

1. (9 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{1^n 0^{2^n} \mid n \geq 0\}.$$

Dimostra che  $L$  non è regolare.

2. (9 punti) Chiamiamo  $k$ -PDA un automa a pila dotato di  $k$  pile. In particolare, uno 0-PDA è un NFA e un 1-PDA è un PDA convenzionale. Sappiamo già che gli 1-PDA sono più potenti degli 0-PDA (nel senso che riconoscono una classe più ampia di linguaggi). Mostra che i 2-PDA sono più potenti degli 1-PDA.

3. (9 punti) Una *macchina di Turing ad albero binario* usa un albero binario infinito come nastro, dove ogni cella nel nastro ha un figlio sinistro e un figlio destro. Ad ogni transizione, la testina si sposta dalla cella corrente al padre, al figlio sinistro oppure al figlio destro della cella corrente. Pertanto, la funzione di transizione di una tale macchina ha la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{P, L, R\},$$

dove  $P$  indica lo spostamento verso il padre,  $L$  verso il figlio sinistro e  $R$  verso il figlio destro. La stringa di input viene fornita lungo il ramo sinistro dell'albero.

Mostra che qualsiasi macchina di Turing ad albero binario può essere simulata da una macchina di Turing standard.

4. (9 punti) Un circuito Hamiltoniano in un grafo  $G$  è un ciclo che attraversa ogni vertice di  $G$  esattamente una volta. Stabilire se un grafo contiene un circuito Hamiltoniano è un problema NP-completo.

Considerate il seguente problema, che chiameremo HAM375: dato un grafo  $G$  con  $n$  vertici, trovare un ciclo che attraversa esattamente una volta  $n - 375$  vertici del grafo (ossia tutti i vertici di  $G$  *tranne* 375).

- (a) Dimostra che HAM375 è un problema NP.
- (b) Dimostra che HAM375 è NP-hard.