Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, diagramma, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, lettera, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, algebra

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, bianco

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, ricevuta, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, design

Descrizione generata automaticamente

Per i tipi di base, distinguiamo:

* Le basi ortogonali, definite come tali se e solo se i vettori che le compongono sono a due a due ortogonali rispetto al prodotto scalare

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamente

* Le basi ortonormali, cioè delle basi ortogonali in cui tutti i vettori hanno norma unitaria rispetto ad un fissato prodotto scalare

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Normalizzare in questo contesto significa trasformare un insieme di vettori in un insieme ortonormale, cioè un insieme di vettori che sono sia ortogonali tra loro che di norma unitaria (lunghezza 1).

Quando normalizzi un insieme di vettori, stai dividendo ciascun vettore per la sua norma (lunghezza) in modo che diventi un vettore di lunghezza 1. In altre parole, stai proiettando ciascun vettore nell'insieme sulla sfera unitaria centrata nell'origine.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Un "insieme ortonormale" è un insieme di vettori in uno spazio vettoriale in cui ogni vettore è di norma unitaria (lunghezza 1) e tutti i vettori sono mutuamente perpendicolari (ortogonali) tra loro. In altre parole, un insieme ortonormale è un insieme di vettori che soddisfa entrambe le condizioni di ortogonalità e normalizzazione.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Una base ortogonale (rispettivamente ortonormale) è una base che è anche un insieme ortogonale.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, informazione

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Dato un insieme di generatori di , possiamo costruire come insieme di generatori ortogonale di attraverso l’algoritmo di Gram-Schmidt.

Questo è un metodo utilizzato per trasformare una base lineare qualsiasi in una base ortogonale o ortonormale. Questo algoritmo è particolarmente utile nell'ambito dell'algebra lineare e ha applicazioni in diverse aree, come la risoluzione di sistemi lineari, la diagonalizzazione di matrici e altro ancora.

Al fine di costruire una base ortonormale di , si normalizzano i vettori di una base ortogonale.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, bianco

Descrizione generata automaticamente

Vediamo un semplice esempio applicativo considerando la seguente base:

Immagine che contiene testo, schermata, diagramma, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, diagramma, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Consideriamo ad esempio:

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, calligrafia

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, tipografia

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, diagramma, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata

Descrizione generata automaticamente

Premessa:

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, design

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, design

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, calligrafia

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, design

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, design

Descrizione generata automaticamente

Introduciamo altri concetti chiave:

* Un autovalore di una matrice è un numero scalare che rappresenta come un'operazione lineare (rappresentata dalla matrice) allunga o comprime un vettore.
* Un autovettore è il vettore associato a un determinato autovalore.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

In termini più semplici, gli autovalori e gli autovettori forniscono informazioni su come una trasformazione lineare cambia o scala i vettori. Gli autovalori possono essere reali o complessi, e una matrice può avere più di un autovalore e più di un autovettore associato ad ogni autovalore. Gli autovettori associati allo stesso autovalore possono essere linearmente indipendenti, costituendo una base per lo spazio degli autovettori.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Introduciamo due precisazioni:

1. Autovalori di Matrici Triangolari

Una matrice triangolare è una matrice in cui tutti gli elementi al di sopra o al di sotto della diagonale principale sono nulli. Le matrici triangolari possono essere superiori (tutti gli elementi sotto la diagonale sono nulli) o inferiori (tutti gli elementi sopra la diagonale sono nulli).

Per le matrici triangolari, gli autovalori corrispondono agli elementi diagonali. In altre parole, gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale. Questo perché gli autovettori associati a ciascun autovalore sono gli autovettori che hanno componenti non nulle solo nella colonna corrispondente all'autovalore (cioè, gli autovettori associati agli elementi diagonali). Poiché le matrici triangolari non cambiano la struttura della loro diagonale quando vengono moltiplicate per un vettore, è intuitivo che gli autovalori siano direttamente legati agli elementi diagonalmente.

1. Autovalori di Matrici Diagonali

Una matrice diagonale è una matrice triangolare sia superiore che inferiore, in cui tutti gli elementi al di sopra e al di sotto della diagonale principale sono nulli. In altre parole, tutti gli elementi non diagonali sono nulli.

Per le matrici diagonali, gli autovalori corrispondono direttamente agli elementi diagonali. Gli autovalori di una matrice diagonale sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale. Inoltre, gli autovettori associati agli autovalori sono gli autovettori che hanno componenti non nulle solo nella posizione corrispondente all'autovalore.

Nelle matrici diagonali, gli autovettori non cambiano direzione quando vengono moltiplicati per la matrice stessa, poiché ciascun componente dell'autovettore è scalato solo per l'autovalore corrispondente. Questo rende gli autovalori e gli autovettori delle matrici diagonali particolarmente semplici da calcolare e comprendere.

In sintesi, sia per le matrici triangolari che per le matrici diagonali, gli autovalori sono direttamente associati agli elementi diagonali, semplificando il calcolo e l'interpretazione delle proprietà degli autovalori e degli autovettori.

A proposito di autovalori, definiamo ora:

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Le molteplicità algebriche e geometriche possono essere uguali o diverse per un autovalore. Ecco alcuni scenari possibili:

1. Molteplicità Algebrica = Molteplicità Geometrica
   1. In questo caso, ci sono abbastanza autovettori linearmente indipendenti per riempire tutto lo spazio degli autovettori associati all'autovalore.
2. Molteplicità Algebrica > Molteplicità Geometrica
   1. Questo indica che l'autovalore ha più autovettori linearmente indipendenti di quanti ne siano necessari per formare lo spazio degli autovettori associati.
3. Molteplicità Algebrica < Molteplicità Geometrica
   1. Questo indica che ci sono meno autovettori linearmente indipendenti di quanti ne sarebbero necessari.

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, lettera

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, numero

Descrizione generata automaticamente

Date due matrici e , abbiamo che sono simili quando esiste non singolare (invertibile) tale che

Oppure anche:

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Possiamo definire inoltre la matrice diagonalizzabile, che è una matrice quadrata simile a una matrice diagonale. In altri termini una matrice A è diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile P tale che PD=AP, dove D è una matrice diagonale dello stesso ordine di A.

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamente

oppure anche:

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Il teorema di diagonalizzabilità stabilisce le condizioni sotto le quali una matrice può essere diagonalizzata. In particolare, il teorema afferma che una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se ha autovettori linearmente indipendenti, dove è la dimensione della matrice.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, algebra

Descrizione generata automaticamente

Prima di introdurre le matrici diagonalizzabili, occorre necessariamente parlare di:

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Lo spettro di una matrice è un concetto importante nell'ambito della teoria delle matrici e dell'analisi lineare. Si riferisce all'insieme dei valori propri (autovalori) della matrice.

Gli autovalori di una matrice sono numeri scalari che, quando moltiplicati per un vettore, danno un vettore parallelo a quello iniziale, in altre parole, non cambiano la sua direzione, ma possono solo scalare il vettore. Lo spettro di una matrice può essere visto come una generalizzazione dei concetti di radici di un polinomio alle matrici.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Il Teorema Spettrale versione additiva riguarda le matrici simmetriche e stabilisce che ogni matrice simmetrica reale può essere diagonalizzata da una matrice di autovettori ortogonali.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, numero, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, diagramma

Descrizione generata automaticamente