Automi e Linguaggi Formali
Università degli Studi di Padova
Marzo 2024

Come usare il pumping lemma

Gabriel Rovesti

Occorre partire dall'enunciato che vedete qui:

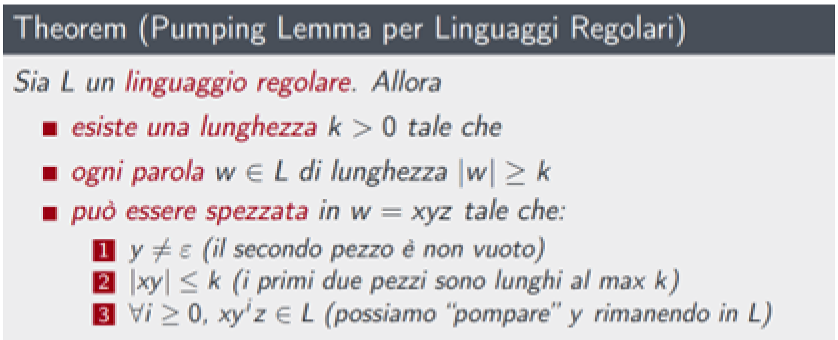

Figure 1: Enunciato pumping lemma

Si dimostra per assurdo:

- ipotizziamo di avere una stringa che sta nel linguaggio
- tale stringa deve essere $w = xyz$ tale che ci sia almeno una parte non vuota ($y \neq \epsilon$); ciò implica che restando nel linguaggio ($|xy| \leq k$), se una parte non è vuota, ci sarebbe potenzialmente un numero di caratteri sbilanciato in un'altra parte della stringa.

La lunghezza di pumping è un concetto importante quando si tratta di dimostrare che certi tipi di linguaggi, chiamati linguaggi regolari, non sono così "ordinati" come sembrano. Immagina di avere una lunga catena di caratteri che rappresenta una parola o una frase. La lunghezza di pumping ci dice quanto questa catena può essere "scomposta" in piccoli pezzi, che possono poi essere "gonfiati" o "sottoposti" in modo che la catena risultante sia ancora nel linguaggio.

Se possiamo trovare una lunghezza di pumping che "sballa" questa catena in modo che non segua più un certo schema ripetitivo, allora possiamo dimostrare che il linguaggio non è regolare.
Scegliendo una lunghezza di pumping piccola, come 0 o 2, possiamo garantire che la porzione della stringa influenzata da y sia limitata, spesso riducendo il compito di "compensazione" a z a una stringa semplice da gestire, come una sequenza di caratteri ripetuti o vuota.

Essendo una parte non vuota, necessariamente, pur rimanendo nel linguaggio, almeno una parte della stringa contiene più o meno caratteri dell'altra, che sarebbe assurdo. Il linguaggio, quindi, non potrà essere regolare.

Alcuni esempi utili per la comprensione:

3. Il linguaggio
$$L = \{w1w1w \mid w \in \{0, \dots, 9\}^*\}$$
è regolare? Motivare la risposta.

Soluzione. Il linguaggio contiene tutte le parole formate da tre ripetizioni di una stringa w (di lunghezza arbitraria), separate dal simbolo 1. Intuitivamente, non può essere regolare perché per riconoscere le parole nel linguaggio occorre memorizzare tutti i simboli della prima occorrenza di w per poi controllare che si ripetano esattamente uguali nelle altre due ripetizioni.

Per dimostrarlo formalmente, assumiamo per assurdo che L sia regolare:

- sia $n > 0$ la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $v = 0^n10^n10^n$, che è di lunghezza maggiore di n ed è nella forma $w1w1w$ se poniamo $w = 0^n$. Quindi v appartiene ad L;
- sia $v = xyz$ una suddivisione arbitraria di v tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq n$;
- poiché $|xy| \leq n$, allora xy è completamente contenuta nella prima ripetizione di $w = 0^n$, e quindi sia x che y sono composte solo da 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = 0^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^0z è nella forma $0^{n-p}10^n10^n$, e non può appartenere a L perché non esiste nessuna parola u che ci consenta di scrivere xy^0z come $u1u1u$.

Figure 2: Esempio 1 Pumping lemma

2. *Considera il linguaggio*
$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \textit{ contiene lo stesso numero di } 00 \textit{ e di } 11\}.$$
Dimostra che L_2 non è regolare.

Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k1^k$, che appartiene ad L_2 ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza di 0. Inoltre, siccome $y \neq \emptyset$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}1^k$. Consideriamo l'esponente $i = 0$: la parola xy^0z ha la forma
$$xy^0z = xz = 0^q0^{k-q-p}1^k = 0^{k-p}1^k$$
e contiene un numero di occorrenze di 00 minore delle occorrenze di 11. Di conseguenza, la parola non appartiene al linguaggio L_2, in contraddizione con l'enunciato del Pumping Lemma.

Figure 3: Esempio 2 Pumping lemma