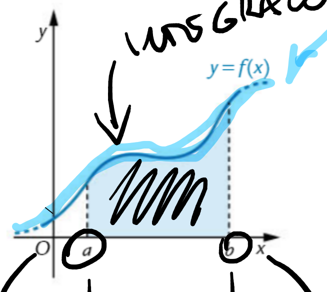
Verifica integrali definiti e aree.

- DEFINIZIONI (TEORIA: VENERDÌ!)

INTEGRALE



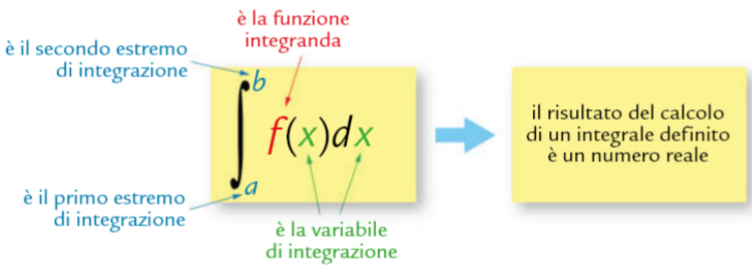
INF SUP

DEFINITO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{F(x)}$$

PRIMITIVA

TRAPEZOIDE => PORZIONE DI PIANO COMPRESA FRA "a" E "b" (ESTREMI)



=> $\underline{F(x)}$

PRIMITIVA

DERIVATA → INTEGRALE ←

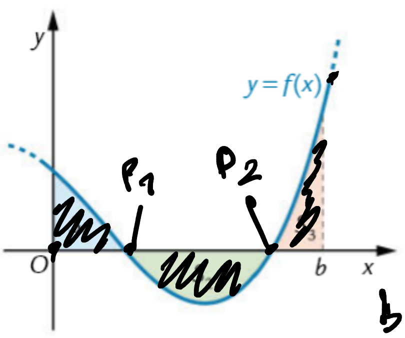


Figura 4

$$\int_0^{P_1} S_1 + \int_{P_1}^{P_2} S_2 + \int_{P_2}^{b} S_3$$ => INTEGR. DEFINITO!

PROPRIETÀ | Linearità dell'integrale definito

Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$; allora:

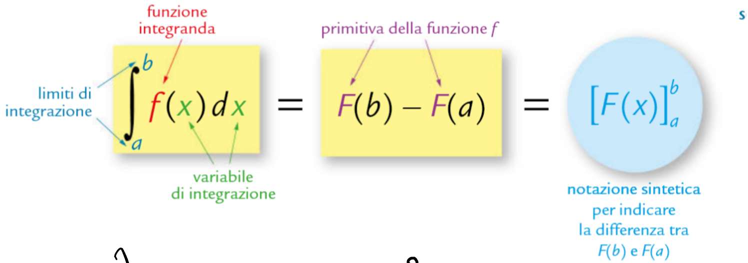
a. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

b. $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE | Funzione integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$; si chiama **funzione integrale** di f (relativa al punto a) la funzione $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad [9]$$



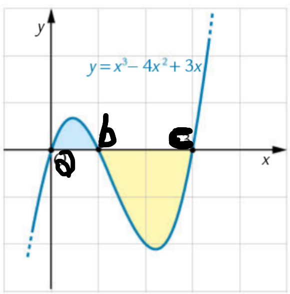
ESEMPIO: $\int_0^2 x \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\frac{(2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(0)^2}{2}\right] =$

$= \frac{4}{2} - \frac{0}{2} = 2 - 0 = 2$

ESEMPIO Area della regione di piano limitata dal grafico di una funzione e dall'asse x

Determiniamo l'area della regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ e dall'asse x.

Un breve studio della funzione $[y = f(x)]$ consente di tracciare il suo grafico qualitativo. Da esso ci rendiamo conto che la regione di cui dobbiamo calcolare l'area, limitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse, è quella colorata. Osserviamo che, ai fini del problema che vogliamo risolvere, non serve stabilire le ascisse dei punti di estremo relativo o di flesso della funzione, mentre è indispensabile determinare le ascisse dei punti d'intersezione del suo grafico con l'asse x, che in questo caso sono: $x = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.



$f(x) = y = x^3 - 4x^2 + 3x$

$\int_a^b x^3 - 4x^2 + 3x + \int_b^c x^3 - 4x^2 + 3x$

$= \int_0^1 x^3 - 4x^2 + 3x + \int_1^3 x^3 - 4x^2 + 3x$

$$= \underbrace{\int_0^1 x^3 - \int_0^1 4x^2 + \int_0^1 3x}_{\text{PROPRIETÀ 1} \rightarrow \text{SPEZZARE INTEGRALI}} + \int_1^3 x^3 - \int_1^3 4x + \int_1^3 3x$$

$$= \int_0^1 x^3 - \int_0^1 4x^2 + \int_0^1 3x + \int_1^3 x^3 - \int_1^3 4x^2 + \int_1^3 3x$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_3^1 - \left[\frac{4x^3}{3}\right]_3^1 + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_3^1$$

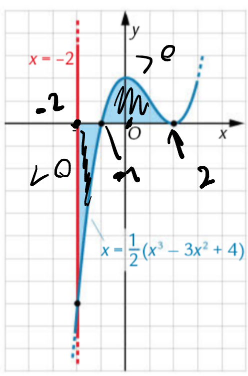
$$= \left(\left[\frac{1}{4}\right] - \left[\frac{0}{4}\right]\right) - \left(\left[\frac{4}{3}\right] - \left[\frac{0}{3}\right]\right) + \left(\left[\frac{3}{2}\right] - \left[\frac{0}{2}\right]\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \ldots$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{37}{12}$$

291 Calcola l'area della regione di piano colorata nella figura, limitata dal grafico della funzione $y = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 4)$, dalla retta avente equazione $x = -2$ e dall'asse x.



$$\int_{-2}^{-1} -y + \int_0^2 y$$

$\left[\frac{27}{4}\right]$

grafico della funzione $y = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 4)$,

$$\int_{-2}^{-1} -y \left[+ \int_0^2 y\right] \rightarrow$$

$$\int_{-2}^{-1} -\left[\left(\frac{1}{2}\right)(x^3-3x^2+4)\right] + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}(x^3-3x^2+4)$$

$$+3x^2-4$$

$$\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}\right] - \left[4x\right]_{-2}^{-1}\right.$$

$$x^0 = 1 \qquad \frac{x^{0+1}}{0+1} = x$$

$$\int 4 = 4\int \underline{dx} = 4x$$