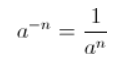
**Preliminari fondamentali**

*Potenze di numeri reali*

Moltiplicazioni di un numero (base - b) per un certo numero di volte (esponente - a) 🡪 be

Proprietà:

* Una potenza elevata a 0 equivale ad 1 🡪 a0 = 1
* Una potenza può avere esponente negativo e significa che prendiamo il reciproco della base
* Una potenza elevata ad esponente razionale (rapporto), allora avremo una radice

Altre proprietà utili:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Utile: la potenza con esponente irrazionale (per a > 0), può essere visto come:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

*Proprietà delle funzioni esponenziali e dei logaritmi*

1. Equazioni esponenziali elementari

L’equazione esponenziale elementare si presenta nella forma

e risulta essere:

a) impossibile se (perché la funzione esponenziale è sempre positiva)

b) determinata se

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteA queste, si riconducono e risolvono equazioni del tipo: af(x)=ag(x)

*Logaritmi*

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteDati due numeri reali positivi a e b, con a ≠1, “a” detta base e “b” argomento, si chiama logaritmo in base a di b e si scrive logab, l'esponente a cui elevare a per ottenere b, cioè:

Valendo inoltre:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Normalmente, i logaritmi sono in base 10, ma si può usare la base “e”, dove e = 2.71828… (numero di Nepero), che descrive il livello di crescita *nel corso del tempo* (la funzione esponenziale descrive la *quantità*).

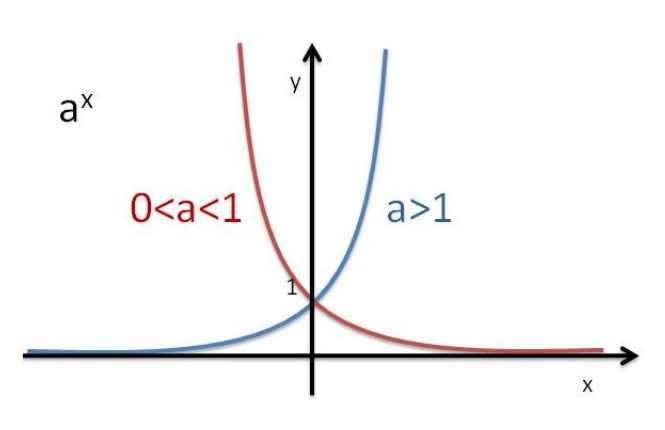
Normalmente, *log* indica *log10*; tuttavia, spesso, *log* indica proprio *logaritmo naturale*,

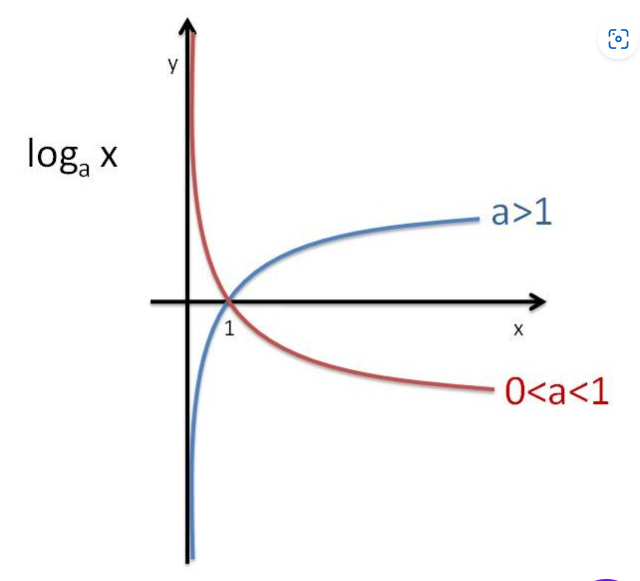
espresso anche come *ln*.

Confrontiamo la cosa utile: le funzione esponenziali e logaritmiche.

Immagine che contiene testo

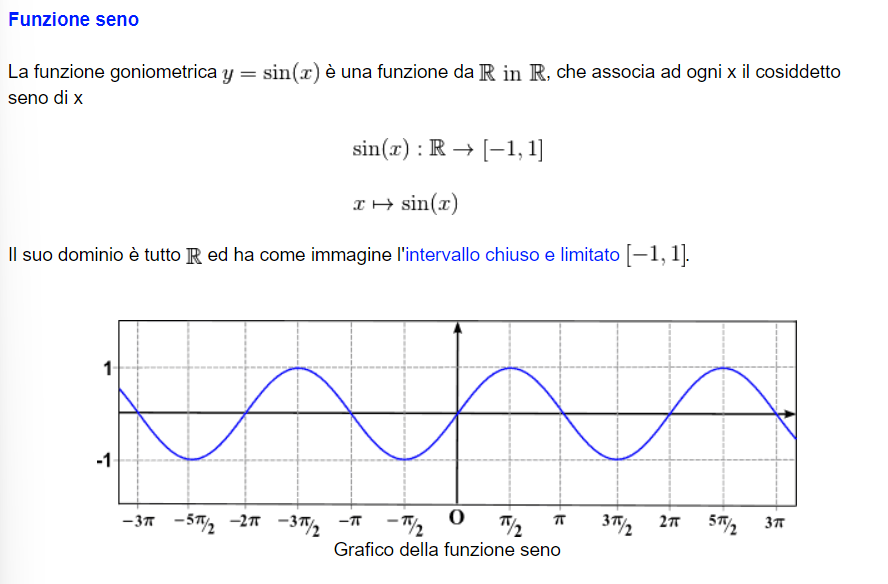
Descrizione generata automaticamente

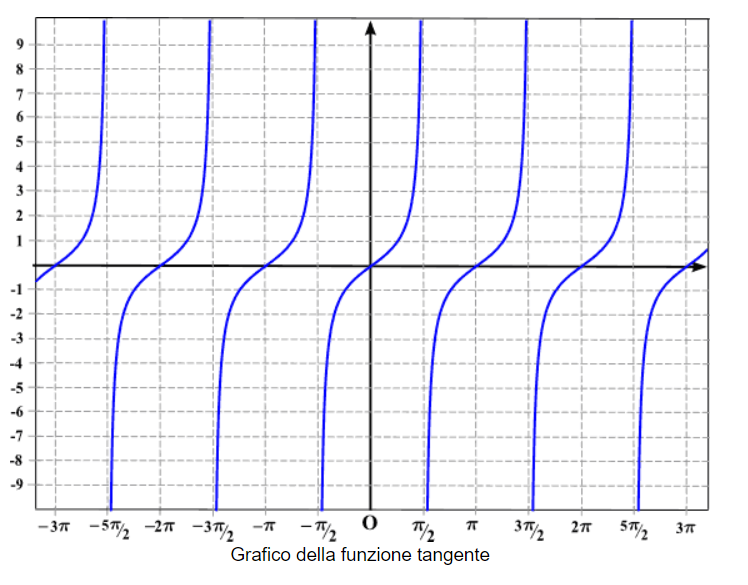


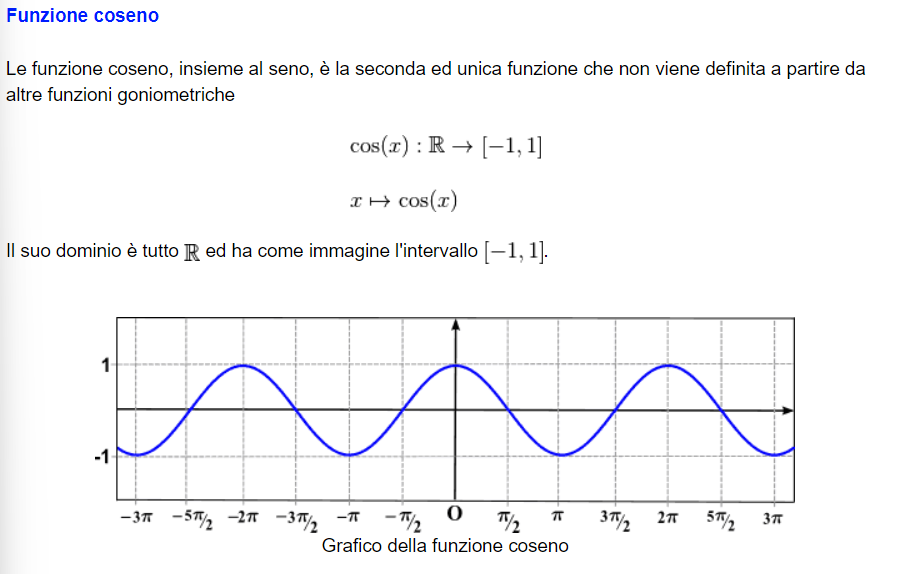
Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

*Fatti fondamentali funzioni goniometriche: seno, coseno, tangente*



Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

*L’equazione della retta e della parabola*

L’equazione delle retta permette di individuare l’appartenenza di punti (x, y) al piano cartesiano.

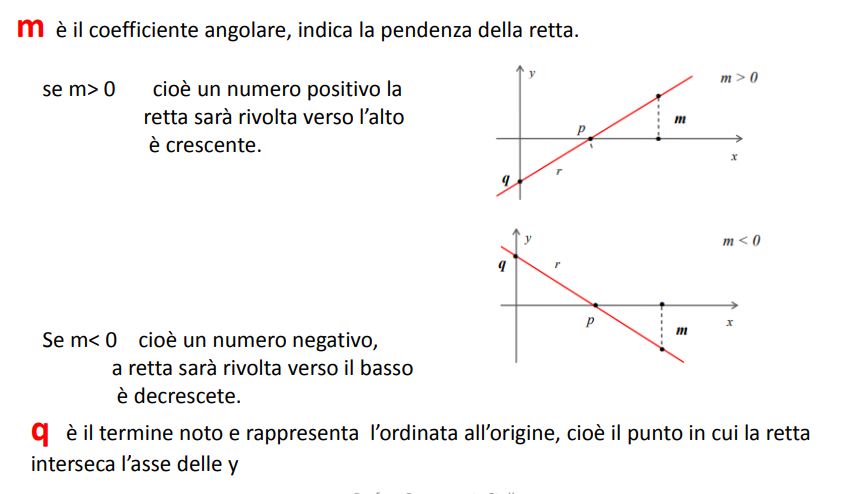
Può essere di due tipi:

1. Forma implicita

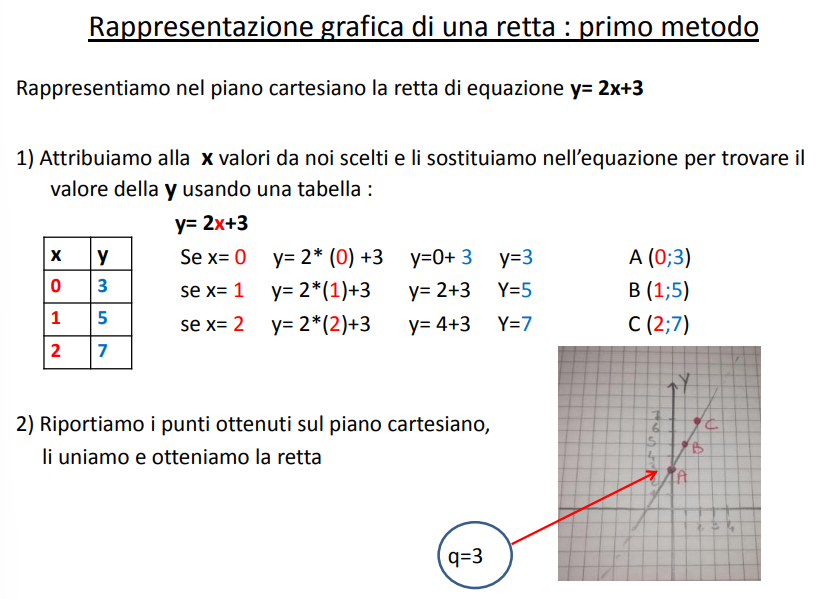


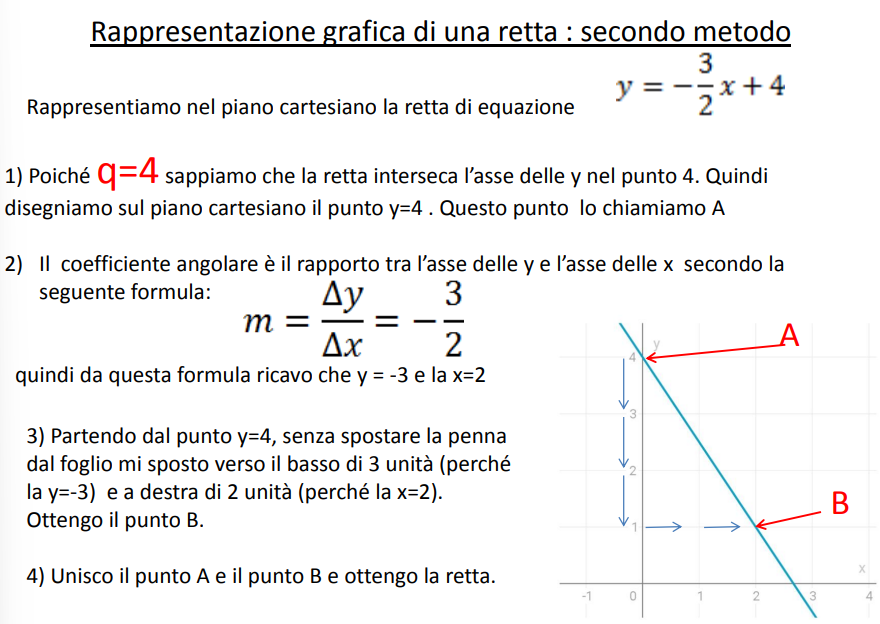
1. Forma esplicita





Utile dopo per le funzioni:





*Equazioni di secondo grado*



Esse hanno la forma:

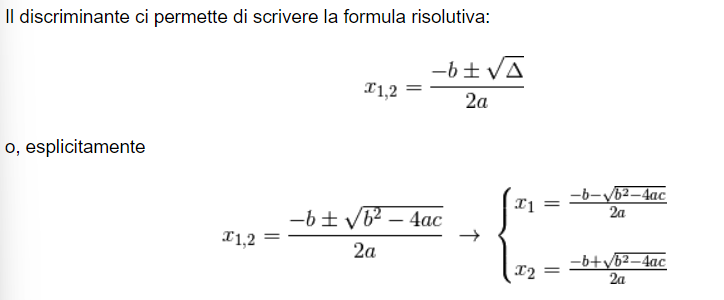
Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamentePossono ammettere a seconda del caso, un certo numero di soluzioni:

Per risolverle, normalmente, si usa la formula del *delta* o *discriminante*:



E le radici/soluzioni:



Risoluzione delle altre versioni:



* Monomia 🡪 b = c = 0 La loro soluzione è:
* Immagine che contiene testo, orologio

  Descrizione generata automaticamentePura 🡪 b = 0 La loro soluzione è:
* Immagine che contiene testo

  Descrizione generata automaticamenteSpurie 🡪 c = 0 La loro soluzione è:

**Numeri reali ed insiemi**

L’insieme è una collezione di oggetti. Un elemento può *appartenere* o *non appartenere*.

Valgono le proprietà di:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Da qui, introduciamo il concetto di funzione:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente



Da qui, parliamo di funzione *iniettiva* se



e *suriettiva* se:

Valgono le relazioni d’ordine:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Possiamo quindi *confrontare* tutte le coppie di elementi e dare queste definizioni:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

La differenza tra massimo e maggiorante (e analogamente, tra minimo e minorante) è che:

* il massimo (o minimo) di un insieme, se esiste, appartiene all'insieme ed è il più grande (o più piccolo) dell’insieme.
* Il maggiorante invece NON appartiene NECESSARIAMENTE all'insieme. Il massimo è un maggiorante, ma NON vale l'implicazione inversa.

Se un insieme è ordinato il massimo (max) o minimo (min) è unico.

A questo punto, si introducono le definizioni di estremi.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

In particolare:

* Un maggiorante è un numero reale che maggiora, cioè più grande, di ogni elemento dell’insieme.
* Un minorante è un numero reale che minora, cioè più piccolo, di ogni elemento dell’insieme.
* L’estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti e il più piccolo numero reale più grande di tutti gli elementi dell’insieme considerato
* L’estremo inferiore è il più grande dei minorante e il più grande numero reale più piccolo di tutti gli elementi dell’insieme considerato

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

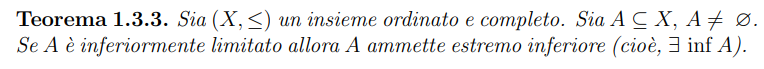
In particolare, si ha che un insieme ordinato è completo se ogni suo sottoinsieme diverso da 0 sia superiormente limitato e ammette estremo superiore.

Dato un insieme, l’ordinamento dei numeri:

* sui numeri naturali, ricaviamo che l’insieme è ordinato per il *principio di induzione di Peano*, cioè tale che dati due numeri, ne esista sempre almeno un numero somma e così via, partendo dal primo
* sui numeri razionali, sappiamo che la proprietà vale passando a frazioni equivalenti

(a/b < c/d ⇔ ad < bc), quindi moltiplicando o dividendo i numeri, siamo sempre in grado di confrontarli.

In particolare, però:



L’insieme Q non è completo

Immagine che contiene testo

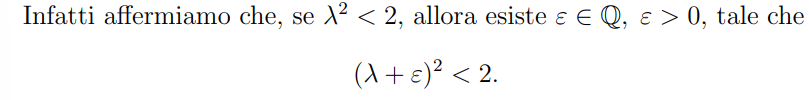
Descrizione generata automaticamente

Stiamo quindi dicendo: esiste un estremo superiore e noi, per assurdo, diciamo che non esiste.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

1) Per λ2 < 2,



e cioè partendo da un numero razionale ed ingrandendolo, ho trovato un numero razionale il cui quadrato è minore di due, il che è assurdo perché nella nostra ipotesi per assurdo p era un estremo

superiore)

1. Per λ2 = 2, la dimostrazione della irrazionalità di √2, non è possibile che un numero razionale al quadrato dia 2. Da a2/b2 = 2 si dedurrebbe, (in N, ovviamente con b ≠ 0), l’uguaglianza 2b2 = a2 , assurda, comparendo il fattore primo 2 un numero pari e dispari di volte rispettivamente nel primo e nel secondo membro dell’uguaglianza
2. Per λ2 > 2

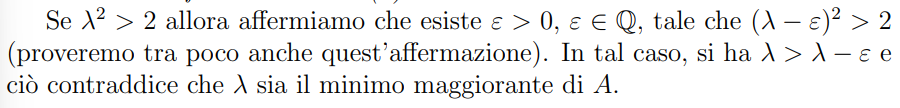


Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

L’estremo superiore “p” del nostro sottoinsieme *S* di **Q**, quindi, non esiste e la completezza non è quindi una caratteristica posseduta dall’insieme **Q** . È dall’incompletezza di **Q** che partiamo per giustificare l’introduzione dei numeri reali, quali insieme indispensabile per poter esprimere misure di grandezze fisiche, operazione per cui è necessaria la completezza.

Abbiamo infatti che, per i numeri reali, avremo che:

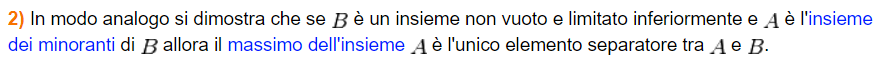
Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Concretamente, infatti, significa che, per ogni numero reale, vale che *un elemento separatore* significa che esiste sempre un elemento prima o dopo rispetto al numero considerato.

L’elemento, comunque, esiste sempre ed è *unico*, potendo quindi descrivere che:





Normalmente, valgono 4 proprietà per i numeri reali:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

L’addizione presenta il numero 0 come elemento neutro, la moltiplicazione il numero 1.



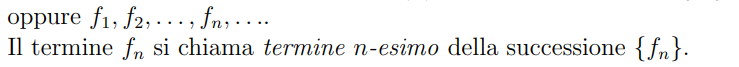
Parliamo ora del *modulo* o anche *valore assoluto*:

I singoli insiemi sono:

* **N** insieme dei numeri naturali
* **R** insieme dei numeri reali
* **Z** insieme dei numeri interi
* **Q** insieme di numeri razionali

**Successioni**

Abbiamo ora in concetto di *successione*, quindi un insieme di valori, intesa come funzione nei naturali, vista come:



avendo banalmente che un sottoinsieme di valori tra quelli considerati si chiama *sotto-successione*.

Abbiamo che una generica successione anconverge al proprio limite (per n 🡪 ∞) se:

**

e quindi, significa che per infinito, la successione “si avvicina-va verso” un valore “l” più o meno un certo valore (molto piccolo) ε.

*Se il limite esiste, è unico* (la dimostrazione si basa sul fatto che si trova come punto medio di due limiti e, alla fine, si trova che essi distano di una stessa costante).

Cose ovvie:

* se converge una successione, converge ogni sottosuccessione
* esistono somma, prodotto e divisione di successioni

Introduciamo la *permanenza del segno,* cioè la successione mantiene per tutti i suoi valori lo stesso segno:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Quindi, avremo che grazie al fatto che il limite sia visto come valore assoluto, si dimostra che la somma converge a 0).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Similmente, avremo che anche le disuguaglianze e relative successioni, mantengono l’ordine degli elementi e quindi riescano ad essere sempre più grandi o più piccole di altre successioni (per assurdo, si prova a dimostrare che non sia così, ma per il fatto che esista un solo limite a cui tengono, di sicuro si mantiene la relazione di ordine).

Esiste il teorema del confronto/dei 2 Carabinieri per successioni:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Anche le successioni possono essere limitate (sopra, sotto o da entrambe le parti).

*Ogni successione convergente è limitata* (la dimostrazione si basa sul fatto che, essendo l’insieme limitato, allora, esisterà almeno un estremo a cui tende).

Similmente, abbiamo che una successione *diverge* qualora tenda ad infinito e

* *diverge positivamente* se tende a +∞
* *diverge negativamente* se tende a -∞

Qualora abbiamo dei numeri che non possiamo maneggiare abbiamo che, si parla di *forme indeterminate*.

Le forme indeterminate sono del tipo:

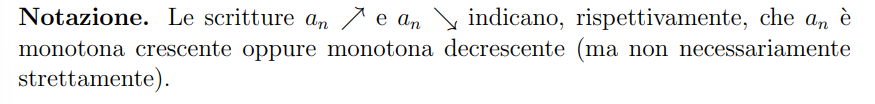


A questo punto, descriviamo la *monotonia*, intesa come una successione che continua ad avere uno stesso andamento e, in particolare, questa può crescere e decrescere.

Se la disuguaglianza non presenta un uguale, allora la crescenza/decrescenza è stretta.

Se la disuguaglianza presenta un uguale, allora la crescenza/decrescenza NON è stretta.

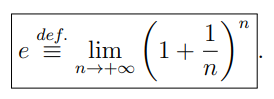
Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione si basa sul fatto che **R** è un insieme completo e, in particolare, presenterà sempre un estremo superiore o inferiore)

Una particolare successione è quella del numero di Nepero, che tende ad 1 come limite avendo che an converge e bn diverge e quindi da qui, avremo il loro andamento si assesta ad *e*.



Segue il teorema molto importante:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Commentando la dimostrazione, avremo che essendo limitata sopra e sotto ed essendo una successione crescente, proprio per il fatto di avere sempre degli estremi, avremo che il limite esiste ed an è limitata ad n).

Un particolare tipo di successioni sono quelle *per ricorrenza*, per il fatto che avranno estremi superiori ed inferiori *ciclicamente* sulle proprie sottosuccessioni.

Una particolare successione è la successione di Cauchy:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Possiamo definire Cauchy come disuguaglianza triangolare delle successioni, quindi permette di dire che ogni coppia di successioni, se di Cauchy avranno approssimativamente lo stesso limite (stretto), che esiste grazie al fatto che l’insieme è limitato (Bolzano-Weierstrass).

Accenno a livello visivo 🡪 Ordini di confronto

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

**Intervalli**

Gli intervalli intendono un insieme di punti che può essere oltre gli stesso punti (aperto), chiuso negli stessi (punti), oltre gli stessi punti o a destra o a sinistra (semichiuso).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Similmente, avremo intervalli *illimitati* se da una delle due parti o da entrambe vi è infinito.

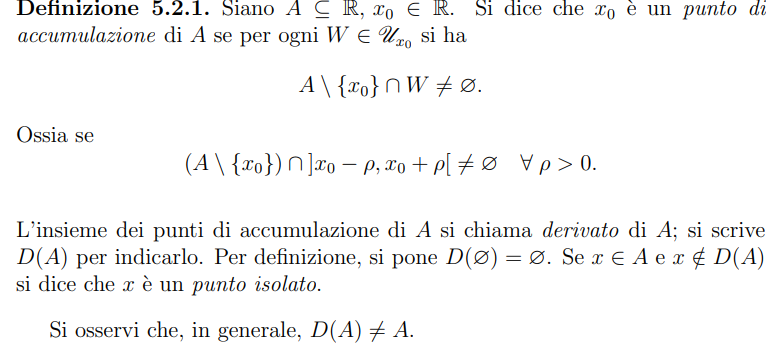
Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Se si ha un intervallo in cui si considera il punto, prima e dopo, si parla di *intorno aperto*.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Se in un intervallo che consideriamo con un punto x0 esiste almeno un altro punto che non sia il punto x0 si parla di punto di accumulazione. Il derivato qualifica l’insieme di questi punti.

Note di margine:

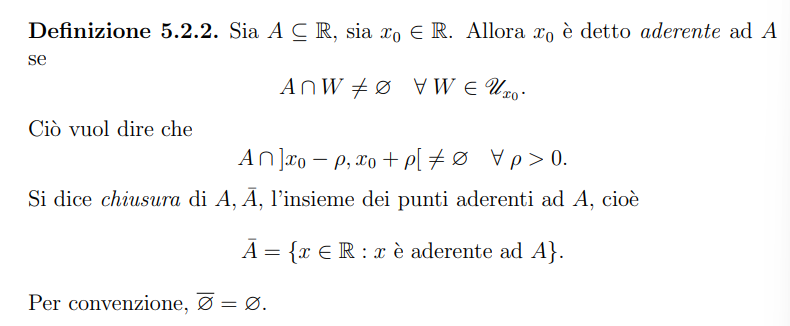
Se A è un insieme finito non appartenente ad **R**, il derivato è uguale all’insieme vuoto.

Se A è un insieme infinito appartenente ad **R**, il derivato è diverso dall’insieme vuoto.

Se A è infinito e limitato, allora il derivato è diverso dall’insieme vuoto.

Un punto di aderenza è un punto non necessariamente appartenente all’insieme per cui ogni intorno del punto interseca l’insieme stesso. In particolare, intuitivamente, possiamo dire che questo punto “si avvicina” all’insieme dei punti di accumulazione presenti per intersezione.

A questo punto, si introduce il concetto di chiusura, inteso come l’insieme dei punti di aderenza.



A questo punto, si parla di tipi di insiemi.

Ora, l’insieme chiuso è un insieme che contiene tutti i propri punti di accumulazione.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

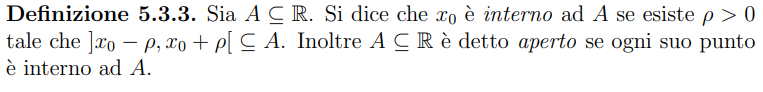
(La dimostrazione verte sul fatto che, essendo un insieme chiuso, per limite esisterà sempre almeno un punto a cui esso tende e l’insieme considerato è pari alla propria chiusura, quindi ogni punto di accumulazione di uno è uguale a quello dell’altro; ciò è un assurdo, infatti non tutti gli insiemi avranno per forza un punto in comune, “potrebbero averlo”, che è proprio la definizione di insieme chiuso).

L’insieme compatto è un insieme di punto da cui si estrae una sottosuccessione convergente ad ogni punto dell’insieme considerato. In particolare, si considera sia compatto *solo se chiuso e limitato*.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione prende in considerazione la successione di punti e, avendo un insieme compatto, sappiamo per certo questo tende allo stesso limite della successione estratta. Questo è vero anche grazie a Bolzano-Weierstrass).

Similmente, un punto x0 è interno se appartiene ad un intorno.

**Limiti di funzioni**

Prima di introdurre i limiti, diciamo solo che, occasionalmente, gli estremi inf e sup possono corrispondere a +Inf o -Inf; dunque, si consideri possano far parte dei nostri intorni di analisi.

Il fatto naturale di limite considera che, per *x* che si avvicina ad un punto *x0,* avremo che la funzione *f(x)* considerata si avvicina ad un punto *λ*.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Casi di interesse: (1) e (4) delle dispense.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Intendendo per ciascuno rispettivamente:

* x0 deve essere punto di accumulazione
* ε è il raggio dell’intorno “J” di centro “l” i cui estremi sono “(l – ε)” ed “(l + ε)”
* δ è il raggio dell’intorno “I” di centro “x0” i cui estremi sono “(x0 - δ)” ed “(x0 + δ)”

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Il limite, quando esiste, è unico.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Inoltre, sappiamo che “quando il limite della funzione per un punto x0 tende ad un valore, la funzione assume quel valore nel punto considerato x0” 🡪 Località del limite.

Segue, inoltre, la definizione dei limiti destro e sinistro, dove normalmente sappiamo che tendendo da destra (+) o da sinistra (-) rispetto ad un punto x0 oppure rispetto a +Inf o -Inf, allora i due limiti esistono finiti e tendono, *normalmente*, allo stesso valore.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Vediamo un esempio in cui il limite “non esiste”.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Si ha inoltre che se

* una successione tende per limite ad x0 allo stesso valore del limite di una funzione su x0, funzione e successione convergono nel punto x0

Diamo i teoremi del limite di somma e prodotto:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

I casi fondamentali da segnalare sono la presenza delle forme

ed altri “di contorno”.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Come per le successioni, si considera il teorema dei 2 Carabinieri stavolta per i limiti, concludendo che se una funzione è limitata superiormente ed inferiormente da altre due funzioni con lo stesso limite, anche lei avrà lo stesso limite.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Per due funzioni vicine, vale inoltre il caso di Cauchy, quindi differiscono a meno di una costante (accenno).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

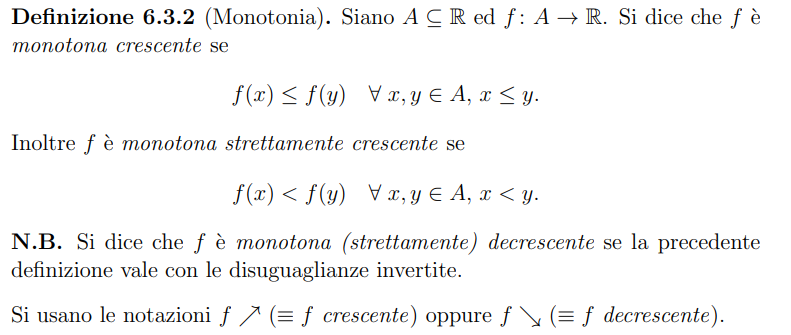
Come prima, riprendiamo i concetti di *superiormente limitata, inferiormente limitata* e *limitata* nei rispettivi casi:

(questi inf e sup possono sempre

essere, per la definizione a fianco

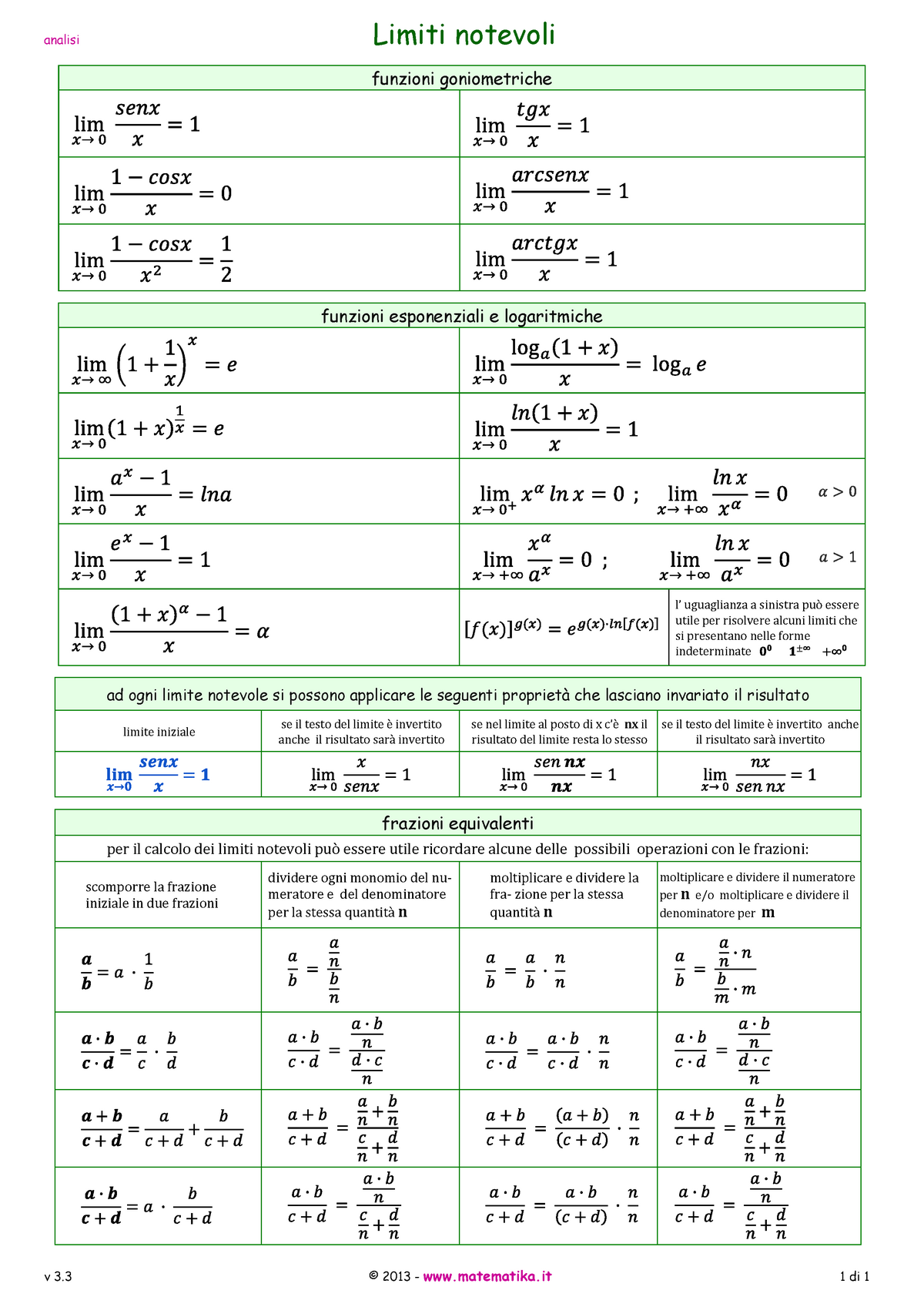
anche +Inf o -Inf)

Come per le successioni, se la funzione presenta lo stesso andamento (*monotonia*), si può avere la *crescenza/decrescenza* che, come discusso, può *essere stretta o non essere stretta*.



Da questo ne consegue che i limiti destri e sinistri possono tendere ai loro estremi *sup* ed *inf*.

A pagina dopo, tutti i limiti notevoli.



**Funzioni continue**

SI definisce funzione continua è una funzione reale di variabile reale in cui i limiti destro e sinistro calcolati nel punto coincidono con la valutazione della funzione del punto.

La definizione data considera che x0 sia punto di accumulazione o punto isolato e:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Da questo vi sono due conseguenze importanti:

* Se x0 non appartiene al dominio di A, allora f è continua in x0 e l’unico punto in grado di rendere continua f(x) è proprio x = x0

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

* La funzione è continua nel suo punto di accumulazione se f(x) coincide con la valutazione del limite nel punto considerato x0

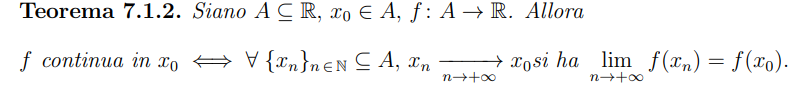


Come sempre, valgono i teoremi di somma, prodotto, reciproco di funzioni continue, in maniera similare a quelli dei limiti.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Similmente, vale che il limite di una successione continua tenda, per limite, ad x0 e anche la funzione valutata nel punto tenda, per continuità, al punto stesso x0.

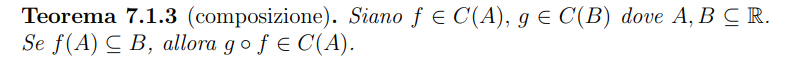


(Per la dimostrazione abbiamo che, anche prendendo un valore più piccolo a cui tende il limite, la successione è continua e, comunque, tende allo stesso limite, quindi ad x0.

Inoltre, per il secondo punto, volendo provare la continuità, si ipotizza per assurdo che la funzione non sia continua; tuttavia, abbiamo che la successione xn sarà sempre maggiorata, per completezza dei reali, da una certa quantità sommata/sottratta ad x0, contraddicendo il fatto che xn non sia continua).

Due teoremi importanti:

* La composizione, avendo che se abbiamo due funzioni *f* e *g* in due insiemi A e B, se tendono allo stesso limite, per continuità, possiamo ipotizzare valga:



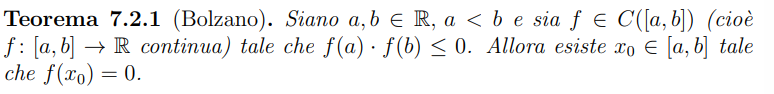
(La dimostrazione afferma banalmente che essendo entrambe continue, il limite si basa sullo stesso punto di accumulazione e ciò conclude la prova).

* Weierstrass, per cui se A è insieme compatto e la funzione *f* appartiene al compatto C(A), allora possiede massimo e minimo.



(La dimostrazione verte sul fatto di considerare la tendenza agli estremi *inf* e *sup* e, per compattezza, esiste sempre una sottosuccessione che, per continuità, tende proprio ad x0. Per l’unicità del limite, esso rimarrà sempre tale, quindi coincidendo con *inf* o con *sup*).

Altro risultante importante è decisamente *il teorema di Bolzano*.



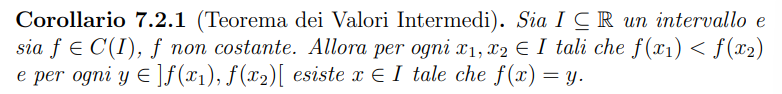
(La dimostrazione, spiegata a parole, considera di prendere *c*, punto medio di [a, b]. Non potendo sempre valere f(c) = 0, allora avremo che bisognerà porre f(a) \* f(c) ≤ 0 oppure f(b) · f(c) ≤ 0.

Questo ci porta ad avere due variabili a1 e b1 che possono essere (a,c) oppure (c,b). Essendo che tendono ad un nuovo punto medio in (b-a)/2, allora, poniamo c1 questo nuovo punto medio.

Induttivamente, si ha lo stesso ragionamento; ciò fa supporre che le successioni siano limitate, rispetto ad *a* e rispetto a *b*, generando quindi an e bn.

Si avrà quindi che il punto medio delle successioni tende a 0, valendo il teorema).

Importante, allo stesso modo il *teorema dei Valori intermedi*. Conseguenza a questo, alcune funzioni possono non avere massimo e minimo e nella loro valutazione, considerano gli estremi *inf* e *sup*.



(La dimostrazione considera che, avendo due punti diversi x1 e x2, allora, avremo che il limite di x0 è pari a 0 per una delle due funzioni e, per l’altra, si abbia che in x0 si abbia la funzione. Questo significa che la valutazione di una funzione considera che esista almeno un punto intermedio di valutazione).

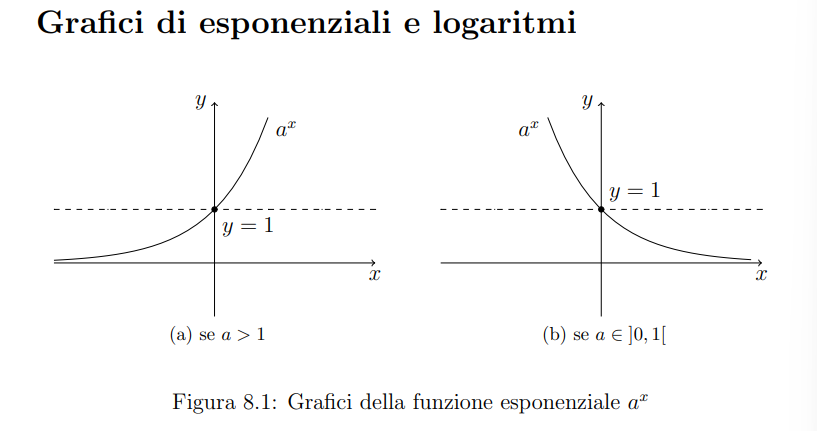
A questo punto, solo un accenno alla *continuità uniforme*, tale che una funzione definita su due valori (x,y) presenta una continuità a coppia (quindi, se *x* varia, varia anche *y*). Ogni insieme compatto è uniformemente continuo.

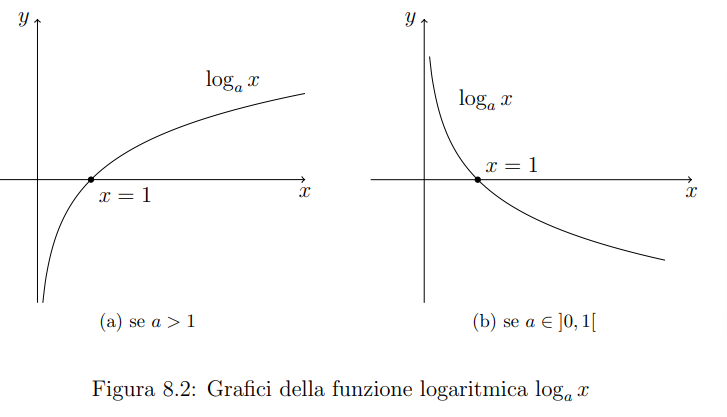
Essendo un intermezzo, anche se già presente sopra, i grafici delle funzioni esponenziale e logaritmiche.

Si considera che la base del logaritmo (a) sia sempre *e*, numero di Nepero (vedi sopra).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente





**Calcolo differenziale**

Il rapporto incrementale è il rapporto tra la variazione di ordinate e la variazione di ascisse definite a partire da una certa quantità *h.* Similmente, da qui si ha la definizione di derivata, intesa come limite del rapporto incrementale della funzione nel punto al tendere dell’incremento a zero.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Equivalentemente a sopra, si ha quest’altra notazione sotto, che pone semplicemente h = x – x0.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Abbiamo che per continuità la seconda è equivalente alla prima e si ha l’utilizzo di una funzione infinitesima che rende l’equivalenza possibile; abbiamo inoltre che la prima viene sempre preferita a quest’ultima).

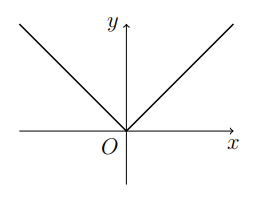
Altra sottigliezza, ma importante:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Grafico di f(x) = |x|

Qui definiamo poi, i teoremi su somma, prodotto, reciproco di derivate:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Le dimostrazioni sono prove calcolose, dunque algebriche, usando il rapporto incrementale).

Utilissimo anche il teorema di composizione di funzioni derivabili, graficamente confuso ma indica che la derivata della funzione composta (chiamata così proprio perché formata da almeno due funzioni, quindi del tipo h(x) = g(f(x))) è data dalla derivata della funzione più esterna, *con argomento invariato*, moltiplicata per la derivata della funzione più interna.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Similmente, la dimostrazione verte sulla comune convergenza a 0 del calcolo della derivata e conseguente rapporto incrementale tendente alla funzione stessa).

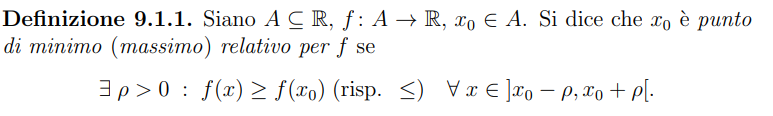
Viene poi esposta la derivata della funzione inversa, dove banalmente vale che consente di calcolare la derivata dell’inversa senza conoscere l’espressione analitica dell’inversa (senza quindi doverla calcolare). Da questa consegue che da esponenziale si passa a logaritmo, che esistano le funzioni *tangente, arcotangente*, ecc.

Immagine che contiene testo

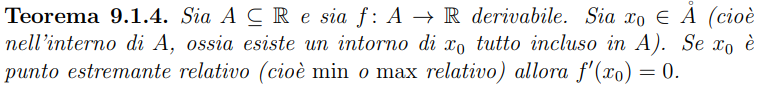
Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione considera proprio la convergenza della funzione all’inversa per cui, ragionando sul rapporto incrementale normale ed inverso, si ha convergenza alla stessa funzione e alla derivata in x0).

A questo punto, occorre enunciare la presenza di punti di *massimo/minimo relativo*, quindi considerato rispetto ad un intervallo del punto x0, non su tutto l’intervallo (in tal caso, saremmo in *massimo/minimo assoluto*).

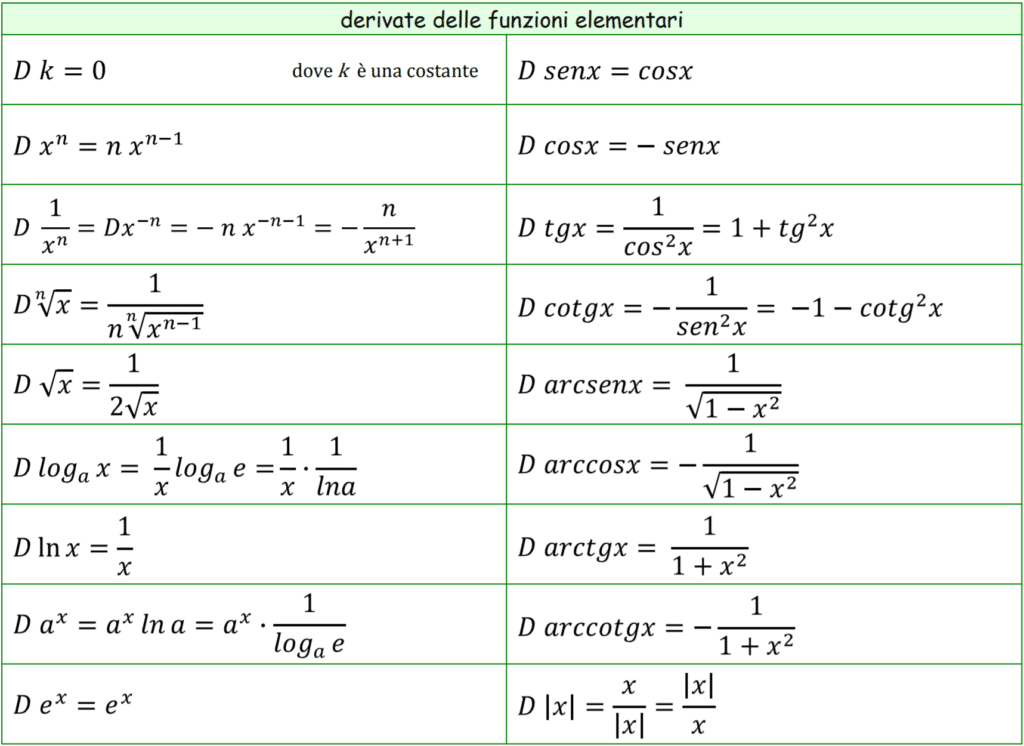


Vale anche il *primo teorema di Fermat*, che discute l’esistenza del *punto stazionario* (se esiste massimo o minimo relativo, la derivata nel punto equivale a 0):

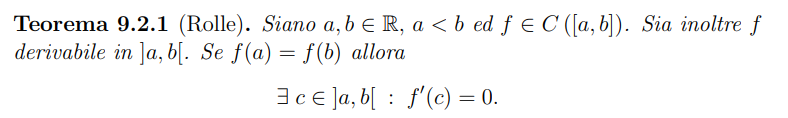


(La dimostrazione afferma che i rapporti incrementali destro e sinistro sono <= o >= a 0, pertanto risultando globalmente pari a 0).

Questo teorema permette di ricavare tutte le derivate fondamentali:



Abbiamo successivamente il teorema di Rolle*,* che afferma, partendo da una funzione costante e due funzioni uguali tra di loro, esse convergono in un punto *c* appartenente ad entrambe in cui si annulla la derivata (dimostrazione spiegata a parole con questo fatto).



Il teorema di Rolle implica che una coppia di funzioni possa avere punto medio, tale che la derivata di una delle due funzioni equivalga alla valutazione delle funzioni nel punto medio. Questo è il teorema di Lagrange (anche qui, dimostrazione spiegata a parole così).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

La conseguenza di Rolle e Lagrange può valere su coppie di funzioni ed intervalli, risultando nel teorema di Cauchy (che non approfondiamo, ma accenniamo).

Avremo però che una funzione è definita:

* *monotona crescente* se la derivata prima è >= 0
* *monotona crescente strettamente* se la derivata prima è >= 0 e f’(x) = 0 e non ha punti interni
* *monotona decrescente* se la derivata prima è <= 0
* *monotona decrescente strettamente* se la derivata prima è <= 0 e f’(x) = 0 e non ha punti interni

(Le dimostrazioni conseguono esclusivamente dalla valutazione dei rapporti incrementali, portando a considerare un intervallo maggiore/minore/uguale al punto e valendo le 4 ipotesi).

Ben più utile è il teorema di de l’Hopital, che vale per la forma indeterminata (0/0)

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

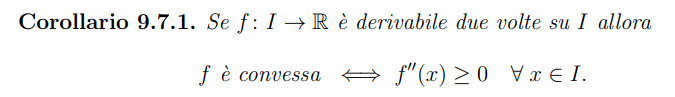
(La dimostrazione considera che valgano i rapporti incrementali a coppie su f(x) e g(x) che tendono allo stesso limite rispetto ad una variante dei rapporti che sottraggono x0, quantità che permette la differenza tra f(x) e g(x) e, di fatto, tendente a 0).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

È possibile generalizzare induttivamente il calcolo del rapporto incrementale, ottenendo le *derivate successive*.

Banalmente, abbiamo le seguenti affermazioni su funzioni derivabili:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Banalmente, per converso, avremo che):

* f concava se f’ è monotona decrescente
* f concava 🡪 f’’ (x) <= 0

**Calcolo integrale**

Per parlare di integrale, cominciamo col considerare il concetto di *scomposizione*, tale che si abbia un insieme finito e ordinato di punti in cui caratterizziamo una *misura*, quindi una sommatoria che tende a

(b – a).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Questi termini sono utili per considerare l’insieme dei punti nell’operazione di integrale, limitati, in particolare somme di punti che caratterizzano aree.

Data una scomposizione, infatti, noi ne consideriamo il valore *max* e, ognuna di queste, può diventare più *fine* qualora aggiunga almeno un altro punto o un’altra misura, affinando il risultato del calcolo.

Avendo massimo, le scomposizioni sono *limitate* (se non lo fossero, le somme tenderebbero ad infinito e, successivamente, l’integrale non sarebbe definito).

Da qui, consideriamo le *somme superiori* ed *inferiori*, che semplicemente sono date dal prodotto degli estremi inferiore e superiore per la relativa scomposizione.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Dalla definizione possiamo vedere due cose:



1. La somma inferiore è minore/uguale di quella superiore
2. Gli estremi sono finiti e si equivalgono (*inf* e *sup*) una volta calcolate le somme

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

L’integrale stesso viene dunque definito come una sommatoria, in particolare:

* *Immagine che contiene testo

  Descrizione generata automaticamente*L’estremo superiore della somma inferiore è l’*integrale inferiore*
* L’estremo inferiore della somma superiore è l’*integrale superiore*

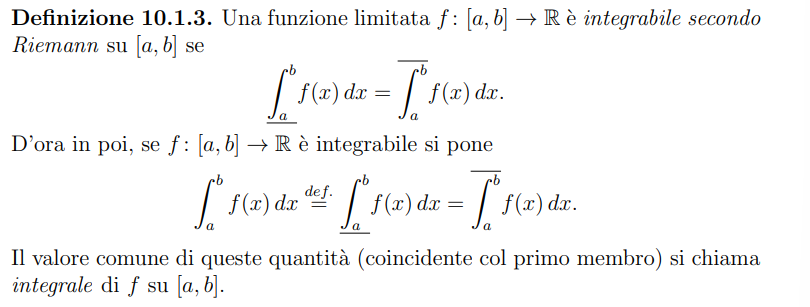
Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Entrambi sono numeri reali e finiti e l’integrale inferiore è minore/uguale a quello superiore.

Ciò non è sempre verificato; in casi particolari (funzione di Dirichlet), avremo che l’integrale inferiore è diverso dall’integrale superiore e la funzione non è integrabile.

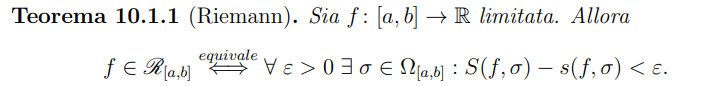
L’integrale secondo Riemann afferma invece che una funzione sia considerata integrabile se, date tutte le considerazioni precedenti, l’integrale inferiore e superiore si equivalgono (la somma delle aree sopra e sotto la funzione sono uguali).



Similmente, avremo che tra due punti, di cui uno sottoinsieme dell’altro, anche le relazioni d’ordine delle somme vengono mantenute (se il primo è minore del secondo, anche la somma inferiore/superiore del primo sarà minore del secondo).

Da qui consegue che, in generale, l’estremo inferiore è minore/uguale all’estremo superiore.

La seguente definizione, basata sulle ultime considerazioni, è più interessante. Infatti, una funzione integrabile secondo Riemann e limitata prevede che la differenza tra la somma superiore ed inferiore sia minore di una costante ε, cioè esse saranno sempre equamente distanti tra di loro.



(La dimostrazione, infatti verifica che l’integrale calcolato sopra e sotto, somma o differenzia ε/2, massima distanza tra i due estremi. Pertanto, mettendo insieme la disuguaglianza vista sopra, cioè la somma superiore meno la somma inferiore < ε, avremo che gli integrali coincidono ad ε nel calcolo.

Da ciò ne consegue che l’integrale si mantiene uguale dappertutto, per ε > 0).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Avremo inoltre che se la funzione è continua e integrabile, essa esiste nell’insieme reale.

Abbiamo anche che la decomposizione, quindi il sottoinsieme di punti su cui esistono la somma superiore ed inferiore, tende a 0. Ciò significa che, in generale, *un integrale converge*.

In particolare, da quest’ultima osservazione, deduciamo che ai limiti:

Immagine che contiene testo, orologio

Descrizione generata automaticamente

Se la funzione fosse limitata ma non continua, comunque, la funzione appartiene all’insieme dei numeri reali. Questa osservazione è utile perché permette di calcolare, negli esercizi, integrali che, anche se non continui in un punto, sfruttando lo “spezzare” in somma, riescono ad avvicinarsi ad un risultato.

Valgono le successive proprietà di somma, prodotto per una costante, confronto e valore assoluto per integrali:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Avremo inoltre che:



(La dimostrazione considera ancora la differenza tra somma superiore ed inferiore che, per sommatoria, dista a meno della solita costante ε dalle funzione calcolata nel punto.

Concretamente, avremo che la funzione nell’estremo superiore meno la funzione nell’estremo inferiore distano di una costante su tutto l’intervallo e si preserva la relazione di ordine).

Vale inoltre la proprietà di additività dell’integrale:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione considera che, essendo *f* monotona e quindi limitata, la somma superiore dell’integrale definito in un intervallo equivale alla somma delle somme superiori sui propri sottointervalli su cui è sempre definito l’integrale. Avendo che gli estremi *sup* ed *inf* ricadono sempre nella coppia di massimi/minimi della funzione in [a,b], anche in presenza di discontinuità (punti non continui, ma presenti in un numero finito o numerabile), comunque si ha che gli integrali preservano, per somma, lo stesso risultato).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Similmente, tutti gli integrali superiori e tutti gli integrali inferiori, per confronto, preservano le relazioni di ordine sui propri estremi. Graficamente, si intende facilmente questo.

Similmente, anche gli integrali inferiori saranno minori/uguali di quelli superiori nell’intervallo valutato.

Ben più importante è il teorema della media integrale. Avendo un punto µ tale per cui si abbiano estremi superiore ed inferiore, allora può essere definito il rapporto tra l’integrale e la differenza tra i suoi punti di valutazione.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Per la dimostrazione, abbiamo che la somma superiore è limitata dai due estremi, inferiore e superiore. Grazie alle equivalenze di prima, sappiamo che anche l’integrale è limitato dagli estremi, a meno però di

(b – a); ciò ha senso, essendo l’integrale la differenza delle sommatorie tra *b* ed *a*.

Ponendo pertanto µ come si vede nella formula del teorema qui sopra, si ha facilmente il calcolo dell’andamento medio integrale).

Per convenzione vale che, se b < a, l’integrale è uguale al proprio opposto.

Enunciamo ora i due teoremi fondamentali del calcolo integrale.

Il primo teorema fondamentale del calcolo enuncia che se si ha una funzione limitata ed integrabile, la funzione integrale F(x) è continua sull’intervallo dato (1). Se inoltre f(x) è continua sull’intervallo dato, allora la funzione F’(x) è derivabile in ogni punto per cui f(x) sia continua sul punto x0 dell’intervallo dato (2).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Per la dimostrazione, consideriamo la differenza dell’integrale superiore ed inferiore a meno di un incremento *h*. Usando il risultato del valor medio, avremo che il punto x0, a meno di un fattore *h* di incremento, avrà estremo superiore ed inferiore e il loro limite tende a 0. Ciò prova (1).

Similmente, essendo *f* continua, allora, il punto µ è limitato sopra e sotto dalla funzione continua in x0 a meno della solita costante ε. Ciò significa che il limite di µ tende esattamente a f(x0) e quindi è continuo anche nella propria derivata).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Da ciò consegue che la derivata della funzione integrale F(x) dà proprio come risultato f(x).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteInoltre, abbiamo il concetto di *funzione primitiva*, tale che qualsiasi funzione derivabile e continua G(x) coincida per derivata alla funzione assegnata f(x).

(La dimostrazione considera che si ricava proprio l’integrale sommato ad una costante di integrazione C).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteDa qui, esplicitamente:

(Ogni funzione continua ammette *almeno* una primitiva; se la differenza delle primitive di una funzione è costante, allora la sua derivata è pari a 0 e la funzione *f* è costante su tutto l’intervallo).

Abbiamo poi il secondo teorema fondamentale del Calcolo, sapendo che se una funzione ammette una primitiva φ(x) sull’intervallo, l’integrale è dato dalla differenza della primitiva nei due estremi (superiore ed inferiore) dell’intervallo stesso:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamenteAll’atto pratico del calcolo, si avrà come notazione:

E, dal primo teorema fondamentale del calcolo, consegue quanto enunciato prima nel commento della dimostrazione sulla costante C:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Successivamente, abbiamo la formula dell’integrazione per parti (usata sempre in questo modo negli esercizi):

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione considera proprio che si stia integrando la derivata del prodotto tra una primitiva ed un’altra funzione, da cui deriva direttamente questa formula enunciata).

Parallelamente, abbiamo la formula dell’integrazione per sostituzione (usata sempre in questo modo negli esercizi e si considera di prendere una funzione da sostituire e, successivamente, ricavarne la derivata per una costante e così risolvere l’esercizio):

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Integrali notevoli

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

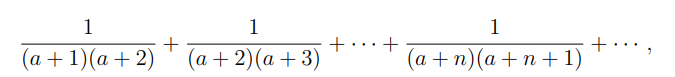
Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

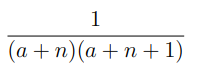
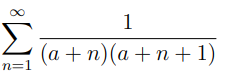
**Serie numeriche**

Chiariamo subito il concetto di serie; in effetti, queste rappresentano delle sommatorie, in particolare, somme infinite dei numeri (nel senso che generalmente vanno da 1 ad infinito).

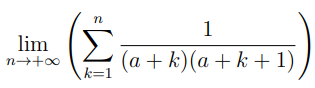
In particolar modo, consideriamo:



vista, più in generale *induttivamente* come: e quindi, da 1 ad infinito come:

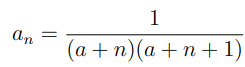


più in generale vista come limite per *n* che tende ad infinito:



Si nota che “l’insieme dei numeri che per successione permettono di ottenere la serie” è possibile rappresentarli, a loro volta, come successione:

Immagine che contiene testo, orologio

Descrizione generata automaticamente

Ne segue che Sn può essere visti come somma dei primi *n* termini (definita come somma parziale, dunque):

Immagine che contiene orologio, antenna, calibro

Descrizione generata automaticamente

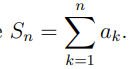
E in generale, le serie hanno convergenza, equivalentemente, come:

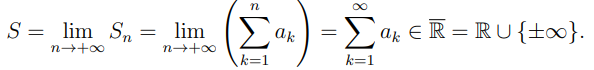
Immagine che contiene testo, orologio

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Normalmente, siamo interessati a capire se, data una *serie* (intesa quindi come *successione delle somme parziali*) essa *converge, diverge*/*non converge* (quindi, oscilla).

Dato quindi un generico termine della serie (per coerenza di notazione, definito come “termine k-esimo”, ma semplicemente è un termine della serie con indice *k*, quindi ak), avremo che la somma parziale n-esima è proprio: avendo che il limite della serie tende proprio al suo termine generale:



Banalmente, avremo che, dato il limite:

1. Il limite è un numero reale finito **L**. In tal caso, avremo che la serie è convergente.
2. Il limite , quindi il limite della successione delle somme parziali diverge positivamente
3. Il limite , quindi il limite della successione delle somme parziali diverge negativamente
4. Il limite non esiste. In tal caso, la serie è irregolare / indeterminata.



Particolari tipi di serie sono:

* La serie geometrica di *ragione* (o termine generale) *q*:

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

* La serie telescopica (considera il termine n-esimo ed n+k-esimo, quindi si intuisce si “allunghi” di un termine *k* proprio come un telescopio, da cui il nome)

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

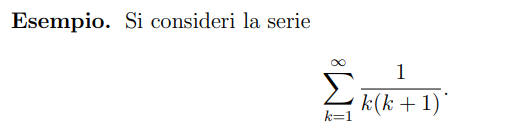
Banalmente, avremo che:

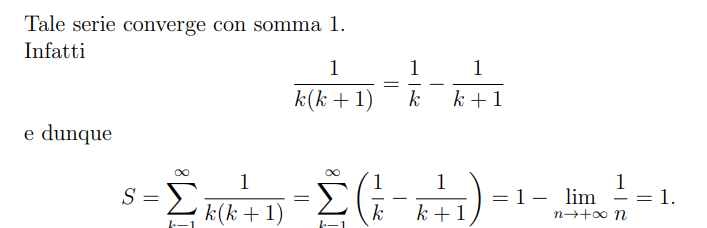
* questa serie è data dalla composizione di “addendi” diversi
* il limite degli addendi, comunemente, tende ad un certo valore
* tutta la serie (quindi, telescopica, converge)

Si tratta di riconoscere le somme tra termini successivi e, infine, capirne la somma. Quindi, prendere singolarmente le cose.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente





Si noti che:

* ogni successione è una serie (il limite della successione dei singoli membri può essere vista, a sua volta, come serie telescopica)
* la serie geometrica viene solitamente vista come metodo comodo per generare i numeri decimali

Ora, ben più importanti, sono i criteri di convergenza.

In tal senso, enunciamo la linearità, quindi, la somma di serie convergente è anch’essa convergente.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

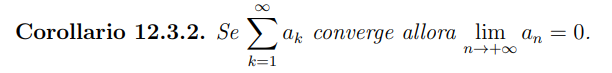
Similmente, usando il criterio di Cauchy per successioni (vale a dire, due successioni abbastanza vicine tra di loro, convergono allo stesso limite a meno di una costante ε), è possibile dire che ciò valga anche sulle serie (si presenta questa come nota di margine e collegamento logico). In questo modo, la serie converge se la sommatoria è di Cauchy.

Similmente, se la serie ha una tendenza ad una successione, ugualmente tende a 0.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Abbiamo poi che, se converge la serie, il limite della successione tende a 0 (vale per la successione n-esima)



Esempio utile: la serie armonica, che diverge positivamente.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

In maniera semplice, può essere generalizzata come segue:

Immagine che contiene testo

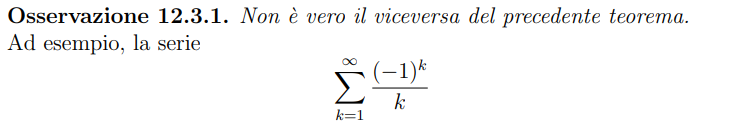
Descrizione generata automaticamente

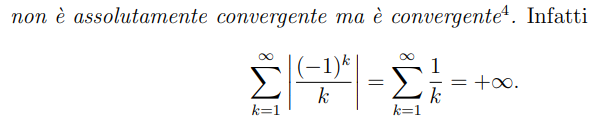
Banalmente, abbiamo poi che una serie è *assolutamente convergente* se la serie del valore assoluto della successione termine generale è convergente.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione considera Cauchy, quindi distanza tra serie vicine e successivamente, la disuguaglianza triangolare, facendo valere la maggiorazione della serie del valore assoluto sul valore assoluto della serie).





È inoltre noto che una serie a termini positivi non può oscillare.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione è basata sulla monotonia delle successioni, pertanto il limite converge (tende ad un valore) o diverge (va verso infinito)).

Altra cosa di grande importanza sulle serie sono, certamente, i criteri di confronto delle serie.

Il primo è proprio il *criterio del confronto* (da cui derivano gli altri). In particolare, si considerano due serie generico e si ha che se la seconda converge e tendono allo stesso limite, allora anche la prima converge.

Si intende convergenza *assoluta*, dunque a meno del segno e sempre valida.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione si basa sulla monotonia delle serie e delle rispettive successioni, che tendono ad un particolare valore. Essendo che entrambe convergono, avremo che la somma dei rispettivi valori di convergenza tende ad un valore comune M, a cui tende più generalmente ak e quindi la serie che ci interessa).

Il criterio del confronto vale anche per la divergenza e per la convergenza assoluta.

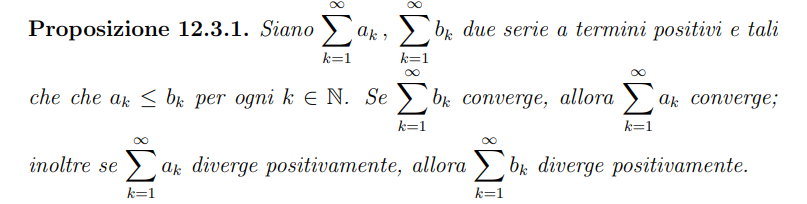


Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

Le serie possono essere a tutti gli effetti messe a confronto con gli integrali.

Esso viene definito come criterio integrale per le serie, utile nello studio delle serie armoniche generalizzate o serie con logaritmi.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(La dimostrazione di quest’ultimo coinvolge successioni non negative e monotone crescenti, che quindi hanno limite. L’integrale è definito su estremi da 1 ad infinito della funzione e, grazie a questo fatto, avremo che questo può essere generalizzato per un termine *k*, tale che al termine 1, la funzione venga vista come un limite tendente ad 1 e al termine n+1; ciò significa che, induttivamente, grazie al confronto tra serie, vediamo che ogni termine da 1 ad infinito, avrà un termine maggiorante e sarà convergente allo stesso valore, quindi definendo una serie).

Altri due criteri importanti sono il criterio della radice e del rapporto.

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Per la dimostrazione, si ha che, usando il confronto con la serie geometrica ln, convergente, anche la nostra serie con successione an converge, sapendo che il limite di sqrt(an) tende esattamente allo stesso limite).

Immagine che contiene testo

Descrizione generata automaticamente

(Per la dimostrazione e per questo criterio, normalmente, si usano gli ordini di infiniti ed infinitesimi, in parole povere, gli ordini di grandezza. Dato che il termine *n* converge, convergono anche tutti i termini precedente ad un certo limite e, avendo la monotonia, tutti i termini hanno lo stesso limite).