Automi e Linguaggi Formali
Università degli Studi di Padova
Maggio 2024

Homework 10 - Classe NP

Gabriel Rovesti

1. Considerate il seguente problema, che chiameremo $SUBSETSUM$: dato un insieme di numeri interi S ed un valore obiettivo t, stabilire se esiste un sottoinsieme $S' \subseteq S$ tale che la somma dei numeri in S' è uguale a t. Per esempio, se $S = \{4, 11, 16, 21, 27\}, t = 25$, il sottoinsieme $S' = \{4, 21\}$ è una soluzione, dato che $4 + 21 = 25$,

   Si dimostri che $SUBSETSUM$ è in NP con i seguenti passi:

   (a) definire come è fatto un *certificato* per il problema

   (b) definire un *verificatore* polinomiale per il problema

   Soluzione

   Un verificatore polinomiale per $SUBSETSUM$ prende in input l'insieme S, il valore obiettivo t e un certificato S', e verifica in tempo polinomiale se S' è una soluzione valida per l'istanza (S, t). Passi del verificatore:

   (a) Verifica che $S' \subseteq S$. Se non è vero, rifiuta.

   (b) Calcola la somma dei numeri in S'.

   (c) Verifica se la somma è uguale a t. Se è vero, accetta; altrimenti, rifiuta.

   Formalmente, possiamo riportare la seguente complessità:

   - Verificare che $S' \subseteq S$ richiede tempo $O(|S'| * |S|)$ nel caso peggiore, dove $|S'|$ e $|S|$ sono le cardinalità degli insiemi S' e S.
   - Calcolare la somma dei numeri in S' richiede tempo $O(|S'|)$.
   - Confrontare la somma con t richiede tempo costante $O(1)$.

   Quindi, la complessità totale del verificatore è $O(|S'| * |S| + |S'|)$, che è polinomiale rispetto alle dimensioni dell'input (S, t) e del certificato S'.

2. Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un **vertex cover** è un sottoinsieme $V' \subseteq V$ tale che per ogni arco $(u, v) \in E$, almeno uno tra u e v appartiene a V'. Il problema VERTEXCOVER chiede, dato un grafo G e un intero k, se esiste un vertex cover di dimensione al più k. Dimostrare che VERTEXCOVER è in NP, fornendo:

   (a) Una definizione di certificato per VERTEXCOVER

   (b) Un verificatore polinomiale per VERTEXCOVER

   Soluzione

   Per dimostrare che VERTEXCOVER è in NP:

   (a) **Certificato:** un sottoinsieme $V' \subseteq V$. La dimensione del certificato è $O(|V|)$, poiché nel caso peggiore V' potrebbe includere tutti i vertici di V.

   (b) **Verificatore polinomiale:** dato G, k, e un certificato V', il verificatore fa quanto segue:

      i. Controlla che $|V'| \leq k$. Questo può essere fatto in tempo $O(|V|)$.

      ii. Per ogni arco $(u, v) \in E$, controlla che almeno uno tra u e v appartenga a V'. Questo richiede tempo $O(|E|)$.

      Se entrambi i controlli vanno a buon fine, il verificatore accetta, altrimenti rifiuta. Il tempo totale è $O(|V|+|E|)$, quindi polinomiale nella dimensione dell'input.

   Quindi, VERTEXCOVER ha certificati succinti e verificabili in tempo polinomiale, il che dimostra che VERTEXCOVER è in NP.

3. Dato un insieme S di n interi positivi, il problema KNAPSACK chiede se esiste un sottoinsieme $S' \subseteq S$ tale che la somma degli elementi in S' sia esattamente un valore dato t. Dimostrare che KNAPSACK è in NP, fornendo:

   (a) Una definizione di certificato per KNAPSACK

   (b) Un verificatore polinomiale per KNAPSACK

   Soluzione

   Per dimostrare che KNAPSACK è in NP:

   (a) **Certificato:** un sottoinsieme $S' \subseteq S$. La dimensione del certificato è $O(n)$, dove n è la dimensione di S, poiché nel caso peggiore S' potrebbe includere tutti gli elementi di S.

(b) **Verificatore polinomiale:** dato S, t, e un certificato S', il verificatore fa quanto segue:

i. Calcola la somma s degli elementi in S'. Questo può essere fatto in tempo $O(n)$.

ii. Controlla che $s = t$. Se è così, accetta, altrimenti rifiuta. Questo può essere fatto in tempo $O(1)$.

Il tempo totale è $O(n)$, quindi polinomiale nella dimensione dell'input.

Quindi, KNAPSACK ha certificati succinti e verificabili in tempo polinomiale, il che dimostra che KNAPSACK è in NP.