Funzioni Soluzioni

~~Es~~ 1) $f(x) = \arcsin |x^3 - \frac{1}{2}|$

dominio $\arcsin x$ ha come dominio $[-1, 1]$ dunque

$$\underbrace{-1 \le}_{\text{sempre vero}} |x^3 - \tfrac{1}{2}| \le 1 \iff |x^3 - \tfrac{1}{2}| \le 1 \iff \begin{cases} x^3 - \frac{1}{2} \le 1 \\ x^3 - \frac{1}{2} \ge -1 \end{cases}$$

$$-1 \le x^3 - \tfrac{1}{2} \le 1$$

$$\begin{cases} x^3 \le \frac{3}{2} \\ x^3 \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \le x \le \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}$$

$$D = \left[-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}\right].$$

segno $\arcsin(x) \ge 0 \iff x \ge 0$ dunque

$f(x) \ge 0 \iff |x^3 - \frac{1}{2}| \ge 0$ sempre vero.

$f(x) \ge 0 \ \forall x \in D$ e $f(x) = 0 \iff x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $(x^3 = \frac{1}{2})$

simmetrie il dominio **non** è simmetrico

periodicità il dominio **non** è periodico.

2) $f(x) = \lg |\sin(2e^x)|$

dominio $|\sin(2e^x)| > 0 \iff \sin(2e^x) \ne 0 \iff 2e^x \ne k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \iff$ $k \in \mathbb{N}.$ $k \ne 0$

$e^x \ne \frac{k\pi}{2}$ $k \in \mathbb{N}$, $k \ne 0$ $\iff x \ne \lg\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

$$D = \{x \mid x \ne \lg\left(\tfrac{k\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{N}\ k \ne 0\}$$

segno $\lg|\sin(2e^x)| \ge 0 \iff |\sin(2e^x)| \ge 1 \iff$

$|\sin(2e^x)| = 1 \iff$ $2e^x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin 2e^x = 1$ oppure -1

$\iff e^x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{N} \iff x = \lg\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) \quad k \in \mathbb{N}$

quindi $f(x) \le 0 \ \forall x \in D$ e $f(x) = 0 \iff x = \lg\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) \ k \in \mathbb{N}$

simmetrie / periodicità il dominio non è simmetrico né periodico.

3) $f(x) = \lg(e^{2x} - 4e^{x} + 4)$

<u>dominio</u> $e^{2x} - 4e^{x} + 4 > 0$ $\qquad e^{x} = t \qquad e^{2x} = (e^{x})^2 = t^2$

$t^2 - 4t + 4 > 0$

$(t-2)^2 > 0 \iff t \neq 2 \iff e^{x} \neq 2 \iff x \neq \lg 2$

$D = (-\infty, \lg 2) \cup (\lg 2, +\infty)$

<u>segno</u> $f(x) \geq 0 \iff \lg(e^{2x} - 4e^{x} + 4) \geq 0 \iff e^{2x} - 4e^{x} + 4 \geq 1$

$\iff t^2 - 4t + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t \geq 3$ oppure $t \leq 1$

$t = e^{x}$ $\qquad e^{x} \geq 3$ oppure $e^{x} \leq 1$

$x \geq \lg 3$ oppure $x \leq 0$.

$f(x) \geq 0 \iff x \leq 0$ oppure $x \geq \lg 3$.

$f(x) = 0$ se $x = 0, \lg 3$.

<u>simmetrie, periodicità</u>: il dominio non è simmetrico né periodico.

4) $f(x) = \arcsin\left(\frac{|x+2|}{x}\right)$

<u>dominio</u> $-1 \leq \frac{|x+2|}{x} \leq 1 \qquad x \neq 0$!

<u>1° caso</u> $x > 0$ $\qquad -1 \leq \frac{|x+2|}{x} \leq 1 \iff \underbrace{-x \leq}_{\text{sempre vera}} |x+2| \leq x \iff$

$|x+2| \leq x \iff -x \leq x+2 \leq x \iff \begin{cases} x+2 \leq x \\ x+2 \geq -x \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \leq 0 \ \text{FALSO} \\ x \geq -1 \end{cases}$

$\nexists x$.

<u>2° caso</u> $x < 0$ $\qquad -1 \leq \frac{|x+2|}{x} \leq 1 \iff \underbrace{x \leq |x+2|}_{\text{sempre vera } (x<0!)} \leq -x$

$\iff |x+2| \leq -x \iff x \leq x+2 \leq -x \iff \begin{cases} x+2 \leq -x \\ x+2 \geq x \end{cases} \begin{cases} x \leq -1 \\ 2 \geq 0 \ \forall x \end{cases}$ $\qquad x \leq -1$

Quindi $D = \{x \mid x \leq -1\} = [-\infty, -1]$

<u>segno</u> $\arcsin\left(\frac{|x+2|}{x}\right) \geq 0 \iff \frac{|x+2|}{x} \geq 0$ ma se $x \in D$ $x \leq -1 < 0$

$|x+2| \geq 0 \quad x < 0$

quindi $\boxed{f(x) \leq 0 \ \forall x \in D}$ $\qquad f(x) = 0 \iff x = -2$

simmetrie, periodicità : il dominio non è simmetrico né periodico.

5) $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|-2}$

dominio $\quad |x+1|-2 \neq 0 \iff |x+1| \neq 2 \iff \begin{matrix} x+1 \neq 2 & x \neq 1 \\ x+1 \neq -2 & x \neq -3 \end{matrix}$

$D = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$
$= \{x \mid x \neq 1, -3\}$

segno $\quad f(x) \geq 0 \iff |x+1|-2 > 0 \iff |x+1| > 2 \iff \begin{matrix} x+1>2 \\ \text{oppure} \\ x+1<-2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x>1 \\ \text{oppure} \\ x<-3 \end{matrix}$ quindi $f(x) > 0 \iff x > 1$ oppure $x < -3$.

periodicità / simmetrie il dominio non è simmetrico né periodico

6) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}}$

Dominio $\quad \operatorname{tg} x \neq 0 \quad x \neq k\pi \quad$ tg x è ben definita solo se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$D = \{x \mid x \neq k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

segno $\quad f(x) \geq 0 \iff \operatorname{tg} x > 0 \iff k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

simmetrie $\quad$ tg x è dispari $\quad f(-x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\operatorname{tg}(-x)}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{-\operatorname{tg} x}} = -\sqrt[3]{\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}} =$
$= -f(x)$

f è dispari

periodicità $\quad$ tg x è periodica di periodo π

$f(x+\pi) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\operatorname{tg}(x+\pi)}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}} = f(x)$

f è periodica di periodo π.

7) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh(\sin x)}$

dominio. $\quad \cosh x > 0\ \forall x \quad$ quindi $D = \mathbb{R}$

segno $\quad f(x) > 0 \ \forall x$.

simmetrie $\quad \sin x$ è dispari $\cosh x$ è pari

$f(-x) = \dfrac{1}{\cosh(\sin(-x))} = \dfrac{1}{\cosh(-\sin x)} = \dfrac{1}{\cosh(\sin x)} = f(x)$

f è pari.

periodicità: ~~cosh~~ $\cosh x$ non è periodica, quindi f non è periodica

8) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} - 2e^x\right)$

dominio: $\operatorname{arctg} x$ è definita $\forall x$

$4e^{2x} - 9e^x + 2 \geq 0$ (altrimenti la radice non è definita)

$e^x = t$

$4t^2 - 9t + 2 \geq 0$

$t = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8} < \begin{matrix} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{16}{8} = 2 \end{matrix}$

$t \geq 2$ oppure $t \leq \frac{1}{4}$

$e^x \geq 2$ oppure $e^x \leq \frac{1}{4}$

$x \geq \lg 2$ " $x \leq \lg \frac{1}{4}$

$D = (-\infty, \lg \frac{1}{4}] \cup [\lg 2, +\infty)$

segno: $\operatorname{arctg} x \geq 0 \iff x \geq 0$ quindi

$f(x) \geq 0 \iff \sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} - 2e^x \geq 0$

$\sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} \geq 2e^x$ entrambi i membri sono positivi

$4e^{2x} - 9e^x + 2 \geq 4e^{2x}$ elevo tutto al quadrato

$-9e^x + 2 \geq 0$

$e^x \leq \frac{2}{9}$ $\quad x \leq \lg\left(\frac{2}{9}\right)$

dunque $f(x) \geq 0 \iff x \leq \lg\left(\frac{2}{9}\right)$

e $f(x) = 0$ se $x = \lg\left(\frac{2}{9}\right)$

simmetrie e periodicità: il dominio non è simmetrico né periodico.

9) $f(x) = \lg(4 \sinh x)$

dominio: $4 \sinh x > 0 \iff \sinh x > 0 \iff x > 0$

$D = (0, +\infty)$.

segno: $\lg(4 \sinh x) \geq 0 \iff 4 \sinh x \geq 1 \iff \sinh x \geq \frac{1}{4}$

$x \geq \operatorname{settsinh}\left(\frac{1}{4}\right) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

simmetrie e periodicità : il dominio non è simmetrico né periodico

10) $f(x) = \dfrac{\lg(\sin x)}{\sin x - 1}$

dominio $\sin x > 0$ perché sia definito $\lg(\sin x)$

$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x \neq 1 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi\right) \right]$$

segno. $\dfrac{\lg(\sin x)}{\sin x - 1} \geq 0$ faccio studio dei segni

$\lg(\sin x) \geq 0 \iff \sin x \geq 1 \iff \sin x = 1$ ma questi pti sono esclusi dal dominio

quindi $\forall x \in D \quad \lg(\sin x) < 0$

inoltre $\sin x - 1 < 0 \quad \forall x \in D$ $\Rightarrow$ $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$

$\left(\dfrac{\text{numeratore} -}{\text{denominatore} -} \Big/ + \right)$

simmetrie il dominio NON è simmetrico

periodicità $\sin x$ è periodico di periodo 2π

$$f(x+2\pi) = \frac{\lg(\sin(x+2\pi))}{\sin(x+2\pi) - 1} = \frac{\lg \sin x}{\sin x - 1} = f(x)$$

f è periodica di periodo 2π

11) $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$

Dominio $D = \mathbb{R}$ (la radice è sempre ben definita dato che il radicando è ≥ 0)

segno $f(x) \geq 0$

$2x - \sqrt{|x^2-4x+3|} \geq 0 \iff 2x \geq \sqrt{|x^2-4x+3|}$

se $x < 0$ questo non è mai verificato

se $x \geq 0$ elevo a quadrato entrambi i membri

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 \geq |x^2-4x+3| \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ -4x^2 \leq x^2-4x+3 \leq 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-4x+3 \leq 4x^2 \\ x^2-4x+3 \geq -4x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ -3x^2-4x+3 \leq 0 \\ 5x^2-4x+3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2+4x-3 \geq 0 \\ 5x^2-4x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$3x^2+4x-3 \geq 0 \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+9}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3} = \begin{cases} \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \\ \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

$$x \leq \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$$

$$5x^2-4x+3 \geq 0 \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-15}}{5} \qquad \Delta < 0 \qquad \cancel{\forall x}$$

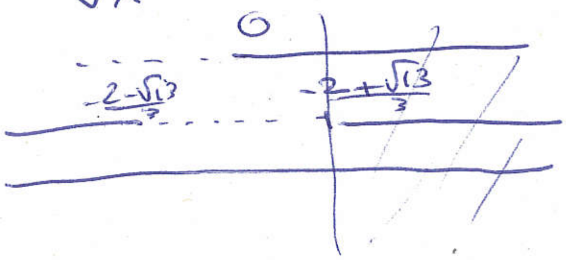
$$\downarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$3 \leq \sqrt{13} \leq 4$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \leq \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \quad x \geq \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \\ \forall x \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad x \geq \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \text{se } x \geq \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$$

$$f(x) = 0 \quad \text{se } x = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$$

<u>simmetrie</u> $f(-x) = -2x - \sqrt{|x^2+4x+3|} \neq f(x)$
$\neq -f(x)$

né pari né dispari

<u>periodicità</u> le funzioni polinomiali e ~~...~~ le radici non sono periodiche.