3 APR. 2023

① $X \sim (\Omega, F, P)$

(i)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) =$$

$$= -4 \cdot \frac{1}{6} + (-3) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \cdot P(X = x_i) =$$

$$(-4)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdots = \frac{53}{6}$$

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{103}{12}$$

(ii)

RIPARTIZIONE

$$F_X = \sin(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, \pi/2)} \cdots$$

$$\downarrow$$

$$f_X = \cos(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, \pi/2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = E[X^2]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \underset{f'}{\cos(x)} \cdot \underset{g}{x}\, dx = .$$

$$= \underbrace{x}_{g} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{f}$$

$$E[x] = \left[x \sin(x) + \cos(x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$E[x^2] = \int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \cos(x)\,dx$$

$$\ldots \to \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\mathrm{var}(x) = E[x^2] - (E(x))^2 = \pi - 3$$

(iii) $x = z^3 \sim \mathrm{Unif}(-2,2)$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$$

$$= \frac{1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$$

$$E[x] = E[z^3] = \int_{-2}^{2} z^3 \cdot \frac{1}{4}\,dz$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} z^3\,dz = 0$$

$$\mathrm{var}(x) = \frac{64}{7} - (0)^2 = \frac{64}{7}$$

$$E[x^2] = E[(z^3)^2] = \int_{-2}^{2} z^6 \cdot \frac{1}{4}\,dz = \frac{64}{7}$$

(4)

ANSATZ

$\Downarrow$

$$P = \begin{cases} 1 = \text{VINTO} \\ 0 = \text{SCONFITTO} \\ 1/2 = \text{DRAW} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} A \rightarrow V \Rightarrow P\left(\frac{3}{7}\right) / S \Rightarrow P\left(\frac{4}{7}\right) \\ D \rightarrow D \Rightarrow P\left(\frac{6}{7}\right) / S \Rightarrow P\left(\frac{1}{7}\right) \end{cases}$$

2° PARTITA $\rightarrow$ DIPENDE DA 1°

$\Downarrow$

$$\left(P(V) > P(S) \right)$$

$$P\left(\frac{3}{7}\right) > P\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$\left(1 \cdot \frac{3}{7}\right) > \left(0 \cdot \frac{4}{7}\right) =$$

$$x \cdot P(X = x)$$

A

B

$$\underbrace{1\cdot\frac{3}{7}}_{V} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 0}_{D} + \underbrace{0\cdot\frac{4}{7}}_{S} = \frac{3}{7} \quad \Big] A$$

INDIP.

$$1\cdot 0 + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{7} = \frac{3}{7} \quad \Big] D$$

Per verificare questo risultato, consideriamo una strategia specifica: prima partita A, poi:

- se vince la prima partita, gioca D nella seconda;
- se perde la prima partita, gioca A nella seconda.

1° CONDIZIONA LA SECONDA

Analizziamo i possibili esiti:

$P(V) > P(S)$

1. Prima partita A, Bianca vince (P=$\frac{3}{7}$):
    - Seconda partita D, Bianca pareggia (P=$\frac{6}{7}$): punteggio totale $1 + 0.5 = 1.5$ punti. Probabilità: $\frac{3}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{18}{49}$ → PRODOTTO TRA 1° E 2° CON PROB.
    - Seconda partita D, Bianca perde (P=$\frac{1}{7}$): punteggio totale $1 + 0 = 1$ punto. Probabilità: $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{49}$
2. Prima partita A, Bianca perde (P=$\frac{4}{7}$):
    - Seconda partita A, Bianca vince (P=$\frac{3}{7}$): punteggio totale $0 + 1 = 1$ punto. Probabilità: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$
    - Seconda partita A, Bianca perde (P=$\frac{4}{7}$): punteggio totale $0 + 0 = 0$ punti. Probabilità: $\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Calcoliamo il punteggio totale medio per questa strategia:

$$E[\text{punti}] = 1.5 \cdot \frac{18}{49} + 1 \cdot \frac{3}{49} + 1 \cdot \frac{12}{49} + 0 \cdot \frac{16}{49} = \frac{27+3+12}{49} = \frac{42}{49} \approx 0.857$$

Come previsto, otteniamo $\frac{6}{7} = \frac{42}{49} < 1$.

Conclusione: Non esiste alcuna strategia che permetta a Bianca di ottenere un punteggio totale medio strettamente maggiore di uno. L'intento dell'esercizio era probabilmente dimostrare questa impossibilità.

Nota sulla seconda parte del requisito: Il testo chiede anche che la probabilità di vincere un incontro sia strettamente maggiore della probabilità di perderlo. Con la strategia analizzata sopra:

- Probabilità che Bianca vinca l'incontro: $\frac{18}{49} \approx 0.367$
- Probabilità che Bianca perda l'incontro: $\frac{16}{49} \approx 0.327$

Poiché $\frac{18}{49} > \frac{16}{49}$, questa parte del requisito è soddisfatta. Tuttavia, poiché il punteggio totale medio non può superare 1, non esiste una strategia che soddisfi entrambi i requisiti simultaneamente.

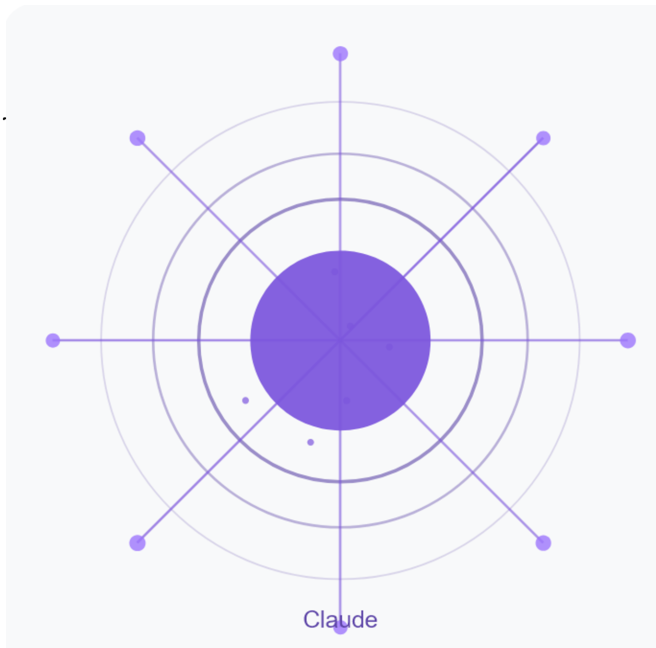
Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Rademacher di parametro $1/2$. Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.



Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2. Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

RADEMACHER $\rightarrow P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}[\xi_i] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathbb{E}[\xi_i^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{var}(\xi_i) = 1$$

$$X = \xi_1 \cdot (\xi_1 + \xi_2)$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\xi_1] \cdot \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2)$$

$$\underbrace{\mathbb{E}[\xi_1]^2}_{1} + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1 \cdot \xi_2]}_{0} = 1$$

$$E[X^2] = [\xi_1 \cdot (\xi_1 + \xi_2)]^2$$

$$= [\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2]^2$$

$$= \underbrace{\xi_1^4}_{0} + \underbrace{(\xi_1 \xi_2)^2}_{1} + \underbrace{2 \xi_1^3 \xi_2}_{0}$$

$$= 1$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1$$

$$Y = \xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)$$

Calcoliamo la media di Y:

$$E[Y] = E[\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)] = E[\xi_3] E[\xi_1 + \xi_2] = 0 \cdot (0 + 0) = 0$$

dove abbiamo usato l'indipendenza di ξ_3 e $(\xi_1 + \xi_2)$.

Per la varianza di Y:

$$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[(\xi_3(\xi_1 + \xi_2))^2] - 0^2 = E[\xi_3^2(\xi_1 + \xi_2)^2]$$

$$= E[\xi_3^2] E[(\xi_1 + \xi_2)^2] = 1 \cdot E[\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2] = E[1 + 2\xi_1\xi_2 + 1] = 2 + 2E[\xi_1\xi_2] = 2 + 2 \cdot 0 = 2$$

Cov(X, Y) => CORRELAZIONE

E[XY] - E[X] E[Y] =

Soluzione:

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - 1\cdot 0 = E[XY]$$

Calcoliamo $E[XY]$:

$$E[XY] = E[(1+\xi_1\xi_2)\cdot\xi_3\cdot(\xi_1+\xi_2)] = E[\xi_3\cdot(\xi_1+\xi_2) + \xi_1\xi_2\xi_3\cdot(\xi_1+\xi_2)]$$
$$= E[\xi_3\cdot(\xi_1+\xi_2)] + E[\xi_1\xi_2\xi_3\cdot(\xi_1+\xi_2)]$$

Abbiamo già calcolato $E[\xi_3\cdot(\xi_1+\xi_2)] = 0$.

Per il secondo termine:

$$E[\xi_1\xi_2\xi_3\cdot(\xi_1+\xi_2)] = E[\xi_1^2\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2^2\xi_3] = E[\xi_1^2]E[\xi_2]E[\xi_3] + E[\xi_1]E[\xi_2^2]E[\xi_3] = 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0 =$$

Quindi, $Cov[X,Y] = 0$, il che significa che X e Y sono non correlate.

Per determinare se X e Y sono indipendenti, dobbiamo verificare se la loro distribuzione congiunta può essere espressa come prodotto delle distribuzioni marginali.

3 X e Y

1 $\xi_1 = 1, \xi_2 = 1$

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega)\cdot(\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega)\cdot(\underline{\xi_1(\omega)} + \underline{\xi_2(\omega)}), \quad \omega\in\Omega.$$

X = {0; 2} Y = {-2; 0; 2}

ξ_1	ξ_2	ξ_3	X	Y
1	1	1	0	2
1	1	-1	0	-2
1	-1	1	2	0
1	-1	-1	2	0
-1	1	1	2	-2
-1	1	-1	2	2
-1	-1	1	0	0
-1	-1	-1	0	0

$P(X=1)$, $P(Y=2)$

③ X e Y

$\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1$

$$X(\omega) \doteq \underbrace{\xi_1(\omega)}_{1} \cdot (\underbrace{\xi_1(\omega)}_{1} + \underbrace{\xi_2(\omega)}_{1}), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

$X = \{0; 2\}$ $\quad Y = \{-2; 0; 2\}$

$P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\sum P(X=x, Y=y)$

X e Y => CONGIUNTA -> $\sum$ MARG.

X => MARGINALI

1. $\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1$: $X = 1 \cdot (1+1) = 2$, $Y = 1 \cdot (1+1) = 2$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
2. $\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1$: $X = 1 \cdot (1+1) = 2$, $Y = -1 \cdot (1+1) = -2$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$
3. $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1$: $X = 1 \cdot (1-1) = 0$, $Y = 1 \cdot (1-1) = 0$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{8}$
4. $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1$: $X = 1 \cdot (1-1) = 0$, $Y = -1 \cdot (1-1) = 0$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$
5. $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1$: $X = -1 \cdot (-1+1) = 0$, $Y = 1 \cdot (-1+1) = 0$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{8}$
6. $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1$: $X = -1 \cdot (-1+1) = 0$, $Y = -1 \cdot (-1+1) = 0$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$
7. $\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1$: $X = -1 \cdot (-1-1) = 2$, $Y = 1 \cdot (-1-1) = -2$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{8}$
8. $\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1$: $X = -1 \cdot (-1-1) = 2$, $Y = -1 \cdot (-1-1) = 2$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$

Riassumendo:

- $P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 2, Y = -2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$$X = \underbrace{\underset{1}{\xi_1}}_{1} \cdot \underbrace{(\underset{1}{\xi_1} + \underset{1}{\xi_2})}_{2} = 2 \rightarrow X = 2$$

1

$$\underbrace{P(X=2)}_{2} = P(\xi_1 = -1) \cdot P(\xi_2 = 1) +$$

$$P(\xi_2 = 1) \cdot P(\xi_2 = 1)$$

2

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Per verificare l'indipendenza, calcoliamo le distribuzioni marginali:

- $P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(X=0) = \frac{1}{2}$
- $P(Y=2) = \frac{1}{4}$
- $P(Y=-2) = \frac{1}{4}$
- $P(Y=0) = \frac{1}{2}$

Se X e Y fossero indipendenti, dovremmo avere:

- $P(X=2, Y=2) = P(X=2)\cdot P(Y=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, ma invece abbiamo $\frac{1}{4}$
- $P(X=2, Y=-2) = P(X=2)\cdot P(Y=-2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, ma invece abbiamo $\frac{1}{4}$

Quindi, X e Y non sono indipendenti, anche se sono non correlate.

CONGIUNTA != 0 → NON INDIPENDENTI

CONGIUNTA == 0 → INDIPENDENTI

SE INCORREL. $\xrightarrow[\text{FORSE}]{}$ INDIPENDENTI

FORSE (MA ANCHE NO) $\not\Leftarrow$ INDIPENDENTI

CONGIUNTA -> $\sum P(X=x, Y=y)$

IND. -> $P(X=x) \cdot P(Y=y)$

MARGINALE -> X (ES. UNA VARIABILE)

$P(X=x)$ + $P(X=x)$.

QUALCHE VALORE

O UNO O L'ALTRA

ALTRO VALORE