ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 27.01.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 6) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)$$

(a) determinarne il dominio di f ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

(c) calcolare la derivata di f, discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.

(a) Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e la funzione non presenta simmetrie.

(b) Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x+1} = +\infty$, vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2$, quindi $y = \pi/2$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$.

Poiché $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x+1} = -\infty$, vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2$, quindi $y = -\pi/2$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

Poiché $\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+x-2}{x+1} = +\infty$, vale $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \pi/2$.

Poiché $\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+x-2}{x+1} = -\infty$, vale $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\pi/2$.

In particolare f non si può estendere per continuità in $x = 1$.

(c) f è derivabile nel dominio in quanto rapporto e composizione di funzioni derivabili. Vale

$$\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)' = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

quindi

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(x^2+x-2)^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2+(x^2+x-2)^2}.$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Poiché $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom}(f)$ abbiamo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom}(f)$. In particolare f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$. Quindi non ci sono punti di estremo relativo ed assoluto. Dalle informazioni sui limiti agli estremi del dominio deduciamo

$$\sup f = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf f = -\frac{\pi}{2}.$$

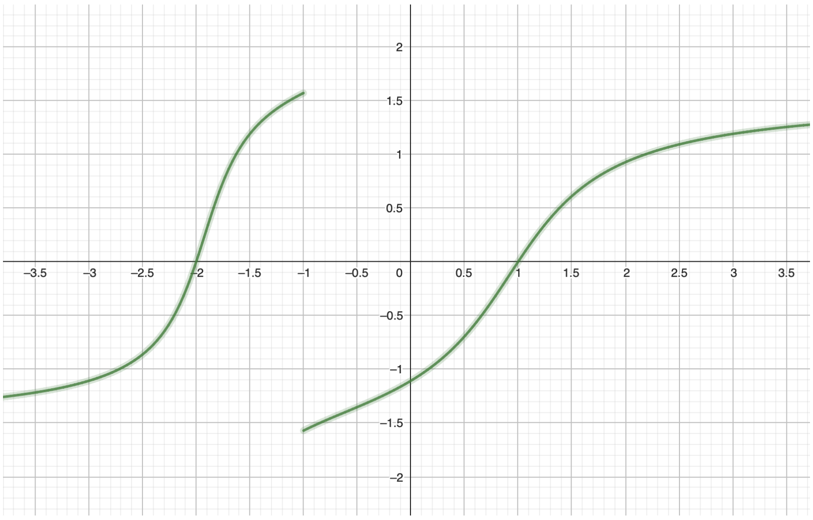

Figure 1: grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 5) Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^{2n}) \tan(1/n)}{\cos(1/n^2)}.$$

Svolgimento.

Ricordiamo i comportamenti asintotici

$$\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \qquad \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim 1 \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Inoltre, se $|x| > 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \arctan(x^{2n}) = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$a_n = \frac{\arctan(x^{2n}) \tan(1/n)}{\cos(1/n^2)} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \qquad \text{per } n \to \infty$$

e quindi la serie diverge per il criterio del confronto asintotico.

Se $|x| = 1$ vale $\arctan(x^{2n}) = \frac{\pi}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi

$$a_n \sim \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n} \qquad \text{per } n \to \infty$$

e quindi la serie diverge per il criterio del confronto asintotico.

Se $x = 0$ vale $a_n = 0$ quindi la serie converge banalmente.

Se $|x| \in (0,1)$, allora $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ quindi, poiché $\arctan(y) \sim y$ per $y \to 0$ vale $\arctan(x^{2n}) \sim x^{2n}$ per $n \to \infty$ quindi

$$a_n \sim \frac{x^{2n}}{n} \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Utilizziamo il criterio del rapporto asintotico per stabilire il comportamento della serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^{2n}} = x^2 < 1$$

quindi la serie converge. Dal criterio del confronto asintotico segue che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Esercizio 3 (punti 5) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(x^2) - \sin(x^2) + x(\sin(x) - x)}{\sqrt{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^4}}.$$

Svolgimento.

Utilizziamo gli sviluppi

$$\begin{aligned} e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0 \\ \cos(y) &= 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0 \\ \sin(y) &= y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad \text{per } y \to 0 \\ (1+y)^\alpha &= 1 + \alpha y + o(y) \quad \text{per } y \to 0 \end{aligned}$$

Studiamo prima il numeratore N:

$$N = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 + o(x^4) + x^2 - \frac{x^4}{6} - x^2 + o(x^4) = \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Il denominatore D ha il seguente comportamento asintotico:

$$D = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = \frac{x^4}{6} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} = 5.$$

Esercizio 4 (punti 5) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(\sqrt{x}\arctan x)^\alpha}{x^2 - 5x + 4}.$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_2^3 f_0(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale

$$\int_{2\pi}^{\infty} f_\alpha(x)\,dx.$$

Svolgimento.

(a) Abbiamo

$$f_0(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1}{(x-1)(x-4)}.$$

Cerchiamo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x-1)(x-4)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-4} = \frac{\alpha(x-4) + \beta(x-1)}{(x-1)(x-4)}.$$

Quindi imponiamo

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

che ha per soluzione $\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{3}$.

Quindi

$$\int_2^3 f_0(x)dx = \int_2^3 \frac{1}{3(x-4)} - \frac{1}{3(x-1)}dx = \frac{1}{3}\Big[\ln(|x-4|) - \ln(|x-1|)\Big]_{x=2}^3 = -\frac{2}{3}\ln 2.$$

(b) L'integrale è improprio solo per $x \to +\infty$ perché f_α è continua in $[2\pi, +\infty)$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$f_\alpha(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}-2} \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

quindi l'integrale converge se $\frac{\alpha}{2} - 2 < -1$, cioè se $\alpha < 2$ e diverge per $\alpha \geq 2$.