Algebra e matematica discreta, a.a. 2021/2022,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 8 (1^a parte)

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ e si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 1$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

$\mathrm{rk}(A_1) = 3$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ di $C(\mathbf{A_1})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$\mathrm{rk}(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\frac{3}{2}}$ di $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{3^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\mathrm{rk}(A_\alpha) = 4$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha - 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathbb{C}^4$ e $\dim(C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, allora $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{C}^4$ e si sarebbe potuto prendere $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}\}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 2 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Poichè $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 2 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 0$

$$\mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U_0}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U_0})_0 - \text{ rk } (\mathbf{U_0}) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U_0}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U_0}$, ossia la 2^a e la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 & = & h \\ x_3 & = & k \\ x_4 & = & 0 \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & -2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A_0}) = N(\mathbf{U_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Siano $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\mathbf{v_2}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A_0})$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U_\alpha}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_{\alpha} - \text{ rk } (\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$, ossia la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 & = & h \\ x_4 & = & 0 \\ x_2 & = & -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 & = & -h \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & 2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} |h \in \mathbb{C} \right\}$.

Sia $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ che s ottiene ponendo $h = 1$: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^5$ generato da $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{pmatrix}$ una matrice che ha come colonne gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Allora $W = C(\mathbf{A})$. Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ otteniamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ i & -1 & -1 & 2i \\ 2 & 2i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)E_{2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè le colonne dominanti di $\mathbf{U}$ sono la 1^a e la 3^a, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_3}\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$ contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$:

$$\mathbf{A_{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\text{rk}\mathbf{A_{\alpha}} = 3$. Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A_{\alpha}}$.

$$\mathbf{A_{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B_{\alpha}}$$

1^0 CASO: $\alpha = 0$ $\qquad \mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$

$rk(\mathbf{A_0}) = rk(\mathbf{U_0}) = 2 \neq 3 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}_0$ **NON E'** una base di $\mathbb{R}^3$.

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = rk(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ **E'** una base di $\mathbb{R}^3$.