

Soluzioni Esercizi Automi

Gabriel Rovesti

June 2024

1 Classe NP

Esercizio (A)

Dimostrazione che 3-Color è un problema in NP

Il problema 3-Color richiede di determinare se è possibile colorare i vertici di un grafo non orientato usando esattamente tre colori, in modo tale che nessuna coppia di vertici adiacenti abbia lo stesso colore. Per dimostrare che 3-Color è in NP, procediamo come segue:

1. **Certificato per 3-Color:** Un certificato per una soluzione del problema 3-Color è una funzione di colorazione $c : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$, dove V è l'insieme dei vertici del grafo, che assegna a ogni vertice uno dei tre colori.
2. **Verificatore polinomiale per 3-Color:** Per verificare se un certificato c è valido, dobbiamo controllare due condizioni:
 - (a) Ogni vertice nel grafo deve essere colorato con uno dei tre colori, il che si verifica in tempo $O(n)$, dove n è il numero di vertici.
 - (b) Per ogni arco (u, v) nel grafo, i vertici u e v devono avere colori diversi, $c(u) \neq c(v)$. Questa verifica si può effettuare in tempo $O(m)$, dove m è il numero di archi nel grafo.

Il verificatore deve quindi esaminare ogni vertice e ogni arco una sola volta, risultando in un tempo complessivo polinomiale $O(n + m)$.

Questa procedura conferma che il problema 3-Color è in NP poiché esiste un verificatore polinomiale che può confermare rapidamente la correttezza di un certificato proposto.

Esercizio (B)

Dimostrazione che SubsetSum è un problema in NP

Il problema SubsetSum chiede se, dato un insieme S di numeri interi e un valore obiettivo t , esiste un sottoinsieme $S' \subseteq S$ tale che la somma dei numeri in S' sia esattamente t . Per dimostrare che SubsetSum è in NP, procediamo come segue:

1. **Certificato per SubsetSum:** Un certificato per una soluzione del problema SubsetSum è un sottoinsieme $S' \subseteq S$ dei numeri che si presume sommino a t .
2. **Verificatore polinomiale per SubsetSum:** Il verificatore per un certificato S' opera nel modo seguente:
 - (a) Calcolare la somma degli elementi di S' . Questo processo richiede tempo $O(k)$, dove k è il numero di elementi in S' .
 - (b) Confrontare questa somma con t . Se la somma è uguale a t , allora il certificato è valido.

Questa verifica è effettuabile in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'input, confermando che SubsetSum è in NP poiché possiamo rapidamente verificare la validità di un certificato proposto.