Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Esercizi per casa 9

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{di} \quad \mathbb{C}^4.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$. Si calcolino:

– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Si calcolino:

– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 2 e 3 .

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovaori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 2 e 3 degli sono diagonalizzabili oppure no.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 5. Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.
Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove α è **un numero reale non positivo**.

Per quali α numeri reali non positivi si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?