INCONTRO 11 → 04/06

OVERVIEW:

- CLASSI P / NP
- RIDUZIONI IN P
- NP - COMPLETEZZA e PROBLEMI

DOMINO → PCP

INPUT → $G = (V,E)$

BUONO

PROPRIETÀ

NP → NON RIUSCIAMO A RISOLVERE UN PROBLEMA SEMPRE IN MODO EFFICIENTE

P

DECIDIBILE

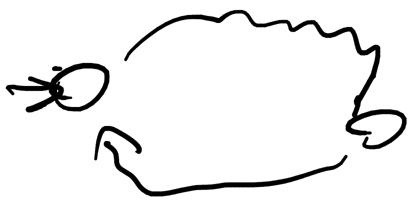
NP

NP - HARD

NP - COMPLETO

∃ ! ALGORITMO → RISOLVE PROBLEMA

$G = (V,E)$ ⇒ CIRCUITO HAMILTONIANO

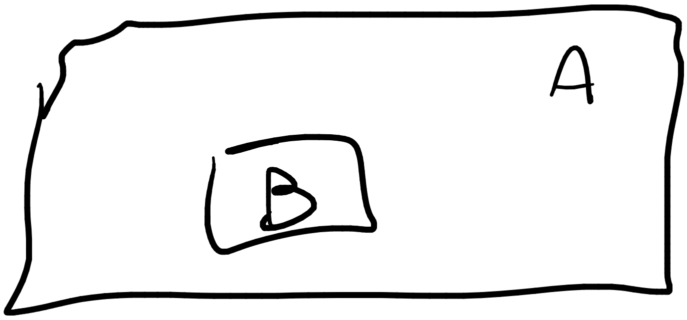


NP - HARD

↓

INDECIDIBILITÀ

$A \le_m B$



se A NP-HARD → B è NP-HARD
(INDECIDIBILE)

SE B è in P, A è in P
(DECIDIBILE) (DECIDIBILE)

NP-HARD → PROBLEMI NP-HARD

1. VERIFICA CHE PROBLEMA SIA IN NP

PROBLEMA → CERTIFICATO

2. RIDUZIONE DA NP-HARD

$\boxed{A} \le_m \underline{B}$

---

① SUBSET - SUM → SS

$\langle [4, 11, 16, 21, 22], 25 \rangle$

S = SET   k = TARGET

$X + Y = Z$

① DIMOSTRA SS IN NP

$\left\{ \frac{\text{VERIFICATORE}}{\text{TM}} \right\} \rightarrow V \rightarrow$ PROCEDURA

1. → [S] → VERIFICA CHE TUTTI

SERIE DI NUMERI   GLI $S_i = T$

→ $S_i \in S$

→ SE SUCCEDE, ACCETTA

→ SE NO, RIFIUTA

$A \leq_m B$

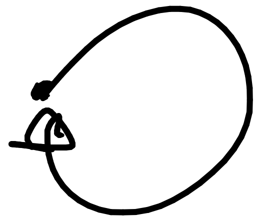
SUBSET - SUM $= \langle S, t \rangle$

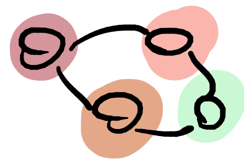
SAT =

$\langle a \wedge b \vee c \rangle = 1$

SET - PARTITIONING

[DOMINO
SOLITAIRE
PUZZLE] → $\langle S, A \rangle$

GRAFI → HAM / 

K-COLOR / 

FORMULE
↑
SAT / CIRCUIT-SAT

D 8
D 17] → 25 → TRUE

= (25) = TRUE

$\langle a \wedge b \vee c \rangle$

CIRCUIT-SAT

SAT $\leq_m$ CIRCUIT-SAT

→ NP (1) → VERIFICA ...

→ NP-HARD → RIDUZIONE IN P (2)

x_1, x_2 → $\langle x_i \wedge x_j \vee x_k \rangle$ ...

OUTPUT = 1

PORTE LOGICHE

⇒ VERIFICA CIRCUIT-SAT IN NP

V = SU INPUT $\underline{\langle X_1 \dots\dots X_k \rangle}$ → K = CIRCUITO

⇒ VERIFICA CHE OGNI COMBINAZIONE DI PORTE LOGICHE $\xrightarrow[\text{VA AD}]{}$ 1 COME OUTPUT

⇒ SE TUTTE AD 1 → ACCEPT

↳ REJECT OTHERWISE

② CIRCUIT-SAT → NP-HARD

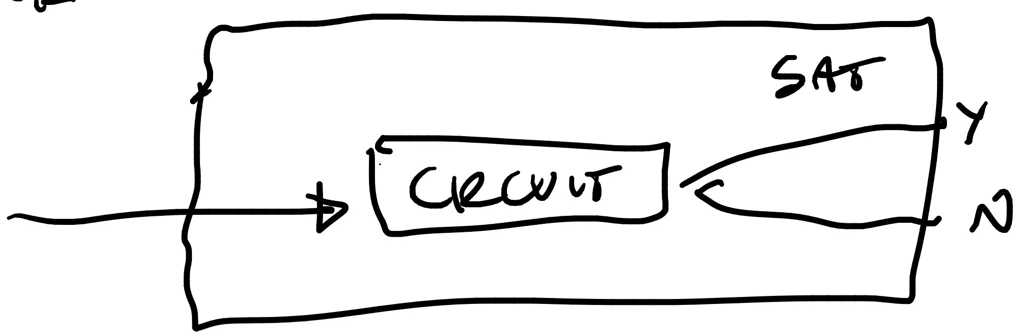
USA SAT COME RIFERIMENTO

$$A \le_m B$$

$x_1 \dots x_k$ $\quad \overrightarrow{\text{SAT}}$ $\qquad$ CIRCUIT-SAT = K

↓

$x_1 \dots x_k$

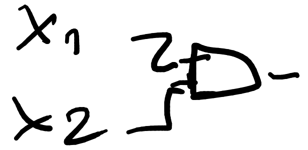


⇒ SE IL PROBLEMA È IN SAT, ALLORA...

$\langle X_1 \dots\dots X_k \rangle \rightarrow K = \langle X_1, \dots X_k \rangle$

SAT → $\underline{\text{VALORI DI VERITÀ}}$

ESISTE NO → V



↓

$\langle x_1 \vee x_2 \rangle$

VERIFICATORE → ∃ UN VALORE DI INPUT CHE, DATE TUTTE LE VARIABILI → OUTPUT

$\langle x_1 \dots x_k \rangle$

→ ∃ UN VALORE DI OUTPUT PER OGNUNA DELLE PORTE LOGICHE → $\boxed{1}$

↓

CIRCUITO CHE VALUTA TUTTO AD 1

→ SUMMARY

= SE ∃ FORMULA / ∃ OUTPUT (CIRCUITO DÀ 1)

(⇐) SE ∃ ISTANZA DI CIRCUIT SAT, ALLORA...

↓

∃ OUTPUT → CIRCUITO È COMPOSTO DA FORMULE (ESISTONO PER V)

→ ESISTONO LE COMBINAZIONI DI LETTERALI $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$

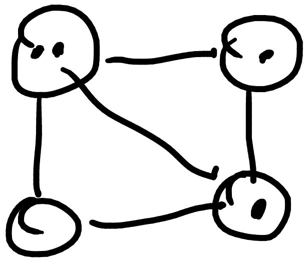
→ ARRIVA AD UN OUTPUT

CIRCUIT - SAT → NP- COMPLETO
- NP
- NP - HARD

ES. 4 -> PEBBLE DESTRUCTION

STACK EXCHANGE

$G = (V, E)$



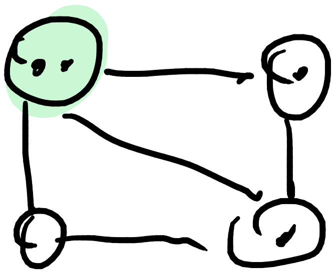
-> MOSSA

① SCEGLI VERTICE

② TOGLI 2 SASSI DA QUEL VERTICE

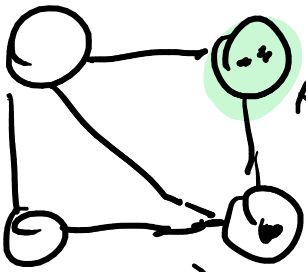
③ METTINE 1 SU QUELLI ADIACENTI

TOGLI 2 SASSI



(1)

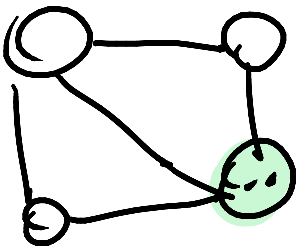
->



(2)

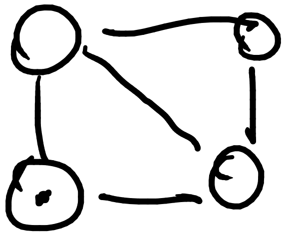
^ 1 SASSO IN PIÙ

VERDE = SOLUZIONE



(3)

->



PD $\in$ NP

PD

PEBBLE DESTRUCTION

PD SIA NP - HARD

USA HAM

① -> $G = (V, E)$, $P(V)$

N. DI CIOTTOLI

∃ UN VERIFICATORE V?

IN T. FINITO → POLY-TIME → P

$G = (V, E)$, $P(U)$ → $V_1 \dots V_n$

$E_1 \dots E_m$

U P V

∃ PERCORSI TRA ARCHI E VERTICI

U ∃ P = PATH / PERCORSO V

→ SCEGLI V DI PARTENZA

→ PER OGNI PERCORSO, ∃(?) UN CICLO

→ VALUTA SE P(U) CORRISPONDE AL N. DI CICLI PERCORSI

→ ACCETTA / RIFIUTA → VERIFICATORE

[CERTIFICATO] => G(V,E), P(U)

ISTANZA BUONA DEL PROBLEMA

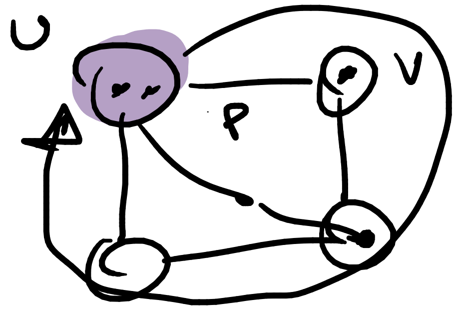
(B) → USA HAM PER PD CHE SIA NP-HARD

[HAM $\leq_m$ PD]

$< G=(V,E) >$, $< G=(V,E), \underline{P(V)} >$

N. DI CIOTTOLI

($\Rightarrow$) SE $\exists$ HAM, ALLORA ....



→ SCELGO U DI PARTENZA

→ FAI UN GIRO HAMILTONIANO

(2.) DI TUTTI I VERTICI E

OGNI PERCORSO $P \in (U,V)$

È COMPOSTO DA ALMENO UN CIOTTOLO

→ OGNI PERCORSO È

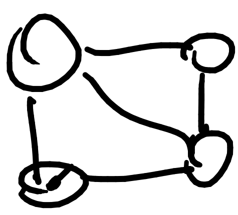
(2.1) UNA MOSSA DI PD

[TOGLI 2 SASSI METTINE 1 ADIACENTE]

→ FALLO PER TUTTO IL CIRCUITO (V)

→ SE "GIRO" HAMILTONIANO ALLORA HAI TOLTO 2 SASSI, $\forall$ VERTICE V

→ ARRIVI AL GRAFO (4.)



[SE HAM, ALLORA PD]

(⇐) SE ∃ UN'ISTANZA DI PD,

ALLORA ....

$\downarrow$

$< G=(V,E), p(v) >$

$\uparrow$

∃ UN CIRCUITO HAM. CHE DESCRIVE $p(v)$ → ∃ $p(v) = 4$ SASSOLI

$u \rightsquigarrow v$ (P) → TUTTI I PERCORSI

∃ ⊙ = ∃ PERCORSI

CIOTOLE

PD è NP-COMPLETO

→ NP

→ NP-HARD → RIDUZIONE (P)

∃ HAMILTONIANO

PARTI DA UN VERTICE, FALLI TUTTI

∃ ⊙ → S → Y / N

CIOTOLE

$A \leq_p B$ → KARP REDUCTION

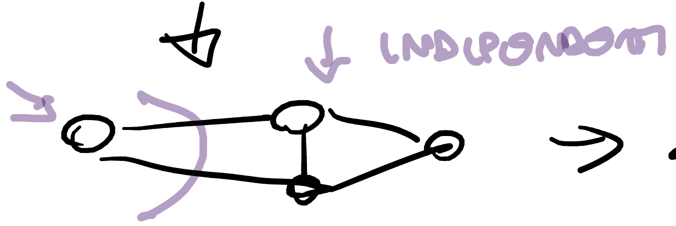
[K-SAT / CIRCUIT-SAT] → FORMULA

[K-COLOR / HAM]

(1) VERTEX COVER →

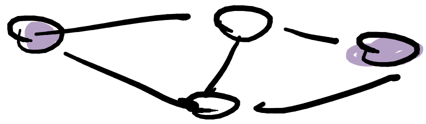
(2) INDEPENDENT SET →

$G = (V,E)$



→ SCONNETTI GRAFO COMPLETAMENTE

VC →



→ N. MIN. DI VERTICI PER COPRIRE IL GRAFO SENZA ARCHI

$\underline{A} \leq_m B$

↓

A_{TM} / $HALT_{TM}$

EQ_{TM}

E_{TM}

→ INDECIDIBILITÀ

<u>DECIDIBILE</u>

PILA ↗ PUSH ↘ POP

$INFINITE_{PDA} = \{\langle M \rangle \mid M$ è un PDA e $L(M)$ è un L. INFINITO $\}$

<u>DECIDIBILE</u>

(1) > DESCRIVI UN ALGORITMO CHE FA IL PROBLEMA

(2) (A) ← (B)

∃ UN PDA CHE FA L

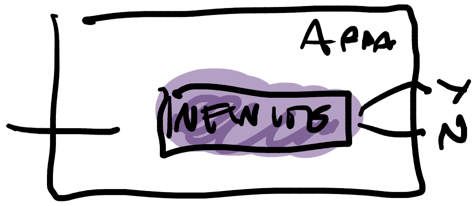
↓

$\underbrace{A_{PDA}}_{} \leq_m \underbrace{INFINITE_{PDA}}_{B}$

1

↓

$INFINITE_{PDA} = \langle M = PDA,\ L = L.\ INFINITO \rangle$



INFINITE DECIDIBILE → A_{PDA} DECIDIBILE

→ DIMOSTRA

$INFINITE_{PDA}$ DECIDIBILE

$\boxed{PDA}$ → L. INFINITO → ALTERNATIVA A 1

∃ UN PDA = TM T

↑ SIMULA

↓

PDA = CFG

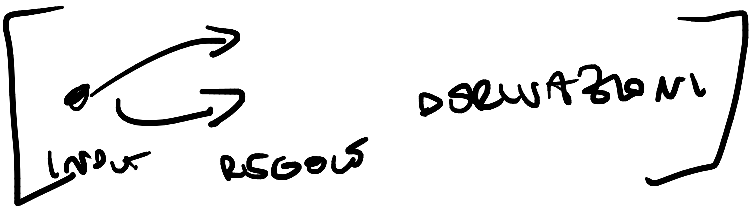
∃ L'EQUIVALENZA

→ DESCRIVI TUTTE LE DERIVAZIONI / STATI

∃ CFG $G' = G$ → CHOMSKY

↑ PDA DI PARTENZA

→ SE M ACCETTA, T ACCETTA (ALTRIMENTI NO)



se $A \Rightarrow uAv$, $u, v \in \Sigma^*$

↓

SE ESISTE SEMPRE QUESTA DERIVAZIONE, ALLORA $L(M)$ → INFINITO

(ALTRIMENTI RIFIUTA)

Alternativa (usando riduzione) è dire: se INFINITE_PDA, allora esiste A che è un PDA che ha un linguaggio infinito ... → A decidibile perchè INF si