Domande

INTEGRALI

1) Definizione di PRIMITIVA

*Una funzione F si dice **primitiva** di una funzione f in un intervallo I se è derivabile in I e per ogni $x \in I$ la sua derivata in x è uguale a $f(x)$, cioè se:*

$$F'(x) = f(x)$$

Per questo è chiamata anche antiderivata di $f(x)$, ossia l'integrale della derivata di una funzione è la funzione stessa.

*La primitiva di una funzione non è unica. Per esempio, oltre alla funzione $F(x) = x^2$, anche $G(x) = x^2 + 1$ è una primitiva di $f(x) = 2x$. Sono primitive di $f(x) = 2x$ anche tutte le funzioni definite nella forma $x^2 + c$, dove c è un numero reale qualsiasi. Le primitive di $f(x)$ sono dunque **infinite**.*

2) Definizione di integrale indefinito

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f si dice **integrale indefinito** della funzione f e si indica con il simbolo:

$$\int f(x)\,dx$$

che si legge "integrale indefinito di $f(x)$ in dx .

3) Linearità dell'integrale indefinito

*Una fondamentale proprietà dell'integrale indefinito è di essere **lineare**, ossia:*

- *L'integrale della somma di due funzioni è la somma degli integrali delle due funzioni*

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- *L'integrale del prodotto di una funzione per una costante è il prodotto della costante per l'integrale della funzione*

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

4) Somma di Riemann

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato, ed $f(x)$ una funzione limitata. Diremo che essa è Riemann integrabile in $[a,b]$ se e solo se risulta che l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono.

Se consideriamo i punti:

$$a = x_0, x_1, .. x_n = b$$

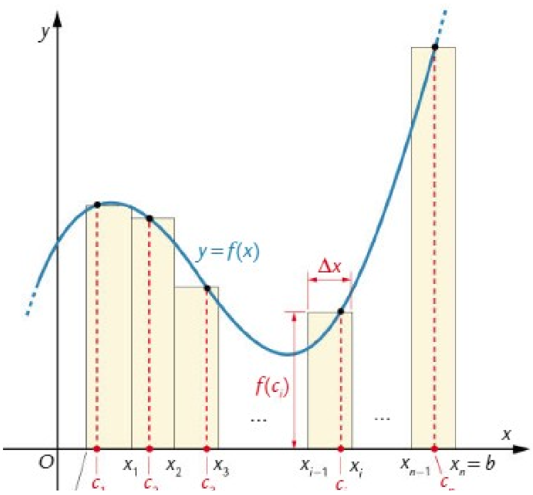
che suddividono l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli aventi la stessa ampiezza, uguale a:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

*Scelto in ciascuno degli n intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario c_i, chiamiamo **somma di Riemann** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ la somma:*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x$$

*Riemann sostanzialmente somma l'area di rettangoli di base Δx infinitesima, così da poter ottenere l'area della regione di piano, detta **trapezoide**, limitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$.*



5) Definizione di integrale definito

*Sia $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ una funzione continua. Si chiama **integrale definito** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ il $\lim_{n \to +\infty} S_n$, essendo S_n una somma di Riemann della funzione nell'intervallo. L'**integrale definito** viene indicato con il simbolo:*

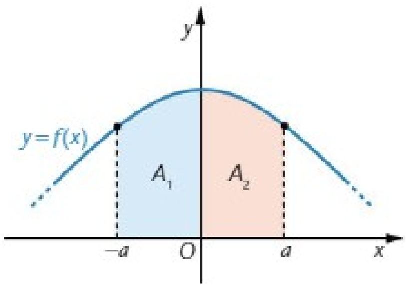
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

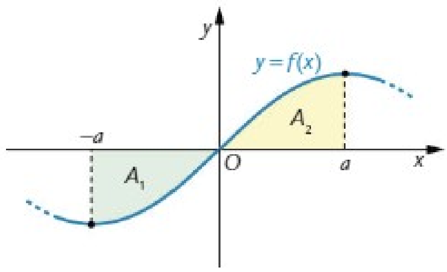
Che si legge "integrale da a a b di $f(x)$ indx".

6) Interpretazione geometrica dell'integrale definito

   *L'integrale definito di una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ dà l'**area con segno** della superficie sottesa al grafico della funzione in quell'intervallo.*

   Con segno in quanto l'area risulta positiva se la funzione è sopra l'asse x, negativa se la funzione è sotto l'asse x.





7) Proprietà dell'integrale definito

   - ***Linearità***

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

   - ***Additività***

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

   - ***Monotonia***

     Se $f(x)\leq g(x)$ per ogni x nell'intervallo $[a,b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$$