Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 3 (3^a parte)

$\boxed{\mathbf{8}}$ Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Facendo una E.G. "in avanti" su $\mathbf{A}$ otteniamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-3)E_{31}(2)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-1)E_3(\frac{1}{11})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Facendo ora una E.G. "all'indietro" su $\mathbf{U}$ otteniamo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-3)E_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ è una forma ridotta di Gauss-Jordan per $\mathbf{A}$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}(\alpha) & | & \mathbf{I_3}\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha & | & 0 & 1 & 0\\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\qquad\qquad E_{21} \qquad\qquad}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccccc} \alpha & \alpha^2 & -\alpha & | & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \alpha & -1 & | & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1+2\alpha & | & 0 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1+2\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq -\frac{1}{2} : \mathbf{A}(-\frac{1}{2}) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \alpha & -1 & | & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha}\end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(1)} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \alpha & 0 & | & 0 & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha}\\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha}\end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-\alpha)} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & | & -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha}\\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha}\end{array}\right).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0, -\frac{1}{2}\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha}\end{pmatrix}.$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i\\ 3 & -i\end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix} \qquad \text{se} \qquad ad-bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6i(-i)-3(1-i)}\begin{pmatrix} -i & -1+i\\ -3 & 6i\end{pmatrix} = \frac{1}{6-3+3i}\begin{pmatrix} -i & -1+i\\ -3 & 6i\end{pmatrix} = \frac{1}{3+3i}\begin{pmatrix} -i & -1+i\\ -3 & 6i\end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3+3i} \times \frac{\overline{3+3i}}{\overline{3+3i}} = \frac{3-3i}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{3-3i}{3^2-3^2i^2} = \frac{3-3i}{9+9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i = \frac{1}{6}\cdot(1-i),$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\cdot(1-i)\cdot\begin{pmatrix} -i & -1+i\\ -3 & 6i\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & \alpha \\ \alpha+3i & \alpha-i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad - bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha+3i)(\alpha-i) - \alpha(\alpha+3i) = -i(\alpha+3i) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \neq -3i$, ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{-i(\alpha+3i)} \begin{pmatrix} \alpha-i & -\alpha \\ -\alpha-3i & \alpha+3i \end{pmatrix}.$$