STRUTTURA TIPO DEGLI ESERCIZI

Tutti gli esercizi di calcolo esatto di complessità seguono questo pattern:

1. **Ricorrenza M(i,j)** con:
   - Casi base (i=j, j=i+1)
   - Caso ricorsivo con operazioni tra interi (moltiplicazioni, addizioni)
2. **Richiesta**: Calcolare T(n) = numero ESATTO di operazioni per calcolare M(1,n)

METODO SISTEMATICO

STEP 1: Identificare le Operazioni da Contare

Guardare il caso ricorsivo e contare le operazioni:

Esempio 1:

```
M(i,j) = M(i+1,j-1) · M(i+1,j) · M(i,j-1)
```

→ **2 moltiplicazioni** (tra 3 fattori)

Esempio 2:

```
M(i,j) = M(i+1,j-1) · M(i+1,j) + M(i,j-1)
```

→ **1 moltiplicazione** + 1 addizione = **1 moltiplicazione** (se contano solo quelle)

Esempio 3:

```
c(i,j) = (c(i-1,j) · c(i,j+1)) - c(i-1,j+1)
```

→ **2 operazioni** (1 moltiplicazione + 1 sottrazione)

STEP 2: Guardare i Cicli di Inizializzazione

Pattern comune:

```
for i=1 to n-2 do
    for j=i+2 to n do
```

```
        M[i,j] = 0
```

Questo ci dice che:

- **i varia da 1 a n-2**
- **j varia da i+2 a n**

Ogni cella M[i,j] calcolata esegue le operazioni del caso ricorsivo.

STEP 3: Scrivere la Sommatoria

Formula base:

```
T(n) = Σ(i=1 to n-2) Σ(j=i+2 to n) [numero_operazioni]
```

Esempi concreti:

Caso 2 moltiplicazioni:

```
T(n) = Σ(i=1 to n-2) Σ(j=i+2 to n) 2
```

Caso 1 moltiplicazione:

```
T(n) = Σ(i=1 to n-2) Σ(j=i+2 to n) 1
```

STEP 4: Contare i Termini della Sommatoria Interna

REGOLA FONDAMENTALE:

Per una sommatoria da `a` a `b`, il numero di termini è:

```
Numero termini = b - a + 1
```

Applicazione al caso j=i+2 to n:

```
Numero termini = n - (i+2) + 1 = n - i - 1
```

Verifica numerica (i=1, n=5):

- j va da 3 a 5: j = 3, 4, 5
- Termini: 3

- Formula: 5 - 1 - 1 = 3 ✓

STEP 5: Semplificare la Sommatoria Esterna

Con 2 moltiplicazioni:

```
T(n) = Σ(i=1 to n-2) 2(n - i - 1)
     = 2 Σ(i=1 to n-2) (n - i - 1)
```

Con 1 moltiplicazione:

```
T(n) = Σ(i=1 to n-2) (n - i - 1)
```

STEP 6: Cambio di Variabile (k = n-i-1)

Osservazione: Quando i va da 1 a n-2:

- i=1 → n-i-1 = n-2
- i=2 → n-i-1 = n-3
- ...
- i=n-2 → n-i-1 = 1

Quindi (n-i-1) attraversa tutti i valori da (n-2) fino a 1.

Sostituzione:

```
Σ(i=1 to n-2) (n-i-1) = Σ(k=1 to n-2) k
```

STEP 7: Applicare la Formula di Gauss

Formula di Gauss:

```
Σ(k=1 to m) k = m(m+1)/2
```

Applicazioni:

Per m = n-2:

```
Σ(k=1 to n-2) k = (n-2)(n-2+1)/2 = (n-2)(n-1)/2
```

SOLUZIONI FINALI COMUNI

Caso 1: 2 moltiplicazioni

```
T(n) = 2 Σ(k=1 to n-2) k = 2 · (n-2)(n-1)/2 = (n-2)(n-1)
```

Caso 2: 1 moltiplicazione

```
T(n) = Σ(k=1 to n-2) k = (n-2)(n-1)/2
```

Caso 3: 2 operazioni con limiti diversi

```
T(n) = 2 Σ(i=1 to n-1) (n-1) = 2(n-1)²
```

ESEMPI COMPLETI DAGLI ESAMI

ESEMPIO 1: Appello 17/06/2022

Ricorrenza:

```
M(i,j) = {
    2                                         se i = j
    3                                         se j = i+1
    M(i+1,j-1) · M(i+1,j) + M(i,j-1)         se j > i+1
}
```

Conteggio operazioni: 1 moltiplicazione nel caso ricorsivo

Cicli:

```
for i=1 to n-2 do
    for j=i+2 to n do
        M[i,j] = 0
```

Soluzione:

```
T(n) = Σ(i=1 to n-2) Σ(j=i+2 to n) 1
     = Σ(i=1 to n-2) (n - i - 1)
```

```
     = Σ(k=1 to n-2) k
     = (n-2)(n-1)/2
```

ESEMPIO 2: Memoizzazione

Ricorrenza:

```
M(i,j) = {
    1                                         se i = j
    2                                         se j = i+1
    M(i+1,j-1) · M(i+1,j) · M(i,j-1)         se j > i+1
}
```

Conteggio operazioni: 2 moltiplicazioni (tra 3 fattori)

Soluzione:

```
T(n) = Σ(i=1 to n-2) Σ(j=i+2 to n) 2
     = 2 Σ(i=1 to n-2) (n - i - 1)
     = 2 Σ(k=1 to n-2) k
     = 2 · (n-2)(n-1)/2
     = (n-2)(n-1)
```

ESEMPIO 3: Appello 12/09/2022

Ricorrenza:

```
c(i,j) = {
    a_j                                      se i = 1
    a_{n+1-i}                                se j = n
    c(i-1,j) · c(i,j+1) · c(i-1,j+1)        altrimenti
}
```

Cicli:

```
for j=n-1 downto 1 do
    for i=2 to n do
        c[i,j] = ... (2 operazioni)
```

Conteggio: (n-1) colonne × (n-1) righe × 2 operazioni

Soluzione:

```
T(n) = Σ(j=1 to n-1) Σ(i=2 to n) 2
     = Σ(j=1 to n-1) 2(n-1)
     = 2(n-1)²
```

CHECKLIST OPERATIVA

Prima di calcolare T(n), verifica:

1. ✓ Quante operazioni nel caso ricorsivo?
2. ✓ Quali sono i limiti dei cicli nell'INIT?
3. ✓ Scrivi la sommatoria doppia
4. ✓ Conta i termini della sommatoria interna: n - (i+2) + 1 = n - i - 1
5. ✓ Porta fuori le costanti
6. ✓ Fai il cambio di variabile k = n - i - 1
7. ✓ Applica Gauss: Σk = k(k+1)/2
8. ✓ Semplifica

ERRORI COMUNI DA EVITARE

❌ **Dimenticare il +1** nel conteggio: da a a b sono (b-a+1) termini, non (b-a)

❌ **Confondere n-i-1 con n-i+1**

❌ **Non fare il cambio di variabile** e provare a semplificare direttamente

❌ **Dimenticare di moltiplicare** per il numero di operazioni nel caso ricorsivo

❌ **Sbagliare la formula di Gauss**: è k(k+1)/2, non k(k-1)/2

VARIANTI COMUNI

Variante 1: Limiti Diversi

```
for i=1 to n-1 do
    for j=i+2 to n do
```

→ n-i-1 termini (stesso calcolo)

Variante 2: Scansione Inversa

```
for j=n−1 downto 1 do
    for i=2 to n do
```

→ (n-1) × (n-1) celle

Variante 3: Limiti Asimmetrici

```
for i=1 to n−2 do
    for j=n−2 downto i do
```

→ Conta: da i a n-2 sono (n-2-i+1) = (n-1-i) termini