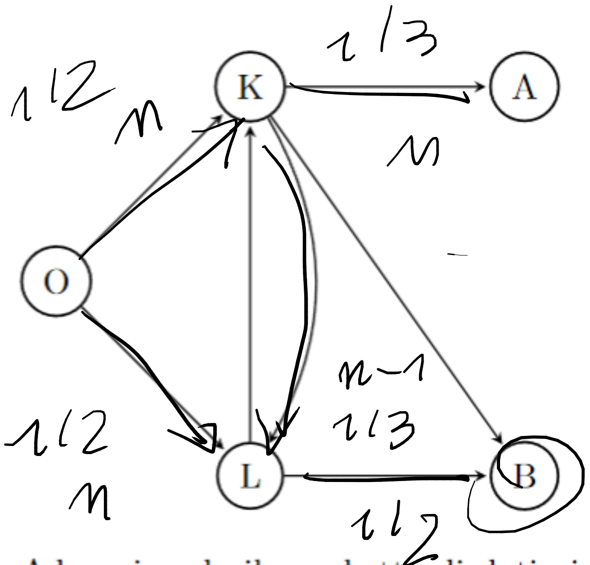
Esercizio 4. Un pacchetto di dati deve essere trasmesso da un terminale O ad un terminale A, attraverso una serie di terminali intermedi collegati come in figura (si noti che le connessioni sono rappresentate da archi diretti):



$\frac{1}{\text{N. RAMI USCENTI}}$

$n = 6$

— DEAD STATE

Ad ogni nodo il pacchetto di dati viene ritrasmesso scegliendo una connessione a caso tra quelle uscenti (indipendentemente dalle scelte precedenti). Per esempio, se il pacchetto è nel nodo K, viene ritrasmesso con uguale probabilità verso A, B o L.

Si calcoli la probabilità che il pacchetto di dati arrivi in A (anziché in B).

Per calcolare la probabilità che il pacchetto dati partendo dal nodo O raggiunga il nodo A possiamo sommare le probabilità di tutti i percorsi che nella rete portano da O in A.

Indichiamo un percorso mediante la sequenza (finita) di nodi che il pacchetto visita. Per i percorsi che ci interessano, il primo nodo deve essere O, l'ultimo A.
Se N, M sono nodi, indichiamo con $(NM)^n$ la sequenza $\underbrace{NM \ldots NM}_{n \text{ volte}}$. Ad esempio, $(NM)^3 = NMNMNM$.

I percorsi che portano da O in A sono:

- OKA,
- $O(KL)^n KA$ per $n \in \mathbb{N}$ (n loop da K),
- $O(LK)^n A$ per $n \in \mathbb{N}$ (n loop da L; l'ultimo incompleto).

La probabilità di un percorso è determinata dalle probabilità di transizione da un nodo del percorso a quello successivo e dalla probabilità che il pacchetto si trovi nel nodo iniziale del percorso, che qui è uguale a uno (inizio sempre in O).
Le probabilità di transizione che ci interessano sono:

$P(O \to K) = \frac{1}{2}$, $P(O \to L) = \frac{1}{2}$,
$P(K \to L) = \frac{1}{3}$, $P(L \to K) = \frac{1}{2}$, $P(K \to A) = \frac{1}{3}$.

Otteniamo quindi per la probabilità che il pacchetto arrivi in A partendo da O:

Per ipotesi, $P(\text{"pacchetto parte in } O\text{"}) = 1$

$$P(\text{"pacchetto arriva in } A\text{"})$$

$$= P(OKA) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underline{P(O(KL)^n KA)} + P(O(LK)^n A) \right)$$

$$= \underline{P(O \to K) \cdot P(K \to A)} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{P(O \to K) \cdot P(K \to L)^n \cdot P(L \to K)^n \cdot P(K \to A)}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P(O \to L) \cdot P(L \to K)^n \cdot P(K \to L)^{n-1} \cdot P(K \to A)$$

I.o.L.D

I.L.D (DISCRETO)

$$= P(O\to K)\cdot P(K\to A) + \sum_{n=1}^{\infty} P(O\to K)\cdot P(K\to L)^n \cdot P(L\to K)^n \cdot P(K\to A)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P(O\to L)\cdot P(L\to K)^n \cdot P(K\to L)^{n-1}\cdot P(K\to A)$$

$$\overset{\text{probab.}}{\underset{\text{di transizione}}{=}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n}_{\text{serie geometrica}}\right)$$

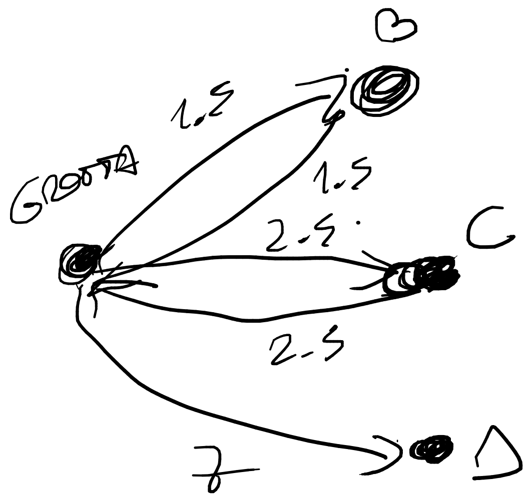
$$\underset{\text{serie geometrica}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\rightsquigarrow P(\text{"pacchetto arriva in A"}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}.$$

$$\left[\rightsquigarrow P(\text{"pacchetto arriva in B"}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.\right]$$

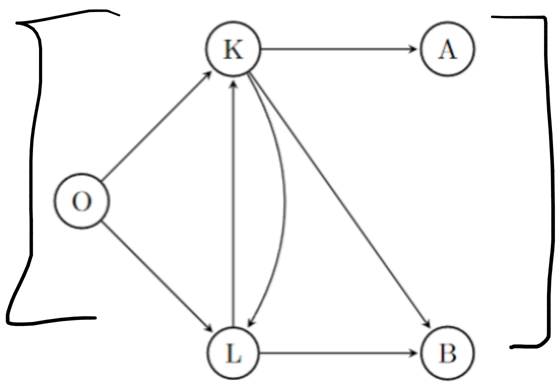
(GRAFI E SIMILI ...

Esercizio 4. Uno speleologo si è perso in una grotta. Ci sono tre percorsi sotterranei che partono dalla grotta: i primi due, ad anello, portano di nuovo nella grotta, il primo in tre ore di cammino, il secondo in cinque ore. Il terzo percorso, invece, porta in sette ore di cammino alla luce del giorno. Il nostro speleologo sceglie a caso tra i tre percorsi e cammina finché non riuscirà a raggiungere l'aria aperta. Quando un percorso lo riporta indietro nella grotta, sceglie di nuovo a caso tra i tre percorsi, perché non riesce a distinguerli. Si calcoli il tempo medio (in ore) che serve allo speleologo per raggiungere l'aria aperta.



SIMILE AL GRAFO

↓



$$T \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

3 H (LOOP) 5 H (LOOP) 7 (AVANTI)

$$T_{TOT} = \underbrace{P\left(\frac{1}{3}\right)}_{\text{AVANTI}}(3+T) + \left(\frac{1}{3}\right)(5+T) + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 7$$

Questo si traduce nell'equazione:

T = (1/3)(3 + T) + (1/3)(5 + T) + (1/3)(7)

Semplificando:

T = 3/3 + T/3 + 5/3 + T/3 + 7/3

T = 5 + 2T/3

T - 2T/3 = 5

T/3 = 5

T = 15

Il tempo medio necessario allo speleologo per raggiungere l'aria aperta è quindi 15 ore.

: SE LA FA E LA DISFA (...)

Esercizio 4. Per $N \in \mathbb{N}$, poniamo $\Omega_N \doteq \{1, \ldots, N\}$, e indichiamo con $\mathbf{P}_N$ la distribuzione uniforme discreta su Ω_N. Si trovino $N \in \mathbb{N}$ e una variabile aleatoria Y definita su $(\Omega_N, \mathbf{P}_N)$ tali che

$$\left[\mathbf{P}_N(Y = 1) = 0.12, \qquad \mathbf{P}_N(Y = 0) = 0.88.\right]$$

$\frac{1}{N}$ = DISCRETA UNIFORME $\sim$ Unif (N)

$P_N(A) \sim^{0}_{1}$

$N = 100 \sim$ SORUS $\sim Y(\Omega_N, P_N)$

VAR. ALEATORIA

$$Y(\omega) \doteq \begin{cases} 1 \text{ se } \{1 \dots 12\} \\ 0 \text{ se } \{13, \dots 100\} \end{cases}$$

$$P_{100}(Y=1) = P_{100} = P_{100}\{1 \dots 12\}$$
$$= \frac{\{1 \dots 12\}}{100} = \frac{12}{100} = 0.12$$

e $P_{100}(Y=0) = P_{100}(\{13, \dots, 100\}) = \frac{|\{13, \dots, 100\}|}{100} = \frac{88}{100} = 0.88$

Funziona anche con $N=25$ e $Y(\omega) \doteq \begin{cases} 1 \text{ se } \omega \in \{1,2,3\}, \\ 0 \text{ se } \omega \in \{4, \dots, 25\} \end{cases}$, $\omega \in \Omega_{25}$.

Esercizio 4. Sia ξ una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione ~~uniforme continua~~ su $[0,1]$. Si trovi una funzione $\Psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che con $Y(\omega) \doteq \Psi(\xi(\omega))$, $\omega \in \Omega$, si ha

Psi,)

$$\mathbf{P}(Y=1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(Y=2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(Y=4) = \frac{1}{6}.$$

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$\Psi(x) \sim \text{Unif}(0,1)$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } [0; \frac{1}{3}) \\ 2 & \text{se } [\frac{1}{3}; \frac{5}{6}) \\ 4 & \text{se } [\frac{5}{6}; 1] \end{cases}$$

$$P(Y=1) = P(\Phi(\xi) = 1))$$

$$\int_0^{1/3} 1\,dx = \qquad \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$[x]^{1/3} - [x]^0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2) = P(\Phi(\xi) = 2) =$$

$$P(\xi \in [\tfrac{1}{3}; \tfrac{5}{6})) \sim \mathrm{Unif}(0;1)$$

$$\int_{1/3}^{5/6} dx = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=4) = P(\Phi(\xi) = 4)] =$$

$$\int_{5/6}^{1} dx = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$
