Nome e cognome: ALESSANDRO PRIVITERA Classe: 5°D 12/05/2025

Recupero serie

A. (__/1) Dare una definizione di serie.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$a_n, n \in \mathbb{N}$

Una serie è la successione delle somme parziali.

Se definiamo la successione delle somme parziali, il valore della serie è il limite $\to \lim_{n\to\infty} S_n$

$\to S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ $\to S$ = CONVERGE, $\to \infty$ = DIVERGE

B. (__/2) Per ogni serie scrivi la ridotta di ordine 3 s_3

$\to$ RIDOTTA DI ORDINE n $\to$ SOMMA FINO AL TERMINE n-ESIMO

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n}$

$$\to \sum_{n=1}^{N=3} \frac{(-2)^n}{n} = \frac{(-2)^1}{1} + \frac{(-2)^2}{2} + \frac{(-2)^3}{3}$$

$$= \cancel{-2} + \cancel{2} - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

FATTORIALE...

$[\, 0! = 1 \;/\; 1! = 1 \;/\; 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$

$$\to \sum_{n=0}^{N=3} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{0!}{1!} + \frac{1!}{2!} + \frac{2!}{3!} + \frac{3!}{4!}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} + 1 = \frac{25}{12}$$

3. ~~$\sum_{n=4}^{+\infty} \log(n-3)$~~

C. (__/3) Studiare le seguenti serie geometriche, se sono convergenti calcolarne la somma.

FORMA: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(4-\sqrt{15}\right)^n$ q^n

$(4-\sqrt{15}) = 4 - 3.87 = \underline{0.16 < 1}$

CONVERGE A $\frac{1}{1-q}$

$S = \frac{a^{\text{SUCCESSIONE}} - 1}{r} = \frac{1}{1-(4-\sqrt{15})} = \frac{1}{-3+\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{15}-3)}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$

FORMA: $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}$

$\sim$ CONVERGE $\rightarrow \frac{1}{1-q}$ se $q<1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot 2^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{16} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $q<1 \rightarrow$ CONVERGE

q = RAGIONE $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a q^n = \frac{aq}{1-q}$ $\rightarrow \frac{1}{1-q}$

6. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^n+3^n}{6^n}}$

$\rightarrow \frac{1}{16} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ q^n

$= \frac{1}{16} \cdot \frac{aq}{1-q} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-1/2}{1-1/2} = \frac{1}{16} \cdot -\frac{1}{3} = -\frac{1}{48}$

D. (__/1) Dare una definizione di serie telescopica e descrivine la più famosa.

La serie telescopica è una serie in cui i termini si possono cancellare a coppie e separare i termini in somma. Un esempio è la serie di Mengoli.

CONVERGE AD 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) \Rightarrow \text{MENGOLI} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \simeq \frac{A}{n} - \frac{B}{(n+1)} \sim \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

E. (__/3) Studiare le seguenti serie telescopiche

7. $\sum_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}]$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} [\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}] = \underbrace{(\sqrt{0-1} - \sqrt{0-2})}_{0} + \underbrace{(\sqrt{1-1} - \sqrt{1-2})}_{1} + (\sqrt{2-1} - \sqrt{2-2}) \sim \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n-2} = \infty \qquad 1 \quad 0$$

DIVERGE

8. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right)$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \left[\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right] = \overbrace{\left(\frac{1}{0+5} - \frac{1}{0+6}\right)}^{n=0} + \left(\frac{1}{1+5} - \frac{1}{1+6}\right)$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} = \frac{1}{5}$$

9. ~~$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$~~

F. (__/1) Dare una definizione di serie armonica e farne un esempio dicendo se converge o diverge con motivazione.

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\right] \text{ SERIE ARMONICA} \qquad \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\right] \text{ SERIE ARMONICA GENERALIZZATA}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$$

$p > 1$ CONVERGE

$p < 1$ DIVERGE

LA SERIE DIVERGE → DIMOSTRAZIONE CON RAGGRUPPAMENTO TERMINI

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

INFINITI TERMINI $\gtrsim$ DIVERGE