Verifica sommatorie, serie geometrica, telescopica e armonica. Convergenza s divergenza

$$\text{SERIE} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 \ldots + a_n + \ldots$$

SIGMA MAIUSCOLO (SOMMATORIA)

SERIE = SOMMA DI TERMINI IN SUCCESSIONE

$\lim_{n \to \infty} S_N$ SOMMA

Una serie numerica è la somma dei termini di una successione, indicata con:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Per studiare una serie, definiamo le somme parziali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Una serie si dice:

- **Convergente** se esiste finito il limite delle somme parziali: $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$
- **Divergente** se il limite delle somme parziali è infinito: $\lim_{n \to +\infty} S_n = \pm\infty$
- **Irregolare** se il limite delle somme parziali non esiste

```
FOR (i = 1; i < N; i++)          N = 100;
    C[i] = 2;
```

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} C[i] = C[1] + C[2] + C[3] + \ldots\ldots C[100];$$

ESEMPIO PRATICO SERIE

DEF. SERIE → 1

B. (__/2) Per ogni serie scrivi la ridotta di ordine 3 s_3

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n} = \frac{(-2)^1}{1} + \frac{(-2)^2}{2} + \frac{(-2)^3}{3}$

$$= -\cancel{2} + \cancel{2} - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$

$n! =$ FATTORIALE

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ / $0! = 1$

RIDOTTA DI ORDINE

$$\frac{0!}{(0+1)!} + \frac{1!}{(1+1)!} + \frac{2!}{(2+1)!} + \frac{3!}{(3+1)!}$$

$$= \frac{0!}{1!} + \frac{1!}{2!} + \frac{2!}{3!} + \frac{3!}{4!}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}} + \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{24}_{4}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12}$$

3. $\sum_{n=4}^{+\infty} \log(n-3) = \underbrace{\log(4-3)}_{1^\circ \text{ TERMINE}} + \underbrace{\log(5-3)}_{2^\circ} + \underbrace{\log(6-3)}_{3^\circ}$

[RIDOTTA DI ORDINE 3] = SOMMA DI 3 TERMINI

SERIE = SOMMA

CONVERGE (AD UN NUMERO)

$$\sum_{i=1}^{100} C[i] = \frac{1000}{\text{FINITO}}$$

DIVERGE

$$\sum_{i=1}^{100} C[i] = \infty$$

C. (__/3) Studiare le seguenti serie geometriche, se sono convergenti calcolarne la somma.

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (4-\sqrt{15})^n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 \ldots + q^n$$

SERIE — GEOMETRICA
— TELESCOPICA
— ARMONICA

Una serie geometrica ha la forma:

SIAMO NELLA 1° FORMA

$$1° \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

o anche:

$$2° \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Convergenza della Serie Geometrica

1. Se $|q| < 1$, la serie **converge** a $\frac{1}{1-q}$
2. Se $|q| \geq 1$, la serie **diverge**

CRITERI PER CONVERGENZA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(4-\sqrt{15})}_{q}{}^{n} \quad (q)^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(4-\sqrt{15})}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \rightarrow \text{CONVERGE AD } \frac{1}{1-q}$$

$$\rightarrow 4 - \sqrt{15} \underset{\text{CIRCA}}{\approx} 0,13 < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad \text{SE } q < 1 \rightarrow \frac{1}{1-q} \text{ (CONVERGE)}$$

$$\text{SE } q \geq 1 \rightarrow \text{DIVERGE}$$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}$ → 1° COSA = CAPISCO IL TIPO DI SERIE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}$$

4

$$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \quad \begin{cases} q<1 \to \frac{1}{1-q} \\ q \geq 1 \text{ DIVERGE} \end{cases}$$

CAPISCO QUANTO VALE "q"

$$\frac{(-1)^1}{2^{1+4}} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32} < 1$$

$q<1$ → LA SERIE DEVE CONVERGERE

$$\frac{1}{1-q} \to \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} \qquad = \frac{1}{1-\frac{1}{32}} = \frac{32}{31}$$

1° TERMINE RIDOTTO $\frac{32-1}{32} = \frac{31}{32}$

(ALTERNATIVA) $S = \frac{Q}{1-R} = \frac{-1/32}{1-(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{48}$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^n+3^n}{6^n}$ →

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^{n+3}}{6^n}$ Riscriviamo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^n \cdot 18^3}{6^n} = 18^3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{18}{6})^n = 18^3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$

Questa è una serie geometrica con primo termine $a = 3$ e ragione $r = 3$.

Poiché $|r| = |3| = 3 > 1$, la serie diverge.

D. (__/1) Dare una definizione di serie telescopica e descrivine la più famosa.

TELESCOPICA $\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$

$\underbrace{\quad}_{\text{COPPIA DI TERMINI IN SOMMA}}$

SERIE FAMOSA TELESCOPICA

SERIE DI MENGOLI $\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

E. (__/3) Studiare le seguenti serie telescopiche $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$

7. $\sum_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}]$ $\rightarrow$

Come Affrontare gli Esercizi con Serie Telescopiche

1. Identifica se i termini possono essere scritti come differenza
2. Scrivi le somme parziali ed osserva le cancellazioni
3. Calcola il limite della somma parziale

SOMMA SU "K" TERMINI $\rightarrow$

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} |\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}| \quad 1° \text{ PUNTO}$$

$$= |\sqrt{K-1} - \sqrt{K-2}| = \sqrt{K-1} + \sqrt{K-2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{k-1}+\sqrt{k-2} = \sqrt{\infty - 1} + \sqrt{\infty - 2}$$

$$= (\infty) \to \text{DIVERGE}$$

8. $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)$

$a_n - a_{n+1}$ $\to$ $S_k = \sum_{n=0}^{k}\left[\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right] = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

$$= \frac{6-5}{30} = \frac{1}{30}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_k = \frac{1}{30} \to \text{CONVERGE}$$

8. $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6})$ Questa è una serie telescopica: $s_k = \sum_{n=0}^{k}[\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}] = \frac{1}{5} - \frac{1}{k+6}$

Quando $k \to \infty$, $s_k \to \frac{1}{5}$, quindi la serie converge a $\frac{1}{5}$.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ Riscriviamo: $\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$

Quindi la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty}[\ln(n+1)-\ln(n)]$, che è telescopica:
$s_k = \sum_{n=1}^{k}[\ln(n+1)-\ln(n)] = \ln(k+1) - \ln(1) = \ln(k+1)$

Quando $k \to \infty$, $s_k \to \infty$, quindi la serie diverge.

F. (__/1) Dare una definizione di serie armonica e farne un esempio dicendo se converge o diverge con motivazione.

$$S_n \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \text{ARMONICA}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{\text{SUCCESSIONE}} = (+\infty) - \text{DIVERGENTE}$$

$\to$ SERIE ARMONICA GENERALIZZATA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$p > 1 \to$ CONVERGE

$p \leq 1$ DIVERGE