Teoria dei Nodi di Leja Approssimati

1. Fondamenti Teorici

Sequenza di Leja

I **nodi di Leja** sono una sequenza di punti $\{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_s\}$ definita ricorsivamente:

- ξ_0 è un punto arbitrario nell'intervallo $I = [a,b]$
- Per $s \geq 1$, ξ_s è scelto per massimizzare $|\det(VDM(\xi_0, ..., \xi_{s-1}, \xi))|$

Proprietà del Determinante di Vandermonde

Proprietà ricorsiva fondamentale:

```
det(VDM(ξ₀, ..., ξₛ)) = det(VDM(ξ₀, ..., ξₛ₋₁)) · ∏ₗ₌₀ˢ⁻¹(ξₛ - ξₗ)
```

Questo significa che **massimizzare il determinante equivale a massimizzare la produttoria**:

```
ξₛ = arg max_{x∈I} ∏ₗ₌₀ˢ⁻¹ |x - ξₗ|
```

Approssimazione Discreta

Su un intervallo continuo la massimizzazione è computazionalmente costosa. Si usa una **mesh discreta** $X_m = \{x_1, ..., x_m\}$ e si cerca:

```
ξₛ ≈ arg max_{x∈Xₘ} ∏ₗ₌₀ˢ⁻¹ |x - ξₗ|
```

2. Algoritmi Implementati

Algoritmo 1 (DLP): Approccio Diretto

- **Complessità**: $O(d^2M)$ - crescita quadratica
- **Procedura**: Per ogni grado s, calcola la produttoria per tutti i punti della mesh
- **Vantaggio**: Implementazione diretta e intuitiva
- **Svantaggio**: Computazionalmente costoso per gradi elevati

Algoritmo 2 (DLP2): Fattorizzazione LU

- **Complessità**: O(dM) - crescita quasi lineare (teorica)
- **Base**: Utilizza la matrice di Vandermonde con **polinomi di Chebyshev**

```
V(i,j) = cos((j-1) · arccos(xᵢ)) = Tⱼ₋₁(xᵢ)
```

- **Procedura**: Fattorizzazione LU con pivoting PA = LU, i primi d+1 elementi della permutazione P sono i nodi di Leja
- **Vantaggio**: Più efficiente per gradi elevati
- **Motivazione Chebyshev**: Migliore condizionamento numerico nell'intervallo [-1,1]

3. Costante di Lebesgue

Definizione

La **costante di Lebesgue** misura la stabilità dell'interpolazione:

```
Λₙ = max_{x∈I} λₙ(x) = max_{x∈I} ∑ᵢ₌₀ⁿ |ℓᵢ(x)|
```

dove $\ell_i(x)$ sono i **polinomi di Lagrange**.

Significato Pratico

- **Termometro della stabilità**: L'errore di interpolazione è al massimo Λ_n volte l'errore di approssimazione
- **Controllo dell'amplificazione**: Λ_n piccola → interpolazione stabile
- **Crescita**: Per nodi ottimali cresce come O(log n), per nodi equispaziati come $O(2^n/n)$

4. Risultati Sperimentali

Confronto Prestazioni (dai grafici)

- **DLP2 è più efficiente** per gradi elevati (d > 20 circa)
- **DLP** ha prestazioni migliori per gradi bassi
- **Picchi sporadici** in DLP2 dovuti alla fattorizzazione LU

Stabilità (Costante di Lebesgue)

- **Crescita contenuta**: Λ_n rimane nell'ordine di 10^1-10^2 fino a d=50
- **Stabilità superiore** rispetto ai nodi equispaziati

- **Comportamento oscillatorio** tipico ma controllato

Test di Interpolazione f(x) = 1/(x-1.3)

- **Nodi di Leja**: Errore stabile, crescita controllata
- **Nodi equispaziati**: Esplosione esponenziale dell'errore (fenomeno di Runge)
- **Differenza drammatica**: Fattore 10^6-10^8 a favore dei nodi di Leja

5. Punti Chiave per l'Esposizione

Architettura Software

1. **DLP.m**: Implementazione diretta con produttoria
2. **DLP2.m**: Implementazione efficiente con LU e base di Chebyshev
3. **leb_con.m**: Calcolo costante di Lebesgue tramite polinomi di Lagrange
4. **main.m**: Orchestrazione completa con confronti e visualizzazioni

Scelte Implementative Critiche

- **Base di Chebyshev** in DLP2 per migliore condizionamento
- **Validazione input** robusta in tutte le funzioni
- **Gestione formato vettori** (riga/colonna) per compatibilità
- **Misurazione tempi** con tic/toc per analisi prestazioni

Limitazioni e Considerazioni

- **Mesh density**: N=10000 punti bilanicia precisione e costo computazionale
- **Intervallo [-1,1]**: Standard per polinomi di Chebyshev
- **Funzione test**: Singolarità in 1.3 evidenzia differenze tra metodi
- **Scaling**: DLP2 preferibile per applicazioni ad alto grado

Connessioni Teoriche

- **Teorema di Weierstrass**: Esistenza dell'approssimazione polinomiale
- **Stima di Lebesgue**: $||f - p_n||\infty \leq (1 + \Lambda_n) \cdot E_n(f)$
- **Fenomeno di Runge**: Instabilità dei nodi equispaziati
- **Ottimalità asintotica**: Nodi di Leja vicini all'ottimalità teorica