Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Svolgimento degli Esercizi per casa 1 (1^a parte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per ciascuno dei seguenti numeri complessi

$$z_1 = i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = 1 - 2i \quad \text{e} \quad z_4 = 5 + 3i$$

(a) si calcoli il modulo;

(b) si calcoli il coniugato;

(c) si scriva l'inverso in forma algebrica.

(a) Il modulo:

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1, \\
|z_2| &= |-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3, \\
|z_3| &= |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \\
|z_4| &= |5 + 3i| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}.
\end{aligned}$$

(b) Il coniugato:

$$\begin{aligned}
\overline{z}_1 &= -i, \\
\overline{z}_2 &= 3i, \\
\overline{z}_3 &= 1 + 2i, \\
\overline{z}_4 &= 5 - 3i.
\end{aligned}$$

(c) L'inverso in forma algebrica:

Siano $w_1 = z_1^{-1}$, $w_2 = z_2^{-1}$, $w_3 = z_3^{-1}$ e $w_4 = z_4^{-1}$. Allora

$$w_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\overline{i}}{\overline{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

è la forma algebrica di w_1: $a_1 = 0$ e $b_1 = -1$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_1;

$$w_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{\overline{-3i}}{\overline{-3i}} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{3i}{-9i^2} = \frac{3i}{9} = \frac{1}{3}i$$

è la forma algebrica di w_2: $a_2 = 0$ e $b_2 = 1/3$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_2;

$$w_3 = \frac{1}{z_3} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{\overline{1-2i}}{\overline{1-2i}} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+2i}{1^2-4i^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

è la forma algebrica di w_3: $a_3 = 1/5$ e $b_3 = 2/5$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_3;

$$w_4 = \frac{1}{z_4} = \frac{1}{5+3i} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{\overline{5+3i}}{\overline{5+3i}} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{5-3i}{5^2-(3i)^2} = \frac{5-3i}{5^2-9i^2} = \frac{5-3i}{25+9} = \frac{5}{34}-\frac{3}{34}i$$

è la forma algebrica di w_4: $a_4 = 5/34$ e $b_4 = -3/34$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_4.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Quali sono i numeri complessi z tali che $z = -\overline{z}$?

Scrivendo $z \in \mathbb{C}$ in forma algebrica, si ha $z = a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Il coniugato $\overline{z}$ di z è $\overline{z} = a - ib$, e $-\overline{z} = -a + ib$. Poichè

$$a + ib = -a + ib \iff a = -a \iff a = 0,$$

si ottiene che

$$z = -\overline{z} \iff z = ib, \text{ con } b \in \mathbb{R},$$

ossia z è l'opposto del suo coniugato se e solo se z è un numero immaginario puro.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si trovino il quoziente q ed il resto r della divisione di a con b nei seguenti casi (N.B.: si richiede $r \geq 0$):

1) $a = 46$ e $b = 10$: $\quad 46 = 10 \cdot 4 + 6 \quad \Longrightarrow \quad q = 4$ ed $r = 6$;

2) $a = 49$ e $b = 52$: $\quad 49 = 52 \cdot 0 + 49 \quad \Longrightarrow \quad q = 0$ ed $r = 49$;

3) $a = -12$ e $b = 17$: $\quad -12 = 17 \cdot (-1) + 5 \quad \Longrightarrow \quad q = -1$ ed $r = 5$;

4) $a = 76$ e $b = -13$: $\quad 76 = (-13) \cdot (-5) + 11 \quad \Longrightarrow \quad q = -5$ ed $r = 11$;

5) $a = -21$ e $b = 12$: $\quad -21 = 12 \cdot (-2) + 3 \quad \Longrightarrow \quad q = -2$ ed $r = 3$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si calcoli $MCD(a, b)$ con l'algoritmo di Euclide nei seguenti casi:

1) $a = 126$ e $b = 56$,
2) $a = 234$ e $b = 273$,
3) $a = -168$ e $b = 180$,
4) $a = 231$ e $b = 165$,
5) $a = -136$ e $b = 48$,
6) $a = -208$ e $b = 286$,
7) $a = 132$ e $b = 180$.

Osserviamo che:

1. Se d è il massimo comun divisore positivo di a e b, allora d e $-d$ sono i massimi comun divisori di a e b;

2. $MCD(a, b) = MCD(b, a)$;

3. $MCD(a, b) = MCD(|a|, |b|)$.

Quindi in ogni caso calcoliamo con l'algoritmo di Euclide in $\mathbb{N}$

$$d = MCD(|a|, |b|)$$

scegliendo le notazioni in modo tale che $|a| \geq |b|$, ed avremo che d e $-d$ sono i massimi comun divisori di a e b.

1) $126 = 56 \cdot 2 + 14$
$56 = 14 \cdot 4 + 0$
$\Longrightarrow$ $MCD(126, 56) = 14$.

2) $273 = 234 \cdot 1 + 39$
$234 = 39 \cdot 6 + 0$
$\Longrightarrow$ $MCD(234, 273) = MCD(273, 234) = 39$.

3) $180 = 168 \cdot 1 + 12$
$168 = 12 \cdot 14 + 0$
$\Longrightarrow$ $MCD(-168, 180) = MCD(168, 180) = MCD(180, 168) = 12$.

4) $231 = 165 \cdot 1 + 66$
$165 = 66 \cdot 2 + 33$
$66 = 33 \cdot 2 + 0$
$\Longrightarrow$ $MCD(231, 165) = 33$.

5) $136 = 48 \cdot 2 + 40$
$48 = 40 \cdot 1 + 8$
$40 = 8 \cdot 5 + 0$
$\Longrightarrow$ $MCD(-136, 48) = MCD(136, 48) = 8$.

6) $286 = 208 \cdot 1 + 78$
$208 = 78 \cdot 2 + 52$
$78 = 52 \cdot 1 + 26$
$52 = 26 \cdot 2 + 0$
$\Longrightarrow$ $MCD(-208, 286) = MCD(208, 286) = MCD(286, 208) = 26$.

7) $180 = 132 \cdot 1 + 48$
$132 = 48 \cdot 2 + 36$
$48 = 36 \cdot 1 + 12$
$36 = 12 \cdot 3 + 0$
$\Longrightarrow$ $MCD(132, 180) = MCD(180, 132) = 12$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si calcolino il quoziente $q(x)$ ed il resto $r(x)$ della divisione di $f(x)$ per $g(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ nei seguenti casi:

1) $f(x) = 12x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = 3x^3 + x - 3$,
2) $f(x) = 12x^6 + 20x^4 + x^2 - 7$ e $g(x) = 2x^4 + x^2 + 3x - 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
12x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 2x - 3 & 3x^3 + x - 3 \\
12x^5 \qquad\quad + 4x^3 - 12x^2 & \\
\hline
\qquad 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 3 & 4x^2 + x + 1 \\
\qquad 3x^4 \qquad\quad + x^2 - 3x & \\
 & \\
\qquad\qquad 3x^3 \qquad + x - 3 & \\
\qquad\qquad 3x^3 \qquad + x - 3 & \\
 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

1) Dividendo $f(x) = 12x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 2x - 3$ per $g(x) = 3x^3 + x - 3$ si ottengono $q(x) = 4x^2 + x + 1$ ed $r(x) = 0$. Infatti:

2) Dividendo $f(x) = 12x^6 + 20x^4 + x^2 - 7$ per $g(x) = 2x^4 + x^2 + 3x - 1$ si ottengono $q(x) = 6x^2 + 7$ ed $r(x) = -18x^3 - 21x$. Infatti:

$$
\begin{array}{l|l}
12x^6 \quad + 20x^4 \qquad\quad + x^2 \qquad - 7 & 2x^4 + x^2 + 3x - 1 \\
12x^6 \quad + 6x^4 + 18x^3 - 6x^2 & \\
\hline
\qquad 14x^4 - 18x^3 + 7x^2 \qquad\quad - 7 & 6x^2 + 7 \\
\qquad 14x^4 \qquad\quad + 7x^2 + 21x - 7 & \\
 & \\
\qquad\quad - 18x^3 \qquad - 21x &
\end{array}
$$