Esercizio 2. Siano X, Y variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *indipendenti* e a valori in $\{0,1\}$. Poniamo

$$Z \doteq \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{(0,0)\}}(X,Y) + \mathbf{1}_{\{(0,1),(1,0)\}}(X,Y) + \frac{4}{5} \cdot \mathbf{1}_{\{(1,1)\}}(X,Y).$$

(i) Si esprima $\mathbf{E}[Z]$ in termini di $p \doteq \mathbf{P}(X=1)$, $q \doteq \mathbf{P}(Y=1)$.

(ii) Si esprima $\operatorname{var}[Z]$ in termini di p, q.

(iii) Si calcoli $\mathbf{E}[Z]$ supponendo che $p = 5/7$.

DISCRETA

$$E(Z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x \in X} x \cdot P_X(x)$$

$$P(X) \to P(X, Y)$$

$$= P(X) \cdot P(Y) \leftarrow \text{IND}$$

$$p \to E \qquad (1-p) \to E^c$$

$$E \begin{cases} 0 & (1-p). \\ 1 & (p) \end{cases} \to \begin{matrix} p \,/\, 1-p \\ q \,/\, 1-q \end{matrix}$$

SE $X=1 \to P\,(q)\,/(1-q)$

SE $Y=1 \to P(p)\,/(1-p)$

es.

$Z \to P(X=1, Y=1) \dots$

(ALTRO ...)

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \cancel{1_{(0,0)}}(x,y) + \underbrace{1_{(0,1)}}_{y=1} \cdot \underbrace{1_{(1,0)}}_{x=1}$$

0

$$+ \frac{4}{5} \cdot \underbrace{1_{(1,1)}}_{\substack{x=1 \\ y=1}}(x,y) = 1 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$$

$$= \frac{5+4+4}{5} = \frac{13}{5}$$

$$= \frac{4}{5} \left(\underline{P(X=1)} + P(Y=1)\right)$$

$\downarrow$

$\mathrm{var}(z)$

$\downarrow$

termini di p e q

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \; \underset{\uparrow \quad \uparrow}{(0,0)} \qquad + \; 1 \; \underline{(0,1)} \; \underline{(1,0)}$$

$$(1-p)\;(1-q) \qquad (1-p)\; q \qquad (1-q)\; p$$

$\longrightarrow$

$$\frac{1}{2}(1-p)(1-q) + (1-p) \cdot q + p(1-q)$$

$$+ \frac{4}{5}(p)(q)$$

$\uparrow$

$E[z]$

$\downarrow$

$E[z^2]$ $\rightarrow$ $\mathrm{var}(z)$

$$= E(z)^2 - (E(z))^2$$

Esercizio 4. Siano X, Y, Z variabili aleatorie indipendenti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dove X ha distribuzione di Bernoulli di parametro $1/2$, Y distribuzione uniforme continua su $(0, 1)$ e Z distribuzione di Poisson di parametro due.

Si determini la legge di $M \doteq \max\{X, Y, Z\}$ e si decida se essa è assolutamente continua o meno.

LEGGE → SOMMA DELLE SINGOLE VAR. ALEATORIE

$$\underbrace{F_M(m)}_{\text{LEGGE}} \rightarrow P(\text{MAX}(X, Y, Z)$$

$$\underbrace{P(X \leq m, Y \leq m, Z \leq m)}_{\text{MAX}}$$

$X \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$

$p \rightarrow x = 1$

$(1-p)$ altrimenti

$$\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } m \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq m < 1 \\ 1 & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

$Y \sim \text{Unif}(0,1)$

$$\frac{1}{b-a} \rightarrow \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\frac{(Y \leq m)}{\ } \rightarrow y \begin{cases} 0 & \text{se } m \leq 0 \\ m & \text{se } 0 < m < 1 \\ 1 & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

\

$Y > m \;/\; y \leq m$

$Z \sim \text{Poiss}(2)$

$$\lambda \cdot e^{-\lambda} = \underbrace{2 \cdot e^{-2}}_{\text{DENSITÀ}}$$

↓

LEGGE | DISTRIBUZIONE

se $m < 0 \rightarrow 0$

se $m \geq 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor m \rfloor} e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}$

se $m < 0 \rightarrow 0$

se $0 < m < 1$

$$\underline{m \cdot 1} \cdot \underbrace{\frac{e^{-2}}{2}} \cdot \lfloor 1 \rfloor \cdot 1_{(0,1)} \cdot M$$

UNIF · POISSON

$$m \cdot \frac{e^{-2}}{2} \cdot$$

P

$(X \leq m) \cdot (Y \leq m) \cdot$

$(Z \leq m)$

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono in $\mathbb{R}$):

(i) X è assolutamente continua con densità data da $f_X(x) \doteq \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{[-4,-3)}(x) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{[3,4)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,\pi/2)}(x) + \mathbf{1}_{[\pi/2,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X = \exp(Z)$ per una variabile aleatoria Z uniforme continua su $(0, 2)$.

$$\frac{1}{2} \cdot 1_{(-4;-3)}^{(x)} \cdot \frac{1}{2}(3,4)^{(x)}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\int_{-4}^{-3} \frac{1}{2} \cdot x\, dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{-3} x\, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{3}^{4} x\, dx = \frac{1}{2}\left(9 - 16 + 16 - 9\right)$$

ANSATZ $\Rightarrow$ MA LEGGGI...

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,\pi/2)}(x) + \mathbf{1}_{[\pi/2,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X = \exp(Z)$ per una variabile aleatoria Z uniforme continua su $(0, 2)$.

LEGGE

DERIVATA

$$F_X := \sin(x) \cdot \mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}(x) + \cancel{\mathbb{1}_{(\pi/2,\infty)}(x)}$$

$$\underline{f(x)} = \cos(x) \cdot \mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}(x)$$

DENSITÀ

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$E[X] = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x)\, dx$$

$$X \sim \exp(\underset{\uparrow}{Z})$$

$$Z \sim \underline{\text{unif}}\,[0,2)$$

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$E[X] \sim \exp(Z) \rightarrow \exp(\tfrac{1}{2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{exp}}{\underbrace{e^{Z}}} \cdot \underset{\text{unif}}{\underbrace{x \cdot f_Z(x)}} \, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2} e^{x} \, dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

$$e[x^2] = [e^{2z}]$$

$$= \int x^2 \cdot f_x(x)\,dx \cdot \underbrace{\frac{1}{b-a}}_{\text{DENSITÀ UNIF}}$$

$$= \int e^{2x} \cdot f_z(x)\,dx \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$

$$\dots \frac{1}{4}\left(e^4 - 1\right)$$