Indice

Serie Numeriche

Definizioni Base

Una **serie numerica** è un'espressione del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

La **somma parziale n-esima** è: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Una serie può essere:

- **Convergente**: $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$
- **Divergente**: $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$
- **Indeterminata**: $\lim_{n\to\infty} S_n$ non esiste

Serie di Riferimento Fondamentali

1. Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ se } |r| < 1$$

- Se $|r| \geq 1$, la serie diverge

2. Serie Armonica Generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- **Converge** se $\alpha > 1$
- **Diverge** se $\alpha \leq 1$

Criteri di Convergenza - Spiegazione Dettagliata

Criterio del Confronto

Enunciato: Siano a_n e b_n successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.

- Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

Criterio del Confronto Asintotico

Enunciato: Se $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$ (cioè $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$), allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Quando usarlo: Quando hai espressioni complicate che si comportano come qualcosa di più semplice.

Criterio del Rapporto

Enunciato: Sia a_n una successione a termini positivi. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$:

- $L < 1 \Rightarrow$ serie convergente
- $L > 1 \Rightarrow$ serie divergente
- $L = 1 \Rightarrow$ il criterio non decide

Quando usarlo: Con fattoriali, potenze di n, o quando hai a_{n+1} facilmente calcolabile.

Criterio della Radice

Enunciato: Sia a_n una successione a termini positivi. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$:

- $L < 1 \Rightarrow$ serie convergente
- $L > 1 \Rightarrow$ serie divergente
- $L = 1 \Rightarrow$ il criterio non decide

Criterio di Leibniz (Serie Alternanti)

Enunciato: Per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n > 0$: Se a_n è **decrescente** e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora la serie **converge**.

Risoluzione Passo-Passo degli Esercizi su Serie

METODO GENERALE:

PASSO 1: Analizza il termine generale a_n

- Identifica le funzioni coinvolte

- Studia il comportamento per $n \to \infty$

PASSO 2: Calcola il comportamento asintotico

- Usa gli sviluppi di Taylor per espressioni complicate
- Ricorda: $\sin(x) \sim x$, $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, $e^x \sim 1 + x$, $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

PASSO 3: Scegli il criterio appropriato

- **Confronto asintotico**: per termini complicati
- **Rapporto/Radice**: per potenze, fattoriali
- **Leibniz**: per serie alternanti

Esempio Dettagliato dall'Appello

Esercizio: Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^{2n}) \tan(1/n)}{\cos(1/n^2)}$$

SOLUZIONE PASSO-PASSO:

PASSO 1: Analizziamo il comportamento asintotico per $n \to \infty$:

- $\tan(1/n) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$
- $\cos(1/n^2) \sim 1$ per $n \to \infty$

PASSO 2: Distinguiamo i casi per x:

Caso 1: $|x| > 1$

- $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \arctan(x^{2n}) = \frac{\pi}{2}$
- Quindi: $a_n \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$
- Poiché $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la serie **diverge**

Caso 2: $|x| = 1$

- $\arctan(x^{2n}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ per ogni n
- Quindi: $a_n \sim \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$
- La serie **diverge**

Caso 3: $x = 0$

- $a_n = 0$ per ogni n, quindi la serie **converge** (banalmente)

Caso 4: $0 < |x| < 1$

- $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$
- $\arctan(x^{2n}) \sim x^{2n}$ per $n \to \infty$
- Quindi: $a_n \sim \frac{x^{2n}}{n}$ per $n \to \infty$

Studiamo $\sum \frac{x^{2n}}{n}$ con il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2(n+1)}/(n+1)}{x^{2n}/n} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = x^2$$

Poiché $x^2 < 1$, la serie **converge**.

RISPOSTA FINALE: La serie converge per $|x| < 1$.

Calcolo Integrale

Integrali Indefiniti - Tecniche Complete

1. Integrazione per Parti

Formula: $\int u, dv = uv - \int v, du$

Regola ILATE per scegliere u:

- **I**nverse trig functions ($\arcsin x$, $\arctan x$, ecc.)
- **L**ogarithmic functions ($\log x$, $\ln x$)
- **A**lgebraic functions (x^n, polinomi)
- **T**rigonometric functions ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$)
- **E**xponential functions (e^x, a^x)

Esempio Dettagliato

Calcolare: $\int x^3 e^{-x} dx$

SOLUZIONE: Applichiamo per parti ripetutamente:

Prima applicazione:

- $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$
- $dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - \int (-e^{-x}) \cdot 3x^2 dx = -x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 e^{-x} dx$$

Seconda applicazione su $\int x^2 e^{-x} dx$:

- $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$

- $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\int x^2 e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$$

Terza applicazione su $\int xe^{-x}dx$:

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Risultato finale:

$$\int x^3 e^{-x}dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$$

2. Integrazione per Sostituzione

Metodo: Se $\int f(g(x))g'(x)dx$, poni $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$

Sostituzioni Standard:

- $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin t$
- $\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\tan t$
- $\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a\sec t$

Esempio con Sostituzione Trigonometrica

Calcolare: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

SOLUZIONE:

- Poniamo $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t, dt$
- $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2\cos t, dt}{2\cos t} = \int dt = t + C$$

Tornando alla variabile x: $t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

3. Frazioni Razionali

Per integrare $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\deg P < \deg Q$:

PASSO 1: Fattorizza $Q(x)$ **PASSO 2**: Decomponi in frazioni parziali **PASSO 3**: Integra termine per termine

Esempio Dettagliato

Calcolare: $\int \frac{1}{x^2-5x+4} dx$

SOLUZIONE:

PASSO 1: Fattorizziamo il denominatore $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

PASSO 2: Decomponiamo in frazioni parziali

$$\frac{1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

Troviamo A e B:

$$1 = A(x-4) + B(x-1)$$

Metodo dei valori particolari:

- Per $x = 1$: $1 = A(-3) \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$
- Per $x = 4$: $1 = B(3) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

PASSO 3: Integriamo

$$\int \frac{1}{x^2-5x+4} dx = \int \left(-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x-4)}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln|x-4| + C = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C$$

Integrali Impropri

Definizioni

Tipo I (estremi infiniti):

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

Tipo II (funzione illimitata): Se f ha singolarità in $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx\right)$$

Criteri di Convergenza per Integrali Impropri

Integrali di riferimento:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Esempio dall'Appello

Studiare la convergenza di: $\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\arctan x)^\alpha}{x^2-5x+4}dx$ al variare di α

SOLUZIONE:

L'integrale è improprio sia in 0 che in $+\infty$, e ha singolarità in $x = 1$ e $x = 4$.

Comportamento per $x \to +\infty$:

- $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$
- $(\sqrt{x}\arctan x)^\alpha \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha x^{\alpha/2}$
- $x^2 - 5x + 4 \sim x^2$

Quindi: $f(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha x^{\alpha/2-2}$ per $x \to +\infty$

L'integrale converge per $x \to +\infty$ se $\frac{\alpha}{2} - 2 < -1$, cioè $\alpha < 2$.

Equazioni Differenziali

Equazioni del Primo Ordine

1. A Variabili Separabili

Forma generale: $y' = f(x)g(y)$

Metodo di risoluzione:

1. Separa le variabili: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
2. Integra entrambi i membri: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$
3. Risolvi per y se possibile

Esempio

Risolvere: $y' = \frac{ty}{2\log y}$ con $y(0) = e^{-1}$

SOLUZIONE:

PASSO 1: Separiamo le variabili

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ty}{2\log y} \Rightarrow \frac{2\log y}{y}dy = tdt$$

PASSO 2: Integriamo entrambi i membri

$$\int \frac{2\log y}{y}dy = \int tdt$$

Per il primo integrale, poniamo $u = \log y$, $du = \frac{dy}{y}$:

$$\int 2udu = \int tdt \Rightarrow u^2 = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow (\log y)^2 = \frac{t^2}{2} + C$$

PASSO 3: Applichiamo la condizione iniziale $y(0) = e^{-1} \Rightarrow \log(e^{-1}) = -1$

$$(-1)^2 = \frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 1$$

SOLUZIONE: $(\log y)^2 = \frac{t^2}{2} + 1$

2. Lineari del Primo Ordine

Forma generale: $y' + a(x)y = b(x)$

Formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[\int b(x)e^{A(x)}dx + C \right]$$

dove $A(x) = \int a(x)dx$

Metodo Pratico Passo-Passo

PASSO 1: Calcola $A(x) = \int a(x)dx$ **PASSO 2**: Calcola $e^{A(x)}$ **PASSO 3**: Moltiplica l'equazione per $e^{A(x)}$ **PASSO 4**: Riconosci che il primo membro è $(ye^{A(x)})'$ **PASSO 5**: Integra entrambi i membri

Esempio Dettagliato dall'Appello

Risolvere: $y'(t) = -2ty(t) + t^3$ con $y(0) = 2025$

SOLUZIONE:

PASSO 1: Riscriviamo in forma standard

$$y' + 2ty = t^3$$

Qui $a(t) = 2t$ e $b(t) = t^3$.

PASSO 2: Calcoliamo $A(t)$

$$A(t) = \int 2tdt = t^2$$

PASSO 3: Calcoliamo $e^{A(t)} = e^{t^2}$

PASSO 4: Moltiplichiamo l'equazione per e^{t^2}

$$e^{t^2}y' + 2te^{t^2}y = t^3e^{t^2}$$

Il primo membro è $(ye^{t^2})'$.

PASSO 5: Integriamo

$$(ye^{t^2})' = t^3e^{t^2}$$

$$ye^{t^2} = \int t^3e^{t^2}dt$$

Per calcolare $\int t^3e^{t^2}dt$, notiamo che $t^3 = t \cdot t^2$ e usiamo integrazione per parti o il suggerimento dall'esercizio che $t^3 = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot t^2$:

$$\int t^3e^{t^2}dt = \frac{1}{2}\int t^2e^{t^2} \cdot 2tdt$$

Ponendo $u = t^2$, $du = 2tdt$:

$$\frac{1}{2}\int ue^u du = \frac{1}{2}[(u-1)e^u] + C = \frac{1}{2}(t^2-1)e^{t^2} + C$$

PASSO 6: Risolviamo per y

$$y = e^{-t^2}\left[\frac{1}{2}(t^2-1)e^{t^2} + C\right] = \frac{1}{2}(t^2-1) + Ce^{-t^2}$$

PASSO 7: Applichiamo la condizione iniziale

$$y(0) = \frac{1}{2}(0-1) + C = -\frac{1}{2} + C = 2025$$

$$C = 2025 + \frac{1}{2}$$

SOLUZIONE FINALE:

$$y(t) = \frac{1}{2}(t^2-1) + \left(2025 + \frac{1}{2}\right)e^{-t^2}$$

Equazioni del Secondo Ordine

Lineari Omogenee a Coefficienti Costanti

Forma: $y'' + ay' + by = 0$

Metodo:

1. Scrivi l'equazione caratteristica: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
2. Risolvi per λ
3. La soluzione dipende dal discriminante $\Delta = a^2 - 4b$

Casi:

- $\Delta > 0$: due radici reali λ_1, λ_2 ➔ $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$
- $\Delta = 0$: una radice doppia λ ➔ $y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$
- $\Delta < 0$: radici complesse $\alpha \pm \beta i$ ➔ $y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$

Limiti e Successioni

Limiti Fondamentali (da memorizzare)

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$

Gerarchia degli Infiniti

Per $x \to +\infty$:

$$(\log x)^a \ll x^b \ll a^x \ll x! \ll x^x$$

dove $a, b > 0$ e $a > 1$.

Risoluzione di Limiti con Forme Indeterminate

Esempio dall'Appello

Calcolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(x^2) - \sin(x^2) + x(\sin x - x)}{\sqrt{1 + x^4} - \sqrt[3]{1 + x^4}}$$

SOLUZIONE con sviluppi di Taylor:

Numeratore:

- $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
- $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
- $\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

Quindi:

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$x(\sin x - x) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Numeratore completo:

$$N = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) = \frac{5x^4}{6} + o(x^4)$$

Denominatore:

- $\sqrt{1+x^4} = (1+x^4)^{1/2} = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
- $\sqrt[3]{1+x^4} = (1+x^4)^{1/3} = 1 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$$D = 1 + \frac{x^4}{2} - 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Risultato:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{6} + o(x^4)} = 5$$

Sviluppi di Taylor

Sviluppi Fondamentali in $x = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Sviluppi Derivati Importanti

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

Regole per gli Sviluppi Composti

Se $f(x) = g(h(x))$ e $h(x) \to 0$ per $x \to 0$:

1. Sviluppa $h(x)$ fino all'ordine necessario
2. Sostituisci nell'sviluppo di $g(u)$
3. Sviluppa il risultato raccogliendo le potenze

Esempio: Sviluppare $e^{\sin x}$ per $x \to 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Sostituendo $u = \sin x$:

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Strategie d'Esame e Consigli Pratici

Struttura Tipica degli Appelli

1. **Esercizio 1 (6 punti)**: Studio di funzione (domini, limiti, derivate, monotonia, asintoti)
2. **Esercizio 2 (5 punti)**: Serie numeriche con parametri
3. **Esercizio 3 (5 punti)**: Limite con sviluppi di Taylor
4. **Esercizio 4 (5 punti)**: Integrali (definiti/impropri) ed equazioni differenziali

Errori Comuni da Evitare

Nelle Serie

- Non studiare il comportamento asintotico del termine generale
- Confondere convergenza semplice e assoluta
- Non considerare tutti i casi quando ci sono parametri

Negli Integrali

- Non verificare la convergenza negli integrali impropri
- Dimenticare la costante di integrazione
- Errori di segno nell'integrazione per parti

Nei Limiti

- Sviluppare all'ordine sbagliato
- Non riconoscere le forme indeterminate
- Errori di sostituzione negli sviluppi composti

Nelle Equazioni Differenziali

- Non verificare le condizioni iniziali
- Errori di segno nelle formule risolutive
- Non identificare correttamente il tipo di equazione

Checklist Pre-Esame

Serie: ✓ Conosci i criteri e quando applicarli **Integrali**: ✓ Sai le tecniche base e riconosci il tipo **Sviluppi**: ✓ Memorizzi quelli fondamentali **Equazioni Diff**: ✓ Identifichi il tipo e applichi la formula corretta **Limiti**: ✓ Riconosci le forme indeterminate e sai usare gli sviluppi

Questa guida ti permetterà di affrontare qualsiasi esercizio tipo dell'appello con sicurezza!