Automi e Linguaggi Formali
Esame scritto del 23 Luglio 2024

1. (9 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{1^m 0^n \mid 5m \leq 3n\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

2. (9 punti) La *traslitterazione* è un tipo di conversione di un testo da una scrittura a un'altra che prevede la sostituzione di lettere secondo modalità prevedibili. La tabella seguente mostra il sistema di traslitterazione che permette di convertire la scrittura Cherokee nell'alfabeto latino:

Ꭰ	a	Ꭱ	e	Ꭲ	i	Ꭳ	o	Ꭴ	u	Ꭵ	v	Ꭶ	ga	Ꭷ	ka	Ꭸ	ge	Ꭹ	gi	Ꭺ	go
Ꭻ	gu	Ꭼ	gv	Ꭽ	ha	Ꭾ	he	Ꭿ	hi	Ꮀ	ho	Ꮁ	hu	Ꮂ	hv	Ꮃ	la	Ꮄ	le	Ꮅ	li
Ꮆ	lo	Ꮇ	lu	Ꮈ	lv	Ꮉ	ma	Ꮊ	me	Ꮋ	mi	Ꮌ	mo	Ꮍ	mu	Ꮎ	na	Ꮏ	hna	Ꮐ	nah
Ꮑ	ne	Ꮒ	ni	Ꮓ	no	Ꮔ	nu	Ꮕ	nv	Ꮖ	qua	Ꮗ	que	Ꮘ	qui	Ꮙ	quo	Ꮚ	quu	Ꮛ	quv
Ꮝ	s	Ꮜ	sa	Ꮞ	se	Ꮟ	si	Ꮠ	so	Ꮡ	su	Ꮢ	sv	Ꮣ	da	Ꮤ	ta	Ꮥ	de	Ꮦ	te
Ꮧ	di	Ꮨ	ti	Ꮩ	do	Ꮪ	du	Ꮫ	dv	Ꮬ	dla	Ꮭ	tla	Ꮮ	tle	Ꮯ	tli	Ꮰ	tlo	Ꮱ	tlu
Ꮲ	tlv	Ꮳ	tsa	Ꮴ	tse	Ꮵ	tsi	Ꮶ	tso	Ꮷ	tsu	Ꮸ	tsv	Ꮹ	wa	Ꮺ	we	Ꮻ	wi	Ꮼ	wo
Ꮽ	wu	Ꮾ	wv	Ꮿ	ya	Ᏸ	ye	Ᏹ	yi	Ᏺ	yo	Ᏻ	yu	Ᏼ	yv						

Dati due alfabeti Σ e Γ, possiamo definire formalmente una traslitterazione come una funzione $T : \Sigma \mapsto \Gamma^*$ che mappa ogni simbolo di Σ in una stringa di simboli in Γ.

Dimostra che se $L \subseteq \Sigma^*$ è un linguaggio *context-free* e T è una traslitterazione, allora anche il seguente linguaggio è *context-free*:

$$T(L) = \{w \in \Gamma^* \mid w = T(a_0)T(a_1)\dots T(a_n) \text{ per qualche } a_0 a_1 \dots a_n \in L\}.$$

3. (9 punti) Chiamiamo k-PDA un automa a pila dotato di k pile. In particolare, uno 0-PDA è un NFA e un 1-PDA è un PDA convenzionale. Sappiamo già che gli 1-PDA sono più potenti degli 0-PDA (nel senso che riconoscono una classe più ampia di linguaggi). Mostra che i 2-PDA sono equivalenti alle Turing Machine.

4. (9 punti) Supponiamo di avere un sistema elettorale composto da n elettori, dove ogni elettore i ha un "peso" $W[i]$, corrispondente al numero di voti che rappresenta. Nel caso di una votazione a maggioranza semplice, una coalizione di elettori ha bisogno di un numero di voti strettamente superiore alla metà della somma dei pesi per vincere. L'elettore n è detto *pivot* se esiste una situazione in cui il voto dell'elettore "conta", ossia dove l'aggiunta dell'elettore n ai voti "sì" rende il "sì" la maggioranza, ma l'aggiunta ai voti "no" rende il "no" maggioranza. Formalmente, l'elettore n è un pivot se esiste una coalizione di elettori $C \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ tale che

$$\sum_{j \in C} W[j] < \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} W[j] \qquad \text{(C senza i voti di n è minoranza)}$$

$$\sum_{j \in C} W[j] + W[n] > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} W[j] \qquad \text{(C con i voti di n è maggioranza)}$$

e possiamo rappresentare il problema dell'elettore pivot con il linguaggio

$$PIVOT = \{\langle n, W \rangle \mid \text{l'elettore } n \text{ è un pivot}\}.$$

(a) Dimostra che $PIVOT$ è un problema NP.

(b) Sappiamo che il linguaggio $SET\text{-}PARTITION = \{\langle S \rangle \mid S$ insieme di naturali, ed esistono $S_1, S_2 \subseteq S$ tali che $S_1 \cup S_2 = S, S_1 \cap S_2 = \emptyset, \sum_{x \in S_1} x = \sum_{y \in S_2} y\}$ è NP-completo. Dimostra che $PIVOT$ è NP-hard, usando $SET\text{-}PARTITION$ come problema NP-hard di riferimento.

Esempio: Supponiamo di avere 5 elettori, con pesi $4, 3, 3, 2, 1$. La somma totale dei pesi è 13, quindi la maggioranza si ottiene con 7 voti. Il quinto elettore, con peso 1, è un pivot in coalizione con gli elettori di peso 4 e 2. La coalizione perde senza l'elettore pivot ma vince con lui.