

ANALISI MATEMATICA

PROGRAMMA FINALE

Corsi di laurea in Informatica

Docenti: Davide Vittone, Paolo Musolino, a.a. 2024-2025

Prerequisiti: Buona formazione matematica a livello dei programmi di Liceo e Istituti di Scuola Secondaria Superiore: algebra e geometria elementare, geometria analitica, equazioni e disequazioni algebriche, conoscenza base della trigonometria e delle equazioni trigonometriche, conoscenza delle funzioni matematiche di base e delle loro proprietà (potenze, esponenziali e logaritmi).

Testi Consigliati:

Teoria:

- A. Marson, P. Baiti, F. Ancona, B. Rubino: Analisi matematica 1. Teoria e applicazioni, Carocci (testo adottato)
- M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 2, Zanichelli (solo per l'ultima parte dell'insegnamento)
- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 1, Zanichelli
- M. Lanza de Cristoforis, Lezioni di Analisi Matematica 1, Esculapio

Esercizi:

- P. Marcellini, C. Sbordone: Esercizi di matematica, Vol. 1 (Tomi 1-4), Liguori
- S. Salsa, A. Squellati: Esercizi di analisi matematica 1, Zanichelli
- S. Salsa, A. Squellati: Esercizi di analisi matematica 2, Zanichelli (solo per l'ultima parte dell'insegnamento)
- G. De Marco, C. Mariconda, Esercizi di calcolo in una variabile, Zanichelli/Decibel
- M. Bramanti: Esercitazioni di Analisi Matematica 1, Esculapio

Appunti di lezione e complementi in rete su Moodle

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: I pdf di tutte le lezioni sono disponibili su Moodle. Per un programma più dettagliato è sufficiente guardare quanto svolto a lezione. Tutto ciò può essere chiesto all'esame.

1. Elementi introduttivi

Numeri razionali. Proprietà di densità. Irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Numeri reali. Definizione. Teorema di completezza. Intervalli. I simboli $-\infty$ e $+\infty$ e la retta reale estesa. Modulo o valore assoluto. Disuguaglianza triangolare. Insiemi limitati, superiormente ed inferiormente limitati. Maggioranti, minoranti, massimo e minimo di un insieme. Estremo superiore, estremo inferiore e loro caratterizzazione. Proprietà di Archimede. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Radicali e potenze ad esponente reale. Logaritmi.

Numeri complessi. Radianti e circonferenza goniometrica. Funzioni trigonometriche e proprietà basilari. Formula di addizione e sottrazione per il seno ed il coseno. Formula di duplicazione per seno e coseno. Equazioni trigonometriche lineari. Definizione di unità immaginaria e di numero complesso. Modulo e coniugato di un numero complesso. Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione di numeri complessi. Forma trigonometrica di un numero complesso. Moltiplicazione e divisione di numeri complessi in

forma trigonometrica (D). Formula di De Moivre. Esponenziale complesso. Calcolo delle radici n -esime di numeri complessi.

Principio di induzione. Principio di induzione: prima e seconda forma. Sommatorie. Formula della somma dei primi n numeri interi positivi (D). Disposizioni e combinazioni semplici. Fattoriale. Coefficienti binomiali. Formula della somma dei coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton (D).

2. Funzioni Definizione di funzione. Grafico di una funzione. Immagine e controimmagine di un insieme. Composizione di funzioni. Funzioni iniettive. Funzione inversa. Restrizione di una funzione. Funzioni simmetriche. Funzioni monotone. Funzioni periodiche. Funzioni trigonometriche e loro inverse. Funzioni iperboliche e loro inverse.

3. Limiti di funzioni di una variabile reale

Topologia della retta reale. Intorni sferici. Intersezione di intorni è un intorno. Proprietà di separazione degli intorni. Punto di accumulazione e punto isolato.

Limiti e loro calcolo. Definizione di limite. Teorema di unicità del limite (D). Locale limitatezza delle funzioni con limite finito in un punto. Limiti destro e sinistro. Esistenza dei limiti destro e sinistro ed esistenza del limite. Caratterizzazione del limite di una funzione tramite il valore assoluto. Limite di $|f|$ noto quello di f . Teorema della permanenza del segno e corollario (D). Teorema del confronto. Teorema dei due carabinieri (D). Il limite fondamentale di $(\sin x)/x$ per $x \rightarrow 0$. Limiti al finito delle funzioni seno e potenza. Limiti di funzioni monotone. Teorema del cambio di variabile. Limiti della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni. Limiti fondamentali derivanti da quello di $(\sin x)/x$ per $x \rightarrow 0$. Numero di Nepero, il limite di $(1 + 1/x)^x$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e limiti fondamentali conseguenti. Forme indeterminate. Il simbolo “ o ” piccolo e la sua algebra. Sviluppo asintotico di una funzione composta. Principio di sostituzione degli infinitesimi (D). Confronto fra infiniti e infinitesimi. Ordine di infinito e infinitesimo. Gerarchia degli infiniti.

3. Successioni

Definizione di limite per una successione. Successioni convergenti, divergenti, indeterminate. Gerarchia degli infiniti. Limitatezza delle successioni convergenti. Teoremi della permanenza del segno, del confronto e dei due carabinieri. Caratterizzazione del limite di successioni monotone. Progressione geometrica. Successioni e criterio di Cauchy. Sottosuccessioni. Caratterizzazione dell'esistenza del limite di una successione con le sue sottosuccessioni. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Caratterizzazione del limite di funzioni con le successioni.

4. Funzioni continue di una variabile reale Definizione di funzione continua. Continuità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni continue. Continuità della composizione di funzioni continue. Discontinuità di prima e seconda specie. Discontinuità eliminabile e prolungamento per continuità. Teorema di Weierstrass (D). Teorema di Bolzano o degli zeri (D). Teorema dei valori intermedi (D). Continuità dell'inversa di una funzione continua.

5. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale

Definizioni e prime proprietà. Definizione di derivata e di retta tangente. Continuità di una funzione derivabile (D). Derivate destra e sinistra. Legame tra derivabilità e derivabilità da destra e da sinistra. Derivata della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni derivabili. Derivata della funzione inversa di una funzione derivabile. Derivata della composizione di funzioni. Funzione derivata e teorema del limite della derivata. Derivate successive. Funzioni di classe C^m e di classe C^∞ .

Proprietà delle funzioni derivabili. Teorema di De L'Hôpital. Teorema di Fermat (D). Teorema di Rolle (D). Teorema di Lagrange. Teorema di Cauchy. Costanza delle funzioni con derivata nulla (D). Legame tra monotonia e derivata prima (D). Funzioni convesse e concave. Legame tra convessità e segno della derivata seconda. Punti di flesso. Legame tra punti di flesso e zeri della derivata seconda. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui e studio di funzione. Polinomio di Taylor e di MacLaurin. Formula di Taylor con il resto di Peano. Sviluppi in serie di \exp , \sin , \cos , \sinh , \cosh , \ln , \arctan .

6. Serie numeriche

Somma parziale. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Carattere e somma di una serie geometrica (D). Carattere della somma di serie convergenti e del prodotto di una serie per una costante. Resto parziale n -esimo. Limite del termine generale di una serie convergente (D). Convergenza assoluta e sua relazione con la convergenza semplice. Carattere di una serie a termini definitivamente non negativi. Criterio del confronto. Carattere della serie armonica. Criterio asintotico del confronto. Criteri del rapporto (D) e della radice (D), loro versioni asintotiche. Serie a segni alterni: Criterio di Leibniz.

7. Calcolo integrale per funzioni di una variabile reale

Integrale di Cauchy-Riemann. Partizioni e partizioni puntate di un intervallo. Ampiezza di una partizione. Somme di Cauchy. Definizione di funzione integrabile e di integrale. Integrale come limite delle somme di Cauchy relative ad una successione di partizioni puntate con ampiezza infinitesima. Integrale come area del sottografico.

Classi di funzioni integrabili. Integrabilità delle funzioni monotone e continue a tratti.

Proprietà degli integrali. Linearità dell'integrale. Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Monotonia. Integrabilità del modulo di una funzione integrabile. Teorema della media (D).

Calcolo di integrali. Il concetto di primitiva di una funzione. Legame tra primitive di una stessa funzione su un intervallo (D). Teorema fondamentale del calcolo (D). Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo, seconda versione. Metodi di integrazione: integrali immediati o ad essi riconducibili, integrazione per parti, integrazione per sostituzione. Integrali di funzioni razionali fratte o ad essi riconducibili.

Integrali generalizzati. Definizione di integrabilità in senso improprio e di integrale generalizzato o improprio. Integrali impropri di prima, seconda e terza specie. Assoluta integrabilità. Integrabilità in senso improprio delle funzioni assolutamente integrabili. Convergenza degli integrali impropri della funzione $1/t^\alpha$ con $\alpha > 0$ (D). Criterio del confronto. Criterio asintotico del confronto. Criterio integrale per le serie.

8. Equazioni differenziali del primo ordine

Introduzione alle equazioni differenziali: generalità e modelli. Integrale generale e problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziabili a variabili separabili. Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti.

9. Cenni su alcune generalizzazioni dell'Analisi

Alcuni cenni al calcolo differenziale in più variabili. Lo spazio \mathbb{R}^n . Vettori e norma in \mathbb{R}^n . Limiti in più variabili. Derivate parziali. Gradiente.

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato “(D)”. Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso.