

1. (12 punti) Una *macchina di Turing ad albero binario* usa un albero binario infinito come nastro, dove ogni cella nel nastro ha un figlio sinistro e un figlio destro. Ad ogni transizione, la testina si sposta dalla cella corrente al padre, al figlio sinistro oppure al figlio destro della cella corrente. Pertanto, la funzione di transizione di una tale macchina ha la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{P, L, R\},$$

dove P indica lo spostamento verso il padre, L verso il figlio sinistro e R verso il figlio destro. La stringa di input viene fornita lungo il ramo sinistro dell'albero.

Mostra che qualsiasi macchina di Turing ad albero binario può essere simulata da una macchina di Turing standard.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

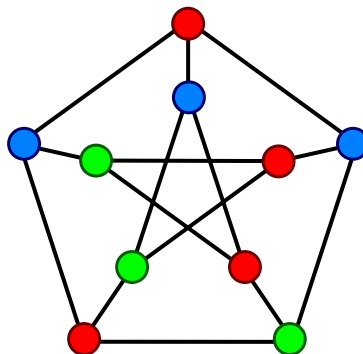
$$\text{EVEN-HALTS} = \{\langle M \rangle \mid \text{per ogni numero naturale } n \text{ pari, } M \text{ termina la computazione su } n\}.$$

Dimostra che EVEN-HALTS è indecidibile.

3. (12 punti) Una 3-colorazione di un grafo non orientato G è una funzione che assegna a ciascun vertice di G un “colore” preso dall'insieme $\{R, G, B\}$, in modo tale che per qualsiasi arco $\{u, v\}$ i colori associati ai vertici u e v sono diversi. Una 3-colorazione è *equa* se per ogni coppia di colori, il numero di nodi associati a ciascun colore differisce di al più 1.

EQUITABLE-3-COLOR è il problema di trovare una 3-colorazione equa:

$$\text{EQUITABLE-3-COLOR} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ è un grafo che ammette una 3-colorazione equa}\}$$



Esempio di colorazione equa con 4 vertici rossi, 3 vertici blu e 3 vertici verdi.

- Dimostra che EQUITABLE-3-COLOR è un problema NP
- Dimostra che EQUITABLE-3-COLOR è NP-hard, usando 3-COLOR come problema NP-hard di riferimento.