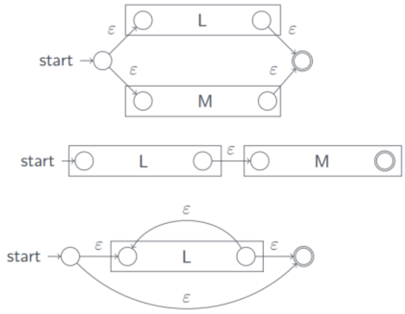
Linguaggio Regolare = Riconoscibile da un automa DFA

Se L e M sono linguaggi regolari, allora anche i seguenti linguaggi sono regolari:

- Unione: $L \cup M$
- Intersezione: $L \cap M$
- Concatenazione: $L.M$
- Complemento: $\overline{L}$
- Chiusura di Kleene: L^*

Grazie all'equivalenza DFA-NFA (con epsilon), è possibile realizzare questo.

- L + M
- L.M
- L*



Una espressione regolare è un modo dichiarativo per descrivere un linguaggio regolare.

Le Espressioni Regolari sono costruite utilizzando

- un insieme di costanti di base:
  - ε per la stringa vuota
  - $\emptyset$ per il linguaggio vuoto
  - a, b, ... per i simboli $a, b, \dots \in \Sigma$
- collegati da operatori:
  - $+$ per l'unione
  - $\cdot$ per la concatenazione
  - * per la chiusura di Kleene
- raggruppati usando le parentesi:
  - ( )

- $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$
- $L(EF) = L(E).L(F)$
- $L(E^*) = L(E)^*$
- $L((E)) = L(E)$

Alcuni esempi:

6) Tutte le stringhe w che contengono la sottostringa 101 (alfabeto 0,1)

Your regex: (0|1)*101(0|1)*

ER che mostra che tutte le stringhe contengano ciascun simbolo almeno una volta

$(a + b + c)^*a(a + b + c)^*b(a + b + c)^*c$

ER per stringhe binarie che contengono almeno tre 1:

(0+1)*1(0+1)*1(0+1)*1(0+1)*

ER per stringhe di testo che descriva le date in formato GG/MM/AAAA

0(1+2…+9)+(1+2)/(1+2+…9)+3(0+1)/(0+1)(1+2)/(0+1+…9)(0+1+…9)(0+1+…9)(0+1+…9)

7) Tutte le stringhe la cui lunghezza è multiplo di 3 (alfabeto a,b,c)

Your regex: ((a|b|c)(a|b|c)(a|b|c))*

Exercise: Give regular expressions that describe the following languages.

1. $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ divisible by } 3\}$
2. $L := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ does not contain } a,\ b, \text{ or } c\}$
3. $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{substring } ab \text{ occurs exactly twice in } w, \text{ but not at the end}\}$

Solution:

1. $((a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b))^*$
2. $(a + b)^* + (a + c)^* + (b + c)^*$
3. $b^*a^+b^+a^+b(b^+a^* + b^*a^+)$

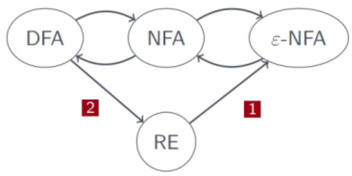
5) Tutte le stringhe che contengono 4k + 1 occorrenze di “b” per “k” >= 0
Soluzione:
((a|c)*b(a|c)*b(a|c)*b(a|c)*b(a|c)*)* (a|c)*b(a|c)*

3) Tutte le stringhe che NON contengono la sottostringa 101 (alfabeto {0,1})

Your regex: 0*(1*000*)*1*0*

Equivalenza tra FA e RE

Sappiamo già che DFA, NFA, e ε-NFA sono tutti equivalenti.

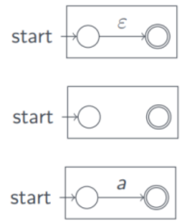


Gli FA sono equivalenti alle espressioni regolari:

1. Per ogni espressione regolare R esiste un ε-NFA A, tale che $L(A) = L(R)$
2. Per ogni DFA A possiamo costruire un'espressione regolare R, tale che $L(R) = L(A)$

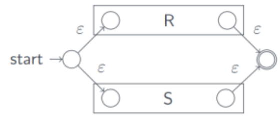
Caso Base:

- automa per ε
- automa per $\emptyset$
- automa per a



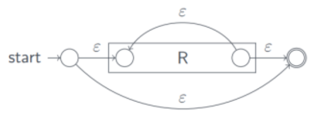
Caso Induttivo:

- automa per R + S

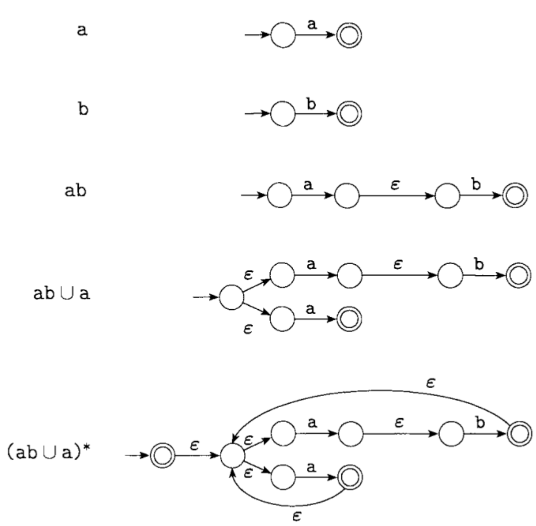


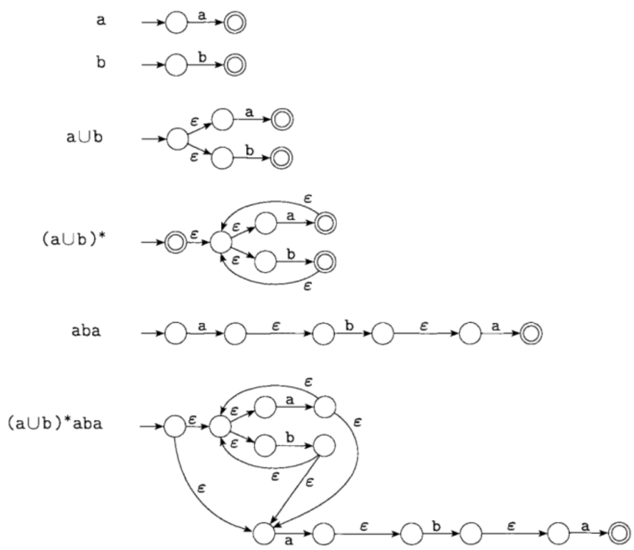
- automa per RS

- automa per R*



Esempio completo di equivalenza:





Solve Regular expression to epsilon-NFA problem

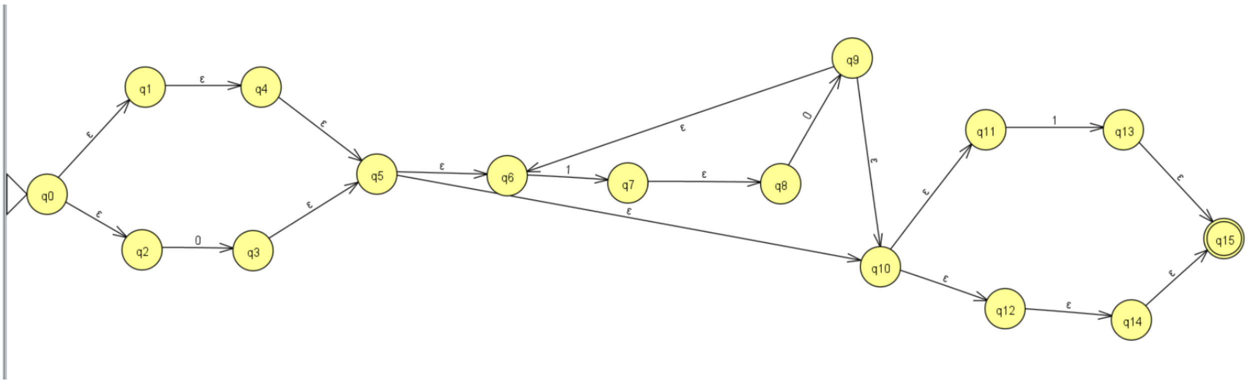
For the following regular expression:

(ϵ|0)(10)*(1|ϵ)

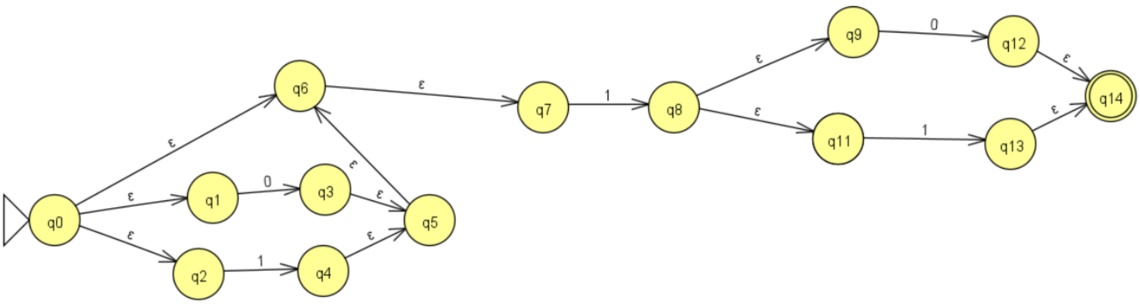
Over the alphabet:

{0,1}

Give an epsilon-NFA that recognizes the same language.



(0 + 1)∗1(0 + 1) in ε-NFA (da slide)

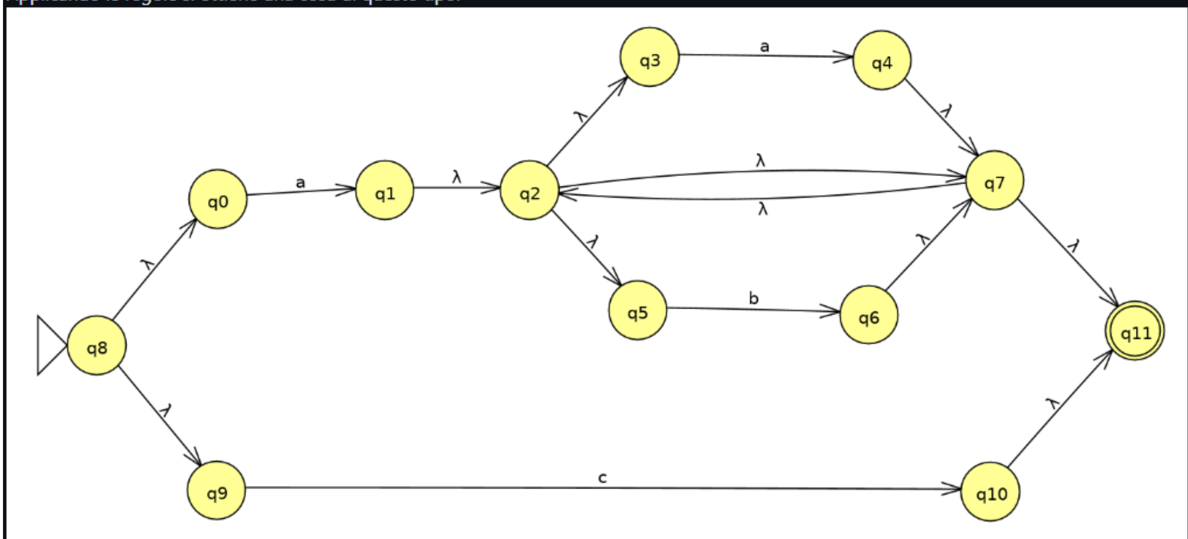


Soluzione: `a(a+b)*+c`

Esercizio 6.3

Convertire l'esercizio 6.2 in ε-NFA.

Applicando le regole si ottiene una cosa di questo tipo:

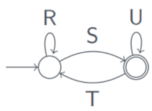


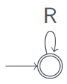
- La procedura che vedremo è in grado di convertire un qualsiasi automa (DFA, NFA, ε-NFA) in una espressione regolare equivalente
- Si procede per eliminazione di stati
- Quando uno stato q viene eliminato, i cammini che passano per q scompaiono
- si aggiungono nuove transizioni etichettate con espressioni regolari che rappresentano i cammini eliminati
- alla fine otteniamo un'espressione regolare che rappresenta tutti i cammini dallo stato iniziale ad uno stato finale
  - ⇒ cioè il linguaggio riconosciuto dall'automa

- Lo stato da eliminare può avere un ciclo
- $q_1, \ldots, q_k$ sono i predecessori
- $p_1, \ldots, p_m$ sono i successori
- ci possono essere transizioni dirette tra i predecessori ed i successori

- Dobbiamo ricreare la transizione per ogni coppia predecessore-successore q_i, p_j
- Se non c'è la transizione diretta, l'etichetta è $Q_i S^* P_j$
- Se c'è la transizione diretta, l'etichetta è $R_{ij} + Q_i S^* P_j$

La strategia completa

1. l'automa deve avere un unico stato finale
   - se c'è più di uno stato finale, crea un nuovo stato finale q_f con ε-transizioni provenienti dai vecchi stati finali
2. collassa le transizioni tra la stessa coppia di stati
3. elimina tutti gli stati tranne lo stato iniziale e lo stato finale
4. se $q_f \neq q_0$ l'automa finale è 

   che è equivalente a $(R + SU^*T)^*SU^*$
5. se $q_f = q_0$ l'automa finale è 

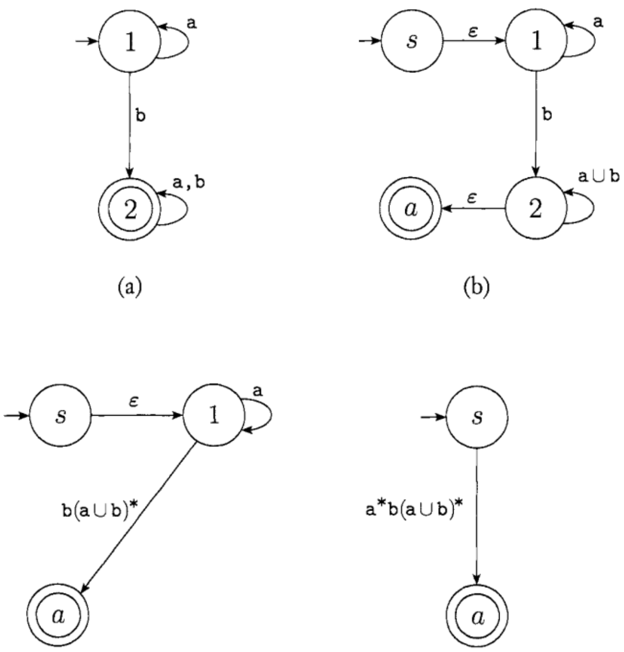
   che è equivalente a R^*

Step 1 : if there exists any incoming edge to initial state add a new initial State

Step 2 : if there exist an Out going edge to final state create a new final state

Step 3 : if ther exist Mutiple final states Convert to non final and Create Single final state

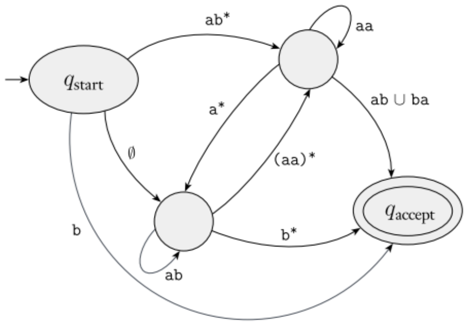
Eliminate all intermediate States one by on in any orde



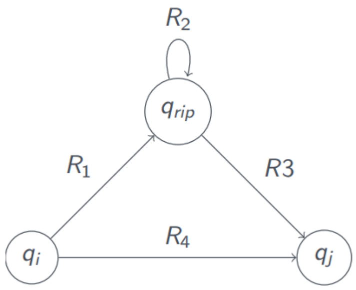
(a) (b) (c) (d)

Sono NFA dove le transizioni sono etichettate con espressioni regolari

Ogni transizione consuma un blocco di simboli dall'input che appartiene al linguaggio dell'espressione regolare

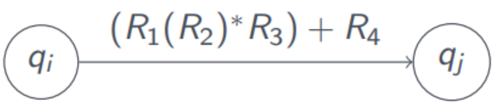


1. Nuovo stato iniziale q_{start} con transizione ε verso il vecchio q_0
2. Nuovo stato finale q_{accept} con transizione ε da tutti i vecchi stati finali $q \in F$
3. Rimpiazzo transizioni multiple tra due stati con l'unione delle etichette
4. Aggiungo transizioni etichettate con $\emptyset$ tra stati non collegati da transizioni



Se, nel GNFA:

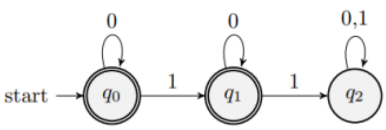
1. q_i va in q_{rip} con etichetta R_1
2. q_{rip} ha un self loop con etichetta R_2
3. q_{rip} va in q_j con etichetta R_3
4. q_i va in q_j con etichetta R_4



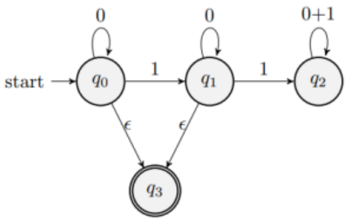
dopo l'eliminazione di q_{rip}, q_i va in q_j con etichetta

$$(R_1(R_2)^*R_3) + R_4$$

2. Stringhe binarie che non comprendono la stringa 101



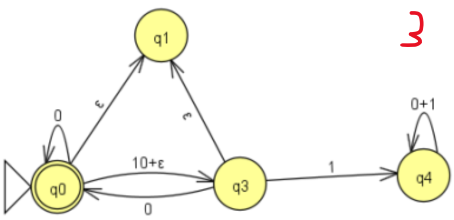
1



2

Passaggi:

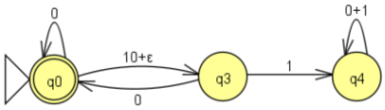
Elimino q2 q0-q3 10+ε



3

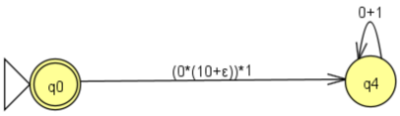
4

Elimino q1: q0-q3-q4 (10+ε)



5

Elimino q3: q0-q4 (0*(10+ε))*1

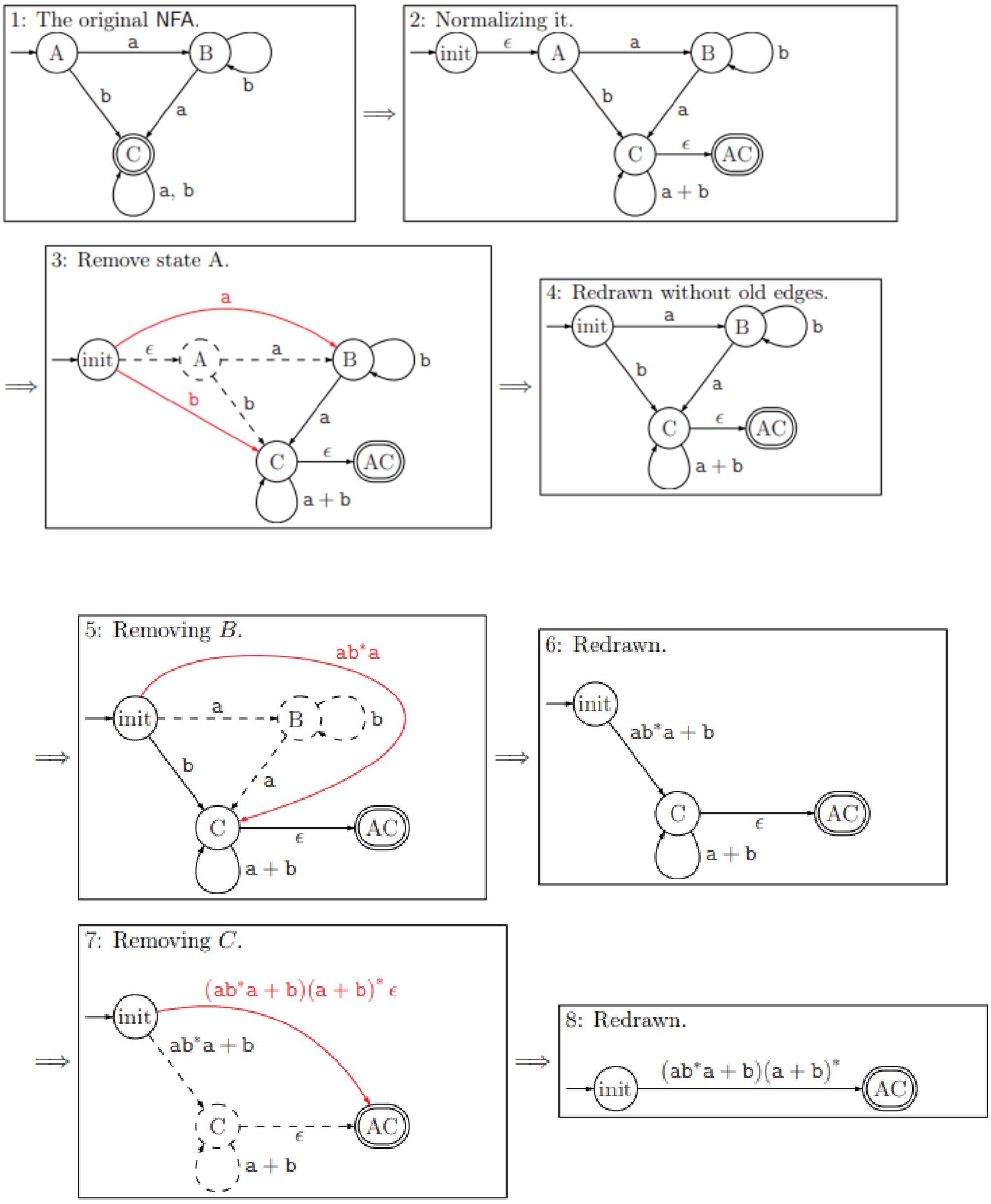


Elimino q4: (0*(10+ε))*1+(0+1)*

ER: 0*(ε+(10+ε))1(0+1)*

6

2.1 Example: From GNFA to regex in 8 easy figures



Thus, this automata is equivalent to the regular expression $(ab^*a + b)(a + b)^*$.