1. Sia A_k la seguente matrice reale:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette inversa.

(b) Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che A_k ammette inversa. Si calcoli A_k^{-1} usando la formula $A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^*$.

(a) A_k ammette inversa $\iff \det A_k \neq 0 \iff \operatorname{rk} A_k = 3$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 \end{bmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 \end{bmatrix} \underset{E_{31}(k)}{\overset{E_{21}(1-k)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rk} A_k = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} \qquad \det A_k = 2k^2$$

$\frac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$ per il prodotto della diagonale

Dunque A_k è invertibile se e solo se $k \neq 0$.

(b) Supponiamo che $k \neq 0$.

$$\det A_k = 2k^2 \qquad A_k^T = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_k^* = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & k-1 & -k \\ 2 & k & -k \\ 2k & k^2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_k^{-1} = \frac{1}{2k^2} \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}k & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2}k & 1 & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{2k} & 0 & \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definito in Esempio 5.2(2), si consideri il seguente sottoinsieme per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{S}_t = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = t\}.$$

(a) Si trovino i valori di t per cui l'insieme $\mathscr{S}_t$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Sia $\mathscr{U}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ generato da f e g dove $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si trovi una base dell'intersezione $\mathscr{U} \cap \mathscr{S}_0$.

(a) $\mathcal{S}_t$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$\underset{\text{def. di sottospazio}}{\iff} \quad \forall f, g \in \mathcal{S}_t \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ abbiamo che}$$

(i) $f + g \in \mathcal{S}_t$

(ii) $\alpha f \in \mathcal{S}_t$

Notiamo che $f + g \in \mathcal{S}_t$

$$\underset{\text{def. di } \mathcal{S}_t}{\iff} \quad (f+g)(0) = t$$

$$\underset{\text{def. dell' addizione in } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}{\iff} \quad \underbrace{f(0) + g(0)}_{\substack{\| \\ t + t \\ \| \\ 2t}} = t$$

$f, g \in \mathcal{S}_t \Rightarrow f(0) = t = g(0)$

$$\iff \quad t = 0$$

Inoltre abbiamo che

$$\alpha f \in \mathcal{S}_t \underset{\text{def. di } \mathcal{S}_t}{\Longleftrightarrow} (\alpha f)(0) = t$$

$$\underset{\substack{\text{def. di} \\ \text{molt. in } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}}{\Longleftrightarrow} \alpha \cdot f(0) = t$$

$$\overset{\shortparallel}{\alpha t} \qquad f(0) = t$$

Se $\alpha t = t$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $t = 0$ (ad esempio, se $\alpha = 0$).

Quindi $\mathcal{S}_t$ è un sottospazio se e solo se $t = 0$.

(b) $\mathcal{U} = \langle f, g \rangle = \{ \overset{\alpha \sin}{\overset{\shortparallel}{\alpha f}} + \overset{\beta \cos}{\beta g} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_0 = \{ \alpha f + \beta g \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } (\alpha f + \beta g)(0) = 0 \}$

$$= \{\alpha f + \beta g \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \underbrace{\alpha \cancelto{0}{\sin} 0 + \beta \underbrace{\cos 0}_{=1}}_{=\beta} = 0\}$$

$$= \{\alpha f + \beta g \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \beta = 0\}$$

$$= \{\alpha f \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle f \rangle.$$

Quindi $\{\underbrace{f}_{=\sin x}\}$ è una base di $U \cap S_0$.

3. Sia $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione data da

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y+z \\ 3x-3y+3z \end{pmatrix}$$

per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

(a) Si verifichi che f è lineare.

(b) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica e si dica se f è un isomorfismo.

(c) Si calcolino le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ e $\mathrm{N}(f) \subseteq \mathbb{C}^3$.

(d) Si verifichi che l'insieme $\mathscr{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

(e) Si verifichi che l'insieme $\mathscr{B} = \{w_1, w_2\}$ con $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{C}^2$.

(f) Si determini la matrice associata a f rispetto alla base $\mathscr{C}$ di $\mathbb{C}^3$ e alla base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{C}^2$.

2 (a) f è lineare se e solo se

(i) $f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^3$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in \mathbb{C}^3 \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

(i) Siano $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

$$f(v+w) = f\left(\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (v_1+w_1) - (v_2+w_2) + (v_3+w_3) \\ 3(v_1+w_1) - 3(v_2+w_2) + 3(v_3+w_3) \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$f(v) + f(w) = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 + v_3 \\ 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 - w_2 + w_3 \\ 3w_1 - 3w_2 + 3w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 + v_3 + w_1 - w_2 + w_3 \\ 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 + 3w_1 - 3w_2 + 3w_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

$$f\left(\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha v_1 - \alpha v_2 + \alpha v_3 \\ 3\alpha v_1 - 3\alpha v_2 + 3\alpha v_3 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\alpha f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} v_1 - v_2 + v_3 \\ 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha (v_1 - v_2 + v_3) \\ \alpha(3v_1 - 3v_2 + 3v_3) \end{pmatrix}$$

(b) La matrice associata a f rispetto alla base canonica è $A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

f è un isomorfismo $\iff$ A è invertibile

Siccome A non è una matrice quadrata, A non è invertibile e quindi f non è un isomorfismo.

(c) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f_A) = C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di una forma ridotta di A formano una base di $C(A)$.

Calcoliamo una forma ridotta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\operatorname{Im} f = C(A)$.

$$N(f) = N(f_A) = N(A) = \{ v \in \mathbb{C}^3 \mid Av = 0 \}.$$

Risolviamo il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{sistema} \xrightarrow{\sim} \text{lineare} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

equivalente

assegniamo parametri alle $\rightsquigarrow$ colonne non-dom $x_2 = t$, $x_3 = s$

$$\begin{cases} x_1 = t - s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$$

Dunque $N(f) = N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{C} \right\}$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(f)$.

(d) Consideriamo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $C(C) = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Mostriamo che $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $C(C)$ e quindi $\dim_{\mathbb{C}} C(C) = 3$. Perciò $C(C)$ è un sottospazio di dimensione $3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3$, abbiamo $C(C) = \mathbb{C}^3$.

Le colonne di C che corrispondono alle colonne dominanti di una forma ridotta di C formano una base di $C(C)$.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array} \overset{E_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{2}(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

(e) Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mostriamo che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $C(B)$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Le colonne di B corrispondono a colonne dominanti di U, quindi $\mathcal{B}$ è una base di $C(B)$.

Perciò $C(B)$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^2$ di dimensione $2 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$, abbiamo $C(B) = \mathbb{C}^2$, cioè $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{C}^2$.

(f) La matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{E}$ di $\mathbb{C}^3$ ed alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^2$ è la matrice $A = \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}} \; [f(v_2)]_{\mathcal{B}} \; [f(v_3)]_{\mathcal{B}} \right)$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad f(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(v_2) &= -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(v_3) &= 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Sia $\mathscr{C}$ la base di $\mathbb{C}^3$ dell'esercizio 3(d) e sia $\mathscr{D} = \{u_1, u_2, u_3\}$ dove $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overset{u_2}{\cancel{v_2}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overset{u_3}{\cancel{v_3}} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{D}$ è una base di $\mathbb{C}^3$ e si calcoli la matrice del cambio di base $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$.

$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base se e solo se tutte le colonne di $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ corrispondono a colonne dominanti di una forma ridotta di $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \overset{E_2(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \overset{E_3(-\frac{1}{7})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per definizione, la matrice del cambio di base $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ è la matrice associata a

$$\mathbb{C}^3 \xrightarrow{c_{\mathcal{E}}^{-1}} \mathbb{C}^3 \xrightarrow{c_{\mathcal{D}}} \mathbb{C}^3$$ rispetto alla base canonica.

Per 7.4, la matrice associata a $c_{\mathcal{E}}^{-1}$ è la matrice $M = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice associata a $C_\mathcal{D}$ è la matrice N^{-1}

dove $N = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo N^{-1} :

$$\det N = \det \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = 63 - 56 = 7$$

Laplace Col 1.

$$N^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^* = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 63 & -70 & -56 \\ -8 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\det N} N^* = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & -70 & -56 \\ -8 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -8 \\ -\frac{8}{7} & \frac{9}{7} & \frac{8}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice del cambio di base è

$$A_{\mathcal{C}\to\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -8 \\ -\frac{8}{7} & \frac{9}{7} & \frac{8}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -10 & 1 \\ -1 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$$