

Automi e Linguaggi Formali - Esercizio

Gabriel Rovesti

Anno Accademico 2024-2025

Esercizio Linguaggio con Pivot Centrale

Sia V un simbolo specifico che funge da pivot centrale. Definiamo il linguaggio $L = \{w_1 V w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, R(L) = V\}$, dove $R(L)$ rappresenta il simbolo centrale (pivot) del linguaggio.

Dimostrare che L è un linguaggio context-free.

Soluzione

Teorema 1. *Il linguaggio $L = \{w_1 V w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, R(L) = V\}$, dove V è un simbolo specifico che funge da pivot centrale, è un linguaggio context-free.*

Proof. Per dimostrare che L è un linguaggio context-free, costruiremo una grammatica context-free $G = (V_G, \Sigma \cup \{V\}, R, S)$ che genera esattamente L .

Definiamo G come segue:

- $V_G = \{S, A, B\}$ sono i simboli non terminali
- $\Sigma \cup \{V\}$ è l'alfabeto, dove V è il simbolo pivot
- S è il simbolo iniziale
- R contiene le seguenti regole di produzione:
 - $S \rightarrow AVB$
 - $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$ (per ogni $a, b \in \Sigma$)
 - $B \rightarrow Bc \mid Bd \mid \varepsilon$ (per ogni $c, d \in \Sigma$)

Analizziamo cosa genera questa grammatica:

La regola $S \rightarrow AVB$ stabilisce la struttura base: una sequenza generata da A , seguita dal pivot V , seguita da una sequenza generata da B .

Le regole per A permettono di generare qualsiasi stringa in Σ^* a sinistra del pivot V . Infatti, A può derivare qualsiasi stringa $w_1 \in \Sigma^*$ attraverso le regole $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$.

Analogamente, le regole per B permettono di generare qualsiasi stringa in Σ^* a destra del pivot V . La variabile B può derivare qualsiasi stringa $w_2 \in \Sigma^*$ attraverso le regole $B \rightarrow Bc \mid Bd \mid \varepsilon$.

Così, la grammatica G genera esattamente le stringhe della forma $w_1 V w_2$ dove $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ e V è il simbolo pivot. Questo corrisponde precisamente alla definizione del linguaggio L .

Dato che abbiamo costruito una grammatica context-free che genera esattamente L , concludiamo che L è un linguaggio context-free. \square

Osservazione 1. È interessante notare che la presenza del pivot centrale V non influisce sulla natura context-free del linguaggio. In effetti, il linguaggio L può essere visto come la concatenazione di tre componenti: il linguaggio Σ^* (che è regolare), il simbolo V , e nuovamente il linguaggio Σ^* . Poiché la classe dei linguaggi context-free è chiusa rispetto all'operazione di concatenazione, e i linguaggi regolari sono un sottoinsieme dei linguaggi context-free, L è necessariamente context-free.

Conversione in Forma Normale di Chomsky: La grammatica G costruita non è direttamente in Forma Normale di Chomsky, ma può essere convertita seguendo i passaggi standard:

1. Eliminare le regole $A \rightarrow \varepsilon$ e $B \rightarrow \varepsilon$ introducendo nuove produzioni
2. Sostituire la regola $S \rightarrow AVB$ con regole in forma binaria
3. Introdurre nuovi non-terminali per ogni simbolo terminale nelle produzioni

Questo processo di conversione conferma che L è generabile da una grammatica in Forma Normale di Chomsky, rafforzando ulteriormente la dimostrazione che L è un linguaggio context-free.