Homework 4 - Grammatiche context-free, forma normale di Chomsky, chiusura per linguaggi context-free, PDA

Gabriel Rovesti

1. Progettate grammatiche context-free per i seguenti linguaggi:

   - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene almeno tre } 1\}$
     $G = (V, \Sigma, R, S)$ con set di variabili $V = S, X$, dove S è la variabile iniziale, con simboli terminali dell'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e regole:

     $$S \to X1X1X1X$$
     $$X \to 0X \mid 1X \mid \epsilon$$

   - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{la lunghezza di } w \text{ sia dispari e il simbolo in mezzo sia uno } 0\}$
     $G = (V, \Sigma, R, S)$ con set di variabili $V = S$, dove S è la variabile iniziale, con simboli terminali dell'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e regole:

     $$S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid 0$$

   - $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ e } i + j = k\}$
     $G = (V, \Sigma, R, S)$ con set di variabili $V = S, X$, dove S è la variabili iniziale, con simboli terminali dell'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e regole:

     $$S \to aSc \mid X$$
     $$X \to bXc \mid \epsilon$$

   - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{il simbolo in posizione } i \text{ è lo stesso simbolo in posizione } i+2 \text{ e } |x| \geq 2\}$
     $G = (V, \Sigma, R, S)$ con set di variabili $V = S, A, B, C, D$, dove S è la variabile iniziale, con simboli terminali dell'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$

e regole:

$$
\begin{aligned}
S &\to A \mid B \mid C \mid D \\
A &\to 00A \mid 00 \\
B &\to 11B \mid 11 \\
C &\to 10C \mid 10 \\
D &\to 01D \mid 01
\end{aligned}
$$

- $L_1 = \{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \mid x \neq y\}$
  $G = (V, \Sigma, R, S)$ con set di variabili $V = S, A, B, T$, dove S è la variabile iniziale, con simboli terminali dell'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e regole:

$$
\begin{aligned}
S &\to A\#B \mid B\#A \mid \epsilon \\
A &\to TAT \mid 0 \\
B &\to TBT \mid 1 \\
T &\to 0 \mid 1
\end{aligned}
$$

2. Dimostra che se L è un linguaggio context-free, allora anche L^R è un linguaggio context-free.

   Se L è un linguaggio context free allora esiste una grammatica G che lo genera. Possiamo assumere che G sia in forma normale di Chomsky. Di conseguenza le regole di G sono solamente di due tipi: $A \to BC$, con A, B, C simboli non terminali, oppure $A \to b$ con b simbolo non terminale. Costruiamo la grammatica G^R che genera L^R in questo modo:

   - ogni regola $A \to BC$ viene sostituita dalla regola $A \to CD$;
   - le regole $A \to b$ rimangono invariate.

3. Convertire la seguente grammatica context-free in forma normale di Chomsky:

$$
\begin{aligned}
S &\to AbA \\
A &\to Aa \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

   Eliminiamo la ϵ-regola e otteniamo:

$$S \rightarrow TA \mid bA \mid Ab \mid b$$
$$A \rightarrow Aa \mid a$$

Il secondo passo (regole unitarie) non si applica. Dopo il terzo passo (spezzare regole lunghe con regole corte) otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow TA \mid bA \mid Ab \mid b \\
&A \rightarrow Aa \mid a \\
&T \rightarrow Ab
\end{aligned}
$$

Per concludere con tutte le regole:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow TA \mid BA \mid AB \mid b \\
&A \rightarrow AC \mid a \\
&T \rightarrow AB \\
&B \rightarrow b \\
&C \rightarrow a
\end{aligned}
$$

4. Create dei PDA per i seguenti linguaggi:

- $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i + j = k\}$

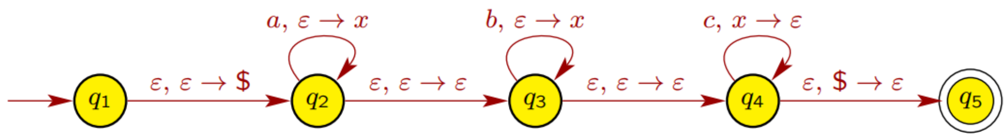

Figure 1: Primo PDA

- $L_1 = \{a^{2n} b^{3n} \mid n \geq 0\}$

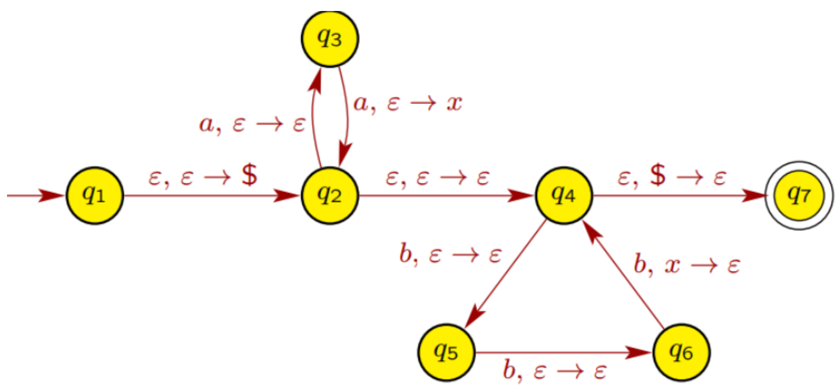

Figure 2: Secondo PDA