Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 3 (2^a parte)

$\boxed{4}$ Si trovino forme ridotte di Gauss per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(3)E_2(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

ed $\mathbf{U_1}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{B}$ si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_{21}(2)E_1(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{20})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_2}$$

ed $\mathbf{U_2}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{B}$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{w}^T$ si ottiene:

$$\mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \mathbf{z}^T$$

e $\mathbf{z}^T$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{w}^T$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{v}$ si ottiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_1(1/7)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

ed $\mathbf{u}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{v}$.

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{a}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha^2 + 4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2-8)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\alpha \neq 2i, \quad \alpha \neq -2i, \quad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\alpha = 0$ $\quad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\mathbf{U}(0)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha^2 + 4 = 0$ ossia $\alpha = 2i$ oppure $\alpha = -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_3(1/2\alpha) \quad (\alpha\neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

$\boxed{6}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nei seguenti casi:

$$(a)\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(c)\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$.
Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ e quindi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & | & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(2)E_3(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_4 & = 3 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.
Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -4x_3 - 2x_4 + 2 = -8 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = -15 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{7}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\big(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & | & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = \big(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\big).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = -i \qquad \big(\mathbf{B}(-i) \quad | \quad \mathbf{c}(-i)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & | & -2i \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

è una forma ridotta di Gauss per $\big(\mathbf{A}(-i) \quad | \quad \mathbf{b}(-i)\big)$, quindi $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}$(-i) è libera, $\mathbf{B}$(-i) $\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}$(-i) ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{c}$(-i) ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}$(-i) (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{c}$(-i) (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$(-i)) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq -i$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{B}(\alpha) & | & \mathbf{c}(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{C}(\alpha) | & \mathbf{d}(\alpha)\end{pmatrix}.$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha = i \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{C}(i) & | & \mathbf{d}(i)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\begin{pmatrix}\mathbf{A}(i) & | & \mathbf{b}(i)\end{pmatrix}$, quindi $\mathbf{A}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{b}$(i) è equivalente a $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{d}$(i) che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$(i) è libera, $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{d}$(i) ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(\mathrm{i})$ sono dominanti, $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} =\mathbf{d}(\mathrm{i})$ (e quindi di $\mathbf{A}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathrm{i})$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha \notin \{i, -i\}$

$$\big(\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha - i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \big(\mathbf{D}(\alpha)| \quad \mathbf{e}(\alpha)\big)$$

è una forma ridotta di Gauss per $\big(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\big)$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.