Dati

- X ~ Ber(1/2): P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2
- Y ~ Unif(0,1): f*Y(y) = 1*{(0,1)}(y)
- Z ~ Poisson(2): P(Z = k) = e^{-2} · 2^k/k! per k = 0,1,2,...
- X, Y, Z sono indipendenti

Trovare la legge di M = max{X,Y,Z}

Per trovare la distribuzione di M, utilizziamo:

$$F_M(m) = P(M \leq m) = P(\max X, Y, Z \leq m) = P(X \leq m, Y \leq m, Z \leq m)$$

Per l'indipendenza:

$$F_M(m) = P(X \leq m) \cdot P(Y \leq m) \cdot P(Z \leq m)$$

Calcolo delle funzioni di ripartizione individuali

Per X ~ Ber(1/2):

$$F_X(m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m < 0 \\ 1/2 & \text{se } 0 \leq m < 1 \\ 1 & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

Per Y ~ Unif(0,1):

$$F_Y(m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \leq 0 \\ m & \text{se } 0 < m < 1 \\ 1 & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

Per Z ~ Poisson(2):

$$F_Z(m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor m \rfloor} e^{-2} \frac{2^k}{k!} & \text{se } m \geq 0 \end{cases}$$

In particolare:

- F_Z(m) = e^{-2} per 0 ≤ m < 1
- F_Z(m) = e^{-2}(1 + 2) = 3e^{-2} per 1 ≤ m < 2
- F_Z(m) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = 5e^{-2} per 2 ≤ m < 3
- E così via...

Funzione di ripartizione di M

Combinando i risultati:

$$F_M(m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m < 0 \\ \frac{m \cdot e^{-2}}{2} & \text{se } 0 \leq m < 1 \\ 3e^{-2} & \text{se } 1 \leq m < 2 \; 5e^{-2} \quad \text{se } 2 \leq m < 3 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor m \rfloor} e^{-2} \frac{2^k}{k!} & \text{se } m \geq 3 \end{cases}$$

Determinare se M è assolutamente continua

La funzione di ripartizione F_M(m) presenta:

- Una parte continua per 0 < m < 1
- Discontinuità a salto nei punti m = 1, 2, 3, ...

Poiché F_M(m) ha discontinuità a salto, **M non è assolutamente continua**.

Conclusione

M è una variabile aleatoria mista (né puramente discreta né assolutamente continua) con:

- Componente continua per M ∈ (0,1)
- Componente discreta con masse di probabilità nei punti M = 1, 2, 3, ...