

Svolgimento degli Esercizi per casa 9

I Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di \mathbb{C}^4 .

I Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4) = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Poichè \mathbf{U} ha come colonne dominanti la 1^a, la 3^a e la 4^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3; \mathbf{w}_4\}$.

II Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\implies \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}i\mathbf{u}_1 = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = 4$$

$$\implies \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) &= \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = i \\
(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1 \\
\implies \quad \alpha_{23} &= i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\
&= \mathbf{v}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}i\mathbf{u}_2 = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dunque

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale di V .

III Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto II, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in II per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 ed \mathbf{u}_3 :

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V .

2 Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:

- gli autovalori di \mathbf{A} ,
- le loro molteplicità algebriche e
- le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di \mathbf{A} è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_2) = \text{Det} \begin{pmatrix} -x & -2i \\ 2i & -x \end{pmatrix} = (-x)^2 - (-2i) \cdot 2i = x^2 + 4i^2 = \\ &= x^2 - 4. \end{aligned}$$

Gli autovalori di \mathbf{A} sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di \mathbf{A} , ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4 = 0$$

sono -2 e 2 , gli autovalori di \mathbf{A} sono:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

3 Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:

- gli autovalori di \mathbf{A} ,
- le loro molteplicità algebriche e
- le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di \mathbf{A} è:

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{A}}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \text{Det} \begin{pmatrix} -2-x & 0 & 2i \\ 0 & -8-x & 0 \\ 2i & 0 & -6-x \end{pmatrix} = \\
 &= (-1)^{2+2}(-8-x)\text{Det} \begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & -6-x \end{pmatrix} = \\
 &= (-8-x)[(-2-x)(-6-x) - 4i^2] = \\
 &= (-8-x)(12 + 6x + 2x + x^2 + 4) = \\
 &= (-8-x)(x^2 + 8x + 16) = \\
 &= (-8-x)(x+4)^2.
 \end{aligned}$$

Gli autovalori di \mathbf{A} sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di \mathbf{A} , ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-8-x)(x+4)^2 = 0$$

sono -8 e -4 , gli autovalori di \mathbf{A} sono:

$$\lambda_1 = -8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -4.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-8-x)(-4-x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)) = \\ &= [\text{numero delle colonne di } (\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] - [\text{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] = \\ &= 3 - [\text{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)]. \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

per cui

$$\text{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3) = \text{rk}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

e quindi

$$d_2 = 3 - 2 = 1.$$

4 Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 2 e 3.

Le matrici considerate negli esercizi 2 e 3 sono:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

ed abbiamo calcolato:

In particolare, ciascuno degli autospazi $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$ ed $E_{\mathbf{B}}(\lambda_i)$ per $i = 1, 2$ ha dimensione 1, per cui una sua base ha un unico elemento.

matrice	autovalori	molteplicità geometriche
A	$\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$	$d_1 = d_2 = 1$
B	$\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = -4$	$d_1 = d_2 = 1$

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2$: $\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(-2) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) = N\left(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2$: $\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\left(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{3}{8})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4) = N(\mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-4) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4)$.

5 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di \mathbf{A} e di \mathbf{B} .

(a) Gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\
&= \text{Det} \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-x & -1 \\ 7 & 0 & -5-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(\alpha-x)\text{Det} \begin{pmatrix} -1-x & 3 \\ 7 & -5-x \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha-x)[(-1-x)(-5-x) - 21] = \\
&= (\alpha-x)(5 + 5x + x + x^2 - 21) = \\
&= (\alpha-x)(x^2 + 6x - 16).
\end{aligned}$$

L'equazione $\alpha - x = 0$ ha un'unica soluzione: α .

L'equazione $x^2 + 6x - 16 = 0$ ha due soluzioni distinte: -8 e 2 .

Quindi otteniamo:

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Per finire di rispondere alla domanda (a) resta da calcolare:

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(2)}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) \quad \text{e}$$

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(\lambda_1)) = \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)).$$

dove

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}(-8).$$

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) = \dim(N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) - \text{rk}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)] = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-7)E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-10)E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)) = \dim(N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3)) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) - \text{rk}(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3)] = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

(b) Al Punto (a) abbiamo visto che la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$.

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N(\mathbf{A} + 8\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 8\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 10 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N\left(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{1}{7}h \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(-8)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(2).$$

Al punto (a) abbiamo anche visto che la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$.

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(2)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\left(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

per cui

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{B}}(-8).$$

6 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovettori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

(a) Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\ &= \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + 1 - x & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} + 1 - x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(\alpha - x) \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + 1 - x & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} + 1 - x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha - x) \left[\left(\frac{\alpha}{2} + 1 - x \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] = \\ &= (\alpha - x) \left(\frac{\alpha}{2} + 1 - x - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{\alpha}{2} + 1 - x + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= (\alpha - x)(1 - x)(\alpha + 1 - x). \end{aligned}$$

Gi autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x)$, ossia le soluzioni dell'equazione:

$$(\alpha - x)(1 - x)(\alpha + 1 - x) = 0,$$

cioè 1, α ed $\alpha + 1$.

Dunque

$$\begin{aligned} 3 \text{ è autovalore di } \mathbf{A}(\alpha) &\iff \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha + 1 = 3 \\ &\iff \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 2. \end{aligned}$$

(b) Dai conti svolti in (a), otteniamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) \text{ ha due autovalori uguali} &\iff \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha + 1 = 1 \\ &\iff \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 0. \end{aligned}$$

Studiamo i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha = 0$. Abbiamo:

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(1)$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(1) \text{ è diagonalizzabile} &\iff d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = m_1 = 2 \\ \mathbf{A}(0) \text{ è diagonalizzabile} &\iff d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = m_2 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3)) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = \\
&= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) \\
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3)) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = \\
&= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3)
\end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-\frac{1}{2})E_1(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = 1$, e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = 3 - 1 = 2.$$

In conclusione, $\mathbf{A}(1)$ è diagonalizzabile.

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(-1)E_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = 1$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = 3 - 1 = 2.$$

In conclusione, anche $\mathbf{A}(0)$ è diagonalizzabile.

7 Si dica se le matrici considerate negli esercizi 2 e 3 sono diagonalizzabili oppure no.

Le matrici considerate negli esercizi 2 e 3 sono:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
A	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
B	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

ed abbiamo calcolato:

Ogni autovalore di **A** ha molteplicità algebrica e geometrica uguali (**A** ha autovalori distinti, per cui ogni suo autovalore ha molteplicità algebrica uguale ad 1 e conseguentemente, essendo

$$1 \leq \text{molteplicità geometrica} \leq \text{molteplicità algebrica } (= 1)$$

anche molteplicità geometrica uguale ad 1).

Dunque **A** è diagonalizzabile.

La matrice **B** ha un autovalore (l'autovalore $\lambda_2 = -4$) in cui la molteplicità algebrica ($m_2 = 2$) è diversa dalla molteplicità geometrica ($d_2 = 1$).

Dunque **B** non è diagonalizzabile.

8 Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 5. Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

La matrice considerata nell'esercizio 5 è

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$, ed abbiamo calcolato:

Solo per $\alpha = -8$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A}(-8) = \mathbf{B}$ ha un autovalore ($\lambda_1 = -8$) con molteplicità algebrica ($m_1 = 2$) diversa dalla molteplicità geometrica ($d_1 = 1$). Quindi

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \iff \alpha \neq -8.$$

Troviamo una diagonalizzazione per $\mathbf{A}(\alpha)$ per ogni $\alpha \neq -8$.

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

caso $\alpha \notin \{-8, 2\}$:

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) = N(\mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & \alpha + 8 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\alpha \neq -8: E_2(\frac{1}{\alpha+8})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

segue che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) &= N\left(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{10}{7(\alpha+8)}h \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N(\mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} &\xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\alpha \neq 2: E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N(\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} &\xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1-\alpha & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(1+\alpha)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha \neq 2: E_{32}(-2+\alpha)E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

segue che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) &= N\left(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha)$.

Dunque se $\alpha \notin \{-8, 2\}$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) &= \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con} \\ \mathbf{D}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed} \\ \mathbf{S}(\alpha) &= (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

caso $\alpha = 2$: Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$, nell'Esercizio 8 degli "Esercizi per casa 10" abbiamo visto che

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-8) \text{ e} \\ \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} &\text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2). \end{aligned}$$

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

N.B.: Per ogni $\alpha \neq -8$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è una matrice 2×2 non scalare, allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ha i (due) autovalori distinti (perchè solo in tal caso ciascun suo autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica uguali).

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_2) = \text{Det} \begin{pmatrix} 2-x & i \\ i & \alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (2-x)(\alpha-x) - i^2 = \\ &= 2\alpha - \alpha x - 2x + x^2 + 1 = \\ &= x^2 - (\alpha+2)x + (2\alpha+1). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \frac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \frac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2} \quad \text{e} \\ \lambda_2 &= \frac{\alpha+2-\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \frac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \frac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \iff \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \neq 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha \neq 0 \iff \alpha \notin \{0, 4\},$$

e concludiamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \iff \alpha \notin \{0, 4\},$$

10 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \text{Det} \begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(\alpha-x)\text{Det} \begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha-x)[(-2-x)(2+\alpha-x) - 4i^2] = \\ &= (\alpha-x)(-4-2x-2\alpha-\alpha x+2x+x^2+4) = \\ &= (\alpha-x)(x^2-\alpha x-2\alpha). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}.$$

Dal momento che

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\alpha = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\alpha = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = -\sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} = 0 \iff \alpha \in \{0, -8\},$$

abbiamo:

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, -8\}$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}$ $\lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$	$m_1 = 3$	$1 \leq d_1 \leq 3$
$\mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

Dunque:

- se $\alpha \notin \{0, -8\}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.
- $\mathbf{A}(0)$ sarebbe diagonalizzabile solo se fosse $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_3 = 3$.

N.B.: Se fosse $\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3$ sarebbe $E_{\mathbf{A}(0)}(0) = \mathbb{C}^3$, e quindi $\mathbf{A}(0) = \mathbf{O}$.

Dunque, essendo $\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

- $\mathbf{A}(-8)$ è diagonalizzabile $\iff d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = m_2 = 2$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3)) = \\
 &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = \\
 &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3)
 \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(-8)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione abbiamo:

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \iff \alpha \notin \{0, -8\}.$$

[11] Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove α è **un numero reale non positivo**.

Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \text{Det} \begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & -3-x & 0 \\ -3i\alpha & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(-3-x)\text{Det} \begin{pmatrix} -x & -3i \\ -3i\alpha & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-3-x)(x^2 - 9i^2\alpha) = \\ &= (-3-x)(x^2 + 9\alpha). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono ($\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq 0$):

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \sqrt{-9\alpha} = 3\sqrt{-\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{-9\alpha} = -3\sqrt{-\alpha}.$$

Dal momento che α è un numero reale non positivo, allora

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff \alpha = -1,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \iff \alpha = 0.$$

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, -1\}$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3\sqrt{-\alpha}$ $\lambda_3 = -3\sqrt{-\alpha}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 0$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Quindi se $\alpha \notin \{0, -1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

Anche $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è diagonalizzabile: abbiamo visto in (a) che è addirittura unitariamente diagonalizzabile (quindi è vero, e non occorre verificarlo, che $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-1)}(-3)) = m_1 = 2$).

Inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \text{ è diagonalizzabile} \iff d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0))) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(-\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione (essendo α reale non positivo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \iff \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha < 0.$$