## Fisica

Forze, Equilibrio, Moti

### **Gabriel Rovesti**

03/08/2023





## Partiamo con un po' di esercizi...





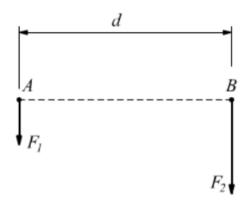


## Forze e vettori: esercizi (1)



Tip: usare seni e coseni oppure operazioni semplici con i triangoli

Determinare la posizione ed il valore della risultante di due forze parallele cospiranti con intensità  $F_1$ =25N ed  $F_2$ =35N, distanti fra loro d=80cm.

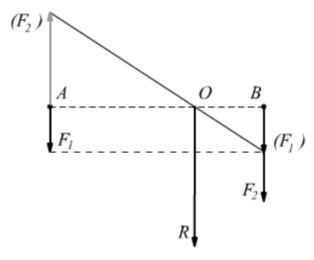




# Forze e vettori: esercizi (1)



Graficamente la posizione della risultante si ottiene scambiando i vettori invertendone il verso di uno:



Il valore della risultante è ovviamente pari alla somma delle componenti:

$$R=F_1+F_2=25+35=60N$$

mentre la distanza dalla risultante sarà inversamente proporzionale all'intensità della forza: con d=OA+OB quindi OA=d - OB

ecco come la relazione:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{OA}{OB}$$
 diventa  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{d - OB}{OB} = \frac{d}{OB} - 1$ 

per cui 
$$\frac{35}{25} = \frac{80}{OB} - 1$$
 avremo...

$$1 + \frac{7}{5} = \frac{80}{OB}$$

$$\frac{5+7}{5} = \frac{80}{OB} = \frac{12}{5}$$
 quindi  $OB = \frac{80 \cdot 5}{12} = 33, \overline{3}$  cm

e

$$OA = d - OB = 80 - 33, \overline{3} = 46, \overline{6} \text{ cm}$$



# Forze e vettori: esercizi (2)



Una slitta viene trainata sulla neve applicando due forze di modulo  $F_1=85~N$  e  $F_2=62~N$ . Le due forze formano tra loro un angolo di  $\alpha=23^\circ$ . Calcola il modulo della somma delle due forze.



## Forze e vettori: esercizi (2)



Per calcolare il modulo della somma delle due forze immaginiamo di fissare un piano cartesiano con un asse lungo il vettore  $\vec{F_1}$  e l'altro asse perpendicolare al primo, inoltre fissiamo anche il verso crescente delle x come il verso di  $\vec{F_1}$ . In questo sistema cartesiano avremo:

$$\vec{F}_1 = (85 N; 0)$$

$$\vec{F}_2 = 62 N \cdot (\cos 23^\circ ; \sin 23^\circ)$$

Per cui

$$F_1 + F_2 = \sqrt{(85 N + 62 N \cdot \cos 23^\circ)^2 + (62 N \cdot \sin 23^\circ)^2} \approx 144 N$$



## Forze e vettori: esercizi (2)



Per calcolare il modulo della somma delle due forze immaginiamo di fissare un piano cartesiano con un asse lungo il vettore  $\vec{F_1}$  e l'altro asse perpendicolare al primo, inoltre fissiamo anche il verso crescente delle x come il verso di  $\vec{F_1}$ . In questo sistema cartesiano avremo:

$$\vec{F}_1 = (85 N; 0)$$

$$\vec{F}_2 = 62 N \cdot (\cos 23^\circ ; \sin 23^\circ)$$

Per cui

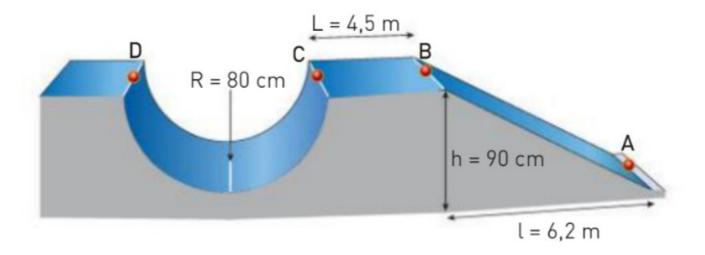
$$F_1 + F_2 = \sqrt{(85 N + 62 N \cdot \cos 23^\circ)^2 + (62 N \cdot \sin 23^\circ)^2} \approx 144 N$$



## Forze e vettori: esercizi (3)



Un ragazzo prende la rincorsa e sale con il suo skateboard sulla rampa nella figura, partendo dal punto A. Dopo aver percorso la parte semicircolare fino al punto D spicca un salto in verticale di 70~cm, atterra di nuovo sul bordo nel punto D e ritorna indietro fino a fermarsi nel punto B.



Calcola la distanza totale che percorre lo skateboard prima di fermarsi. Determina il vettore spostamento e calcolane il modulo.



# Forze e vettori: esercizi (3)



Per calcolare la distanza percorsa dividiamo il percorso in parti e calcoliamo la lunghezza di ogni singola parte. Partiamo dal tratto AB (per calcolare questo tratto utilizziamo il teorema di Pitagora).

$$\bar{AB} = \sqrt{(6, 2 \, m)^2 + (0, 9 \, m)^2} \approx 6,26 \, m$$

Il tratto CB è un tratto rettilineo quindi la sua lunghezza è pari a  $L=4,5\ m$ , mentre il tratto CD è una semicirconferenza di raggio  $80\ cm$ , quindi la sua lunghezza sarà:

$$CD = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} = r \cdot \pi = 0,8 \ m \cdot \pi \approx 2,51 \ m$$

Pertanto, considerando che lo skateboard nel punto D salta di  $70\ cm$  e che dopo ritorna indietro fino al punto B, risulta che

$$d = 6,26 m + 4,5 m + 2,51 m + 0,7 m + 0,7 m + 2,51 m + 4,5 m = 21,68 m$$

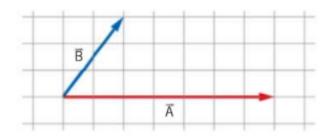
Per determinare il vettore spostamento bisogna semplicemente prendere il vettore che parte dal punto iniziale A e arriva al punto finale B, il modulo di tale vettore lo abbiamo già calcolato ed è  $6,26\ m$ .



# Forze e vettori: esercizi (4)



La figura mostra i vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Il lato di ogni quadratino vale 1.



Calcola il modulo del prodotto vettoriale  $\vec{A} \times \vec{B}$ . Quale è il verso del vettore  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ?



## Forze e vettori: esercizi (4)



Il prodotto vettoriale tra due vettori è un vettore del quale verso e direzione sono facili da determinare utilizzando la regola della "mano destra", per quanto invece riguarda il modulo sappiamo che tale modulo si ricava con la formula

$$A \times B = A \cdot B \cdot \sin \widehat{AB}$$

Dove  $\widehat{AB}$  è l'angolo compreso tra il vettore  $\overrightarrow{A}$  e il vettore  $\overrightarrow{B}$ . Siccome conosciamo i moduli dei due vettori l'unica incognita dell'esercizio sarà quindi  $\widehat{\sin AB}$ , vediamo come possiamo calcolarlo. Usando le formule trigonometriche sul triangolo rettangolo che ha come ipotenusa il vettore  $\overrightarrow{B}$  e come cateti due quadratini (lungo il vettore rosso  $\overrightarrow{A}$ ) e tre quadratini verticalmente dalla punta del vettore  $\overrightarrow{B}$  fino al vettore  $\overrightarrow{A}$ , possiamo scrivere che

$$3 = B \cdot \sin \widehat{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sin \widehat{AB}$$



## Forze e vettori: esercizi (4)



da cui

$$\sin \widehat{AB} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

per cui

$$A \times B = 7 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 7 \cdot 3 = 21$$

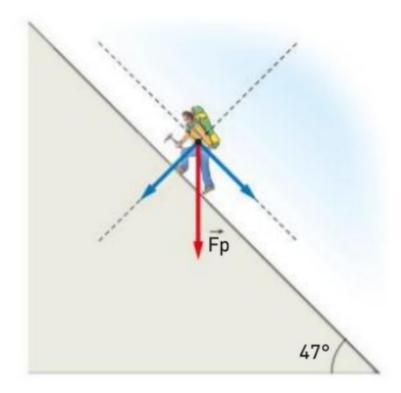
Per determinare il verso attraverso la regola della mano destra bisogna, utilizzando la mano destra, sovrapporre il pollice al vettore  $\vec{A}$  e l'indice al vettore  $\vec{B}$ , ricordiamo esplicitamente che il prodotto vettoriale non è commutativo, il verso del prodotto vettoriale è il verso del dito medio. Pertanto in questo esercizio il prodotto vettoriale sarà perpendicolare ai vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , come sempre, ed "uscirà" dal foglio.



# Forze e vettori: esercizi (5)



Un alpinista che sta risalendo un pendio di  $47^{\circ}$  può essere schematizzato come nella figura. La massa dell'alpinista è 65~kg.



Trova l'intensità dei due vettori componenti della forza peso lungo le direzioni parallela e perpendicolare al piano inclinato.



## Forze e vettori: esercizi (5)



Quando si studia un oggetto sopra un piano inclinato, di inclinazione  $\alpha$  rispetto alla direzione orizzontale, è molto utile scomporre il vettore forza peso, quello disegnato in rosso, nelle due componenti parallela e perpendicolare al piano inclinato. Nel disegno sopra la componente perpendicolare è quella che dall'alpinista va verso la montagna, mentre la componente parallela è quella che va verso destra, in questa situazione le due componenti si calcolano facendo

$$F_{\perp} = \cos \alpha \cdot F_p = \cos \alpha \cdot m \cdot g = \cos 47^{\circ} \cdot 65 \ kg \cdot 9,81 \ N/kg \approx 435 \ N$$

$$F_{\parallel} = \sin\alpha \cdot F_p = \sin\alpha \cdot m \cdot g = \sin 47^{\circ} \cdot 65 \ kg \cdot 9,81 \ N/kg \approx 466 \ N$$



# Forze elastiche: esercizi (1)



Tip: sapere la formula della legge di Hooke  $\rightarrow F = K_{el} * \Delta l$ 

Una massa **m** agganciata ad una molla produce un **allungamento** pari a 0,08 m.

Se la costante elastica è 0,65 N/cm , calcolare il valore della massa.

[R: 265 g]

### Dati:

allungamento:  $\Delta l = 0.08 \text{ m}$ 

costante elastica:  $K_e = 0,65 \text{ N/cm}$ 

### Calcolare:

la massa: m



# Forze elastiche: esercizi (1)



Nella costante elastica  $K_e$  compaiono i centimetri mentre il valore della lunghezza risulta in metri per uniformità trasformiamo i metri in centimetri:

$$\Delta I = 0.08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$$

La <u>legge di Hooke</u> ci dice che la forza elastica è data dal prodotto della costante elastica per la variazione di lunghezza:

$$F = K_e \cdot \Delta I$$

Sostituendo i valori:

 $F = 0.65 \text{ N/cm} \cdot 4 \text{ cm}$ 

F = 2.6 N

Sappiamo, inoltre, che la forza è data dal prodotto della massa m per l'accelerazione di gravità (9,81 m/s<sup>2</sup>)

 $F = m \cdot g$ 

Da cui:

m = F/g

 $m = 2,6 \text{ N}/(9,81 \text{ m/s}^2)$ 

m = 0,265 kg

m = 265 g



# Forze e momento: esercizi (1)



Tip: sapere la formula del momento  $\rightarrow$  M =  $F_P * b$ 

Un trampolino della piscina è lungo 25 dm, al suo estremo libero, troviamo un uomo avente massa di 72 kg.

Calcola il valore del momento che il peso dell'uomo esercita rispetto al punto **0**, che corrisponde al punto di fissaggio del trampolino nella struttura fissa.

[R: 1766 N·m]

#### Dati:

Lunghezza del trampolino: I = 25 dm

Massa dell'uomo: m = 72 kg

#### Calcolare:

Il momento della forza peso rispetto al punto O, M = ?

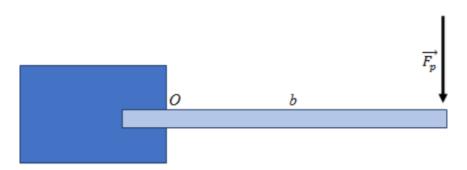


## Forze e momento: esercizi (1)



Il momento della forza peso rispetto al punto O, **M** = ?

### Svolgimento:



Riportiamo la lunghezza del trampolino nell'unità di misura del Sistema Internazionale:

$$I = 25 \text{ dm} = 2.5 \text{ m}$$

La forza peso  $F_D$  dell'uomo é:

$$F_p = m \cdot g$$

Dove  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  è l'accelerazione di gravità

$$F_p = 72 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$F_p = 706,32 \text{ N}$$

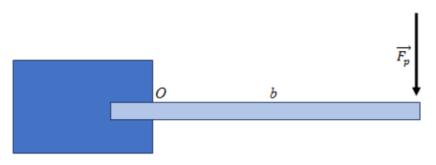


# Forze e momento: esercizi (1)



Il momento della forza peso rispetto al punto O, **M** = ?

### Svolgimento:



Il braccio **b** della forza è pari alla lunghezza **I** del trampolino

$$b = 1 = 2,5 \text{ m}$$

Il momento M risulta:

$$M = F_p \cdot b$$

 $M = 706,32 \text{ N} \cdot 2,5 \text{ m}$ 

$$M = 1765,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Riportiamo la lunghezza del trampolino nell'unità di misura del Sistema Internazionale:

$$I = 25 \text{ dm} = 2,5 \text{ m}$$

La forza peso  $F_p$  dell'uomo é:

$$F_p = m \cdot g$$

Dove  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  è l'accelerazione di gravità

$$F_{\rm p} = 72 \, \text{kg} \cdot 9,81 \, \text{m/s}^2$$

$$F_D = 706,32 \text{ N}$$



## Forze e momento: esercizi (2)



Consideriamo un'asta libera, alla cui estremità vengono applicate due forze di uguale intensità, parallele e con verso opposto (coppia di forze). Se il momento di tale coppia vale 80 N·m e ciascuna forza ha un'intensità pari a 100 N, calcolare la lunghezza dell'asta.

[R: 80 cm]

#### Dati:

Momento della coppia di forze: M = 80 N·m

Intensità della forza: F = 100 N

#### Calcolare:

La lunghezza (braccio) dell'asta, b = ?

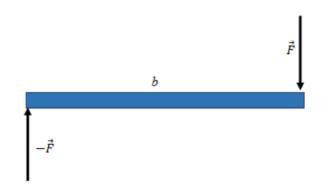


# Forze e momento: esercizi (2)



La lunghezza (braccio) dell'asta, b = ?

### Svolgimento:



Il momento della coppia di forze sarà:

 $M = F \cdot b$ 

Da cui

b = M/F

 $b = 80 \text{ N} \cdot \text{m} / 100 \text{ N}$ 

 $b = 0.8 \, \text{m}$ 

b = 80 cm



## Prima di andare avanti...

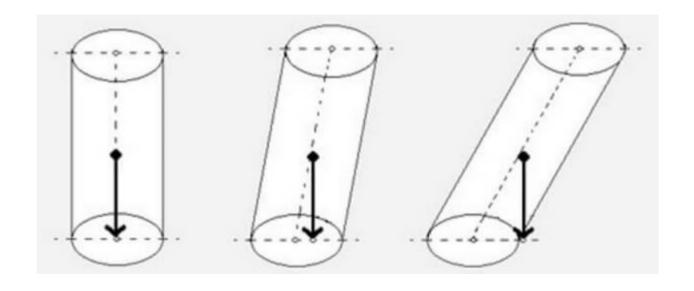








• Il **baricentro** di un corpo è il punto di applicazione della forza peso.



Un corpo appoggiato su un piano è in equilibrio se la retta verticale che passa per il suo baricentro cade nella propria base di appoggio.





Dato un corpo rigido appeso a un punto P, il corpo sarà in equilibrio se la retta verticale che passa per il suo baricentro passa per il punto P.





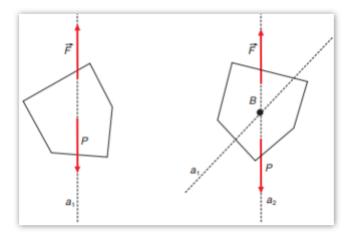


- Se il punto di sospensione si trova sopra il baricentro allora l'equilibrio sarà stabile: spostando di poco il corpo dalla sua posizione di equilibrio il corpo tende naturalmente a ritornarvi;
- Se il punto di sospensione si trova sotto il baricentro allora l'equilibrio è instabile: spostando di poco il corpo dalla sua posizione di equilibrio il corpo tende ad allontanarvisi ancora di più;
- Se il punto di sospensione coincide col baricentro l'equilibrio è indifferente: spostando di poco il corpo dalla sua posizione di equilibrio il corpo tende a mantenere la nuova posizione.





Ma in che modo è possibile determinarne con esattezza la posizione? Si può ricorrere a un metodo sperimentale.



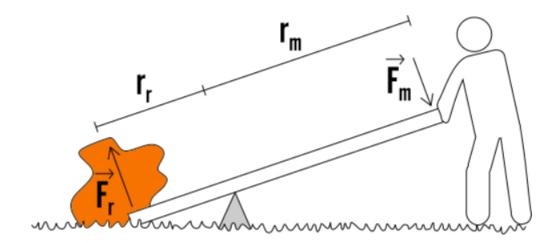
Cosí come illustrato in figura , tale metodo consiste nell'appendere il corpo di cui si vuole determinare il baricentro secondo due diverse direzioni, determinando le rette d'azione  $a_1$  e  $a_2$  della forza peso nei due casi.

In ciascuna delle due prove il corpo, appeso a un vincolo tramite un filo, è in equilibrio meccanico sotto l'azione del peso  $\overrightarrow{P}$  e della forza  $\overrightarrow{F}$  esercitata dal filo. La retta d'azione del peso coinciderà, dunque, con quella di  $\overrightarrow{F}$ , cioè con la direzione del filo. Poiché il baricentro del corpo deve trovarsi sia sulla retta  $a_1$  sia sulla retta  $a_2$ , dovrà coincidere con la loro intersezione.





- Le **leve** sono formate da un punto fermo, che può trovarsi al centro della leva o ai suoi estremi, e da un'asta rigida che ruota intorno a questo punto.
- Su questa macchina agiscono due forze:
  - La forza motrice  $F_m$
  - La forza resistente  $F_r$







• In equilibrio quando  $M_m=M_r$ 

Come si calcolano le leve?

### Dati:

- $b_m$  = braccio motore
- $b_r$  = braccio resistente
- $F_m$  = forza motrice
- $F_r$  = forza resistente

la formula delle leve è semplice:

$$b_m \cdot F_m = b_r \cdot F_r$$



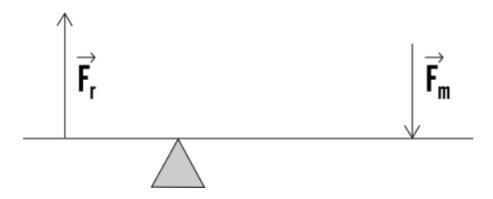


- Il rapporto  $V = \frac{R}{P}$  è chiamato **vantaggio** della leva
- Se V > 1 la leva viene definita *vantaggiosa*
- Le leve vantaggiose sono leve in cui la forza motrice è minore di quella resistente, come nel nostro esempio numerico. Per avere questo tipo di leva, è necessario che il braccio motore sia maggiore di quello resistente; in questo modo si ha un effetto di moltiplicazione della forza che ci è utile, ad esempio, per sollevare i pesi.
- Le leve svantaggiose funzionano al contrario: la forza resistente è minore di quella motrice e il braccio resistente è maggiore di quello motore.
- Le leve indifferenti si hanno quando le due forze, motrice e resistente, sono uguali così come i relativi bracci.





Le leve di primo genere hanno il fulcro che si trova tra le due forze, come in figura.

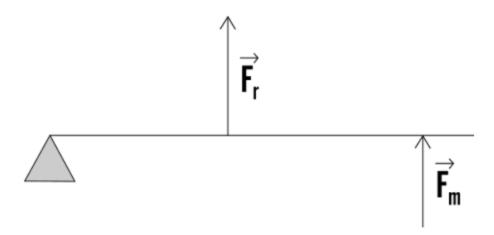


Esse possono essere vantaggiose se il fulcro è più vicino alla forza resistente; svantaggiose se il fulcro è più vicino alla forza motrice; indifferenti se il fulcro si trova esattamente a metà tra le due forze. Un esempio di leva di primo genere è fornito dalle forbici.





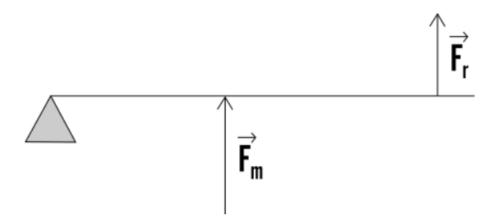
Le leve di secondo genere hanno la forza resistente che si trova tra quella motrice e il fulcro. Esse sono sempre vantaggiose e un esempio è dato dallo schiaccianoci.







Infine, le leve di terzo genere hanno la forza motrice che si trova tra il fulcro e la forza resistente. Esse sono sempre svantaggiose e un esempio è dato dalle pinzette per sopracciglia.





# Ora un po' di esercizi...







# Esercizi sulle leve (1)



Una trave lunga 120 cm appoggia su di un fulcro posto a 40 cm da un suo estremo sul quale agisce una forza resistente del peso di 30 N. Quale forza deve essere applicata all'altro estremo per equilibrare l'asta?

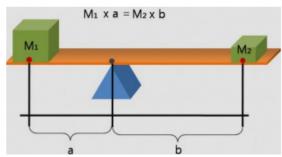


immagine tratta da Wikipedia



# Esercizi sulle leve (1)



$$b_p = asta - b_r = 120 - 40 = 80 \text{ cm}$$

Una leva è in equilibrio quando il prodotto dell'intensità della potenza per il suo braccio è uguale al prodotto dell'intensità della resistenza per il suo braccio:

$$\vec{P} \cdot b_p = \vec{R} \cdot b_r$$

essendo un'uguaglianza di due rapporti si ottiene la seguente proporzione

$$\vec{R}$$
:  $\vec{P} = b_p$ :  $b_r$ 

da cui

$$30 : \vec{P} = 80 : 40$$

$$\vec{P} = \frac{30 \cdot 40}{80} = 15 \, N$$



# Esercizi sulle leve (2)



Due ragazzi giocano su un'altalena lunga 8 m, il cui fulcro e posto al centro dell'asse. Se uno dei ragazzi pesa 40 kg e siede a 2 m dal fulcro, a quale distanza dovrà sedere il compagno che pesa 20 kg?



# Esercizi sulle leve (2)



Una leva è in equilibrio quando il prodotto dell'intensità della potenza per il suo braccio è uguale al prodotto dell'intensità della resistenza per il suo braccio:

$$\vec{P} \cdot b_p = \vec{R} \cdot b_r$$

essendo un'uguaglianza di due rapporti si ottiene la seguente proporzione

$$\vec{R}$$
:  $\vec{P} = b_p$ :  $b_r$ 

da cui

$$20:40=2:b_r$$

$$b_r = \frac{40 \cdot 2}{20} = 4 \, m$$



# Esercizi sulle leve (3)



Una sbarra di ferro lunga 2,10 metri viene utilizzata per sollevare un peso di 60 N posto a 30 cm dal fulcro. Quale forza occorre esercitare all'altro estremo della leva per avere l'equilibrio?



# Esercizi sulle leve (3)



Una leva è in equilibrio quando il prodotto dell'intensità della potenza per il suo braccio è uguale al prodotto dell'intensità della resistenza per il suo braccio:

$$\vec{P} \cdot b_p = \vec{R} \cdot b_r$$

essendo un'uguaglianza di due rapporti si ottiene la seguente proporzione

$$\vec{R}$$
:  $\vec{P} = b_p$ :  $b_r$ 

da cui

$$60: \vec{P} = (210 - 30): 30$$

$$\vec{P} = \frac{60 \cdot 30}{180} = \frac{60}{6} = 10 \ kg$$



# Esercizi sulle leve (3)



Una leva è in equilibrio quando il prodotto dell'intensità della potenza per il suo braccio è uguale al prodotto dell'intensità della resistenza per il suo braccio:

$$\vec{P} \cdot b_p = \vec{R} \cdot b_r$$

essendo un'uguaglianza di due rapporti si ottiene la seguente proporzione

$$\vec{R}$$
:  $\vec{P} = b_p$ :  $b_r$ 

da cui

$$60: \vec{P} = (210 - 30): 30$$

$$\vec{P} = \frac{60 \cdot 30}{180} = \frac{60}{6} = 10 \ kg$$



## Cinematica



### Per descrivere il moto dei corpi usiamo:

- La posizione *s*
- Il tempo *t*

### Come grandezze usiamo:

- La velocità v misurata in  $\frac{m}{s}$
- L'accelerazione a misurata in  $\left(\frac{m}{s}\right)^2$



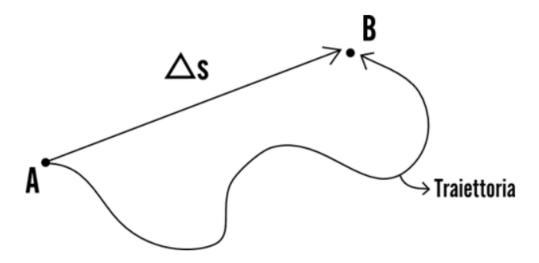
## Velocità media



Veniamo ora alla **definizione di velocità media**. Supponiamo di effettuare uno spostamento  $\Delta s$  in un intervallo di tempo  $\Delta t$ : la velocità media è definita come il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo necessario effettuarlo.

La formula per il calcolo della velocità media è la seguente

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\bullet)$$



Spostamento e distanza percorsa sono grandezze che non coincidono necessariamente.



## Velocità media



la velocità media v di un corpo relativa all'intervallo di tempo  $\Delta t$  è il rapporto tra la distanza  $\Delta s$  percorsa dal corpo e l'intervallo di tempo  $\Delta t$  impiegato a percorrerla, cioè:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

 $\overrightarrow{\Delta s}$ 

Il vettore velocità e il vettore spostamento sono sempre concordi.



## Accelerazione



L'accelerazione è la rapidità con la quale cambia la velocità. Il suo valore numerico corrisponde alla variazione di velocità nell'unità di tempo.

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v_0}{t}$$

### Definizione 5.3 [Accelerazione media]

l'accelerazione di un corpo relativa all'intervallo di tempo  $\Delta t$  è il rapporto tra la variazione di velocità  $\Delta v$  del corpo e il tempo  $\Delta t$  in cui essa si verifica:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$



## Moto rettilineo uniforme



- Il moto è detto rettilineo uniforme quando, dato un corpo in movimento su una retta, la sua velocità è costante, ossia percorre sempre la stessa quantità di spazio nel medesimo arco di tempo.
- Per conoscere la posizione in un certo momento del tempo, usiamo la cosiddetta legge oraria.

$$S(t) = V \cdot t + S_O$$
, dove:

- V è la velocità, sempre costante
- tèil tempo
- S<sub>O</sub> è la posizione di partenza

$$s = v\Delta t + s_i$$

ossia

$$s = v(t - t_i) + s_i$$

dove  $t_i$ ,  $s_i$  indicano rispettivamente l'istante iniziale e la posizione all'istante iniziale, mentre s indica la posizione al tempo t.



### Moto uniformemente accelerato



• Il moto è detto **rettilineo uniformemente accelerato** quando il corpo che si muove mantiene la propria accelerazione costante.

Pertanto, la formula del moto rettilineo uniformemente accelerato è:

$$V(t) = a \cdot t + V_{O_i}$$
 in cui:

- a è l'accelerazione, costante ed espressa in m/s<sup>2</sup>
- t è il tempo
- V<sub>O</sub> è la velocità iniziale

### Posizione (legge oraria)

$$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + rac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

Dove  $t_0$  è l'istante iniziale,  $x_0$  è la posizione iniziale,  $v_0$  è la velocità iniziale,  $a_0$  è l'accelerazione iniziale.



## Accelerazione di gravità



L'accelerazione di gravità è l'accelerazione (indicata con il simbolo *g*) cui è soggetto un qualsiasi corpo quando viene lasciato libero di cadere, e che concorre al calcolo della forza peso.

Un moto di caduta libera (o moto di caduta di un grave) è un particolare tipo di moto in cui un corpo, partendo inizialmente da fermo, cade sotto l'azione dell'accelerazione di gravità.



L'accelerazione di gravità terrestre può considerarsi costante in prossimità della superficie, e vale approssimativamente:

$$g_{Terra} \simeq 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

