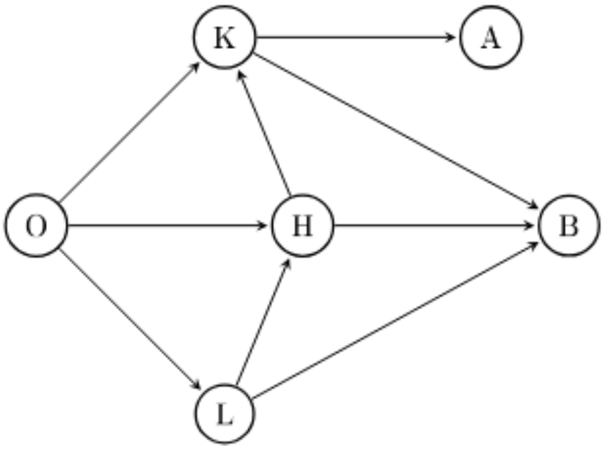
Esercizio 1. Un pacchetto di dati deve essere trasmesso da un terminale O ad un terminale A, attraverso una serie di terminali intermedi collegati come in figura (si noti che le connessioni sono rappresentate da archi diretti):



Ad ogni nodo il pacchetto di dati viene ritrasmesso scegliendo una connessione a caso tra quelle uscenti (indipendentemente dalle scelte precedenti). Per esempio, se il pacchetto è nel nodo H, viene ritrasmesso con uguale probabilità verso K o B.

(i) Qual è la probabilità che il pacchetto arrivi in A?

(ii) Qual è la probabilità che il pacchetto arrivi in B?

(iii) Qual è la probabilità che il pacchetto passi attraverso H?

(iv) Qual è la probabilità che il pacchetto arrivi in A sapendo che è passato da H?

(v) Sapendo che il pacchetto è arrivato in A, qual è la probabilità che sia passato da H?

(vi) Supponiamo che il pacchetto venga inviato più volte fino a quando non giunge in A. Sia X il numero di tentativi necessari per giungere in A. Si determini la distribuzione di X, e si calcoli il valor atteso di X.

(i) $P(O) = \frac{1}{3}$ · $P(K) = \frac{1}{2}$

→ PROB. PER OGNI NODO

→ $P(A) = P(A \mid K) \cdot P(K)$

$P(H) =$

(i) $P(A) = ?$ Guardando il grafo troviamo:

$$P(A) = \overbrace{P(A|K)}^{=\frac{1}{2}} \cdot P(K)$$

passaggio diretto da O in K

$$P(K) = \underbrace{P(K|H)}_{=\frac{1}{2}} \cdot P(H) + \underbrace{P(K \cap H^c | O)}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(O)}_{=1}$$

passaggio diretto da O in H

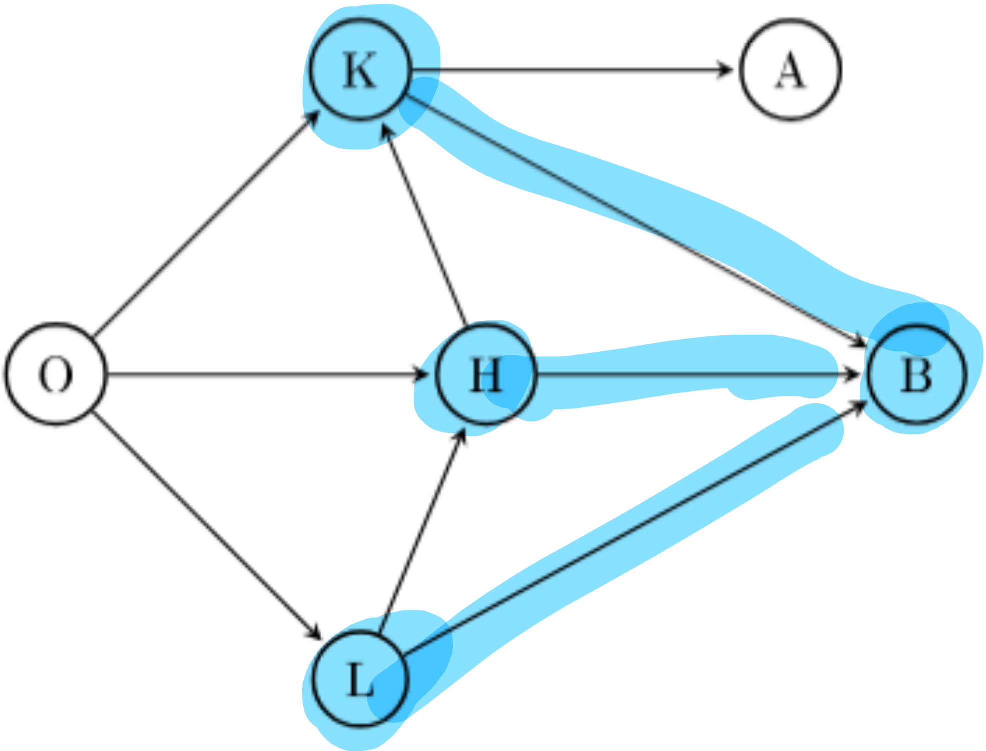
$$P(H) = \underbrace{P(H \cap L^c | O)}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(O)}_{=1} + \underbrace{P(H|L)}_{=\frac{1}{2}} \cdot P(L)$$

$$P(L) = \underbrace{P(L|O)}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(O)}_{=1} = \frac{1}{3}.$$

$$\rightsquigarrow \quad P(H) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \qquad P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\rightsquigarrow \quad P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \underline{\underline{\frac{7}{24}}}.$$

Die Muschi deiner Mutter



(iii) $P(B) = ?$

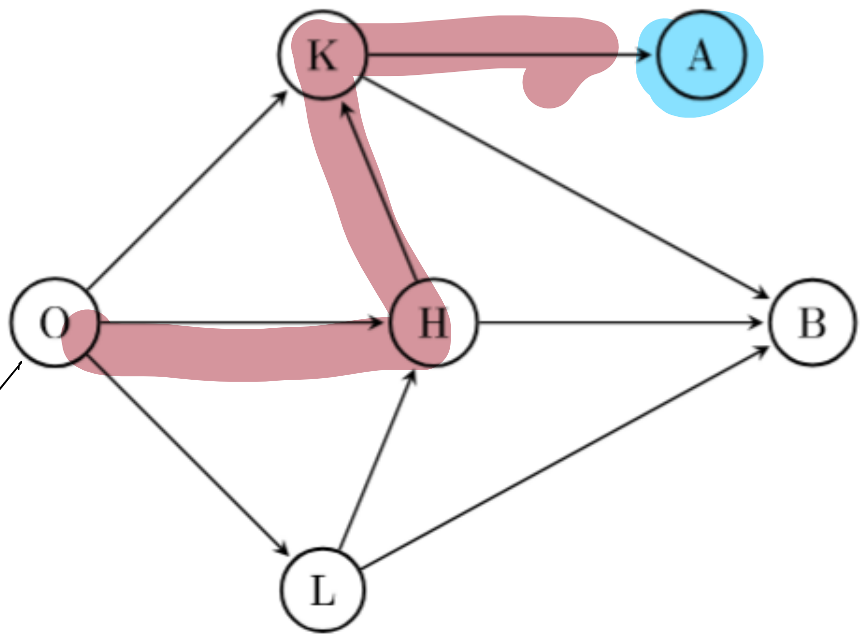
Calcolo analogo al punto (i):

$$P(B) = \underbrace{P(B|K)}_{=\frac{1}{2}} \cdot P(K) + \underbrace{P(B|H)}_{=\frac{1}{2}} \cdot P(H) + \underbrace{P(B|L)}_{=\frac{1}{2}} \cdot P(L)$$

Come in (i): $P(K) = \frac{7}{12}$, $P(H) = \frac{1}{2}$, $P(L) = \frac{1}{3}$

$$\leadsto P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{17}{24}}}.$$

! In alternativa: $P(B) = 1 - P(A) \overset{(i)}{=} \frac{17}{24}$. ✓



(iv) Qual è la probabilità che il pacchetto arrivi in A sapendo che è passato da H?

$$\cancel{P(O) \cdot P(O|H)} + P(H|K) \cdot P(K) + P(A|K) \cdot P(A)$$

(iv) $\quad P(A|H) = ?$

Per def., $\quad P(A|H) = \dfrac{P(A\cap H)}{P(H)}$

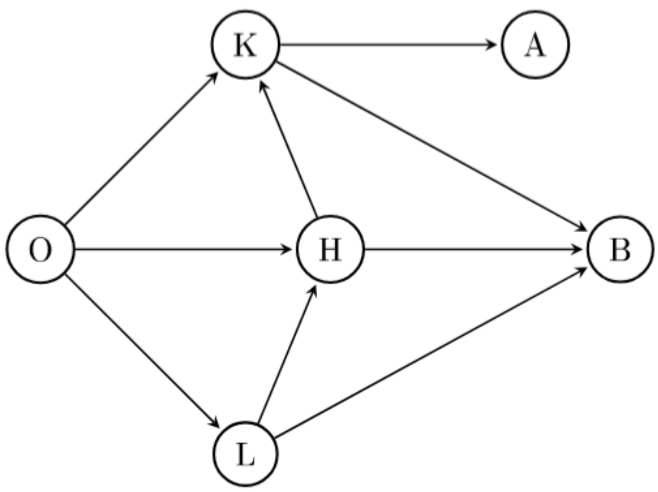
Per com'è fatto il grafo: $\quad P(A\cap H) = \underbrace{P(A\cap K\cap H)}_{\text{bisogna attraversare } K}$

Ora (regola di moltiplicazione):

$$P(A\cap K\cap H) = \underbrace{P(A|K\cap H)}_{\overset{\text{grafo}}{=} P(A|K) = \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(K|H)}_{=\frac{1}{2}} \cdot P(H) = \frac{1}{4}\cdot P(H)$$

$$\leadsto \quad P(A|H) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}\,.$$

Esercizio 1. Un pacchetto di dati deve essere trasmesso da un terminale O ad un terminale A, attraverso una serie di terminali intermedi collegati come in figura (si noti che le connessioni sono rappresentate da archi diretti):



Ad ogni nodo il pacchetto di dati viene ritrasmesso scegliendo una connessione a caso tra quelle uscenti (indipendentemente dalle scelte precedenti). Per esempio, se il pacchetto è nel nodo H, viene ritrasmesso con uguale probabilità verso K o B.

(vi) Supponiamo che il pacchetto venga inviato più volte fino a quando non giunge in A. Sia X il numero di tentativi necessari per giungere in A. Si determini la distribuzione di X, e si calcoli il valor atteso di X.

BERNOULLI $\begin{cases} q \\ (1-q) \end{cases}$

$$P_X(k) = \begin{cases} q(1-q)^{k-1}, & k \in \mathbb{N} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E_X[k] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot P_X(k)$$

$$f(z) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)}_{} - 1 \longrightarrow \text{GEOMETRICA}$$

↳ CONVERGE

$$\frac{1}{1-q} \longrightarrow \text{RAGIONE}$$

$$= \frac{1}{1-z^k}$$

derivata $\rightsquigarrow$ $$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z \in (0,1).$$

Dall'altra parte, derivando dentro la sommatoria di f:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz}(z^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z \in (0,1)$$

$z=1-q$ $\rightsquigarrow$ $$E[X] = q \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{1}{q} \overset{\text{qui}}{=} \underline{\underline{\frac{24}{7}}}. \quad //$$

Dal tuo lavoro vedo che hai definito una funzione generatrice delle probabilità f(z) e stai calcolando il valore atteso E[X]. La derivata f'(z) valutata in z=1 ti fornisce direttamente **il momento primo della distribuzione**, cioè E[X].

Questo accade perché per una funzione generatrice f(z) = Σ P(X=k)z^k, la derivata è:
f'(z) = Σ k·P(X=k)z^(k-1)

Quando poni z=1, ottieni:
f'(1) = Σ k·P(X=k) = E[X]

Il **momento primo** di una distribuzione è semplicemente il **valore atteso** (media) della variabile casuale. È il centro di massa della distribuzione e rappresenta il valore "tipico" che la variabile assume.

Nel tuo esercizio, E[X] = momento primo = numero atteso di tentativi per raggiungere il terminale A.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria non-negativa definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tale che, per un $\lambda > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{\lambda X}\right] < \infty$. Si mostri che esiste una costante $K \in (0, \infty)$ tale che

$$\mathbf{P}(X \geq c) \leq K \cdot e^{-\lambda c} \text{ per ogni } c > 0.$$

[Suggerimento: disuguaglianza di Markov-Chebyshev.]

$$\lambda \to \underbrace{\lambda \cdot e^{-\lambda}}_{\text{DENSITÀ}} = EXP$$

$$P(\cancel{X} \geq c) \leq K \cdot e^{-\lambda c}, \quad \forall c > 0$$

MARKOV $\to$ $P(X \geq a) \leq \dfrac{E[X]}{a}$

CHEB $\to$ $P(|X - E[X]| \geq k) \leq \dfrac{Var(k)}{k^2}$

$$P(X \geq c) \leq k \cdot e^{-\lambda c}$$

$X = (e^{\lambda X})$

MARKOV

$\downarrow$

$$\left[P(\underbrace{e^{\lambda X} \geq e^{\lambda c}}_{X \geq c}) \leq \frac{E[e^{\lambda X}]}{e^{-\lambda c}} \right]$$

Per la disuguaglianza di Markov applicata alla variabile e^(λX) (che è non-negativa):

P(e^(λX) ≥ e^(λc)) ≤ E[e^(λX)]/e^(λc)

Poiché e^(λX) ≥ e^(λc) è equivalente a X ≥ c, otteniamo:

P(X ≥ c) ≤ E[e^(λX)]·e^(-λc)

Ponendo K = E[e^(λX)] < ∞ (per ipotesi), la tesi è dimostrata. □

Esercizio 11. Siano N, X_i, $i \in \mathbb{N}$, variabili aleatorie indipendenti su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tali che N ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$, mentre le X_i hanno distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$. Poniamo

$$Y \doteq \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

cioè

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } N(\omega) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) & \text{se } N(\omega) = n \text{ per un } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Si determini la densità discreta di Y.

POISSON $\to \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

BERNOULLI $\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases}$

$Y(\omega) = \sum y \cdot \delta_y(k)$

CONDIZIONA SU K

$\sum_{n=0}^{Y} y \cdot \delta_y(k)$

$\Downarrow$

$$P(Y=k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k \mid N=n) \cdot P(N=n)$$

$$\binom{n}{k} \cdot p(1-p)^k \rightarrow \text{BINOM.}$$

LEGGE DEI PICCOLI NUMERI

POISSON $\sim$ BINOMIALE

$$n=0 \rightarrow P(Y=k \mid N=0) \cdot P(N=0)$$

$n \geq 1$ $P(Y=k \mid N=1, N=2) \cdot P(N=1, N=2 \ldots)$

INDOTTI

$$\sim p^k (1-p)^{n-k} \cdot \lambda \left(\frac{e^{-\lambda}}{n!}\right)$$

POISSON $\Rightarrow$ ______