Tutorato di Automi e Linguaggi Formali

PDA, CFG ed Esercizi di approfondimento

Gabriel Rovesti
Corso di Laurea in Informatica - Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2024-2025

1 Esercizi su Grammatiche Context-Free

CFG da PDA 1. Si consideri il seguente PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ dove:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{Z_0, A, B\}$
- $F = \{q_3\}$

E con funzione di transizione δ definita come:

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, AZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$
- $\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, c, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- $\delta(q_2, c, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$

Convertire questo PDA in una grammatica context-free equivalente utilizzando l'algoritmo standard di conversione.

Proprietà di chiusura 2. Data una grammatica context-free G che genera il linguaggio $L(G)$, considera il seguente linguaggio:

$$L_{half} = \{w \mid \exists v \text{ tale che } |v| = |w| \text{ e } wv \in L(G)\}$$

Ovvero, L_{half} è l'insieme delle metà sinistre delle stringhe in $L(G)$ di lunghezza pari.

Dimostra che se $L(G)$ è context-free, allora anche L_{half} è context-free.

Suggerimento: Modifica la grammatica G in modo che generi solo le metà sinistre delle stringhe in $L(G)$.

Ambiguità 3. Considera la grammatica:

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid a$$

(a) Dimostra che questa grammatica è ambigua mostrando due derivazioni diverse per la stringa "$a + a * a$".

(b) Riscrivere la grammatica in forma non ambigua per modellare le normali precedenze degli operatori (la moltiplicazione ha precedenza sull'addizione).

2 Esercizi su Automi a Pila

Costruzione di PDA 4. Progetta un PDA che accetti il linguaggio $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ e } i + j = k\}$.

Descrivi dettagliatamente tutti i componenti del PDA (stati, alfabeti, funzione di transizione) e spiega come funziona.

Trasformazione PDA a CFG 5. Sia dato il seguente PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ dove:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{Z_0, X\}$
- $F = \{q_2\}$

Con funzione di transizione δ:

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$
- $\delta(q_0, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

Converti questo PDA in una grammatica context-free equivalente e semplifica la grammatica risultante il più possibile.

3 Esercizi Avanzati

Pumping lemma esteso 6. In questo esercizio esploreremo una versione più forte del pumping lemma per linguaggi context-free.

Teorema (Pumping lemma esteso): Se L è un linguaggio context-free, allora esiste una costante $p > 0$ tale che ogni stringa $z \in L$ con $|z| \geq p$ può essere scritta come $z = uvwxy$ con:

1. $|vwx| \leq p$
2. $|vx| > 0$
3. Per ogni $i \geq 0$ e per ogni $j \geq 0$, $uv^iwx^jy \in L$

Dimostra che i seguenti linguaggi non sono context-free utilizzando questo pumping lemma esteso:

(a) $L_1 = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$

(b) $L_2 = \{a^nb^mc^md^n \mid n, m \geq 1\}$

Prefissi propri 7. Sia L un linguaggio context-free sull'alfabeto Σ. Definiamo l'insieme di tutti i prefissi propri di L come:

$$Prefix(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^+ : xy \in L\}$$

Dimostra che $Prefix(L)$ è sempre context-free se L è context-free.

Suggerimento: Modifica la grammatica che genera L in modo che ogni derivazione possa "terminare prematuramente".

linguaggio delle shufflazioni 8. Data una stringa w, definiamo una *2-shufflazione* di w come una stringa ottenuta dividendo w in due parti e poi intercalando i caratteri delle due parti in modo arbitrario. Ad esempio, se $w = abcd$, una possibile 2-shufflazione è $acbd$ (ottenuta intercalando ab e cd).

Dato un linguaggio L, definiamo il linguaggio delle 2-shufflazioni di L come:

$$Shuffle_2(L) = \{z \mid z \text{ è una 2-shufflazione di qualche stringa } w \in L\}$$

Dimostra che se L è context-free, allora anche $Shuffle_2(L)$ è context-free.

PDA minimale 9. Si definisce la *dimensione* di un PDA come la somma del numero di stati e del numero di simboli di pila.

(a) Trova un PDA di dimensione minima che accetti il linguaggio $L = \{a^nb^n \mid n \geq 1\}$.

(b) Dimostra che il PDA da te costruito è effettivamente di dimensione minima (cioè, non esiste un PDA con dimensione inferiore che accetti lo stesso linguaggio).