Dimostrare che un linguaggio non è regolare - Soluzioni

Gabriel Rovesti

Introduzione

In questa dispensa presentiamo le dimostrazioni, tramite *Pumping Lemma* per i linguaggi regolari, che i quattro linguaggi proposti non sono regolari. Per ciascun esercizio, la struttura della prova segue lo stesso schema:

1. Si **suppone per assurdo** che il linguaggio sia regolare.
2. Esiste, dunque, un *pumping length* p secondo il lemma.
3. Si **scelgono** (in modo strategico) stringhe di lunghezza $\geq p$.
4. Si mostra che *per ogni* suddivisione xyz (con $|xy| \leq p$ e $|y| > 0$) si può scegliere un certo i tale che $xy^iz \notin L$.
5. Nasce la **contraddizione**: il Pumping Lemma non si può soddisfare, quindi il linguaggio non è regolare.

Esercizio 1

$$L = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid \text{il numero di a è maggiore del numero di b}\}.$$

Dimostrazione formale

1. **Assunzione**: Supponiamo, per assurdo, che L sia regolare.
2. Per il Pumping Lemma, esiste $p > 0$ (pumping length).
3. Consideriamo la stringa
   $$w = a^{p+1}\, b^p$$
   che appartiene a L (poiché ci sono $p+1$ a e p b, quindi la quantità di a è strettamente maggiore di quella di b). Inoltre $|w| = (p + 1) + p = 2p + 1 \geq p$.
4. Per dimostrare la contraddizione, prendiamo *qualunque* suddivisione $w = xyz$ con $|xy| \leq p$ e $|y| > 0$.
   - In w, i primi p simboli sono tutti a. Poiché $|xy| \leq p$, la parte y cade interamente nella sezione di `a`.

- Di conseguenza, $y = a^q$ per qualche $q > 0$.

5. **Scelta di** i: Poniamo $i = 0$, cioè "rimuoviamo" y. La stringa risultante è

$$xy^0z = xz = a^{p+1-q}\, b^p.$$

Ora, se $q \geq 1$, allora $(p+1-q) \leq p$. Può capitare perfino $(p+1-q) < p$ se $q > 1$. In ogni caso, non abbiamo più a *strettamente più numerose* di b, e se $q = 1$, i numeri di a e b sono uguali, oppure se $q > 1$, le a possono diventare addirittura meno delle b. In tutte le situazioni, $\#a(xz) \leq \#b(xz)$, quindi $xz \notin L$.

6. **Contraddizione**: La condizione (3) del Pumping Lemma (tutti xy^iz in L) fallisce. Quindi L non è regolare.

Esercizio 2

$$L = \{\, a^l b^m a^n \mid l + m = n\}.$$

Dimostrazione formale

1. **Assunzione**: Supponiamo per assurdo che L sia regolare.

2. Esiste un pumping length $p > 0$.

3. **Stringa**: Prendiamo

$$w = a^p\, b^0\, a^p = a^p a^p = a^{2p}.$$

In questa stringa, $l = p$, $m = 0$, $n = p$, dunque $l + m = p + 0 = p = n$, quindi $w \in L$. Inoltre $|w| = 2p \geq p$.

4. **Suddivisione**: Sia $w = xyz$ con $|xy| \leq p$, $|y| > 0$. Poiché i primi p simboli sono tutti a, y è *un blocco di a*, diciamo $y = a^q$.

5. **Scelta di** i: Mettiamo $i = 0$ (rimozione di y). Allora

$$xy^0z = a^{2p-q}.$$

Ora, in questa nuova stringa, la parte iniziale e finale di a non mantengono più la relazione $l + m = n$. Infatti se consideriamo la forma generica $a^{l'}b^{m'}a^{n'}$, in xy^0z non ci sono b (poiché $m = 0$ inizialmente), e la lunghezza totale di a risulta $2p - q$. Se volessimo interpretare $l' + m' = n'$, e $m' = 0$, avremmo bisogno che $l' = n'$. Ma qui $l' + n' < 2p$ a seconda di come interpretiamo la separazione. In ogni caso è evidente che la condizione $l' + m' = n'$ non regge più se $l' + n' \neq 2p$ correttamente. Quindi $xy^0z \notin L$.

6. **Contraddizione**: Concludiamo che L non è regolare.

Esercizio 3

$$L = \{\, a^l b^m a^n \mid l + m \equiv n \pmod 3\}.$$

Dimostrazione formale

1. Supponiamo, per assurdo, che L sia regolare.
2. Esiste un pumping length $p > 0$.
3. **Stringa**: Scegliamo
$$w = a^p\, b^0\, a^p = a^{2p}.$$
In questa stringa, $l = p$, $m = 0$, $n = p$. Poiché $p + 0 - p = 0$, $(p+m) - n = 0 \equiv 0 \pmod 3$. Quindi $w \in L$ e $|w| = 2p \geq p$.
4. **Suddivisione**: Sia $w = xyz$ con $|xy| \leq p$, $|y| > 0$. Di nuovo, y contiene solo a.
5. **Pompaggio**: Scegliamo $i = 0$. Allora
$$xy^0z = a^{\,2p-q}.$$
Ora, se definissimo l' e n' come i numeri di a nella parte iniziale e finale (non necessariamente uguali), quasi certamente $l' + m' - n' \neq 0 \pmod 3$. Se rimuoviamo un certo blocco q, la lunghezza di a totali non soddisfa più la congruenza mod 3 prestabilita. In sostanza, $xy^0z \notin L$.
6. Contraddizione. Dunque L non è regolare.

Esercizio 4

$$L = \{\, 0^{n^2} \mid n \geq 0\}.$$

Dimostrazione formale

1. Supponiamo, per assurdo, che L sia regolare.
2. Esiste un pumping length $p > 0$.
3. **Stringa**: consideriamo $w = 0^{\,q^2}$ con $q \geq p$. Così $|w| = q^2 \geq p$ e $w \in L$.
4. **Suddivisione**: $w = xyz$ con $|xy| \leq p$ e $|y| > 0$. Allora y è un blocco di 0, e $|y| \leq p$.
5. **Pompaggio**: Scegliamo $i = 2$ (per esempio, raddoppiamo la parte y). La nuova stringa è
$$xy^2z = 0^{q^2+|y|}.$$
Ora, la lunghezza $q^2+|y|$ è strettamente fra q^2 e $(q+1)^2$, infatti $(q+1)^2 = q^2+2q+1$. Siccome $|y| \leq p \leq q$, la differenza fra $q^2 + |y|$ e $(q+1)^2$ è almeno $2q + 1 - |y| > 0$ (fino a $2q$ circa). Comunque, la lunghezza $q^2 + |y|$ non coincide con nessun quadrato intero, *quindi* la stringa xy^2z non ha forma 0^{n^2} per qualche n, ed esce da L.
6. Contraddizione. L non è regolare.

Conclusione

In ciascuno di questi esercizi, la prova per assurdo rivela che nessuna suddivisione nel Pumping Lemma può lasciare il linguaggio invariato sotto “pompaggio”: di conseguenza, i linguaggi non rispettano la proprietà fondamentale dei linguaggi regolari, e pertanto non sono regolari.