Esercizio 13. I Pescatori Padovani vogliono conoscere il peso medio dei rutili, detti anche gardon, presenti nel canale Battaglia. Ne fanno catturare e pesare 900 esemplari. Indichiamo con X_i il peso dell'esemplare i-esimo (espresso in grammi). Possiamo supporre che le X_i siano delle variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite. Indichiamo con μ il comune valor medio, con σ^2 la comune varianza, e con

MU

SIGMA

$$\rightarrow \bar{S} \doteq \frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} X_i$$

la media campionaria. Mentre il valore di μ è incognito, supponiamo che la deviazione standard σ (espressa in grammi) non superi 60. Utilizzando l'approssimazione normale, si trovi $\delta > 0$ (il più piccolo possibile) tale che l'intervallo aleatorio

$$\rightarrow (\bar{S} - \delta, \bar{S} + \delta)$$

contenga μ con probabilità almeno del 95%.

$$(\bar{S} - \delta, \bar{S} + \delta) \qquad \geq 0.95$$

$$-\delta \leq \frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} x_i \leq \delta$$

$$P \sum_{i=1}^{P} x_i$$

$$P(\mu \in (\bar{S} - \delta, \bar{S} + \delta))$$

$$= P(\bar{S} - \delta < \mu < \bar{S} + \delta)$$

$$= P(-\delta < \mu - \bar{S} < \delta) \qquad \Phi(\bar{S}) \geq 0.95$$

$$= P(-\delta < \bar{S} - \mu < \delta)$$

$$= P\left(\frac{-\delta}{\sqrt{var(\bar{S})}} < \frac{\bar{S} - \mu}{\sqrt{var(\bar{S})}} < \frac{\delta}{\sqrt{var(\bar{S})}}\right)$$

Per il Teorema del Limite Centrale, con n = 900 (grande), la media campionaria S̄ ha distribuzione approssimativamente normale:

MEDIA = 0
VAR. = 1

$$\bar{S} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{900}\right)$$

COND. STANDARD

VARIANZA

Standardizzando:

$$Z = \frac{\bar{S} - \mu}{\sigma/\sqrt{900}} = \frac{\bar{S} - \mu}{\sigma/30} \sim N(0, 1)$$

nota: $E[\bar{S}] = \mu,\quad var(\bar{S}) = \frac{1}{900^2} \cdot 900 \cdot \sigma^2$ $\Rightarrow var(X_i) \sim Ber$

$\rightsquigarrow \sqrt{var(\bar{S})} = \frac{\sigma}{30}$

$\overset{TLC}{\approx} P\left(-\frac{30\delta}{\sigma} < Z < \frac{30\delta}{\sigma}\right)$ con $Z \sim N(0,1)$

$= \Phi\left(\frac{30\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{30\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{30\delta}{\sigma}\right) - 1$,

Applicando le proprietà della varianza:

$$\mathrm{Var}(\bar{S}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} X_i\right)$$

$$= \left(\frac{1}{900}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{900} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{900^2} \cdot \sum_{i=1}^{900} \mathrm{Var}(X_i)$$

$$= \frac{1}{900^2} \cdot 900 \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{900}$$

Spiegazione dei fattori:

- $\frac{1}{900^2}$: viene dal coefficiente $\frac{1}{900}$ elevato al quadrato (proprietà: $\mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X)$)
- 900: è il numero di variabili indipendenti che stiamo sommando
- σ^2: è la varianza comune di ciascun X_i

Il risultato finale è $\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{S})} = \frac{\sigma}{30}$, che è esattamente quello che il professore ha usato.

Il professore standardizza correttamente la media campionaria:

$$P\left(\frac{\bar{S} - \mu}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{S})}} < \frac{\delta}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{S})}}\right)$$

Siccome per il TLC abbiamo $Z \sim N(0,1)$, e per simmetria della normale:

$$P(-a < Z < a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$$

Quindi: $2\Phi\left(\frac{30\delta}{\sigma}\right) - 1 = 0.95$

Da cui: $\Phi\left(\frac{30\delta}{\sigma}\right) = 0.975 \rightarrow \frac{30\delta}{\sigma} = 1.96$

Esercizio 4. Siano $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Supponiamo che X, Y siano indipendenti e identicamente distribuite. Si mostri che allora

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[(X - Y)^2\right].$$

Siano X, Y v.a. in L^2. Supponiamo che X, Y abbiano la stessa distribuzione (identicamente distribuite) e che siano indipendenti.

Allora $var(X) = var(Y)$ (stessa distribuzione)

$\frac{1}{2} E(X^2 + Y^2 - 2XY) = \frac{1}{2} EX^2 + \frac{1}{2} EY^2$

$- E[X] \cdot E[Y] =$

$$\overset{\text{indipendenza}}{=} \frac{1}{2}E[X^2] + \frac{1}{2}E[Y^2] - E[X]\cdot E[Y]$$

SPEZZATO!

$E[X]\cdot E[X]$ $\quad E[Y]\cdot E[Y]$

$$= \frac{1}{2}\left(E[X^2] - E[X]\cdot E[Y]\right) + \frac{1}{2}\left(E[Y^2] - E[X]\cdot E[Y]\right)$$

$$\overset{\text{identicamente distribuite}}{=} \frac{1}{2}\left(\underbrace{E[X^2] - E[X]^2}_{= var(X)}\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{E[Y^2] - E[Y]^2}_{= var(Y)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}var(X) + \frac{1}{2}var(Y)$$

$$\overset{\text{identicamente distribuite}}{=} var(X) = var(Y).$$

//

Hai semplicemente usato l'ipotesi «identicamente distribuite», cioè

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(X).$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\mathrm{var}(X) + \frac{1}{2}\mathrm{var}(Y) = \frac{1}{2}\mathrm{var}(X) + \frac{1}{2}\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(X).$$

Allo stesso modo, sostituendo in var(Y) si ottiene var(Y)=var(X). In pratica non c'è nessun passaggio "misterioso": è solo sostituire var(Y) con var(X) perché sono uguali per identica distribuzione.

Esercizio 6. Sia ξ una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione uniforme continua su $(0,1)$. Si trovi una funzione $\phi : (0,1) \to \mathbb{N}$ tale che la variabile aleatoria $Y \doteq \phi(\xi)$ abbia la seguente distribuzione discreta:

$$\mathbf{P}(Y = n) = \begin{cases} 1/12 & \text{se } n = 1, \\ 1/6 & \text{se } n = 2, \\ 1/4 & \text{se } n = 3, \\ 1/12 & \text{se } n = 4, \\ 1/4 & \text{se } n = 5, \\ 1/6 & \text{se } n = 6, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$Unif(0,1)$ = CONTINUA

$\sim \frac{1}{b-a}$

UNIF. DISCRETA

$\frac{1}{n} \cdot P$

$P(Y=1) = \frac{1}{12}$ $\qquad P(Y=2) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

$P(Y=3) = 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ $\qquad P(Y=4) = \frac{1}{12}$

Definiamo $\phi : [0,1] \to \mathbb{N}$ tramite

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{12}], \\ 2 & \text{se } x \in (\frac{1}{12}, \frac{3}{12}], \\ 3 & \text{se } x \in (\frac{3}{12}, \frac{6}{12}] \\ 4 & \text{se } x \in (\frac{6}{12}, \frac{7}{12}], \\ 5 & \text{se } x \in (\frac{7}{12}, \frac{10}{12}], \\ 6 & \text{se } x \in (\frac{10}{12}, 1]. \end{cases}$$

Unif(0; 1)

Verifica, ad esempio $n = 5$:

$$P(Y=5) = P(\phi(\xi)=5)$$
$$= P(\xi \in (\tfrac{7}{12}, \tfrac{10}{12}])$$
$$= P(\xi \leq \tfrac{10}{12}) - P(\xi \leq \tfrac{7}{12})$$
$$= F_\xi(\tfrac{10}{12}) - F_\xi(\tfrac{7}{12})$$

$\xi \sim Unif(0,1)$: $F_\xi(x) = x \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{10}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$\rightsquigarrow P(Y=5) = \frac{1}{4}$.

$$P(Y=1) = P(\Phi(\xi)=1)$$
$$P(\xi \in [0; 1])$$
$$= P(\xi \leq 0) - P(\xi \leq \tfrac{1}{12})$$
$$= F(0) - F(1)$$

$$F(0) = 0 \cdot \mathbb{1}_{[0;1]} + 1 \cdot \mathbb{1}_{[0;1]}$$
$$= \cancel{0 \cdot \tfrac{1}{12}} + 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$P(Y=2) = P(\Phi(\xi)=2) = P(\xi \in [\tfrac{1}{12}; \tfrac{3}{12}]) =$$
$$= P(\xi \leq \tfrac{3}{12}) - P(\xi \leq \tfrac{1}{12})$$

$\boxed{\text{GRANDE} - \text{PICCOLO}}$

$$= \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{BOUND}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{VALORE DI } N} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12}$$

Esercizio 7. Siano X, Y variabili aleatorie reali indipendenti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Si determinino allora

a) la funzione di ripartizione di $\min\{X, Y\}$ in termini delle funzioni di ripartizione di X e Y;

b) la funzione di ripartizione di $\max\{X, Y\}$ in termini delle funzioni di ripartizione di X e Y.

a) Funzione di ripartizione di min{X,Y}

Sia Z = min{X,Y}. Vogliamo trovare F_Z(z) = P(Z ≤ z).

Approccio tramite evento complementare:

L'evento {min{X,Y} ≤ z} si verifica quando almeno una tra X e Y è ≤ z.

È più semplice considerare il complementare:
{min{X,Y} > z} ⟺ {X > z ∩ Y > z}

Per l'indipendenza di X e Y:

$$P(\min\{X,Y\} > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z) \cdot P(Y > z)$$

$$= (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

Quindi:

$$F_{\min\{X,Y\}}(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

Sviluppando:

$$F_{\min\{X,Y\}}(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z)$$

b) Funzione di ripartizione di max{X,Y}

Sia W = max{X,Y}. Vogliamo trovare F_W(w) = P(W ≤ w).

L'evento {max{X,Y} ≤ w} si verifica quando entrambe X e Y sono ≤ w:
{max{X,Y} ≤ w} ⟺ {X ≤ w ∩ Y ≤ w}

Per l'indipendenza di X e Y:

$$F_{\max\{X,Y\}}(w) = P(X \leq w, Y \leq w) = P(X \leq w) \cdot P(Y \leq w)$$

$$F_{\max\{X,Y\}}(w) = F_X(w) \cdot F_Y(w)$$

Risultati finali:

a) $F_{\min\{X,Y\}}(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z)$

b) $F_{\max\{X,Y\}}(w) = F_X(w) \cdot F_Y(w)$

Esercizio 9. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Poniamo

$$Y(\omega) \doteq \sqrt{X(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Si calcoli la funzione di ripartizione di Y e si decida se Y è assolutamente continua o meno.

Soluzione

1. Funzione di ripartizione di X (esponenziale)

Ricordiamo che per $X \sim \text{Exp}(\lambda)$: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

2. Calcolo della funzione di ripartizione di Y

Per trovare $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq y)$, distinguiamo due casi:

Caso 1: $y < 0$

$F_Y(y) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq y) = 0$ poiché $\sqrt{X} \geq 0$ sempre.

Caso 2: $y \geq 0$

$F_Y(y) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq y) = \mathbf{P}(X \leq y^2) = F_X(y^2)$

Sostituendo la funzione di ripartizione di X:

- Se $y = 0$: $F_Y(0) = F_X(0) = 0$
- Se $y > 0$: $F_Y(y) = F_X(y^2) = 1 - e^{-\lambda y^2}$

$F_Y(y) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq y) = \mathbf{P}(X \leq y^2) = F_X(y^2)$

Sostituendo la funzione di ripartizione di X:

- Se $y = 0$: $F_Y(0) = F_X(0) = 0$
- Se $y > 0$: $F_Y(y) = F_X(y^2) = 1 - e^{-\lambda y^2}$

3. Funzione di ripartizione completa di Y

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{se } y \geq 0 \end{cases}}$$

4. Verifica se Y è assolutamente continua

Per verificare se Y è assolutamente continua, calcoliamo la derivata di $F_Y(y)$:

Per $y < 0$:

$F'_Y(y) = 0$

Per $y > 0$:

$F'_Y(y) = \frac{d}{dy}[1 - e^{-\lambda y^2}] = \lambda \cdot 2y \cdot e^{-\lambda y^2} = 2\lambda y e^{-\lambda y^2}$

In $y = 0$:

Verifichiamo la derivabilità: $\lim_{h\to 0^+} \frac{F_Y(h)-F_Y(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-e^{-\lambda h^2}}{h}$

Usando l'espansione di Taylor $e^{-\lambda h^2} \approx 1 - \lambda h^2$ per h piccolo: $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \lambda h = 0$

5. Densità di probabilità di Y

Poiché F_Y è derivabile ovunque, Y è assolutamente continua con densità:

$\boxed{f_Y(y) = \{0 \quad \text{se } y \leq 0 \; 2\lambda y e^{-\lambda y^2} \quad \text{se } y > 0}$

6. Verifica che f_Y sia una densità

Controlliamo che $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y), dy = 1$:

$\int_0^{\infty} 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, dy$

Sostituzione: $u = \lambda y^2$, quindi $du = 2\lambda y, dy$

$\int_0^{\infty} e^{-u}, du = [-e^{-u}]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1 \quad \checkmark$