4 Applicazione

Il pumping lemma esprime una *condizione necessaria per i linguaggi regolari*: siccome esso vale per ogni linguaggio regolare, un linguaggio L per cui il lemma non vale non può essere regolare. Quindi, se si verifica che *non esiste* alcun $n \geq 0$ che possa fungere da costante di pumping per L, si è dimostrato che L *non* è un linguaggio regolare.

4.1 Esempio

Si vuole dimostrare che il linguaggio

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\} = \{01, 0011, 000111, 00001111, \dots\}$$

non è regolare. Si suppone per assurdo che L sia invece regolare, e che N_L sia la sua costante di pumping.

Dato un qualunque $m \geq N_L$, si consideri la stringa

$$w = 0^m 1^m = \underbrace{0 \dots 0}_{m} \underbrace{1 \dots 1}_{m} \in L$$

che ha lunghezza $|w| > N_L$. Per il pumping lemma, dovrebbe esistere una scomposizione $w = xyz$ che soddisfi le condizioni (1)–(3), ma adesso si dimostrerà che, se sono soddisfatte la (1) e la (2), allora non può valere la (3), cioè non possono essere verificate insieme tutte e tre le condizioni.

La proprietà (2) afferma che $|xy| \leq N_L$; avendo scelto $m \geq N_L$, si deduce che la stringa xy deve occorrere entro i primi m simboli di w, che sono tutti 0: in sintesi, xy consiste solo di zeri. Per la proprietà (1), poi, deve essere $y \neq \epsilon$, ovvero y deve contenere almeno un simbolo, e, come appena detto, tale simbolo è sicuramente uno 0. Dunque, in generale, si ha $y = 0^h$ con $h \geq 1$, e complessivamente w ha la forma:

$$w = xyz = \overbrace{0 \dots 0}^{x} \overbrace{\underbrace{0 \dots 0}_{h}}^{y} \overbrace{0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{m}}^{z}$$

Per mostrare che non vale la proprietà (3),

$$\forall k \geq 0 \quad xy^k z \in L$$

è sufficiente considerare un controesempio, come il caso in cui $k = 0$:

$$xy^0 z = xz = \overbrace{0 \dots 0}^{x} \overbrace{0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{m}}^{z}$$

Se xyz conteneva, per definizione, m zeri, “cancellando” la stringa y di h zeri rimangono $m - h$ zeri, cioè $h \geq 1$ zeri in meno rispetto agli uno: siccome il numero di simboli 0 non è uguale al numero di 1, $xy^0z \notin L$. Ciò contraddice la proprietà (3) del pumping lemma, quindi si deduce che l'assunzione originale che il linguaggio fosse regolare è sbagliata.

La dimostrazione è conclusa, ma a scopo illustrativo può essere utile considerare un altro controesempio, il caso in cui $k = 2$:

$$xy^2z = xyyz = \overbrace{0\dots0}^{x}\overbrace{0\dots0}^{y}\overbrace{0\dots0}^{y}\overbrace{0\dots0\underbrace{1\dots1}_{m}}^{z}$$

qui il numero di zeri è $m + h$, sicuramente superiore al numero di uno, perciò anche $xy^2z \notin L$.