

Esercizi per il Corso di ALGEBRA LINEARE

Applicazioni lineari

1. Si dica se sono lineari le seguenti funzioni:

(a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-4z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dove $g\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $w, z \in \mathbb{C}$.

(c) $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dove $g\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $w, z \in \mathbb{C}$.

(d) $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dove $g\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = |w|$ per ogni $w, z \in \mathbb{C}$.

2.² Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ y+z \\ 2z-x \end{pmatrix}$. Si determinino delle basi dello spazio nullo $N(f)$ e dell'immagine $\text{Im}(f)$ di f .

3.² Si determinino le dimensioni dello spazio nullo $N(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ e del sottospazio $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ e delle basi di tali sottospazi per le seguenti matrici:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+y+6z \end{pmatrix}$.

(a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

di \mathbb{R}^3 e la base canonica in \mathbb{R}^2 .

(c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 e la base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di \mathbb{R}^2 .

(d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 e la base \mathcal{D} di \mathbb{R}^2 .

- 5.² Siano V e W due spazi vettoriali di basi rispettivamente $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2\}$, e sia $f: V \rightarrow W$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice (rispetto alle basi date):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Si prenda per V la nuova base $v'_1 = v_2 + v_3$, $v'_2 = v_1 + v_3$, $v'_3 = v_1 + v_2$. Qual è la nuova matrice A' rispetto alle basi $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ e $\{w_1, w_2\}$?
- (b) Si prenda per W la nuova base $w'_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ e $w'_2 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$. Qual è la matrice A'' di f rispetto alle basi $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ e $\{w'_1, w'_2\}$?

6. Sia $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + iy \\ y + ix \end{pmatrix}$.

- (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.
- (b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -2i \end{pmatrix} \right\}$$

del dominio e la base canonica del codominio.

- (c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica del dominio e la base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

del codominio.

- (d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base \mathcal{B} del dominio e la base \mathcal{D} del codominio.