Esercizio 2. Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ di variabili aleatorie *indipendenti ed identicamente distribuite* con comune distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$M_n(\omega) \doteq \min_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Indichiamo con F_n la funzione di ripartizione di M_n. Nota: F_1 coincide con la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale di parametro λ.

(i) Per $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, si esprima $\mathbf{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x)$ in termini di F_1.

(ii) Si calcoli F_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Si mostri che, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F_n(x) \to \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ per $n \to \infty$, e si concluda che $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione.

$(1 - e^{-\lambda})$

F. RIPART. (F)

EXP

$(\lambda \cdot e^{-\lambda})$

DENSITÀ (f)

$F(x) = P(X \le x) = (1 - e^{-\lambda})$

$P(X_1 > x, \dots X_n > x) =$ I.I.D

$= P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$

$[1 - P(X_1 \le x)] \cdot [1 - P(X_2 \le x)] \cdot \dots [1 - (P(X_n \le x)]$

$= \underbrace{(1 - e^{-\lambda x_1}) \cdot (1 - e^{-\lambda x_2})}$ $\dots P(1 - e^{-\lambda n})$

$M_n = \min_{i\in\{1\dots n\}} X_i(\omega)$

$= (1 - e^{-\lambda})^n \simeq (1 - P(X_1 \le x))^n$

$\simeq (1 - F_1(x))^n$

Esercizio 2. Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ di variabili aleatorie *indipendenti ed identicamente distribuite* con comune distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$M_n(\omega) \doteq \min_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Indichiamo con F_n la funzione di ripartizione di M_n. Nota: F_1 coincide con la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale di parametro λ.

(i) Per $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, si esprima $\mathbf{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x)$ in termini di F_1.

(ii) Si calcoli F_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Si mostri che, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F_n(x) \to \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ per $n \to \infty$, e si concluda che $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione.

$F_1 = (1 - P(X_1 \le x))^n$

$F_n = [(1 - P(X_1 \le x))^{n=1} \cdot (1 - P(X_2 \le x))^{n=1}] \dots$

$$1 - \underbrace{[1 - P(X_i \leq x)]^n}_{[1-e^{-\lambda}]_i}$$

$$F_n(x) = [1-e^{-\lambda x}] \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty]}(x)$$

$$1 - F_n(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty]}(x) + \mathbb{1}_{[-\infty,0]}(x)$$

$$F_n(x) = [1 - e^{-\lambda x} \cdot 1_{[0,\infty]}(x) + 1_{[-\infty,0]}(x)]^n$$

Esercizio 2. Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ di variabili aleatorie *indipendenti ed identicamente distribuite* con comune distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\left[M_n(\omega) \doteq \min_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega. \right]$$

Indichiamo con F_n la funzione di ripartizione di M_n. Nota: F_1 coincide con la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale di parametro λ.

(i) Per $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, si esprima $\mathbf{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x)$ in termini di F_1.

(ii) Si calcoli F_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Si mostri che, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F_n(x) \to \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ per $n \to \infty$, e si concluda che $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione.

$$F_n(x) \to \underbrace{\mathbb{1}_{[0,\infty]}(x)}_{(1-e^{-\lambda x})^n} \quad , \; n \to \infty$$

$$M_n(\omega) \doteq \min_{i\in\{1\dots n\}} X_i(\omega) \quad , \omega \in \Omega$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - e^{-\lambda x} \to 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1 & , x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0 \\ 1 \longrightarrow m_n \end{cases} \qquad \mathrm{Ber}(x) = \begin{cases} 1 \to p \\ 0 \to (1-p) \end{cases}$$

BERNOULLI

Esercizio 2. Siano X, Y variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *indipendenti* e a valori in $\{0,1\}$. Poniamo

$$Z \doteq \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{(0,0)\}}(X,Y) + \mathbf{1}_{\{(0,1),(1,0)\}}(X,Y) + \frac{4}{5} \cdot \mathbf{1}_{\{(1,1)\}}(X,Y).$$

(i) Si esprima $\mathbf{E}[Z]$ in termini di $p \doteq \mathbf{P}(X=1)$, $q \doteq \mathbf{P}(Y=1)$.

(ii) Si esprima $\mathrm{var}[Z]$ in termini di p, q.

(iii) Si calcoli $\mathbf{E}[Z]$ supponendo che $p = 5/7$.

$$E[Z] = \sum_x x(\omega) \cdot P_\omega(x)$$

$$E[Z] = \cancel{\tfrac{1}{2} \cdot 0} + [1 \cdot P(X=0, Y=1)] \cdot [1 \cdot P(X=1, Y=0)]$$
$$+ \frac{4}{5} P(X=1, Y=1)]$$

$$= (1 \cdot 1) + \frac{4}{5} = \frac{5+4}{5} = \frac{9}{5}$$

$$p \;/\; q$$

$$1 = p \qquad\qquad 1 = q$$
$$0 = (1-p) \qquad\qquad 0 = (1-q)$$

(i) $E[Z] = \frac{1}{2} \cdot P(X=0, Y=0) + 1 \cdot (P(X=1, Y=0) + P(X=0, Y=1))$
$+ \frac{4}{5} \cdot P(X=1, Y=1)$

$\mid X, Y$ indipendenti

$= \frac{1}{2} P(X=0) \cdot P(Y=0) + (P(X=1) \cdot P(Y=0) + P(X=0) + P(Y=1))$
$+ \frac{4}{5} P(X=1) \cdot P(Y=1)$

$= \frac{1}{2}(1-p)(1-q) + p(1-q) + q(1-p) + \frac{4}{5} pq$

$= \frac{1}{2}(1+p+q) - \frac{7}{10} \cdot pq$.

(ii) $\operatorname{var}(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2$.

Sfruttando di nuovo l'indipendenza tra X e Y:

$$E[Z^2] = \frac{1}{4}(1-p)(1-q) + 1\cdot(p(1-q)+q(1-p)) + \frac{16}{25}p\cdot q$$

$$= \frac{1}{4}(1+3p+3q) - \frac{111}{100}\cdot p\cdot q.$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{var}(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2$$

$$= \frac{1}{4}(1+3p+3q) - \frac{111}{100}p\cdot q$$

$$- \left(\frac{1}{2}(1+p+q) - \frac{7}{10}p\cdot q\right)^2.$$

(iii) Calcolare $E[Z]$ quando $p = \frac{5}{7}$:

$$\overset{(i)}{\rightsquigarrow} \quad E[Z] = \frac{1}{2}(1+p+q) - \frac{7}{10}p\cdot q$$

$$\overset{p=\frac{5}{7}}{\rightsquigarrow} \quad E[Z] = \frac{1}{2} + \frac{5}{14} + \frac{q}{2} - \underbrace{\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{7}}_{=\frac{1}{2}}\cdot q$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{14} = \frac{12}{14} = \underline{\underline{\frac{6}{7}}}.$$

Esercizio 2. Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$M_n(\omega) \doteq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Indichiamo con F la funzione di ripartizione comune delle X_i (cioè la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale di parametro λ). Definiamo inoltre la funzione $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$G(x) \doteq \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$1 - e^{-\lambda x} = F(\cancel{X} \leq x)$

$\lambda \cdot e^{-\lambda x} = f$

(i) Si verifichi che G è una (funzione di ripartizione.)

(ii) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}(\lambda M_n - \log(n) \leq x) = F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)^n.$$

(iii) Si mostri che

$$F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \cdot \mathbf{1}_{[-\log(n),\infty)}(x),$$

e si concluda che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\lambda M_n - \log(n) \leq x) = G(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$M_n(\omega) \doteq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Indichiamo con F la funzione di ripartizione comune delle X_i (cioè la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale di parametro λ). Definiamo inoltre la funzione $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$G(x) \doteq \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad 1-e^{-\lambda x}$$

① VERIFICA CHE SIA F. DI RIPARTIZIONE → 3 COSE DA VERIFICARE

1. $\lim_{n\to+\infty} F(x) = 1$ 2. $\lim_{n\to-\infty} F(x) = \emptyset$

3. $F'(x) > 0$

$$F(x)\ \exp(e^{-x}) = e^{e^{-x}}$$

$$F'(x) = e^{e^{-x}} \cdot (-1 \cdot e^{-x}) > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{e^{-x}} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} e^{e^{-x}} = 0$$

(ii) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}(\lambda M_n - \log(n) \le x) = F\left(\frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)^n.$$

$$\underline{M_n}(\omega) = \max_{i\in\{1\dots n\}} X_i(\omega) = (F(X_1 \le x) \cdot F(X_2 \le x \dots \cdot F(X_n \le x))$$

$$= P(\lambda M_n - \log(n) \le x) = F\left(\frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)^n$$

$$= P(\underbrace{\lambda}_{>0\dots} \cdot \underbrace{(F(X_1 \le x \dots F(X_n \le x))}_{M.n} - \log(n) \le x) = F\left(\frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)^n$$

INDIPENDENZA

$$\prod_{i=1} P(F(X_i \le x)) \le \prod (F(X_i + \log(n))^n$$

$$\prod_{i=1} P\left(\frac{x_i+\log(n)}{\lambda}\right)^n = F\left(\frac{X_i+\log(n)}{\lambda}\right)^n$$

(iii) Si mostri che

$$F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)^n = \left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n \cdot \mathbf{1}_{[-\log(n),\infty)}(x),$$

e si concluda che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\lambda M_n - \log(n) \le x\right) = G(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\lambda M_n - \log(n) \le x) = \underbrace{G(x)}_{\exp(e^{-x})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n \cdot \mathbf{1}_{[-\log(n),\infty)} - \log(n) \right) \le x$$

$$-\log(n) = \cancel{e^{-\log(n)}} = 1^{-n} = \frac{1}{n}$$

$$\rightsquigarrow \left(F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)\right)^n = \left(1-e^{-x}\cdot e^{-\log(n)}\right)^n \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)$$

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{e} \quad \text{LIMITE NOTEVOLE} = \left(\left(1-\frac{1}{n}\cdot e^{-x}\right)^n\right) \cdot \mathbf{1}_{[-\log(n),\infty)}(x).$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} e^{-e^{-x}} = G(x)$$

poiché $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{[-\log(n),\infty)}(x) \to 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ //

[andava bene così].