G. Parmeggiani

Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Esercizi per casa 7

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si provi che l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$ e che l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n non lo è.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un suo sottospazio:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 0 \right\};$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 - 2y = 0 \right\};$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 1 \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Si provi che i tre seguenti sottoinsiemi di $M_n(\mathbb{C})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{C})$:

$$W_1 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\};$$
$$W_2 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} \text{ è una matrice scalare}\};$$
$$W_3 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\}.$$

$\boxed{6}$ Sia $V = \mathbb{R}^2$ (sp. vett. reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R} \right\}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{S}}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix} |a \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\boxed{7}$ Si dica se

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_1 = \{i \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \text{ e}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_2 = \{2 \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\}$$

sono sottospazi di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{8}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} |a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{9}$ Si dica se

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{10}$ Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\boldsymbol{\mathcal{S}}(x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia W l'insieme delle matrici anti-simmetriche reali di ordine 2. W è uno spazio vettoriale reale, essendo un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$. Si considerino i suoi sottoinsiemi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_3$ definiti nell'esercizio 6. Per ciascuno di essi si dica se è linearmente indipendente oppure linearmente dipendente.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\mathcal{B} = \{2+x^2; x-x^2; 1+x\}$ è una base di V.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$. V è un sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ (non ne è richiesta la verifica); in particolare V è uno spazio vettoriale. Si provi che

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di V.