Unità 3

Tema G

Successioni e principio di induzione

1. Introduzione alle successioni

Definizione di successione e di grafico di una successione

DEFINIZIONE | Successione

Una **successione** è una funzione che ha come dominio l'insieme N dei numeri naturali (eventualmente privato di alcuni suoi elementi).

I numeri reali corrispondenti degli elementi di N in una successione si dicono **termini** della successione e vengono indicati con i simboli:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

essendo a_0 il corrispondente di $n = 0$, a_1 il corrispondente di $n = 1$, a_2 il corrispondente di $n = 2$ e così via. Il termine a_n è chiamato **termine generale** della successione. Una successione viene spesso assegnata dando la formula che esprime il termine generale a_n in funzione di n.

ESEMPI

a. Si può assegnare la successione dei quadrati dei numeri naturali tramite la formula $a_n = n^2$. I primi termini della successione sono:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9, \dots$$

b. Si può assegnare la successione dei numeri dispari tramite la formula $a_n = 2n + 1$. I primi termini della successione sono:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_3 = 7, \dots$$

Il **grafico** di una successione a_n è un insieme di **punti isolati**, di coordinate:

$$(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots$$

ESEMPIO Grafico di una successione

I punti che rappresentano i primi quattro termini della successione $a_n = \frac{1}{n}$, con $n \geq 1$, sono quelli mostrati in **Fig. 1**. Si tratta, come puoi vedere, di punti «isolati», che formano un insieme discreto; il grafico di $a_n = \frac{1}{n}$ è la restrizione del grafico dell'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$ all'insieme dei punti aventi ascissa *intera positiva* (**Fig. 2**).

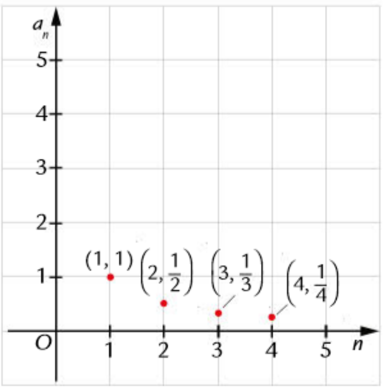


Figura 1

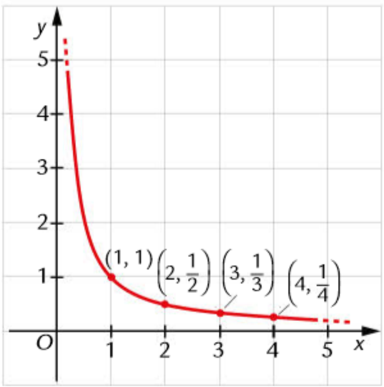


Figura 2

Con GeoGebra
Successioni

Approfondimenti

Con GeoGebra

Videolezioni

Esercizi interattivi

ATTENZIONE!

Salvo avviso contrario, conveniamo che il dominio di una data successione sia tutto **N**. Nel caso in cui il dominio sia per esempio soltanto $n \geq 1$, verrà specificato.

ATTENZIONE!

1. In alcuni testi vengono utilizzati due simboli diversi per indicare una successione e il suo termine generale; precisamente, per indicare la successione di termine generale a_n si utilizza il simbolo $\{a_n\}$.

2. Per brevità scriveremo spesso «successione a_n», intendendo «successione *avente come termine generale* a_n».

Una successione può essere assegnata in **forma ricorsiva**, cioè dando il primo termine (i primi termini) della successione e la legge che permette di determinare ciascun termine successivo in funzione del precedente (dei precedenti).

ESEMPIO Successione definita ricorsivamente

Determiniamo i primi cinque termini della successione definita ricorsivamente da:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3 - a_n \end{cases}, \text{ con } n \geq 1$$

Il primo termine è dato: $a_1 = 1$.

Dalla relazione ricorsiva (ponendo $n = 1$) otteniamo:

$$a_2 = 3 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

Procediamo analogamente per gli altri termini:

$$a_3 = 3 - a_2 = 3 - 2 = 1 \qquad a_4 = 3 - a_3 = 3 - 1 = 2 \qquad \ldots$$

Ci rendiamo conto così che la successione assegnata ha una particolare caratteristica: ha termini di indice dispari uguali a 1 e termini di indice pari uguali a 2. Il termine generale della successione potrebbe dunque essere così espresso:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad a_n = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$$

ESEMPIO Successione di Fibonacci

Determiniamo il decimo termine della successione definita ricorsivamente come segue:

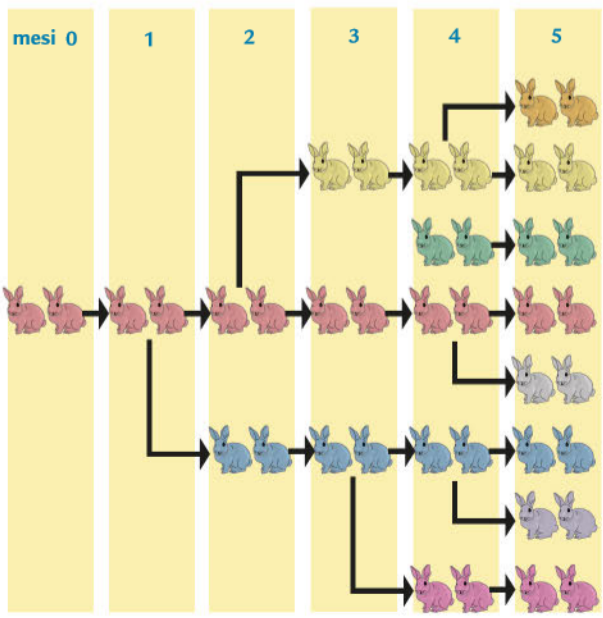
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Osserva che i primi *due* termini della successione sono dati esplicitamente, perché nella formula ricorsiva il termine generico a_{n+2} dipende dai *due* termini che lo precedono. La regola per generare i termini della successione è semplicissima: basta sommare due termini consecutivi per ottenere il successivo. Quindi i primi dieci termini sono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. In conclusione, il termine richiesto è 55. Esprimere il termine generico a_n in funzione dell'indice n, in questo caso, non è semplice (*vedi* scheda di approfondimento).

Approfondimento
Relazioni ricorsive lineari

PER SAPERNE DI PIÙ **La successione di Fibonacci come modello di crescita**

La successione di Fibonacci trova applicazione in svariati contesti; il più noto è quello relativo alla crescita di una popolazione di conigli. Ogni coppia di conigli, se maturi, genera un'altra coppia di conigli, ma occorrono ai conigli due mesi di vita per raggiungere la piena capacità riproduttiva. Quindi, se al primo mese vi è una sola coppia di conigli appena nati, anche al secondo mese ve ne sarà una soltanto. Al terzo mese diverranno 2 (la coppia adulta ne ha generato un'altra), al quarto mese 3 (avendo la prima coppia generato un'altra coppia di conigli, mentre l'altra non è ancora matura), al quinto mese 5 (la prima e la seconda coppia generano un'altra coppia mentre la terza non è ancora adulta) e così via. Insomma, a conclusione dell'n-esimo mese il numero a_n delle coppie di conigli è dato dal numero a_{n-1} delle coppie del mese precedente più il numero a_{n-2} di coppie generate dai conigli maturi.



Alcune proprietà delle successioni

Le proprietà di *limitatezza* e *monotonia*, già definite per le funzioni, possono essere definite in modo del tutto analogo per le successioni.

DEFINIZIONE | Proprietà di limitatezza delle successioni

Una successione a_n si dice:

a. **limitata inferiormente** se esiste un numero reale m tale che $a_n \geq m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione è definita;

b. **limitata superiormente** se esiste un numero reale M tale che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione è definita;

c. **limitata**, se lo è sia inferiormente sia superiormente, vale a dire se esistono due numeri reali m e M tali che $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione è definita.

ESEMPI Successioni inferiormente o superiormente limitate

a. La successione $a_n = n + 3$ è limitata inferiormente ($a_n \geq 3$), ma non superiormente (**Fig. 3**).

b. La successione $a_n = 1 - n^2$ è limitata superiormente ($a_n \leq 1$), ma non inferiormente (**Fig. 4**).

c. La successione $a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ è limitata (**Fig. 5**).

d. La successione $a_n = (-2)^n = \begin{cases} -2^n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2^n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ non è limitata né inferiormente né superiormente (**Fig. 6**).

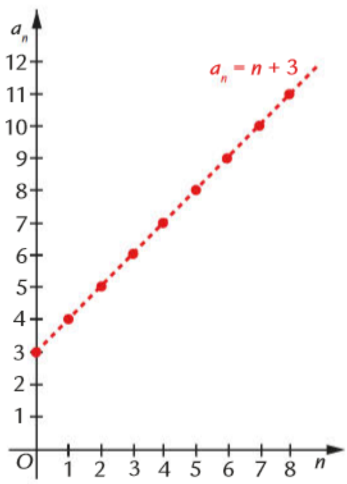


Figura 3

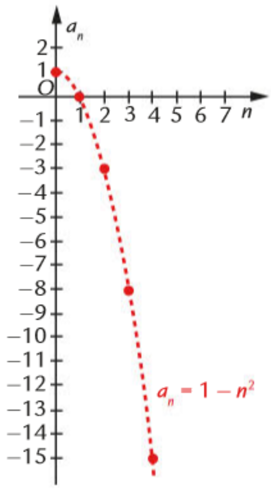


Figura 4

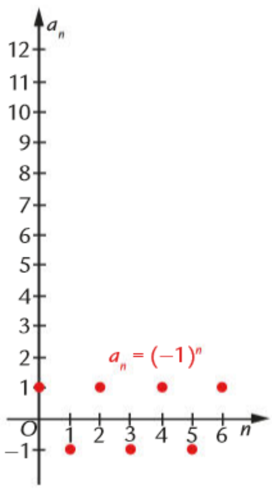


Figura 5

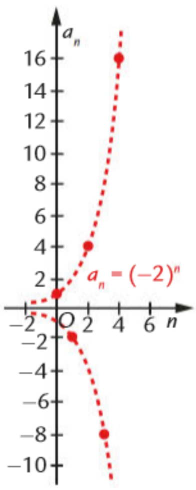


Figura 6

DEFINIZIONI | Monotonia delle successioni

Una successione a_n si dice:

a. **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione è definita;

b. **strettamente crescente** se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione è definita;

c. **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione è definita;

d. **strettamente decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione è definita.

Una successione crescente o decrescente (strettamente crescente o decrescente) è detta **monotòna** (strettamente monotòna).

ESEMPI Successioni monotòne

a. La successione $a_n = n^2$ è strettamente crescente. Infatti, sappiamo che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0, +\infty)$; in particolare, sarà: $f(n) < f(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia $a_n < a_{n+1}$.

b. La successione $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente. Infatti, sappiamo che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è strettamente decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$; in particolare, sarà: $f(n) > f(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, vale a dire $a_n > a_{n+1}$.

Esercizi p. 168

2. Progressioni aritmetiche e geometriche

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**

Il sig. Umberto ha due offerte di lavoro diverse:

1. la compagnia A offre una retribuzione di 15 000 euro per il primo anno e un aumento di 1000 euro all'anno per ciascuno dei 10 anni successivi;
2. la compagnia B offre una retribuzione di 12 000 euro per il primo anno e un aumento del 10% all'anno per ciascuno dei 10 anni successivi.

Quale delle due offerte è più conveniente, considerando un orizzonte temporale di 10 anni?

Iniziamo a soffermarci sulla fase di formalizzazione del problema (completeremo la risoluzione del problema a fine paragrafo). Siano $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ le retribuzioni il primo anno, il secondo anno, il terzo anno, ecc.... presso la compagnia A e $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ le retribuzioni il primo anno, il secondo anno, il terzo anno, ecc. presso la compagnia B. Osserviamo che le due successioni a_n e b_n hanno le seguenti caratteristiche:

$$\underbrace{a_n - a_{n-1} = 1000}_{\text{l'aumento annuo è di 1000 euro}} \qquad \underbrace{b_n = 1{,}1\, b_{n-1}}_{\text{l'aumento annuo è del 10\%}}, \quad \text{cioè } \frac{b_n}{b_{n-1}} = 1{,}1$$

Nel primo caso si mantiene costante la *differenza* tra un termine e il precedente, mentre nel secondo il *quoziente*. Le successioni che presentano queste caratteristiche sono particolarmente importanti, perciò si è dato loro un nome specifico.

DEFINIZIONE | Progressione aritmetica

Una successione in cui la **differenza** tra un termine (a partire dal secondo) e il suo precedente si mantiene costante si dice **progressione aritmetica**.

La differenza costante fra un termine e il precedente si chiama **ragione** della progressione aritmetica e viene indicata generalmente con la lettera d.

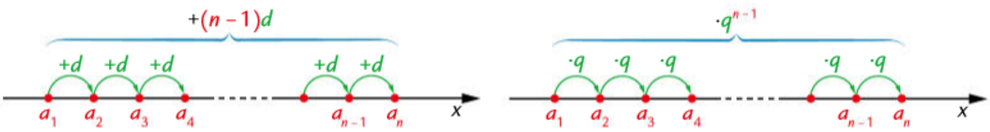
DEFINIZIONE | Progressione geometrica

Una successione in cui il **rapporto** tra un termine (a partire dal secondo) e il suo precedente si mantiene costante, diverso da zero, si dice **progressione geometrica**.

Il rapporto costante fra un termine e il precedente si chiama **ragione** della progressione geometrica e viene indicato generalmente con la lettera q.

Esempi	Controesempi
• $a_n = 2 + 3n$ è una progressione aritmetica. Infatti la differenza tra un termine e il suo precedente è costante: $a_n - a_{n-1} = (\underbrace{2+3n}_{a_n}) - [\underbrace{2+3(n-1)}_{a_{n-1}}] =$ $= 2 + 3n - 2 - 3n + 3 = 3$ La ragione della progressione è 3.	• $a_n = 2^n + 1$ **non** è una progressione aritmetica. Infatti i primi termini della successione sono: 2, 3, 5, 9, ... e si constata subito, per esempio, che: $3 - 2 = 1$ mentre $5 - 3 = 2$
• $a_n = 3^{n-1}$, con $n \geq 1$, è una progressione geometrica. Infatti il rapporto tra un termine e il precedente è costante: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3^{n-1}}{3^{n-2}} = 3$ La ragione della progressione è 3.	• $a_n = n^2 + 1$ **non** è una progressione geometrica. Infatti i primi termini della progressione sono: 1, 2, 5, 10, 17, ... e si constata subito, per esempio, che: $\frac{2}{1} = 2$ mentre $\frac{5}{2} = 2{,}5$

I termini di una progressione aritmetica (geometrica) si possono ottenere a partire dal primo per successive addizioni (moltiplicazioni) della ragione (*vedi* le **Figg. 7a** e **7b**).



a **b**

Figura 7

Sempre dall'osservazione delle figure, puoi intuire le formule riportate nei seguenti teoremi, che esprimono il termine generale di una progressione aritmetica o geometrica in funzione del primo termine e della ragione.

TEOREMA 1 | Termine generale di una progressione aritmetica

L'n-esimo termine di una progressione **aritmetica** il cui primo termine è a_1 e la cui ragione è d è dato dalla formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad [1]$$

TEOREMA 2 | Termine generale di una progressione geometrica

L'n-esimo termine di una progressione **geometrica** il cui primo termine è a_1 e la cui ragione è q è espresso dalla formula:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad [2]$$

ATTENZIONE!

Nei Teoremi 1 e 2 (e nei successivi 3 e 4) si suppone che il primo termine della successione sia a_1. Ricorda però che in generale una successione può essere definita in tutto N: in tal caso il primo termine risulterà a_0 e le formule [1] e [2] diventano: $a_n = a_0 + nd$ e $a_n = a_0 q^n$.

ESEMPI Calcolo di termini di progressioni aritmetiche e geometriche

Determiniamo:

a. il dodicesimo termine della progressione aritmetica il cui primo termine è $a_1 = 3$ e la cui ragione è $d = 2$;

b. l'ottavo termine della progressione geometrica il cui primo termine è $a_1 = 3$ e la cui ragione è $q = -2$.

a. Utilizzando la formula [1] otteniamo:

$$a_{12} = 3 + (12 - 1) \cdot 2 = 3 + 22 = 25$$

b. Utilizzando la formula [2] otteniamo:

$$a_8 = 3 \cdot (-2)^{8-1} = 3 \cdot (-2)^7 = -384$$

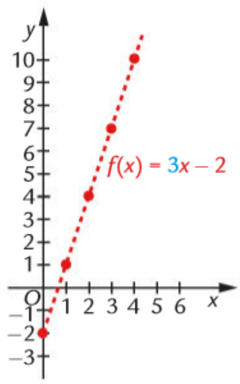
COLLEGHIAMO I CONCETTI **Progressioni e funzioni**

Una progressione *aritmetica* (*geometrica*) è una successione che corrisponde a una restrizione sul dominio dei numeri naturali di un'opportuna funzione *lineare* (*esponenziale*), avente come *coefficiente angolare* (*base dell'esponenziale*) la *ragione* della progressione. Nelle **Figg. 8** e **9** mettiamo in evidenza questi aspetti relativamente alle successioni $a_n = 3_n - 2$ (aritmetica) e $a_n = 2 \cdot 3^n$ (geometrica).

n	$f(n)$
0	−2
1	1
2	4
3	7

+1 +1 +1 — +3 +3 +3

ragione della progressione



n	$f(n)$
0	2
1	6
2	18
3	54

+1 +1 +1 — ·3 ·3 ·3

ragione della progressione

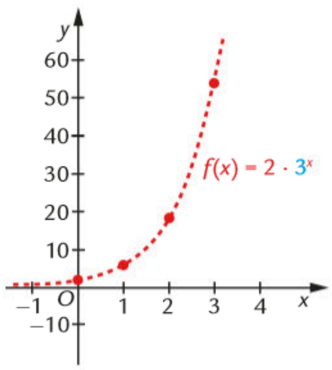


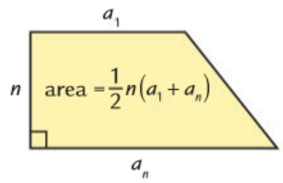
Figura 8 I punti che rappresentano una progressione aritmetica appartengono al grafico di una funzione lineare.

Figura 9 I punti che rappresentano una progressione geometrica appartengono al grafico di una funzione esponenziale.

La somma dei termini di una progressione aritmetica o geometrica

SUGGERIMENTO

Puoi ricordare facilmente la [3] per analogia con la formula dell'area di un trapezio di basi a_1 e a_n e altezza n:



TEOREMA 3 | Somma dei primi *n* termini di una progressione aritmetica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione **aritmetica** è espressa dalla formula:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad [3]$$

dove a_1 è il primo termine e a_n è l'n-esimo termine della progressione.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che, per come è definita una progressione aritmetica, i suoi termini si possono ricavare, alternativamente:

- a partire dal primo termine, a_1, aggiungendo successivamente la ragione d;
- a partire dall'n-esimo, a_n, sottraendo successivamente d.

Questa osservazione consente di riscrivere la somma S_n in due modi diversi.

$$\begin{cases} S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + a_n \\ S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + a_1 \end{cases}$$

Sommando queste due equazioni membro a membro otteniamo:

$$2S_n = \underline{(a_1 + a_n)} + \underline{(a_1 + a_n)} + \underline{(a_1 + a_n)} + \ldots + \underline{(a_1 + a_n)}$$

Al secondo membro di quest'ultima equazione ci sono n addendi uguali ad $a_1 + a_n$, quindi l'equazione equivale a:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \qquad \text{da cui:} \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

OSSERVA

Il caso $q = 1$, escluso dal teorema, è immediato. Infatti una progressione geometrica di ragione $q = 1$ è una successione costante, costituita da termini tutti uguali al primo. Pertanto: $S_n = n \cdot a_1$

TEOREMA 4 | Somma dei primi *n* termini di una progressione geometrica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione **geometrica**, il cui primo termine è a_1 e la cui ragione è q, con $q \neq 1$, è espressa dalla formula:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad [4]$$

DIMOSTRAZIONE

I primi n termini di una progressione geometrica in cui il primo termine è a_1 e la ragione è q si possono esprimere nella forma:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-2}, a_1q^{n-1}$$

Pertanto la somma S_n dei termini della progressione e il prodotto qS_n della ragione della progressione per S_n valgono:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \\ qS_n = \quad a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro dalla prima equazione la seconda, i termini sottolineati con lo stesso colore si elidono; perciò abbiamo:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

Poiché stiamo supponendo $q \neq 1$, possiamo dividere i due membri per $1-q$, ottenendo così la [4]:

$$S_n = a_1\frac{1-q_n}{1-q}$$

ESEMPIO Risoluzione del problema di inizio paragrafo

Siamo ora in grado di completare la risoluzione del problema iniziale, cioè stabilire quale delle due proposte risulta più conveniente per il sig. Umberto. Osserviamo che:

$$a_n = 15\,000 + 1000(n-1) \qquad \text{e} \qquad b_n = 12\,000(1{,}1)^{n-1}$$

a. La somma delle retribuzioni offerte dalla compagnia A nei primi dieci anni è data da:

$$a_1 + \dots + a_{10} \underbrace{=}_{\text{Teorema 3}} \frac{10(a_1+a_{10})}{2} \underbrace{=}_{a_{10}\,=\,15000\,+\,9\,\cdot\,1000\,=\,24000} \frac{10(15\,000+24\,000)}{2} = 195\,000 \text{ euro}$$

b. La somma delle retribuzioni offerte dalla compagnia B nei primi dieci anni è data da:

$$b_1 + \dots + b_{10} \underbrace{=}_{\text{Teorema 4}} 12\,000\frac{1-(1{,}1)^{10}}{1-1{,}1} \simeq 191\,249 \text{ euro}$$

Dunque al sig. Umberto conviene scegliere l'offerta della compagnia A.

ESEMPIO Somma di numeri naturali

Determiniamo la somma dei primi 100 numeri naturali (escluso lo zero).

I primi 100 numeri naturali, escludendo lo zero:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100$$

si possono pensare come i primi 100 termini di una progressione aritmetica il cui primo termine è $a_1 = 1$ e la cui ragione è $d = 1$. In base alla formula [3] abbiamo allora:

$$S_{100} = \frac{100}{2}(1+100) = 5050 \qquad \text{Formula [3] con } n = 100,\ a_1 = 1,\ a_{100} = 100$$

Nei problemi in cui occorre calcolare la somma dei termini di una successione, si utilizza spesso il simbolo di sommatoria, che è definito come segue:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{\text{si legge: «somma per } k \text{ che va da 1 a } n \text{ di } a_k\text{»}} a_k$$

Con questa notazione il **Teorema 4** può per esempio essere espresso come segue:

$$\sum_{k=1}^{n} a_1q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

DALLA STORIA

Stando a quanto riportano alcune fonti, la richiesta di calcolare la somma dei numeri naturali compresi tra 1 a 100 (*vedi* esempio qui a fianco) fu posta al grande Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dal suo maestro di scuola elementare, all'età di 10 anni. Gauss fornì la risposta esatta in brevissimo tempo, evidentemente sfruttando la formula del Teorema 3.

Esercizi p. 171

3. Limiti di successioni

Le definizioni e i teoremi fondamentali

Essendo le successioni particolari *funzioni*, possiamo anche per esse definire l'operazione di limite. La situazione risulta semplificata rispetto al caso delle funzioni definite in R, poiché l'insieme N ammette *un solo punto di accumulazione*, $+\infty$. Di conseguenza, l'operazione di limite per una successione a_n può essere definita solo per $n \to +\infty$.

Possono presentarsi tre casi:

1. se il limite della successione è un numero reale l, diremo che la successione è **convergente** e scriveremo:

   $$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

2. se il limite della successione è $+\infty$ oppure $-\infty$, diremo che la successione è **divergente** e scriveremo:

   $$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \text{ oppure } \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

3. se il limite della successione non esiste, diremo che la successione è **irregolare** (o **indeterminata** od **oscillante**).

Studiare il **carattere** di una successione significa stabilire se essa è convergente, divergente o irregolare. Adattando la definizione generale di limite presentata nell'**Unità 2**, possiamo dare le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE | Limite di una successione convergente

Diciamo che la successione a_n **converge** al limite finito $l \in$ R quando, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $N > 0$ (dipendente da ε) tale che per ogni $n > N$ risulta:

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

L'illustrazione geometrica della definizione di successione convergente è riportata in **Fig. 10**: per $n > N$ i punti appartenenti al grafico della successione (colorati in rosso) non «escono più» dalla striscia individuata dalle rette di equazioni $y = l - \varepsilon$ e $y = l + \varepsilon$.

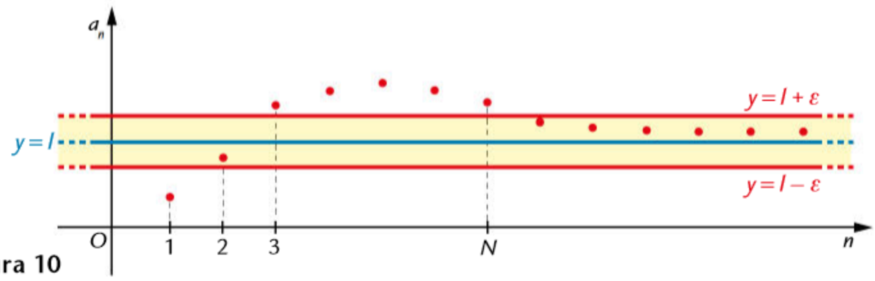


Figura 10

DEFINIZIONE | Limite di una successione divergente

Diciamo che la successione a_n **diverge** a $+\infty$ (oppure a $-\infty$) quando, in corrispondenza di ogni $M > 0$, è possibile determinare un numero $N > 0$ (dipendente da M) tale che, per ogni $n > N$, risulta:

$$a_n > M \quad (\text{oppure } a_n < -M)$$

Per i limiti di successioni sussistono teoremi analoghi a quelli già visti per i limiti di funzioni; ci limitiamo a enunciare qui di seguito i vari teoremi, «adattati» al caso delle successioni. Negli enunciati utilizzeremo la locuzione «definitivamente», che significa «*per n abbastanza grande*», ossia per n maggiore di un opportuno numero N. Per esempio, la successione definita da $a_n = 2n - 50$ è *definitivamente* positiva perché *per* $n > 25$ risulta $a_n > 0$.

TEOREMA 5 | Teorema del confronto per le successioni

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni per cui risulta definitivamente $a_n \leq b_n \leq c_n$.
Se a_n e c_n convergono a $l \in \mathbb{R}$, allora anche b_n converge a l.

TEOREMA 6 | Esistenza del limite per successioni monotone

a. Una successione crescente e superiormente limitata è convergente.
b. Una successione decrescente e inferiormente limitata è convergente.

RIFLETTI
Dal Teorema 6 segue che ogni successione monotòna e limitata è convergente.

L'ultimo teorema che enunciamo non è un «adattamento» di analoghi teoremi per le funzioni, ma un teorema nuovo che mette in relazione i limiti di *funzioni* e i limiti di *successioni*.

TEOREMA 7 | Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio D di una funzione f. Allora risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \text{ con } l \in \mathbb{R}^*$$

se e solo se, per ogni successione a_n, a valori in $D - \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

È opportuno fare alcune osservazioni.

- Dal **Teorema 7** segue come corollario che se f è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e a_n è una successione convergente, allora (*vedi* nota qui a fianco):
$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to +\infty} a_n)$$
- Il **Teorema 7** è utile per dimostrare rigorosamente la *non esistenza* del limite di una funzione. Precisamente, per mostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste, è sufficiente trovare due successioni a_n e b_n entrambe convergenti a x_0 e tali che le due successioni $f(a_n)$ e $f(b_n)$ abbiano limiti diversi per $n \to +\infty$.

RIFLETTI
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ il limite cui converge la successione a_n; per la continuità della funzione f sarà $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e per il Teorema 7 $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$.
Da quest'ultima uguaglianza, tenendo conto che $x_0 = \lim_{n \to +\infty} a_n$, segue $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to +\infty} a_n)$.

ESEMPIO Dimostrazione della non esistenza di un limite

Dimostriamo che $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ non esiste.

Consideriamo le successioni $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ e $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Entrambe convergono a 0 per $n \to +\infty$; se prendiamo in considerazione la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} \sin 2n\pi = 0 \text{ e } \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

Dunque avvicinandoci a 0 in due modi diversi, tramite le successioni a_n e b_n, le successioni dei corrispondenti valori assunti da $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $f(a_n)$ e $f(b_n)$, hanno due comportamenti diversi (infatti $f(a_n) \to 0$ mentre $f(b_n) \to 1$): per il **Teorema 7**, possiamo concludere che il limite per $x \to 0$ della funzione f non esiste.

Il calcolo del limite di una successione

Tutte le regole valide per le funzioni, relative al calcolo dei limiti di somme, prodotti, quozienti ecc. **valgono anche per le successioni**. In particolare, dai limiti notevoli sulle funzioni si deducono (in forza del **Teorema 7**, prendendo $a_n = n$) i limiti notevoli per le successioni a pagina seguente.

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty$ per ogni $a > 1$, $b > 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0$ per ogni $a > 1$, $b > 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

Presentiamo infine due limiti notevoli, non provenienti come i precedenti dalla «restrizione» a N dei limiti notevoli per le funzioni, che forniscono esempi di *infiniti* di ordine *superiore agli esponenziali*:

RICORDA
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ per ogni $a > 1$

  $n!$ è un infinito di ordine superiore a qualsiasi esponenziale di base maggiore di 1
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

  n^n è un infinito di ordine superiore a $n!$

ESEMPI Studio del carattere di una successione

Stabiliamo il carattere delle successioni così definite:

a. $a_n = \frac{n^2+1}{2n+1}$ **b.** $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

c. $a_n = (-1)^n$ **d.** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

a. Con le ordinarie tecniche di calcolo dei limiti che si presentano sotto forma di rapporti di polinomi si vede che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n+1} = +\infty$$

La successione è quindi divergente.

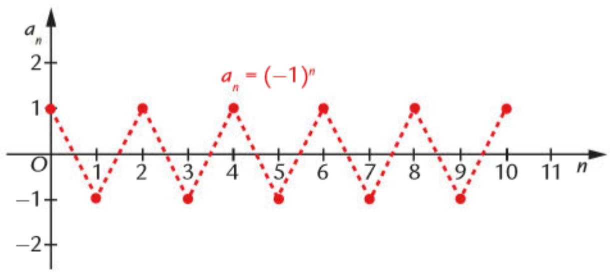
b. Calcoliamo il limite di a_n per $n \to +\infty$ con le tecniche di calcolo già viste per le funzioni.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)}_{\substack{\text{forma indeterminata} \\ +\infty\ -\infty}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$$

Dunque la successione converge a 0.

c. Poiché $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ è dispari, è intuitivo che i valori della successione oscillano tra -1 e 1, dunque la successione è irregolare (*vedi* figura).

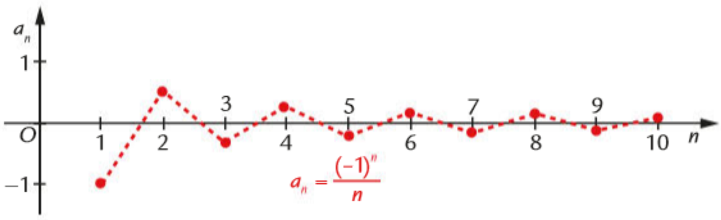


Più formalmente, si potrebbe dimostrare che se una successione tende a un limite l, finito o infinito, per $n \to +\infty$, allora anche ogni sua sottosuccessione (cioè ogni successione ottenuta da quella originaria togliendone alcuni elementi, senza modificare la posizione dei rimanenti) tende allo stesso limite l. In questo caso le due sottosuccessioni di a_n formate dai termini di indice pari e dai termini di indice dispari hanno limiti diversi per $n \to +\infty$ (la prima tende a 1 e la seconda a -1): ne segue che la successione a_n è irregolare.

d. Osserviamo preliminarmente che la successione $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ è il rapporto tra la successione $b_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$ che è *irregolare*, e la successione $c_n = n$, che è divergente. Gli ordinari teoremi sul limite di un rapporto **non** possono essere applicati, perché b_n è *irregolare*; perciò occorre seguire una via alternativa. Osserviamo che:

$$0 \le \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \text{ per ogni } n \ge 1$$

e che $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi per il teorema del confronto anche $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = |a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$. D'altra parte, dalla definizione di limite di una successione convergente segue subito che $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$, dunque anche la successione originaria converge a 0 (*vedi* figura).



Ragionando in modo simile all'esempio **d** si potrebbe dimostrare, più in generale, che se una successione è il prodotto di una successione convergente a 0 e di una successione limitata, allora la successione data converge a 0.

TEOREMA 8 | Prodotto tra una successione infinitesima e una limitata

Siano a_n e b_n due successioni tali che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ e $|b_n| < M$ per un certo M e per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Allora risulta: $\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Esercizi p. 179

4. Principio di induzione

In questo paragrafo introduciamo una nuova tecnica di dimostrazione, il cosiddetto **principio di induzione**, e ne presentiamo alcune applicazioni.

Che cos'è il principio di induzione?

Il principio di induzione è un *tipo di ragionamento* utilizzato per *dimostrare* che una proprietà vale per ogni numero naturale n; esso è fondato sui seguenti passi:

1. si considera una proposizione, diciamo $P(n)$, dipendente da $n \in \mathbb{N}$, che si vuole dimostrare essere vera per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. si dimostra che la proposizione $P(n)$ è vera per $n = 0$;
3. si dimostra che, comunque fissato k, con $k \ge 0$, se è vera la proposizione $P(k)$, ottenuta per $n = k$, allora è vera anche la proposizione successiva $P(k+1)$, ottenuta per $n = k + 1$.

A questo punto siamo nella seguente situazione: dal passo **2** sappiamo che $P(0)$ è vera; dal passo **3** applicato con $k = 0$ possiamo dedurre che anche $P(1)$ è vera; possiamo poi applicare ancora la **3** con $k = 1$ e dedurre, a partire dalla verità di $P(1)$, che anche la proposizione $P(2)$ è vera; poi da $P(2)$, applicando sempre la **3**, deduciamo che anche $P(3)$ è vera, *e così via*; deduciamo in questo modo che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$. Il principio di induzione rende rigoroso questo «e così via».
Questo ragionamento può partire, invece che da $n = 0$, da un opportuno $n = n_0 \in \mathbf{N}$, perciò il principio di induzione può essere enunciato in forma *più generale* come segue.

PER COMPRENDERE MEGLIO

Il «meccanismo» alla base del principio di induzione si può assimilare al cosiddetto «effetto domino». Immagina di disporre le tessere del domino in posizione verticale, in ordine e affiancate. Supponi:
a. di abbattere la prima tessera (con un colpo di dita, per esempio);
b. che le tessere siano così ravvicinate che la caduta di una qualsiasi di esse provoca la caduta della successiva. Inevitabilmente verranno abbattute tutte le tessere, nessuna esclusa!

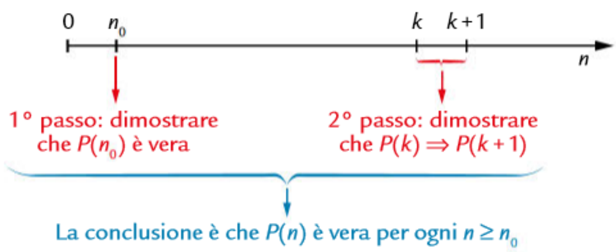
PRINCIPIO | Principio di induzione

Consideriamo una proposizione $P(n)$ (in particolare una uguaglianza o disuguaglianza), dipendente dalla variabile n, con $n \in \mathbf{N}$. Supponiamo che siano verificate le seguenti due condizioni:

a. la proposizione sia vera per un certo $n = n_0$, con $n_0 \in \mathbf{N}$;
b. comunque fissato un intero k con $k \geq n_0$, supposto che la proposizione $P(n)$ sia vera per $n = k$, allora è possibile dimostrare che la proposizione $P(n)$ è vera anche per $n = k + 1$.

Allora possiamo dedurre che la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Possiamo riassumere il metodo di dimostrazione per induzione nel seguente schema:



Particolare attenzione va prestata alla condizione **b**; **non** bisogna dimostrare che la proposizione $P(k + 1)$ è vera, ma bisogna provare che $P(k + 1)$ è *deducibile* da $P(k)$, cioè che $P(k + 1)$ è vera tutte le volte che lo è $P(k)$. In questo passo dell'applicazione del principio di induzione l'*ipotesi*, detta **ipotesi di induzione**, è quindi che $P(n)$ sia vera per $n = k$, mentre *la tesi* è che $P(n)$ sia vera anche per $n = k + 1$.
Alcuni esempi chiariranno meglio le cose.

ESEMPIO Dimostrazione per induzione di una disuguaglianza

Dimostriamo che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

La proposizione $P(n)$ che vogliamo dimostrare essere vera per ogni $n \in \mathbf{N}$ è in questo caso la disuguaglianza «$2^n > n$».

▶ **1° passo** **Dimostriamo che $P(0)$ è vera**

Si tratta di dimostrare che $2^n > n$ è vera per $n = 0$. Ciò è ovvio poiché $2^0 = 1 > 0$.

▶ **2° passo** **Dimostriamo che se $P(n)$ è vera per $n = k$, allora è vera anche per $n = k + 1$**

Sia $k \geq 0$ fissato. Assumiamo che $P(k)$ sia vera, cioè che:

$2^k > k$ Ipotesi di induzione

Vogliamo dimostrare che allora $P(k + 1)$ è vera, cioè che $2^{k+1} > k + 1$. A questo scopo procediamo come segue, a partire dall'ipotesi di induzione:

$2^k > k \Rightarrow$	Ipotesi di induzione
$\Rightarrow 2^k + 2^k > k + 2^k \Rightarrow$	Aggiungendo ai due membri 2^k
$\Rightarrow 2^k \cdot 2 > k + 2^k \Rightarrow$	Osservando che $2^k + 2^k = 2^k(1 + 1) = 2^k \cdot 2$
$\Rightarrow 2^{k+1} > k + 2^k$	Proprietà delle potenze

[5]

Ora, osserviamo che per $k \geq 0$ è $2^k \geq 1$, quindi $k + 2^k \geq k + 1$, pertanto:

$$\underbrace{2^{k+1} > k + 2^k}_{[5]} \geq k + 1 \Rightarrow \underbrace{2^{k+1} > k + 1}_{P(k+1)}$$

Dunque $P(k + 1)$ è vera se è vera $P(k)$.

▶ **3° passo** **Concludiamo**

Essendo verificate entrambe le condizioni previste dal principio di induzione, possiamo concludere che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO **Dimostrazione per induzione di un'uguaglianza**

Dimostriamo per induzione che $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$.

La proposizione $P(n)$ che vogliamo dimostrare essere vera per ogni $n \geq 1$ è in questo caso l'uguaglianza «$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n\,(n+1)(2n+1)$».

▶ **1° passo** **Dimostriamo che $P(1)$ è vera**

Per $n = 1$ l'uguaglianza che vogliamo dimostrare fornisce:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 1 = 1$$

dunque è vera.

▶ **2° passo** **Dimostriamo che se $P(n)$ è vera per $n = k$, allora è vera anche per $n = k + 1$**

Sia $k \geq 1$ fissato. Assumiamo che $P(k)$ sia vera, cioè che:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$ Ipotesi di induzione

Vogliamo dimostrare che allora $P(k + 1)$ è vera, cioè che:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]$$

ossia:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)}_{P(k+1)}$$

A questo scopo scriviamo la seguente catena di uguaglianze:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 =$$ Per ipotesi di induzione

$$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] =$$ Raccogliendo

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) =$$ Svolgendo i calcoli all'interno della parentesi quadra

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$ Scomponendo il trinomio di secondo grado

Dunque $P(k + 1)$ è vera se è vera $P(k)$.

▶ **3° passo** **Concludiamo**

Essendo verificate entrambe le condizioni previste dal principio di induzione, possiamo concludere che l'uguaglianza data è vera per ogni $n \geq 1$.

Approfondimento
Il gioco della Torre di Hanoi

PER SAPERNE DI PIÙ **Alcune somme notevoli**

È bene riflettere su alcune uguaglianze notevoli introdotte in questa Unità.

1. Nel **Paragrafo 2** abbiamo ricavato la formula per calcolare la somma dei primi n termini di una progressione *aritmetica*; da essa segue in particolare la formula per calcolare *la somma dei primi n numeri naturali*, a partire da 1:

$$1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad [6]$$

Una visualizzazione geometrica della [6] è illustrata in un caso particolare in **Fig. 11**.

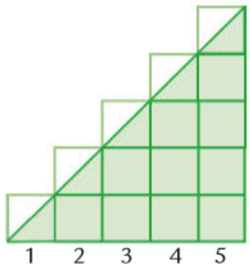


Figura 11 La somma delle aree dei 5 quadrati di lato 1 è uguale alla somma delle aree del triangolo colorato in verde e dei triangoli più piccoli non colorati.
Ne segue che:

$$\underbrace{1+2+...+5}_{\text{somma delle aree dei quadrati}} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 5^2}_{\text{area del triangolo verde}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 5}_{\text{area complessiva dei 5 triangoli non colorati di area 1/2}} = \frac{1}{2}\cdot 5(5+1)$$

Considerando n quadrati di lato 1 e ragionando in modo analogo si ottiene la [6].

2. Nell'esempio precedente abbiamo dimostrato per induzione la formula che esprime *la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali*, a partire da 1:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad [7]$$

Una visualizzazione geometrica della [7] è illustrata in **Fig. 12**.

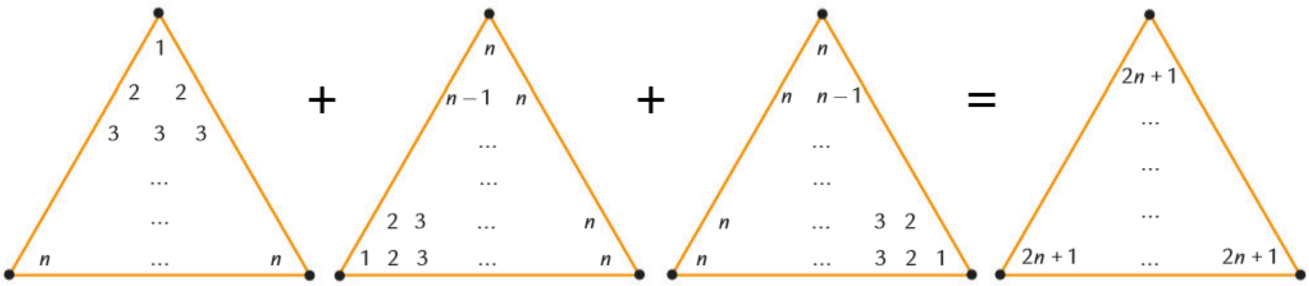


Figura 12 La somma dei numeri contenuti in ciascuno dei primi tre triangoli è

$$1+\underbrace{2+2}_{2^2}+\underbrace{3+3+3}_{3^2}+...=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

(osserva che il secondo e il terzo triangolo sono «rotazioni» del primo). Il quarto triangolo contiene $1+2+...+n$ numeri (1 sulla prima riga, 2 seconda, ecc.) ciascuno uguale a $2n+1$, quindi la somma dei numeri contenuti nel quarto triangolo è $(1+2+...+n)(2n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$.

Ne segue che:

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1),$$ da cui la [7].

3. Sempre per induzione si potrebbe provare la seguente formula, che esprime *la somma dei cubi dei primi n numeri naturali*, a partire da 1:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2=(1+2+\ldots+n)^2 \qquad [8]$$

Una visualizzazione geometrica della [8] è illustrata in un caso particolare in **Fig. 13**.

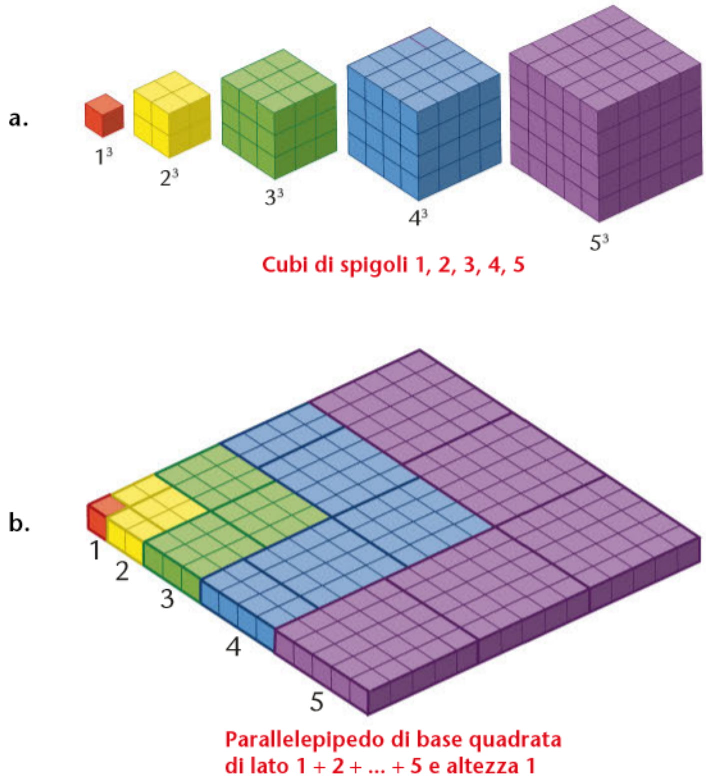


Figura 13 La somma dei volumi dei cubi nella fig. a è uguale al volume del parallelepipedo nella fig. b, ottenuto ricomponendo i cubetti di spigolo 1 in fig. a:

$1^3 + 2^3 + \ldots + 5^3 = (1 + 2 + \ldots + 5)^2 \cdot 1 = (1 + 2 + \ldots + 5)^2$

Considerando nella fig. a n cubi di lato 1, 2, ..., n e procedendo in modo analogo si ottiene la [8].

Utilizzando il simbolo di sommatoria, la [6], la [7] e la [8] si scrivono rispettivamente:

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Esercizi p. 183

Percorso delle idee

Successioni e principio di induzione

Successione

Una funzione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali, eventualmente privato di alcuni suoi elementi.

Progressione aritmetica

Una successione in cui la *differenza* tra un termine (a partire dal secondo) e il precedente si mantiene costante.
La differenza costante si chiama *ragione* della progressione.

ESEMPIO

La successione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5... è una progressione aritmetica di ragione uguale a 1.

Termine generale se il primo termine è a_1 e la ragione è d

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

ESEMPIO

La progressione aritmetica in cui $a_1 = 2$ e $d = 3$ ha termine generale $a_n = 2 + 3(n - 1)$ cioè risulta $a_n = 3n - 1$.

Somma dei primi n termini a partire da a_1

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

ESEMPIO

La somma 1 + ... + 50 dei primi 50 numeri naturali diversi da zero, essendo in questo caso

$$a_1 = 1,\ a_n = a_{50} = 50$$

è data da:

$$S_{50} = \frac{50(1 + 50)}{2} = 1275$$

Progressione geometrica

Una successione in cui il *quoziente* tra un termine (a partire dal secondo) e il precedente si mantiene costante.
Il quoziente costante si chiama *ragione* della progressione.

ESEMPIO

La successione delle potenze di due 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ... è una progressione geometrica di ragione uguale a 2.

Termine generale se il primo termine è a_1 e la ragione è q

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

ESEMPIO

La progressione geometrica in cui $a_1 = 2$ e $q = 3$ ha termine generale $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Somma dei primi n termini a partire da a_1, se la ragione è q

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ESEMPIO

La somma $2^0 + ... + 2^9$ delle prime 10 potenze di 2 (a partire dalla potenza di esponente zero), essendo

$$a_1 = 1,\ q = 2$$

è data da:

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1$$

Convergenza e divergenza

Una successione a_n il cui limite per $n \to +\infty$ risulta:
- *finito*, è detta *convergente*;
- *infinito*, è detta *divergente*.

ESEMPI

$a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ è convergente perché $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 2$

$a_n = n^2$ è divergente perché $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Limiti notevoli

Valgono limiti notevoli analoghi a quelli visti per le funzioni reali di variabile reale. Inoltre:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a > 1 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Successione definita in modo ricorsivo

Una successione che è definita assegnando il primo termine (i primi termini) e la legge che permette di determinare ciascun termine in funzione del precedente (dei precedenti).

ESEMPIO

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 1 + a_n \end{cases}$$

Alcuni termini della successione sono:

$a_2 = 1 + a_1 = 1 + 3 = 4$

$a_3 = 1 + a_2 = 1 + 4 = 5$

Principio di induzione

Se una proposizione $P(n)$, dipendente dalla variabile $n \in \mathbf{N}$, è tale che:
1. $P(n)$ è vera per $n = n_0$;
2. se $P(k)$ è vera, allora anche $P(k+1)$ è vera, per ogni prefissato valore di k, con $k \geq n_0$;

allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Somme notevoli

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$