Lezione 3

venerdì 8 settembre 2023 09:54

AUTOVETTORI e AUTOVALORI

AUTOVALORE → $Av = \lambda \cdot v$

→ SOL. DI EQUAZ. SU PROPR. DELLA MATRICE

AUTOVETTORE → VETTORI ASSOCIATI AGLI AUTOVALORI

AUTOSPAZIO → SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$$Av = \lambda_0 v$$

① $v_1 + v_2 \in V$

② $\alpha v_1 \in V_0$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

AUTOVALORI
- M. TRIANGOLARE → SONO GLI EL. DIAG.
- M. DIAGONALE → SONO SOLO GLI EL. DIAG.

MOLTEPLICITÀ
- ALGEBRICA: N. VOLTE IN CUI L'AUTOVALORE COMPARE
- GEOMETRICA: N. DI VOLTE IN CUI AZZERA LA SOLUZIONE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\alpha)^3$$

↑ m. ALG = 1

m. GEOM = 3

$$A - \lambda\, Id(A)$$

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si trovino:
- i loro autovalori,
- le loro molteplicità algebriche,
- le loro molteplicità geometriche,
- basi dei loro autospazi.

POLINOMIO CARATTERISTICO

$P_A(x) \rightarrow (3 \times 3)$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 3i & 0 & -x \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2}(3-x)\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ 3i & -x \end{pmatrix}$$

$$= (3-x)\left[(-x)^2 - (3i \cdot -3i)\right]$$

$$(3-x)(x^2-9)$$

$= (3-x)\left[(-x)^2 - (3i \cdot (-3i))\right]$

$= (3-x)(x^2-9)$

$= \underbrace{(3-x)(x+3)(x-3)}$

AUTOVALORI $\rightarrow$ SOL. POLIN. CARATT.

$x_1 = -3 \quad$ e $\quad x_2 = 3$

$p_A(x) = (x_1 - x)^{m_1} (x_2 - x)^{m_2}$

m_1, m_2 MOLT. ALGEBRICHE

d_1, d_2 MOLT. GEOMETRICHE

$p_A(x) = (-3-x)^1 (3-x)^2$

$m_1 = 1, \quad m_2 = 2$

$d_1 = 1, \quad 1 \le d_2 \le 2$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3 \times 3 \rightarrow \dim(A)$$

$E_A(x_1) = E_A(-3)$

$= N(A - (-3)I_3) = N\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Da E.G. su $A + 3I_3$

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ \underline{3i} & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - i x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = h \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= ih \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= h \end{aligned}$$

RISOLTO COME SIST. LINEARE

$V = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}$ $\rightarrow$ quando h vale 1

$B \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base

$E_A(x_2) = E_A(3) = N(A - 3I_3)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= N \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + i x_3 = 0 \\ x_2 = h \\ x_3 = k \end{cases} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -ik \\ h \\ k \end{pmatrix} \middle| h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ → BASE (QUANDO TUTTI I VALORI SONO $= 1$)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI → $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$

ESSENDO UNA MATRICE TRIANGOLARE (INFERIORE), GLI AUTOVALORI SONO GLI ELEMENTI DIAGONALI

(Infatti, il polinomio caratteristico di **B** è:

$$p_{\mathbf{B}}(x) = \mathrm{Det}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+3}(-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-x)(-x)(3-x) = x^2(3-x),$$

e gli autovalori di **B** sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{B}}(x)$ di **B**, ossia le soluzioni dell'equazione $x^2(3-x) = 0$.)

$x^2(3-x) \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow$ m.alg. $= 2$

$x_2 = 3 \rightarrow$ m.alg. $= 1$

$1 \leq$ m.geom $x_1 \leq 2$

m.geom $x_2 = 1$

$E_B(\lambda_1) = E_B(0)$

$= N(B - 0 I_3) = N(B)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2\left(\frac{1}{3}i\right) E_1\left(+\frac{1}{3}\right) E_{13}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ B. SP. NULLO → $\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to$ B. SP. NULLO $\to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$N(B) - 3I_3 \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\;---\;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BASE $\to$ TUTTE LE MATRICI $\to$ COL. DOMINANTI

$\to$ SPAZIO NULLO $\to$ COL. LIBERE

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to SB(3)$$

MATRICE DIAGONALIZZABILE

Def. A $n \times n$

$\exists$ S non singolare $\to$ (invertibile)

$\text{Det}(S) \neq 0$

$\exists$ D diagonale $\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(ROBA SULLA DIAGONALE $\neq 0$ E IL RESTO $= 0$)

$$A = SDS^{-1}$$

A è diagonalizzabile $\to \exists$

$\to [PD = AP] \to$ P matrice di permutazione

P $\to$ permut. $\to$ inversa

$$D \to \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

m_1 volte, m_2 volte, m_k volte

$d_1 = m_1$, $d_2 = m_2$, $d_k = m_k$

$n \times n$

$U = [\underbrace{Q_1}_{d_1} \; \underbrace{Q_2}_{d_2} \cdots \underbrace{Q_k}_{d_k}]$

$d_1 = m_1$, $d_2 = m_2$, $d_k = m_k$

$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$

COSTRUZIONE DI U:

$\mathcal{B}_i^*$ BASE ORTONORMALE di $E_A(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$

Q_i $n \times d_i$ matrice che ha come colonne i vettori di $\mathcal{B}_i^*$

10 Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

1) DET. CON POLINOMIO CARATTERISTICO

2) DIAGONALIZZABILE SE AUTOVALORI $\exists$ e $\neq 0$

$$P_A(x) = \mathrm{Det}(A(\alpha) - x I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha - x \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} (\alpha - x) \, \mathrm{Det} \begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha - x)[(-2-x) \cdot (2+\alpha-x) - (2i \cdot 2i)]$$

$$= (\alpha - x)(-4 - 2x - 2\alpha - \alpha x + 2x + x^2 + 4)$$

$$= \underline{(\alpha - x)} \, \underline{(x^2 - \alpha x - 2\alpha)}$$

$$x_1 = \alpha$$

$$x_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}$$

$$x_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}$$

→ SE TUTTI DIVERSI FRA DI LORO, C'È SEMPRE SOLUZIONE

$\rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow \alpha = \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \rightarrow \alpha = 0$

$x_1 = x_3 \rightarrow \alpha = -\sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \rightarrow \alpha = 0$

$x_2 = x_3 \rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} = 0 \rightarrow \alpha \in \{0, 8\}$

abbiamo:

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, -8\}$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ $\lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$	$m_1 = 3$	$1 \le d_1 \le 3$ $\;\; \mu_1 = 3$
$\mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \le d_2 \le 2$

DIAG. →

→ MOLT. GEOM. TUTTE UGUALI

MATRICE DIAGONALIZZ.

MOLT. ALG. E GEOM. DEVONO ESSERE UGUALI TRA DI LORO

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R},$$

(*a*) Si dica per quale/quali $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

(*b*) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

(a) È MATRICE TRIANGOLARE

E GLI AUTOVALORI SONO GLI EL. DIAGONALI

$$\alpha(\alpha-1)^2 = 0$$

m. algebriche $\rightarrow m_1 = 1 \quad m_2 = 2$

m. geom. $\quad g_1 = 1 \quad g_2 = 1 \leq x_1 \leq 2$

$$E_A(\lambda_2) = E_{A(\alpha)}(\alpha-1)$$

$$= N(A(\alpha) - (\alpha-1) I_3)$$

$$= N\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow N\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31} E_{31}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SICCOME MOLT. GEOM. = 2 $\rightarrow$ $\alpha = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ geom = 2

USIAMO LE COLONNE LIBERE PERCHÈ CALCOLO SU SP. NULLO

E LE MOLT. GEOM SONO PROPRIO LE COL. LIBERE

$\alpha \neq -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ geom. = 1

Riassumendo:

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \neq -1$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \alpha - 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = \alpha = -1$ $\lambda_2 = \alpha - 1 = -2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$

MOLT. ALG. E MOLT. GEOM UGUALI $\rightarrow$ PER A(−1) È DIAG.

A è diagonalizzabile sse $\alpha = -1$

se e solo se

A è diagonalizzabile sse $\alpha = -1$
se e solo se

$(x-1)(x-2)^2$

B (b) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$A = SDS^{-1}$ con $D \to D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$

$S = (\text{basi}) \to$ vettori che esistono

$S^{-1} \to$ (matrice inversa)

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} - & - & - & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 1 & 0 \\ - & - & - & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$- \dots \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & - & \cdot & \cdot \\ 4 & 5 & 6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & 8 & 9 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

$A(-1) \to x_1 = \alpha = -1$
$x_2 = \alpha - 1 = -2$

$E_A(x_1) = E_A(-1) = N(A - (-1 \cdot I_3))$
$= N(A + I_3) =$

$= \; = N\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)\; E_2(-1)\; E_{13}}$

$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{0} \end{pmatrix} \to$ BASE DELLO SPAZIO NULLO
$\downarrow$
COLONNE LIBERE

$\to \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\}$

$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è base} \right\}$

$E_A(x_2) = E_A(-2)$
$= N(A - (-2 I_3)) = N(A + 2I_3)$

$$= N\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_2 = h \\ x_3 = k \end{matrix}$$

$$B = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

TUTTI GLI AUTOVALORI CON LE MOLT. ALG.)

$$A = SDS^{-1} \rightarrow D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -1$ m.alg. $= 1$

$x_2 = -2$ m.alg. $= 2$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} B_1, B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1, w_1, w_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{D} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

Calcolare l'inversa della matrice A usando il metodo di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

VEDERE SE A È INVERTIBILE / NON SINGOLARE

CON GAUSS → TROVA L'INV.

$$A \rightarrow \left(\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

CON GAUSS...

$$(\mathrm{Id}_3 \mid E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

CON CALCOLO DET. (LAPLACE)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -1\,[1 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)] = -1$$

$\det(A) = -1 \neq 0$

INV. $\rightarrow$ SE È INV.