109 $\int_1^e \ln x \, dx$ [1]

Per risolvere questo integrale, utilizziamo l'integrazione per parti. Scegliamo:

- $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$
- $dv = dx \Rightarrow v = x$

Applicando la formula di integrazione per parti $\int u \, dv = uv - \int v \, du$:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

Ora calcoliamo l'integrale definito da 1 a e:

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = (e \cdot 1 - e) - (0 - 1) = 0 + 1 = 1$$

111 $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ [π]

Anche in questo caso, utilizziamo l'integrazione per parti. Scegliamo:

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x$

Applicando la formula di integrazione per parti:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Ora calcoliamo l'integrale definito da 0 a π:

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = [-x \cos x + \sin x]_0^\pi = (-\pi \cos \pi + \sin \pi) - (-0 \cos 0 + \sin 0) = (-\pi(-1) + 0) - (0 + 0) = \pi$$

119 $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$ $\left[\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}\right]$

Ancora una volta, utilizziamo l'integrazione per parti. Scegliamo:

- $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$
- $dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

Applicando la formula di integrazione per parti:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Ora calcoliamo l'integrale definito da 1 a 2:

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}\right) - \left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$