- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale. Applicare tali condizioni per dimostrare che ( x1 , x2 , x3 ) = ( 1 , 4 , 0 ) è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_2 + x_3 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 - x_2 + 2x_3 & \le & 1 \\ & -2x_1 + x_2 & \le & 2 \\ & 2x_2 & \ge & -3 \\ & 2x_1 + x_3 & = & 2 \\ & x_1 \text{ libera } x_2 \ge 0 \ x_3 \le 0 & & \end{array} \rightarrow$$

P

[ min → max [F.O.] ]

(DUALITÀ FORTE) STESSO VAL F.O.

(DUALITÀ DEBOLE) LB / UB

**Teorema 5** Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^T x : x \ge 0, Ax \ge b\}$$
$$\max\{u^T b : u \ge 0, u^T A \le c^T\}$$

$$\begin{array}{ccll} \textit{x e u ottime} & & Ax \ge b \wedge x \ge 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ \textit{primale e duale (risp.)} & \Longleftrightarrow & u^T A \le c^T \wedge u \ge 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ & & \left.\begin{array}{l} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

In altri termini, siano $u$ e $x$ soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \ge 0, Ax \ge b\}$ e $\max\{u^T b : x \ge 0, u^T A \le c^T\}$. $x$ e $u$ sono ottime se e solo se:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | variabile primale positiva | $x_j > 0 \Rightarrow u^T A_j = c_j$ | vincolo duale saturo |
| 2) | vincolo duale *lasco* | $u^T A_j < c_j \Rightarrow x_j = 0$ | variabile primale nulla |
| 3) | variabile duale positiva | $u_i > 0 \Rightarrow a_i^T x = b_i$ | vincolo primale saturo |
| 4) | vincolo primale *lasco* | $a_i^T x > b_i \Rightarrow u_i = 0$ | variabile duale nulla |

① VERIFICA AMM. PRIMALE

$\min\ u_1 + 2u_2 - 3u_3 + 2u_4$

DUALE

1/4/0

$u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0$

$u_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0$

Enunciare le condizioni di complementarietà primale-dual
condizioni per dimostrare che ( x1 , x2 , x3 ) = ( 1 , 4 , 0 )
problema:

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_2 + x_3 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 - x_2 + 2x_3 & \le & 1 \\ & -2x_1 + x_2 & \le & 2 \\ & 2x_2 & \ge & -3 \\ & 2x_1 + x_3 & = & 2 \\ & x_1 \text{ libera } x_2 \ge 0 \ x_3 \le 0 & & \end{array}$$

PRIMALE

$-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$

$-u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 1$

$+2u_1 + u_4 \le 1$

$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \le 0,$

$u_4$ LIBERA

1) Verifica dell'ammissibilità primale della soluzione data

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \le 1\ (OK)$$
$$-2x_1 + x_2 = 2 \le 2\ (OK)$$
$$2x_2 = 8 \ge -3\ (OK)$$
$$2x_1 + x_3 = 2 = 2\ (OK)$$
$$x_1\ libera, x_2 = 4 \ge 0, x_3 = 0 \le 0\ (domini\ OK)$$

② DUALE

2) Passaggio al duale

$$\min u_1 + 2u_2 - 3u_3 + 2u_4$$
$$s.t. -u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$$
$$-u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 1$$
$$2u_1 + u_4 \le 1$$
$$u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \le 0, u_4\ libera$$

$-u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 1$

$x_2(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1) = 0$

③ APPLICAZIONE CCPD

Primo vincolo primale: $u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \rightarrow u_1(-6) = 0 \rightarrow u_1 = 0$ (prima condizione)

Secondo vincolo primale: $u_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \rightarrow u_2(0) \rightarrow 0$ // (non si deducono condizioni di complementarietà su $u_2$)

Terzo vincolo primale: $u_3(2x_2 + 3) = 0 \rightarrow u_3(11) \rightarrow u_3 = 0$ (seconda condizione)

Quarto vincolo primale di uguaglianza, pertanto non ci sono da imporre condizioni di complementarietà con la relativa variabile $u_4$

Primo vincolo duale di uguaglianza: non si impongono condizioni di complementarietà con $x_1$ (in quanto la condizione $(-u_1 - 2u_2 + 2u_4)x_1 = 0$ è diretta conseguenza dell'ammissibilità duale; l'equazione $-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$ sarà comunque da considerare come condizione di ammissibilità duale

Secondo vincolo duale: $(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)x_2 \Rightarrow (-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1)4 \Rightarrow -u_1 + u_2 + 2u_3 - 1 = 0$ (terza condizione)

Terzo vincolo duale: $(2u_1 + u_4 - 1)x_3 = 0 \rightarrow (2u_1 + u_4 - 1)0 = 0$ //

4) Sistema delle condizioni CCPD e ammissibilità duale trovate

$u_1 = 0$ (ccpd) $\quad u_1(6) = 0 \quad \rightarrow\ ! = 0$ / CONSIDERA...

$u_3 = 0$ (ccpd) $\quad u_3(11) = 0$

$-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1$ (ammissibilità duale) $\quad 4(-u_1 + u_2 + 2u_3 - 1) = 0$ CONSIDERA

$-u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0$ (ammissibilità duale) $\quad 11(-u_1 + 2u_2 + 2u_4) = 0$

$u_2 - 1 = 0$

$\downarrow$

$u_2 = 1$

$-2 + 2u_4 = 0$

$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0, u_4 = 1$

$2u_4 = 2 \rightarrow u_4 = 1$

5) Verifica ammissibilità duale

La soluzione duale trovata:

- Soddisfa i tre vincoli duali: $-u_1 - 2u_2 + 2u_4 \rightarrow 0 = 0, -u_1 + u_2 + 2u_3 = 1 \geq 1, 2u_1 + u_4 = 1 \leq 1$
- Soddisfa i vincoli di dominio: $u_1 = 0 \geq 0, u_2 = 1 \geq 0, u_3 = 0 \leq 0, u_4$ *libera*

6) Conclusioni

Abbiamo a disposizione una soluzione primale $x$ e una soluzione duale $u$ tali che:

- $x$ è ammissibile primale (come da verifica);
- $u$ è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica);
- $x$ e $u$ sono in scarti complementari (per costruzione).

DUALITÀ FORTE ...

$\downarrow$

Pertanto, le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale,

(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe 4 e verifica il corollario della dualità forte)

**2.** Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso, a partire dalla base relativa alle variabili $x_1, x_2, x_3$ e applicando la regola di Bland

$\downarrow$

INDICE POSIZIONALE MINORE

$$\begin{array}{lllll}
\boxed{\max} & x_1 & +5x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & \leq 5 \\
& x_1 & + x_2 & & \geq -1 \\
& & x_2 & +2x_3 & = -2 \\
& x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

$$\min\ -x_1 - 5\hat{x}_2$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{s.t.} & x_1 & +x_4 & & = 5 & x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4 \\
& x_1 & +x_2 & +x_5 & = -1 & x_5, x_6 \geq 0 \\
& & x_2 & +2x_3 & = -2 &
\end{array}$$

Passo alla forma standard:

1. Funzione obiettivo di minimo:

$$\min -x_1 - 5x_2$$

2. vincoli di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
x_1 & +x_2 & & & -x_5 & = & -1 \\
& x_2 & +2x_3 & & & = & -2
\end{array}$$

3. variabili non negative: effettuo la sostituzione $\hat{x}_2 = -x_2, \hat{x}_2 \geq 0$

$$\begin{array}{lllllllll}
\min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
& x_1 & -\hat{x}_2 & & & -x_5 & = & -1 \\
& & -\hat{x}_2 & +2x_3 & & & = & -2 \\
& x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

4. termini noti non negativi

$$\begin{array}{lllllllll}
\min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
& -x_1 & +\hat{x}_2 & & & +x_5 & = & +1 \\
& & +\hat{x}_2 & -2x_3 & & & = & +2 \\
& x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
 & -x_1 & +\hat{x}_2 & & & +x_5 & = & +1 \\
 & & +\hat{x}_2 & -2x_3 & & & = & +2 \\
 & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

| | $x_1$ | $\hat{x}_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | $-1$ | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ? | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| ? | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ? | 0 | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 2 |

PIVOTING = RIGA/COLONNA

↓

GAUSS-JORDAN

| | $x_1$ | $\hat{x}_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | $-1$ | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ? | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| ? | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| ? | 0 | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 2 |

Procedo quindi mettendo il tableau in forma canonica rispetto alla base data: faccio entrare in base la variabile $x_1$ trasformando, con operazioni elementari, la colonna di $x_1$ nella prima colonna della matrice identità sormontata da 0;

| | $x_1$ | $\hat{x}_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 5 | $R'_0 \leftarrow R_0 + R'_1$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | $R'_1 \leftarrow R_1$ |
| ? | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 6 | $R'_2 \leftarrow R_2 + R'_1$ |
| ? | 0 | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 2 | $R'_3 \leftarrow R_3$ |

faccio entrare in base la variabile $\hat{x}_2$ (corrispondente a $x_2$) trasformando, con operazioni elementari, la colonna di $\hat{x}_2$ nella seconda colonna della matrice identità sormontata da 0;

| | $x_1$ | $\hat{x}_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 0 | 0 | 0 | $-4$ | $-5$ | $-25$ | $R'_0 \leftarrow R_0 - 5R'_2$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | $R'_1 \leftarrow R_1$ |
| $\hat{x}_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 6 | $R'_2 \leftarrow R_2$ |
| ? | 0 | 0 | $-2$ | $-1$ | $-1$ | $-4$ | $R'_3 \leftarrow R_3 - R'_2$ |

faccio entrare in base la variabile $x_3$ trasformando, con operazioni elementari, la colonna di $x_3$ nella terza colonna della matrice identità sormontata da 0.

$B = [x_1, \hat{x}_2, x_3]$

| | $x_1$ | $\hat{x}_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 0 | 0 | 0 | $-4$ | $-5$ | $-25$ | $R'_0 \leftarrow R_0$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | $R'_1 \leftarrow R_1$ |
| $\hat{x}_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 6 | $R'_2 \leftarrow R_2$ |
| $\leftarrow x_3$ | 0 | 0 | 1 | $\boxed{1/2}$ | 1/2 | 2 | $R'_3 \leftarrow -1/2R_3$ |

Il tableau è ora in **forma canonica** rispetto alla base $x_1, \hat{x}_2, x_3$, come richiesto. Inoltre la base proposta è **ammissibile**, essendo tutte le variabili della forma standard $\geq 0$ e, quindi, possiamo partire con il simplesso.

PIÙ VARIABILI CHE ENTRANO IN BASE

↓

DEGENERE

Iterazione 1

Ci sono due variabili candidate a entrare in base ($x_4$ e $x_5$) e, applicando la regola di Bland, *entra in base* $x_4$.

Esce dalla base $\arg\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{2}{1/2}\right\} = \arg\{4\} = x_3$

Eseguo quindi l'operazione di pivot sull'elemento cerchiato (riquatrato per motivi tipografici, ndr) nella tabella precedente, ottenendo:

| | $x_1$ | $\hat{x}_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 0 | 0 | 8 | 0 | $-1$ | $-9$ | $R'_0 \leftarrow R_0 + 4R'_3$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-2$ | 0 | $-1$ | 1 | $R'_1 \leftarrow R_1 - R'_3$ |
| $\hat{x}_2$ | 0 | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 2 | $R'_2 \leftarrow R_2 - R'_3$ |
| $\leftarrow x_4$ | 0 | 0 | 2 | 1 | $\boxed{1}$ | 4 | $R'_3 \leftarrow 2R_3$ |

Iterazione 2

C'è una sola variabile candidata a entrare in base: *entra in base* $x_5$.

Esce dalla base $\arg\min \left\{X, X, \frac{4}{1}\right\} = \arg\{4\} = x_4$

Eseguo quindi l'operazione di pivot sull'elemento cerchiato (riquatrato per motivi tipografici, ndr) nella tabella precedente, ottenendo:

ILLIMITATO

↓

COSTI RIDOTTI TUTTI ≤ 0

| | $x_1$ | $\hat{x}_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 0 | 0 | 10 | 1 | 0 | $-5$ | $R'_0 \leftarrow R_0 + R'_3$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | $R'_1 \leftarrow R_1 + R'_3$ |
| $\hat{x}_2$ | 0 | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 2 | $R'_2 \leftarrow R_2$ |
| $x_5$ | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 4 | $R'_3 \leftarrow R_3$ |

Non essendoci costi ridotti negativi, abbiamo raggiunto la condizione di arresto del simplesso per ottimalità della base trovata. Abbiamo quindi la soluzione ottima, per il problema in forma standard:

$$x_1 = 5, \hat{x}_2 = 2, x_5 = 4, x_3 = x_4 = 0 \qquad z_{MIN} = \boxed{-(-5) = 5}$$

Per il problema originario, la soluzione è:

$$x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 0 \qquad z = -5$$

con il primo vincolo soddisfatto all'uguaglianza ($x_4 = 0$) e il secondo vincolo lasco ($x_5 > 0$). Per verifica, i valori della funzione obiettivo e il modo di soddisfazione dei vincoli possono essere controllati sostituendo i valori delle variabili nella formulazione originaria.

SATURI (=) LASCHI (<, >)