A. Definizione di serie

Una serie è la somma dei termini di una successione. Formalmente, data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la serie associata a tale successione è l'espressione formale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ che rappresenta la somma di tutti i termini della successione.

B. Ridotte di ordine 3

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n}$ $s_3 = \frac{(-2)^1}{1} + \frac{(-2)^2}{2} + \frac{(-2)^3}{3} = -2 + \frac{4}{2} + \frac{-8}{3} = -2 + 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$ Notiamo che $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{n+1}$
   $s_3 = \frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$
3. $\sum_{n=4}^{+\infty} \log(n-3)$
   $s_3 = \log(4-3) + \log(5-3) + \log(6-3) = \log(1) + \log(2) + \log(3) = 0 + \log(2) + \log(3) = \log($

C. Serie geometriche

4. $\sum_{n=0}^{+\infty}(4-\sqrt{15})^n$ Questa è una serie geometrica con primo termine $a = 1$ e ragione $r = 4 - \sqrt{15}$. Calcoliamo $4 - \sqrt{15} \approx 4 - 3,87 \approx 0,13$ Poiché $|r| = |4 - \sqrt{15}| \approx 0,13 < 1$, la serie converge.

   La somma è $S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(4-\sqrt{15})} = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{15-9} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}$ Questa è una serie geometrica con primo termine $a = \frac{(-1)^1}{2^{1+4}} = -\frac{1}{32}$ e ragione $r = -\frac{1}{2}$.

   Poiché $|r| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$, la serie converge.

   La somma è $S = \frac{a}{1-r} = \frac{-\frac{1}{32}}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{1}{32}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{32} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{48}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^{n+3}}{6^n}$ Riscriviamo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{18^n \cdot 18^3}{6^n} = 18^3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{18}{6})^n = 18^3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$

   Questa è una serie geometrica con primo termine $a = 3$ e ragione $r = 3$.

   Poiché $|r| = |3| = 3 > 1$, la serie diverge.

D. Serie telescopiche

Una serie telescopica è una serie in cui i termini si annullano a coppie quando si calcolano le somme parziali, lasciando solo un numero finito di termini. La serie telescopica più famosa è $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, che converge a 1. Infatti, scrivendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si ottiene una somma telescopica.

E. Studio delle serie telescopiche

7. $\sum_{n=0}^{+\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$ Questa è una serie telescopica:
$s_k = \sum_{n=0}^{k}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}] = \sqrt{k+1}-\sqrt{0} = \sqrt{k+1}$

   Quando $k \to \infty$, $s_k \to \infty$, quindi la serie diverge.
8. $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6})$ Questa è una serie telescopica: $s_k = \sum_{n=0}^{k}[\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}] = \frac{1}{5}-\frac{1}{k+6}$

   Quando $k \to \infty$, $s_k \to \frac{1}{5}$, quindi la serie converge a $\frac{1}{5}$.
9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ Riscriviamo: $\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(n+1)-\ln(n)$

   Quindi la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty}[\ln(n+1)-\ln(n)]$, che è telescopica:
$s_k = \sum_{n=1}^{k}[\ln(n+1)-\ln(n)] = \ln(k+1)-\ln(1) = \ln(k+1)$

   Quando $k \to \infty$, $s_k \to \infty$, quindi la serie diverge.

F. Serie armonica

La serie armonica è la somma infinita dei reciproci dei numeri naturali positivi: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

Questa serie diverge, come si può dimostrare utilizzando il criterio integrale di Cauchy o raggruppando i termini per mostrare che la somma è maggiore di un valore infinitamente grande. In particolare, si può dimostrare che:
$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8})+... > 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+... = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$

Che è una somma infinita di termini $\frac{1}{2}$, la quale diverge.