13) Si consideri il tableau seguente

$-2 \cdot \frac{1}{2}$ (C. RID. NEG.)

$= -1$

$B_1 = [x_2\ x_3, x_6]$

$(-1) \cdot (-17)$

$B_2 = [x_1\ x_3\ x_6]$

$-1 = -17 - 1 = 16$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	-2	0	0	-7	5	0	-1	-17
x6	$\boxed{11}$	0	0	-28	-7	1	0	22
x3	28	0	1	1	0	0	0	14
x2	36	1	0	5	8	0	0	18

e si risponda alle seguenti domande (senza svolgere calcoli):

a) Scrivere la soluzione di base corrente e dire se è ottima. $[x_2, x_3, x_6]$

b) Su quali elementi è possibile eseguire l'operazione di pivot secondo il *metodo* del simplesso? → 28, 36, 5 (C. RID. MIN.)

c) Dire su quale elemento verrà fatto il pivot alla prossima iterazione del metodo del simplesso usando la regola di Bland. → x_1

d) Giustificare perché non viene fatto il pivot sull'elemento in riga 1 e colonna 1 (elemento riquadrato). → SOL. NOT FEASIBLE

e) Stabilire, senza effettuare l'operazione di pivot, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso.

f) Alla fine della prossima iterazione del simplesso sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base?

→ SOL. RIMANE AMM.

g) Che caratteristica avrà la soluzione di base ottenuta applicando la regola di Bland?

Soluzione.

a) Osserviamo che il tableau è in forma canonica rispetto alla base $B = \{x_6, x_3, x_2\}$. La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_6 & A_3 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la soluzione di base corrente è $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 18, 14, 0, 0, 22)$ di valore $z = 17$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi, $(-2,\ -7 < 0)$, quindi la soluzione di base corrente non è detto sia ottima (ricordiamo che “costi ridotti tutti positivi o nulli” è condizione SUFFICIENTE e non necessaria di ottimalità)[1].

b) Ricordiamo che il metodo del simplesso cerca cambi base che tendano a migliorare il valore della funzione obiettivo (quindi si fa entrare in base una qualsiasi colonna con costo ridotto negativo) preservando l'ammissibilità della nuova base (si fa uscire dalla base una qualsiasi variabile che soddisfi la regola del quoziente minimo). Pertanto, i possibili elementi pivot sono 28 (entra x_1 e esce x_3), 36 (entra x_1 e esce x_2) e 5 (entra x_4 e esce x_2).

c) Seguendo la regola di Bland, l'operazione di pivot viene eseguita sull'elemento in riga t e in colonna h dove $h = \min\{j : \bar{c}_j < 0\}$ e $t = \arg \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$ e nel caso di più variabili attualmente in base che corrispondono al minimo quoziente θ, $t = \min \left\{ B_i : \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} = \theta \right\}$. Dal tableau osserviamo che i costi ridotti negativi (-2, $-7 < 0$) corrispondono alle variabili x_1 e x_4, quindi $h = min\{1,4\} = 1$. Allora il quoziente minimo corrisponde a $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{22}{11}, \frac{14}{28}, \frac{18}{36} \right\} = \frac{1}{2}$. Ci sono due variabili corrispondenti a questo minimo rapporto, ovvero x_3 ($t = 2$) e x_2 ($t = 3$). Pertanto, applicando la regola di Bland, si sceglie come variabile uscente x_2 (che ha l'indice minimo), dunque $t = 3$ e alla prossima iterazione del metodo del simplesso, l'operazione di pivot verrà eseguita sull'elemento 36 in riga $t = 3$ e in colonna $h = 1$.

d) L'operazione di pivot non può essere effettuata sull'elemento in riga 1 e colonna 1 in quanto questa operazione porterebbe ad una soluzione non ammissibile, visto che l'elemento non soddisfa la regola del quoziente minimo. In altre parole, effettuando questo pivot, la variabile x_1 (che entra in base) assumerebbe un valore (che corrisponde al rapporto non minimo $\frac{22}{11}$) tale da portare a 0 la variabile x_6 (che uscirebbe dalla base), ma troppo alto, in quanto, per soddisfare i restanti vincoli, le altre variabili dovrebbero assumere valori negativi.

e) Con l'operazione di pivot sull'elemento in riga 3 e colonna 1, la variabile x_1, il cui costo ridotto è $\bar{c}_1 = -2$, entra in base con un valore pari al quoziente minimo $\theta = \frac{1}{2}$ e pertanto, si avrà una variazione del valore della funzione obiettivo pari a $\bar{c}_1 \cdot \theta = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, quindi il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso sarà $-(-17) - 1 = 16$.

f) Alla fine della prossima iterazione del simplesso la base sarà $\widehat{B} = \{x_6, x_3, x_1\}$ e sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base, in quanto la soluzione di base corrente è non degenere e quindi ci sarà sicuramente una

[1]In ogni caso, possiamo osservare anche che, essendo tutti i termini noti (colonna $\bar{b}$) strettamente positivi, allora sicuramente, aumentando il valore delle variabili corrispondenti a tali costi ridotti negativi, ovvero aumentando il valore di x_1 o x_4, è possibile trovare una soluzione ammissibile con valore della funzione obiettivo strettamente minore e quindi possiamo escludere che la base considerata sia ottima.

variazione del valore delle variabili (in sintesi, sarà sicuramente $\theta \neq 0$): per esempio, la prima componente della nuova soluzione (ovvero la prima componente del vettore che individua il nuovo vertice), che nella soluzione corrente vale $x_1 = 0$, come abbiamo visto, sarà $\widehat{x}_1 = \frac{1}{2}$.

g) La regola di Bland impone l'operazione di pivot sulla prima colonna, dove due variabili x_3 e x_2 corrispondono al rapporto minimo. Pertanto, sia x_2 sia x_3 assumeranno il valore 0 nella nuova base: x_2 esce dalla base e x_3 rimane in base al valore 0, rendendo la nuova base DEGENERE.

x_3, x_2 = STESSO RAPPORTO

$\rightarrow$ DEGENERE