Esercizi per il Corso di ALGEBRA LINEARE

Dipendenza e indipendenza lineare

1.[1] Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi (a coefficienti reali) nella variable x di grado ≤ 3. Si verifichi che gli insiemi seguenti sono delle basi di V:

(a) $\{1, x, x^2, x^3\}$
(b) $\{1, 1-x, x-x^2, x^2-x^3\}$
(c) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$

2.[1] Si dica se è possibile estrarre dal sottoinsieme $\mathcal{C}$ delle basi di V nei seguenti casi:

(a)[1] Lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 2 con sottoinsieme $\mathcal{C} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ dove

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 + x(1-x) + (1-x)^2 \\ p_2(x) &= x^2 + (1-x)^2 \\ p_3(x) &= x^2 + 1 + (1-x)^2 \\ p_4(x) &= x(1-x). \end{aligned}$$

(a) Lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ con sottoinsieme $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3.[1] Si studi la dipendenza o l'indipendenza lineare dei vettori seguenti, e si determini in ogni caso una base del sottospazio da essi generato.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^5$.

4.[1] In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determino delle base dei sottospazi $U \cap V$, U, V e $U + V$.

[1] Esercizio estratto/adattato dal libro F. Bottacin, *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria*, Società Esculapio (2021)