

2. (12 punti) Una variabile A in una grammatica context-free G è *persistente* se compare in ogni derivazione di ogni stringa w in $L(G)$. Data una grammatica context-free G e una variabile A , considera il problema di verificare se A è persistente.

- Formula questo problema come un linguaggio $PERSISTENT_{CFG}$.
- Dimostra che $PERSISTENT_{CFG}$ è decidibile.

Soluzione.

- $PERSISTENT_{CFG} = \{ \langle G, A \rangle \mid G \text{ è una CFG, } A \text{ è una variabile persistente} \}$
- La seguente macchina N usa la Turing machine M che decide E_{CFG} per decidere $PERSISTENT_{CFG}$:

$N =$ "su input $\langle G, A \rangle$, dove G è una CFG e A una variabile:

- Verifica che A appartenga alle variabili di G . In caso negativo, rifiuta.
- Costruisci una CFG G' eliminando tutte le regole dove compare A dalla grammatica G .
- Esegui M su input $\langle G' \rangle$, e ritorna lo stesso risultato di M ."

Mostriamo che N è un decisore dimostrando che termina sempre e che ritorna il risultato corretto. Verificare che una variabile appartenga alle variabili di G è una operazione che si può implementare scorrendo la codifica di G per controllare se A compare nella codifica. Il secondo passo si può implementare copiando la codifica di G senza riportare le regole dove compare A . Di conseguenza, il primo ed il secondo step terminano sempre. Anche il terzo step termina sempre perché sappiamo che E_{CFG} è un linguaggio decidibile. Quindi N termina sempre la computazione.

Vediamo ora che N dà la risposta corretta:

- Se $\langle G, A \rangle \in PERSISTENT_{CFG}$ allora A è una variabile persistente, quindi compare in ogni derivazione di ogni stringa $w \in L(G)$. Se la eliminiamo dalla grammatica, eliminando tutte le regole dove compare A , allora otteniamo una grammatica G' dove non esistono derivazioni che permettano di derivare una stringa di soli simboli terminali, e di conseguenza G' ha linguaggio vuoto. Quindi $\langle G' \rangle \in E_{CFG}$, e l'esecuzione di M terminerà con accettazione. N ritorna lo stesso risultato di M , quindi accetta.
- Viceversa, se $\langle G, A \rangle \notin PERSISTENT_{CFG}$ allora A non è una variabile persistente, quindi esiste almeno una derivazione di una parola $w \in L(G)$ dove A non compare. Se eliminiamo A dalla grammatica, eliminando tutte le regole dove compare, allora otteniamo una grammatica G' che può derivare w , e di conseguenza G' ha linguaggio vuoto. Quindi $\langle G' \rangle \notin E_{CFG}$, e l'esecuzione di M terminerà con rifiuto. N ritorna lo stesso risultato di M , quindi rifiuta.