$$T(n) \leq cn$$

Si procede induttivamente:

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & \frac{2}{3}T(n-1) + 2n \\ & \leq & \frac{2}{3}c(n-1) + 2n \\ & \leq & cn \end{array}$$

Affinché l'ultima disuguaglianza valga, occorre che

$$c(\frac{1}{3}n + \frac{2}{3}) \geq 2n$$

Ora

$$c(\frac{1}{3}n + \frac{2}{3}) \geq c\frac{2}{3}n \geq 2n$$

dove l'ultima disuguaglianza è certamente verificata per per ogni n, se $c \geq 3$.

Domanda 14 Dare una soluzione asintotica per la ricorrenza $T(n) = 3T(n/2) + n(n+1)$.

Soluzione: Si usa il master theorem con $a = 3$, $b = 2$, $f(n) = n(n+1)$. Si deve confrontare $f(n)$ con $n^{\log_b a}) = n^{\log_2 3}$ ed essendo che $\log_2 3 < 2$ per qualunque $0 < \epsilon < 2 - \log_2 3$ si vede facilmente che $f(n) = \Omega(n^{\log_2 3 + \epsilon})$.

Per concludere che $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$ usando il caso 3 del master theorem occorre dimostrare la regolarità di $f(n)$, ovvero che $af(n/b) < kf(n)$ per $0 < k < 1$, asintoticamente. Si imposta

$$af(n/b) = 3n/2(n/2+1) < kn(n+1)$$

e si vede che $n/2 + 1 < 5n/8$ per $n > n_0 = 8$, quindi sotto questa condizione

$$af(n/b) = 3n/2(n/2+1) < 15/16n(n+1)$$

ovvero $k = 15/16$ va bene.

Domanda 15 Data la ricorrenza $T(n) = T(n/2) + T(n/3) + \sqrt{n} + 2$ dimostrare che ha soluzione $T(n) = O(n)$. Il limite è stretto, ovvero vale anche $T(n) = \Omega(n)$? [Questa seconda parte della domanda, per un errore nella scelta dei coefficienti risultava più complessa di quanto preventivato, quindi non è stata considerata nella valutazione. Allego comunque la soluzione per completezza.]

Soluzione: Per dimostrare che $T(n) = O(n)$ occorre trovare $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$, $T(n) \leq cn$. Procediamo con un ragionamento induttivo

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & T(n/2) + T(n/3) + \sqrt{n} + 2 \\ & \leq & cn/2 + cn/3 + \sqrt{n} + 2 \\ & = & cn/2 + cn/3 + \sqrt{n} + 2 \\ & = & 5/6cn + \sqrt{n} + 2 \\ & = & 5/6cn + n + 2 \\ & \leq & cn \end{array}$$

vale se $1/6cn \geq n + 2\text{m}$, quindi, ad esempio, per $c \geq 7$ e $n \geq 12$.

Il limite non è stretto. Un tentativo di dimostrazione induttiva che $T(n) \geq dn$ per qualche $d > 0$ fallisce. Tuttavia questo non consente di concludere.

Si può invece dimostrare che $T(n) = O(n^\alpha)$ con $\alpha = 5/6$. Infatti, ancora in modo induttivo:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + T(n/3) + \sqrt{n} + 2 \\
&\le cn/2 + cn/3 + \sqrt{n} + 2 \\
&= c(n/2)^\alpha + c(n/3)^\alpha + \sqrt{n} + 2 \quad [\text{dato che } \sqrt{n} + 2 \le n^\alpha \text{ per } n \ge 5] \\
&\le cn^\alpha((1/2)^\alpha + (1/3)^\alpha) + n^\alpha \\
&\le cn^\alpha
\end{aligned}$$

vale se $c(1 - (1/2)^\alpha - (1/3)^\alpha)n^\alpha \ge n^\alpha$, quindi, osservando che la quantità $1 - (1/2)^\alpha - (1/3)^\alpha > 0$, è sufficiente scegliere $c \ge 1/(1 - (1/2)^\alpha - (1/3)^\alpha)$ e $n \ge 5$.

Questo prova che $T(n) = O(n^\alpha)$ e quindi non può essere $T(n) = \Omega(n)$.

Domanda 16 Data la ricorrenza $T(n) = 5T(n/3) + (n-2)^2$, trovare la soluzione asintotica.

Soluzione: Si usa il master theorem con $a = 5$, $b = 3$, $f(n) = (n-2)^2$. Si deve confrontare $f(n)$ con $n^{\log_b a}) = n^{\log_3 5}$ ed essendo che $\log_3 5 < 2$ per qualunque $0 < \epsilon < 2 - \log_2 3$ si vede facilmente che $f(n) = \Omega(n^{\log_2 3 + \epsilon})$.

Per concludere che $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$ usando il caso 3 del master theorem occorre dimostrare la regolarità di $f(n)$, ovvero che $af(n/b) < kf(n)$ per $0 < k < 1$, asintoticamente. Si imposta

$$af(n/b) = 5(n/3 - 2)^2 < k(n-2)^2$$

e si osserva

$$5(n/3 - 2)^2 < 5((n-2)/3)^2 = 5/9(n-2)^2$$

per cui si può scegliere $k = 5/9 < 1$ e n qualunque.

Domanda 17 Dare la definizione di $\Omega(f(n))$. Mostrare che se $f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$ allora $f(n) = \Omega(h(n))$.

Soluzione: Si ha che

$$\Omega(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \ge n_0.\ 0 \le cg(n) \le f(n)\}.$$

Se $f(n) = \Omega(g(n)$ e $g(n) = \Omega(h(n))$ allora esistono $c_1, c_2 > 0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \ge n_1$

$$0 \le c_1 g(n) \le f(n) \tag{1}$$

e per ogni $n \ge n_2$

$$0 \le c_2 h(n) \le g(n) \tag{2}$$

Ne consegue che per ogni $n \ge \max\{n_1, n_2\}$, moltiplicando (2) per c_1 si ha

$$0 \le c_1 c_2 h(n) \le c_1 g(n) \le f(n)$$

ovvero, indicato con $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e $c = c_1 c_2$, per ogni $n \ge n_0$,

$$0 \le ch(n) \le f(n)$$

ovvero $f(n) = \Omega(h(n))$.

Domanda 18 Dare la definizione di $\Theta(f(n))$. Mostrare che $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$.

Soluzione: Per la prima parte

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \exists c, c_2 > 0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_1 f(n)\}.$$

Per dimostrare che $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$, ricordiamo che

1. $O(f(n)) = \{g(n) \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \exists c > 0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq g(n) \leq cf(n)\}$
2. $\Omega(f(n)) = \{g(n) \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \exists c > 0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq cf(n) \leq g(n)\}$.

Proviamo separatamente le due inclusioni. Se $g(n) \in \Theta(n)$ allora chiaramente $g(n) \in \Omega(f(n))$, grazie all'esistenza di n_0 e c_1, e similmente $g(n) \in O(f(n))$, grazie all'esistenza di n_0 e c_2.

Per il contrario, se $g(n) \in \Omega(f(n))$ e $g(n) \in O(f(n))$, per la prima esistono $c_1 > 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \geq n_1$ vale

$$0 \leq c_1 f(n) \leq g(n)$$

e per la seconda esistono $c_2 > 0$, $n_2 \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \geq n_2$ vale

$$0 \leq g(n) \leq c_2 f(n)$$

Quindi, detto $n_0 = \max(n_1, n_2)$ per ogni $n \geq n_0$,

$$0 \leq c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_1 f(n)$$

ovvero $f(n) \in \Theta(f(n))$.