Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Svolgimento degli Esercizi per casa 10

$\boxed{1}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$ (si veda l'esercizio 9 del foglio 9).

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva $\mathbf{A}$ nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$, con λ_1 e λ_2 autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$ ed $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$ rispettivamente.
(d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Posto $z_1 = (2+i)^{300}$ e $z_2 = (2-i)^{300}$, si scriva $\mathbf{A}^{300}$ in funzione di z_1 e z_2.

$$(a)\ \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale} \iff$$
$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{i} \\ \overline{i} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+\alpha\overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+\overline{\alpha}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad\Longleftrightarrow\quad -2i + i\overline{\alpha} = 2i - i\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha + \overline{\alpha} = 4.$$

Scrivendo α in forma algebrica:

$$\alpha = a + ib \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

abbiamo che $\overline{\alpha} = a - ib$ per cui

$$\alpha + \overline{\alpha} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 4 \iff a = 2 \iff \alpha = 2 + ib \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

In conclusione,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \iff \alpha = 2 + ib \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A}$ è unitariamente diagonalizzabile (perchè $2 = 2 + ib$ con $b = 0 \in \mathbb{R}$). I suoi autovalori (calcolati nell'Esercizio 9 degli Esercizi 9) sono:

$$\lambda_1 = \tfrac{2+2+\sqrt{4-8}}{2} = \tfrac{4+\sqrt{-4}}{2} = \tfrac{4+2i}{2} = 2 + i \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{2+2-\sqrt{4-8}}{2} = \tfrac{4-\sqrt{-4}}{2} = \tfrac{4-2i}{2} = 2 - i.$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = d_1 = m_2 = d_2 = 1.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i) = N(\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2 \quad$:

$$\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_1}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_1}^H \mathbf{v_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N(\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2 \quad :$

$$\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(-i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v_2}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_2}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_2}^H \mathbf{v_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} & \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c) Al punto (b) abbiamo visto:

gli autovalori di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = 2+i$ e $\lambda_2 = 2-i$;

$\left\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$;

$\left\{ \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

Posto $\mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_1$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$ è

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1^H = \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v_1}^H}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, posto $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_2$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$ è

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v_2}^H}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B.: Siccome $\mathbf{A}$ ha due soli autovalori, allora $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$.

Dunque

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 + \mathbf{P}_2 = \frac{2+i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2-i}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Al punto (b) abbiamo visto che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ ha una diagonalizzazione unitaria

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{A}^{300} = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H)^{300} = \mathbf{U}\mathbf{D}^{300}\mathbf{U}^H =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+i)^{300} & 0 \\ 0 & (2-i)^{300} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} z_1 + z_2 & z_1 - z_2 \\ z_1 - z_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ (si veda l'esercizio 10 del foglio 9).

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva $\mathbf{A}$ nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \lambda_3\mathbf{P}_3$, con λ_1, λ_2, λ_3 autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$, $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$, $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3)$ rispettivamente.

(a) $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile $\iff$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è normale $\iff$

$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{-2} & \overline{2i} & \overline{0} \\ \overline{2i} & \overline{2+\alpha} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 8i+2i\alpha & 0 \\ -8i-2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -8i-2i\alpha & 0 \\ 8i+2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \iff 8i+2i\alpha = -8i-2i\alpha \iff \alpha = -4.$$

(b) Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati nell'esercizio 10 degli Esercizi 9) sono:

$$\lambda_1 = \alpha = -4$$

$$\lambda_2 = \tfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} = \tfrac{-4+\sqrt{(-4)^2+8(-4)}}{2} = \tfrac{-4+\sqrt{-16}}{2} = \tfrac{-4+4i}{2} = -2+2i,$$

$$\lambda_3 = \tfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} = \tfrac{-4-\sqrt{(-4)^2+8(-4)}}{2} = \tfrac{-4-\sqrt{-16}}{2} = \tfrac{-4-4i}{2} = -2-2i,$$

ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica uguali ad 1.

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4) = N(\mathbf{A} + 4\mathbf{I_3}).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 4\mathbf{I_3} \quad$:

$$\mathbf{A} + 4\mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$. Inoltre, essendo $\|\mathbf{w_1}\|_2 = 1$, non occorre "normalizzare" $\mathbf{w_1}$: $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i) = N(\mathbf{A} + (2-2i)\mathbf{I_3}).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + (2-2i)\mathbf{I_3} \quad$:

$$\mathbf{A}+(2-2i)\mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} -2i & 2i & 0 \\ 2i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & -2-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_2}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_2}$.

$$\|\mathbf{w_2}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_2}^H\mathbf{w_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{\frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i) = N(\mathbf{A} + (2+2i)\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + (2+2i)\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\mathbf{A}+(2+2i)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix}2i & 2i & 0\\2i & 2i & 0\\0 & 0 & -2+2i\end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i) = N\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}-h\\h\\0\end{pmatrix} \middle| h \in \mathbb{C}\right\},$$

e quindi $\left\{\mathbf{w_3} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_3}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$, “normalizziamo” $\mathbf{w_3}$.

$$\|\mathbf{w_3}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_3}^H\mathbf{w_3}} = \sqrt{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{\frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

Dunque se $\alpha = -4$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2+2i & 0 \\ 0 & 0 & -2-2i \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} & \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Al punto (b) abbiamo visto:

gli autovalori di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2+2i$ e $\lambda_3 = -2-2i$;

$\left\{ \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$;

$\left\{ \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

$\left\{ \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

Posto $\mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_1$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$ è

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1^H = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w_1}^H}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posto $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_2$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$ è

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w_2}^H}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posto $\mathbf{Q}_3 = \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_3$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$ è

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_3^H = \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w_3}^H}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2 + \mathbf{P}_2 + \lambda_3\mathbf{P}_3 = \\ &= -4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{-2+2i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{-2-2i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove α è **un numero reale non positivo** (come nell'esercizio 11 del foglio 9).

(a) Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} (a)\ \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile } &\iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale } \iff \\ &\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha). \end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{-3i\alpha} \\ \overline{0} & \overline{-3} & \overline{0} \\ \overline{-3i} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9\alpha^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 9\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$, e tenendo conto che α **è non positivo**, otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -1.$$

(b) Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati nell'esercizio 11 degli esercizi 9) sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = 2 = d_1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1 = d_2.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\mathbf{A}+3\mathbf{I_3}=\begin{pmatrix}0&0&-3i\\0&-3&0\\3i&0&0\end{pmatrix}+3\mathbf{I_3}=\begin{pmatrix}3&0&-3i\\0&0&0\\3i&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-i\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)=E_{\mathbf{A}}(-3)=N\Big(\begin{pmatrix}1&0&-i\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Big)=\Big\{\begin{pmatrix}ik\\h\\k\end{pmatrix}\Big|h,k\in\mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix};\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)=E_{\mathbf{A}}(-3)$.

N.B.: In questo caso non occorre applicare l'algoritmo di G.S. a $\{\mathbf{v_1};\mathbf{v_2}\}$: $\mathbf{v_1}^H\mathbf{v_2}=\mathbf{0}$, per cui

$$\{\mathbf{v_1};\mathbf{v_2}\}\quad \textbf{è già una base ortogonale di } E_{\mathbf{A}}(-3)$$

Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-3)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2=\sqrt{\mathbf{v_1}^H\mathbf{v_1}}=\sqrt{\begin{pmatrix}-i&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v_2}\|_2=\sqrt{\mathbf{v_2}^H\mathbf{v_2}}=\sqrt{\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}=\sqrt{1}=1$$

per cui

$$\Big\{\frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}i\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};\frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)=E_{\mathbf{A}}(-3)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)=E_{\mathbf{A}}(3)=N(\mathbf{A}-3\mathbf{I_3}).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}-3\mathbf{I_3} \quad$:

$$\mathbf{A}-3\mathbf{I_3}=\begin{pmatrix}-3&0&-3i\\0&-6&0\\3i&0&-3\end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{6})E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix}1&0&i\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)=E_{\mathbf{A}}(3)=N\Big(\begin{pmatrix}1&0&i\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Big)=\Big\{\begin{pmatrix}-ih\\0\\h\end{pmatrix}\Big|h\in\mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\mathbf{w_1}=\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)=E_{\mathbf{A}}(3)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(3)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(3)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_1}$.

$$\|\mathbf{w_1}\|_2=\sqrt{\mathbf{w_1}^H\mathbf{w_1}}=\sqrt{\begin{pmatrix}i&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{\frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)=E_{\mathbf{A}}(3)$.

Dunque se $\alpha=-1$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A}=\mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2}&\frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2}&\frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}i&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}i\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$