Esercizi sul simplesso

1) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard ($min\left\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\right\}$).

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\min & -3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & & & & & & & \\
s.t. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & & & = & 5 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Aggiungiamo le variabili di slack, in questo caso x_4, x_5, x_6 per rendere le disuguaglianze delle uguaglianze. Ricordiamo inoltre che z diventa $-z$. Si ricordi inoltre di definire i domini di esistenza anche per le variabili di slack. Immaginiamo, a questo punto, la base di partenza sia proprio composta da $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e organizziamo i dati in forma di tableau.
Quando questo accade, trascriviamo le righe e il valore iniziale della variabile z è -1.
Siamo in forma canonica in quanto ci sono le colonne della matrice identità, sia vicine che volendo lontane

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	-3	-1	-3	0	0	0	-1	0
x_4	$\boxed{2}$	1	1	1	0	0	0	2
x_5	1	2	3	0	1	0	0	5
x_6	2	2	1	0	0	1	0	6

Mi pongo la serie di domande:
- è ammissibile? Sì → tutti i $\bar{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? No → Tutti i coefficienti di costo ridotto sono ≤ 0

Dobbiamo cambiare base e dobbiamo scegliere la variabile che entra nella nuova base.
Seguiamo la regola anticiclo di Bland, che mi dice di selezionare tra le variabili di costo ridotto, quella con valore minore; se ce ne sono diverse, scelgo la prima secondo l'ordine.
Quindi, in questo caso scelgo x_1 come variabile entrante in base.

Come in altri casi, per decidere la variabile uscente, prendo quella che ha rapporto minimo tra la posizione della variabile scelta come pivot e le variabili $\bar{b_\iota}$.

$$\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{2}{2} = 1$$ Tra le variabili, esce x_4

Ora, riportiamo il tableau in forma canonica ed eseguiamo le successive operazioni di pivoting:

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2,\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2,\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1,\ R_0 \leftarrow R_0 + 3/2R_1.$

A questo punto, abbiamo come base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot rispetto all'elemento in prima riga e prima colonna (dato che abbiamo fatto uscire x_4 è l'unico elemento logicamente utile su cui operare in questo senso.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	0	1/2	−3/2	3/2	0	0	−1	3
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0	1
x_5	0	3/2	$\boxed{5/2}$	−1/2	1	0	0	4
x_6	0	1	0	−1	0	1	0	4

- F.C.? Sì → Appaiono le colonne della matrice identità
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Non lo so → Esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0 (condizione sufficiente di ottimalità; se fossero <u>tutti</u> uguali a zero, allora sarebbe ottima)
- è illimitata? Non lo so → Vado a vedere se in corrispondenza di colonne con costi ridotti strettamente minori di 0 abbiamo sotto una colonna tutta negativa → Esiste almeno un valore strettamente positivo in corrispondenza di qualche valore negativo e quindi non possiamo concludere con certezza
- chi entra in base? → Una qualsiasi variabile con costo ridotto negativo → x_3
- chi esce dalla base? Calcoliamo l'argomento del minimo tra i rapporti di $\bar{b}$ e gli $\overline{a_{\iota h}}$ per righe rispetto alla colonna dell'elemento del pivot → x_5

$$\min\left\{\frac{1}{1/2}, \frac{4}{5/2}, \cancel{\frac{4}{0}}\right\} = \frac{4}{5/2} = \frac{8}{5}, \text{ che corrisponde alla variabile } x_5 \text{ e dunque } x_5 \text{ esce di base.}$$

Quindi ora la nuova base è $B = \{x_1, x_3, x_6\}$. Anche qui, apparirebbe un elemento simile alla matrice identità ma ora dobbiamo far entrare x_3 in base cambiando le righe (e quindi non avremmo più le colonne sparse per la matrice identità, come si vede per $[x_1, x_1]$, $[x_5, x_5]$, $[x_6, x_6]$
Abbiamo vari elementi, ma scegliamo l'elemento in riga 2 e colonna 3, come fatto dal prof, anche se in effetti potremmo scegliere quello della colonna precedente o della colonna successiva.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2 \cdot 2/5$, $R_1 \leftarrow R_1 - R_2/5$, $R_0 \leftarrow R_0 + 3/5 R_2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	0	7/5	0	6/5	3/5	0	−1	27/5
x_1	1	1/5	0	3/5	−1/5	0	0	1/5
x_3	0	3/5	1	−1/5	2/5	0	0	8/5
x_6	0	1	0	−1	0	1	0	4

- F.C.? Sì → Appaiono le colonne della matrice identità
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Sì → Tutti i costi ridotti sono > 0

$$z_{MAX} = -z_{MIN} = 27/5 \;\; x_1 = 1/5 \;\; x_2 = 0 \;\; x_3 = 8/5 \;\; x_4 = 0$$
$$x_5 = 0 \;\; x_6 = 4$$

Con x_4, x_5 saturi (in quanto $= 0$)
Con x_6 lasco (in quanto > 0)

Esercizio 10 Dispense Prof

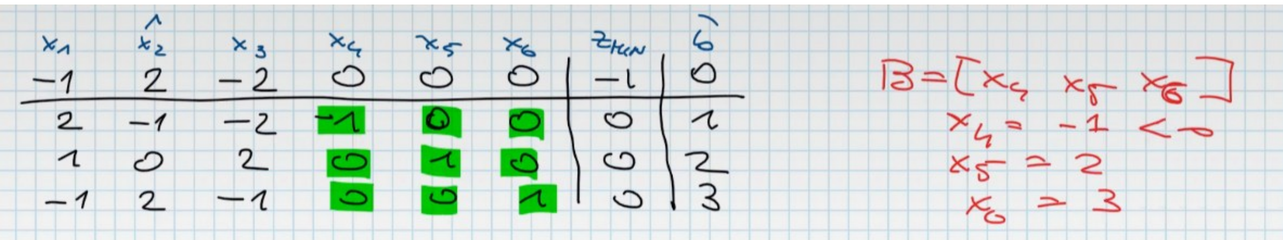
Risolvere il seguente problema di programmazione lineare partendo dalla base $\{x_4, x_5, x_6\}$ oppure dalla base $\{x_1, x_5, x_6\}$.

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 1 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & & & x_3 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Riscriviamo il problema in forma standard. Siccome $x_2 \leq 0$, si introduce una nuova variabile $\widehat{x_2} = -x_2$ con $\widehat{x_2} > 0$. Attenzione che si inverte il segno della f.o. in quanto si passa da *max* a *min.*

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & -x_1 & + & 2\hat{x}_2 & - & 2x_3 & & & & & & & & \\
s.t. & 2x_1 & - & \hat{x}_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & -x_1 & + & 2\hat{x}_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
 & x_1 & , & \hat{x}_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

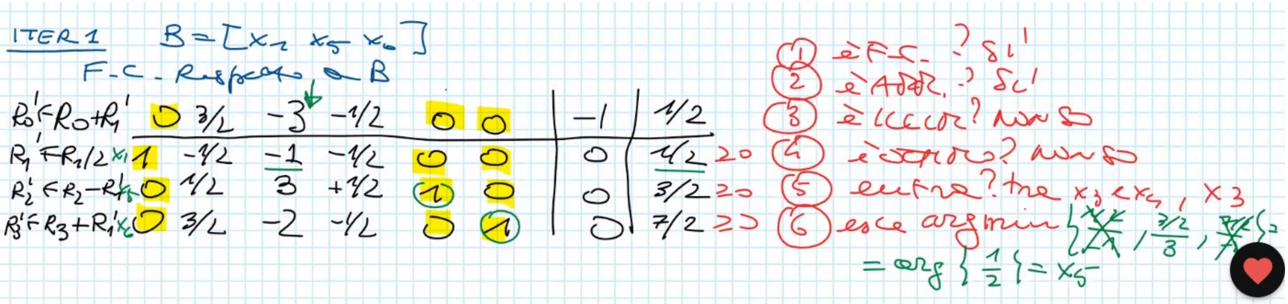
Mettiamo sul tableau per vedere cosa succede, scegliendo come base tra le due $[x_4\ x_5\ x_6]$, che però risulta non ammissibile avendo x_4 negativo.



Ecco perché il prof dà varie basi di partenza, dato non tutte possono essere ammissibili; infatti, qui si parte da $B = [x_1\ x_5\ x_6]$, essendo l'altra non ammissibile. Segnalo le operazioni di pivoting:

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_1/2$.

Partiamo dalla prima iterazione, mettendo in forma canonica rispetto a B:

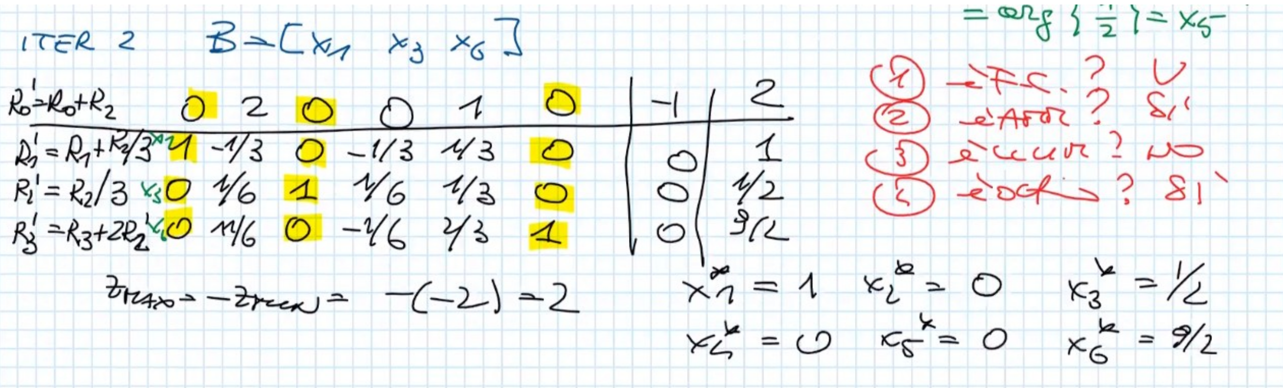


1) F.C? → Sì, ci sono le colonne della matrice identità
2) Ammissibile? → Sì, le variabili della colonna di $\bar{b}$ sono tutte ≥ 0
3) Illimitata? Non so → Esiste sempre almeno un coefficiente > 0 per i costi ridotti in corrispondenza di costi ridotti negativi e non posso concludere
4) Ottimo? Non so → Esiste qualche costo ridotto < 0 e non posso concludere
5) Entra? → Decido tra le variabili di costo ridotto negativo e decido tra x_3 e x_4 e scelgo x_3 (il motivo è spiegato formalmente dopo, ma accontentiamoci qui di dire $x_3 < x_4$)

6) Esce? Decido sulla base del rapporto minimo tra $\overline{b_i}$ e x_i, dove x_i è la posizione su cui si è fatti pivoting, quindi x_3. Facendo i rapporti, il minimo è x_5 con gli altri due che sono negativi e sono scartati.

Andiamo all'iterazione 2, considerando come pivot l'elemento(3) di seconda riga e terza colonna, eseguendo le operazioni di pivoting che seguono:

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/3$, $R_1 \leftarrow R_1 + R_2/3$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2/3R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.



1) È in forma canonica → Sì, ci sono le colonne della matrice identità
2) È ammissibile? Sì, le variabili della colonna di $\bar{b}$ sono tutte ≥ 0
3) È illimitato → No → Non ci sono colonne con costi ridotti < 0, pertanto non mi pongo il problema se nella colonna sotto ci siano coefficienti negativi
4) È ottima? Sì → Tutti i costi ridotti sono >= 0

In merito ai vincoli:

- x_1 all'ottimo vale 1 (colonna di $\overline{\mathrm{B}}$)
- x_2 all'ottimo vale 0 (è fuori base)
- x_3 all'ottimo vale $1/2$ (colonna di $\overline{\mathrm{B}}$)
- x_4 all'ottimo vale 0 (è fuori base)
- x_5 all'ottimo vale 0 (è fuori base)
- x_6 all'ottimo è $9/2$ (colonna di $\overline{\mathrm{B}}$)

Leggendolo bene;

- $x_4 = 0$ è vincolo saturo, poiché ha valore zero
- $x_5 = 0$ è vincolo saturo poiché ha valore zero
- $x_6 = \frac{9}{2}$ è vincolo lasco, poiché ha valore maggiore di zero

Esistono metodi come quello delle *due fasi*, in cui si scrive un problema artificiale in cui la f.o. è somma di queste variabili artificiali.

- Se il valore della funzione obiettivo è > 0, si ha un problema inammissibile
- Se il valore della funzione obiettivo, allora $y = 0$, metto tutte le y fuori base e ottengo x_B come soluzione del problema di partenza

In tal caso, risolvo il problema a partire dalla base ottenuta.

Simulazione Esame 2018-2019

2. Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso, a partire dalla base relativa alle variabili x_1, x_2, x_3 e applicando la regola di Bland:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & +5x_2 & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & \leq & 5 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \\ & & & x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

Passo alla forma standard:

1. Funzione obiettivo di minimo:
   $\min -x_1 - 5x_2$
2. vincoli di uguaglianza:
$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & & & -x_5 & = & -1 \\ & x_2 & +2x_3 & & & = & -2 \end{array}$$
3. variabili non negative: effettuo la sostituzione $\hat{x}_2 = -x_2$, $\hat{x}_2 \geq 0$
$$\begin{array}{llllllll} \min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\ & x_1 & -\hat{x}_2 & & & -x_5 & = & -1 \\ & & -\hat{x}_2 & +2x_3 & & & = & -2 \\ & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$
4. termini noti non negativi
$$\begin{array}{llllllll} \min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\ & -x_1 & +\hat{x}_2 & & & +x_5 & = & +1 \\ & & +\hat{x}_2 & -2x_3 & & & = & +2 \\ & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Imposto il tableau del simplesso:

Attenzione che:
- la funzione obiettivo è di minimo e si cambia di segno
- Data $\widehat{x_2}$, si va a cambiare segno a x_2 quando la si introduce poi, avendo i termini noti non negativi, si va a cambiare segno alle variabili di slack (e, se ci fossero altre variabili oltre a quelle di slack, si cambia segno anche a quelle)

Per il pivot, siccome non siamo in forma canonica, scelgo di volta in volta un elemento utile per le operazioni di Gauss-Jordan. Faccio entrare in base x_1:

	x_1 ↓	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	-1	5	0	0	0	0
?	$\boxed{1}$	0	0	1	0	5
?	-1	1	0	0	1	1
?	0	1	-2	0	0	2

	x_1	$\hat{x}_2$ ↓	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	5	0	1	0	5	$R_0' \leftarrow R_0 + R_1'$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
?	0	$\boxed{1}$	0	1	1	6	$R_2' \leftarrow R_2 + R_1'$
?	0	1	-2	0	0	2	$R_3' \leftarrow R_3$

Faccio poi entrare in base $\widehat{x_2}$ (ho evidenziato in rosso gli elementi di pivoting):

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3 ↓	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R_0' \leftarrow R_0 - 5R_2'$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R_2' \leftarrow R_2$
?	0	0	$\boxed{-2}$	-1	-1	-4	$R_3' \leftarrow R_3 - R_2'$

Si fa poi entrare in base x_3 facendo pivot sull'elemento in rosso, tale che otteniamo finalmente la forma canonica.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R_0' \leftarrow R_0$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R_2' \leftarrow R_2$
$\leftarrow x_3$	0	0	1	$\boxed{1/2}$	$1/2$	2	$R_3' \leftarrow -1/2R_3$

La base si compone sulle colonne dove appaiono i coefficienti della matrice identità, quindi $B = \{x_1, \widehat{x_2}, x_3\}$
Si nota che è ammissibile (avendo tutte le colonne di $\overline{b_\iota} > 0$). Non sappiamo se sia ottima (avendo costi ridotti negativi) ma non è illimitata (infatti, tutti i coefficienti sono positivi sotto colonne con costi ridotti negativi).
Partiamo con il simplesso e decidiamo la variabile che entra in base. Per la regola di Bland, scegliamo la prima variabile in ordine tra quelle con coefficienti di costo ridotto negativo (quindi, tra x_4, x_5 scelgo x_4).

La variabile che esce dalla base si capisce rispetto al rapporto $\frac{\overline{b_\iota}}{\overline{a_\iota}}$ nella posizione della variabile che entra in base, quindi x_4. Esce dalla base $\arg\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{2}{1/2}\right\} = \arg\{4\} = x_3$

Per $B = \{x_1, \overline{x_2}, x_4\}$ scegliamo come elemento di pivoting $\frac{1}{2}$ come visto nel tableau precedente.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	$\downarrow$ x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	8	0	-1	-9	$R_0' \leftarrow R_0 + 4R_3'$
x_1	1	0	-2	0	-1	1	$R_1' \leftarrow R_1 - R_3'$
$\hat{x}_2$	0	1	-2	0	0	2	$R_2' \leftarrow R_2 - R_3'$
$\leftarrow x_4$	0	0	2	1	$\boxed{1}$	4	$R_3' \leftarrow 2R_3$

- F.C.? Sì
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Non lo so → Esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0 (condizione sufficiente di ottimalità; se fossero <u>tutti</u> uguali a zero, allora sarebbe ottima)
- è illimitata? Non lo so → Vado a vedere se in corrispondenza di colonne con costi ridotti strettamente minori di 0 abbiamo sotto una colonna tutta negativa → Esiste almeno un valore strettamente positivo in corrispondenza di qualche valore negativo e quindi non possiamo concludere con certezza
- chi entra in base? → x_5
- chi esce dalla base → $\arg\min\left\{X, X, \frac{4}{1}\right\} = \arg\{4\} = x_4$

$B = \{x_1, \widehat{x_2}, x_5\}$ ed eseguo il pivoting rispetto all'elemento riquadrato poco fa.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	10	1	0	-5	$R_0' \leftarrow R_0 + R_3'$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1 + R_3'$
$\hat{x}_2$	0	1	-2	0	0	2	$R_2' \leftarrow R_2$
x_5	0	0	2	1	1	4	$R_3' \leftarrow R_3$

- F.C.? Sì
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Si → Non esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0

La soluzione ottima del problema è $z_{MIN} = -z_{MAX} = -(-5) = 5$
Inoltre, abbiamo $x_1 = 5, \hat{x}_2 = 2, x_5 = 4, x_3 = x_4 = 0$

con vincoli x_4 saturo in quanto ha valore zero e x_5 lasco, per valore > 0 (si ricordi che lasco e saturo si va a dire sulle variabili di slack aggiunte).