

Esercizi per il Corso di ALGEBRA LINEARE

Spazi vettoriali

1.¹ Si dica se gli insiemi seguenti sono degli spazi vettoriali su \mathbb{R} :

(a) L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, per le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite rispettivamente da

$$x \oplus y = xy, \quad \forall x, y \in A$$

$$\lambda \cdot x = x^\lambda, \quad \forall x \in A, \lambda \in \mathbb{R}$$

(b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} che si annullano in 1 oppure in 4:

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \text{ oppure } f(4) = 0\}$$

con l'usuale addizione e l'usuale moltiplicazione per uno scalare.

(c) L'insieme dei polinomi (a coefficienti reali) nella variabile x :

$$\mathbb{R}[x] = \{f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

con l'usuale addizione e l'usuale moltiplicazione per uno scalare.

2.¹ Si dica se i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 sono dei sottospazi vettoriali:

(a) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1 - 3x_2 = 0 \right\}$

(b) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + 4x_2 = 3 \right\}$

(c) $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1 + x_2^2 = 0 \right\}$

¹Esercizio estratto/adattato dal libro F. Bottacin, *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria*, Società Esculapio (2021)