

1. (12 punti) Una macchina di Turing con “undo” (UTM) è una macchina di Turing deterministica a singolo nastro, che può annullare (undo) le operazioni che ha eseguito in precedenza. Oltre alle normali operazioni di spostamento a sinistra e a destra, una UTM può effettuare l’operazione di UNDO, che riporta la macchina alla configurazione immediatamente precedente nella computazione. Se la UTM esegue due UNDO in sequenza, allora ritorna indietro di due configurazioni, e così via per sequenze di UNDO più lunghe.
- (a) Dai una definizione formale della funzione di transizione di una UTM.
 - (b) Dimostra che le UTM riconoscono la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili. Usa una descrizione a livello implementativo per definire le macchine di Turing.
2. (12 punti) Un linguaggio B è *emozionato* se ogni stringa in B assume la forma ww per qualche $w \in \{0, 1\}^*$. Ad esempio, sia $\{00, 1111, 1010\}$ che \emptyset sono linguaggi emozionati, mentre $\{00, 10\}$ non lo è. Considera il problema di determinare se il linguaggio di una TM M è emozionato.
- (a) Formula questo problema come un linguaggio EX_{TM} .
 - (b) Dimostra che il linguaggio EX_{TM} è indecidibile.
3. (12 punti) Date m sostanze nutritive ed un menu di n alimenti che forniscono tali sostanze nutrienti, si desidera determinare se esiste un piccolo insieme di alimenti che forniscano tutti i nutrienti di cui avete bisogno. Se ogni alimento $i = 1, \dots, n$ fornisce un insieme $S_i \subseteq \{1, \dots, m\}$ di nutrienti, una *dieta valida* è un insieme T di alimenti che, nel loro insieme, forniscono tutti gli m nutrienti: $\bigcup_{i \in T} S_i = \{1, \dots, m\}$. Definiamo il linguaggio

$$DIET = \{\langle S_1, \dots, S_n, k \rangle \mid \text{esiste una dieta valida } T \text{ di dimensione } |T| = k\}.$$

- (a) Dimostra che $DIET$ è un problema NP.
- (b) Una copertura di vertici di un grafo G è un insieme di vertici T tale che ogni arco del grafo ha almeno una estremità su un vertice in T . Sappiamo che il linguaggio $VERTEX-COVER = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ ha una copertura di vertici di dimensione } k\}$ è NP-completo. Dimostra che $DIET$ è NP-hard, usando $VERTEX-COVER$ come problema NP-hard di riferimento.