Esercizi sul simplesso

1) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard ($min\left\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\right\}$).

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\min & -3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & & & & & & & \\
s.t. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & & & = & 5 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Aggiungiamo le variabili di slack, in questo caso x_4, x_5, x_6 per rendere le disuguaglianze delle uguaglianze. Ricordiamo inoltre che z diventa $-z$. Si ricordi inoltre di definire i domini di esistenza anche per le variabili di slack. Immaginiamo, a questo punto, la base di partenza sia proprio composta da $B = \{x_4, x_5, x_6\}$ e organizziamo i dati in forma di tableau.
Quando questo accade, trascriviamo le righe e il valore iniziale della variabile z è -1.
Siamo in forma canonica in quanto ci sono le colonne della matrice identità, sia vicine che volendo lontane

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	-3	-1	-3	0	0	0	-1	0
x_4	$\boxed{2}$	1	1	1	0	0	0	2
x_5	1	2	3	0	1	0	0	5
x_6	2	2	1	0	0	1	0	6

Mi pongo la serie di domande:

- è ammissibile? Sì → tutti i $\bar{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? No → Tutti i coefficienti di costo ridotto sono ≤ 0

Dobbiamo cambiare base e dobbiamo scegliere la variabile che entra nella nuova base.
Seguiamo la regola anticiclo di Bland, che mi dice di selezionare tra le variabili di costo ridotto, quella con valore minore; se ce ne sono diverse, scelgo la prima secondo l'ordine.
Quindi, in questo caso scelgo x_1 come variabile entrante in base.

Come in altri casi, per decidere la variabile uscente, prendo quella che ha rapporto minimo tra la posizione della variabile scelta come pivot e le variabili $\bar{b_\iota}$.

$$\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{2}{2} = 1$$ Tra le variabili, esce x_4

Ora, riportiamo il tableau in forma canonica ed eseguiamo le successive operazioni di pivoting:

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2,\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2,\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1,\ R_0 \leftarrow R_0 + 3/2R_1$.

A questo punto, abbiamo come base $B = \{x_1, x_5, x_6\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot rispetto all'elemento in prima riga e prima colonna (dato che abbiamo fatto uscire x_4 è l'unico elemento logicamente utile su cui operare in questo senso.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	0	1/2	−3/2	3/2	0	0	−1	3
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0	1
x_5	0	3/2	$\boxed{5/2}$	−1/2	1	0	0	4
x_6	0	1	0	−1	0	1	0	4

- F.C.? Sì → Appaiono le colonne della matrice identità
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Non lo so → Esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0 (condizione sufficiente di ottimalità; se fossero <u>tutti</u> uguali a zero, allora sarebbe ottima)
- è illimitata? Non lo so → Vado a vedere se in corrispondenza di colonne con costi ridotti strettamente minori di 0 abbiamo sotto una colonna tutta negativa → Esiste almeno un valore strettamente positivo in corrispondenza di qualche valore negativo e quindi non possiamo concludere con certezza
- chi entra in base? → Una qualsiasi variabile con costo ridotto negativo → x_3
- chi esce dalla base? Calcoliamo l'argomento del minimo tra i rapporti di $\bar{b}$ e gli $\overline{a_{\iota h}}$ per righe rispetto alla colonna dell'elemento del pivot → x_5

$$\min\left\{\frac{1}{1/2}, \frac{4}{5/2}, \cancel{\frac{4}{0}}\right\} = \frac{4}{5/2} = \frac{8}{5}, \text{ che corrisponde alla variabile } x_5 \text{ e dunque } x_5 \text{ esce di base.}$$

Quindi ora la nuova base è $B = \{x_1, x_3, x_6\}$. Anche qui, apparirebbe un elemento simile alla matrice identità ma ora dobbiamo far entrare x_3 in base cambiando le righe (e quindi non avremmo più le colonne sparse per la matrice identità, come si vede per $[x_1, x_1]$, $[x_5, x_5]$, $[x_6, x_6]$
Abbiamo vari elementi, ma scegliamo l'elemento in riga 2 e colonna 3, come fatto dal prof, anche se in effetti potremmo scegliere quello della colonna precedente o della colonna successiva.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2 \cdot 2/5$, $R_1 \leftarrow R_1 - R_2/5$, $R_0 \leftarrow R_0 + 3/5 R_2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	0	7/5	0	6/5	3/5	0	−1	27/5
x_1	1	1/5	0	3/5	−1/5	0	0	1/5
x_3	0	3/5	1	−1/5	2/5	0	0	8/5
x_6	0	1	0	−1	0	1	0	4

- F.C.? Sì → Appaiono le colonne della matrice identità
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Sì → Tutti i costi ridotti sono $> \ 0$

$$z_{MAX} = -z_{MIN} = 27/5 \;\; x_1 = 1/5 \;\; x_2 = 0 \;\; x_3 = 8/5 \;\; x_4 = 0$$
$$x_5 = 0 \;\; x_6 = 4$$

Con x_4, x_5 saturi (in quanto $= 0$)
Con x_6 lasco (in quanto > 0)

Esercizio 10 Dispense Prof

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare partendo dalla base $\{x_4, x_5, x_6\}$ oppure dalla base $\{x_1, x_5, x_6\}$.

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 1 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & & & x_3 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 0
\end{array}$$

Riscriviamo il problema in forma standard. Siccome $x_2 \leq 0$, si introduce una nuova variabile $\widehat{x_2} = -x_2$ con $\widehat{x_2} > 0$. Attenzione che si inverte il segno della f.o. in quanto si passa da *max* a *min*.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & -x_1 & + & 2\hat{x}_2 & - & 2x_3 & & & & & & & & \\
s.t. & 2x_1 & - & \hat{x}_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & -x_1 & + & 2\hat{x}_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
 & x_1 & , & \hat{x}_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Mettiamo sul tableau per vedere cosa succede, scegliendo come base tra le due $[x_4\ x_5\ x_6]$, che però risulta non ammissibile avendo x_4 negativo.

x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	z_{MIN}	$\bar{b}$
-1	2	-2	0	0	0	-1	0
2	-1	-2	-1	0	0	0	1
1	0	2	0	1	0	0	2
-1	2	-1	0	0	1	0	3

$B = [x_4\ x_5\ x_6]$
$x_4 = -1 < 0$
$x_5 = 2$
$x_6 = 3$

Ecco perché il prof dà varie basi di partenza, dato non tutte possono essere ammissibili; infatti, qui si parte da $B = [x_1\ x_5\ x_6]$, essendo l'altra non ammissibile. Segnalo le operazioni di pivoting:

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1/2$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_1/2$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_1/2$.

Partiamo dalla prima iterazione, mettendo in forma canonica rispetto a B:

ITER 1 $\quad B = [x_1\ x_5\ x_6]$

F.C. Rispetto a B

$R_0' \leftarrow R_0 + R_1'$		0	3/2	-3	-1/2	0	0	-1	1/2
$R_1' \leftarrow R_1/2$	x_1	1	-1/2	-1	-1/2	0	0	0	1/2 ≥ 0
$R_2' \leftarrow R_2 - R_1'$	x_5	0	1/2	3	+1/2	1	0	0	3/2 ≥ 0
$R_3' \leftarrow R_3 + R_1'$	x_6	0	3/2	-2	-1/2	0	1	0	7/2 ≥ 0

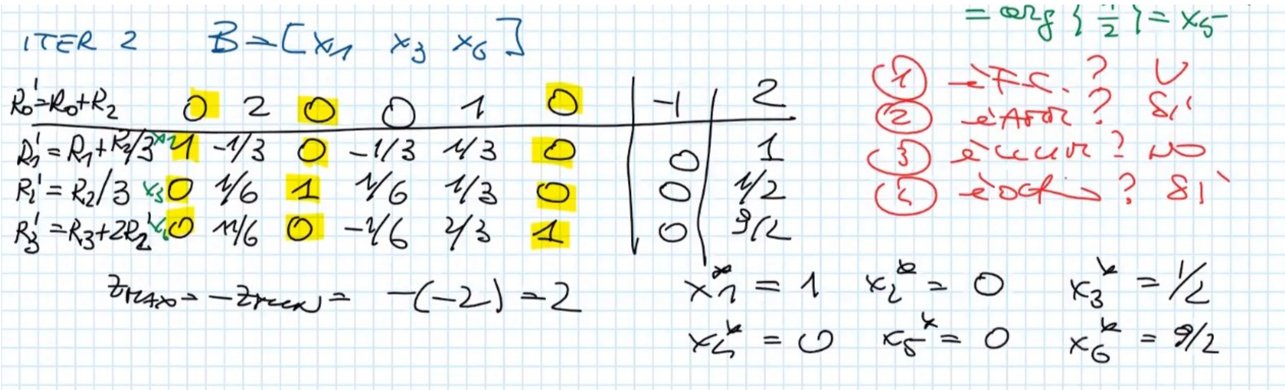
1 è F.C.? Sì!
2 è AMM.? Sì!
3 è ILLIM? Non so
4 è OTTIMO? Non so
5 entra? tra $x_3 < x_4$, x_3
6 esce $\arg\min\left\{\cancel{x}, \frac{3/2}{3}, \cancel{x}\right\} = \arg\left\{\frac{1}{2}\right\} = x_5$

1) F.C? → Sì, ci sono le colonne della matrice identità
2) Ammissibile? → Sì, le variabili della colonna di $\bar{b}$ sono tutte ≥ 0
3) Illimitata? Non so → Esiste sempre almeno un coefficiente > 0 per i costi ridotti in corrispondenza di costi ridotti negativi e non posso concludere
4) Ottimo? Non so → Esiste qualche costo ridotto < 0 e non posso concludere
5) Entra? → Decido tra le variabili di costo ridotto negativo e decido tra x_3 e x_4 e scelgo x_3 (il motivo è spiegato formalmente dopo, ma accontentiamoci qui di dire $x_3 < x_4$)

6) Esce? Decido sulla base del rapporto minimo tra $\overline{b_l}$ e x_i, dove x_i è la posizione su cui si è fatti pivoting, quindi x_3. Facendo i rapporti, il minimo è x_5 con gli altri due che sono negativi e sono scartati.

Andiamo all'iterazione 2, considerando come pivot l'elemento(3) di seconda riga e terza colonna, eseguendo le operazioni di pivoting che seguono:

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/3$, $R_1 \leftarrow R_1 + R_2/3$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2/3R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.



1) È in forma canonica → Sì, ci sono le colonne della matrice identità
2) È ammissibile? Sì, le variabili della colonna di $\bar{b}$ sono tutte ≥ 0
3) È illimitato → No → Non ci sono colonne con costi ridotti < 0, pertanto non mi pongo il problema se nella colonna sotto ci siano coefficienti negativi
4) È ottima? Sì → Tutti i costi ridotti sono >= 0

In merito ai vincoli:

- x_1 all'ottimo vale 1 (colonna di $\overline{\mathrm{B}}$)
- x_2 all'ottimo vale 0 (è fuori base)
- x_3 all'ottimo vale $1/2$ (colonna di $\overline{\mathrm{B}}$)
- x_4 all'ottimo vale 0 (è fuori base)
- x_5 all'ottimo vale 0 (è fuori base)
- x_6 all'ottimo è $9/2$ (colonna di $\overline{\mathrm{B}}$)

Leggendolo bene;

- $x_4 = 0$ è vincolo saturo, poiché ha valore zero
- $x_5 = 0$ è vincolo saturo poiché ha valore zero
- $x_6 = \frac{9}{2}$ è vincolo lasco, poiché ha valore maggiore di zero

Esistono metodi come quello delle *due fasi*, in cui si scrive un problema artificiale in cui la f.o. è somma di queste variabili artificiali.

- Se il valore della funzione obiettivo è > 0, si ha un problema inammissibile
- Se il valore della funzione obiettivo, allora $y = 0$, metto tutte le y fuori base e ottengo x_B come soluzione del problema di partenza

In tal caso, risolvo il problema a partire dalla base ottenuta.

Simulazione Esame 2018-2019

2. Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso, a partire dalla base relativa alle variabili x_1, x_2, x_3 e applicando la regola di Bland:

$$\begin{array}{lllll}
\max & x_1 & +5x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & \leq 5 \\
 & x_1 & + \; x_2 & & \geq -1 \\
 & & x_2 & +2x_3 & = -2 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

Passo alla forma standard:

1. Funzione obiettivo di minimo:

$$\min -x_1 - 5x_2$$

2. vincoli di uguaglianza:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
x_1 & +x_2 & & & -x_5 & = & -1 \\
 & x_2 & +2x_3 & & & = & -2
\end{array}$$

3. variabili non negative: effettuo la sostituzione $\hat{x}_2 = -x_2$, $\hat{x}_2 \geq 0$

$$\begin{array}{llllllll}
\min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
 & x_1 & -\hat{x}_2 & & & -x_5 & = & -1 \\
 & & -\hat{x}_2 & +2x_3 & & & = & -2 \\
 & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

4. termini noti non negativi

$$\begin{array}{llllllll}
\min & -x_1 & +5\hat{x}_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & & = & 5 \\
 & -x_1 & +\hat{x}_2 & & & +x_5 & = & +1 \\
 & & +\hat{x}_2 & -2x_3 & & & = & +2 \\
 & x_1 & \hat{x}_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Imposto il tableau del simplesso:

Attenzione che:
- la funzione obiettivo è di minimo e si cambia di segno
- Data $\widehat{x_2}$, si va a cambiare segno a x_2 quando la si introduce poi, avendo i termini noti non negativi, si va a cambiare segno alle variabili di slack (e, se ci fossero altre variabili oltre a quelle di slack, si cambia segno anche a quelle)

Per il pivot, siccome non siamo in forma canonica, scelgo di volta in volta un elemento utile per le operazioni di Gauss-Jordan. Faccio entrare in base x_1:

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
$-z$	-1	5	0	0	0	0
?	$\boxed{1}$	0	0	1	0	5
?	-1	1	0	0	1	1
?	0	1	-2	0	0	2

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	5	0	1	0	5	$R_0' \leftarrow R_0 + R_1'$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
?	0	$\boxed{1}$	0	1	1	6	$R_2' \leftarrow R_2 + R_1'$
?	0	1	-2	0	0	2	$R_3' \leftarrow R_3$

Faccio poi entrare in base $\widehat{x_2}$ (ho evidenziato in rosso gli elementi di pivoting):

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R_0' \leftarrow R_0 - 5R_2'$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R_2' \leftarrow R_2$
?	0	0	$\boxed{-2}$	-1	-1	-4	$R_3' \leftarrow R_3 - R_2'$

Si fa poi entrare in base x_3 facendo pivot sull'elemento in rosso, tale che otteniamo finalmente la forma canonica.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	0	-4	-5	-25	$R_0' \leftarrow R_0$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	1	6	$R_2' \leftarrow R_2$
$\leftarrow x_3$	0	0	1	$\boxed{1/2}$	$1/2$	2	$R_3' \leftarrow -1/2R_3$

La base si compone sulle colonne dove appaiono i coefficienti della matrice identità, quindi $B = \{x_1, \widehat{x_2}, x_3\}$
Si nota che è ammissibile (avendo tutte le colonne di $\overline{b_\iota} > 0$). Non sappiamo se sia ottima (avendo costi ridotti negativi) ma non è illimitata (infatti, tutti i coefficienti sono positivi sotto colonne con costi ridotti negativi).
Partiamo con il simplesso e decidiamo la variabile che entra in base. Per la regola di Bland, scegliamo la prima variabile in ordine tra quelle con coefficienti di costo ridotto negativo (quindi, tra x_4, x_5 scelgo x_4).

La variabile che esce dalla base si capisce rispetto al rapporto $\frac{\overline{b_\iota}}{\overline{a_\iota}}$ nella posizione della variabile che entra in base, quindi x_4. Esce dalla base $\arg\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{2}{1/2}\right\} = \arg\{4\} = x_3$

Per $B = \{x_1, \overline{x_2}, x_4\}$ scegliamo come elemento di pivoting $\frac{1}{2}$ come visto nel tableau precedente.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	$\downarrow$ x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	8	0	-1	-9	$R_0' \leftarrow R_0 + 4R_3'$
x_1	1	0	-2	0	-1	1	$R_1' \leftarrow R_1 - R_3'$
$\hat{x}_2$	0	1	-2	0	0	2	$R_2' \leftarrow R_2 - R_3'$
$\leftarrow x_4$	0	0	2	1	$\boxed{1}$	4	$R_3' \leftarrow 2R_3$

- F.C.? Sì
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Non lo so → Esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0 (condizione sufficiente di ottimalità; se fossero tutti uguali a zero, allora sarebbe ottima)
- è illimitata? Non lo so → Vado a vedere se in corrispondenza di colonne con costi ridotti strettamente minori di 0 abbiamo sotto una colonna tutta negativa → Esiste almeno un valore strettamente positivo in corrispondenza di qualche valore negativo e quindi non possiamo concludere con certezza
- chi entra in base? → x_5
- chi esce dalla base → $\arg\min\left\{X, X, \frac{4}{1}\right\} = \arg\{4\} = x_4$

$B = \{x_1, \widehat{x_2}, x_5\}$ ed eseguo il pivoting rispetto all'elemento riquadrato poco fa.

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
$-z$	0	0	10	1	0	-5	$R_0' \leftarrow R_0 + R_3'$
x_1	1	0	0	1	0	5	$R_1' \leftarrow R_1 + R_3'$
$\hat{x}_2$	0	1	-2	0	0	2	$R_2' \leftarrow R_2$
x_5	0	0	2	1	1	4	$R_3' \leftarrow R_3$

- F.C.? Sì
- è ammissibile? Sì → tutti i $\overline{b_\iota}$ sono ≥ 0 (cioè, tutta l'ultima colonna di destra)
- è ottima? Si → Non esiste qualche coefficiente di costo ridotto < 0

La soluzione ottima del problema è $z_{MIN} = -z_{MAX} = -(-5) = 5$
Inoltre, abbiamo $x_1 = 5, \hat{x}_2 = 2, x_5 = 4, x_3 = x_4 = 0$

con vincoli x_4 saturo in quanto ha valore zero e x_5 lasco, per valore > 0 (si ricordi che lasco e saturo si va a dire sulle variabili di slack aggiunte).

Esercizio 5 *Risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema PL:*

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & -5x_1 & - & 7x_2 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(ris. $z^* = -33$).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + S_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + S_2 = 9 \\ x_1 + x_2 + S_3 = 5 \end{cases}$$

$S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$, $S_3 \geq 0$. The entered variables S_1, S_2, S_3, are called slack variables.

Step №1

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	const.	Θ
2	1	1	0	0	8	8 : 1 = 8
1	2	0	1	0	9	9 : 2 = 4,5
1	1	0	0	1	5	5 : 1 = 5
-5	-7	0	0	0	F - 0	
2	1	1	0	0	8	
1/2	1	0	1/2	0	9/2	
1	1	0	0	1	5	
-5	-7	0	0	0	F - 0	
3/2	0	1	-1/2	0	7/2	
1/2	1	0	1/2	0	9/2	
1/2	0	0	-1/2	1	1/2	
-3/2	0	0	7/2	0	F + 63/2	

Step №2

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	const.	Θ
3/2	0	1	-1/2	0	7/2	7/2 : 3/2 ≈ 2,333
1/2	1	0	1/2	0	9/2	9/2 : 1/2 = 9
1/2	0	0	-1/2	1	1/2	1/2 : 1/2 = 1
-3/2	0	0	7/2	0	F + 63/2	
3/2	0	1	-1/2	0	7/2	
1/2	1	0	1/2	0	9/2	
1	0	0	-1	2	1	
-3/2	0	0	7/2	0	F + 63/2	
0	0	1	1	-3	2	
0	1	0	1	-1	4	
1	0	0	-1	2	1	
0	0	0	2	3	F + 33	

Esercizio 6 *Risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema PL:*

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & + & 5x_2 & & \\ & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 8 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(ris. problema illimitato).

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + S_1 = 8 \\ -x_1 + x_2 + S_2 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + S_3 = 5 \end{cases}$$

Step №1

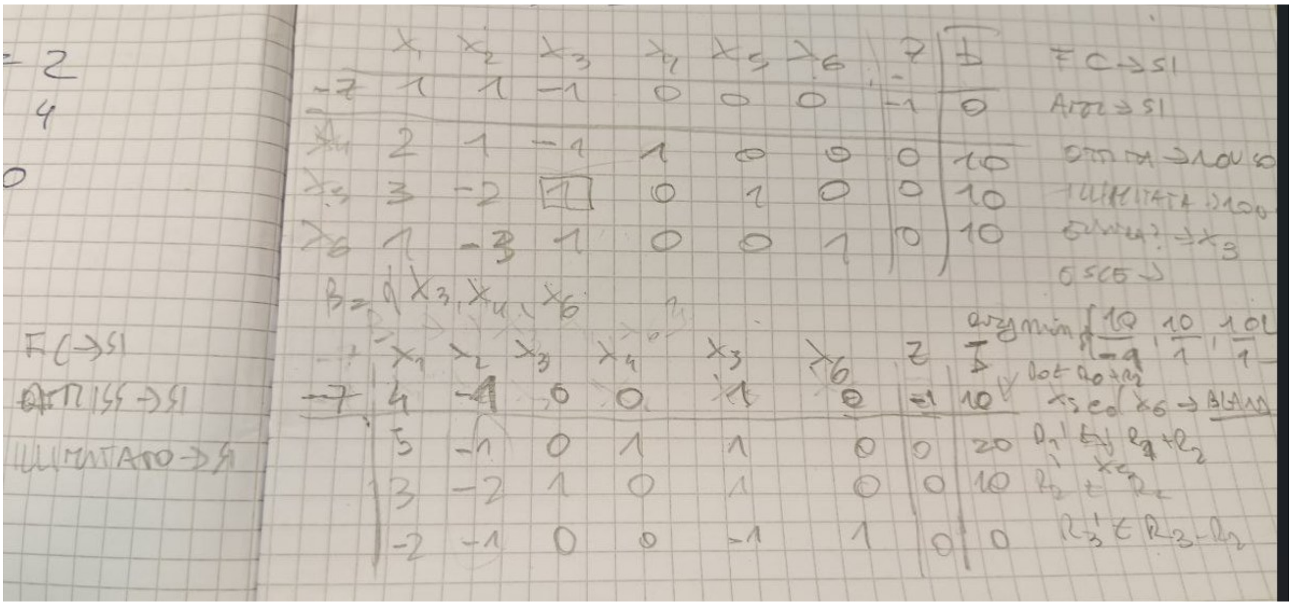
x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	const.	Θ
1	-4	1	0	0	8	8 : 1 = 8
-1	1	0	1	0	6	
-3	2	0	0	1	5	
2	5	0	0	0	F - 0	
1	-4	1	0	0	8	
0	-3	1	1	0	14	
0	-10	3	0	1	29	
0	13	-2	0	0	F - 16	

Problema illimitato

1) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
s.t. & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 10 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geq & -10 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Soluzione: problema illimitato.



2) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare partendo dalla base $B = \{x_1, x_2\}$.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & \\
s.t. & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\
 & x_1 & , & & & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Soluzione: $x^* = (2, 0, 0, 0)$ $z^* = 2$.

$$F.STD \quad x_2 = -\widehat{x_2}, \qquad \widehat{x_2} \geq 0$$
$$\min x_2 - \widehat{x_2} - x_3$$
$$s.t. x_1 + 2\widehat{x_2} + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2\widehat{x_2} + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2\widehat{x_2} - x_3 - x_4 = 2$$
$$x_1, \widehat{x_2}, x_3, x_4 \geq 0$$

	x_1	$\widehat{x_2}$	x_3	x_4	z	$\bar{b}$
$-z$	1	-1	-1	0	-1	0
	1	2	1	0	0	2
	1	-2	-1	-1	0	2

In rosso l'elemento di pivot. Seguono i passaggi:

x_1	$\widehat{x_2}$	x_3	x_4	z	$\bar{b}$
1	-1	-1	0	-1	0
1	2	1	0	0	2
1	-2	-1	-1	0	2

x_1	$\widehat{x_2}$	x_3	x_4	z	$\bar{b}$
0	-3	-2	0	-1	-2
1	2	1	0	0	2
1	-4	-2	-1	0	0

$R_0' \Leftarrow R_0 - R_1$

$R_2' \Leftarrow R_2 - R_1$

x_1	$\widehat{x_2}$	x_3	x_4	z	$\bar{b}$
0	0	$-1/2$	3/4	-1	-2
1	0	0	-1/2	0	2
1	1	1/2	1/4	0	0

$R_0' \Leftarrow R_0 + 3R_2$
$R_1' \Leftarrow R_1 - 2R\_2'$
$R_2' \Leftarrow R_2/4$

F.C? $x_1, \widehat{x_2}$? Si Ottima Non so
Entra → x_3
Esce $arg\min\left\{\frac{2}{0}, 0\right\} = \widehat{x_2}$

x_1	$\widehat{x_2}$	x_3	x_4	z	$\bar{b}$
0	1	0	1	-1	-2
1	0	0	-1/2	0	2
0	2	1	1/2	0	0

F.C.? Si Amm? Si Ottima Sì

$$x_1^* = 2\ x_2^* = x_2 = 0\ x_3^* = 0\ x_4^* = 0, z_{\min} = 2$$

3) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ s.t. & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 10 \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & \leq & 9 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Soluzione: problema illimitato.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
1	-2	-1	0	0	0	-1	0
3	1	-4	1	0	0	0	4
1	-1	-1	0	0	1	0	10
1	-2	6	0	0	1	0	9

F.C.? Sì
Entra -> Tra x_2 e x_3 scelgo x_2 (Bland)
Esce → $argmin\left\{\frac{4}{1},\frac{10}{-1},\frac{9}{-2}\right\} = x_4$

Passaggi di pivoting → $R_0' = R_0 + 2R_1, R_1' = R_1, R_2' = R_2 + R_1, R_3 = R_3 + 2R_1$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
7	0	-9	2	0	0	-1	8
3	1	-4	1	0	0	0	4
4	0	-5	1	1	0	0	14
7	0	-2	2	0	1	0	17

F.C.? Sì
Ammissibile? Sì
Ottima? Non so
Illimitata? Sì → Colore azzurro per indicare la colonna dell'illimitato

4) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ s.t. & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Soluzione: $x^* = (22/3, 4/3)$ $z^* = 26/3$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + S_2 = 16 \\ -x_1 + x_2 + S_3 = 3 \end{cases}$$

Step №1

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	const.	Θ
1	2	1	0	0	10	10 : 1 = 10
2	1	0	1	0	16	16 : 2 = 8
-1	1	0	0	1	3	

F.C. -> Si
Ammissibile -> Si
Ottima -> Non so
Illimitata -> Non so
Entra -> Tra x_1 e x_2 -> x_1 (Bland)
Esce -> $\arg\min\{\frac{10}{1}, \frac{16}{2}, \frac{3}{-1}\}$ -> x_4

0	3/2	1	-1/2	0	2
1	1/2	0	1/2	0	8
0	3/2	0	1/2	1	11
0	1/2	0	-1/2	0	F - 8

F.C. -> Si
Ammissibile -> Si
Ottima -> Non so
Illimitata -> Non so
Entra -> x_2
Esce -> $\arg\min\{\frac{2}{\frac{3}{2}}, \frac{8}{1/2}, \frac{11}{3/2}\}$ -> x_3

0	1	2/3	-1/3	0	4/3
1	0	-1/3	2/3	0	22/3
0	0	-1	1	1	9
0	0	-1/3	-1/3	0	F - 26/3

$$x_2 = \frac{4}{3}, \quad x_1 = \frac{22}{3}, \quad z = \frac{26}{3} \quad (vincoli\ laschi)$$

5) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare partendo dalla base $B = \{x_4, x_5\}$.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl} \min & -2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & & \\ s.t. & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Soluzione: $x^* = (1, 1, 0, 0, 0)$ $z^* = 2$.

Does our system have a basis?

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

Step №1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	const.	Θ
2	4	1	1	0	6	6 : 2 = 3
2	1	2	0	1	3	3 : 2 = 1,5
-6	-4	-4	0	0	F - 12	
2	4	1	1	0	6	
1	1/2	1	0	1/2	3/2	
-6	-4	-4	0	0	F - 12	
0	3	-1	1	-1	3	
1	1/2	1	0	1/2	3/2	
0	-1	2	0	3	F - 3	

Step №2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	const.	Θ
0	3	-1	1	-1	3	3 : 3 = 1
1	1/2	1	0	1/2	3/2	3/2 : 1/2 = 3
0	-1	2	0	3	F - 3	
0	1	-1/3	1/3	-1/3	1	
1	1/2	1	0	1/2	3/2	
0	-1	2	0	3	F - 3	
0	1	-1/3	1/3	-1/3	1	
1	0	7/6	-1/6	2/3	1	
0	0	5/3	1/3	8/3	F - 2	

Result:

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$

$F_{min} = 2$

6) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare partendo dalla base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$.

$$\begin{array}{llllllllllllll}
\min & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \\
s.t. & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Soluzione: $x^* = (1, 0, 0, 2, 0, 0)$ $z^* = 3$.

$$\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\
2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1
\end{cases}$$

Step №1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	const.	Θ
1	2	3	1	0	0	3	3 : 1 = 3
2	-1	-5	0	1	0	2	2 : 2 = 1
1	2	-1	0	0	1	1	1 : 1 = 1
-3	-1	4	0	0	0	F - 6	
1	2	3	1	0	0	3	
1	-1/2	-5/2	0	1/2	0	1	
1	2	-1	0	0	1	1	
-3	-1	4	0	0	0	F - 6	
0	5/2	11/2	1	-1/2	0	2	
1	-1/2	-5/2	0	1/2	0	1	
0	5/2	3/2	0	-1/2	1	0	
0	-5/2	-7/2	0	3/2	0	F - 3	

Step №2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	const.	Θ
0	5/2	11/2	1	-1/2	0	2	2 : 11/2 ≈ 0,364
1	-1/2	-5/2	0	1/2	0	1	
0	5/2	3/2	0	-1/2	1	0	0 : 3/2 = 0
0	-5/2	-7/2	0	3/2	0	F - 3	
0	5/2	11/2	1	-1/2	0	2	
1	-1/2	-5/2	0	1/2	0	1	
0	5/3	1	0	-1/3	2/3	0	
0	-5/2	-7/2	0	3/2	0	F - 3	
0	-20/3	0	1	4/3	-11/3	2	
1	11/3	0	0	-1/3	5/3	1	
0	5/3	1	0	-1/3	2/3	0	
0	10/3	0	0	1/3	7/3	F - 3	

Result:

$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$

$F_{min} = 3$

Tutorato 21/22

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrl}
\max & & & & x_2 & - & 4\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & \le & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & \ge & -2 \\
 & -2\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \le & 0 \\
\end{array}
$$

3. $x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \le 0$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;

b) possiamo dedurre qualche informazione sul corrispendente problema duale direttamente a partire dal risultato del punto precedente? in base a quale teorema?

Punto (a)

B_0 ~ VAR SLACK/SURPLUS

entra x_2 , esce x_6

entra 1 , esce x_2

0	0	-1	0	3	-1	-1	4
0	0	-1	1	2	-1	0	8
1	0	4	0	1	-1	0	2
0	1	3	0	2	-1	0	5

ILLIM!

Punto (b)

In base al fatto che il problema primale è illimitato, il problema duale è inammissibile (teorema della dualità debole).

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	
0	− 1	0	− 31	0	− 2	0	− 1	− 7
0	10	0	400	0	0	1	0	100
1	− 33	0	15	− 2	1	0	0	330
0	32	1	1	5	− 1	0	0	320

Senza operazioni di pivot e fornendo **giustificazione teorica delle risposte**:

a) si può individuare una soluzione di base corrispondente? qual è? è ottima?

b) su quali elementi sarebbe possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

c) considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland?

d) Qual è il valore della funzione obiettivo dopo il cambio base del punto c)?

e) La soluzione di base ottenuta in seguito al cambio base del punto c) è degenere oppure no?

a) $B = \{x_7, x_1, x_3\}$ e al momento non so se sia ottima; in teoria, però, dato che c'è un costo ridotto negativo e una soluzione corrente non degenere, si migliorerà sicuramente nel corso delle iterazioni, ma al momento non è ottima.

b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	− 1	0	− 31	0	− 2	0
x_7	0	$\boxed{10}$	0	$\boxed{400}$	0	0	1
x_1	1	− 33	0	15	− 2	$\boxed{1}$	0
x_3	0	$\boxed{32}$	1	1	5	− 1	0

Senza operazioni di pivot e fornendo **giustificazione teorica**

a) si può individuare una soluzione di base corrispondente?

b) su quali elementi sarebbe possibile effettuare il pivot secc
simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

c)

5. Si consideri il seguente

	x_1	x_2	x_3
	0	− 1	0
x_7	0	$\boxed{10}$	0
x_1	1	− 33	0
x_3	0	$\boxed{32}$	1

Senza operazioni di pi

a) si può individuare u

b) su quali elementi sa
simplesso (indipend

c) considerando le var
base secondo le reg

d) $z_n = z_v + \bar{c}\,\theta = 7 - 1 \cdot 10 = -3$

e) Sarà degenere perché c'è più di una variabile con rapporto minimo

- (*2) Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso, a partire dalla base relativa alle variabili x_1, x_2, x_3 e applicando la regola di Bland:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & +5x_2 & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \\
 & & & x_2 + 2x_3 & = & -2 \\
\end{array}
$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0$$

$\max \ x_1 + 5x_2$

s.a. $x_1 \leq 5$

$x_1 + x_2 \geq -1$

$x_2 + 2x_3 = -2$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \geq 0$

① VINCOLI DI UGUAGL.

$\min \ -x_1 - 5x_2$

s.a. $x_1 + x_4 = 5$

$x_1 + x_2 \quad -x_5 = -1$

$x_2 + 2x_3 \quad \cancel{+x_6} = -2$

② VARIABILI POSITIVE

$\min \ -x_1 + 5\hat{x}_2$

s.a. $x_1 + x_4 = 5$

$x_1 - \hat{x}_2 \quad -x_5 = -1$

$-\hat{x}_2 + 2x_3 \quad \cancel{+x_6} = -2$

$\hat{x}_2 \geq 0, \ \hat{x}_2 = -x_2$

③ TERMINI NOTI NON NEGATIVI

$\min \ -x_1 + 5\hat{x}_2$

s.a. $x_1 + x_4 = 5$

$-x_1 + \hat{x}_2 + x_5 = 1$

$\hat{x}_2 - 2x_3 \quad \cancel{x_6} = 2$

$B = [x_1, \hat{x}_2, x_3]$

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	-1	$+5$	0	0	0	0	-1	0
x_1	$\boxed{+1}$	0	0	1	0	0	0	5
$\hat{x}_2$	-1	1	0	0	1	0	0	1
x_3	0	1	-2	0	0	0	0	2

FC → SI

AMM → SI

OTTIMA → NON SO

ILLIMITATA → NON SO

ENTRA → x_1

ESCE → $\left\{\frac{5}{1}, \cancel{\frac{1}{-1}}, \cancel{\frac{2}{0}}\right\} \to x_1$

$B = [x_1, x_2, x_3]$

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$	
$-z$	0	5	0	0	0	0	-1	5	$R_0' \leftarrow R_0 + R_1$
	1	0	0	1	0	0	0	5	$R_1' \leftarrow R_1$
	0	1	0	1	1	0	0	6	$R_2' \leftarrow R_2 + R_1$
	0	1	-2	0	0	0	0	2	$R_3' \leftarrow R_3$

FC → SI

AMM → SI

OTTIMA → SI

SOLUZIONE → $x = \{x_1, \hat{x}_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = \{5, 6, 2, 0, 0, 0, 0\}$ con $z_{min} = -z_{max} = 5$

Domande varie:

- Come si riconoscono sul tableau del simplesso le condizioni di illimitatezza per un problema di minimo? Giustificare la risposta.
  - Le condizioni di illimitatezza sono date dall'avere un'intera colonna che posto un costo ridotto positivo costituita di soli coefficienti negativi

- Si enunci e si giustifichi la regola adottata dal metodo del simplesso per la selezione della variabile uscente nelle operazioni di cambio base.
  - Per la selezione della variabile uscente, normalmente all'interno della matrice aumentata su cui eseguiamo le operazioni (nel nostro caso, il tableau del simplesso) si sceglie come riga la variabile che entra e si esegue il rapporto minimo tra ogni coefficiente $\overline{b_\iota}$ e tutti i coefficienti a_i

- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo del simplesso.
  - Essendo un algoritmo iterativo che cambia base e vertice quando la base è degenere, tende a convergere in $O\binom{n}{m}$; quando si ha a che fare con basi degeneri, non vi è nessuna garanzia di convergenza. Grazie anche alla regola di Bland, la complessità si assesta numericamente a quanto descritto, diventando tuttavia più efficiente, ottenendo complessità media lineare/sublineare in casi più fortunati.

- Enunciare e giustificare le condizioni di ottimalità nel metodo del simplesso
  - Il problema di PL deve essere in forma standard, quindi con funzione di minimo e una base ammissibile di partenza, cioè con $\overline{b_\iota}$ tutti positivi
  - Deve essere in forma canonica rispetto alla base corrente B, quindi avere le colonne anche sparse con coefficienti dalla matrice identità
  - La soluzione è ottima nel momento in cui tutti i costi ridotti delle variabili fuori base sono positivi o nulli; sarà anche tale se non vi sono colonne di costo ridotto della f.o. con tutti coefficienti negativi, in tal caso sarà illimitata
  - Fatte tutte queste premesse, viene definita ottima in quanto il valore della f.o. migliora (o, in altri casi, non peggiora)

Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	1/2	0	1	0	9
x_3	0	1/2	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	2
x_1	1	-1/2	0	1	0	1

Indicare, senza svolgere operazioni di pivot, 3 basi ottime (nei termini delle variabili che le compongono) del corrispondente problema di programmazione lineare.

Basi ottime:

- $[x_3, x_5, x_1]$ → Data direttamente dal problema

Sfrutto il fatto che la base è degenere (con stessa soluzione ottima, ma la base è diversa)
Con la regola del rapporto minimo, individuo basi alternative
$B_2 = [x_2\ x_5\ x_1]$
$B_3 = [x_4\ x_5\ x_1]$

- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	-1/3	0	-1	0	9
x_3	0	1/13	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	4/3
x_1	1	1/17	0	1	0	0

Rispondere alle seguenti domande, GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE:
(a) Si può individuare una soluzione di base? Quale? È ottima?
(b) Quali sono i possibili cambi base?
(c) Quale sarà il cambio base usando la regola di Bland e ordinando le variabili secondo le colonne?
(d) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso usando la reola di Bland?
(e) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base?

a) La possibile soluzione per la base $B = [x_3, x_5, x_1]$ è data da $z = -9$ per $x = (0, 0, 0, 0, \frac{4}{3}, 0)$, dati gli 1 della matrice identità. Inoltre, non sappiamo al momento se sia ottima, in quanto esistono due costi ridotti non positivi (condizione sufficiente)

b) I possibili cambi base sono 2: x_2 ed x_4, in quanto hanno due coefficienti negativi

c) Seguendo la regola di Bland, il cambio di base sarà su x_2 e si andrà a fare il rapporto minimo tra $\overline{b_\iota}$ e la colonna di x_1, selezionando l'argomento minimo; in questo caso, uscirà x_1.

d) Usando la regola di Bland, andiamo a selezionare x_2; di fatto, la funzione obiettivo non migliora, in quanto il minimo rapporto è $\theta = 0$, quindi la funzione obiettivo è $-\frac{1}{3}\theta = 0 + 9 = 9$

e) Anche se cambia la base corrente, non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base (vuol dire che rimane degenere). Infatti, i nuovi valori delle variabili in base sono $x_3 = 0 = \theta, x_5 = \frac{4}{3} - 0\theta = \frac{4}{3}, x_1 = 0 - 1\theta = 0$
Si passa quindi dalla soluzione di base degenere: $x_3 = 0, x_4 = \frac{4}{3}, x_1 = 0$ (con $x_2, x_5 = 0$ e fuori base) alla soluzione di base sempre degenere (con x_2 entrante e x_3 uscente, visto il rapporto minimo precedente e sfruttando la regola di Bland), $x_2 = 0, x_5 = \frac{4}{3}, x_1 = 0$, che rappresenta lo stesso vertice del poliedro ammissibile.

- (*6) Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	-12	0	0	0	-147	-239
x_3	75	0	1	0	-12	0
x_4	46	0	0	1	1	4/3
x_2	13	1	0	0	0	0

Riportare il tableau sul foglio e rispondere (NON su questo foglio) alle seguenti domande:
(a) Cerchiare i possibili elementi pivot e dire su quale elemento si farà pivot alla prossima iterazione del simplesso usando la regola di Bland?
(b) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso. GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!
(c) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base? GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!

a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	-12	0	0	0	-147	-239
x_3	75	0	1	0	-12	0
x_4	46	0	0	1	1	4/3
x_2	13	1	0	0	0	0

Per Bland, sceglieremo come variabile entrante x_1. Poi, eseguiremo il pivot, sempre per Bland, sulle variabili che hanno rapporto minimo, quindi in questo caso specifico, su 75 e 13, in quanto hanno entrambe rapporto 0. Come tale, si evidenzia in tabella questa scelta.

b)

Di fatto, si ha un'iterazione degenere, in quanto il rapporto minimo è $\theta = 0$, e quindi il miglioramento atteso sarebbe dato da $x_i * \theta = -12 * \theta = 0 + (-239) = -239$

c)

Anche se cambia la base corrente, non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base (che vuol dire che rimane degenere, avendo due rapporti minimi pari a 0).
Infatti, i nuovi valori delle variabili in base sono $x_3 = 0 - 75\theta = 0, x_4 = \frac{4}{3} - 46\theta = \frac{4}{3}, x_2 = 0 - \theta 0 = 0$.
Passiamo quindi dalla soluzione di base degenere $x_3 = 0, x_4 = \frac{4}{3}, x_2 = 0$ (con $x_2, x_5 = 0$ e fuori base) alla soluzione di base sempre degenere $x_3 = 0, x_1 = 0$ (variabile questa che entra in base per la regola di Bland ma degenere come notato poco fa), $x_4 = \frac{4}{3}$ (con $x_2, x_5 = 0$ e fuori base), che rappresenta lo stesso vertice del poliedro ammissibile.

2. Si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland, il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & x_1 & - & 5\,x_2 & + & 3\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 3\,x_2 & + & 3\,x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 2 \\
 & -\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & \geq & -2
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \qquad \mathbf{x_2 \leq 0} \qquad x_3 \geq 0$$

min $-x_1 + 5\bar{x}_2 - 3x_3$ $\qquad \bar{x}_2 = -x_2$

s.t. $x_1 + 3\bar{x}_2 + 3x_3 + x_4 = 3$

$x_1 + 2\bar{x}_2 + 2x_3 + x_5 = 2$

$+x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = +2$

	-1	-5	-3	0	0	0	0
	1	3	3	1	0	0	3
	1	2	2	0	1	0	2
	1	3	1	0	0	1	2

base ammissibile (x_4, x_5, x_6)

entra x_1 esce x_5

	0	-3	-1	0	1	0	2
x_4	0	1	1	1	-1	0	1
x_1	1	2	2	0	1	0	2
x_6	0	1	-1	0	-1	1	0

non è ottima, quindi entra x_2 esce x_6

	0	0	-4	0	-2	3	2
x_4	0	0	2	1	0	-1	1
x_1	1	0	4	0	3	-2	2
x_2	0	1	-1	0	-1	1	0

entra x_3 esce x_4

	0	0	0	2	-2	0 (1)	0 (4)
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	0	-2	3	0	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

entra x_5 esce x_1

	$\frac{2}{3}$	0	0	0 ($\frac{1}{3}$)	0	1	4
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ottima $z = 4$ $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$

$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

6. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b	
0	0	−4	1	−7	0	−1	5	
0	1	2	0	−6	0	0	8	x_2
0	0	2	−1	1	1	0	2	x_6
1	0	3	4	2	0	0	3	x_1

Si dica, <u>**senza svolgere calcoli**</u> e fornendo una <u>**giustificazione teorica delle risposte**</u>:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Possiamo subito dire se è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (1)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a) Riusciamo ad individuare una soluzione di base in quanto nelle righe dei vincoli esiste la matrice identità. La base è formata in riga dalle colonne che posseggono i valori della matrice identità, cioè $B = [x_2, x_6, x_1]$
Non possiamo dire se sia ottima, essendoci alcuni costi ridotti negativi.

Ragionamento in più:
(Nel tableau, esiste un costo ridotto negativo e quindi potrei far entrare in base un costo ridotto negativo. Per esempio, con θ che è il minimo dei rapporti: $5 + \overline{c_h}\theta < 0$.
Dato che la soluzione di base corrente non è degenere ed esiste un costo ridotto strettamente negativo, otterrò una f.o. con valore più basso e quindi sicuramente la soluzione non è ottima).

b) La regola del rapporto minimo individua, seguendo la logica $\frac{b}{x_i}$, come elemento minimo x_1 e non x_5

c) I pivot ammissibili sono le coppie di variabili che entrano/escono di rapporto minimo, quindi (2), (3) sulla colonna di x_3 e (2) sulla colonna di x_5

d) Entra? x_5 $(3 < 5)$ Esce? x_1 $(1 < 6)$

Attenzione: Se ci viene data una base da cui partire nell'esercizio del simplesso, ma risulta non ammissibile, occorre dirlo e motivarlo.

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

ENTRA

ESCE

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
	−34	0	0	231	−98	0	0	−1	−3
x_6	223	0	0	223	1432	1	18	0	223
x_2	234	1	0	234	1058	0	1	0	235
x_3	200	0	1	232	9732	0	0	0	200

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perché non è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (123)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il valore della funzione obiettivo per la nuova base?

e. possiamo affermare, con le informazioni di questo tableau, che il problema non è illimitato?

a. Possiamo individuare $[x_6, x_2, x_3]$ (come sempre, perché abbiamo i coefficienti della matrice identità). Non è ottima perché i costi ridotti non sono tutti strettamente positivi.

b. L'operazione di pivot va realizzato scegliendo in colonna la variabile che entra e in riga quella che esce. Per quella che entra consideriamo quella che ha indice più basso tra quelle che hanno costo negativo, quindi x_1. Per quella che esce consideriamo il rapporto minimo $\frac{b_i}{x_1}$, quindi $\arg\min\{\frac{223}{223}, \frac{235}{234}, \frac{200}{200}\}$. Abbiamo come si vede due valori ad 1. Assumiamo di scegliere come base $[x_6, x_7, x_3]$ e come variabile x_6, scelta per regola di Bland. L'elemento considerato non rispetta le caratteristiche date e descritte.

c. Indipendentemente dalle regole anticiclo, possiamo effettuare il pivot sull'elemento $[x_1, x_6]$ oppure $[x_1, x_3]$.

d. Considerando questo ordine delle variabili, il cambio base sarà dato dal far entrare x_1 e far uscire x_6, quindi $[x_1, x_2, x_3]$.
Per il valore della funzione obiettivo (considerando la variabile che esce), avremo $z_{new} = -(-z) + (-34)\frac{223}{223} = 3 + 34 = 37$

e. Possiamo affermare con certezza, dato che tutte le colonne sotto i costi ridotti sono positivi, che il problema non è illimitato.

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
0	0	−14	0	−28	0	0	−1	5
0	1	42	0	21	0	0	0	21
0	0	35	1	67	1	1	0	67
1	0	73	0	−1	159	0	0	0

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perché non è ottima?
b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (42)?
c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il valore della funzione obiettivo relativo alla nuova base?
e. supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile x_5: perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a. Possiamo individuare $[x_2, x_4, x_1]$, $[x_2, x_6, x_1]$ oppure $[x_2, x_7, x_1]$ (come sempre, perché abbiamo i coefficienti della matrice identità). Non è ottima perché i costi ridotti non sono tutti strettamente positivi.

b. L'operazione di pivot va realizzato scegliendo in colonna la variabile che entra e in riga quella che esce. Per quella che entra consideriamo quella che ha indice più basso tra quelle che hanno costo negativo, quindi x_3. Per quella che esce consideriamo il rapporto minimo $\frac{b_i}{x_1}$, quindi $\arg\min\{\frac{21}{42}, \frac{67}{35}, \frac{0}{73}\}$. Abbiamo come si vede due valori ad 1. In questo caso, scegliamo ad esempio la base $[x_2, x_4, x_1]$.
In tal caso, avremo come variabile che entra x_3 e come variabile che esce x_1, quindi si farà pivot sull'elemento $[x_3, x_1]$ e non su quello dato prima.

c. Secondo le regole del simplesso, possiamo applicare il pivot su $[x_3, x_1]$ e basta, non esistendo altri rapporti minimi, a prescindere dalle eventuali regole anticiclo in gioco.
e. Anche se cambia la base corrente, non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base. Supponendo entri x_5, la base diventerebbe $[x_2, x_4, x_5]$. In questo modo, comunque, il rapporto minimo rimane 0, quindi esce una variabile di base con valore 0 e ne entra un'altra sempre con valore 0. In questo modo, la funzione obiettivo sicuramente non migliora, rimanendo per l'appunto degenere.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \quad x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq -4 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \leq 0$$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;
b) cosa possiamo dire, direttamente a partire dal risultato del punto precedente, sulla soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo?

$\max \; x_1 + 2x_2 - 5x_3$

s.t.
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 2$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -4 \qquad x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0,\; x_3 \le 0$$

① F.S → F. DI MIN.

$\min \; -x_1 - 2x_2 + 5x_3$ $\qquad B = \{x_4 \; x_5 \; x_6\}$

s.t.
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 4$$

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	z	b
$-z$	-1	-1	-5	0	0	0	-1	0
x_4	$\boxed{1}$	1	2	1	0	0	0	1
x_3	2	1	1	0	1	0	0	2
x_6	-1	-1	2	0	0	1	0	4

② VAR. NON NEGATIVE → $\hat{x}_3 = -x_3$, $\hat{x}_3 \ge 0$

$\min \; -x_1 - x_2 - 5\hat{x}_3$

s.t.
$$x_1 + x_2 + 2\hat{x}_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + \hat{x}_3 + x_5 = 2$$
$$x_1 + x_2 - 2\hat{x}_3 - x_6 = -4$$

③ CAMBIO SEGNI

$\min \; -x_1 - x_2 - 5\hat{x}_3$

s.t.
$$x_1 + x_2 + 2\hat{x}_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + \hat{x}_3 + x_5 = 2$$
$$-x_1 - x_2 + 2\hat{x}_3 + x_6 = 4$$

F.C → SI
AMM → SI
~~OTTIMO~~ → NON SO
ILLIMIT. → NON SO
ENTRA → TRA $x_1, x_2, x_3^1 \to x_1$
ESCE → argmin $\left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{4}{-1} \right\}$ → TRA x_4 e x_5 → x_1 (BLAND)
$\quad x_1 \quad x_3 \quad x_6$

$B = [x_1 \; x_5 \; x_6]$

	x_1	x_2	x_3^1	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	0	0	-3	0	0	0	-1	1
x_1	1	1	$\boxed{2}$	1	0	0	0	1
x_5	0	-1	-3	-2	1	0	0	0
x_6	0	0	4	1	0	1	0	5

$R_0' \leftarrow R_0 + R_1$
$R_1' \leftarrow R_1$
$R_2' \leftarrow R_2 - 2R_1$
$R_3' \leftarrow R_3 + R_1$

F.C → SI
AMM → SI
OTTIMO → NON SO
ENTRA → x_3^1
ESCE → argmin $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{0}{-1}, \frac{5}{4} \right\}$ → x_1

	x_1	x_2	x_3^1	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	3/2	3/2	0	3/2	0	0	-1	5/2
x_3^1	1/2	1/2	1	1/2	0	0	0	1/2
x_5	3/2	1/2	0	1/2	1	0	0	3/2
x_6	-2	-2	0	-1	0	1	0	3

$B = [x_3^1 \; x_5 \; x_6]$
$R_0 \leftarrow R_0 + 3R_1$
$R_1 \leftarrow R_1/2$
$R_2' \leftarrow R_2 + 3R_1$
$R_3 \leftarrow R_3 + 4R_1$

$1 - 1\left(\frac{1}{2}\right) =$
$0 - 1\left(\frac{3}{2}\right) = -2$
$-2 + 3$
$1 + \frac{3}{2}$
$4 - 4(1) = 0$
$5 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

$z_{min} = -z_{max} = -\frac{5}{2}$

$x = (x_1 \; x_2 \; x_3^1 \; x_4 \; x_5 \; x_6 \; x_z) = (0 \; 0 \; 1/2 \; 0 \; 3/2 \; 3)$

$$z_{MAX} = -z_{MIN} = -\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
	0	-1	0	0	-9	0	-1	0
x_4	0	7	0	1	42	1	0	21
x_1	1	8	0	0	24	1	0	24
x_3	0	9	1	0	54	1	0	27

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Perché? Qual è? Perché non è ottima?

b. perché la teoria del simplesso non consente l'operazione di pivot sull'elemento nel cerchio (24)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?

e. supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile x_2: perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a) Il tableau è in forma canonica, individuando ad esempio x_4, x_1, x_3, che valgono rispettivamente 21, 24, 27. La soluzione non è ottima avendo dei costi ridotti strettamente negativi. Vedendo inoltre dalla regola del rapporto minimo che la soluzione non è degenere, è possibile effettuare un'operazione di pivot che porterà in base una variabile a costo ridotto negativo con un valore strettamente positivo, provocando un decremento del valore della funzione obiettivo.

b) Non è possibile effettuare pivot su quell'elemento, in quanto si avrebbe una soluzione di base non ammissibile. Per il pivot, avremo che x_1 andrà a 0 (in quanto si farà pivot u quella colonna).

c) Noi potremmo fare il pivot su tutta la colonna di x_2, quindi su 7, 8, 9 e su tutta la colonna di x_5, quindi 42 e 54, essendo tutte queste a rapporto minimo

d) Per la regola di Bland, entra x_2 in base al valore 3 ed esce x_1. In questo modo, il costo ridotto sarà pari a -1, quindi sarà $-1 * 3 = 3$ e per il valore della f.o. avremo $0 - (3) = -2$

e) In questo caso, avremmo tre righe corrispondenti al rapporto minimo, pertanto avremo che almeno una esce dalla base con valore 0, mentre le altre due assumeranno valore 0 rimanendo in base.

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	−1	0	0	−9	0	−1	0
0	6	0	1	12	1	0	12
1	7	0	0	10	1	0	14
0	8	1	0	16	1	0	16

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Perché? Qual è? Perché non è ottima?
b. perché la teoria del simplesso non consente l'operazione di pivot sull'elemento nel cerchio (10)?
c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?
e. supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile x_2: perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a) Individuiamo una soluzione in quanto il tableau è in forma canonica e avremo, per ordine di precedenza in riga, x_4, x_1, x_3. Vedendo inoltre dalla regola del rapporto minimo che la soluzione non è degenere, è possibile effettuare un'operazione di pivot che porterà in base una variabile a costo ridotto negativo con un valore strettamente positivo, provocando un decremento del valore della funzione obiettivo.

b) L'operazione non è consentita, in quanto quell'elemento non corrisponde al rapporto minimo, ma sarà possibile. Avremo quindi che x_1, variabile di rapporto minimo selezionata per Bland, andrà a valore 0, mentre le altre due variabili, quindi x_4 *ed* x_3 a valori strettamente negativi.

c) Per Bland, effettuiamo pivot su tutti gli elementi di rapporto minimo, quindi (6), (7), (12) e (16).

d) Il cambio di base è dato su x_2 che entra ed esce x_1. In questo modo, avremo che il costo ridotto è dato da $(-1) * 2$ e il valore della f.o. viene dato da $0 - (2) = 2$

e) In questo caso, avremmo tre righe corrispondenti al rapporto minimo, pertanto avremo che almeno una esce dalla base con valore 0, mentre le altre due assumeranno valore 0 rimanendo in base.

- Consideriamo un problema di programmazione lineare: è possibile che più soluzioni di base rappresentino lo stesso vertice della regione ammissibile? Giustificate la risposta.

Sì, è possibile che più soluzioni base rappresentino lo stesso vertice della regione ammissibile in un problema di programmazione lineare.

Nella programmazione lineare, la regione ammissibile è l'insieme dei punti che soddisfano tutti i vincoli del problema. Ogni vertice della regione ammissibile corrisponde a una soluzione fattibile di base, ovvero una soluzione in cui le variabili sono tutte variabili di base. Una variabile di base è una variabile associata a un unico vincolo e coinvolta nella determinazione della soluzione ottimale.

Più soluzioni di base possono rappresentare lo stesso vertice della regione ammissibile perché la soluzione ottimale di un problema di programmazione lineare non è unica. Questo perché possono esistere più insiemi di variabili di base che producono lo stesso valore obiettivo ottimale.

Ad esempio, si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

maximize 3x + 4y

subject to

x + y <= 4
2x + y <= 6
x, y >= 0

Esistono due possibili soluzioni base che rappresentano lo stesso vertice della regione ammissibile: (x=2, y=2) e (x=0, y=4). Entrambe le soluzioni producono lo stesso valore obiettivo ottimale, pari a 14.

Pertanto, è possibile che più soluzioni base rappresentino lo stesso vertice della regione ammissibile in un problema di programmazione lineare.

6. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	-1/3	0	-1	0	9
x_3	0	1/13	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	4/3
x_1	1	1/17	0	1	0	0

Rispondere (NON su questo foglio) alle seguenti domande:

a) Su quale elemento si farà pivot alla prossima iterazione del simplesso usando la regola di Bland?

b) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso. GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!

c) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base? GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!

a) Secondo la regola di Bland, faremo pivot considerando:
- la variabile x_2 come variabile che entra (in quanto di costo ridotto negativo e con indice minore)
- la variabile x_1 come variabile che esce per la regola del rapporto minimo (notando che x_1 ed x_3 hanno rapporto pari a 0)

b) Il valore della f.o. è dato dal prodotto della variabile con rapporto minimo * il costo ridotto sovrastante la sua colonna, dunque avremo $0 * \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ e il valore della f.o. è dato da $9 - (0) = 9$. Questo evidenzia che l'iterazione è degenere, dato che il costo della f.o. non migliora, ma si mantiene uguale non peggiorando.

c) Anche se cambia la base corrente, non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base. Supponendo entri x_2, la base diventerebbe $[x_3, x_5, x_2]$. In questo modo, comunque, il rapporto minimo rimane 0, quindi esce una variabile di base con valore 0 e ne entra un'altra sempre con valore 0. In questo modo, la funzione obiettivo sicuramente non migliora, rimanendo per l'appunto degenere.

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \quad x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &\le 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge -4 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad x_3 \le 0$$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;

b) cosa possiamo dire, direttamente a partire dal risultato del punto precedente, sulla soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo?

1

$$\max \quad x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &\le 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge -4 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \le 0$$

$$\min \quad -x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 &= -4 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \le 0$$

1 F. O. MINIMO

2 UGUAGLIANZE

(2)

SLACK POSITIVE
VINCOLI CON
F. NON POSITIVI

$\min \; -x_1 - 2x_2 - 3\hat{x}_3$

s.t. $x_1 + x_2 + 2\hat{x}_3 + x_4 = 1$

$2x_1 + x_2 - \hat{x}_3 + x_3 = 2$

$-x_1 - x_2 + 2\hat{x}_3 + x_6 = 4$

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	7	b
$-z$	-1	-2	-3	0	0	0	-1	0
x_4	$\boxed{1}$	1	2	1	0	0	0	1
x_3	2	1	-1	0	1	0	0	2
x_6	-1	-1	2	0	0	1	0	4

$B = [x_4, x_5, x_6]$

F C → SI

AMM → SI

ILLIM → NON SO

ILLIM. → NON SO

$\to x_1$ (BLAND)

$\arg\min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{4}{-1} \right\} \to x_4$ (BLAND)

③

$B = [x_1\ x_3\ x_6]$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	0	-1	-3	1	1	0	-1	1
x_1	1	$\boxed{1}$	2	1	0	0	0	1
x_3	0	-1	-5	-2	1	0	0	0
x_6	0	0	4	1	0	1	0	5

$R_3'' \leftarrow R_3 + R_1,\ R_2' \leftarrow R_2 - 2R_1,\ R_0' \leftarrow R_0 + R_1$

F.C → SI

AMM → SI

OTTIMA → NON SO

ILLIMITATA → NON SO

ENTRA → x_2

ESCE → argmin $\left\{\frac{1}{1}, \cancel{\frac{0}{-1}}, \cancel{\frac{5}{0}}\right\} \to x_1$

$x_1\ x_3\ x_6$

(4)

$B_2 [x_2, x_5, x_6]$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	?	$\bar{b}$
-7	1	0	-1	2	1	0	-1	2
x_2	1	1	$\boxed{2}$	1	0	0	0	1
x_5	1	0	-3	-1	1	0	0	1
x_6	0	0	4	1	0	1	0	5

$R_1' \leftarrow R_1$, $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$, $R_3' \leftarrow R_3$, $R_0' \leftarrow R_0 + R_n$

E.C → SI

AMM → SI

ILLIM → NON SO

OTTIMA → NON SO

ENTRA → x_3

ESCE → argmin $\left\{ \frac{1}{2}, \cancel{\frac{1}{-3}}, \frac{5}{4} \right\} \to x_2$

$x_2 \quad x_5 \quad x_6$

(5)

$B = [\bar{x}_3, x_5, x_0]$

	x_1	x_2	$\bar{x}_3$	x_4	x_5	x_0	z	$\bar{b}$
$-z$	$3/2$	$1/2$	0	$5/2$	2	0	-1	$5/2$
$\bar{x}_3$	$1/2$	$1/2$	1	$1/2$	0	0	0	$1/2$
x_5	$5/2$	$3/2$	0	$1/2$	1	0	0	$5/2$
x_0	-2	-2	0	-1	0	1	0	3

$R_1' \leftarrow R_1/2$, $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1'$, $R_3 \leftarrow R_3 + 4R_1'$

$R_0' \leftarrow R_0 + R_1'$

$z = -\frac{5}{2}$ $\quad x = (x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, x_5, x_0)$

$= (0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 3)$ con x_1, x_2, x_4 SATURI (=0)

e $\bar{x}_3, x_5, x_0$ (LIBERI)

$$z_{MAX} = -z_{MIN} = -\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
0	0	− 14	0	− 28	0	0	− 1	5
0	1	42	0	21	0	0	0	21
0	0	35	1	67	1	1	0	67
1	0	73	0	− 1	159	0	0	0

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perché non è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (42)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il valore della funzione obiettivo relativo alla nuova base?

e. supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile x_5: perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a) La soluzione di base corrispondente è data dall'individuazione dei pivot della matrice identità, quindi avremo $[x_2, x_6, x_1]$, $[x_2, x_4, x_1]$, $[x_2, x_7, x_1]$. Esse hanno tutti coefficienti pari a 0, dunque non essendo tutti >0, non sappiamo per certo se siano ottime. La soluzione di base è pari a $z = -5$

b) Non è consentita l'operazione su quell'elemento in quanto non rispetta la regola del rapporto minimo. In questa iterazione, l'elemento minimo individuato è (73).

c) Per le regole del simplesso, possiamo effettuare pivot (con scelta opportuna della base, per esempio, $[x_2, x_6, x_1]$, sugli elementi (73), (21), (67).

d) Il cambio base applicando Bland viene dato su $[x_3, x_1]$, quindi la nuova base sarà $[x_2, x_6, x_3]$. Il valore della funzione obiettivo è dato da $-14 * 0 = 0\ e - 5 - 0 = -5$.

e) In questo caso, avremmo 2 righe corrispondenti al rapporto minimo, pertanto avremo che almeno una esce dalla base con valore 0, mentre l'altra assumerà valore 0 rimanendo in base, rendendola certamente degenere.

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	0	0	−5	0	−5	−1	0
0	0	0	42	1	25	0	21
0	1	1	44	0	9	0	22
1	159	0	4	0	4	0	28

Si dica, **senza eseguire operazioni di pivot** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perché non è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (9)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?

e. supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile $\cancel{x_2}$ x_4: perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a. La soluzione di base corrispondente è $z = 0$. Essa non è ottima in quanto tutti i costi ridotti sono ≤ 0.

b. L'operazione di pivot non è consentita su quell'elemento in quanto non rispetta la regola di rapporto minimo; non viene poi fatta nella variabile entrante corretta.

c. Secondo le regole del simplesso, possiamo selezionare come elementi di pivot (42), (44) e (25), prendendo indistintamente tutte le variabili che entrano.

d. Secondo Bland, entra x_4 ed esce x_3 se consideriamo la base x_5, x_3, x_1

e. Avendo due variabili corrispondenti al rapporto minimo, la soluzione sarà degenere in quanto una variabile resta in base con valore 0, mentre l'altra esce con valore 0.

2. Si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland, il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{llcrcrcl}
\max & & & x_2 & - & 2\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & \geq & -1 \\
 & & & 2\,x_2 & - & x_3 & \leq & 2
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \mathbf{x_3 \leq 0}$$

max $x_2 - 2x_3$

s.A $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1$

$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge -1$

$2x_2 - x_3 \le 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0$

→ min $-x_2 + 2x_3$

s.A $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = -1$

$2x_2 - x_3 + x_6 = 2$

→ $\hat{x}_3 = -x_3$, $\hat{x}_3 \ge 0$

min $-x_2 - 2\hat{x}_3$

s.A $x_1 - 2x_2 - \hat{x}_3 + x_4 = 1$

$x_1 - x_2 - 2\hat{x}_3 - x_5 = -1$

$2x_2 + \hat{x}_3 + x_6 = 2$

→ termini noti positivi

min $-x_2 - 2\hat{x}_3$

s.A $x_1 - 2x_2 - \hat{x}_3 + x_4 = 1$

$-x_1 + x_2 + 2\hat{x}_3 + x_5 = 1$

$2x_2 - \hat{x}_3 + x_6 = 2$

$B = (x_4 \; x_5 \; x_6)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	b
	0	-1	-2	0	0	0	-1	0
x_4	1	-2	-1	1	0	0	0	1
x_5	-1	$\boxed{1}$	2	0	1	0	0	1
x_6	0	2	1	0	0	1	0	2

F. C → SI

AMM → SI

ILLIMIT. → NON SO

OTTIMA → NON SO

ENTRA → TRA x_2 e x_3 → x_2 (BLAND)

ESCE → argmin $\left\{ \frac{1}{-2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2} \right\} \rightarrow x_5$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 \quad x_6$

$B = (x_4 \; x_2 \; x_6)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_3	x_6	$-z$	b
	-1	0	0	0	1	0	-1	1
x_4	-1	0	3	1	2	0	0	3
x_2	-1	1	2	0	1	0	0	1
x_6	$\boxed{2}$	0	-3	0	-2	1	0	0

$R_2' \leftarrow R_2$, $R_1' \leftarrow R_1 + 2R_2$, $R_3' \leftarrow R_3 - 2R_2$

$R_0' \leftarrow R_0 + R_2$ F. C → SI, AMMISS. → SI,

ILLIMIT. → NON SO, OTTIMA → NON

ENTRA → x_1

$\qquad\qquad x_4 \quad x_2 \quad x_6$

ESCE → argmin $\left\{ \frac{3}{-1}, \frac{1}{-1}, \frac{0}{2} \right\} \rightarrow x_6$

$2-\frac{3}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad 3-\frac{3}{2}=\frac{6-3}{2}=\frac{3}{2}$

$\cancel{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$

$1 \quad \cancel{2} \to 2$

$B=[x_4 \; x_2 \; x_1]$

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	$-z$	$\bar{b}$
	0	0	$-3/2$	0	0	$1/2$	-1	1
x_4	0	0	$\boxed{3/2}$	1	1	$1/2$	0	3
x_2	0	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	1
x_1	1	0	$-3/2$	0	-1	$1/2$	0	0

$R_3' \leftarrow R_3/2$, $R_2' \leftarrow R_2+R_3$, $R_1' \leftarrow R_1+R_3$

$R_0' \leftarrow R_0+R_1$

F.C → SI
AMM. → SI
ENTRA → $\hat{x}_3$

$z=-4$
$x=(3,0,2,0,0,0)$

F.C → SI
AMM → NO
OTTIMA → SI

OSC → argmin $\left\{\frac{3}{3/2}, \frac{1}{1/2}, \cancel{\frac{0}{-3/2}}\right\}$

$x_4 \quad x_2 \quad x_1$

$B=[\hat{x}_3 \; x_2 \; x_1]$

x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	$-z$	$\bar{b}$
0	0	0	$\cancel{3}$ 1	1	1	-1	4
0	0	1	$2/3$	$2/3$	$1/3$	0	2
0	1	0	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	0	0
1	0	0	$\cancel{3}$ 1	0	1	0	3

$R_0' \leftarrow R_0+\frac{3}{2}R_1$

$R_1' \leftarrow \frac{2}{3}R_1$, $R_2' \leftarrow R_2-\frac{1}{2}R_1$, $R_3' \leftarrow R_3+\frac{3}{2}R_1$

$$z_{MAX}=-z_{MIN}=-(-4)=4$$

6. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	0	– 4	1	– 7	0	– 1	5
0	1	2	0	– 6	0	0	8
0	0	2	– 1	1	1	0	2
1	0	3	4	2	0	0	3

Si dica, **senza svolgere calcoli** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Possiamo subito dire se è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (1)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a) La soluzione di base corrispondente è data dall'individuazione dei pivot della matrice identità, quindi avremo $[x_2, x_5, x_1]$ oppure $[x_2, x_6, x_1]$. Mentre la prima non è ottima, la seconda non si sa se lo sia, in quanto i coefficienti sono tutti ≥ 0, ma non sono tutti positivi.

b) Non è consentita l'operazione su quell'elemento in quanto non rispetta la regola di individuazione dell'elemento di pivot rispetto a variabile che entra/variabile che esce. Si dovrebbe scegliere per Bland x_3 ed effettuare lì il rapporto minimo. Qui tale cosa non accade, dunque, non viene rispettata la regola del rapporto minimo.

c) Per le regole del simplesso, possiamo effettuare pivot sulle coppie di elementi $[x_3, x_6]$ e $[x_3, x_1]$

d) Il cambio base applicando Bland viene dato su $[x_3, x_1]$. In questo caso, avremmo due righe corrispondenti al rapporto minimo, pertanto avremo che almeno una esce dalla base con valore 0, mentre le altre due assumeranno valore 0 rimanendo in base.

$x_2 \geq 0$ $x_3 \leq 0$ $x_4 \geq 0$

5\. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	B
−1	0	0	0	−5	−1	−1	0
24	0	0	1	12	−1	0	1
48	0	1	0	61	0	0	2
54	1	0	0	57	−2	0	59

Si dica, **senza svolgere calcoli** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Possiamo dire se è ottima?
b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (54)?
c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?
e. Osservando il tableau nel suo complesso, è possibile dire qualcosa sulle caratteristiche della soluzione ottima?

a) La soluzione di base corrispondente è $z = 0$. Non è ottima in quanto i costi ridotti sono tutti ≤ 0.

b) Non è consentito il pivot su quell'elemento non essendo la variabile di rapporto minimo.

c) Secondo le regole del simplesso, possiamo fare pivot su (24), (48), (12), (0) nella colonna di x_6

d) Il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando Bland sarà x_1 come variabile che entra e x_3 come variabile che esce (Bland sulla base x_4, x_3, x_2 presente e usando le regole di rapporto minimo).

e) Guardando bene il tableau, si può dire la soluzione sia illimitata, considerando che nella colonna di x_6 tutti gli elementi sono ≤ 0

Domande dalle dispense e risposte:

- Si supponga che la soluzione di base corrente sia degenere e che esista una variabile con costo ridotto negativo. È vero che un’operazione di cambio base non riuscirà comunque a migliorare il valore della funzione obiettivo? Giustificare la risposta

Non è necessariamente vero che un'operazione di cambio di base non migliorerà il valore della funzione obiettivo se esiste una variabile con costo ridotto negativo.

In un problema di programmazione lineare, il costo ridotto di una variabile è la differenza tra il coefficiente obiettivo di quella variabile e il costo ridotto della variabile nella base attuale. Una variabile con costo ridotto negativo significa che ha il potenziale di migliorare il valore della funzione obiettivo se viene inclusa nella base.

Pertanto, se un'operazione di modifica della base prevede la sostituzione di una variabile nella base attuale con una variabile che ha un costo ridotto negativo, è possibile che il valore della funzione obiettivo migliori in seguito alla modifica della base.

Tuttavia, è anche possibile che l'operazione di cambio di base non migliori il valore della funzione obiettivo. Ciò potrebbe essere dovuto al fatto che la variazione del valore della funzione obiettivo dovuta all'inclusione della variabile con costo ridotto negativo non è sufficiente a compensare la variazione del valore della funzione obiettivo dovuta all'eliminazione dell'altra variabile dalla base.

In breve, la presenza di una variabile con costo ridotto negativo non garantisce che un'operazione di modifica della base migliori il valore della funzione obiettivo, ma indica che è possibile che la funzione obiettivo migliori in seguito alla modifica della base.

- Sia data una soluzione di base il cui corrispondente valore della funzione obiettivo è ottimo. È vero che i costi ridotti relativi alla base stessa sono tutti positivi o nulli? Giustificare la risposta

È vero che i costi ridotti rispetto a una base che corrisponde a una soluzione ottimale sono tutti positivi o nulli.

In un problema di programmazione lineare, il costo ridotto di una variabile è la differenza tra il coefficiente obiettivo di quella variabile e il costo ridotto della variabile nella base attuale. Una variabile con un costo ridotto positivo o nullo non migliora il valore della funzione obiettivo e quindi non può essere inclusa nella base ottimale.

D'altra parte, una variabile con un costo ridotto negativo ha il potenziale di migliorare il valore della funzione obiettivo se viene inclusa nella base. Pertanto, se una base corrisponde a una soluzione ottimale, non deve includere alcuna variabile con costi ridotti negativi. Tutte le variabili della base devono avere costi ridotti positivi o nulli.

Questo perché, affinché una soluzione sia ottimale, non deve essere possibile migliorare il valore della funzione obiettivo apportando modifiche alla base. Se nella base ci fosse una variabile con un costo ridotto negativo, significherebbe che il valore della funzione obiettivo potrebbe essere migliorato sostituendo una delle variabili della base con quella variabile, il che contraddirebbe l'ipotesi che la soluzione attuale sia ottimale.

2. Si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland, il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{llcl}
\min & x_1 \ \cancel{+}\ 2\,\hat{x}_2 - 3\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2\,x_2 - x_3 & \geq & -1 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 - 2\,x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

(1)

$$
\begin{array}{ll}
\cancel{\max}\ \min & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\
 & -x_1 - 2x_2 + x_6 = 1 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$\min\ x_1 - 2\hat{x}_2 - 3x_3 \qquad \hat{x}_2 \geq 0,\ \hat{x}_2 = -x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{s.t.} & x_1 - 2\hat{x}_2 - x_3 - x_4 = -1 \\
 & x_1 + \hat{x}_2 + x_3 + x_5 = 2 \\
 & -x_1 - 2x_2 + x_6 = 1
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{array}{ll}
\min & x_1 - 2\hat{x}_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2\hat{x}_2 + x_3 + x_4 = +1 \\
 & x_1 + \hat{x}_2 + x_3 + x_5 = 2 \\
 & -x_1 - 2x_2 + x_6 = 1
\end{array}
$$

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	$\bar{b}$
	1	-2	-3	0	0	0	-1	0
x_4	-1	$\boxed{+2}$	1	1	0	0	0	1
x_5	1	1	1	0	1	0	0	2
x_6	-1	-2	0	0	0	1	0	1

$B = [x_4 \ldots$

F.C → SI, AMM → SI ENTRA → $\hat{x}_2$ (BLAND)

ESCE → $\arg\min \left\{ \underset{x_4}{\frac{1}{2}}, \underset{x_5}{\frac{2}{1}}, \underset{x_6}{\cancel{\frac{1}{-2}}} \right\} = x_4$

③

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
	0	0	-1	1	0	0	-1	1
x_2	-1/2	1	$\boxed{1/2}$	1/2	0	0	0	1/2
x_5	3/2	0	1/2	1/2	1	0	0	3/2
x_6	-3	0	1	1	0	1	0	2

$B = [\hat{x}_2, x_5, x_6]$

$R_1' \leftarrow R_1 / 2$, $R_2' \leftarrow R_2 - R_1'$, $R_3' \leftarrow R_3 + 2R_1'$

$R_0 \leftarrow R_0 + 2R_1$ F.C → ΣΙ ΑΠΠ → ΣΙ [illegible] → ΝΟΝ ΣΟ, [illegible]

[illegible] → x_3 [illegible] → argmin $\left\{\frac{1/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}, \frac{2}{1}\right\}$ → [illegible]

$B = [x_3, x_5, x_6]$

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
	-1	1	0	2	0	0	-1	2
x_3	-1	2	1	1	0	0	0	1
x_5	$\boxed{2}$	-1/2	0	0	1	0	0	1
x_6	-2	-1	0	0	0	1	0	1

$R_1' \leftarrow R_1 \cdot 2$, $R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2} R_1'$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1'$

$R_0 \leftarrow R_0 + R_1$ F.C → ΣΙ ΑΠΠ → ΣΙ [illegible] → x_1

[illegible] → argmin $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ → x_5

$B = [x_3, x_1, x_6]$ ④

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
	0	1/2	1	2	1/2	0	-1	7/2
	0	3/4	1	1	1/2	0	0	3/2
	1	-1/4	0	0	1/2	0	0	1/2
	0	-3/2	0	0	1	1	0	2

$R_2' \leftarrow R_2 / 2$, $R_3' \leftarrow R_3 + 2R_2'$, $R_1' \leftarrow R_2 + R_1$

$R_0 \leftarrow R_0 + R_1$

F.C → ΣΙ ΑΠΠ → ΣΙ [illegible] → ΣΙ

$-z = -\frac{7}{2}$ $x = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 2\right)$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	0	0	−5	0	−5	−1	0
0	0	0	42	1	25	0	21
0	1	1	44	0	9	0	22
1	159	0	4	0	4	0	28

Si dica, <u>**senza eseguire operazioni di pivot**</u> e fornendo una <u>**giustificazione teorica delle risposte**</u>:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perché non è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (9)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?

e. supponiamo di effettuare un cambio base in cui entra in base la variabile $\cancel{x_2}$ x_4: perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a) La soluzione di base corrente è $z = 0$. Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi, quindi non si sa per certo se la soluzione di base sia ottima.

b) L'elemento cerchiato non permette l'operazione di pivot in quanto non rispetta la regola di rapporto minimo. La variabile che corrisponde a rapporto non minimo avrebbe un valore tale da portare a 0 la corrispondente variabile x_6, ma troppo alto, in quanto, per soddisfare i restanti vincoli, le altre variabili dovrebbero assumere valori negativi.

c) A prescindere da Bland, possiamo fare pivot su (42), (44), (25).

d) Secondo le regole anticiclo di Bland, il cambio base sarà x_4 come variabile che esce e x_2, assumendo di scegliere come base $[x_5, x_2, x_1]$ come analisi al punto 1. Il valore della f.o. è dato a $\frac{1}{2} * -5 = -\frac{5}{2}$ e $0 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$

e) Essendoci due variabili che corrispondono al rapporto minimo, si avremo un'iterazione di base con una variabile che entra a 0 e una che esce a 0, risultando certamente degenere.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{lrrrl}
\min & x_1 & -\ 2\,x_2 & -\ 5\,x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 & -\ x_2 & -\ 2\,x_3 & \geq -1 \\
 & x_1 & -\ 4\,x_2 & -\ x_3 & \geq -4 \\
 & -\,x_1 & & +\ 2\,x_3 & \leq 1 \\
 & x_1 \leq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;

b) qual è il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo direttamente a partire dal risultato del punto precedente?

a) Illimitato

The optimum is reached.

The following solution is obtained: $(x_1^+, x_2, x_3, W, S_1, S_2, S_3, S_4, Y_1) = (0, 0, 0, 0, 0, 4, 1, 0, 1)$.

Since the value of the artificial variable is nonzero, the solution space is infeasible.

ANSWER

The solution space is infeasible.

b) In base al fatto che il problema primale è illimitato, il problema duale è inammissibile (corollario del teorema della dualità debole).

6. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
$-z$	0	-2	0	5	0	-8	-23
x_3	0	11	1	-4	0	-48	77
x_5	0	4	0	0	1	1	16
x_1	1	8	0	-3	0	5	32

Si risponda alle seguenti domande **senza svolgere calcoli** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Possiamo subito dire se è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (11)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?

a) La soluzione di base corrispondente è $z = 23$. Non possiamo dire subito se sia ottima, in quanto esistono dei costi ridotti negativi oltre ad altri >=0. La base individuata è $[x_3, x_5, x_1]$; altra possibile base, sarebbe $[x_3, x_6, x_1]$, sempre vedendo i coefficienti della matrice identità in entrambi i casi. Comunque, viene data la base dall'esercizio.

b) La variabile inquadrata non permette il pivoting in quanto non rispetta la regola del quoziente minimo (soddisfatta invece dagli altri due elementi sulla stessa colonna)

c) Gli elementi sui quali poter effettuare il pivot sono (4), (8), (5).

d) La variabile che entra è x_2, la variabile che esce è x_1. La soluzione è sicuramente degenere in quanto ci sono due variabili con rapporto minimo.

2. Si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland, il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 2 \\
 & 2\,x_1 & & & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & -\,x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \geq & -1
\end{array}
$$

$$x_1 \leq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

(1)

$$
\begin{array}{l}
\max\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
\quad 2x_1 + x_3 \leq 0 \\
\quad -x_1 - x_2 - x_3 \geq -1 \\
\quad x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l}
\min\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\
\quad 2x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\
\quad -x_1 - x_2 - x_3 - x_6 = -1 \\
\quad x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{l}
\min\ 2\hat{x}_1 - 2x_2 - 3x_3 \qquad \hat{x}_1 = -x_1,\ \hat{x}_1 \geq 0 \\
\text{s.t. } -2\hat{x}_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\
\quad -2\hat{x}_1 + x_3 + x_5 = 0 \\
\quad -\hat{x}_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 1
\end{array}
$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
2	-2	-3	0	0	0	-1	0
-2	1	2	1	0	0	0	2
-2	0	1	0	1	0	0	0
-1	1	1	0	0	1	0	1

F.C. → SI
Amm → SI
ILL → SI

Il problema è illimitato.

2. Si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland, il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & -2\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & - & x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & - & x_4 & \geq & -2 \\
 & -2\,x_1 & + & x_2 & - & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 1
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \qquad \mathbf{x_2 \leq 0} \qquad x_3 \geq 0 \qquad x_4 \geq 0$$

a. lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola di Bland.

b. si dica, senza svolgere calcoli, se il corrispondente problema duale ammette soluzione (giustificare la risposta).

$\max \; -2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4$

s.A. $x_1 - x_2 + 2x_2 - x_4 \geq -2$

$-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 1$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \leq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0$

~~max $-2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4$~~

$\min \; +2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$

s.A. $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = -2$

$-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 4$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 1$

(2) max $-2x_1 + \hat{x}_2 + 2x_3 + x_4$ $\qquad \hat{x}_2 = -x_2, \ \hat{x}_2 \geq 0$

s.t. $x_1 + \hat{x}_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = -2$

$-2x_1 + \hat{x}_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 4$

$x_1 + 2\hat{x}_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 1$

max $-2x_1 + \hat{x}_2 + 2x_3 + x_4$

s.t. $-x_1 - \hat{x}_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = +2$

$-2x_1 + \hat{x}_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 4$

$x_1 - 2\hat{x}_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 1$

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\bar{b}$
z	-2	1	2	1	0	0	0	-1	0
x_5	-1	-1	2	1	1	0	0	0	2
x_6	-2	1	-2	2	0	1	0	0	4
x_7	$\boxed{1}$	-2	1	-1	0	0	1	0	1

$B = [x_5, x_6, x_7]$

F.C -> SI

AMM -> SI

OTTIMA -> NON SO

ILLIM. -> NON SO $\quad x_6 \quad x_7$

ENTRA -> x_1

ESCE -> argmin $\left\{ \frac{2}{-1}, \frac{4}{-2}, \frac{1}{1} \right\}$

(3)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	$\bar{b}$
0	-3	4	-2	0	0	2	-1	2
0	-3	3	0	0	0	1	0	3
0	-3	0	0	0	1	2	0	6
1	-2	1	-1	0	0	1	0	1

$B = [x_5, x_6, x_1]$

$R_0' \leftarrow R_0 + 2R_3'$

$R_1' \leftarrow R_1 + R_3'$

$R_2' \leftarrow R_2 + 2R_3'$

$R_3' \leftarrow R_3$

ILLIMITATO

b) Essendo il corrispondente problema primale illimitato, il problema duale è inammissibile per definizione. Questo è dovuto al teorema dela dualità forte; volendo dimostrare che esista per assurdo una soluzione ammissibile duale, dovrebbe valere per la dualità debole, $c^T x \geq u^T b$ per ogni x ammissibile primale, dimostrando che z^* è limitato. Questo non accade.

2. Si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq -4$$
$$- x_2 - x_3 \geq 0$$
$$-x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 0$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$$

Secondo quale teorema della dualità il corrispondente problema duale non è ammissibile?

$\max\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$

$s.t.\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq -4$

$-x_2 - x_3 \geq 0$

$-x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 0$

$\min\ -2x_1 - 3x_2 + 3\hat{x}_3$

$s.t.\ -2x_1 - 4x_2 + 6\hat{x}_3 + x_4 = 4$

$-x_2 + \hat{x}_3 - x_5 = 0$

$-x_1 - x_2 + 2\hat{x}_3 + x_6 = 0$

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	[illegible]	$\bar{b}$
z	-2	-3	3	0	0	0	-1	0
x_4	-2	-4	6	1	0	0	0	4
$\hat{x}_3$	0	-1	1	0	-1	0	9	0
x_6	-1	-2	2	0	0	1	0	0

F.C → sì
AR?? → sì
ILLIM → sì

Essendo il corrispondente problema primale illimitato, il problema duale è inammissibile per definizione. Questo è dovuto al teorema della dualità forte; volendo dimostrare che esista per assurdo una soluzione ammissibile duale, dovrebbe valere per la dualità debole, $c^T x \geq u^T b$ per ogni x ammissibile primale, dimostrando che z^* è limitato. Questo non accade.

6. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare.

$$\min \quad 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

Senza svolgere calcoli, cosa possiamo dire del corrispondente problema duale? In base a quale proprietà? **Fornire una giustificazione teorica della risposta**.

Vediamo che il problema è illimitato, essendo tutta la colonna degli $x_2 \leq 0$.
Essendo il corrispondente problema primale illimitato, il problema duale è inammissibile per definizione. Questo è dovuto al teorema della dualità forte; volendo dimostrare che esista per assurdo una soluzione ammissibile duale, dovrebbe valere per la dualità debole, $c^T x \geq u^T b$ per ogni x ammissibile primale, dimostrando che z^* è limitato. Questo non accade.

6. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{llcrcrcrcl}
\min & x_1 & - & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & 31\,x_1 & - & 12\,x_2 & + & 23\,x_3 & \leq & 32 \\
 & -13\,x_1 & & & + & 2\,x_3 & \leq & 12 \\
 & 16\,x_1 & - & 23\,x_2 & - & x_3 & \leq & 27
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Senza svolgere calcoli, cosa possiamo dire del corrispondente problema duale? In base a quale proprietà? <u>**Fornire una giustificazione teorica della risposta**</u>.

Essendo il corrispondente problema primale illimitato, il problema duale è inammissibile per definizione. Questo è dovuto al teorema della dualità forte; volendo dimostrare che esista per assurdo una soluzione ammissibile duale, dovrebbe valere per la dualità debole, $c^T x \geq u^T b$ per ogni x ammissibile primale, dimostrando che z^* è limitato. Questo non accade. Si vede dal fatto che la colonna di x_2 è tutta con coefficienti negativi.

$$\begin{array}{llcrcrcrcl}
\min & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & - & x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & x_3 & \geq & -3 \\
 & -\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & \geq & -1
\end{array}$$

$$\mathbf{x_1 \leq 0} \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

0) f.s.t.d $\qquad x_1 = -\hat{x}_1$

$$\begin{array}{ll}
\min & -2\hat{x}_1 - 3x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} & 2\hat{x}_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & \hat{x}_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\
 & \hat{x}_1 + x_3 + x_6 = 1 \\
 & \hat{x}_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}$$

S.A.B con x_4, x_5 e x_6 !

1) F.C. r.a. $x_4\ x_5\ x_6$

	-2	-3	-1	0	0	0	-1	0
x_4	2	2	1	1	0	0	0	3
x_5	1	2	1	0	1	0	0	2
x_6	1	0	1	0	0	1	0	1

FC? SI AMM? SI OTT? NON SO ILLIM? NON SO

entra (tra $\hat{x}_1, x_2, x_3$) $\hat{x}_1$ (Bland) esce argmin $\left\{\frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \underline{\frac{1}{1}}\right\} = \arg\{1\} = x_6$

2) F.C. r.a. $x_4\ x_5\ \hat{x}_1$

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|c|l}
 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & +2R_3 \\
\hline
x_4 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2R_3 \\
x_5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -R_3 \\
\hat{x}_1 & \underline{1} & 0 & 1 & \underline{0} & \underline{0} & 1 & 0 & 1 & R_3
\end{array}
$$

FC? SI AMM? SI OTT? NON SO ILLIM? NON SO

entra? x_2 esce? argmin $\{1/2, 1/2, 1/0\} = \arg\{\frac{1}{2}\}$ = tra x_4 e x_5 $\to x_4$ per Bland

3) F.C. r.a. $x_2\ x_5\ \hat{x}_1$

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|c|l}
 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1 & -1 & 7/2 & +3R_1' \\
\hline
x_2 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 1/2\, R_1 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -R_1 \\
\hat{x}_1 & \underline{1} & \underline{0} & 1 & 0 & \underline{0} & 1 & 0 & 1 & -
\end{array}
$$

FC? SI AMM? SI OTT? NS ILLIM. N.S.

entra x_3 per Bland esce argmin $\left\{\cancel{\frac{1/2}{-1/2}}, \underline{\frac{0}{1}}, \frac{1}{1}\right\} = \arg\{0\}$

4) F.C. r.a. $x_2\ x_3\ \hat{x}_1$

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|c|l}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1 & 7/2 & +1/2\, R_2 \\
\hline
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & +1/2\, R_2 \\
x_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & / \\
\hat{x}_1 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -R_2
\end{array}
$$

FC? SI AMM? SI OTT? N.S ILLIM? N.S

entra x_6 esce argmin $\left\{\cancel{\frac{1/2}{-1/2}}, \frac{0}{1}, \cancel{\frac{1}{0}}\right\} = \arg\{0\} = x_3$

5) F.C. r.e. $x_2\ x_6\ \hat{x}_1$

5) F.C. r.e. $x_2\ x_6\ \hat{x}_1$

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|c|l}
 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & -1 & 7/2 & +1/2\, R_2 \\
\hline
x_2 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & +1/2\, R_2 \\
x_6 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - \\
\hat{x}_1 & \underline{1} & \underline{0} & 0 & 1 & -1 & \underline{0} & 0 & 1 & -
\end{array}
$$

FC? SI AMM? SI OTT. SI!!!

$x_1^* = -\hat{x}_1^* = -1 \quad x_2^* = 1/2 \quad x_3^* = 0 \quad \boxed{x_4^* = 0 \quad x_5^* = 0 \quad x_6^* = 0}$

$z_{MIN}^* = -7/2$

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
-12/5	0	-23	0	0	-1	9
22	0	1	1	0	0	8
-44	0	**2**	0	1	0	16
11	1	4	0	0	0	4

Si dica, **senza svolgere calcoli** e fornendo una **giustificazione teorica delle risposte**:

a. quale è la soluzione di base corrispondente? Possiamo subito dire se è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato (2)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Che caratteristica avrà la soluzione di base ottenuta?

a) La base che individuiamo, seguendo i coefficienti della matrice identità è $[x_3, x_5, x_2]$. Non possiamo dire se sia ottima, in quanto i costi ridotti non sono tutti positivi o nulli (condizione sufficiente).

b) La variabile inquadrata non permette il pivoting in quanto non rispetta la regola del quoziente minimo (soddisfatta invece dagli altri due elementi sulla stessa colonna)

c) Gli elementi su cui è possibile effettuare il pivoting sono (22), (11), (1), (4) sulle colonne di x_1, x_3.

d) Applicando Bland, entra x_1, esce x_2. La soluzione di base sarà certamente degenere avendo due variabili che corrispondono a rapporto minimo, pertanto entrambe assumeranno valore 0 nella nuova base, mentre una esce e l'altra entra con valore 0, rendendo appunto degenere la nuova base.

2. Si risolva con il metodo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare, applicando la regola anticiclo di Bland.

$$
\begin{array}{llcrcr}
\max & 2x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 15 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \geq & -3
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \qquad \mathbf{x_2 \leq 0}$$

(1)

$\max\ 2x_1 - 3x_2$

s.a. $3x_1 - x_2 \leq 13$

$x_1 - x_2 \leq 5$

$x_1 + 3x_2 \geq -3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0$

$\min\ -2x_1 + 3x_2$

s.a. $3x_1 - x_2 + x_3 = 15$

$x_1 - x_2 + x_4 = 5$

$x_1 + 3x_2 - x_6 = -3$

$\min\ -2x_1 - 3\hat{x}_2$ $\quad \hat{x}_2 = -x_2 \quad \hat{x}_2 \geq 0$

s.a. $3x_1 + \hat{x}_2 + x_3 = 15$

$x_1 + \hat{x}_2 + x_4 = 5$

$x_1 - 3\hat{x}_2 - x_6 = -3$

$\min\ -2x_1 - 3\hat{x}_2$

s.a. $3x_1 + \hat{x}_2 + x_3 = 13$

$x_1 + \hat{x}_2 + x_4 = 5$

$-x_1 + 3\hat{x}_2 + x_6 = 3$

$B = [x_3\ x_4\ x_5]$

	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	z	b
	-2	-1	0	0	0	-1	0
x_3	$\boxed{3}$	1	1	0	0	0	15
x_4	1	1	0	1	0	0	5
x_5	-1	3	0	0	1	0	3

F.C → SI

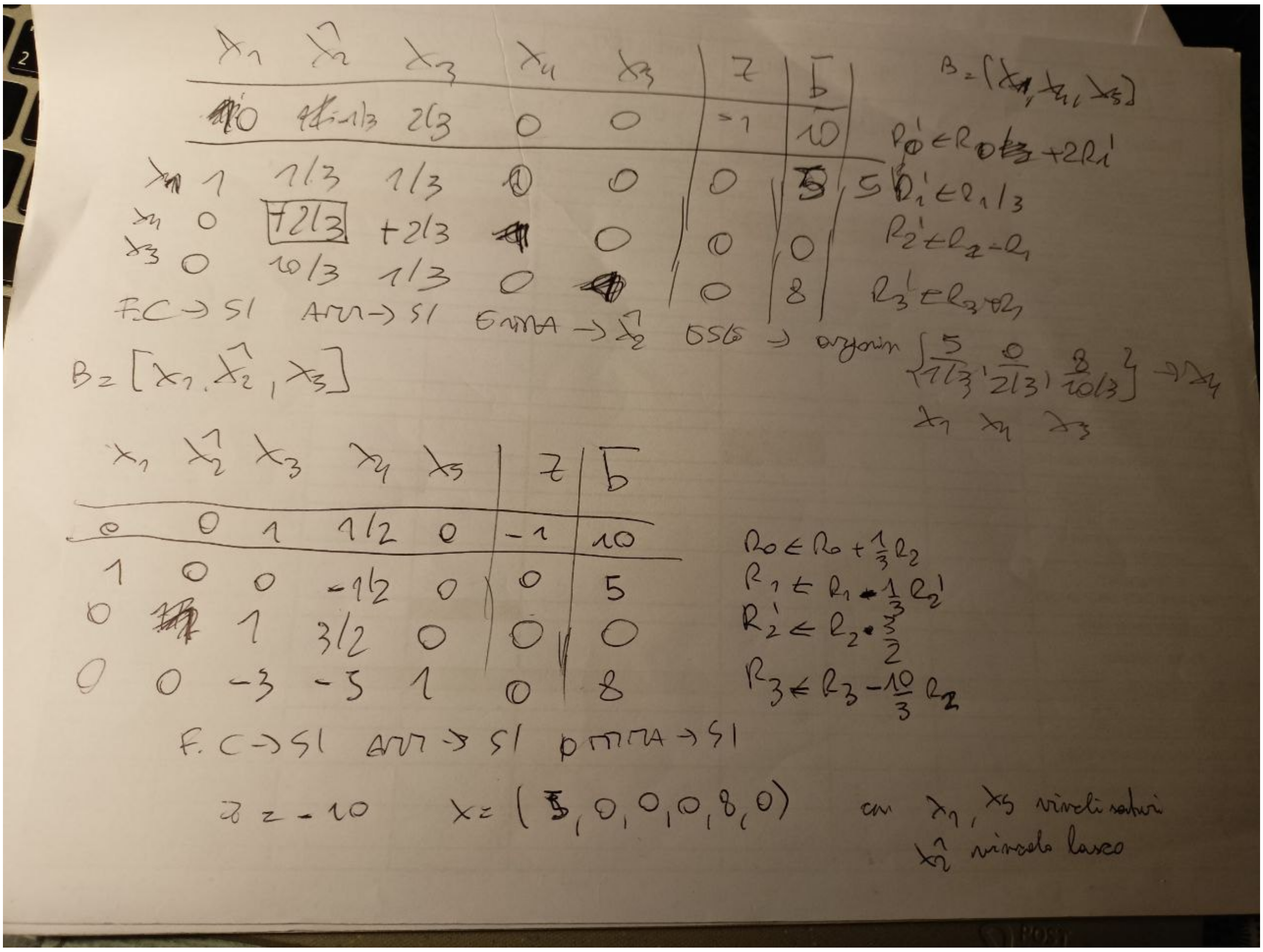
AMM → SI

OTTIMA → NON SO

ILLIMIT. → NON SO

ENTRA → x_1

ESCE → $\arg\min\left\{\frac{15}{3}, \frac{5}{1}, \frac{3}{(-1)}\right\}$ x_3 x_4



$B = (x_1, x_4, x_3)$

x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	z	b	
0	$-1/3$	$2/3$	0	0	-1	10	$R_0' \leftarrow R_0 + 2R_1'$
x_1: 1	$1/3$	$1/3$	0	0	0	5	$R_1' \leftarrow R_1/3$
x_4: 0	$\boxed{+2/3}$	$+2/3$	1	0	0	0	$R_2' \leftarrow R_2 - R_1$
x_3: 0	$10/3$	$1/3$	0	1	0	8	$R_3' \leftarrow R_3 + R_1$

F.C → SI AMM → SI EMMA → $\hat{x}_2$ OSS → orizzon. $\left\{\frac{5}{1/3}, \frac{0}{2/3}, \frac{8}{10/3}\right\} \rightarrow x_4$

$x_1 \quad x_4 \quad x_3$

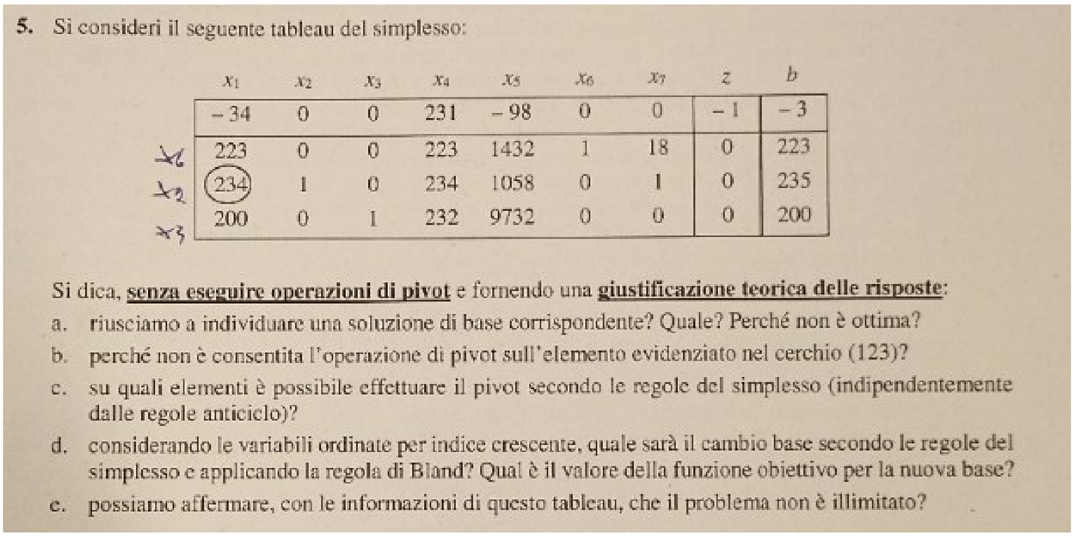
$B = [x_1, \hat{x}_2, x_3]$

x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5	z	b	
0	0	1	$1/2$	0	-1	10	$R_0 \leftarrow R_0 + \frac{1}{3}R_2$
1	0	0	$-1/2$	0	0	5	$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{3}R_2'$
0	1	1	$3/2$	0	0	0	$R_2' \leftarrow R_2 \cdot \frac{3}{2}$
0	0	-3	-5	1	0	8	$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{10}{3}R_2$

F.C → SI AMM → SI PMMA → SI

$z = -10 \quad x = (5, 0, 0, 0, 8, 0)$ con x_1, x_5 vincoli saturi, $\hat{x}_2$ vincolo lasco

$$z_{MAX} = -z_{MIN} = -(-10) = 10$$



5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	b
	−34	0	0	231	−98	0	0	−1	−3
x_6	223	0	0	223	1432	1	18	0	223
x_2	234	1	0	234	1058	0	1	0	235
x_3	200	0	1	232	9732	0	0	0	200

Si dica, <u>**senza eseguire operazioni di pivot**</u> e fornendo una <u>**giustificazione teorica delle risposte**</u>:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perché non è ottima?
b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (123)?
c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
d. considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il valore della funzione obiettivo per la nuova base?
e. possiamo affermare, con le informazioni di questo tableau, che il problema non è illimitato?

a) Il tableau è in forma canonica rispetto a $[x_6, x_2, x_3]$. La soluzione di base corrente è (0, 235, 200, 0, 0, 223) con valore $z = 1$. Nella prima riga del tableau sono presenti costi ridotti negativi e non è detto sia ottima (condizione sufficiente di ottimalità)

b) L'elemento evidenziato non consente l'operazione di pivot in quanto non rispetta la regola del rapporto minimo; ciò porterebbe ad una soluzione non ammissibile, dato che la variabile che entra in base assumerebbe un valore tale da portare a 0 la variabile che esce, troppo alto per soddisfare i restanti vincoli.

c) Secondo le regole del simplesso, possiamo effettuare il pivot su (223), (200) della colonna x_1 e (1058) nella colonna di x_5.

d) Secondo la regola di Bland, entra in base x_1 ed esce x_3. Questo funziona dato che il pivot viene eseguito sull'elemento in ordine di indice crescente per le variabili che entrano e il corrispettivo rapporto minimo $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}}$ Bland sceglie, in corrispondenza di molteplici variabili che corrispondono al rapporto minimo, la variabile con indice inferiore quando ordinati a livello crescente.

e) Guardando il problema, possiamo affermare che il tableau non sia illimitato, in quanto sotto ogni colonna sussistono solo costi ridotti >= 0, comprese le colonne delle variabili fuori base. Ricordiamo che il tableau nel simplesso individua subito un problema illimitato quando si vede che le variabili fuori base hanno tutti i coefficienti $\overline{c_h}$ < 0.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{llll} \max & x_1 + 2x_2 - 4x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 1 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & -1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 & & \end{array}$$

a) lo si risolva con il metodo del simplesso, **applicando la regola anticiclo di Bland**;

b) cosa possiamo dire, direttamente a partire dal risultato del punto precedente, sulla soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo?

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.A} & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.A} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 = -1 \end{array}$$

$$> \begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 - 4\hat{x}_3 \\ \text{s.A.} & x_1 + x_2 + \hat{x}_3 + x_4 = 1 \\ & 2x_1 - x_2 - \hat{x}_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + x_2 - 2\hat{x}_3 - x_6 = -1 \end{array} \qquad \hat{x}_3 = -x_3,\ \hat{x}_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 - 4\hat{x}_3 \\ \rightarrow \text{s.A.} & x_1 + x_2 + \hat{x}_3 + x_4 = 1 \\ & 2x_1 - x_2 - \hat{x}_3 + x_5 = 2 \\ & -x_1 - x_2 + 2\hat{x}_3 + x_6 = 1 \end{array}$$

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
	-1	-2	-4	0	0	0	-1	0
x_4	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	0	1
x_5	2	-1	-1	0	1	0	0	2
x_6	-1	-1	2	0	0	1	0	1

F.C → SI
AMP → SI
ENTRA → x_1
SALE → argmin $\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{-1}\}$ → x_4
x_4 x_5 x_6

B = [x_4, x_5, x_6)

B = [x_1, x_5, x_6]

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
	0	-1	-3	1	0	0	-1	1
	1	1	1	1	0	0	0	1
	0	$\boxed{-3}$	-3	-2	1	0	0	0
	0	0	3	1	0	1	0	2

$R_0' \leftarrow R_0 + R_1$
$R_1' \leftarrow R_1$
$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
$R_3 \leftarrow R_1 + R_3$

F.C → SI AMP → SI ENTRA → x_2 SALE → argmin $\{\frac{1}{1}, \frac{0}{-3}, \frac{2}{0}\}$ → x_3

B = [x_1, x_2, x_6)

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
	1	0	-2	4/3	-1/3	0	-1	1
x_1	1	0	0	2/3	1/3	0	0	1
x_2	0	1	$\boxed{1}$	1/3	-1/3	0	0	0
	0	0	3	1	0	1	0	2

$R_0 \leftarrow R_0 + R_2$
$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$
$R_2 \leftarrow R_2 / -\frac{1}{3}$
R_3

F.C → SI
AMP → SI
ENTRA → $\hat{x}_3$ (BLAND)
SALE → argmin $\{\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{2}{3}\}$
x_1 x_2 x_6

B = [x_1, $\hat{x}_3$, x_6]

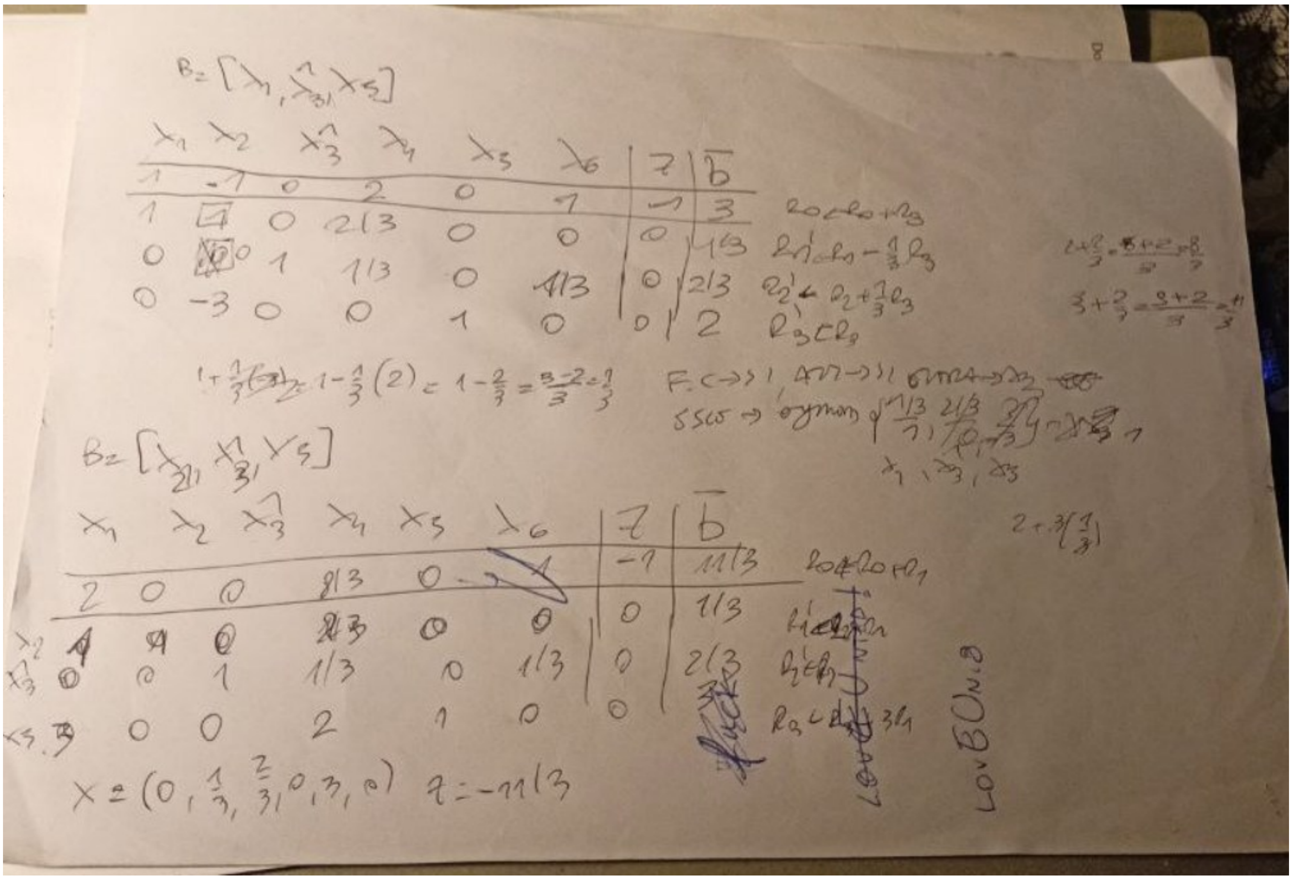
	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
	~~1~~	~~2~~	~~0~~	~~2~~	~~-1~~	~~0~~	~~-1~~	~~1~~
x_1	1	0	0	2/3	1/3	0	0	1
$\hat{x}_3$	0	1	1	1/3	-1/3	0	0	0
x_6	0	-3	0	0	$\boxed{1}$	1	0	2

$R_0 \leftarrow R_0 + 2R_2$
$R_1 \leftarrow R_1$
$R_2 \leftarrow R_2$
$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$

$1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{2}{3}$

F.C → SI AMP → SI ENTRA → x_5 SALE → argmin $\{\frac{1}{1/3}, \frac{0}{-1/3}, \frac{2}{1}\}$
x_1 $\hat{x}_3$ x_6

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$



$$z_{MAX} = -z_{MIN} = -\left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

2. Si risolva con il metodo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare, applicando la regola anticiclo di Bland.

$$\begin{array}{llllllll}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & - & 3x_4 \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 \geq -2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 \leq 4 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 \geq -2 \\
 & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & x_4 \leq 0
\end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il problema in forma standard ($min\ \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$).
Poiché $x_4 \leq 0$, introduciamo una nuova variabile $\hat{x}_4 = -x_4$ con $\hat{x}_4 \geq 0$.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 3\hat{x}_4 & & & & & & & & \\
s.t. & -2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & \hat{x}_4 & + & x_5 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 2\hat{x}_4 & & & + & x_6 & & & = & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & - & \hat{x}_4 & & & & & + & x_7 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & \hat{x}_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

Avendo aggiunto le variabili di slack x_5, x_6 e x_7, disponiamo di una base ammissibile di partenza $B = \{x_5, x_6, x_7\}$ e il problema è già in forma canonica rispetto alla base B. Organizziamo i dati in forma tableau.

	x_1	x_2	x_3	$\hat{x}_4$	x_5	x_6	x_7	z	$\bar{b}$
$-z$	1	-2	7	-3	0	0	0	-1	0
x_5	-2	-1	-2	1	1	0	0	0	2
x_6	1	$\boxed{2}$	-4	2	0	1	0	0	4
x_7	2	1	0	-1	0	0	1	0	2

La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_5 & A_6 & A_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 2, 4, 2)$ di valore $z = 0$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi (-2 e -3), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Seguendo la regola di Bland, scegliamo come variabile con costo ridotto

negativo che entra in base, la variabile x_2 e, come variabile uscente, la variabile che corrisponde al minimo rapporto $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} : \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \cancel{\frac{2}{-1}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 2.$
Poiché sia x_6 che x_7 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, fra le due, scegliamo come variabile uscente quella con indice minore, quindi x_6 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, x_2, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_2 \leftarrow R_2/2$, $R_1 \leftarrow R_1 + R_2/2$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_2/2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

	x_1	x_2	x_3	$\hat{x}_4$	x_5	x_6	x_7	z	b
$-z$	2	0	3	-1	0	1	0	-1	4
x_5	$-3/2$	0	-4	2	1	$1/2$	0	0	4
x_2	$1/2$	1	-2	$\boxed{1}$	0	$1/2$	0	0	2
x_7	$3/2$	0	2	-2	0	$-1/2$	1	0	0

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \hat{x}_4 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_5 & A_2 & A_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 2, 0, 0, 4, 0, 0)$ di valore $z = -4$.

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo (-1), quindi la base B non è ottima. Procediamo dunque con l'operazione di cambio base. Scegliamo come variabile che entra in base, la variabile con costo ridotto negativo, ovvero $\hat{x}_4$. Per scegliere la variabile che esce di base calcoliamo $\theta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i4}} : \bar{a}_{i4} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \cancel{\frac{0}{-2}} \right\} = 2$. Poiché sia x_5 che x_2 corrispondono al minimo rapporto $\theta = 2$, per la regola di Bland, scegliamo come variabile uscente quella con indice minore, quindi x_2 esce di base.

Consideriamo dunque la nuova base $B = \{x_5, \hat{x}_4, x_7\}$ ed eseguiamo l'operazione di pivot sull'elemento riquadrato nel tableau precedente. Per riportare il tableau alla forma canonica rispetto alla nuova base eseguiamo le seguenti operazioni sulle righe.

Operazioni: $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$, $R_0 \leftarrow R_0 + R_2$.

	x_1	x_2	x_3	$\hat{x}_4$	x_5	x_6	x_7	z	$\bar{b}$
$-z$	$5/2$	1	1	0	0	$3/2$	0	-1	6
x_5	$-5/2$	-2	0	0	1	$-1/2$	0	0	0
$\hat{x}_4$	$1/2$	1	-2	1	0	$1/2$	0	0	2
x_7	$5/2$	2	-2	0	0	$1/2$	1	0	4

Ora, la situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ \hat{x}_4 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_5 & A_4 & A_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con soluzione: $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 2, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$.

Osserviamo che tutti i costi ridotti nella prima riga sono non negativi e quindi la base corrente $B = \{x_5, \hat{x}_4, x_7\}$ è ottima. La soluzione ottima è $x = (x_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 2, 0, 0, 4)$ di valore $z = -6$. Il problema di programmazione lineare originale ammette dunque una soluzione ottima $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, -2)$ di valore $z_{MAX} = -z_{MIN} = 6$.

5) Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	$\bar{b}$
$-z$	-2	0	-3	1	0	0	-1	5
	-1	0	1	-2	1	0	0	2
	2	0	$\boxed{1}$	1	0	1	0	4
	1	1	-1	2	0	0	0	2

Si dica, senza svolgere calcoli e fornendo una giustificazione teorica delle risposte:

a. quale è la soluzione di base corrispondente? Possiamo subito dire se è ottima?

b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato (1)?

c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?

d. quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Che caratteristica avrà la soluzione di base ottenuta?

Soluzione.

a. Osserviamo che il tableau è in forma canonica rispetto alla base $B = \{x_5, x_6, x_2\}$. La situazione è la seguente:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_5 & A_6 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la soluzione di base corrente è $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2, 0, 0, 2, 4)$ di valore $z = -5$.
Osserviamo che nella prima riga del tableau sono presenti alcuni costi ridotti negativi, $(-2,\ -3 < 0)$, quindi la soluzione di base corrente non è detto sia ottima (ricordiamo che "costi ridotti tutti positivi o nulli" è condizione SUFFICIENTE e non necessaria di ottimalità). Inoltre, poiché tutti i termini noti (colonna $\bar{b}$) sono strettamente positivi, allora sicuramente, aumentando il valore delle variabili corrispondenti a tali costi ridotti negativi, ovvero aumentando il valore di x_1 o x_3, è possibile trovare una soluzione ammissibile con valore della funzione obiettivo strettamente minore e quindi la soluzione di base corrente non è ottima.

b. L'operazione di pivot non può essere effettuata sull'elemento evidenziato (1) in quanto questa operazione porterebbe ad una soluzione non ammissibile, visto che l'elemento non soddisfa la regola del quoziente minimo. In altre parole, effettuando questo pivot, la variabile x_3 (che entra in base) assumerebbe un valore (che corrisponde al rapporto non minimo $\frac{4}{1}$) tale da portare a 0 la variabile x_6 (che uscirebbe dalla base), ma troppo alto, in quanto, per soddisfare i restanti vincoli, le altre variabili dovrebbero assumere valori negativi.

c. Ricordiamo che il metodo del simplesso cerca cambi base che tendano a migliorare il valore della funzione obiettivo (quindi si fa entrare in base una qualsiasi colonna con costo ridotto negativo) preservando l'ammissibilità della nuova base (si fa uscire dalla base una qualsiasi variabile che soddisfi la regola del quoziente minimo). Pertanto, i possibili elementi pivot sono 2 (entra x_1 e esce x_6), 1 (entra x_1 e esce x_2) e 1 (entra x_3 e esce x_5).

d. Seguendo la regola di Bland, l'operazione di pivot viene eseguita sull'elemento in riga t e in colonna h dove $h = \min\{j : \bar{c}_j < 0\}$ e $t = \arg\min_{i=1,2,3}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0\right\}$ e nel caso di più variabili attualmente in base che corrispondono al minimo quoziente θ, $t = \min\left\{B_i : \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} = \theta\right\}$. Dal tableau osserviamo che i costi ridotti negativi $(-2, -3 < 0)$ corrispondono alle variabili x_1 e x_3, quindi $h = min\{1, 3\} = 1$. Allora il quoziente minimo corrisponde a $\theta = \min_{i=1,2,3}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0\right\} = \min_{i=1,2,3}\left\{\cancel{\frac{2}{-1}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{1}\right\} = 2$. Ci sono due variabili corrispondenti a questo minimo rapporto, ovvero x_6 $(t = 2)$ e x_2 $(t = 3)$. Pertanto, si sceglie come variabile uscente x_2 (che ha l'indice minimo), dunque $t = 3$ e alla prossima iterazione del metodo del simplesso, l'operazione di pivot verrà eseguita sull'elemento 1 in riga $t = 3$ e in colonna $h = 1$.

La regola di Bland impone l'operazione di pivot sulla prima colonna, dove due variabili x_6 e x_2 corrispondono al rapporto minimo. Pertanto, sia x_6 sia x_2 assumeranno il valore 0 nella nuova base: x_2 esce dalla base e x_6 rimane in base al valore 0, rendendo la nuova base DEGENERE.

2. Dato il seguente problema di P.L.

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & -2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & 7\,x_3 & & \\
s.t. & -\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\
 & -2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 \leq 0 & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

trovare la soluzione ottima con il metodo del simplesso (si applichi la regola anti-ciclo di Bland).

2. Forma standard: da max a min, variabile di slack x_4, sostituzione della variabile non positiva x_1 con $\hat{x}_1 = -x_1$:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min z = & -2\,\hat{x}_1 & - & 3\,x_2 & + & 7\,x_3 & & & & \\
s.t. & \hat{x}_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 4 \\
 & 2\,\hat{x}_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
 & \hat{x}_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & x_4 \geq 0 & &
\end{array}$$

Non è evidente una base ammissibile $\Rightarrow$ Fase I del simplesso $\Rightarrow$ problema artificiale (basta una sola variabile artificiale):

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min w = & & & & & & & & & y & & \\
s.t. & \hat{x}_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & y & = & 4 \\
 & 2\,\hat{x}_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 5 \\
 & \hat{x}_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & x_4 \geq 0 & & y \geq 0 & &
\end{array}$$

Tableau iniziale della fase I:

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	y	$\bar{b}$
$-w$	0	0	0	0	1	0
	1	1	-1	0	$\boxed{1}$	4
	2	-2	1	1	0	5

Passo alla forma canonica:

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	y	$\bar{b}$
$-w$	-1	-1	1	0	0	-4
	1	1	-1	0	1	4
	$\boxed{2}$	-2	1	1	0	5

e applico il simplesso con la regola di Bland (tra $\hat{x}_1$ e x_2 scelgo $\hat{x}_1$):

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	y	$\bar{b}$
$-w$	0	-2	$3/2$	$1/2$	0	$-3/2$
	0	$\boxed{2}$	$-3/2$	$-1/2$	1	$3/2$
	1	-1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	y	$\bar{b}$
$-w$	0	0	0	0	1	0
	0	1	$-3/4$	$-1/4$	$1/2$	$3/4$
	1	0	$-1/4$	$1/4$	$1/2$	$13/4$

$w^* = 0 \Rightarrow$ esiste soluzione ammissibile; è già evidente la base ammissibile $x_2, \hat{x}_1$. Si passa alla fase II, con tableau

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
$-z$	-2	-3	7	0	0
	0	1	$-3/4$	$-1/4$	$3/4$
	$\boxed{1}$	0	$-1/4$	$1/4$	$13/4$

Passo alla forma canonica

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
$-z$	0	-3	$13/2$	$1/2$	$13/2$
	0	$\boxed{1}$	$-3/4$	$-1/4$	$3/4$
	1	0	$-1/4$	$1/4$	$13/4$

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
$-z$	0	0	$17/4$	$-1/4$	$35/4$
	0	1	$-3/4$	$-1/4$	$3/4$
	1	0	$-1/4$	$\boxed{1/4}$	$13/4$

e applico l'algoritmo del simplesso con regola di Bland:

	$\hat{x}_1$	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
$-z$	4	0	$1/2$	0	12
	1	1	-1	0	4
	4	0	-1	1	13

Costi ridotti non negativi: riconosco la soluzione ottima $x_1 = -\hat{x}_1 = 0; x_2 = 4; x_3 = 0; x_4 = 13; z_{MAX} = -z = -(-12) = 12$.

- Come si riconoscono su un tableau le due condizioni di arresto del metodo del simplesso primale? Giustificare la risposta.

Nel metodo del simplesso primale esistono due condizioni di arresto:

- Il raggiungimento del valore massimo della funzione obiettivo, che indica che la soluzione corrente è ottimale. Questo può essere riconosciuto su un tableau dal fatto che tutti i coefficienti della riga dell'obiettivo sono non positivi (minori o uguali a zero).

- Non ci sono più soluzioni ammissibili, il che indica che il problema è infeasible. Questo può essere riconosciuto in un tableau dal fatto che c'è almeno un valore negativo nella riga inferiore (la riga contenente i costi ridotti).

Giustificazione:

- Se è stato raggiunto il valore massimo della funzione obiettivo, non c'è modo di migliorare la soluzione attuale apportando ulteriori modifiche alle variabili. Infatti, qualsiasi modifica alle variabili comporterebbe una diminuzione del valore della funzione obiettivo, il che sarebbe contrario all'obiettivo di massimizzare la funzione obiettivo. Pertanto, la soluzione attuale deve essere ottimale.

- Se non ci sono più soluzioni ammissibili, significa che non c'è modo di soddisfare contemporaneamente tutti i vincoli del problema. Questo può accadere se ci sono vincoli contrastanti o se le variabili non sono vincolate in modo tale da poter trovare una soluzione fattibile. In questo caso, il problema non è fattibile e non può essere risolto con il metodo del simplesso primale

6. Si consideri il metodo del simplesso duale in forma tableau, applicato ad un problema $\min c^T x : Ax = b, x \geq 0$. Consideriamo il tableau relativo a una iterazione e indichiamo con $\bar{a}_{ij}$ l'elemento del tableau in riga i e colonna j. Sia valore della soluzione corrente (super-)ottimo e non ammissibile: i valori correnti dei costi ridotti $\bar{c}_j$ sono tutti positivi o nulli e sia il valore della variabile corrispondente alla riga h negativo. Si fissi tale variabile come variabile che esce dalla base. Cosa succede se si sceglie, come variabile entrante, la variabile x_k con $\bar{a}_{hk} < 0$, ma con rapporto $\bar{c}_k/|\bar{a}_{hk}|$ non minimo? Giustificare la risposta.

Se si sceglie la variabile x_k con ̄a_(hk)<0 come variabile entrante, ma con un rapporto ̄c_k/|̄a_(hk)| che non è minimo, allora l'elemento pivot ̄a_(hk) verrà utilizzato per aggiornare i valori delle altre variabili nel tableau. Tuttavia, poiché il rapporto ̄c_k/|̄a_(hk)| non è minimo, le altre variabili non saranno aggiornate in modo ottimale. In particolare, i valori delle variabili che sono inversamente proporzionali a ̄a_(hk) saranno aggiornati in modo non così vantaggioso per la funzione obiettivo.

Ad esempio, supponiamo che la variabile entrante sia x_k, con ̄a_(hk)<0 e ̄c_k/|̄a_(hk)| non minima. Quindi, quando x_k entra nella base, il valore delle altre variabili del tableau sarà aggiornato secondo la seguente formula:

x_i' = x_i - ̄a_(hi) * ̄a_(hk) / ̄a_(hk) = x_i - ̄a_(hi)

Poiché il rapporto ̄c_k/|̄a_(hk)| non è minimo, questo aggiornamento non sarà ottimale e il valore della funzione obiettivo non sarà massimizzato come potrebbe.

Giustificazione:

L'obiettivo del metodo dual simplex è trovare la soluzione ottimale al problema min $c^T x$: Per fare ciò, il metodo utilizza un tableau per tenere traccia dei valori correnti delle variabili e della funzione obiettivo e apporta iterativamente modifiche alle variabili nel tentativo di migliorare la funzione obiettivo.

In ogni iterazione, il metodo dual simplex sceglie una variabile per entrare nella base e una variabile per uscire dalla base. La variabile di ingresso viene scelta in modo da migliorare la funzione obiettivo, mentre la variabile di uscita viene scelta in modo da mantenere la fattibilità.

Se il valore della soluzione attuale è (super-)ottimale e non ammissibile, significa che i valori attuali dei costi ridotti $\bar{c}_j$ sono tutti positivi o nulli e che il valore della variabile corrispondente alla riga h è negativo. In questo caso, l'elemento pivot $\bar{a}_{(hk)}$ verrà utilizzato per aggiornare i valori delle altre variabili del tableau.

Se si sceglie come variabile entrante la variabile x_k con $\bar{a}_{(hk)}<0$, ma con un rapporto $\bar{c}_k/|\bar{a}_{(hk)}|$ che non è minimo, le altre variabili non verranno aggiornate in modo ottimale. Questo perché il rapporto $\bar{c}_k/|\bar{a}_{(hk)}|$ determina l'importanza relativa delle variabili nell'aggiornamento e se non è minimo, l'aggiornamento non sarà così vantaggioso per la funzione obiettivo.

- Qual è il numero massimo di iterazioni del simplesso? Sotto quali condizioni? Giustificare le risposte.

Il numero massimo di iterazioni che l'algoritmo simplex può compiere è determinato dalla dimensione del problema, in particolare dal numero di variabili e dal numero di vincoli.

Nel peggiore dei casi, il numero di iterazioni dell'algoritmo simplex può essere esponenziale rispetto al numero di variabili, il che significa che il numero massimo di iterazioni può crescere molto rapidamente all'aumentare delle dimensioni del problema. Tuttavia, nella pratica, l'algoritmo simplex converge tipicamente a una soluzione ottimale entro un numero relativamente piccolo di iterazioni, anche per problemi di grandi dimensioni.

La condizione per raggiungere il massimo delle iterazioni per l'algoritmo del simplesso è il raggiungimento del modello ciclico di iterazioni. L'algoritmo del simplesso può ciclare se il problema ha più soluzioni ottimali o se il problema è illimitato.

- Enunciare la regola di Bland per la selezione delle variabili per il cambio di base nel metodo del simplesso primale: a cosa serve tale regola?

6. La regola di Bland per il simplesso primale impone di selezionare, tra tutte le variabili candidate ad entrare o ad uscire dalla base, quelle con indice minimo, cioé:

   - indicando con $\bar{c}_j, j = 1..n$ i costi ridotti delle variabili, entra in base x_h con $h = \arg\min_j\{\bar{c}_j < 0\}$
   - indicando con $\bar{b}_i, i = 1..m$ i valori delle variabili nella base corrente, $x_{\beta[i]}$ tali variabili, $\bar{a}_{ih}$ i valori della colonna h aggiornata per la base corrente, e $\vartheta = \min_i\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ih}\}$, esce dalla base la variabile $x_{\beta[k]}$, $\beta[r] = \min_i\{\beta[i] : \bar{b}_i/\bar{a}_{ih} = \vartheta\}$.

   La regola di Bland serve a evitare che il simplesso cicli, visitando le stesse soluzioni di base, e quindi a garantire delle condizioni di terminazione dell'algoritmo del simplesso.

5. Come si riconoscono le condizioni di inammissibilità per un problema di P.L. risolto con il metodo del simplesso duale? Giustificare la risposta.

   5. Le condizioni di inammissibilità nel metodo del simplesso duale si riconoscono dalla presenza di una riga i del tableau con valore della corrispondente variabile in base negativo ($x_{\beta[i]} < 0$) e restanti elementi ($\bar{a}_{ij}$) tutti non negativi. In questo caso il tableau riporterebbe una condizione del tipo $\sum_j \bar{a}_{ij}x_j = \bar{b}_i < 0$ che non è ottenibile con x_j tutte non negative (e quindi ammissibili).

- Discutete la verità della seguente affermazione: il metodo simplesso può funzionare solo in presenza di soluzioni di basi degeneri

Non è necessariamente vero che il metodo simplex può andare in loop solo in presenza di soluzioni di base degeneri. Se è vero che nei casi degeneri può verificarsi il ciclare (ripetere lo stesso insieme di modifiche alle variabili senza fare alcun progresso verso la ricerca di una soluzione ottimale), questo non è l'unico motivo per cui il ciclare può verificarsi.

Il ciclare può verificarsi anche in casi non degenerati se l'elemento cardine è scelto male. Ad esempio, se l'elemento cardine è sempre lo stesso o se è un elemento che non migliora efficacemente la funzione obiettivo, il metodo simplex può bloccarsi in un ciclo infinito.

In generale, è più probabile che il ciclo si verifichi nei casi degeneri, perché questi casi possono comportare più soluzioni ottimali, che possono far oscillare il metodo del simplesso tra diverse soluzioni senza convergere su un'unica soluzione ottimale. Tuttavia, non è una condizione necessaria perché si verifichi un ciclo.

- Indicare i risultati teorici e le condizioni che garantiscono che il metodo del simplesso trovi sempre una soluzione ottimale (se esiste) a un problema di programmazione lineare in un numero finito di passi.

Il metodo del simplesso troverà sempre una soluzione ottimale (se esiste) a un problema di programmazione lineare in un numero finito di passi alle seguenti condizioni:

- Il problema è fattibile. Ciò significa che esiste almeno un insieme di valori per le variabili che soddisfa tutti i vincoli del problema.

- Il problema è limitato. Ciò significa che le variabili sono limitate a un intervallo finito, il che consente al metodo simplex di progredire verso una soluzione ottimale senza rimanere bloccato in un ciclo infinito.

- Il problema non è degenere. Un problema è degenere quando ha più soluzioni ottimali o quando ci sono vincoli ridondanti che non forniscono informazioni aggiuntive sullo spazio delle soluzioni. I problemi degenerati possono far sì che il metodo simplex oscilli tra diverse soluzioni senza convergere su un'unica soluzione ottimale.

In queste condizioni, il metodo del simplesso troverà sempre una soluzione ottimale (se esiste) in un numero finito di passi. Questo perché il metodo simplex è progettato per migliorare iterativamente la funzione obiettivo fino a raggiungere il suo valore massimo e, poiché il problema è fattibile e limitato, alla fine troverà una soluzione che soddisfa tutti i vincoli ed è ottimale.

2. Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso:

$$\begin{array}{lllll} \max & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 4 \\ & -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & \geq 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & \end{array}$$

<u>* Quale teorema ci permette di stabilire immediatamente il valore della funzione obiettivo del corrispondente problema duale?</u>

2. Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso:

$$\begin{array}{lllll} \max & 2x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +x_2 & -x_3 & = 4 \\ & 2x_1 & +2x_2 & & \geq 8 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Cosa possiamo dire del corrispondente problema duale?

Per entrambi: In base al fatto che il problema primale è illimitato, il problema duale è inammissibile (corollario del teorema della dualità debole).

5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
0	0	−1	0	−5	0	−1	7
0	1	23	1	2	0	0	23
0	0	1	2	16	1	0	15
1	0	46	2	1	0	0	46

Si dica, <u>senza svolgere calcoli</u> e fornendo una <u>giustificazione teorica delle risposte</u>:

a. riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perchè non ~~è~~ ottima?
b. perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (2)?
c. su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente dalle regole anticiclo)?
d. quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Perché la soluzione di base ottenuta in seguito a questo cambio base è sicuramente degenere?
~~e. Esiste una soluzione di base ottima alternativa a quella individuata?~~

a) Il tableau è in forma canonica rispetto alla base $[x_2, x_3, x_5]$ con soluzione di base (0,23,15,0,46,0) e valore $z = -7$. Non è detto che la soluzione di base sia ottima, dato che abbiamo dei costi ridotti negativi (costi ridotti positivi o nulli sono condizione sufficiente).

b) Non viene effettuata l'operazione di pivot su quell'elemento dato che non soddisfa la regola del quoziente minimo e ciò porterebbe ad una soluzione non ammissibile. In questo modo, la variabile x_5 entrerebbe in base con un valore che porta a 0 il valore x_2, ma troppo alto per soddisfare i restanti vincoli.

c) Possiamo applicare il pivot sugli elementi per i quali si hanno costi ridotti negativi (variabili che entrano) e tutti gli elementi che soddisfano la regola del quoziente minimo, quindi (23), (46), (16).

d) Secondo le regole del simplesso ed applicando Bland, entra x_3 ed esce x_2. Non cambia il vertice del poliedro associato alla nuova base (cioè, sarà degenere), essendoci due variabili corrispondenti al rapporto minimo.

2) Si consideri il seguente pb di prog lin.

$$\max z = x_2$$
$$\text{sT}\quad 2x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le 0$$
$$x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \le 0$$

a) risolvere con simplesso con regola di Bland

b) qual'è il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale? con quale tecnica è possibile determinarlo a partire dal valore del punto precedente?

$x_1 \; x_2 \; \hat{x}_3 \; x_4 \; x_5 \mid z \mid b \qquad B = [x_4, x_2, \hat{x}_3]$

$$\max z = x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le 0$$
$$x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0$$

$$\min z = -x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0$$

$$\min z = -x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = 0$$
$$x_2 + \hat{x}_3 = 2$$

$\hat{x}_3 = -x_3,\ \hat{x}_3 \ge 0,0$

$B = [x_4, x_5, \hat{x}_3]$

	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	x_5	z	b
z	0	-1	0	0	0	1	0
x_4	2	1	0	1	0	0	2
x_5	-1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0
$\hat{x}_3$	0	1	1	0	0	0	2

F.C -> sì, AMM -> sì

entra -> x_2, esce -> argmin$\{\frac{2}{1}, \frac{0}{1}\}$ $= x_5$

	x_1	x_2	$\tilde{x}_3$	x_4	x_3	z	b
z	-1	0	0	0	1	-1	0
x_4	$\boxed{3}$	0	0	1	-1	0	2
x_2	-1	1	0	0	1	0	0
$\tilde{x}_3$	1	0	1	0	-1	0	2

$B = [x_4, x_2, \tilde{x}_3]$

$R_0 \leftarrow R_0 + R_2$

$R_1' \leftarrow R_1 - R_2'$

$R_2' \leftarrow R_2$

$R_3' \leftarrow R_3 - R_2'$

F.C → SI AMM → SI
ILLIM → NON SE ENTRO SUB
ENTRA → x_1
ESCE → argmin$\{\frac{2}{3}, \frac{0}{-1}, \frac{2}{1}\}$ → x_4
$x_4 \; x_2 \; \tilde{x}_3$

	x_1	x_2	$\tilde{x}_3$	x_4	x_3	z	b
z	0	0	0	1/3	2/3	-1	2/3
	1	0	0	1/3	$-1/3$	0	2/3
	0	1	0	1/3	2/3	0	2/3
	0	0	1	$-1/3$	$-2/3$	0	4/3

$R_0' \leftarrow R_0 + R_1'$

$R_1' \leftarrow R_1 / 3$

$R_2' \leftarrow R_2 + R_1'$

$R_3' \leftarrow R_3 - R_1'$

$1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$

$z = -(-2/3) = 2/3$

~~$z_{max} = z_{min}$~~

$z_{max} = -z_{min}$

(b) La sol. ottima del corrisp. probl. duale è la stessa del problema primale, dunque 2/3 per il teorema della dualità forte.

5) Si consideri il seguente Tableau del simplesso

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
	0	-2	0	-3	0	0	-1	0
x_6	0	10	0	30	0	1	0	30
x_1	1	1	0	15	3	0	0	15
x_3	0	5	1	1	33	0	0	15

Senza fare operazioni e fornendo giustificazione teorica delle risposte

a) perché si può trovare una soluzione di base corrispondente? è ottima?

b) su quali elementi è possibile effettuare pivot secondo regole di Simplesso? (no Bland)

c) considerando le variabili per indici crescenti, quale sarebbe il cambio base secondo simplesso e Bland?

d) Qual'è il valore della funzione obiettivo dopo il cambio base del punto c

e) la soluzione di base ottenuta in seguito al cambio base secondo il punto c) è degenere?

a) Il tableau è in forma canonica rispetto alla base $[x_6, x_1, x_3]$ e la soluzione di base corrispondente è $z = -0$ per $x = (15,0,15,0,0,30)$; non sappiamo dire se sia ottima essendoci dei costi ridotti <=0 alla prima riga (condizione sufficiente ma non necessaria di ottimalità)

b) Il pivot si effettua rispetto alle colonne di x_2 ed x_4 per gli elementi (10), (15) essendo corrispondente al rapporto $\frac{b_i}{x_i}$ su x_2 e su (30), (15) su x_4

c) Per Bland si considera la variabile x_2 come entrante in quanto ha indice posizionale minore e la variabile x_3 come uscente, essendo la variabile con indice posizionale minore sul quoziente minimo θ

d) Il valore della f.o. è dato dal rapporto minimo, quindi 3 moltiplicato per $-2 = -6$. Successivamente si considera $-0 + (-6) = -6$

e) La soluzione è degenere avendo due rapporti minimi con stesso coefficiente, pertanto x_6, x_3 assumeranno valore 0 uscendo dalla base mentre l'altra rimane in base a valore 0, rendendo la base degenere.