Tutorato 8

- INDECIDIBILITÀ
- RIDUZIONI

→ VARI ESEMPI ED ESERCIZI

Problemi non risolvibili

$A_{TM} \Rightarrow \langle M, w \rangle$

D = DECISORE

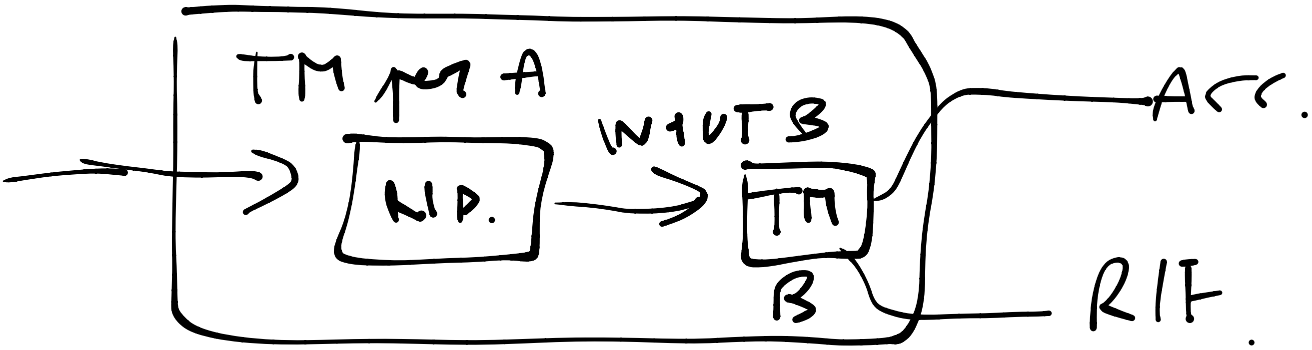
D → DIAGONALIZZAZ.

A_{TM} = INDECIDIBILE

[TURING-RICONOSCIBILE]

$E_{TM} \rightarrow$ EMPTY

$\{\langle M \rangle \mid M$ è TM con $L\langle M \rangle = \emptyset \}$



$[A \boxed{\leq_m} B]$ $\xrightarrow{}$ IND $\xleftarrow{}$ DEC

① $A \leq_m B$ B è dec. $\Leftrightarrow$ A è dec.

② $A \leq_m B$ A è indec. $\Leftrightarrow$ B è indec.

$HALT_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M$ è una TM e M si ferma su $w\}$

$A_{TM} \le_m HALT_{TM}$

① SCHEMA

[<M, w>] → INPUT

R → <M, w>

- simuliamo M su w
- se R accetta ⇒ accetta
- reject

[A_{TM}] → indecidibile

→ $HALT_{TM}$ (indecidibile)

E_{TM} → $L(M) = \emptyset$

($\overline{A_{TM}}$) → APPARE STRINGA

$X \nexists w$ (infinito)

(NON HO STRINGA VUOTA)

RICORSIVO → PROBLEMA DEF.

[R.E.] → IN QUALCHE CASO DEFINITO

- HALTS(M) = { w | M termini la computazione }

- Linguaggio

I = { <M> | HALTS<M> è un insieme infinito }

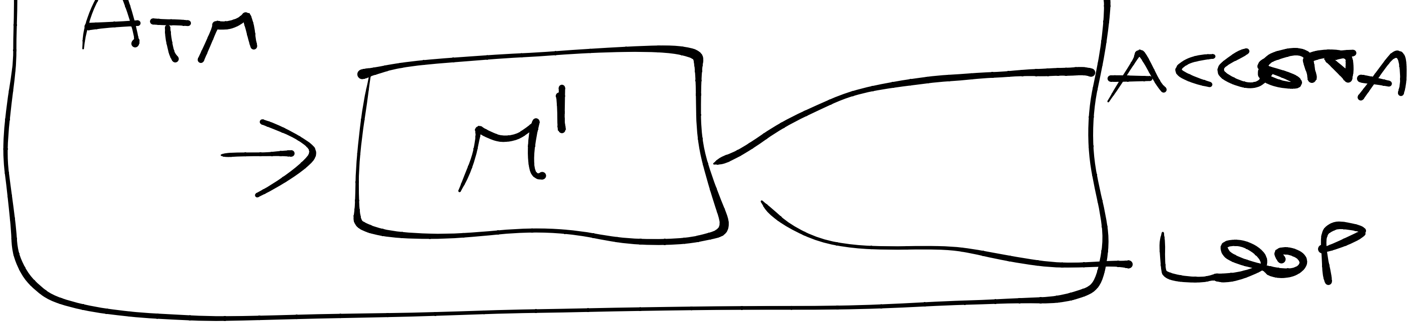
Dimostra che I sia indecidibile

$A_{TM} \le_m I$

F = input $\langle M, w \rangle$, M è TM, w stringa

M' = "Su input x":

- M su w (simula)
- se M, accetta
- se M rifiuta (ESSENDO INS. INFINITO) va in loop



- Ritorna $\langle M' \rangle$

$\Downarrow$

$A_{TM} \leq HALTS$

$\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ sse

$M' \in I$

[RID.] $\Leftrightarrow M$

- $\langle M, w \rangle \in A_{TM} \Rightarrow M$ accetta w
- $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$
  - $\Rightarrow$ rifiuta
  - $\Rightarrow$ va in loop

ALWAYSDIVERGE =

$\{ \langle M \rangle \mid M$ è una TM $\mid$

$\forall w \in \Sigma^*$, la comp. su

w non termina $\}$

① ALWAYSDIVERGE ind.

[A_{TM} / $\overline{A_{TM}}$ / E_{TM} / $\overline{E_{TM}}$ / EQ_{TM} / $HALT_{TM}$] e complementi

F → ⟨M, w⟩, M una TM

M': su input x: w stringa

① x ≠ w va in loop

② x = w esegue M

③ se M accetta, va in loop

④ se M rifiuta, accetta

- ⟨M, w⟩ ∈ $\overline{HALT_{TM}}$, divergendo la comput. va in loop $\overline{HALT_{TM}}$

- $\langle M, w \rangle \notin \overline{HALT_{TM}}$

non diverge la comp.

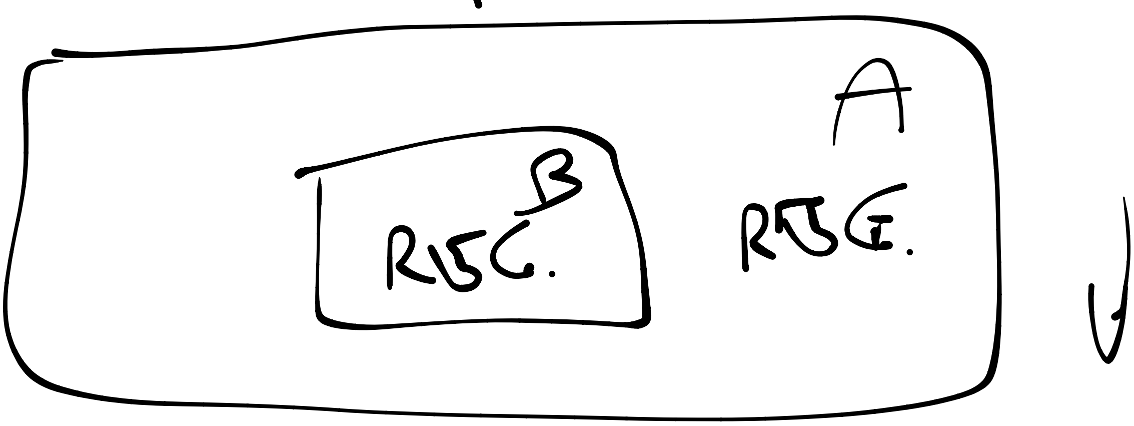
e $\overline{HALT_{TM}}$ accetta

$$\boxed{\overline{HALT_{TM}} \leq_m \text{ALWAYS DIVERGES}}$$

$\uparrow$ ind. $\qquad\qquad$ $\uparrow$ ind.

- $A \leq_m B$ e B è un ling. regolare, A è un ling. regolare?

$A \leq_m B$



$\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$\uparrow$

TURING - RICONOSCIBILE

$[A \leq_m B] \rightarrow$ CHIUSURA TUTTE LE OPER.

REGOLARITÀ $\rightarrow$ NO!

$ALL_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M$ è una TM (D. A.) tale che $L(M) = \Sigma^*\}$ è indecidibile

$A_{TM} \leq_m ALL_{TM}$

$D: \langle M, w \rangle$

$M' \rightarrow$ su input x

$\rightarrow L(M') = \Sigma^*$

se è così $\rightarrow$ accetta

$\rightarrow L(M') = \emptyset$

Created by Notein

→ rifiuta
ritorna M'

M, w → simulaz.
se M accetta,
accetta
altrimenti rifiuta

L STESSA COSA SU
B_{TM} → TUTTE
LE STRINGHE

↓

$\Sigma^* \neq \emptyset$

- DIMOSTRA CHE L
sia DECIDIBILE sse
∃ un ENUMERATORE CHE
SEGUE L'ORD. STANDARD
DELLE STRINGHE

↓

(L è il linguaggio che descrive queste consegne)

ORD. STANDARD =

ORDINE LESSICOGRAFICO

(A, B, C ...)

1 ($\Longrightarrow$)

Se L è decidibile

esiste una TM che

lo decide

$\exists$ E = enumeratore

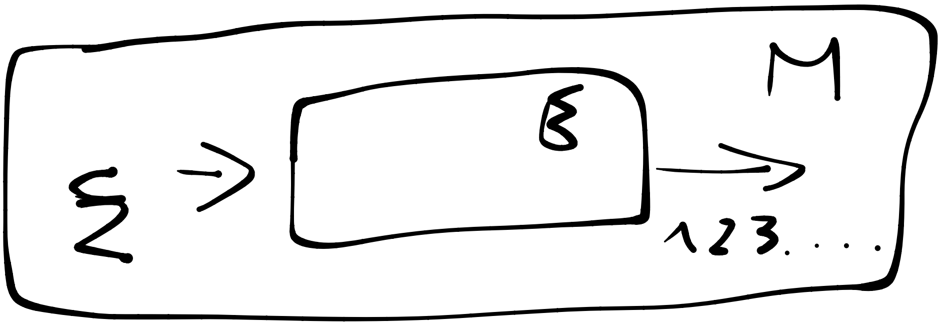
-> eseguito su tutte le stringhe

-> esegue M su E

E = Σ (finito)

CAMBIO ≤ Σ LG

CONTRARIO)



→ M esegue se

E stampa le stringhe

una per una

→ Se E (sub input)

è decidibile allora

M è decidibile

② ⇐ ∃E → L

sia

decidibile

Se ∃ E, allora

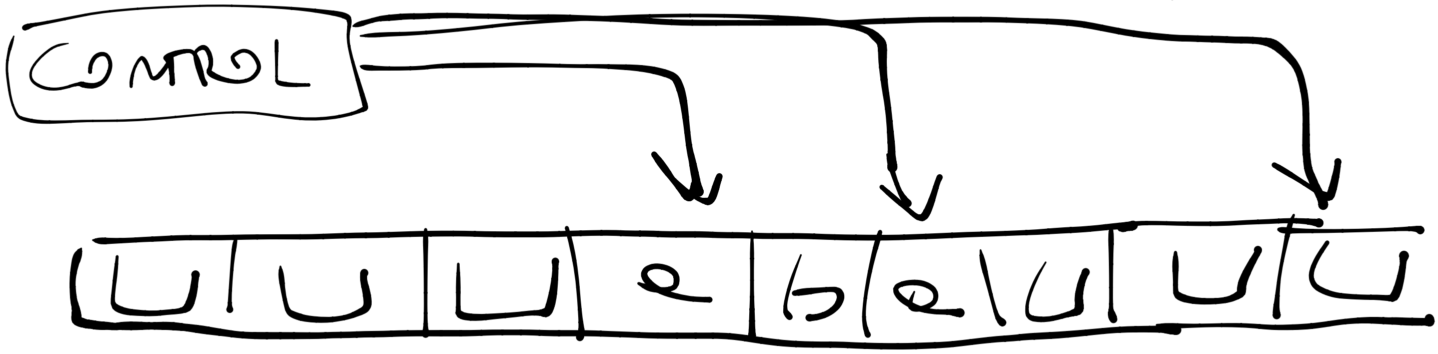
possiamo enumerare le stringhe in modo finito

se $\nexists B \rightarrow$ infinito

- TM a testine multiple
  $\rightarrow$ 1 solo nastro, svariate testine (K)

$\boxed{\text{FUNZ. DI TRANS}}$

$$\delta : Q \times \Gamma^K \rightarrow Q \times \Gamma^K \times \{L, R\}^K$$



$$\left(TM_{\text{SINGOLO}} \longleftrightarrow TM_{\text{MH}} \right)$$

(NASTRO SINGOLO) → SINGOLO

MULTIPLE HEADS → MH

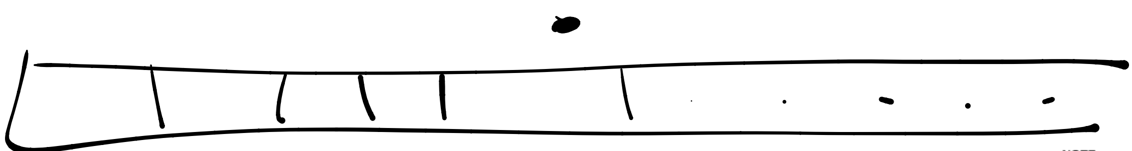
K testine

→ Eseguiamo M

→ Copia la computazione sul nastro

→ Prendiamo il n. di testine K e lo copiamo

→ Appena conclusa la simulazione della testina marchiamo il nastro con un simbolo (•)



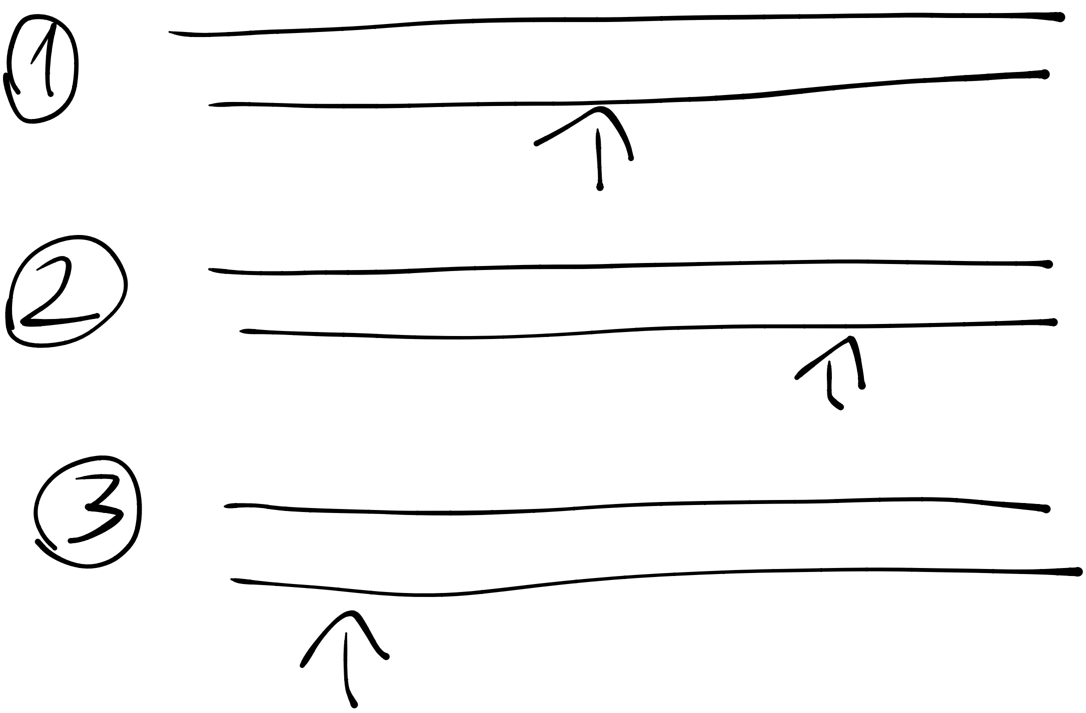
(K)

∀ K testine

— M scelte → scelte

— - . . -

(NASTRO MULTIPLO)



(COPIARE TUTTE K LE TESTINE CON LORO COMPUTAZIONE)

→ INTRODUCIAMO TUTTI I SIMBOLI (•) PER TENERNE TRACCIA

{L R} → (K)

N. FINITO

TRANSIZIONE

$(TM_{n+1} \rightarrow T_{\text{SINGOLO}})$

$(1) \longrightarrow (K)$

$(1) \longleftarrow (K)$

$$\underbrace{\text{TESTINA} \qquad \text{TESTINE}}$$

VARIANTE "BANALE"

→ ESEGUIAMO SOLO UNA TESTINA

(KARP REDUCTIONS)
