Argomenti svolti nel periodo:

- Esercizi svolti su linguaggi non regolari e Pumping Lemma

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ non è palindroma}\}.$$

Una parola è *palindroma* se rimane uguale letta da sinistra a destra e da destra a sinistra. Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Consideriamo il complementare del linguaggio L_2, ossia il linguaggio

$$\overline{L_2} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ è palindroma}\}.$$

Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio $\overline{L_2}$ non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k 1 0^k$, che è di lunghezza maggiore di k ed è palindroma;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}10^k$. Consideriamo l'esponente $i = 2$: la parola xy^2z ha la forma

$$xy^2z = 0^q 0^{2p} 0^{k-q-p} 1 0^k = 0^{k+p} 1 0^k$$

  La parola iterata xy^2z non appartiene ad $\overline{L_2}$ perché non è palindroma: se la rovesciamo diventa la parola $0^k 1 0^{k+p}$ che è una parola diversa perché $p > 0$.

Abbiamo trovato un assurdo quindi $\overline{L_2}$ non può essere regolare.

Siccome i linguaggi regolari sono chiusi per complementazione, nemmeno L_2 può essere regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{uwu \mid u, w \text{ sono stringhe di 0 e 1 tali che } |u| = |w|\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 1^k 0^k 1^k$, che è di lunghezza maggiore di k ed appartiene ad L_2 perché il primo terzo della parola è uguale all'ultimo terzo;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 1. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 1^q$ e $y = 1^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 1^{k-q-p}0^k 1^k$. Consideriamo l'esponente $i = 3$: la parola xy^2z ha la forma

$$xy^2z = xz = 1^q 1^{2p} 1^{k-q-p} 0^k 1^k = 1^{k+p} 0^k 1^k$$

  Poiché $p > 0$, la sequenza iniziale di 1 è più lunga della sequenza finale di 1, e quindi la parola iterata xy^2z non appartiene ad L_2 perché il primo terzo della parola è fatto solamente da 1 mentre l'ultimo terzo include anche un certo numero di 0.

Abbiamo trovato un assurdo quindi L_2 non può essere regolare.

2. (12 punti) Se w è una stringa di 0 e 1, allora $\overline{w}$ è una stringa formata da w sostituendo gli 0 con 1 e viceversa; per esempio $\overline{011} = 100$. Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w\overline{w} \mid w \in \{0,1\}^*\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Prima di procedere con la soluzione ci è utile osservare che data una qualsiasi parola w, la parola $\overline{w}$ avrà sempre un numero di 0 uguale al numero di 1 di w, ed un numero di 1 uguale al numero di 0 di w. Di conseguenza, ogni parola nella forma $w\overline{w}$ avrà un numero di 0 uguale al numero di 1.

Ora possiamo usare il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k1^k$, che appartiene ad L_2 perché $\overline{0^k} = 1^k$, ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 0. Inoltre, siccome $y \neq \emptyset$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}1^k$. Consideriamo l'esponente $i = 2$: la parola xy^2z ha la forma

$$xy^2z = 0^q0^{2p}0^{k-q-p}1^k = 0^{k+p}1^k$$

  Poiché $p > 0$, la parola iterata xy^2z contiene più 0 che 1 e di conseguenza non può essere scritta nella forma $w\overline{w}$.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{1^nw \mid w \text{ è una stringa di 0 e 1 di lunghezza } n\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 1^k0^k$, che appartiene ad L_2 ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 1. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 1^q$ e $y = 1^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 1^{k-q-p}0^k$. Consideriamo l'esponente $i = 0$: la parola xy^0z ha la forma

$$xy^0z = xz = 1^q1^{k-q-p}0^k = 1^{k-p}0^k$$

  Poiché $p > 0$, la sequenza iniziale di 1 è più corta della sequenza finale di 0, e quindi la parola iterata xy^0z non può essere scritta nella forma 1^nw con $n = |w|$ perché non contiene abbastanza 1 nella parte iniziale.

Sarebbe possibile dimostrare invece che L è regolare?

1. (12 punti) Se L è un linguaggio e a un simbolo, allora L/a, il *quoziente* di L e a, è l'insieme delle stringhe

$$L/a = \{w \mid wa \in L\}.$$

Per esempio, se $L = \{a, aab, baa\}$, allora $L/a = \{\varepsilon, ba\}$. Dimostra che se L è regolare allora anche L/a è regolare.

Soluzione: Se L è un linguaggio regolare, allora sappiamo che esiste un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ che riconosce L. Data una parola $wa \in L$ dove $w = w_1 \dots w_n$, la computazione di A su aw è una sequenza di stati $r_0 r_1 \dots r_{n+1}$ tali che:

- $r_0 = q_0$;
- $\delta(r_{i-1}, w_i) = r_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- $\delta(r_n, a) = r_{n+1}$;
- $r_{n+1} \in F$.

Data questa osservazione possiamo costruire un automa A' che accetta il linguaggio L/a cambiando gli stati finali di A. Formalmente, $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$ dove Q, Σ, δ e q_0 sono gli stessi di A e l'insieme degli stati finali contiene tutti gli stati che raggiungono uno stato finale di A dopo aver consumato a:

$$F' = \{q \mid \delta(q, a) \in F\}.$$

In questo modo abbiamo che per ogni $wa \in L$ la sequenza di stati $r_0 \dots r_n$ descritta sopra è una computazione di A' che accetta w (perché r_n diventa uno stato finale di A'), ed abbiamo dimostrato che se $wa \in L$ allora $w \in L(A')$. Viceversa, se $w \in L(A')$ allora esiste una computazione $s_0 \dots s_n$ di A' tale che:

- $s_0 = q_0$;
- $\delta(s_{i-1}, w_i) = s_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- $s_n \in F'$.

Di conseguenza, $s_{n+1} = \delta(s_n, a) \in F$ e la sequenza di stati $s_1 \dots s_{n+1}$ è una computazione di A su wa, ed abbiamo dimostrato che se $w \in L(A')$ allora $wa \in L$. Quindi possiamo concludere che il linguaggio di A' è precisamente L/a, come richiesto.

1. (12 punti) Data una stringa w di 0 e 1, il *flip* di w si ottiene cambiando tutti gli 0 in w con 1 e tutti gli 1 in w con 0. Dato un linguaggio L, il flip di L è il linguaggio

$$\mathit{flip}(L) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ il flip di } w \text{ appartiene ad } L\}.$$

Dimostra che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione di flip.

Soluzione: Se L è un linguaggio regolare, allora sappiamo che esiste un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ che riconosce L. Costruiamo un DFA $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ che accetta il linguaggio $\mathit{flip}(L)$ come segue.

- $Q' = Q$. L'insieme degli stati rimane lo stesso.
- L'alfabeto Σ rimane lo stesso.
- Per ogni stato $q \in Q$, $\delta'(q, 0) = \delta(q, 1)$ e $\delta'(q, 1) = \delta(q, 0)$. La funzione di transizione scambia gli 0 con 1 e gli 1 con 0.
- $q_0' = q_0$. Lo stato iniziale non cambia.
- $F' = F$. Gli stati finali rimangono invariati.

Per dimostrare che A' riconosce il linguaggio $\mathit{flip}(L)$, dobbiamo considerare due casi.

- Se $w \in \mathit{flip}(L)$, allora sappiamo che il flip di w appartiene ad L. Chiamiamo $\overline{w}$ il flip di w. Siccome A riconosce L, allora esiste una computazione di A che accetta $\overline{w}$:

$$s_0 \xrightarrow{\overline{w}_1} s_1 \xrightarrow{\overline{w}_2} \dots \xrightarrow{\overline{w}_n} s_n$$

  con $s_0 = q_0$ e $s_n \in F$. Se scambiamo gli zeri e gli uni nella computazione, otteniamo una computazione accettante per A' sulla parola w. Di conseguenza, abbiamo dimostrato che $w \in L(A')$.

- Viceversa, se w è accettata dal nuovo automa A', allora esiste una computazione accettante che ha la forma

$$s_0 \xrightarrow{w_1} s_1 \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_n} s_n$$

  con $s_0 = q_0$, $s_n \in F'$. Se scambiamo gli zeri e gli uni nella computazione, otteniamo una computazione accettante per A sul flip di w. Di conseguenza, il flip di w appartiene ad L e abbiamo dimostrato che $w \in \mathit{flip}(L)$.

Ritornando ad altri esempi:

(c) Assume that $A_3 = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Choose s to be the string a^{2^p}. Because s is a member of A_3 and s is longer than p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, satisfying the three conditions of the pumping lemma.

The third condition tells us that $|xy| \leq p$. Furthermore, $p < 2^p$ and so $|y| < 2^p$. Therefore, $|xyyz| = |xyz| + |y| < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$. The second condition requires $|y| > 0$ so $2^p < |xyyz| < 2^{p+1}$. The length of $xyyz$ cannot be a power of 2. Hence $xyyz$ is not a member of A_3, a contradiction. Therefore, A_3 is not regular.

Esercizio 20

Dimostrare che il linguaggio $L = \{0^i 1^j, j = i^2\}$ non è CFL utilizzando il pumping lemma. Utilizziamo il "gioco tra due avversari":

- P_2 fissa n
- P_1 prende una stringa in L di lunghezza almeno n: $z = 0^n 1^{n^2}$
- P_2 scompone la stringa in $z = uvwxy$, dove $|vwx| \leq n$ e $vx \neq \epsilon$
- Per ogni possibile scomposizione P_1 deve trovare un k per cui $uv^k wx^k y \notin L$

  1. vwx si trova nella prima parte della stringa composta da soli 0. Per $k = 0$, il numero di 0 diminuisce ($vx \neq \epsilon$) ad un valore minore di n mentre il numero di 1 rimane invariato. Quindi $uwy \notin L$.
  2. vwx si trova nella seconda parte della stringa composta da soli 1. Si dimostra per $k = 0$ in modo similare.
  3. Se v o x hanno sia 0 che 1, allora per $k = 2$ la struttura della stringa non è più del tipo 0^*1^*, quindi $uv^2wx^2y \notin L$
  4. L'ultimo caso prende in considerazione la possibilità che v consista di soli 0, e x di soli 1 (e siano entrambe diverse dalla stringa vuota). Per un generico k sia ha che il numero di 0 è $n + (k-1)|v|$ e il numero di 1 è $n^2 + (k-1)|x|$. Per avere una stringa che sia in L deve valere:

     $$(n+(k-1)|v|)^2 = n^2+(k-1)|x| \Rightarrow 2n(k-1)|v|+(k-1)^2|v|^2 = (k-1)|x|$$

     Ma a sinistra abbiamo un termine che cresce in modo quadratico in k, mentre a destra cresce in modo lineare, per cui l'uguaglianza non è mai possibile.

  Avendo individuato un k per cui $uv^k wx^k y \notin L$ in corrispondenza di ogni possibile partizione della stringa z il giocatore P_1 dimostra che L non è libero dal contesto.

Dimostro che `L` non è regolare.

$L = \{0^n \mid n$ è un cubo perfetto$\}$ Sia `n` la lunghezza del PL.

Prendo `w` $= 0^{n^3}$, che è sicuramente un cubo ∀ `n` e $|w| \geq$ `n`.

∀ split $w = xyz$ per cui vale:

- $|xy| \leq$ `n`;
- `y` $\neq \varepsilon$

Allora `y` contiene `p` zeri, dove $1 \leq p \leq n$. Prendo un `k` $= 2$. Sia `w'` $= xy^kz$.

Dunque `|w'|` $= n^3 - p + 2p = n^3 + p$.

Quindi ripetto a `w` la parola `w'` avrà al più `n` zeri in più. Sono sufficienti per arrivare ad un cubo perfetto? Il cubo successivo a n^3 è $(n+1)^3$.

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 2n + 2$.

Quindi sarebbe stato necessario incrementare il numero di zeri di $3n^2+2n+2$ solo per arrivare al cubo successivo, invece `w'` è cresciuta di al più `n` zeri. Quindi `w'` $\notin L$.