Esercizi su Automi e Linguaggi Formali

1 Progettare DFA

1.1 Esercizio 1

Consegna: Costruite un DFA che riconosce il linguaggio

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene un numero di 0 multiplo di 3}\}$$

Per esempio, 000, 00110 e 010101010101 appartengono al linguaggio perché contengono rispettivamente 3, 3 e 6 zeri, mentre 00, 001010 e 0101010101, che contengono 2, 4 e 5 zeri, non appartengono al linguaggio.

Soluzione

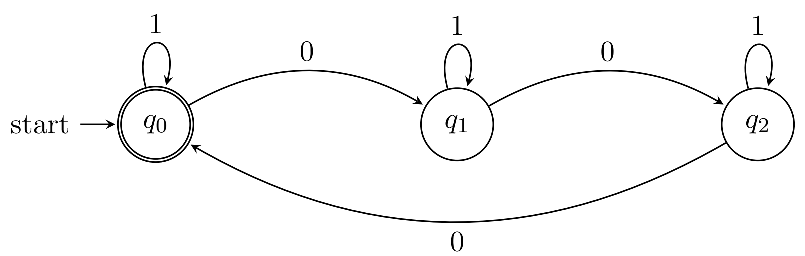
Per costruire un DFA che riconosca le stringhe con un numero di 0 multiplo di 3, utilizziamo un contatore modulo 3 per tenere traccia del numero di 0 incontrati.

Definiamo gli stati:

- q_0: Abbiamo letto 0 mod 3 zeri (stato iniziale e finale)
- q_1: Abbiamo letto 1 mod 3 zeri
- q_2: Abbiamo letto 2 mod 3 zeri

Le transizioni saranno:

- Leggendo 0: incrementiamo il contatore
- Leggendo 1: manteniamo lo stesso stato



Formalmente, il DFA è definito come $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la funzione di transizione:
  - $\delta(q_0, 0) = q_1$
  - $\delta(q_0, 1) = q_0$
  - $\delta(q_1, 0) = q_2$
  - $\delta(q_1, 1) = q_1$
  - $\delta(q_2, 0) = q_0$
  - $\delta(q_2, 1) = q_2$
- q_0 è lo stato iniziale
- $F = \{q_0\}$ è l'insieme degli stati finali

Verifichiamo la correttezza con alcuni esempi:

- Per "000": $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{0} q_0$ (accettata)
- Per "00110": $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_0$ (accettata)
- Per "00": $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2$ (rifiutata)

1.2 Esercizio 2

Consegna: Costruite un DFA che riconosce il linguaggio

$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ è la codifica binaria di un numero multiplo di } 3\}$$

Per esempio, 11, 110 e 1001 appartengono al linguaggio perché sono le codifiche binarie di 3, 6 e 9, mentre 10, 111 e 1011 non appartengono al linguaggio perché sono le codifiche binarie di 2, 7 e 11. La stringa vuota non codifica nessun numero.

Soluzione

Per costruire un DFA che riconosca le stringhe che rappresentano numeri multipli di 3 in notazione binaria, utilizziamo la proprietà che un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre in base 3 è divisibile per 3.

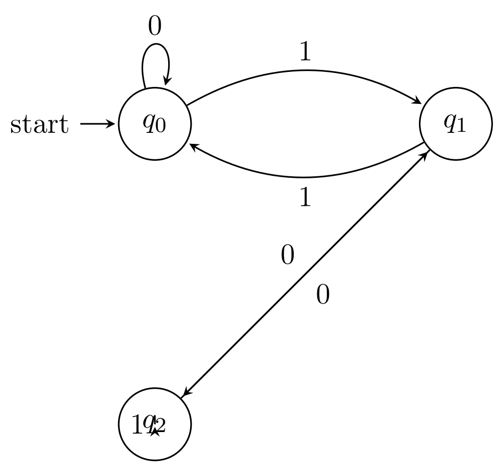
In questo caso, mentre leggiamo la stringa da sinistra a destra, calcoliamo il resto della divisione per 3 del numero letto finora. Per farlo, ad ogni passo:

- Moltiplichiamo per 2 il resto attuale (poiché leggiamo un bit che rappresenta 2^i)
- Aggiungiamo il valore del bit letto (0 o 1)
- Calcoliamo il resto della divisione per 3 del risultato

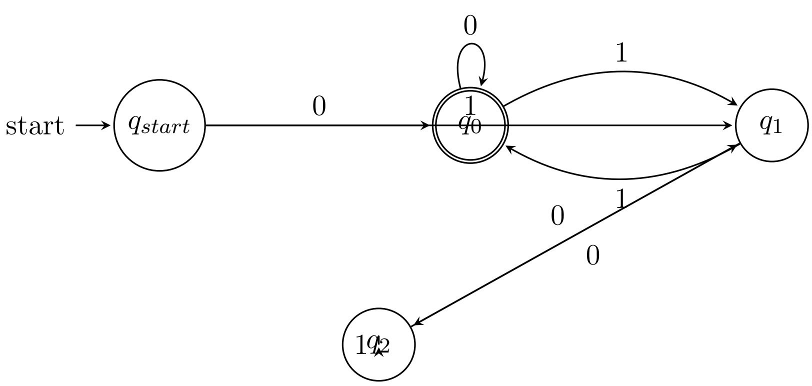
Definiamo gli stati:

- q_0: Resto 0 (stato iniziale)
- q_1: Resto 1
- q_2: Resto 2

Le transizioni saranno determinate dall'algoritmo descritto sopra.



Poiché stiamo considerando la rappresentazione binaria di numeri, lo stato finale sarà q_0 (resto 0). Tuttavia, dobbiamo tenere conto che la stringa vuota non rappresenta alcun numero. Pertanto, definiamo un nuovo stato iniziale q_{start} che non è finale:



Formalmente, il DFA è definito come $M_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_{start}, F)$ dove:

- $Q = \{q_{start}, q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la funzione di transizione:
  - $\delta(q_{start}, 0) = q_0$
  - $\delta(q_{start}, 1) = q_1$
  - $\delta(q_0, 0) = q_0$
  - $\delta(q_0, 1) = q_1$
  - $\delta(q_1, 0) = q_2$
  - $\delta(q_1, 1) = q_0$
  - $\delta(q_2, 0) = q_1$
  - $\delta(q_2, 1) = q_2$
- q_{start} è lo stato iniziale
- $F = \{q_0\}$ è l'insieme degli stati finali

Verifichiamo la correttezza con alcuni esempi:

- Per "11" (3 in decimale): $q_{start} \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_0$ (accettata)
- Per "110" (6 in decimale): $q_{start} \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_0$ (accettata)
- Per "10" (2 in decimale): $q_{start} \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_2$ (rifiutata)

2 NFA ed ϵ-NFA

2.1 Esercizio 1

Consegna:

(a) Considera l'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ e costruisci un automa non deterministico che riconosce il linguaggio di tutte le parole tali che uno dei simboli dell'alfabeto non compare mai:

  - tutte le parole che non contengono a;
  - $+$ tutte le parole che non contengono b;
  - $+$ tutte le parole che non contengono c.

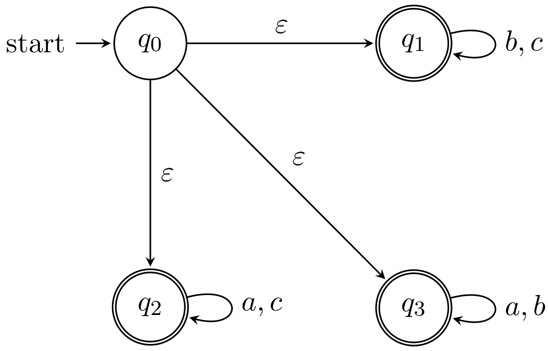
(b) Trasforma l'NFA in DFA usando la costruzione per sottoinsiemi.

Soluzione (a)

Costruiamo un NFA che accetti l'unione dei tre linguaggi:

- $L_a = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ non contiene } a\}$
- $L_b = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ non contiene } b\}$
- $L_c = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ non contiene } c\}$

Per ogni linguaggio, costruiamo un DFA separato, quindi li combineremo in un unico NFA usando transizioni ϵ.



Formalmente, l'NFA è definito come $N_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ è la funzione di transizione:
  - $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_1, q_2, q_3\}$
  - $\delta(q_1, b) = \{q_1\}$
  - $\delta(q_1, c) = \{q_1\}$
  - $\delta(q_2, a) = \{q_2\}$
  - $\delta(q_2, c) = \{q_2\}$
  - $\delta(q_3, a) = \{q_3\}$
  - $\delta(q_3, b) = \{q_3\}$
- q_0 è lo stato iniziale
- $F = \{q_1, q_2, q_3\}$ è l'insieme degli stati finali

Soluzione (b)

Per trasformare l'NFA in DFA, applichiamo la costruzione per sottoinsiemi:
1. Calcoliamo ε-chiusura$(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, che sarà lo stato iniziale del DFA.
2. Calcoliamo le transizioni:

- $\delta'(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, a) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, a)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2, q_3\}) = \{q_2, q_3\}$
- $\delta'(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, b) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, b)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1, q_3\}) = \{q_1, q_3\}$
- $\delta'(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, c) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, c)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2\}$

3. Continuiamo con gli stati nuovi:

- $\delta'(\{q_2, q_3\}, a) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2, q_3\}, a)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2, q_3\}) = \{q_2, q_3\}$
- $\delta'(\{q_2, q_3\}, b) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2, q_3\}, b)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_3\}) = \{q_3\}$
- $\delta'(\{q_2, q_3\}, c) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2, q_3\}, c)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2\}) = \{q_2\}$
- $\delta'(\{q_1, q_3\}, a) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_3\}, a)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_3\}) = \{q_3\}$
- $\delta'(\{q_1, q_3\}, b) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_3\}, b)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1, q_3\}) = \{q_1, q_3\}$
- $\delta'(\{q_1, q_3\}, c) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_3\}, c)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1\}) = \{q_1\}$
- $\delta'(\{q_1, q_2\}, a) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_2\}, a)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2\}) = \{q_2\}$
- $\delta'(\{q_1, q_2\}, b) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_2\}, b)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1\}) = \{q_1\}$
- $\delta'(\{q_1, q_2\}, c) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_2\}, c)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta'(\{q_3\}, a) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_3\}, a)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_3\}) = \{q_3\}$
- $\delta'(\{q_3\}, b) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_3\}, b)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_3\}) = \{q_3\}$
- $\delta'(\{q_3\}, c) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_3\}, c)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\emptyset) = \emptyset$
- $\delta'(\{q_2\}, a) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2\}, a)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2\}) = \{q_2\}$
- $\delta'(\{q_2\}, b) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2\}, b)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\emptyset) = \emptyset$
- $\delta'(\{q_2\}, c) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2\}, c)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2\}) = \{q_2\}$
- $\delta'(\{q_1\}, a) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1\}, a)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\emptyset) = \emptyset$
- $\delta'(\{q_1\}, b) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1\}, b)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1\}) = \{q_1\}$

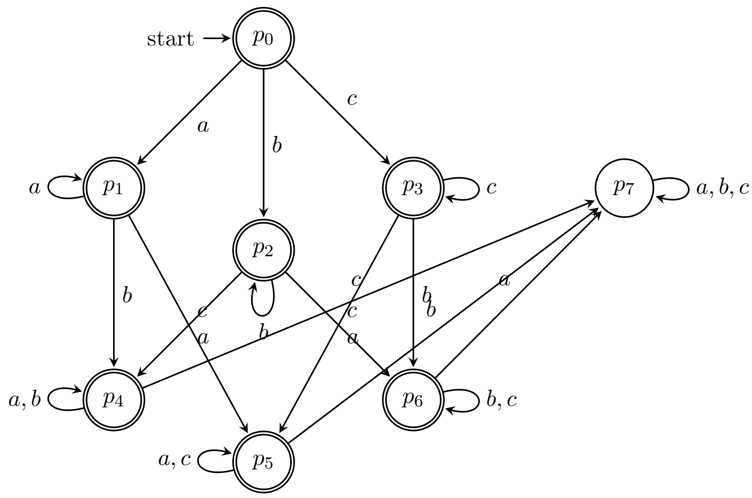
- $\delta'(\{q_1\}, c) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1\}, c)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1\}) = \{q_1\}$
- $\delta'(\emptyset, a) = \emptyset$
- $\delta'(\emptyset, b) = \emptyset$
- $\delta'(\emptyset, c) = \emptyset$

4. Rinominiamo gli stati del DFA:

- $p_0 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $p_1 = \{q_2, q_3\}$
- $p_2 = \{q_1, q_3\}$
- $p_3 = \{q_1, q_2\}$
- $p_4 = \{q_3\}$
- $p_5 = \{q_2\}$
- $p_6 = \{q_1\}$
- $p_7 = \emptyset$

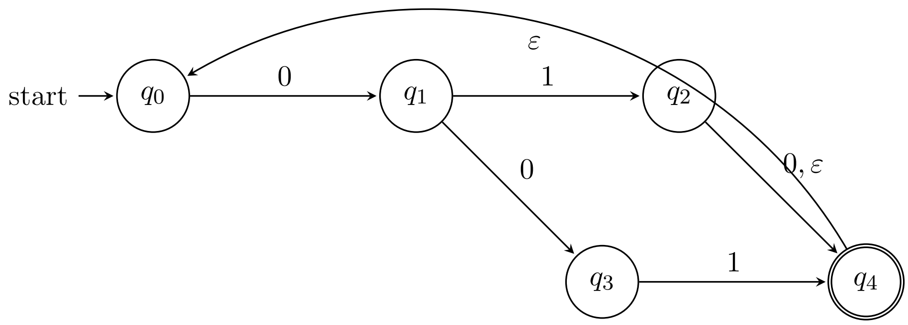
5. Gli stati finali del DFA sono quelli che contengono almeno uno stato finale dell'NFA: $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$.

6. Il DFA risultante è:



2.2 Esercizio 2

Consegna: Dato il seguente ϵ-NFA:



(a) Costruisci la ϵ-chiusura di tutti gli stati dell'automa

(b) Trasforma l'automa in DFA usando la costruzione per sottoinsiemi

Soluzione (a)

Calcoliamo la ϵ-chiusura di ciascuno stato dell'ϵ-NFA:

- ϵ-chiusura$(q_0) = \{q_0\}$
- ϵ-chiusura$(q_1) = \{q_1\}$
- ϵ-chiusura$(q_2) = \{q_2, q_4, q_0\}$ (da q_2 possiamo raggiungere q_4 con ϵ, e da q_4 possiamo raggiungere q_0 con ϵ)
- ϵ-chiusura$(q_3) = \{q_3\}$
- ϵ-chiusura$(q_4) = \{q_4, q_0\}$ (da q_4 possiamo raggiungere q_0 con ϵ)

Soluzione (b)

Per trasformare l'ϵ-NFA in DFA, applichiamo la costruzione per sottoinsiemi:
1. Lo stato iniziale del DFA è ϵ-chiusura$(q_0) = \{q_0\}$.
2. Calcoliamo le transizioni:

- $\delta'(\{q_0\}, 0) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_0\}, 0)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1\}) = \{q_1\}$
- $\delta'(\{q_0\}, 1) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_0\}, 1)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\emptyset) = \emptyset$
- $\delta'(\{q_1\}, 0) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1\}, 0)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_3\}) = \{q_3\}$
- $\delta'(\{q_1\}, 1) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1\}, 1)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2\}) = \{q_2, q_4, q_0\}$

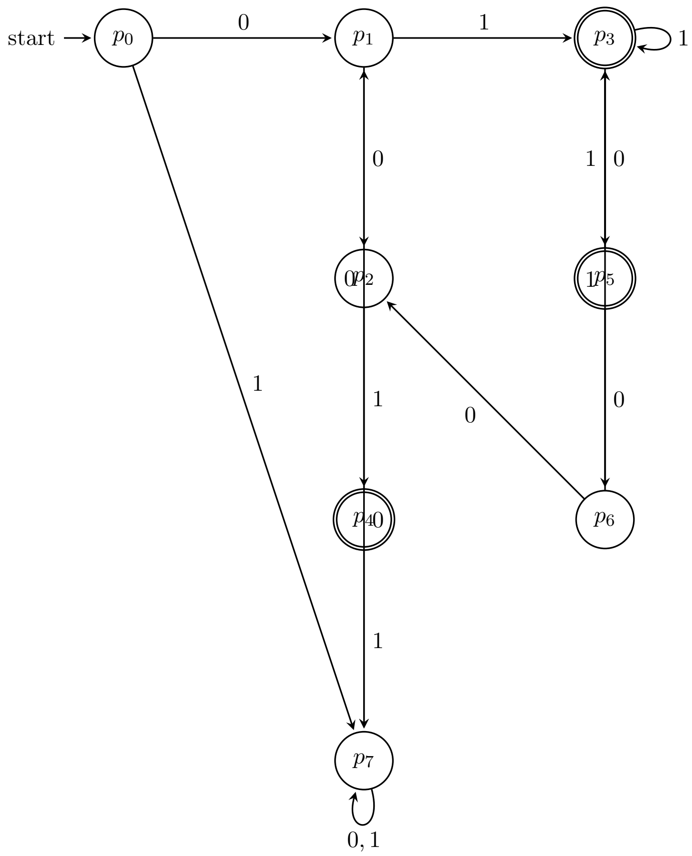
- $\delta'(\{q_3\}, 0) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_3\}, 0)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\emptyset) = \emptyset$
- $\delta'(\{q_3\}, 1) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_3\}, 1)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_4\}) = \{q_4, q_0\}$
- $\delta'(\{q_2, q_4, q_0\}, 0) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2, q_4, q_0\}, 0)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_4, q_1\}) = \{q_4, q_0, q_1\}$
- $\delta'(\{q_2, q_4, q_0\}, 1) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_2, q_4, q_0\}, 1)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2\}) = \{q_2, q_4, q_0\}$
- $\delta'(\{q_4, q_0\}, 0) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_4, q_0\}, 0)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1\}) = \{q_1\}$
- $\delta'(\{q_4, q_0\}, 1) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_4, q_0\}, 1)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\emptyset) = \emptyset$
- $\delta'(\{q_4, q_0, q_1\}, 0) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_4, q_0, q_1\}, 0)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_1, q_3\}) = \{q_1, q_3\}$
- $\delta'(\{q_4, q_0, q_1\}, 1) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_4, q_0, q_1\}, 1)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2\}) = \{q_2, q_4, q_0\}$
- $\delta'(\{q_1, q_3\}, 0) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_3\}, 0)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_3\}) = \{q_3\}$
- $\delta'(\{q_1, q_3\}, 1) = \varepsilon\text{-chiusura}(\delta(\{q_1, q_3\}, 1)) = \varepsilon\text{-chiusura}(\{q_2, q_4\}) = \{q_2, q_4, q_0\}$
- $\delta'(\emptyset, 0) = \emptyset$
- $\delta'(\emptyset, 1) = \emptyset$

3. Rinominiamo gli stati del DFA:

- $p_0 = \{q_0\}$
- $p_1 = \{q_1\}$
- $p_2 = \{q_3\}$
- $p_3 = \{q_2, q_4, q_0\}$
- $p_4 = \{q_4, q_0\}$
- $p_5 = \{q_4, q_0, q_1\}$
- $p_6 = \{q_1, q_3\}$
- $p_7 = \emptyset$ (stato pozzo)

4. Gli stati finali del DFA sono quelli che contengono almeno uno stato finale dell'ϵ-NFA (q_4): $\{p_3, p_4, p_5\}$.

5. Il DFA risultante è:


start
p_0
p_1
p_2
p_3
p_4
p_5
p_6
p_7
0
1
1
0
1
1 0
0
1
0
1
0
1
0
0, 1