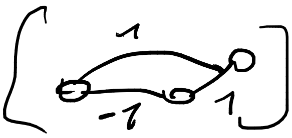
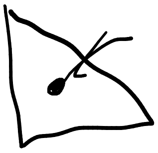
16/11/2024

ES. GRAFO



max → min

← DUALITÀ



REGIONE AMMISSIBILE

ES. DUALITÀ ⇒

Enunciare CONDIZIONI DI COMPLEM. PRIMALE-DUALE

→ PRIMALE (START) (PARTENZA) ⇒ DUALE (ARRIVO) (END)

<u>Enunciato</u> **delle condizioni di complementarietà primale duale:**

Dati un problema primale $\min c^{\mathrm{T}}x$ **s.t.** $Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n_+$ **e il corrispondente duale** $\max u^{\mathrm{T}}b$ **s.t.** $u^{\mathrm{T}}A \leq c, u \in \mathbb{R}^m_+$, **e due vettori** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ **e** $\bar{u} \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{x}$ **e** $\bar{u}$ **sono soluzioni ottime rispettivamente per il primale e per il duale se e solo se:** $\bar{x}$ **è ammissibile primale,** $\bar{u}$ **è ammissibile duale,** $u_i(a_i^{\mathrm{T}}x - b_i) = 0, \forall\, i = 1 \dots m$, **e** $(c_j - u^{\mathrm{T}}A_j)x_j = 0, \forall\, j = 1 \dots n$ **, dove** a_i^{T} **è la riga** i**-esima di** A **e** A_j **è la colonna** j**-esima di** A.

ALCUNE COSE

→ DUALITÀ FORTE

PRIMALE
DUALE
⇒ STESSA SOLUZIONE F.O

Teorema 3 (Dualità forte per problemi in forma standard): *Sia dato il problema primale* $z^* = \min\{c^T x : x \in P\}$ *con* $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ *e* z^* *limitato. Allora*

$$z^* = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = w^* = \max\{u^T b : u^T A \leq c^T, u \text{ libere}\}$$

Il teorema della dualità forte si applica solo se il problema primale (o, equivalentemente, il problema duale) ammette soluzione ottima finita. Cerchiamo ora alcune proprietà che possano essere applicate alle coppie di problemi primale-duale, anche nei casi in cui uno dei due problemi è illimitato oppure impossibile, esaurendo tutti i casi possibili per i problemi di programmazione lineare.

(Per verifica, i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, infatti valgono entrambe 4 e verifica il corollario della dualità forte)

ESEMPIO DI CONCLUSIONE ESERCIZIO

4. Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale.

Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (5/2, 0, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & - & x_3 & \geq & 2 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & -1 \\
 & 2x_1 & & & - & x_3 & = & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & & x_3 \text{ libera} & &
\end{array}
$$

2020-07-10 -TEMA-A

BASE $\rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$

$x_1 \quad - x_3 \geq 2$

$\frac{5}{2} - 0 \geq 2 \rightarrow \frac{5}{2} \geq 2$

(SOSTITUIRE I VALORI x_1, x_2, x_3) PER OGNI DISUGUAGLIANZA

$x_4, x_5, x_6 \rightarrow$ SLACK

1) Verifica ammissibilità primale dela soluzione data → Sostituisco i valori della soluzione che mi viene data dentro i vincoli e verifico se sono rispettate tutte le disuguaglianze

VERIFICA DOMINI

$\rightarrow \frac{5}{2} > 0$, $0 \leq 0$, 0 LIBERA?

SI

LEGGIAMO I VINCOLI IN VERTICALE

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & - & x_3 & \geq & 2 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & -1 \\
 & 2x_1 & & & - & x_3 & = & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & & x_3 \text{ libera} & &
\end{array}
$$

PASSAGGIO AL DUALE

max → min

f.o

$\min\ 2u_1 - u_2 + 5u_3 + 5u_4$

$s.t.\ u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 \geq -1$

$-x_1 \quad -1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 2x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$x_1 \geq 0$

DUALE

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 3u_2 & & & - & u_4 & \leq & 2 \\ -u_1 & & - & u_3 & - & 2u_4 & = & 2 \end{array}$$

. PRIMALE (STESSE CONCLUSIONI)

$$\begin{array}{rrrrrl} -x_1 & + & 3x_2 & & \leq & -1 \\ 2x_1 & & & - x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & - 2x_3 & \geq & 5 \\ x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & x_3 \text{ libera} & & \end{array}$$

CHE ABBIAMO FATTO?

c. Per ogni vincolo, prendo tutti le variabili con coefficienti alla colonna i corrispondente alla posizione u_i, e:
   i. Quando passo da min a max riporto l'opposto del segno della corrispondente variabile di dominio primale
   ii. Quando passo da max a min, riporto lo stesso segno della corrispondente variabile di dominio primale
   iii. se non c'è nulla per la variabile x_i quando si scrive il vincolo duale, si vede come = 0 (questo anche per quando si deve trovare l'opposto tra min-max o max-min; l'opposto di una uguaglianza è sempre una uguaglianza)

(≥)

USIAMO QUESTO!

d. Si inseriscono i domini delle variabili, considerando che:
   i. Se passo da problema di min a problema di max, il dominio delle duali corrisponde allo stesso segno di uguaglianze/disuguaglianze delle variabili primali
   ii. Se passo da problema di max a problema di min, il dominio delle duali corrisponde all'opposto del segno di uguaglianze/disuguaglianze delle variabili primali

$u_1 \leq 0 \qquad u_2 \geq 0 \qquad u_3 \text{ libera} \qquad u_4 \leq 0$

NON (≥) ESISTE

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & - & x_2 & - 2x_3 & \geq & 5 \\ x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & x_3 \text{ libera} & & \end{array}$$

Primale min (x)	**Duale** max (u)	**Primale** max (x)	**Duale** min (u)
$x_i \geq 0$	*condizione* $\leq c_i$	$x_i \geq 0$	*cond* $\geq c_i$
$x_i \leq 0$	*cond* $\geq c_i$	$x_i \leq 0$	*cond* $\leq c_i$
x_i *libera*	*cond* $= c_i$	x_i *libera*	*cond* $= c_i$
cond $\geq b_j$	$u_i \geq 0$	*cond* $\geq b_j$	$u_i \leq 0$
cond $\leq b_j$	$u_i \leq 0$	*cond* $\leq b_j$	$u_i \geq 0$
cond $= b_j$	u_i *libera*	*cond* $= b_j$	u_i *libera*

- $x_1\,(u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1$
- $x_2\,(3u_2 - u_4 - 2) = 0 \quad \Rightarrow$ nessuna informazione ($x_2 = 0$)
- x_3 libera $\Rightarrow$ imporremo il corrispondente vincolo duale di uguaglianza per ammissibilità duale

$$
\begin{array}{llcccccccc}
\min & 2u_1 & - & u_2 & + & 5u_3 & + & 5u_4 & & \\
\text{s.t.} & u_1 & - & u_2 & + & 2u_3 & + & 2u_4 & \geq & -1 \\
 & & & 3u_2 & & & - & u_4 & \leq & 2 \\
 & -u_1 & & & - & u_3 & - & 2u_4 & = & 2 \\
 & u_1 \leq 0 & & u_2 \geq 0 & & u_3 \text{ libera} & & u_4 \leq 0 & &
\end{array}
$$

LIBERA

$x_1(U_1 - U_2 + 2U_3 + 2U_4 + 1) = 0$

LO ROMPO E SCAMBIO SEGNO

LE VAR. LIBERE NON LE CONSIDERO.

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{s.t.} & x_1 & - & x_3 & \geq & 2
\end{array}
$$

$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{5}{2}, 0, 0)$

$u_1(x_1 - x_3 - 2) = 0$

$u_1(\frac{5}{2} - 0 - 2) = 0$

$u_1(\frac{1}{2}) = 0$

- $u_2\,(-½) = 0 \Rightarrow u_2 = 0$
- $u_3\,(2x_1 - x_3 - 5) = 0$ per ammissibilità primale
- $u_4\,(0) = 0 \Rightarrow$ nessuna informazione su u_4

3) CCPD - Applicazione delle condizioni di complementarietà primale-duale

a. Primo pezzo: vincoli primali

i. Prendo u_i *con* "i" posizione della riga attuale e lo moltiplico per il vincolo primale in posizione i portando a sinistra il termine noto (cambiando quindi di segno)
Es. $-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 \Rightarrow u_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 1) = 0$

ii. Sostituisco quindi i valori della soluzione iniziale data nel vincolo e:

1. Se ho un valore > 0 , allora questo viene considerato come condizione
2. Se ho un valore $= 0$, allora non mi dice nulla e non lo considero (*non posso dedurre condizioni*)

iii. Se ho vincoli di uguaglianza non posso dire nulla (*deriva dall'ammissibilità primale e non posso dedurre condizioni di complementarietà per la variabile x_i*) → *no CCPD*

b. Secondo pezzo: vincoli duali

i. Prendo x_i *con* "i" posizione della riga attuale e lo moltiplico per il vincolo duale in posizione i portando a sinistra il termine noto (cambiando quindi di segno)
Es. $-u_1 - u_2 \leq 2 \Rightarrow (-u_1 - u_2 - 2)x_1$

ii. Sostituisco il valore di x_i in quella posizione e faccio le stesse verifiche dei sottocasi (1) e (2) della seconda condizione del problema primale

iii. Se ho vincoli di uguaglianza, devo verificare che non faccia già parte dei vincoli; nel qual caso lo considero (*deriva dall'ammissibilità duale*), altrimenti no

CONSEGNA

c) Applicazione delle condizioni e deduzioni:

- u_1 (½) = 0 ⇒ $u_1 = 0$
- u_2 (– ½) = 0 ⇒ $u_2 = 0$ → TERMINE NOTO → TERMINE DUALE $u_i = 0$
- $u_3\,(2x_1 - x_3 - 5) = 0$ per ammissibilità primale
- u_4 (0) = 0 ⇒ nessuna informazione su u_4

- $x_1\,(u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 + 1) = 0$ ⇒ $u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1$
- $x_2\,(3u_2 - u_4 - 2) = 0$ ⇒ nessuna informazione ($x_2 = 0$)
- x_3 libera ⇒ imporremo il corrispondente vincolo duale di uguaglianza per ammissibilità duale

VALE GIÀ ∅

→ PER TEORIA...

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & - & x_3 & \geq & 2 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & -1 \\
 & 2x_1 & & & - & x_3 & = & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \leq 0 & & x_3 \text{ libera} & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 2u_1 & - & u_2 & + & 5u_3 & + & 5u_4 & & \\
\text{s.t.} & u_1 & - & u_2 & + & 2u_3 & + & 2u_4 & \geq & -1 \\
 & & & 3u_2 & & & - & u_4 & \leq & 2 \\
 & -u_1 & & & - & u_3 & - & 2u_4 & = & 2 \\
 & u_1 \leq 0 & & u_2 \geq 0 & & u_3 \text{ libera} & & u_4 \leq 0 & &
\end{array}
$$

d) Sistema delle equazioni per condizioni di complementarietà primale-duale (CCPD) e per ammissibilità duale (AD):

$$
\begin{cases}
u_1 = 0 & \text{(CCPD)} \\
u_2 = 0 & \text{(CCPD)} \\
u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = -1 & \text{(CCPD)} \\
-u_1 - u_3 - 2u_4 = 2 & \text{(AD)}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
u_1 = 0 \\
u_2 = 0 \\
u_3 = 1 \\
u_4 = -3/2
\end{cases}
$$

$3/2$

$0 - 0 + 2u_3 + 2u_4 \qquad 2(-2 - 2u_4) + 2u_4$

$0 - u_3 - 2u_4 = 2 \rightarrow u_3 = -2 - 2u_4$

$= -2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow 1$

e) Verifica ammissibilità duale

La soluzione calcolata al punto d)

- soddisfa il primo e il terzo vincolo [per costruzione]
- soddisfa il secondo vincolo duale [3/2 < 2]
- soddisfa i vincoli di dominiio del duale [0≤0 , 0 ≥ 0 , u_3 libera , – 3/2 < 0]

$5 - 15\left(-\frac{3}{2}\right) \rightarrow 5 - \frac{15}{2} = \frac{10-15}{2} = -\frac{5}{2}$

a. (Happy Ending)
   i. x è ammissibile primale (come da verifica)
   ii. u è ammissibile duale (come da costruzione e da verifica)
   iii. x, u sono in scarti complementari
   iv. Le due soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi primale e duale
   v. Per verifica si confrontino i valori delle f.o. dei problemi primale e duale; saranno uguali per il teorema della dualità forte

↑ SCRIVI QUESTO

SOSTITUIAMO SOLUZIONI E VERI - DOMINI!

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{s.t.} & u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 & \geq & -1 \\
 & 3u_2 - u_4 & \leq & 2 \\
 & -u_1 - u_3 - 2u_4 & = & 2 \\
 & u_1 \leq 0 \quad u_2 \geq 0 \quad u_3 \text{ libera} & &
\end{array}
$$

$u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4$

$0 - 0 + 2 + 2(-\frac{3}{2}) \ldots \geq -1$ (GIUSTO)!

$-2 \leq 0$ (GIUSTO)!

~~DOMINIO~~

SOSTITUIAMO IN F.O. I COEFFICIENTI

$$
\begin{cases}
2u_1 - u_2 + 5u_3 + 5u_4 \rightarrow -\frac{5}{2} \\
u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1,\ u_4 = -\frac{3}{2}
\end{cases}
$$

I DUALE

$[\max -x_1 + 2x_2 + 2x_3] \rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

$-\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$ ← DUALITÀ FORTE

CHIEDERE SE GIUSTO!

AMPL

6. Si vuole risolvere con **AMPL** un problema di trasporto di alberi da un insieme di origini I a un insieme di destinazioni J. Ciascuna origine i mette a disposizione O_i alberi e ciascuna destinazione richiede D_j alberi. Il costo unitario di trasporto da i a j è C_{ij} e si ha un costo fisso F_i per l'organizzazione dei trasporti da ciascuna origine i. Non è inoltre possibile organizzare il trasporto in più di N origini. Il modello per la minimizzazione dei costi è riportato affianco e utilizza le variabili x_{ij} per indicare il numero di alberi trasportati da i a j, e y_i che vale 1 se si organizza il trasporto da i, 0 altrimenti.

$$\min \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i \in I} F_i\, y_i$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j \quad , \quad \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i\, y_i \quad , \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq N$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+,\ \ y_i \in \{0,1\},\ \ \forall i \in I,\ \ j \in J$$

a. Si traduca nel linguaggio **AMPL** il modello proposto (**file .mod**).

b. Si produca il **file .dat** per l'istanza con origini Croazia, Svezia, Gran Bretagna e Canada (disponibilità di 1000, 2000, 3000 e 4000 alberi rispettivamente), destinazioni Italia, Francia e Germania (con richieste di 5000, 3000 e 2000 rispettivamente), $N = 3$, costi fissi F_i di 1000 euro per tutte le origini, e costi di trasporto verso Italia, Francia e Germania (nell'ordine) pari a: dalla Croazia 10, 20 e 30 euro; dalla Svezia 40, 50 e 60 euro; dalla Gran Bretagna 70, 80 e 90 euro; dal Canada 100, 110 e 120 euro.

c. Si scriva uno script di AMPL (**file .run**) che risolve l'istanza specificata e visualizza il valore della funzione obiettivo e delle variabili per una soluzione ottima.

AMPL / BRANCH AND BOUND] ES. FINALE!

AMPL
→ MOD
→ DAT
→ RUN

set I / set S →

$$\min \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij}\, x_{ij} - \left[\sum_{i \in I} F_i\, y_i\right]$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j \quad , \quad \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i\, y_i \quad , \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq N$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+,\ \ y_i \in \{0,1\},\ \ \forall i \in I,\ \ j \in J$$

PARAMETRI (PROBLEMA)

MODELL.
- SCONTO
- DISUGUALITÀ

→ FIXED COSTS

PARAM C{I, J};

GRAFFE = PER TUTTO L'INSIEME

— COPIARE

6. Si vuole risolvere con **AMPL** un problema di trasporto di alberi da un insieme di origini I a un insieme di destinazioni J. Ciascuna origine i mette a disposizione O_i alberi e ciascuna destinazione richiede D_j alberi. Il costo unitario di trasporto da i a j è C_{ij} e si ha un costo fisso F_i per l'organizzazione dei trasporti da ciascuna origine i. Non è inoltre possibile organizzare il trasporto in più di N origini. Il modello per la minimizzazione dei costi è riportato affianco e utilizza le variabili x_{ij} per indicare il numero di alberi trasportati da i a j, e y_i che vale 1 se si organizza il trasporto da i, 0 altrimenti.

$$\min \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij}\, x_{ij} - \sum_{i \in I} F_i\, y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j \quad , \quad \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq O_i\, y_i \quad , \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq N$$

$$\left[\; x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \;\; y_i \in \{0,1\}, \;\; \forall i \in I, \;\; j \in J \;\right]$$

y_i BINARY;

VAR x{I, J}
≥ 0
(>= 0)
INTEGER

[D.A] → SUBJECT TO

$$\min \sum_{i \in I, j \in J} C_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in I} F_i y_i$$

minimize fo : {i in I, j in J}:

C[i,j] · x[i,j) ...

· sum{i in I} F[i]
· y[i]

$$\left(\text{s.t.} \sum_{i \in I} x_{ij} \geq D_j\right), \quad \underbrace{\forall j \in J}$$

D, A Un {J in J}; in in I ...

a. Si traduca nel linguaggio **AMPL** il modello proposto (**file .mod**).

b. Si produca il **file .dat** per l'istanza con origini Croazia, Svezia, Gran Bretagna e Canada (disponibilità di 1000, 2000, 3000 e 4000 alberi rispettivamente), destinazioni Italia, Francia e Germania (con richieste di 5000, 3000 e 2000 rispettivamente), $N = 3$, costi fissi F_i di 1000 euro per tutte le origini, e costi di trasporto verso Italia, Francia e Germania (nell'ordine) pari a: dalla Croazia 10, 20 e 30 euro; dalla Svezia 40, 50 e 60 euro; dalla Gran Bretagna 70, 80 e 90 euro; dal Canada 100, 110 e 120 euro.

c. Si scriva uno script di AMPL (**file .run**) che risolve l'istanza specificata e visualizza il valore della funzione obiettivo e delle variabili per una soluzione ottima.

Punto b)

```
set I := Croazia Svezia GranBretagna Canada;
set J := Italia Francia Germania;
param :        F     O :=
Croazia       1000  1000
Svezia        1000  2000
GranBretagna  1000  3000
Canada        1000  4000;
param D := Italia 5000 Francia 3000 Germania 2000;
param N := 4;
param C :     [Italia      Francia     Germania] :=
[Croazia      10          20          30
Svezia        40          50          60
GranBretagna  70          80          90
Canada]       100         110         120;
```

J

I

C (TR): C S GB C 

I

F

G

DEFINITO COME

Esercizio 6

Punto a)

```
set I;                 set J;
param O{I};            param D{J};
param C{I,J};          param F{I};
param N;
var x{I,J} >=0 integer;
var y{I} binary;
minimize fo: sum{i in I, j in J} C[i,j]*x[i,j] - sum{i in I} F[i]*y[i];
s.t. d{j in J}: sum{i in I} x[i,j] >= D[j];
s.t. o{i in I}: sum{j in J} x[i,j] <= O[i] * y[i];
s.t. n: sum{i in I} y[i] <= N;
```

↑ .MOD

Punto c)

```
reset;
model ampl.mod;
data ampl.dat;
option solver cplexamp;
solve;
display fo, x, y;
```

DATA + MODEL

SOLVER

YOUTUBE.COM/THISREFLEX