ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 27.01.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 6) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 1}\right)$$

(a) determinarne il dominio di f ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

(c) calcolare la derivata di f, discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 5) Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^{2n}) \tan(1/n)}{\cos(1/n^2)}.$$

Esercizio 3 (punti 5) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(x^2) - \sin(x^2) + x(\sin(x) - x)}{\sqrt{1 + x^4} - \sqrt[3]{1 + x^4}}.$$

Esercizio 4 (punti 5) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(\sqrt{x} \arctan x)^\alpha}{x^2 - 5x + 4}.$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_2^3 f_0(x)\, dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale

$$\int_{2\pi}^{\infty} f_\alpha(x)\, dx.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppi di Mac Laurin.

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA
Corso di Laurea in Informatica

Appello del 27.01.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 6) Si consideri la funzione

$$f(x) = -\arctan\left(\frac{x^2+2x-3}{x+2}\right)$$

(a) determinarne il dominio di f ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

(c) calcolare la derivata di f, discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 5) Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^{2n})\sin(1/n)}{e^{(1/n^3)}}.$$

Esercizio 3 (punti 5) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[4]{1+x^4}}{\log(1+x^2)+1-\cos(x^2)-\sin(x^2)+x(\tan(x)-x)}.$$

Esercizio 4 (punti 5) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(\sqrt[3]{x}\arctan x)^\alpha}{x^2-x-6}.$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_4^5 f_0(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$