Possibili Domande Prof. - FAQ

TEORIA FONDAMENTALE

Q1: Definizione operativa dei nodi di Leja discreti

D: Come definisci matematicamente la sequenza di Leja approssimata?
R: Parto da ξ_0 = primo elemento della mesh XM. Iterativamente, dato $\{\xi_0,\ldots,\xi_{s-1}\}$, scelgo:

```
ξₛ = arg max_{x∈XM} ∏_{i=0}^{s-1} |x - ξᵢ|
```

Equivale a massimizzare $|\det(VDM(\xi_0,\ldots,\xi_{s-1},x))|$ per la proprietà ricorsiva del determinante di Vandermonde.

Q2: Proprietà ricorsiva del determinante di Vandermonde

D: Spiega la formula ricorsiva che giustifica l'algoritmo DLP.
R:

```
det(VDM(ξ₀,...,ξₛ)) = det(VDM(ξ₀,...,ξₛ₋₁)) · ∏_{i=0}^{s-1}(ξₛ - ξᵢ)
```

Quindi massimizzare il determinante ≡ massimizzare la produttoria.
Implementato in `DLP.m` linee 26-35.

Q3: Costante di Lebesgue: definizione e significato

D: Cosa misura Λ_n e perché è importante?
R:

```
Λₙ = max_{x∈I} ∑_{i=0}^n |ℓᵢ(x)|
```

Misura la stabilità: $\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \cdot E_n(f)$. È il "fattore di amplificazione" degli errori di interpolazione. Implementata in `leb_con.m`.

Q4: Vantaggi dei nodi di Leja vs equispaziati

D: Perché i nodi di Leja sono superiori?
R:

- **Stabilità**: Λ_n cresce logaritmicamente vs $2^n/n$ per equispaziati
- **Convergenza**: Evitano il fenomeno di Runge
- **Flessibilità**: Estendibili iterativamente senza ricalcoli

IMPLEMENTAZIONE ALGORITMICA

Q5: Algoritmo DLP - Strategia della produttoria

D: Spiega l'implementazione di `DLP.m`.
R:

```
for s = 2:d+1
    produttoria = prod(abs(x - dlp(1:s-1)), 2);
    [~, idx_max] = max(produttoria);
    dlp(s) = x(idx_max);
end
```

Complessità $O(N \cdot d^2)$: per ogni nuovo nodo, calcolo N produttorie di lunghezza crescente.

Q6: Algoritmo DLP2 - Fattorizzazione LU

D: Come funziona l'approccio LU con base di Chebyshev?
R:

```
V = cos(acos(x) * (0:d));          % Vandermonde-Chebyshev
[~, ~, P] = lu(V, 'vector');       % LU con pivoting
dlp2 = x(P(1:d+1))';              % Primi d+1 pivot
```

Il pivoting di riga massimizza i sottodeterminanti ≡ estrazione Leja. Complessità $O(N \cdot d^2)$ ma con costanti migliori.

Q7: Perché la base di Chebyshev?

D: Motivazione per $V(i,j) = \cos((j-1)\arccos(x_i))$?
R:

- **Stabilità numerica**: $|T_n(x)| \leq 1$ su $[-1,1]$
- **Ortogonalità**: Miglior condizionamento vs base monomiale
- **Robustezza**: Evita overflow/underflow tipici di x^n

Q8: Clipping numerico in DLP2

D: Perché `x = max(-1, min(1, x))`?
R: Errori di rappresentazione floating-point possono dare $|x| > 1$, causando NaN in `acos(x)`. Il clipping preserva la validità matematica senza alterare la logica.

Q9: Vincolo "un solo ciclo" in leb_con

D: Come rispetti il vincolo implementativo?
R: Un unico `for i=1:n` per i nodi, tutto il resto vettorizzato:

```
lagrange_poly = prod((x - z(altri_nodi)) ./ (z(i) - z(altri_nodi)), 2);
```

Il `prod(..., 2)` opera per righe, restituendo un vettore colonna.

ANALISI SPERIMENTALE

Q10: Scelta della funzione test f(x) = 1/(x-1.3)

D: Perché questa specifica funzione?
R:

- **Singolarità critica**: A distanza 0.3 dal bordo destro
- **Stress calibrato**: Destabilizza equispaziati ma non distrugge tutto
- **Analiticità**: Convergenza teorica possibile, ma raggio limitato
- **Discriminanza**: Permette di vedere chiaramente le differenze

Q11: Parametri sperimentali: N=10000, d=50

D: Giustificazione delle scelte numeriche?
R:

- **N=10000**: Discretizzazione sufficientemente fine ($\Delta x=0.0002$), requisito 10^4-10^5
- **d=50**: Range che mostra il fenomeno di Runge senza problemi numerici estremi
- **Trade-off**: Massima informazione, minimo costo computazionale

Q12: Interpretazione grafico errori di interpolazione

D: Spiega l'andamento: Leja stabile, equispaziati esplosivi.
R:

- **d < 20**: Entrambi stabili, differenze marginali
- **d ∈ [20,35]**: Emerge superiorità Leja
- **d ∈ [35,50]**: **Fenomeno di Runge** per equispaziati
- **Saturazione**: Leja raggiunge precisione macchina ($\sim 10^{-16}$)

Q13: Crescita della costante di Lebesgue

D: Cosa indica il grafico semilogaritmico di Λ_n?
R: Crescita **moderata** per Leja vs crescita **esplosiva** ($2^n/n$) per equispaziati. Le oscillazioni sono naturali: aggiungere un nodo può temporaneamente migliorare la distribuzione.

Q14: Crossover temporale DLP vs DLP2

D: Quando e perché DLP2 diventa più efficiente?
R: Intorno a $d \approx 30$-40. DLP ha overhead per produttoria, DLP2 ha setup LU ma scala meglio. Conferma le previsioni teoriche $O(N \cdot d^2)$ vs costanti diverse.

IMPLEMENTAZIONE DETTAGLIATA

Q15: Pipeline di interpolazione completa

D: Passi esatti per il test di interpolazione?
R:

1. **Selezione nodi:** `nodi = algoritmo_migliore(x, d)`
2. **Costruzione V:** `V = cos(acos(z) * (0:length(z)-1))`
3. **Risoluzione:** `c = V \ f(z)`
4. **Valutazione:** `p = cos(acos(x) * (0:length(z)-1)) * c`
5. **Errore:** `max(abs(p - f(x)))`

Q16: Perché `\` invece di `inv(V)*f_z`?

D: Motivazione per l'operatore backslash?
R: `\` usa LU con pivoting parziale (o decomposizioni più stabili). Calcolare esplicitamente l'inversa è numericamente sconsigliato e computazionalmente più costoso.

Q17: Gestione della distintività dei nodi

D: Come eviti nodi duplicati in DLP?
R: Se ripetessi un nodo già presente, la produttoria conterrebbe un fattore zero, non sarebbe mai massima. La greedy naturalmente seleziona nodi distinti.

Q18: Costruzione matrice di Vandermonde

D: Dimensioni e struttura di V?
R:

- **DLP test**: V è $(d+1)\times(d+1)$, quadrata per interpolazione
- **DLP2 setup**: V è $N\times(d+1)$, rettangolare per selezione nodi
- **Righe**: Punti di valutazione, **Colonne**: Gradi polinomiali

ANALISI NUMERICA AVANZATA

Q19: Condizionamento e stabilità numerica

D: Come gestisci i problemi di mal condizionamento?
R:

- **Base di Chebyshev**: Intrinsecamente meglio condizionata
- **Intervallo [-1,1]**: Standard per polinomi ortogonali
- **Clipping**: Prevenzione di domini non validi
- **LU con pivoting**: Stabilità numerica automatica

Q20: Complessità computazionale dettagliata

D: Analisi asintotica precisa degli algoritmi?
R:

- **DLP**: $O(N\cdot d^2)$ - d iterazioni, ognuna con N produttorie di lunghezza $O(d)$
- **DLP2**: $O(N\cdot d^2)$ costruzione V + $O(\min(N,d)^3)$ LU
- **leb_con**: $O(N\cdot d^2)$ - N valutazioni, ognuna con d produttorie
- **In pratica**: DLP2 più efficiente per $d > \sqrt{N}$

Q21: Estensioni e limitazioni

D: Come estenderesti a casi più generali?
R:

- **Intervalli [a,b]**: Trasformazione affine a [-1,1]
- **2D/3D**: Prodotti tensoriali o norme multivariate
- **Pesi**: Integrazione con misure non uniformi
- **Adattività**: Stima errore per aggiunta dinamica nodi

Q22: Validazione sperimentale

D: Come verifichi la correttezza dell'implementazione?
R:

- **Test regressione**: Confronto con implementazioni note
- **Proprietà teoriche**: Crescita Λ_n, distribuzione spaziale
- **Casi limite**: Gradi bassi, funzioni polinomiali esatte
- **Consistency check**: DLP vs DLP2 su stessi input

DOMANDE CRITICHE E AVANZATE

Q23: Fenomeno di Runge: spiegazione meccanica

D: Perché precisamente gli equispaziati falliscono?
R: L'errore di interpolazione è amplificato da Λ_n. Per equispaziati, $\Lambda_n \approx 2^n/n$ cresce esponenzialmente. Anche se $E_n(f) \to 0$, il prodotto $(1+\Lambda_n)E_n(f)$ può esplodere.

Q24: Ottimalità teorica dei nodi di Leja

D: I Leja sono ottimali nel senso di Lebesgue?
R: Non necessariamente ottimali, ma **quasi-ottimali**. I nodi di Chebyshev sono teoricamente ottimali per Λ_n, ma i Leja hanno il vantaggio dell'estendibilità nested.

Q25: Interpretazione dei picchi temporali

D: Fluttuazioni nei tempi per d≈45-50?
R: Effetti di:

- **Cache misses**: Pattern di accesso memoria
- **Pivoting complexity**: Variabilità nel numero di scambi

- **Garbage collection**: Allocazioni temporanee
  Non inficiano la validità dell'analisi asintotica.

Q26: Saturazione a precisione macchina

D: Cosa indica il plateau a ~10^{-16} nei Leja?
R: Barriera fisica: Errori di roundoff dominano l'errore di interpolazione. Oltre questo livello, l'accuratezza è limitata dalla rappresentazione IEEE 754 double precision.

Q27: Scelta dell'algoritmo "più efficiente" per Λ_n

D: Non è metodologicamente inconsistente?
R: È pragmatico e conforme ai requisiti. Alternative:

- Usare sempre DLP2 per purezza metodologica
- Calcolare Λ_n per entrambi e confrontare
  La traccia non specifica, quindi la scelta è accettabile.

Q28: Robustezza dell'implementazione

D: Gestione di casi edge e validazione input?
R:

```
% Validazioni presenti:
if isempty(z) || isempty(x)
if ~isvector(x) || ~isscalar(d) || d < 0
if length(x) < d+1
```

Copertura completa dei casi limite ragionevoli.

Q29: Interpretazione del successo sperimentale

D: Cosa dimostrano concretamente i risultati?
R:

1. **Efficienza**: DLP2 superiore per gradi alti
2. **Stabilità**: Leja mantengono Λ_n controllata
3. **Accuratezza**: Superiori su f(x)=1/(x-1.3) nel 80%+ dei casi
4. **Robustezza**: Degradazione graceful vs esplosione equispaziati

Q30: Rilevanza pratica e applicazioni

D: Quando useresti nodi di Leja in applicazioni reali?
R:

- **Interpolazione adattiva**: Aggiunta incrementale di nodi
- **Riduzione modelli**: Costruzione ROM stabili
- **Quadratura numerica**: Integrazione su nodi nested
- **Uncertainty quantification**: Chaos polinomiali robusti

FRASI READY-TO-USE PER OGNI GRAFICO

Grafico Tempi: *"Il crossover conferma l'analisi di complessità: DLP2 ha overhead iniziale ma scala meglio, diventando dominante per d > 30-40."*

Grafico Costante Lebesgue: *"La crescita logaritmica moderata dimostra la stabilità intrinseca dei nodi di Leja, con oscillazioni naturali dovute alla dinamica non-monotona dell'aggiunta di nodi."*

Grafico Errori: *"L'esplosione degli equispaziati evidenzia il fenomeno di Runge, mentre i Leja mantengono convergenza fino alla saturazione a precisione macchina."*