

# Automi e Linguaggi Formali - FORTY-TWO - Q&A

Gabriel Rovesti

Anno Accademico 2024-2025

## Esercizio FORTY-TWO

Considera il linguaggio

**Definizione 1.**  $FORTY - TWO = \{(M, w) \mid M \text{ termina la computazione su } w \text{ avendo solo 42 sul nastro}\}$

**Teorema 1.** FORTY-TWO è indecidibile.

*Dimostrazione.* Dimostriamo l'ind decidibilità per riduzione dal problema della cofinalità  $A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ accetta } w\}$ . Costruiamo una funzione di riduzione  $f : \{\langle M, w \rangle\} \mapsto \{\langle M', w \rangle\}$  dove  $M'$  è la TM che su input  $w$ :

1. Simula  $M$  su input  $w$
2. Se  $M$  accetta  $w$ :
  - (a) Cancella tutto il contenuto del nastro
  - (b) Scrive "42" sul nastro
  - (c) Termina nello stato di accettazione
3. Se  $M$  rifiuta  $w$ :
  - (a) Scrive "43" sul nastro
  - (b) Termina nello stato di rifiuto
4. Se  $M$  va in loop su  $w$ , anche  $M'$  va in loop

Restituisce  $\langle M', w \rangle$ .

**Analisi dei casi:**

**Caso 1:** Se  $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ , allora  $M$  accetta  $w$ . Quindi  $M'$  simula  $M$  su  $w$ , che termina in accettazione. Successivamente,  $M'$  cancella il nastro, scrive "42" e termina. Al termine della computazione, il nastro contiene solo "42", perciò  $\langle M', w \rangle \in FORTY-TWO$ .

**Caso 2:** Se  $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$ , allora  $M$  non accetta  $w$  (rifiuta o va in loop).

- Se  $M$  rifiuta  $w$ , allora  $M'$  termina con “43” sul nastro. Poiché “43”  $\neq$  “42”, abbiamo  $\langle M', w \rangle \notin \text{FORTY-TWO}$ .
- Se  $M$  va in loop su  $w$ , allora anche  $M'$  va in loop, quindi non termina. Perciò  $\langle M', w \rangle \notin \text{FORTY-TWO}$ .

Quindi abbiamo:

$$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff \langle M', w \rangle \in \text{FORTY-TWO}$$

Poiché  $A_{\text{TM}}$  è indecidibile e si riduce a FORTY-TWO, anche FORTY-TWO è indecidibile.  $\square$

## Osservazione

La chiave di questa dimostrazione è il controllo preciso del contenuto finale del nastro. La costruzione di  $M'$  garantisce che:

- Quando  $M$  accetta, il nastro viene deliberatamente preparato per contenere esattamente “42”
- Quando  $M$  rifiuta, il nastro contiene intenzionalmente qualcosa di diverso da “42”
- Quando  $M$  non termina, anche  $M'$  non termina, non soddisfacendo la condizione di terminazione

Questa tecnica di “manipolazione del nastro finale” è comune nelle riduzioni che coinvolgono proprietà specifiche del contenuto del nastro al termine della computazione.

La scelta di “43” come valore alternativo è arbitraria; qualsiasi stringa diversa da “42” funzionerebbe ugualmente bene per la dimostrazione.