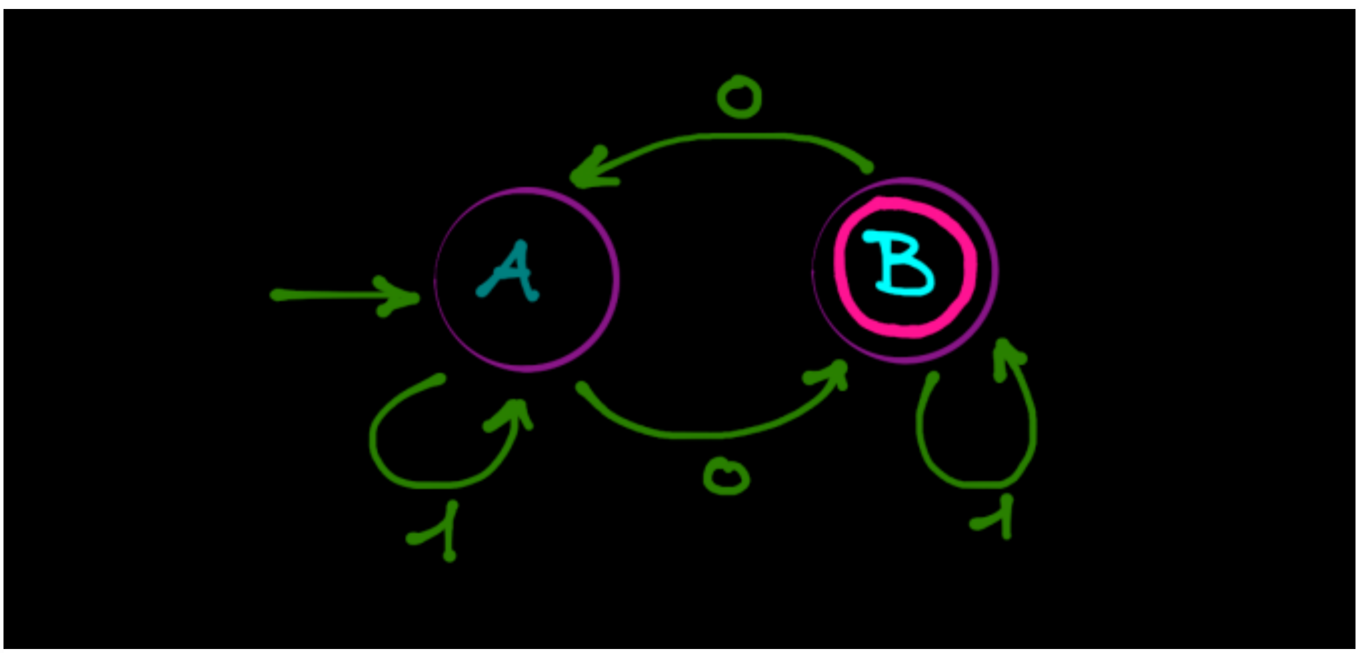
IFIF

APPUNTI DI INFORMATICA, NEWS E ROBE NERD



Pumping Lemma

di Magnifico Amministratore il 18 Ottobre 2019 in Programmazione

Introduzione

In informatica teorica il Pumping Lemma serve per dimostrare che un **linguaggio non è regolare**.
La dimostrazione avviene tramite contraddizione, in particolare si sfrutta una caratteristica che possiedono SOLO i linguaggi regolari, per dimostrare che un linguaggio non è regolare. Attenzione, non possiamo però utilizzarla per dimostrare che un linguaggio è regolare.

Che cosa ci dice il Pumping Lemma?

L'enunciato è il seguente:

Se un linguaggio L è regolare allora esiste un valore $p \in \mathbb{N}^+$ (chiamato pumping length) tale che tutte le stringhe w di L con lunghezza superiore o uguale a n possono essere suddivise in tre parti (w = xyz) tali che:

1. $|xy| \leq p$
2. $y \neq \varepsilon$
3. $\forall i \in \mathbb{N} . xy^iz \in L$

Dove **ε** rappresenta la **stringa vuota**.
In parole significa che possiamo prendere una stringa w e dividerla in tre parti (xyz) in modo tale che, la parte di stringa xy abbia una lunghezza minore o uguale di p e che y non sia una stringa vuota, allora xy^iz appartiene al linguaggio.

Riassumiamo adesso questo enunciato con una formula logica

$(\exists p \in \mathbb{N} . (\forall w \in L . |w| \geq p \Rightarrow (\exists x,y,z . w = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \in \mathbb{N} . xy^iz \in L))))$

Questa formula indica che un linguaggio regolare ha quella determinata caratteristica, ma noi con il pumping lemma dobbiamo dimostrare la negazione di tale formula, dato che serve per far vedere che un linguaggio non è regolare.
Quindi facendo un esercizio, dobbiamo verificare sì, la verità di quella formula, ma **negata**.
La possiamo ottenere attraverso una dimostrazione di logica del primo ordine, che non tratteremo in questo articolo. La formula diventa allora così:

$\neg(\exists p \in \mathbb{N} . (\forall w \in L . |w| \geq p \Rightarrow (\exists x,y,z . w = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge y \neq \varepsilon \wedge (\forall i \in \mathbb{N} . xy^iz \in L))))$

≡ {dimostrazioni}

$(\forall p \in \mathbb{N}\ .\ (\exists w \in L\ .\ (|w| \geq p \land (\forall x,y,z\ .\ (w = xyz \land |xy| \leq p \land y \neq \varepsilon) \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N}\ .\ xy^i z \notin L)))))$

Questo serve per dimostrare formalmente la correttezza dei passaggi che seguiamo per dimostrare che un linguaggio non è regolare partendo dalla caratteristica dei linguaggi regolari.

Esempio Con Linguaggio Regolare

Prima di proseguire con l'appicazione del PL, vediamo un esempio di linguaggio regolare e verifichiamo se possiede la caratteristica di cui abbiamo parlato. Consideriamo l'alfabeto Λ e il linguaggio L definiti nel seguente modo:

$\Lambda = \{a, b\}$
$L = \{a^n b^m \mid n, m > 0\}$

prendiamo ad esempio p = 3, dove questo n è il valore definito dall'enunciato, non quello del linguaggio L per intendersi.
Consideriamo allora la stringa w con lunghezza, per esempio, 4.

Quindi $|w| = 4$

una stringa generata potrebbe essere la seguente:
w = aaab

ricordandoci delle proprietà, dividiamo tale stringa in tre parti ponendo
esempio x=aa, y=a, z=b.
Adesso noteremo che a variare di *i* in y^i, la stringa ottenuta apparterrà sempre al linguaggio *L*:

$xy^0z = aab \in L$
$xy^1z = aaab \in L$
$xy^2z = aaaab \in L$
$xy^3z = aaaaab \in L$

Abbiamo adesso verificato tutti e tre i punti del pumping lemma su un linguaggio regolare, quindi se abbiamo un linguaggio che non è regolare il pumping lemma non viene soddisfatto, in particolare durante l'analisi noteremo che **esisterà almeno un valore di *i* che genererà un stringa che non appartiene al linguaggio**, mentre il pumping lemma chiede per ogni *i* (terzo punto).

Non possiamo però dimostrare che un linguaggio non è regolare semplicemente con degli