$X \to (\Omega, F, P)$

① $X \sim Unif\,[4,6]$;

$$f(x) = \frac{1}{6-4} \cdot \mathbb{1}_{(4,6)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{(4,6)}$$

- ASSOL. CONTINUA

$$\frac{1}{2}\int_4^6 x = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_4^6$$

$$= \frac{1}{2}\left[36 - 16\right] = 5 \quad = 5[x]$$

$$\frac{1}{2}\int_4^6 x^2 = \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]\right\}_4^6 \quad \frac{76}{3}$$

$$\mathrm{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{1}{3}$$

③ $X = Y^2$ con Y NORMALE STANDARD

CONDIZIONI STANDARD $\rightsquigarrow$ $E[Y] = 0$

$\mathrm{var}(Y) = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \cancel{1}, \; x \in \mathbb{R}$$

ASSOL. CONTINUA

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-x^2/2}}_{g'(x)} \, dx \Rightarrow E[X].$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + c$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{x^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-x^2/2}} \right.$$

$$\sqrt{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cdot \cancel{\sqrt{2\pi}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty} (x^2)^2 \cdot e^{-x/2} \, dx \Rightarrow E[X^2]$$

$$E[X^2] = E[Y^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad | \text{ integrazione per parti}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{\left[x^3 \cdot \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \right]_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \cdot \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx \right)$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1 \text{ da sopra}}$$

$$= 3$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{var}(X) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}.$$

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono):

(i) X è uniforme su $[4, 6]$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq (x^3/27) \cdot \mathbf{1}_{(0,3)}(x) + \mathbf{1}_{[3,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X = Y^2$ per una variabile aleatoria Y normale standard.

Esercizio 2. Sia $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con comune distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$M_n(\omega) \doteq \max_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Indichiamo con F la funzione di ripartizione comune delle X_i (cioè la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale di parametro λ). Definiamo inoltre la funzione $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$G(x) \doteq \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si verifichi che G è una funzione di ripartizione.

① CRESCENTE → $f'(x) > 0$

② $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

$$G(x) = e^{-e^{-x}}$$

$$G'(x)\ e^{-e^{-x}} \cdot e^{-x} > 0$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-e^{-x}} = e^{-0} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-\infty} = 0$$

(ii) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni $x \in \mathbb{R}$,

P

$$\mathbf{P}(\lambda M_n - \log(n) \le x) = F\left(\frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)^n.$$

F. ESPONENZIALE

RIPARTIZIONE → CONTINUA

$$P(\lambda M_n - \log \le x) = P\left(M_n \le \frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)$$

$M_n \sim$ INSIEME DI V. I.I.D

PRODOTTO

$$M_n \sim \times \; P\left(X_1 \le \frac{x + \log(n)}{\lambda}, \dots\right.$$

$$(\dots\dots) \;\cdot\; \left. X_n \le \frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)$$

PRODOTTO

$$\left[\prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \le \frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)\right]$$

I.I.D. CON PARAMETRO λ

→

$$\left[P\left(X_i \le \frac{x + \log(n)}{\lambda}\right)\right]^n$$

$$F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right) \Rightarrow \text{RIPARTIZIONE}$$

$$\rightsquigarrow \quad P(\lambda M_n - \log(n) \leq x) = \left(F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)\right)^n.$$

(iii) Si mostri che

INDICATRICE $\mathbb{1}$

$$F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)^n = \left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{[-\log(n),\infty)}(x),$$

e si concluda che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\lambda M_n - \log(n) \leq x) = G(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(1 - e^{-x} \cdot (n^{-1})\right)$$

$$e^{-\log(n)}$$

REGOLA CAMBIO BASE

$$\left(1 - \frac{1}{n} \cdot e^{-x}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{[-\log(n), \infty)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$$

$$1$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-e^{-x}}$$

F. DIRID = 1

$$\underbrace{\left(e^{-n} \cdot e^{-x}\right)^{n}}_{} \underset{e}{\simeq} 1$$

$$\left(e^{-n}\right)^{n} = 1$$

$$e^{-\log(n)} \rightsquigarrow \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}}_{e} \cdot \left(e^{-x}\right)^{n}$$

$$\underbrace{\left[e^{n} \cdot e^{-xn}\right] \cdot \mathbb{1}_{[-\log(n,\infty)]}(x)}_{1}$$

funzione di ripartizione $Exp(\lambda)$

(iii) Ora $F(x) = (1-e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\rightsquigarrow \left(F\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)\right)^n = \left(1 - e^{-x} \cdot e^{-\log(n)}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(\frac{x+\log(n)}{\lambda}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n} \cdot e^{-x}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{[-\log(n),\infty)}(x).$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} e^{-e^{-x}} = G(x)$$

poiché $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

e $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[-\log(n),\infty)}(x) \to 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ //

Esercizio 4. Siano $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Si trovi una variabile aleatoria reale $X = X_{\mu,\sigma}$ con media $\mu \doteq \mathbf{E}[X]$ e varianza $\sigma^2 \doteq \mathbf{E}\left[(X-\mu)^2\right]$ finite tale che

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = 1.$$

[Suggerimento: Trattare prima il caso $\mu = 0$, $\sigma = 1$; provare con una distribuzione discreta concentrata su al massimo quattro valori diversi.]

$\mu = 0, \ \sigma = 1$

$E\left[\frac{X - 0}{1}\right]$

$= E[X] \Rightarrow 1$

$X \sim$ V.A. REALE

$E[X] = 1, \ E[X^2] = 1$

$, \ E[X^3] = 1$

$\mu = E[X] = 1$

$\sigma = E[(X-\mu)^2]$

$X \doteq \sigma \tilde{X} + \mu \rightarrow E[X] =$
$\sigma E[\tilde{X}] + \mu$

$var(X) = E[(\sigma \tilde{X} + \mu - \cancel{\mu})^2]$
$= \sigma^2 = 1$

$$\left.\begin{aligned} E[\tilde{X}] &= 1 \\ E[\tilde{X}^2] &= 1 \\ E[\tilde{X}^3] &= 1 \end{aligned}\right]$$

DISCRETA

$\tilde{X} =$
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$P_1 = -\frac{1}{2}, P_2 = \frac{1}{2}, P_3 = \frac{1}{2}, P_4 = \frac{1}{2}$

$x_i \doteq 1, x_2 \doteq 1, x_3 \doteq 1, x_4 \doteq 1$

$$p_1 \cdot x + p_2 \cdot x \cdot p_3 \cdot x + p_4 \cdot x$$

$$1 = E[x] = \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1}{1} + \frac{1}{2}\frac{p_2}{1}}_{0}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{p_3}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p_4}{1}}_{1} = 1$$

Ansatz: $\tilde{X}$ a valori in $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

ASSURDO

con $x_1 \doteq -1$, $x_2 \doteq 0$, $x_3 \doteq 1$, $x_4 \doteq 2$.

Poniamo $p_i \doteq P(\tilde{X} = x_i)$, $i \in \{1, \dots, 4\}$

Basta trovare $p_1, p_2, p_3, p_4 \in [0,1]$ con $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ tali che $(*)$, cioè:

a) $0 = E[\tilde{X}] = -p_1 + 0 \cdot p_2 + p_3 + 2p_4$,

b) $1 = E[\tilde{X}^2] = p_1 + 0 \cdot p_2 + p_3 + 4p_4$,

c) $1 = E[\tilde{X}^3] = -p_1 + 0 \cdot p_2 + p_3 + 8p_4$.

a)
$\rightsquigarrow \quad p_1 = p_3 + 2p_4$

in b)
$\rightsquigarrow \quad 1 = 2p_3 + 6p_4$

in c)
$\rightsquigarrow \quad 1 = 6p_4 \quad \rightsquigarrow \quad p_4 = \frac{1}{6}$

in b)
$\rightsquigarrow \quad 1 = 2p_3 + 6 \cdot \frac{1}{6} \quad \rightsquigarrow \quad p_3 = 0.$

$\rightsquigarrow \quad p_1 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \rightsquigarrow \quad p_2 = 1 - \left(\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6}\right)$

$\rightsquigarrow \quad p_1 = \frac{1}{3}, \; p_2 = \frac{1}{2}, \; p_3 = 0, \; p_4 = \frac{1}{6}.$

//

Esercizio 4. Siano X_1, X_2, X_3 variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{1, \ldots, 6\}$. Scriviamo, per $i \neq j$, $X_i \succ X_j$ se $\mathbf{P}(X_i > X_j) > \mathbf{P}(X_i < X_j)$. Si trovino distribuzioni marginali per X_1, X_2, X_3 in modo che

$$X_1 \succ X_2, \qquad X_2 \succ X_3, \qquad X_3 \succ X_1.$$

ANSATZ $\rightarrow$ $X_2 = 3$

$\{1 \ldots 6\}$

$(X_1 \succ X_2) \rightarrow P(X_1 > X_2) > P(X_1 < X_2)$

(5) (3) (2) (3)

$X_1 = \{2, 3, 5\}$

$X_3 = \{2, 3, 6\}$

$P(X_1 > X_2) = P(X_1 = 5) > P(X_1 = 2)$

$P(X_1 < X_2) = P(X_1 = 2) > P(X_1 = 5)$

MARGINALS ⇒

$$P(z > X_1 \mid X_1 = z) \cdot P(X_3 = z)$$

$$X_1 = 5 \;/\; X_3 = 3$$

$$P(5 > X_1 \mid X_1 = 5) \cdot P(X_3 = 3)$$

$$\underbrace{P(X_1 = 5) \cdot P(X_3 = 3)}$$

COMPOSTA = SOMMA MARGINALI

TUTTE LE COMBO IN CUI SE $X_3 = 3$

$$(X_1 > X_3)$$

$\Downarrow$ PARALLELIZZIAMO

$$(X_1 < X_3)$$

$$\underbrace{P(X_1 = 2)}_{E} + P(X_3 = 3) \cdot \underbrace{1 - P(X_1 = 5)}_{E^C}$$