$\boxed{9}$ Si dica se

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è o non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre stabilire se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 == \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -4 & 2 & b \\ 2 & 8 & -4 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & a+b \\ 0 & 2 & -6 & c-2a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c \end{array}\right).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $2b + c \neq 0$ (si prendano ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $(*)$ non ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

(1) Per stabilire se $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no. La matrice aumentata di $(*)$ è: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}).$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v_1} - \frac{1}{2}\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ con coefficienti non tutti nulli).

Abbreviando ...

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è **linearmente dipendente** .

(2) Per stabilire se $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}; \mathbf{w_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

allora $\alpha_1\mathbf{w_1}+\alpha_2\mathbf{w_2}+\alpha_3\mathbf{w_3}=\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ se e solo se

$$(**)\qquad \begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\ 4\alpha_1-\alpha_3=0\\ 2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(**)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\4&0&-1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)=\left(\mathbf{U}\ \middle|\ \mathbf{0}\right).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(**)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w_1}+\alpha_2\mathbf{w_2}+\alpha_3\mathbf{w_3}=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Quindi $\{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente**.

Abbreviando ...

Sia $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3\end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\4&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}}\begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_3(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{U}.$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $\{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente** .

$\boxed{1}$ Sia $\quad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ e si trovi una base $\mathcal{B}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ e si trovi una base $\mathcal{B}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = 1$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

$\mathrm{rk}(A_1) = 3$

Una base $\mathcal{B}_1$ di $C(\mathbf{A_1})$ è $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$\mathrm{rk}(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}}$ di $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{3^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\mathrm{rk}(A_\alpha) = 4$

Una base $\mathcal{B}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ è $\mathcal{B}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha - 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathbb{C}^4$ e $\dim(C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, allora $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{C}^4$ e si sarebbe potuto prendere $\mathcal{B}_{\alpha} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}\}$.

Def Un' APPLICAZIONE LINEARE è una funzione

$$f : V \longrightarrow W$$

tale che

$\boxed{0}$ V e W sono spazi vettoriali sullo stesso K
(entrambi reali oppure entrambi complessi)

$\boxed{1}$ $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$, $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

$\boxed{2}$ $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$, $\forall \underline{v} \in V$, $\forall \alpha \in K$

$\boxed{5}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

Fissato $i \in \{1, 2\}$, per vedere che $f_i : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$;

(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

- f_1 verifica la condizione (1) ?

Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte si ha:

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque f_1 verifica la condizione (1).

f_1 verifica la condizione (2) ?

Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$f_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha f_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_1 verifica la condizione (2).

Verificando entrambe le condizioni (1) e (2), f_1 è un'applicazione lineare.

- f_2 verifica la condizione (1) ?

Essendo

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 \\ f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \\ f_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 \end{cases}$$

se fosse $f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$.

Dunque f_2 non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

1. Si dica se sono lineari le seguenti funzioni:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-4z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Per determinare se la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $f((x, y, z)) = (x - 4z, x + y + z)$ è lineare, dobbiamo verificare due proprietà fondamentali delle funzioni lineari:

1. Additività: La funzione f deve soddisfare $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni coppia di vettori u e v in $\mathbb{R}^3$.
2. Omogeneità: La funzione f deve soddisfare $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ per ogni scalare α e vettore u in $\mathbb{R}^3$.

Verifichiamo entrambe queste proprietà per la funzione f:

1. Additività:
Prendiamo due vettori $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ in $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo $f(u + v)$:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) \\ &= ((x_1+x_2) - 4(z_1+z_2), (x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2)) \\ &= ((x_1 - 4z_1 + x_2 - 4z_2), (x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2)) \\ &= (x_1 - 4z_1, x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 - 4z_2, x_2 + y_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Poiché $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni coppia di vettori u e v in $\mathbb{R}^3$, la funzione f soddisfa la proprietà di additività.

2. Omogeneità:
Prendiamo un vettore $u = (x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$ e un numero scalare α. Calcoliamo $f(\alpha u)$:

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f((\alpha x, \alpha y, \alpha z)) \\ &= (\alpha x - 4(\alpha z), \alpha x + \alpha y + \alpha z) \\ &= \alpha(x - 4z, x + y + z) \\ &= \alpha f(u) \end{aligned}$$

Poiché $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ per ogni scalare α e vettore u in $\mathbb{R}^3$, la funzione f soddisfa la proprietà di omogeneità.

Dato che la funzione f soddisfa sia la proprietà di additività che quella di omogeneità, possiamo concludere che f è una funzione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

3.[2] Si determinino le dimensioni dello spazio nullo $N(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ e del sottospazio $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ e delle basi di tali sottospazi per le seguenti matrici:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Per la matrice (a):

1. Calcoliamo le dimensioni dello spazio nullo $N(A)$:

Per trovare lo spazio nullo, dobbiamo risolvere il sistema di equazioni $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{x}$ è un vettore colonna.

Riducendo la matrice aumentata $[A \mid \mathbf{0}]$ alla forma canonica a gradini otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione libera corrisponde a x_3 e x_4, quindi $N(A)$ è generato da $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

La dimensione dello spazio nullo $N(A)$ è 2.

1. Calcoliamo le dimensioni del sottospazio colonna $C(A)$:

Per trovare lo spazio colonna, possiamo ridurre la matrice A alla sua forma canonica a gradini, contando il numero di colonne pivot.

Riducendo A otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le colonne pivot sono 1 e 2, quindi la dimensione di $C(A)$ è 2.

Per la matrice (b):

1. Calcoliamo le dimensioni dello spazio nullo $N(A)$:

Riducendo la matrice aumentata $[A \mid \mathbf{0}]$ alla forma canonica a gradini otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Poiché non ci sono righe completamente nulle, il sistema ha solo la soluzione triviale. Quindi $N(A)$ consiste solo nel vettore nullo.

La dimensione dello spazio nullo $N(A)$ è 0.

1. Calcoliamo le dimensioni del sottospazio colonna $C(A)$:

   Riducendo A otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

   Tutte le colonne sono pivot, quindi la dimensione di $C(A)$ è 3.

   In sintesi:

   (a)

- Dimensione dello spazio nullo $N(A)$: 2
- Dimensione del sottospazio colonna $C(A)$: 2

   (b)

- Dimensione dello spazio nullo $N(A)$: 0
- Dimensione del sottospazio colonna $C(A)$: 3

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+y+6z \end{pmatrix}$.

(a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$.

(a) Matrice A rispetto alla base canonica:

L'applicazione lineare è $f((x, y, z)) = (x + 2y + 3z, -x + y + 6z)$.

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (spazio di partenza) e $\mathbb{R}^2$ (spazio di arrivo) è data da:

$$A = \begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & f(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$$

Dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ sono i vettori di base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Calcoliamo:

$$f(\mathbf{e}_1) = (1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0, -1 + 0 + 6 \cdot 0) = (1, -1)$$
$$f(\mathbf{e}_2) = (0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 0 - 1 + 6 \cdot 0) = (2, -1)$$
$$f(\mathbf{e}_3) = (0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1, 0 - 0 + 6 \cdot 1) = (3, 6)$$

Quindi la matrice A è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) Matrice B rispetto alla base B:

La matrice associata ad f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$B = \begin{bmatrix} [f]_B \end{bmatrix}$$

Dove $[f]_B$ è la matrice dei coefficienti di f rispetto alla base B.

Per calcolare $[f]_B$, applichiamo f ai vettori della base B:

$$f((2, 1, 2)) = (2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2, -2 + 1 + 6 \cdot 2) = (10, 11)$$
$$f((0, -1, 0)) = (0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0, 0 - (-1) + 6 \cdot 0) = (-2, 1)$$
$$f((1, 1, 2)) = (1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2, -1 + 1 + 6 \cdot 2) = (10, 11)$$

Quindi la matrice B è:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 10 \\ 11 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

(c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$.

(d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e la base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^2$.

(c) Matrice D rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base d di $\mathbb{R}^2$:

La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base d di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$D = [[f]_d]$$

Dove $[f]_d$ è la matrice dei coefficienti di f rispetto alla base d.

Per calcolare $[f]_d$, applichiamo f ai vettori della base d:

$$f((-2,-1)) = (-2+2\cdot(-1)+3\cdot 0, 2+(-1)+6\cdot 0) = (-5,1)$$
$$f((0,1)) = (0+2\cdot 1+3\cdot 0, 0+1+6\cdot 0) = (2,1)$$

Quindi la matrice D è:

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Matrice C rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$:

La matrice associata a f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$C = [[f]_{BD}]$$

Dove $[f]_{BD}$ è la matrice dei coefficienti di f rispetto alle basi B e D.

Per calcolare $[f]_{BD}$, dobbiamo calcolare $[f]_{B\to\text{canonica}}$ e $[f]_{\text{canonica}\to D}$ e moltiplicarle:

1. Calcoliamo $[f]_{B\to\text{canonica}}$:

$$[f]_{B\to\text{canonica}} = B^{-1}A$$

Dove A è la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e B è la matrice i cui vettori sono i vettori di base B di $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolando $[f]_{B\to\text{canonica}}$ otteniamo:

$$[f]_{B\to\text{canonica}} = B^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcoliamo $[f]_{\text{canonica}\to D}$:

$$[f]_{\text{canonica}\to D} = D$$

Dove D è la matrice associata a f rispetto alla base D di $\mathbb{R}^2$.

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora moltiplichiamo le due matrici:

$$C = [f]_{B\to\text{canonica}} \cdot [f]_{\text{canonica}\to D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

In sintesi:

(c) Matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base d di $\mathbb{R}^2$:

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Matrice associata a f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e la base D di $\mathbb{R}^2$:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Per i tipi di base, distinguiamo:

- Le basi ortogonali, definite come tali se e solo se i vettori che le compongono sono a due a due ortogonali rispetto al prodotto scalare

In formule:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} \text{ base ortogonale di } V \iff$$

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \text{ per ogni } i \neq j, \text{ con } i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

In definitiva, data una base di uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare, per **verificare se è una base ortogonale** è sufficiente stabilire se è formata da vettori ortogonali a due a due.

- Le basi ortonormali, cioè delle basi ortogonali in cui tutti i vettori hanno norma unitaria rispetto ad un fissato prodotto scalare

Una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ di V è una *base ortonormale* se e solo se:

- i vettori che la definiscono sono a due a due ortogonali rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$;

- ciascun vettore della base ha norma 1.

In formule:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} \text{ base ortonormale di } V \iff$$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \text{ per ogni } i \neq j, \text{ con } i, j \in \{1, 2, ..., n\} \\ ||\mathbf{v}_i|| := \sqrt{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} = 1 \text{ per ogni } i \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}$$

Un insieme di vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in uno spazio vettoriale è ortogonale se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni coppia di vettori v_i e v_j nell'insieme, con $i \neq j$.

Ciò significa che se hai un insieme ortogonale, ogni coppia di vettori nell'insieme è perpendicolare e il loro prodotto scalare è nullo.

Normalizzare in questo contesto significa trasformare un insieme di vettori in un insieme ortonormale, cioè un insieme di vettori che sono sia ortogonali tra loro che di norma unitaria (lunghezza 1).

Quando normalizzi un insieme di vettori, stai dividendo ciascun vettore per la sua norma (lunghezza) in modo che diventi un vettore di lunghezza 1. In altre parole, stai proiettando ciascun vettore nell'insieme sulla sfera unitaria centrata nell'origine.

Supponiamo di avere un insieme di vettori ortogonali $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in uno spazio vettoriale. Per normalizzare questi vettori, calcoli il vettore normalizzato u_i associato a ciascun v_i dividendo v_i per la sua norma:

$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

Dopo la normalizzazione, gli u_i saranno unitari (di lunghezza 1) e continueranno a essere mutuamente ortogonali (poiché il fattore di scala non influisce sulla loro ortogonalità).

Un "insieme ortonormale" è un insieme di vettori in uno spazio vettoriale in cui ogni vettore è di norma unitaria (lunghezza 1) e tutti i vettori sono mutuamente perpendicolari (ortogonali) tra loro. In altre parole, un insieme ortonormale è un insieme di vettori che soddisfa entrambe le condizioni di ortogonalità e normalizzazione.

Considera uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto scalare (interno) $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ di vettori in V è definito come:

Insieme Ortonormale: Se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni coppia di vettori v_i e v_j nell'insieme, con $i \neq j$, e $\|v_i\| = 1$ per ogni i.

In altre parole, in un insieme ortonormale, i vettori sono sia ortogonali che di norma unitaria. Ciò significa che:

1. Ogni coppia di vettori nell'insieme è perpendicolare tra loro, quindi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
2. Ogni vettore nell'insieme ha una norma (lunghezza) di 1, quindi $\|v_i\| = 1$.

Una base ortogonale (rispettivamente ortonormale) è una base che è anche un insieme ortogonale.

Una "base ortogonale" è una base per uno spazio vettoriale in cui i vettori di base sono tra loro perpendicolari (ortogonali). In altre parole, una base ortogonale è un insieme di vettori di base che soddisfa la condizione di ortogonalità.

Più formalmente, una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ per uno spazio vettoriale V è definita come una base ortogonale se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni coppia di vettori v_i e v_j nella base, con $i \neq j$.

In una base ortogonale, i vettori di base sono perpendicolari tra loro e non hanno componenti in comune, il che semplifica notevolmente i calcoli, specialmente quando si tratta di prodotti scalari, proiezioni, decomposizioni e altre operazioni.

Una "base ortonormale" è una base ortogonale in cui i vettori di base sono anche di norma unitaria (lunghezza 1). Quindi, una base ortonormale è sia un insieme ortogonale che un insieme di vettori di norma unitaria.

In sintesi:

- Una base ortogonale è un insieme di vettori di base che sono ortogonali tra loro, ma non necessariamente di norma unitaria.
- Una base ortonormale è un insieme di vettori di base che sono sia ortogonali che di norma unitaria.

Dato S un insieme di generatori di V, possiamo costruire S_0 come insieme di generatori ortogonale di V attraverso l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Questo è un metodo utilizzato per trasformare una base lineare qualsiasi in una base ortogonale o ortonormale. Questo algoritmo è particolarmente utile nell'ambito dell'algebra lineare e ha applicazioni in diverse aree, come la risoluzione di sistemi lineari, la diagonalizzazione di matrici e altro ancora.

Al fine di costruire una base ortonormale di V, si normalizzano i vettori di una base ortogonale.

L'obiettivo dell'algoritmo di Gram-Schmidt è partire da una base lineare $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale e costruire una nuova base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ in cui ciascun vettore u_i sia ortogonale a tutti i vettori precedenti $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$.

Ecco come funziona l'algoritmo di Gram-Schmidt:

1. Inizializzazione: Parti con la base di partenza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
2. Calcolo dei Vettori Ortogonali: Calcola il primo vettore u_1 come il vettore v_1 stesso.
3. Per $i = 2$ a n:
   - Proietta v_i sugli u_j precedenti, $j = 1, 2, \ldots, i-1$, per ottenere le componenti parallele ai vettori precedenti.
   - Sottrai queste componenti parallele da v_i per ottenere una componente ortogonale a tutti i vettori precedenti.
   - Normalizza il vettore ottenuto per ottenere u_i (se si desidera una base ortonormale).
4. Alla fine, avrai ottenuto una nuova base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ che è ortogonale (o ortonormale, se normalizzata) rispetto alla base di partenza.

In formule, il processo di proiezione e sottrazione per ottenere la componente ortogonale di v_i rispetto agli u_j precedenti può essere espresso come:

$u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$

Dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare e u_j sono i vettori ortogonali già calcolati.

L'algoritmo di Gram-Schmidt è un processo iterativo che costruisce una base ortogonale o ortonormale in uno spazio vettoriale, migliorando la proprietà di ortogonalità in ogni passaggio.

Ho $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ costruisco $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$

$\underline{u}_1 = \underline{v}_1$

$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12} \underline{u}_1$ $\qquad \alpha_{12} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_1 | \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1 | \underline{u}_1)} & \text{se } \underline{u}_1 \neq \underline{0} \end{cases}$

$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13} \underline{u}_1 - \alpha_{23} \underline{u}_2$

$\alpha_{13} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_1 | \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1 | \underline{u}_1)} & \text{se } \underline{u}_1 \neq \underline{0} \end{cases}$ $\qquad \alpha_{23} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_2 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_2 | \underline{v}_3)}{(\underline{u}_2 | \underline{u}_2)} & \text{se } \underline{u}_2 \neq \underline{0} \end{cases}$

$$\underline{u}_4 = \underline{v}_4 - \alpha_{14}\underline{u}_1 - \alpha_{24}\underline{u}_2 - \alpha_{34}\underline{u}_3 \quad \text{eccetera} \ldots$$

$$\underline{u}_j = \underline{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij}\,\underline{u}_i$$

dove
$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_i = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_i|\underline{v}_j)}{(\underline{u}_i|\underline{u}_i)} & \text{se } \underline{u}_i \neq \underline{0} \end{cases}$$

Vediamo un semplice esempio applicativo considerando la seguente base:

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Eseguiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt passo dopo passo:

1. Inizializzazione:
$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$
2. Calcolo dei Vettori Ortogonali:
$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$$
3. Calcolo dei Vettori Ortogonali:
$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 - \frac{\langle v_3,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2 = \begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{6}{14}\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{9}{14}\\-\frac{9}{14}\\-\frac{5}{7}\end{bmatrix}$$

Ora, normalizziamo i vettori per ottenere una base ortonormale:

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{14}}{6}\\\frac{\sqrt{14}}{6}\\\frac{\sqrt{14}}{3}\end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}\\-\frac{3}{\sqrt{14}}\\-\frac{5}{\sqrt{14}}\end{bmatrix}$$

Ora abbiamo ottenuto una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ a partire dalla base di partenza $\{v_1, v_2, v_3\}$ utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Consideriamo ad esempio:

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{I}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} \quad = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a, la 3^a e la 4^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_3}; \mathbf{w_4}\}$.

$\boxed{II}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\implies \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} =$$
$$= \mathbf{v_2} + \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = 4$$

$$\implies \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{v_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u_3} &= \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \\ &= \mathbf{v_3} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u_1} - \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_2} =\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}i\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}$$

Dunque

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix}; \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{II}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ ed $\mathbf{u_3}$:

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u_3}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{\begin{pmatrix}i & 0 & -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2}; \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2}; \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|_2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una base ortonormale di V.

3.[1] Si trovi una base ortonormale del sottospazio $C(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Iniziamo il processo di Gram-Schmidt: Passo 1: Normalizzazione della prima colonna Calcoliamo il vettore v_1 come la prima colonna di A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ora normalizziamo v_1 dividendo per la sua norma:

$$\|v_1\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Ora il vettore normalizzato u_1 sarà:

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

Passo 2: Calcolo della seconda colonna ortonormale Ora dobbiamo calcolare il vettore v_2 come la seconda colonna di A:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Ora proiettiamo v_2 su u_1 e sottraiamo questa proiezione da v_2 per ottenere il vettore w_2 ortogonale a u_1:

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

Dove $\langle v_2, u_1 \rangle$ rappresenta il prodotto scalare tra v_2 e u_1. Calcoliamo:

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = -\frac{14}{\sqrt{14}} = -\sqrt{14}$$

Ora calcoliamo w_2:

$$w_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - (-\sqrt{14}) \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 3\sqrt{14} \\ 1 - \sqrt{14} \\ 5 + \sqrt{14} \\ -7 - 3\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Ora normalizziamo w_2 dividendo per la sua norma:

$$\|w_2\| = \sqrt{(-5 + 3\sqrt{14})^2 + (1 - \sqrt{14})^2 + (5 + \sqrt{14})^2 + (-7 - 3\sqrt{14})^2}$$

Calcolando questa norma otteniamo:

$$\|w_2\| = 2\sqrt{14}$$

Ora il vettore normalizzato u_2 sarà:

$$u_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{2\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -5 + 3\sqrt{14} \\ 1 - \sqrt{14} \\ 5 + \sqrt{14} \\ -7 - 3\sqrt{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5+3\sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \\ \frac{1-\sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \\ \frac{5+\sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \\ \frac{-7-3\sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

Ora abbiamo ottenuto due vettori ortonormali u_1 e u_2 che formano una base ortonormale per il sottospazio colonna di A.

allora $\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ se e solo se

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(**)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \mid \mathbf{0}\right).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(**)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente**.

Abbreviando ...

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3\end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente** .

1.[1] Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Si confermi che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$. Si calcolino delle basi degli autospazi $E_A(\lambda_1)$ e $E_A(\lambda_2)$.

(b) Si confermi che gli autovalori di B sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Si calcolino delle basi degli autospazi $E_A(\lambda_1)$ e $E_A(\lambda_2)$.

(c) Si confermi che $\lambda = 4$ è un autovalore di C e si calcoli una base dell'autospazio $E_C(\lambda)$.

Premessa:

Il nucleo di una matrice, anche noto come "kernel" o "spazio nullo", è l'insieme dei vettori colonna che, quando moltiplicati per la matrice, producono il vettore nullo (il vettore di zeri). In altre parole, è l'insieme dei vettori x tali che $Ax = 0$, dove A è la matrice in questione.

Formalmente, il nucleo di una matrice A, indicato come $\ker(A)$ o $\text{null}(A)$, è definito come segue:

$$\ker(A) = \{x \mid Ax = 0\}$$

Dove:

- A è la matrice di cui stiamo cercando il nucleo.
- x è il vettore colonna che appartiene al nucleo.
- Ax rappresenta il prodotto matrice-vettore tra A e x.
- 0 è il vettore nullo, ovvero un vettore composto solo da zeri.

(a) Per trovare gli autovalori di A e le basi degli autospazi associati, dobbiamo risolvere l'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dove I è la matrice identità. Quindi, per A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) - (0 \cdot 2) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Risolvendo $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ otteniamo gli autovalori:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

Ora dobbiamo trovare le basi degli autospazi associati:

Per $\lambda_1 = 1$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolando il nucleo (ker) di questa matrice:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Questo autospazio è generato dalla base:

$$\text{Base di } E_A(\lambda_1) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per $\lambda_2 = 5$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcolando il nucleo di questa matrice:

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right)$$

Questo autospazio è generato dalla base:

$$\text{Base di } E_A(\lambda_2) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Ora, per B:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando l'equazione caratteristica:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((1-\lambda)^2 - 0 \cdot (-2)) - 0$$

Risolvendo questa equazione otteniamo gli autovalori:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Ora calcoliamo le basi degli autospazi associati:

Per $\lambda_1 = 1$:

$$B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolando il nucleo di questa matrice:

$$\ker(B - \lambda_1 I) = \ker\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Questo autospazio è generato dalla base:

$$\text{Base di } E_B(\lambda_1) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per $\lambda_2 = 2$:

$$B - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il nucleo di questa matrice:

$$\ker(B - \lambda_2 I) = \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Questo autospazio è generato dalla base:

$$\text{Base di } E_B(\lambda_2) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Per $\lambda_3 = 3$:

$$B - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolando il nucleo di questa matrice:

$$\ker(B - \lambda_3 I) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right)$$

Questo autospazio è generato dalla base:

$$\text{Base di } E_B(\lambda_3) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Infine, per C:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'autospazio associato a $\lambda = 4$:

$$C - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolando il nucleo di questa matrice:

$$\ker(C - 4I) = \ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Questo autospazio è generato dalla base:

$$\text{Base di } E_C(4) : \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Introduciamo altri concetti chiave:

- Un autovalore di una matrice è un numero scalare che rappresenta come un'operazione lineare (rappresentata dalla matrice) allunga o comprime un vettore.
- Un autovettore è il vettore associato a un determinato autovalore.

Si dice che lo scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è un **autovalore** della matrice quadrata A se esiste un vettore colonna non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$A\mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{v}$$

Il vettore $\mathbf{v}$ è detto **autovettore relativo all'autovalore** λ_0.

Autovalore (o Valore Proprio):
Un autovalore di una matrice è un numero scalare che rappresenta come un'operazione lineare (rappresentata dalla matrice) allunga o comprime un vettore. In altre parole, è uno scalare λ tale che esiste un vettore non nullo v tale che $Av = \lambda v$, dove A è la matrice associata alla trasformazione lineare. L'autovalore rappresenta il fattore di scala per il quale il vettore v viene moltiplicato quando sottoposto alla trasformazione lineare rappresentata da A.

Autovettore:
Un autovettore è il vettore associato a un determinato autovalore. In altre parole, se v è un autovettore di A con autovalore λ, allora $Av = \lambda v$. L'autovettore è la direzione in cui l'operazione lineare rappresentata dalla matrice allunga o comprime il vettore, mantenendolo nella stessa direzione.

In termini più semplici, gli autovalori e gli autovettori forniscono informazioni su come una trasformazione lineare cambia o scala i vettori. Gli autovalori possono essere reali o complessi, e una matrice può avere più di un autovalore e più di un autovettore associato ad ogni autovalore. Gli autovettori associati allo stesso autovalore possono essere linearmente indipendenti, costituendo una base per lo spazio degli autovettori.

Gli autovettori relativi a uno stesso autovalore λ_0 di una matrice quadrata A di ordine n, insieme al vettore nullo, formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Tale sottospazio prende il nome di **autospazio relativo all'autovalore** λ_0, si indica con V_{λ_0} ed è definito nel modo seguente:

$$V_{\lambda_0} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \text{ tali che } A\mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{v}\}$$

Per completezza, dimostriamo che V_{λ_0} è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Per stabilire se un insieme è un sottospazio vettoriale bisogna verificare se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare, cioè se per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_{\lambda_0}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ valgono le seguenti proprietà:

$1)\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_{\lambda_0}$

$2)\ \alpha \mathbf{v}_1 \in V_{\lambda_0}$

Introduciamo due precisazioni:

1. Autovalori di Matrici Triangolari

Una matrice triangolare è una matrice in cui tutti gli elementi al di sopra o al di sotto della diagonale principale sono nulli. Le matrici triangolari possono essere superiori (tutti gli elementi sotto la diagonale sono nulli) o inferiori (tutti gli elementi sopra la diagonale sono nulli).

Per le matrici triangolari, gli autovalori corrispondono agli elementi diagonali. In altre parole, gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale. Questo perché gli autovettori associati a ciascun autovalore sono gli autovettori che hanno componenti non nulle solo nella colonna corrispondente all'autovalore (cioè, gli autovettori associati agli elementi diagonali). Poiché le matrici triangolari non cambiano la struttura della loro diagonale quando vengono moltiplicate per un vettore, è intuitivo che gli autovalori siano direttamente legati agli elementi diagonalmente.

2. Autovalori di Matrici Diagonali

Una matrice diagonale è una matrice triangolare sia superiore che inferiore, in cui tutti gli elementi al di sopra e al di sotto della diagonale principale sono nulli. In altre parole, tutti gli elementi non diagonali sono nulli.

Per le matrici diagonali, gli autovalori corrispondono direttamente agli elementi diagonali. Gli autovalori di una matrice diagonale sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale. Inoltre, gli autovettori associati agli autovalori sono gli autovettori che hanno componenti non nulle solo nella posizione corrispondente all'autovalore.

Nelle matrici diagonali, gli autovettori non cambiano direzione quando vengono moltiplicati per la matrice stessa, poiché ciascun componente dell'autovettore è scalato solo per l'autovalore corrispondente. Questo rende gli autovalori e gli autovettori delle matrici diagonali particolarmente semplici da calcolare e comprendere.

In sintesi, sia per le matrici triangolari che per le matrici diagonali, gli autovalori sono direttamente associati agli elementi diagonali, semplificando il calcolo e l'interpretazione delle proprietà degli autovalori e degli autovettori.

A proposito di autovalori, definiamo ora:

Molteplicità Algebrica:

La molteplicità algebrica di un autovalore è il numero di volte che l'autovalore appare come radice dell'equazione caratteristica della matrice. In altre parole, è la molteplicità delle radici dell'equazione polinomiale che si ottiene calcolando il determinante $|A - \lambda I|$, dove A è la matrice e λ è l'autovalore.

Ad esempio, se un autovalore λ appare con molteplicità algebrica 3, significa che l'equazione caratteristica ha tre radici uguali a λ.

Molteplicità Geometrica:

La molteplicità geometrica di un autovalore è il massimo numero di autovettori linearmente indipendenti associati a quell'autovalore. In altre parole, rappresenta la dimensione dello spazio degli autovettori associati all'autovalore.

Ad esempio, se un autovalore λ ha molteplicità geometrica 2, significa che esistono due autovettori linearmente indipendenti associati a λ.

Le molteplicità algebriche e geometriche possono essere uguali o diverse per un autovalore. Ecco alcuni scenari possibili:

1. Molteplicità Algebrica = Molteplicità Geometrica
   a. In questo caso, ci sono abbastanza autovettori linearmente indipendenti per riempire tutto lo spazio degli autovettori associati all'autovalore.
2. Molteplicità Algebrica > Molteplicità Geometrica
   a. Questo indica che l'autovalore ha più autovettori linearmente indipendenti di quanti ne siano necessari per formare lo spazio degli autovettori associati.
3. Molteplicità Algebrica < Molteplicità Geometrica
   a. Questo indica che ci sono meno autovettori linearmente indipendenti di quanti ne sarebbero necessari.

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si trovino:
- i loro autovalori,
- le loro molteplicità algebriche,
- le loro molteplicità geometriche,
- basi dei loro autospazi.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 3i & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ 3i & -x \end{pmatrix} = \\ &= (3-x)[(-x)^2 - (-3i)\cdot 3i] = (3-x)(x^2+9i^2) = (3-x)(x^2-9) = \\ &= (-3-x)(3-x)^2. \end{aligned}$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-3-x)(3-x)^2 = 0$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-3-x)(3-x)^2 = 0$$

sono -3 e 3, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-3-x)(3-x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-3) = N\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \middle| h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih \\ k \\ h \end{pmatrix} \middle| h, k \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi

$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}}(3)) =$ [numero di colonne di $(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_3)] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_3) = 3-1 = 2$

e $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

B è una matrice triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali:

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 3.$$

$\Big($Infatti, il polinomio caratteristico di **B** è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{B}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix} = \\ &= (-x)(-x)(3-x) = x^2(3-x), \end{aligned}$$

e gli autovalori di **B** sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{B}}(x)$ di **B**, ossia le soluzioni dell'equazione $x^2(3-x) = 0.\Big)$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{B}}(x) = x^2(3-x) = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 2 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$1 \leq d_1 \leq 2 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B} - 0\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{B})$$

Da una E.G. su **B** :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B}) = N\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{B}}(\lambda_1)) = \text{ (numero di colonne di } \mathbf{B}) - \mathrm{rk}(\mathbf{B}) = 3 - 2 = 1$$

e $\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3) = N(\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{3})E_{23}E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3)$.

Date due matrici $n \ x \ n$ A e B, abbiamo che sono <u>simili</u> quando esiste S non singolare (invertibile) tale che

$$A = SBS^{-1}$$

Oppure anche:

Due matrici A e B si dicono "simili" se esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1}AP$. In altre parole, le matrici simili rappresentano la stessa trasformazione lineare espressa in sistemi di coordinate diversi, ciascuno definito dalla matrice P.

TEOREMA Siano A e B $(n \times n)$ simili. Allora

$\boxed{1}$ $P_A(x) = P_B(x)$. Quindi

- $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} B$
- $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} A$ si ha:

$$\begin{pmatrix} \text{la molteplicità} \\ \text{algebrica di } \lambda \\ \text{come autovalore di } A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{la molteplicità} \\ \text{algebrica di } \lambda \\ \text{come autovalore di } B \end{pmatrix}$$

DUE MATRICI SIMILI HANNO GLI STESSI AUTOVALORI CON LE STESSE MOLTEPLICITA' ALGEBRICHE E GEOMETRICHE

$\boxed{2}$ $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} A$ $\quad \dim E_A(\lambda) = \dim E_B(\lambda)$

molteplicità geometrica di λ come aut. di A — come autovalore di B

Possiamo definire inoltre la matrice <u>diagonalizzabile</u>, che è una matrice quadrata simile a una matrice diagonale. In altri termini una matrice A è diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile P tale che PD=AP, dove D è una matrice diagonale dello stesso ordine di A.

Def A $n \times n$, A si dice <u>DIAGONALIZZABILE</u> se è simile ad una matrice diagonale, cioè se

$\exists D$ diagonale

$\exists S$ non singolare

tale che $\quad A = SDS^{-1}$

diagonale

non singolare

oppure anche:

Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Si dice che A è una **matrice diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale D di ordine n.

Stando alla definizione di matrici simili, ciò equivale ad affermare che $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$, ossia

$$PD = AP$$

La matrice P è detta **matrice diagonalizzante** di A.

Il teorema di diagonalizzabilità stabilisce le condizioni sotto le quali una matrice può essere diagonalizzata. In particolare, il teorema afferma che una matrice quadrata A è diagonalizzabile se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti, dove n è la dimensione della matrice.

Eccone l'enunciato: una matrice quadrata A è diagonalizzabile in un campo $\mathbb{K}$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1) il numero degli autovalori di A appartenenti al campo $\mathbb{K}$ e contati con la loro molteplicità è pari all'ordine della matrice;

2) la molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincide con la relativa molteplicità algebrica.

Prima di vedere un esempio richiamiamo la vostra attenzione su alcuni casi particolari, utili a far risparmiare qualche passaggio negli esercizi.

A) Se $A = (a_{ij})$ è una matrice simmetrica, cioè se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i \neq j$, allora A è diagonalizzabile.

B) Se A è una matrice quadrata di ordine n che ammette esattamente n autovalori distinti in $\mathbb{K}$, allora A è diagonalizzabile nel campo $\mathbb{K}$.

C) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o, più in generale, $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso, il punto 1) del teorema di diagonalizzabilità è verificato in automatico, infatti il numero degli autovalori (contati con la loro molteplicità) è il numero delle radici del polinomio caratteristico associato ad A, che ha grado pari all'ordine della matrice. Come stabilito da un corollario del teorema fondamentale dell'Algebra, in un campo algebricamente chiuso il numero delle radici di un polinomio è pari al grado di quest'ultimo.

Infine, indicando con $m_a(\lambda_0)$ la molteplicità algebrica e con $m_g(\lambda_0)$ la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_0, è utile ricordare che

$$1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0) \leq n$$

Dalla precedente relazione si deduce che se un autovalore ha molteplicità algebrica pari a 1, allora è pari a 1 anche la sua molteplicità geometrica.

Prima di introdurre le matrici diagonalizzabili, occorre necessariamente parlare di:

Matrice Unitaria:

Una matrice U è detta "unitaria" se la sua trasposta coniugata (trasposta e coniugata di ciascun elemento) è uguale all'inversa della matrice stessa. In altre parole, una matrice U è unitaria se $U^*U = UU^* = I$, dove I è la matrice identità. Le matrici unitarie preservano la norma euclidea, il prodotto scalare e l'angolo tra vettori, rendendole particolarmente utili in diverse applicazioni, come la diagonalizzazione di matrici hermitian e la risoluzione di sistemi lineari.

Matrice Ortogonale:

Una matrice Q è detta "ortogonale" se la sua trasposta è uguale all'inversa della matrice stessa. In altre parole, una matrice Q è ortogonale se $Q^TQ = QQ^T = I$, dove I è la matrice identità. Le matrici ortogonali preservano le lunghezze dei vettori e gli angoli tra di essi, quindi sono spesso utilizzate per rappresentare trasformazioni lineari che preservano queste proprietà.

Matrice Normale:

Una matrice N è detta "normale" se commuta con la sua trasposta coniugata: $NN^* = N^*N$. Le matrici normali sono importanti perché possono essere diagonalizzate da una matrice unitaria. In altre parole, esiste una matrice unitaria U tale che U^*NU è una matrice diagonale.

Unitarily Diagonalizable (Unitariamente Diagonalizzabile):

Una matrice A è unitariamente diagonalizzabile se può essere diagonalizzata attraverso una matrice unitaria U. Questo significa che esiste una matrice unitaria U tale che U^*AU è una matrice diagonale. Le matrici unitariamente diagonalizzabili sono particolarmente interessanti perché le matrici unitarie preservano le proprietà geometriche importanti, come la norma euclidea e gli angoli tra vettori. Quindi, le matrici unitariamente diagonalizzabili possono semplificare notevolmente l'analisi delle trasformazioni lineari rappresentate da tali matrici.

Lo spettro di una matrice è un concetto importante nell'ambito della teoria delle matrici e dell'analisi lineare. Si riferisce all'insieme dei valori propri (autovalori) della matrice.

Gli autovalori di una matrice sono numeri scalari che, quando moltiplicati per un vettore, danno un vettore parallelo a quello iniziale, in altre parole, non cambiano la sua direzione, ma possono solo scalare il vettore. Lo spettro di una matrice può essere visto come una generalizzazione dei concetti di radici di un polinomio alle matrici.

Teorema Spettrale (Versione Additiva):

Il Teorema Spettrale, nella sua versione additiva, si applica alle matrici simmetriche. Afferma che ogni matrice simmetrica reale può essere diagonalizzata da una matrice di autovettori ortogonali. In altre parole, se A è una matrice simmetrica, allora esiste una matrice ortogonale P e una matrice diagonale D tali che:

$$A = PDP^{-1}$$

Dove D ha gli autovalori di A sulla diagonale. Questo teorema è di fondamentale importanza nella risoluzione di problemi legati a matrici simmetriche, come nella risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Il Teorema Spettrale versione additiva riguarda le matrici simmetriche e stabilisce che ogni matrice simmetrica reale può essere diagonalizzata da una matrice di autovettori ortogonali.

Teorema Spettrale (Versione Moltiplicativa):

Il Teorema Spettrale, nella sua versione moltiplicativa, si applica alle matrici normali, che includono sia le matrici simmetriche che le matrici hermitiane (complesse). Questo teorema generalizza il concetto di diagonalizzabilità per le matrici normali. Afferma che ogni matrice normale A può essere scritta come:

$$A = UDU^*$$

Dove U è una matrice unitaria (o hermitiana nel caso complesso) e D è una matrice diagonale contenente gli autovalori di A sulla diagonale. La matrice unitaria U rappresenta una base di autovettori ortonormali.

COSTRUZIONE DI D:

$$D = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{m_1 \text{ volte}} & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{m_2 \text{ volte}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}^{m_k \text{ volte}} \end{bmatrix}$$

$d_1 = m_1 \quad d_2 = m_2 \quad d_k = m_k$

$n \times n$

$$U = [\underset{\substack{d_1 \\ \| \\ m_1}}{Q_1} \ \underset{\substack{d_2 \\ \| \\ m_2}}{Q_2} \cdots \underset{\substack{d_k \\ \| \\ m_k}}{Q_k}]$$

$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$

COSTRUZIONE DI U:

B_i^* BASE ORTONORMALE di $E_A(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$

Q_i $n \times d_i$ matrice che ha come colonne i vettori di B_i^*

$\boxed{10}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+3}(\alpha - x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha - x)[(-2-x)(2+\alpha-x) - 4i^2] = \\
&= (\alpha - x)(-4 - 2x - 2\alpha - \alpha x + 2x + x^2 + 4) = \\
&= (\alpha - x)(x^2 - \alpha x - 2\alpha).
\end{aligned}
$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}.$$

Dal momento che

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\alpha = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0, \\
&\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\alpha = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = -\sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0, \\
&\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} = 0 \iff \alpha \in \{0, -8\},
\end{aligned}
$$

abbiamo:

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0,-8\}$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ $\lambda_3 = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$	$m_1 = 3$	$1 \leq d_1 \leq 3$
$\mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

Dunque:

- se $\alpha \notin \{0,-8\}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

•• $\mathbf{A}(0)$ sarebbe diagonalizzabile solo se fosse $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_3 = 3$.

N.B.: Se fosse $\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3$ sarebbe $E_{\mathbf{A}(0)}(0) = \mathbb{C}^3$, e quindi $\mathbf{A}(0) = \mathbf{O}$.

Dunque, essendo $\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

••• $\mathbf{A}(-8)$ è diagonalizzabile $\iff$ $d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = m_2 = 2$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boxed{7}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 2 e 3 sono diagonalizzabili oppure no.

Le matrici considerate negli esercizi 2 e 3 sono:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
A	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
B	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

ed abbiamo calcolato:

Ogni autovalore di **A** ha molteplicità algebrica e geometrica uguali (**A** ha autovalori distinti, per cui ogni suo autovalore ha molteplicità algebrica uguale ad 1 e conseguentemente, essendo

$$1 \leq \text{ molteplicità geometrica } \leq \text{ molteplicità algebrica } (= 1)$$

anche molteplicità geometrica uguale ad 1).

Dunque **A** è diagonalizzabile.

La matrice **B** ha un autovalore (l'autovalore $\lambda_2 = -4$) in cui la molteplicità algebrica ($m_2 = 2$) è diversa dalla molteplicità geometrica ($d_2 = 1$).

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R},$$

(a) Si dica per quale/quali $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

(b) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è una triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali

$$\lambda_1 = \alpha \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - 1$$

con molteplicità algebriche

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

(Infatti, il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è: $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) = (\alpha - x)(\alpha - 1 - x)^2$.)

Siano d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2. Da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha - 1) = N(\mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}E_{31}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha = -1:} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad d_2 = 2$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq -1:} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

Riassumendo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \neq -1$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \alpha - 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = \alpha = -1$ $\lambda_2 = \alpha - 1 = -2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, e

$$d_1 = 1 = m_1 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$m_2 = 2 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2)) = 2 \\ &\iff \quad \alpha = -1. \end{aligned}$$

(*b*) Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$,

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) &= E_{\mathbf{A}}(-1) = N(\mathbf{A} - (-\mathbf{I}_3)) = N(\mathbf{A} + \mathbf{I}_3) = \\ &= N\Big(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Big) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + \mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_1(-1)E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{R} \Big\} \text{ e}$$

$$\Big\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ è una sua base.}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) &= E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} - (-2\mathbf{I}_3)) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3) = \\ &= N\Big(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{R} \Big\} \quad \text{e}$$

$$\Big\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \quad \text{è una sua base.}$$

Dunque una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$