

1. (12 punti) Una *Macchina di Turing con eliminazione* è una macchina di Turing deterministica a nastro singolo che può eliminare celle dal nastro. Formalmente la funzione di transizione è definita come

$$\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{L, R, D\}$$

dove L, R indicano i normali spostamenti a sinistra e a destra della testina, e D indica l'eliminazione della cella sotto la posizione corrente della testina. Dopo una operazione di eliminazione, la testina si muove nella cella che si trovava immediatamente a destra della cella eliminata.

Dimostra che qualsiasi macchina di Turing con eliminazione può essere simulata da una macchina di Turing deterministica a nastro singolo.

2. (12 punti) Data una Turing Machine M , definiamo

$$\text{HALTS}(M) = \{w \mid M \text{ termina la computazione su } w\}.$$

Considera il linguaggio

$$I = \{\langle M \rangle \mid \text{HALTS}(M) \text{ è un insieme infinito}\}.$$

Dimostra che I è indecidibile.

3. (12 punti) Una 3-colorazione di un grafo non orientato G è una funzione che assegna a ciascun vertice di G un “colore” preso dall'insieme $\{1, 2, 3\}$, in modo tale che per qualsiasi arco $\{u, v\}$ i colori associati ai vertici u e v sono diversi. Una 3-colorazione è *sbilanciata* se esiste un colore che colora più di metà dei vertici del grafo.

UNBALANCED-3-COLOR è il problema di trovare una 3-colorazione sbilanciata:

$$\text{UNBALANCED-3-COLOR} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ è un grafo che ammette una 3-colorazione sbilanciata}\}$$

- (a) Dimostra che UNBALANCED-3-COLOR è un problema NP
- (b) Dimostra che UNBALANCED-3-COLOR è NP-hard, usando 3-COLOR come problema NP-hard di riferimento.