Università degli Studi di Verona, A.A. 2022/2023
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi per il Corso di ALGEBRA LINEARE

Applicazioni lineari

1. Si dica se sono lineari le seguenti funzioni:

   (a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-4z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ per ogni $x,y,z \in \mathbb{R}$.

   (b) $g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dove $g\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $w,z \in \mathbb{C}$.

   (c) $g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dove $g\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $w,z \in \mathbb{C}$.

   (d) $g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dove $g\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) = |w|$ per ogni $w,z \in \mathbb{C}$.

2.[2] Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ y+z \\ 2z-x \end{pmatrix}$. Si determinino delle basi dello spazio nullo $N(f)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f.

3.[2] Si determinino le dimensioni dello spazio nullo $N(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ e del sottospazio $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ e delle basi di tali sottospazi per le seguenti matrici:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+y+6z \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

   (b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

   $$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   di $\mathbb{R}^3$ e la base canonica in $\mathbb{R}^2$.

   (c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e la base

   $$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   di $\mathbb{R}^2$.

   (d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e la base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^2$.

5.[2] Siano V e W due spazi vettoriali di basi rispettivamente $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2\}$, e sia $f\colon V \to W$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice (rispetto alle basi date):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Si prenda per V la nuova base $v_1' = v_2 + v_3$, $v_2' = v_1 + v_3$, $v_3' = v_1 + v_2$. Qual è la nuova matrice A' rispetto alle basi $\{v_1', v_2', v_3'\}$ e $\{w_1, w_2\}$?

(b) Si prenda per W la nuova base $w_1' = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ e $w_2' = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$. Qual è la matrice A'' di f rispetto alle basi $\{v_1', v_2', v_3'\}$ e $\{w_1', w_2'\}$?

6. Sia $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + iy \\ y + ix \end{pmatrix}$.

(a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determini la matrice B associata a f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -2i \end{pmatrix} \right\}$$

del dominio e la base canonica del codominio.

(c) Si determini la matrice D associata a f rispetto alla base canonica del dominio e la base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

del codominio.

(d) Si determini la matrice C associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e la base $\mathcal{D}$ del codominio.