Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X:

(i) X è una variabile aleatoria discreta tale che $\mathbf{P}(X = -4) = 1/6$, $\mathbf{P}(X = -3) = 1/3$, $\mathbf{P}(X = 1) = 1/6$, $\mathbf{P}(X = 3) = 1/3$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da

$$F_X(x) \doteq \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,\pi/2)}(x) + \mathbf{1}_{[\pi/2,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

(iii) $X = Z^3$ per una variabile aleatoria Z uniforme continua su $(-2, 2)$.

$$E[X] = -4 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$E[X^2] = (-4)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{3} + (1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$F_X = \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{\pi}{2})}(x) + \mathbf{1}_{[\pi/2,\infty)}(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cancel{+ \mathbf{1}_{[\frac{\pi}{2},\infty)}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} - \underbrace{\sin(0)}_{0}$$

$\int$

$X = Z^3 \sim \text{Unif}(-2,2)$

$$\frac{1}{b-a} \sim \frac{1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$$

RIP -> DENS ?

$$E[X] \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \int_{-2}^{2} dx$$

$$= \frac{1}{64} [x]_{-2}^{2}$$

$$E[X^2] = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{16}\right)^3$$

$X \sim Y/2$

Esercizio 2. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Rademacher di parametro 1/2. Poniamo

$$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

(i) Si calcolino media e varianza di X, Y.

(ii) Si calcoli la covarianza tra X e Y e si decida se le due variabili sono indipendenti o meno.

(iii) Si determini la legge congiunta di X e Y.

$$E[X] = E[(\xi_1(\xi_1 + \xi_2))]$$

$$= \underbrace{E[\xi_1]}_{1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0} [E(\xi_1) + E(\xi_2)] = 0$$

RADEMACHER $\sim$ Ber$(1; -1) = \frac{1}{2}$

$$P(\xi_i) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$E[X^2] = E[(\xi_1)^2] \cdot [E[\xi_1) \\ E[\xi_2)]^2$$

$$= E[\xi_1]^2 \cdot [E(\xi_1)^2 + E(\xi_2)^2 + \\ 2\xi_1\xi_2]$$

$$(\xi_i)^2 \sim 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\sim \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{array}$$

(11) $\to$ $\mathrm{cov}(X, Y)$

$$= E(X - E[X)] \\ \cdot [Y - E(Y)]$$

$X(\omega) \doteq \xi_1(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega))$, $\quad Y(\omega) \doteq \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega))$, $\quad \omega \in \Omega$.

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E[X - \underbrace{E(X]}_{0}) \cdot (Y - \underbrace{E(Y)}_{0})$$

$$= E[X] \cdot E[Y]$$

$$= E[\xi_1] \cdot E[\xi_1 + \xi_2] \\ \cdot E(\xi_3) \cdot E(\xi_1 + \xi_2)\}$$

$= 0 \to$ INCORRELATI

$\downarrow$

MA NON INDIPENDENTI

ES. +

$$E[X = 1 \mid Y = 0] \sim \frac{1}{4} \leftarrow$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad > 0$$

$$X = 1 \longrightarrow \underset{\sim 1}{\mathcal{E}_1} \cdot (\underset{\sim 1}{\mathcal{E}_1} + \underset{\sim 1}{\mathcal{E}_2})$$

$$+$$

$$Y = 0 \longrightarrow \underset{\sim 0}{\mathcal{E}_1} \cdot (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow 1$$

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3 \rightsquigarrow 9$$

$$X, Y$$

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/300$. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{900} X_i(\omega),\ \omega \in \Omega, \qquad N \doteq \min\left\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(S \le n) \ge 0.98\right\}.$$

Sia dia una stima per N in tre modi diversi, usando

$$\mathrm{Ber}\left(\frac{1}{300}\right) \sim X_i \qquad E[S] = 900 \cdot \frac{1}{300} = 3$$

$$S = \sum_{i=1}^{900} X_i \longrightarrow E[X] = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

$$E[X] = \frac{1}{300} \sim E[S] = 900 \cdot \underbrace{\frac{1}{300}}_{p} = 3$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{1}{300}\left(1 - \frac{1}{300}\right)$$

$$= \frac{1}{300}\left(\frac{299}{300}\right)$$

$$\operatorname{var}(S) = \cancel{900} \cdot \frac{1}{\cancel{300}} \cdot \frac{299}{\cancel{300}}$$

$$= \frac{299}{100}$$

CHEBYSHEV

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{900} X_i(\omega),\ \omega \in \Omega, \qquad N \doteq \min\left\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{P}\left(S \leq n\right) \geq 0.98\right\}.$$

$$P(S \leq n) = 1 - P(S > n)$$

$$\downarrow$$

$$P(S - E[S]) \geq (n + 1 - \underbrace{E[S]}_{3})$$

$$P(S - E[S] \geq (n-2)$$

$$\leq \frac{\operatorname{var}(S)}{(n-1)^2} = \frac{299}{100} \cdot \frac{1}{(n-1)^2}$$

DA SOPRA MA NEI GUAI $\leq$

$$\geq 1 - \frac{299}{100} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \geq 0.98$$

$$K \geq \sqrt{\frac{299}{100}} + 2$$

$$= N_{\neq} = 12$$

(b) POISSON ~ LEGGE DEI PICCOLI NUMERI

$$Ber \sim Poiss\left(900, \frac{1}{300}\right)$$

$$\lambda = 900 \cdot \frac{1}{300} = 3$$

$$F_{POISS(3)}(K) \geq 0.98$$

$$\sim K \geq 6$$

NORMALE

$$E[S] = 3, \quad VAR(S) = \frac{299}{100}$$

NORMALE STANDARD ~ CONDIZIONI STANDARD

$$E[S] = 0, \quad VAR(S) = 1$$

$$\bar{S} = \frac{1}{\sqrt{VAR(S)}}(S - E(S))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{300 \cdot \mathrm{var}(X_i)}} \cdot \sum_{i=1}^{300} (X_i - E[X_i])$$

TEOREMA
DEL
LIMITE
CENTRALE

$$P(S \le k) = P(S - E[S] \le k - E[S])$$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}}(S - E[S]) \le \frac{k - E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}}\right)$$

$$\approx \underbrace{\Phi\left(\frac{k - E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}}\right)}_{\text{TEOR. LIMITE CENTRALE}}$$

$$\Phi(y) \ge 0.98 \quad \underline{\simeq} \; \underbrace{2.06}_{\text{TABOLA}}$$

$$\frac{k - E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}} \ge 2.06$$

$$N_x = 3$$

Esercizio 4. Bianca e Carlo giocano regolarmente a scacchi. Fanno degli incontri di due partite. Vince un incontro chi raggiunge più punti nelle due partite, dove una partita vinta vale un punto, una persa zero, e una patta (pareggio) mezzo punto. Carlo gioca sempre allo stesso modo. Bianca invece dispone di due modalità di gioco, una aggressiva (A) e una difensiva (D), tra cui scegliere all'inizio di ogni partita. Quando adotta la modalità A, Bianca vince con probabilità uguale a 3/7 e perde con probabilità 4/7. Quando invece adotta D, pareggia con probabilità 6/7 e perde con probabilità 1/7. Una strategia (pura) di Bianca per un incontro è una scelta delle modalità di gioco per le due partite successive dove la modalità per la seconda partita può dipendere dall'esito della prima partita. Si trovi una strategia di Bianca che le garantisca ~~un punteggio totale medio per gli incontri strettamente più grande di uno, quindi~~ una probabilità di vincere un incontro strettamente più grande di quella di perderlo.

$$P(B) \begin{cases} \frac{1}{2} & (1) \\ -\frac{1}{2} & (-1) \end{cases}$$

$$P\left(\frac{3}{7}\right) + P\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$P\left(\frac{6}{7}\right) + P\left(\frac{1}{7}\right)$$

Devo precisare che sono Claude, non Claudio.