Esercizio 1

Sia X una variabile aleatoria reale su (Ω, F, P). Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X:

Punto (i)

X è una variabile aleatoria discreta tale che $P(X=-4)=1/6$, $P(X=-3)=1/3$, $P(X=1)=1/6$, $P(X=3)=1/3$.

Soluzione:

Calcoliamo la media di X:

$$E[X]=\sum_i x_i \cdot P(X=x_i)=(-4)\cdot\frac{1}{6}+(-3)\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{4}{6}-\frac{3}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{3}=-\frac{4}{6}-1+\frac{1}{6}+1=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

Calcoliamo ora la varianza di X:

$$Var[X]=E[X^2]-E[X]^2$$

Dove:

$$E[X^2]=\sum_i x_i^2 \cdot P(X=x_i)=(-4)^2\cdot\frac{1}{6}+(-3)^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{16}{6}+\frac{9}{3}+\frac{1}{6}+\frac{9}{3}=\frac{16}{6}+3+\frac{1}{6}+3=\frac{17}{6}+6=\frac{17+36}{6}=\frac{53}{6}$$

Quindi:

$$Var[X]=\frac{53}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{53}{6}-\frac{1}{4}=\frac{53}{6}-\frac{3}{12}=\frac{53\cdot 2-3}{12}=\frac{106-3}{12}=\frac{103}{12}$$

Punto (ii)

X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x)=\sin(x)\cdot 1_{[0,\pi/2)}(x)+1_{[\pi/2,\infty)}(x), x\in\mathbb{R}$.

Soluzione:

Per trovare la densità di probabilità, deriviamo la funzione di ripartizione:

$$f_X(x)=F_X'(x)=\cos(x)\cdot 1_{[0,\pi/2)}(x)$$

Calcoliamo la media:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} x \cdot \cos(x)dx$$

Integriamo per parti con $u = x$ e $dv = \cos(x)dx$:

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

Quindi:

$$E[X] = [x\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot \sin(0) + \cos(0))$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Per il calcolo della varianza, troviamo $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_{0}^{\pi/2} x^2 \cdot \cos(x)dx$$

Integriamo per parti con $u = x^2$ e $dv = \cos(x)dx$:

$$\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)dx$$

Integriamo nuovamente per parti con $u = 2x$ e $dv = \sin(x)dx$:

$$\int 2x\sin(x)dx = -2x\cos(x) + \int 2\cos(x)dx = -2x\cos(x) + 2\sin(x) + C$$

Quindi:

$$\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x) - (-2x\cos(x) + 2\sin(x)) + C = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$$

Calcoliamo:

$$E[X^2] = [x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0^2\sin(0) + 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) - 2\sin(0))$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 + 0 - 2 \cdot 1 - (0 + 0 - 0) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Calcoliamo la varianza:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 - \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi + 1\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2 - \frac{\pi^2}{4} + \pi - 1 = \pi - 3$$

Punto (iii)

$X = Z^3$ per una variabile aleatoria Z uniforme continua su $(-2, 2)$.

Soluzione:

Z è uniforme su $(-2, 2)$, quindi ha densità $f_Z(z) = \frac{1}{4}$ per $z \in (-2, 2)$ e 0 altrimenti.

Per calcolare la media di $X = Z^3$:

$$E[X] = E[Z^3] = \int_{-2}^{2} z^3 \cdot \frac{1}{4} dz = \frac{1}{4} \cdot \int_{-2}^{2} z^3 dz = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{z^4}{4}\right]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{4}\right) = 0$$

Per calcolare la varianza, troviamo $E[X^2] = E[Z^6]$:

$$E[Z^6] = \int_{-2}^{2} z^6 \cdot \frac{1}{4} dz = \frac{1}{4} \cdot \int_{-2}^{2} z^6 dz = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{z^7}{7}\right]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2^7}{7} - \frac{(-2)^7}{7}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{128}{7} - \frac{-128}{7}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{256}{7} = \frac{64}{7}$$

Quindi, $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{64}{7} - 0^2 = \frac{64}{7}$

Esercizio 2

Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su (Ω, F, P) con comune distribuzione di Rademacher di parametro $1/2$. Poniamo $X(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega))$, $Y(\omega) = \xi_3(\omega) \cdot (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)), \omega \in \Omega$.

Punto (i)

Calcoliamo media e varianza di X, Y.

Soluzione:

Le variabili ξ_i hanno distribuzione di Rademacher con parametro $1/2$, quindi:

- $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$
- $E[\xi_i] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$
- $E[\xi_i^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
- $Var[\xi_i] = E[\xi_i^2] - E[\xi_i]^2 = 1 - 0^2 = 1$

Per X, abbiamo:

$$X = \xi_1 \cdot (\xi_1 + \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 = 1 + \xi_1\xi_2$$

dove abbiamo usato $\xi_1^2 = 1$ (poiché $\xi_1 \in -1, 1)$.

Calcoliamo la media di X:

$$E[X] = E[1 + \xi_1\xi_2] = 1 + E[\xi_1\xi_2] = 1 + E[\xi_1]E[\xi_2] = 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

dove abbiamo usato l'indipendenza di ξ_1 e ξ_2.

Per la varianza di X:

$$Var[X] = Var[1 + \xi_1\xi_2] = Var[\xi_1\xi_2] = E[(\xi_1\xi_2)^2] - E[\xi_1\xi_2]^2 = E[\xi_1^2\xi_2^2] - 0^2 = E[\xi_1^2]E[\xi_2^2] = 1 \cdot 1 = 1$$

Per Y, abbiamo:

$$Y = \xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)$$

Calcoliamo la media di Y:

$$E[Y] = E[\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)] = E[\xi_3]E[\xi_1 + \xi_2] = 0 \cdot (0 + 0) = 0$$

dove abbiamo usato l'indipendenza di ξ_3 e $(\xi_1 + \xi_2)$.

Per la varianza di Y:

$$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[(\xi_3(\xi_1 + \xi_2))^2] - 0^2 = E[\xi_3^2(\xi_1 + \xi_2)^2]$$

$$= E[\xi_3^2]E[(\xi_1 + \xi_2)^2] = 1 \cdot E[\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2] = E[1 + 2\xi_1\xi_2 + 1] = 2 + 2E[\xi_1\xi_2] = 2 + 2 \cdot 0 = 2$$

Punto (ii)

Calcoliamo la covarianza tra X e Y e decidiamo se le due variabili sono indipendenti.

Soluzione:

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - 1 \cdot 0 = E[XY]$$

Calcoliamo $E[XY]$:

$$E[XY] = E[(1 + \xi_1\xi_2) \cdot \xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)] = E[\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2) + \xi_1\xi_2\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)]$$
$$= E[\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)] + E[\xi_1\xi_2\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)]$$

Abbiamo già calcolato $E[\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)] = 0$.

Per il secondo termine:

$$E[\xi_1\xi_2\xi_3 \cdot (\xi_1 + \xi_2)] = E[\xi_1^2\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2^2\xi_3] = E[\xi_1^2]E[\xi_2]E[\xi_3] + E[\xi_1]E[\xi_2^2]E[\xi_3] = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 =$$

Quindi, $Cov[X, Y] = 0$, il che significa che X e Y sono non correlate.

Per determinare se X e Y sono indipendenti, dobbiamo verificare se la loro distribuzione congiunta può essere espressa come prodotto delle distribuzioni marginali.

Punto (iii)

Determiniamo la legge congiunta di X e Y.

Soluzione:

Dobbiamo analizzare tutti i possibili valori di (ξ_1, ξ_2, ξ_3) e calcolare i corrispondenti valori di (X, Y).

1. $\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1$: $X = 1 \cdot (1 + 1) = 2$, $Y = 1 \cdot (1 + 1) = 2$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
2. $\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1$: $X = 1 \cdot (1 + 1) = 2$, $Y = -1 \cdot (1 + 1) = -2$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$
3. $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1$: $X = 1 \cdot (1 - 1) = 0$, $Y = 1 \cdot (1 - 1) = 0$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{8}$
4. $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1$: $X = 1 \cdot (1 - 1) = 0$, $Y = -1 \cdot (1 - 1) = 0$
   $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$
5. $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1$: $X = -1 \cdot (-1 + 1) = 0$, $Y = 1 \cdot (-1 + 1) = 0$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{8}$
6. $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1$: $X = -1 \cdot (-1 + 1) = 0$, $Y = -1 \cdot (-1 + 1) = 0$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$
7. $\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1$: $X = -1 \cdot (-1 - 1) = 2$, $Y = 1 \cdot (-1 - 1) = -2$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1) = \frac{1}{8}$
8. $\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1$: $X = -1 \cdot (-1 - 1) = 2$, $Y = -1 \cdot (-1 - 1) = 2$
   $P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = -1) = \frac{1}{8}$

Riassumendo:

- $P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 2, Y = -2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Per verificare l'indipendenza, calcoliamo le distribuzioni marginali:

- $P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 0) = \frac{1}{2}$
- $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$
- $P(Y = -2) = \frac{1}{4}$
- $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$

Se X e Y fossero indipendenti, dovremmo avere:

- $P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, ma invece abbiamo $\frac{1}{4}$
- $P(X = 2, Y = -2) = P(X = 2) \cdot P(Y = -2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, ma invece abbiamo $\frac{1}{4}$

Quindi, X e Y non sono indipendenti, anche se sono non correlate.

Esercizio 3

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su (Ω, F, P) con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/300$. Poniamo $S(\omega) = \sum_{i=1}^{900} X_i(\omega), \omega \in \Omega, N = \min n \in \mathbb{N} : P(S \leq n) \geq 0.98$. Sia dia una stima per N in tre modi diversi.

Punto (a)

Stima di N usando la disuguaglianza di Chebyshev.

Soluzione:

Per una variabile aleatoria di Bernoulli X_i di parametro $p = \frac{1}{300}$, abbiamo:

- $E[X_i] = p = \frac{1}{300}$
- $Var[X_i] = p(1-p) = \frac{1}{300} \cdot \frac{299}{300} \approx \frac{1}{300}$

Per la somma $S = \sum_{i=1}^{900} X_i$, abbiamo:

- $E[S] = \sum_{i=1}^{900} E[X_i] = 900 \cdot \frac{1}{300} = 3$
- $Var[S] = \sum_{i=1}^{900} Var[X_i] = 900 \cdot \frac{1}{300} \cdot \frac{299}{300} \approx 900 \cdot \frac{1}{300} = 3$

Vogliamo trovare n tale che $P(S \leq n) \geq 0.98$, equivalente a $P(S > n) \leq 0.02$.

Per la disuguaglianza di Chebyshev:

$$P(|S - E[S]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var[S]}{\varepsilon^2}$$

Imponiamo $P(S > n) = P(S - E[S] > n - E[S]) \leq \frac{Var[S]}{(n-E[S])^2} \leq 0.02 \Rightarrow \frac{3}{(n-3)^2} \leq 0.02$
$\Rightarrow (n-3)^2 \geq \frac{3}{0.02} = 150 \Rightarrow n - 3 \geq \sqrt{150} \approx 12.25 \Rightarrow n \geq 15.25 \Rightarrow n \geq 16$

Quindi, secondo la disuguaglianza di Chebyshev, $N \geq 16$.

Punto (b)

Stima di N usando l'approssimazione normale.

Soluzione:

Per n grande e p piccolo, la distribuzione binomiale può essere approssimata da una distribuzione normale con:

- $\mu = E[S] = 3$
- $\sigma^2 = Var[S] = 3$

Vogliamo trovare n tale che $P(S \leq n) \geq 0.98$.

$P(S \leq n) = P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq \frac{n-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{n-3}{\sqrt{3}}\right)$

Utilizzando la tabella della distribuzione normale standard, per un valore di probabilità 0.98, troviamo $\Phi(z) = 0.98$ quando $z \approx 2.05$.

Quindi: $\frac{n-3}{\sqrt{3}} = 2.05 \Rightarrow n - 3 = 2.05 \cdot \sqrt{3} \approx 3.55 \Rightarrow n \approx 6.55 \Rightarrow n \geq 7$

Secondo l'approssimazione normale, $N \geq 7$.

Punto (c)

Stima di N usando l'approssimazione di Poisson.

Soluzione:

Poiché p è piccolo ($\frac{1}{300}$) e n è grande (900), possiamo approssimare la distribuzione binomiale con una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = n \cdot p = 900 \cdot \frac{1}{300} = 3$.

Vogliamo trovare n tale che $P(S \leq n) \geq 0.98$.

Per una variabile aleatoria X con distribuzione di Poisson($\lambda = 3$):

$$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-3} \cdot 3^k}{k!}$$

Per $n = 7$:

$$P(X \leq 7) = \sum_{k=0}^{7} \frac{e^{-3} \cdot 3^k}{k!} = e^{-3} \cdot \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!} + \frac{3^7}{7!}\right)$$

$= e^{-3} \cdot (1 + 3 + 4.5 + 4.5 + 3.375 + 2.025 + 1.0125 + 0.4339) \approx e^{-3} \cdot 19.84 \approx 0.0498 \cdot 19.84 \approx 0.988$

Questo valore è sufficientemente vicino a 0.98, quindi $N \approx 7$.

In sintesi:

- Usando la disuguaglianza di Chebyshev: $N \geq 16$
- Usando l'approssimazione normale: $N \geq 7$
- Usando l'approssimazione di Poisson: $N \approx 7$

Esercizio 4

Bianca e Carlo giocano regolarmente a scacchi. Fanno degli incontri di due partite. Vince un incontro chi raggiunge più punti nelle due partite, dove una partita vinta vale un punto, una persa zero, e una patta (pareggio) mezzo punto. Carlo gioca sempre allo stesso modo. Bianca invece dispone di due modalità di gioco, una aggressiva (A) e una difensiva (D).

- Modalità A: Bianca vince con probabilità $\frac{3}{7}$ e perde con probabilità $\frac{4}{7}$.
- Modalità D: Bianca pareggia con probabilità $\frac{6}{7}$ e perde con probabilità $\frac{1}{7}$.

Dobbiamo trovare una strategia di Bianca che le garantisca un punteggio totale medio per gli incontri strettamente più grande di uno, quindi una probabilità di vincere un incontro strettamente più grande di quella di perderlo.

Soluzione:

Per prima cosa, analizziamo il punteggio atteso in una singola partita per ciascuna delle modalità di gioco:

Modalità A:

- Vinta (1 punto): probabilità $\frac{3}{7}$
- Pareggio (0.5 punti): probabilità 0
- Persa (0 punti): probabilità $\frac{4}{7}$

Valore atteso per una partita con modalità A: $E[\text{punti}_A] = 1 \cdot \frac{3}{7} + 0.5 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \approx 0.429$

Modalità D:

- Vinta (1 punto): probabilità 0
- Pareggio (0.5 punti): probabilità $\frac{6}{7}$
- Persa (0 punti): probabilità $\frac{1}{7}$

Valore atteso per una partita con modalità D: $E[\text{punti}_D] = 1 \cdot 0 + 0.5 \cdot \frac{6}{7} + 0 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \approx 0.429$

Osserviamo che entrambe le modalità di gioco producono lo stesso valore atteso di punti in una singola partita: $\frac{3}{7}$.

Ora, consideriamo una strategia qualsiasi per le due partite dell'incontro. Poiché le partite sono indipendenti (il risultato della prima non influenza le probabilità di successo nella seconda), per linearità dell'attesa, il valore atteso totale sarà semplicemente la somma dei valori attesi per ciascuna partita. Dato che ogni modalità produce lo stesso valore atteso $\frac{3}{7}$, il punteggio totale atteso per qualunque strategia sarà:

$E[\text{punti totali}] = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7} \approx 0.857$

Questo valore è strettamente minore di 1, il che significa che **nessuna strategia** (pura o mista) può garantire a Bianca un punteggio totale medio strettamente maggiore di uno.

Per verificare questo risultato, consideriamo una strategia specifica: prima partita A, poi:

- se vince la prima partita, gioca D nella seconda;
- se perde la prima partita, gioca A nella seconda.

Analizziamo i possibili esiti:

1. Prima partita A, Bianca vince (P=$\frac{3}{7}$):

- Seconda partita D, Bianca pareggia (P=$\frac{6}{7}$): punteggio totale $1 + 0.5 = 1.5$ punti. Probabilità: $\frac{3}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{18}{49}$
- Seconda partita D, Bianca perde (P=$\frac{1}{7}$): punteggio totale $1 + 0 = 1$ punto. Probabilità: $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{49}$

2. Prima partita A, Bianca perde (P=$\frac{4}{7}$):
    - Seconda partita A, Bianca vince (P=$\frac{3}{7}$): punteggio totale $0 + 1 = 1$ punto. Probabilità: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$
    - Seconda partita A, Bianca perde (P=$\frac{4}{7}$): punteggio totale $0 + 0 = 0$ punti. Probabilità: $\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Calcoliamo il punteggio totale medio per questa strategia:

$$E[\text{punti}] = 1.5 \cdot \frac{18}{49} + 1 \cdot \frac{3}{49} + 1 \cdot \frac{12}{49} + 0 \cdot \frac{16}{49} = \frac{27+3+12}{49} = \frac{42}{49} \approx 0.857$$

Come previsto, otteniamo $\frac{6}{7} = \frac{42}{49} < 1$.

Conclusione: Non esiste alcuna strategia che permetta a Bianca di ottenere un punteggio totale medio strettamente maggiore di uno. L'intento dell'esercizio era probabilmente dimostrare questa impossibilità.

Nota sulla seconda parte del requisito: Il testo chiede anche che la probabilità di vincere un incontro sia strettamente maggiore della probabilità di perderlo. Con la strategia analizzata sopra:

- Probabilità che Bianca vinca l'incontro: $\frac{18}{49} \approx 0.367$
- Probabilità che Bianca perda l'incontro: $\frac{16}{49} \approx 0.327$

Poiché $\frac{18}{49} > \frac{16}{49}$, questa parte del requisito è soddisfatta. Tuttavia, poiché il punteggio totale medio non può superare 1, non esiste una strategia che soddisfi entrambi i requisiti simultaneamente.