Dimostrazione della Complessità del Problema SUPPLY

Definizione del Problema

SUPPLY = $\{(S_1,...,S_n,k) \mid$ esiste una fornitura valida T di dimensione $|T| = k\}$

Dove:

- Ogni fornitore i fornisce un insieme $S_i \subseteq \{1,...,m\}$ di ingredienti
- Una fornitura valida T è un insieme di fornitori tale che $\cup_{i \in T} S_i = \{1,...,m\}$

(a) Dimostrazione che SUPPLY ∈ NP

Teorema: SUPPLY ∈ NP

Dimostrazione: Per dimostrare che SUPPLY ∈ NP, costruiamo un algoritmo di verifica polinomiale.

Certificato: Un insieme $T \subseteq \{1,...,n\}$ di fornitori

Algoritmo di Verifica:

```
Input: (S₁,...,Sₙ,k), certificato T
1. Verifica che |T| = k                    // O(1)
2. Inizializza copertura = ∅               // O(1)
3. Per ogni i ∈ T:                         // O(k)
    copertura = copertura ∪ Sᵢ             // O(m)
4. Verifica che copertura = {1,...,m}      // O(m)
5. Restituisci ACCETTA se tutti i controlli passano
```

Complessità: $O(k \cdot m)$ = polinomiale nell'input

Correttezza:

- L'algoritmo accetta ⟺ T è una fornitura valida di dimensione k
- Quindi SUPPLY ∈ NP □

(b) Dimostrazione che SUPPLY è NP-hard

Teorema: SUPPLY è NP-hard

Dimostrazione: Riduzione polinomiale da VERTEX-COVER a SUPPLY

VERTEX-COVER = $\{(G,k) \mid$ G ha una copertura di vertici di dimensione $k\}$

Costruzione della Riduzione

Input: Istanza (G,k) di VERTEX-COVER con G = (V,E)

- $V = \{v_1,\dots,v_n\}$ (vertici)
- $E = \{e_1,\dots,e_m\}$ (archi)

Output: Istanza $(S_1,\dots,S_n,k)$ di SUPPLY

Mapping:

- Ogni vertice $v_i \in V \leftrightarrow$ fornitore i
- Ogni arco $e_j \in E \leftrightarrow$ ingrediente j
- $S_i = \{j \mid e_j$ è incidente al vertice $v_i\}$

Correttezza della Riduzione

Lemma: $(G,k) \in$ VERTEX-COVER $\Longleftrightarrow (S_1,\dots,S_n,k) \in$ SUPPLY

Dimostrazione (⇒): Sia $T \subseteq V$ una copertura di vertici per G con $|T| = k$.

- Per definizione di copertura: $\forall e_j \in E, \exists v_i \in T$ tale che e_j è incidente a v_i
- Per costruzione: $\forall j \in \{1,\dots,m\}, \exists i \in T$ tale che $j \in S_i$
- Quindi: $\cup_i \in T\ S_i = \{1,\dots,m\}$
- T è una fornitura valida di dimensione k per SUPPLY

Dimostrazione (⇐): Sia $T \subseteq \{1,\dots,n\}$ una fornitura valida per SUPPLY con $|T| = k$.

- Per definizione: $\cup_i \in T\ S_i = \{1,\dots,m\}$
- Per costruzione: $\forall j \in \{1,\dots,m\}, \exists i \in T$ tale che $j \in S_i$
- Questo significa: $\forall e_j \in E, \exists v_i$ corrispondente a $i \in T$ tale che e_j è incidente a v_i
- Quindi T (interpretato come insieme di vertici) è una copertura di dimensione k per G

Complessità della Riduzione

La costruzione di $(S_1,\dots,S_n,k)$ da (G,k) richiede:

- $O(|V| + |E|)$ per enumerare vertici e archi
- $O(|E|)$ per costruire ogni S_i
- Totale: $O(|V| + |E|)$ = polinomiale

Conclusione: VERTEX-COVER $\leq_p$ SUPPLY, quindi SUPPLY è NP-hard □

Risultato Finale

Teorema: SUPPLY è NP-completo

Dimostrazione:

- SUPPLY ∈ NP (parte a)
- SUPPLY è NP-hard (parte b)
- Quindi SUPPLY ∈ NP-completo □