ANALISI MATEMATICA
Corso di Laurea in Informatica

Appello del 11.02.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 6) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x \, \frac{x^2}{x+6}$$

(a) determinarne il dominio di f ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

(c) calcolare la derivata di f, discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a) Il dominio di f e $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$ e la funzione non presenta simmetrie.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-6^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-6^-} f(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x x = 0$$

grazie al teorema di gerarchia degli infiniti. In particolare $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$ e la funzione non si può estendere per continuità in $x = 6$.

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x \frac{x^2}{x^2+6x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

la funzione non ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

(c) La funzione è derivabile in ogni punto del dominio in quanto prodotto e rapporto di funzioni derivabili.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \left(\frac{x^2}{x+6}\right) + e^x \left(\frac{x^2}{x+6}\right)' = e^x \left(\frac{x^2}{x+6} + \frac{2x(x+6)-x^2}{(x+6)^2}\right) = e^x \, \frac{x^3+7x^2+12x}{(x+6)^2} \\ &= e^x \, \frac{x(x+3)(x+4)}{(x+6)^2}. \end{aligned}$$

Calcoliamo quindi i limiti di f' agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-6^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-6^+} f'(x) = -\infty$$

e grazie alla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x x = 0.$$

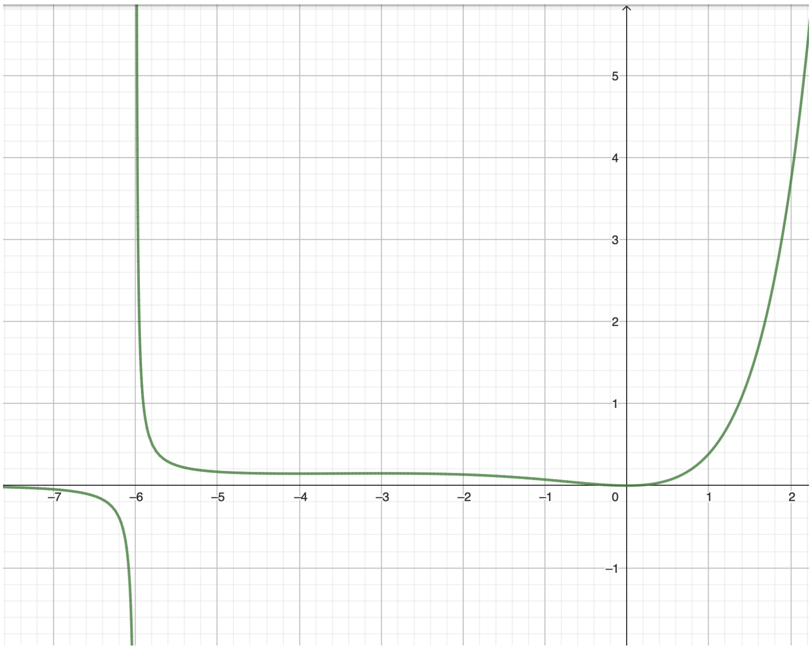

Figure 1: grafico della funzione dell'esercizio 1.

Dall'espressione della derivata abbiamo che $f'(x) = 0$ per $x \in \{-4, -3, 0\}$ e f è crescente negli intervalli $(-4, -3)$ e $(0, +\infty)$, mentre è decrescente negli intervalli $(-\infty, -4)$ e $(-3, 0)$. In particolare $x = -4$ e $x = 0$ sono punti di minimo relativo e $x = -3$ è un punto di massimo relativo. Dal comportamento dei limiti agli estremi del dominio abbiamo che $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$ quindi non esistono punti di massimo o minimo assoluti.

Esercizio 2 (punti 5) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha-1} \left| \frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n} \right|.$$

Svolgimento. Determiniamo il comportamento asintotico di $a_n = n^{2\alpha-1} \left| \frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n} \right|$. Ricordiamo lo sviluppo

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Poiché $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$ abbiamo

$$a_n = n^{2\alpha-1} \left| \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right|$$

quindi distinguiamo i seguenti casi:

1. se $\alpha < 1$ vale $a_n \sim n^{2\alpha-1}\frac{1}{n^\alpha} = n^{\alpha-1}$. Dal criterio del confronto asintotico la serie converge se $\alpha - 1 < -1$ che è verificata per ogni $\alpha < 0$, e diverge per $\alpha \in [0, 1)$;
2. se $\alpha = 1$ allora $a_n \sim n^{2\alpha-4} = n^{-2}$ quindi la serie è convergente;
3. se $\alpha > 1$ allora $a_n \sim n^{2\alpha-2}$ quindi la serie converge se $2\alpha - 2 < -1$, che non é verificata per nessun $\alpha > 1$, quindi la serie diverge per ogni $\alpha > 1$.

Esercizio 3 (punti 5) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x^2)-\sin(2x^2)}{\sqrt{1+2x^6}-\cos(2x^3)}.$$

Svolgimento. Utlizzando lo sviluppo $\text{sen}(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$ per $y \to 0$ abbiamo

$$2\sin(x^2)-\sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{x^6}{3} - 2x^2 + \frac{(2x^2)^3}{6} + o(x^6) = x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x \to 0.$$

Utilizzando gli sviluppi $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ e $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, abbiamo

$$\sqrt{1+2x^6} - \cos(2x^3) = 1 + x^6 - 1 + \frac{(2x^3)^2}{2} + o(x^6) = 3x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x^2)-\sin(2x^2)}{\sqrt{1+2x^6}-\cos(2x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6+o(x^6)}{3x^6+o(x^6)} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 4 (punti 5)

(a) Calcolare l'integrale

$$\int t^3\, e^{t^2}\, dt.$$

Suggerimento: osservare che $t^3 = \frac{1}{2}2t \cdot t^2$.

(b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) = -2ty(t) + t^3 \\ y(0) = 2025. \end{cases}$$

Svolgimento

(a) Usando la sostituzione $y = t^2$ abbiamo

$$\int t^3 e^{t^2} dt = \frac{1}{2}\int t^2 e^{t^2} \cdot 2t dt = \int y e^y dy.$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int y e^y dy = y e^y - \int e^y dy = (y-1)e^y + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\int t^3 e^{t^2} dt = \frac{1}{2}(t^2-1)e^{t^2} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

(b) Utilizzando il punto precedente e la formula di risoluzione per equazioni differenziali lineari del prim'ordine abbiamo

$$y(t) = e^{-t^2}\left(y(0) + \int_0^t e^{s^2} s^3 ds\right) = e^{-t^2}\left(2025 + \frac{1}{2}(t^2-1)e^{t^2} + \frac{1}{2}\right) = \left(2025 + \frac{1}{2}\right)e^{-t^2} + \frac{1}{2}(t^2-1).$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$