

1. **(12 punti)** Una *Macchina di Turing con inserimento* è una macchina di Turing deterministica a nastro singolo che può inserire nuove celle nel nastro. Formalmente la funzione di transizione è definita come

$$\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{L, R, I\}$$

dove L, R indicano gli spostamenti a sinistra e a destra della testina, e I indica l'inserimento di una nuova cella nella posizione corrente della testina. Dopo una operazione di inserimento, la cella inserita contiene il simbolo blank, mentre la cella che si trovava sotto la testina si trova immediatamente a destra della nuova cella.

Dimostra che qualsiasi macchina di Turing con inserimento può essere simulata da una macchina di Turing deterministica a nastro singolo.

2. **(12 punti)** Data una Turing Machine M , definiamo

$$\text{HALTS}(M) = \{w \mid M \text{ termina la computazione su } w\}.$$

Considera il linguaggio

$$F = \{\langle M \rangle \mid \text{HALTS}(M) \text{ è un insieme finito}\}.$$

Dimostra che F è indecidibile.

3. **(12 punti)** Una 3-colorazione di un grafo non orientato G è una funzione che assegna a ciascun vertice di G un “colore” preso dall'insieme $\{1, 2, 3\}$, in modo tale che per qualsiasi arco $\{u, v\}$ i colori associati ai vertici u e v sono diversi. Una 3-colorazione è *bilanciata* se ogni colore è associato ad esattamente $1/3$ dei vertici del grafo.

BALANCED-3-COLOR è il problema di trovare una 3-colorazione bilanciata:

$$\text{BALANCED-3-COLOR} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ è un grafo che ammette una 3-colorazione bilanciata}\}$$

- (a) Dimostra che BALANCED-3-COLOR è un problema NP
- (b) Dimostra che BALANCED-3-COLOR è NP-hard, usando 3-COLOR come problema NP-hard di riferimento.