \to +\infty$, quindi la serie diverge.
8. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right)$

   Scriviamo la somma parziale: $s_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right)$

   $s_N = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N+5} - \frac{1}{N+6}\right)$

   La somma telescopica si riduce a: $s_N = \frac{1}{5} - \frac{1}{N+6}$

   Quando $N \to +\infty$, abbiamo $s_N \to \frac{1}{5}$, quindi la serie converge a $\frac{1}{5}$.
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   Osserviamo che $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

   Quindi:
   $s_N = \sum_{n=1}^{N}[\ln(n+1) - \ln(n)] = [\ln(2) - \ln(1)] + [\ln(3) - \ln(2)] + \ldots + [\ln(N+1) - \ln(N)]$

   La somma telescopica si riduce a: $s_N = \ln(N+1) - \ln(1) = \ln(N+1)$

   Quando $N \to +\infty$, abbiamo $s_N \to +\infty$, quindi la serie diverge.

F. Serie armonica

Una serie armonica è una serie della forma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, dove i termini sono i reciproci dei numeri naturali.

La serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Questa serie diverge, nonostante il fatto che i suoi termini tendano a zero. Ciò può essere dimostrato raggruppando i termini:

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$

Ottenendo quindi una serie che contiene infiniti termini uguali a $\frac{1}{2}$, che chiaramente diverge.

In alternativa, la divergenza può essere dimostrata con il criterio del confronto con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, che converge per $p > 1$ e diverge per $p \leq 1$.