

# ESERCIZIO TIPO 16

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \text{ è un numero reale } \mathbf{non\ negativo}.$$

- (a) Per quali  $\alpha$  **reali non negativi** la matrice  $\mathbf{A}(\alpha)$  è diagonalizzabile ?
- (b) Per quali  $\alpha$  **reali non negativi** la matrice  $\mathbf{A}(\alpha)$  è unitariamente diagonalizzabile ?
- (c) Sia  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$  la matrice che si ottiene ponendo  $\alpha = 1$ . Si trovi una diagonalizzazione unitaria  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$  per  $\mathbf{A}$ .
- (d) Sia  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$  la matrice che si ottiene ponendo  $\alpha = 1$ . Si scriva  $\mathbf{A}$  nella forma  $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$ , con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  autovalori di  $\mathbf{A}$ , e  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  matrici di proiezione su  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$  ed  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$  rispettivamente.

(a) Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di  $\mathbf{A}(\alpha)$  e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di  $\mathbf{A}$  è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \text{Det} \begin{pmatrix} -x & -2i\alpha & 0 \\ 2i & -x & 0 \\ 3i & 0 & -2-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(-2-x)\text{Det} \begin{pmatrix} -x & -2i\alpha \\ 2i & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-2-x)[(-x)^2 - (-2i\alpha) \cdot 2i] = \\ &= (-2-x)(x^2 + 4i^2\alpha) = \\ &= (-2-x)(x^2 - 4\alpha) = \\ &= (-2-x)(-2\sqrt{\alpha} - x)(2\sqrt{\alpha} - x). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di  $\mathbf{A}(\alpha)$  sono:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2\sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -2\sqrt{\alpha}.$$

Dal momento che  $\alpha$  è un numero reale non negativo, allora

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 1,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, 1\}$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2\sqrt{\alpha}$ $\lambda_3 = -2\sqrt{\alpha}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{A}(1)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Quindi se  $\alpha \notin \{0, 1\}$  allora  $\mathbf{A}(\alpha)$  è diagonalizzabile, inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2,$$

$$\mathbf{A}(1) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = m_1 = 2.$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0))) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\
&= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) \\
d_1 &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3)) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = \\
&= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3)
\end{aligned}$$

Da una E.G. su  $\mathbf{A}(0)$ :

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2})E_{23}E_1(-\frac{1}{2}i)E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui  $\text{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$ , e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque  $\mathbf{A}(0)$  non è diagonalizzabile.

Da una E.G. su  $\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

per cui  $\text{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = 1$ , e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = 3 - 1 = 2.$$

Dunque  $\mathbf{A}(1)$  è diagonalizzabile.

In conclusione (essendo  $\alpha$  reale non negativo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \iff \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha > 0.$$

(b) Abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} &\iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale} \\ &\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).\end{aligned}$$

Calcoliamo  $\mathbf{A}(\alpha)^H$  tenendo conto che  $\bar{\alpha} = \alpha$ , essendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} 0 & \bar{2i} & 0 \\ -2i\bar{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\bar{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

per cui, essendo  $\alpha$  un numero reale non negativo,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = 1.$$

(c) Abbiamo visto che  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  ha due autovalori:

$$\lambda_1 = -2 \text{ con molteplicità } m_1 = d_1 = 2 \text{ e}$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ con molteplicità } m_2 = d_2 = 1.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di  $\mathbf{A}$ .

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = E_{\mathbf{A}(1)}(-2) = N(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3),$$

e poichè abbiamo visto che  $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  è una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3$ , allora

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi  $\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$ .

**N.B.:** In questo caso non occorre applicare l'algoritmo di G.S. a  $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ :  $\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2 = 0$ , per cui

$$\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\} \text{ è già una base ortogonale di } E_{\mathbf{A}}(-2)$$

Per ottenere una base ortonormale di  $E_{\mathbf{A}}(-2)$ , “normalizziamo”  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .

$$\|\mathbf{v}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1} = \sqrt{\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}_2^H \mathbf{v}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$ .

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = E_{\mathbf{A}(1)}(2) = N(\mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su  $\mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I}_3$  :

$$\mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi  $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$ .

**N.B.:** Poichè ha un unico elemento,  $\{\mathbf{w}_1\}$  è già una base ortogonale di  $E_{\mathbf{A}}(2)$ . Per ottenere una base ortonormale di  $E_{\mathbf{A}}(2)$ , “normalizziamo”  $\mathbf{w}_1$ .

$$\|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{w}_1^H \mathbf{w}_1} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$ .

Dunque se  $\alpha = 1$ , una diagonalizzazione unitaria di  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$  è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} & \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} & \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Abbiamo visto che  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  ha due autovalori:

$\lambda_1 = -2$  con molteplicità  $m_1 = d_1 = 2$  e

$\lambda_2 = 2$  con molteplicità  $m_2 = d_2 = 1$ .

Dunque

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 = -2\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2$$

dove  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  sono le matrici di proiezione su

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) \quad \text{ed} \quad E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$$

rispettivamente.

Per  $i = 1, 2$  si ha:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^H \quad \text{dove}$$

$\mathbf{Q}_i$  = la matrice che ha per colonne gli elementi di una base ortonormale di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$ .

Dal momento che  $d_2 = 1$ , conviene calcolare  $\mathbf{P}_2$  ( $\mathbf{Q}_2$  ha un'unica colonna !) e ricavare  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_2$  ( $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)^\perp$  **perchè  $\mathbf{A}$  è unitariamente diagonalizzabile ed ha esattamente due autovalori distinti:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .**

Abbiamo visto che

$$\left\{ \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$ .

$$\text{Dunque } \mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ per cui}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w}_1^H}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$