

Tutorato di Automi e Linguaggi Formali

Homework 5: Grammatiche Context-Free e Forma Normale di Chomsky

Gabriel Rovesti

Corso di Laurea in Informatica - Università degli Studi di Padova

Tutorato 5 - 14-04-2025

1 Grammatiche Context-Free (CFG)

Esercizio 1. Scrivere una grammatica context-free per ciascuno dei seguenti linguaggi:

- a) $L_1 = \{a^n b^m c^n \mid n, m \geq 1\}$
- b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contiene lo stesso numero di } a \text{ e } b\}$
- c) $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oppure } j = k, \text{ dove } i, j, k \geq 1\}$
- d) $L_4 = \{a^n b^m \mid n \neq m, \text{ dove } n, m \geq 1\}$
- e) $L_5 = \{w c w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$, dove w^R è il reverse di w

Nota: Per ogni linguaggio, spiegare brevemente la logica dietro la grammatica proposta.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti grammatiche, determinare il linguaggio generato e dimostrare formalmente che la grammatica genera quel linguaggio:

- a) G_1 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aB \mid bA \\ A &\rightarrow a \mid aS \mid bAA \\ B &\rightarrow b \mid bS \mid aBB \end{aligned}$$

- b) G_2 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow Bb \mid \varepsilon \end{aligned}$$

c) G_3 :

$$S \rightarrow aSb \mid T$$

$$T \rightarrow aTb \mid \varepsilon$$

Suggerimento: Utilizzare l'induzione sulla lunghezza della derivazione per dimostrare l'inclusione in entrambe le direzioni.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti operazioni su linguaggi:

$$\text{MIRROR}(L) = \{w^R \mid w \in L\}$$

$$\text{CENTER}(L) = \{xay \mid xy \in L, a \in \Sigma\}$$

- Dimostrare che se L è un linguaggio context-free, anche $\text{MIRROR}(L)$ è context-free. Fornire un algoritmo che, data una grammatica G per L , costruisce una grammatica G' per $\text{MIRROR}(L)$.
- Determinare se $\text{CENTER}(L)$ è sempre context-free quando L è context-free. Se sì, fornire un algoritmo per la costruzione della grammatica. Se no, fornire un controesempio.
- Sia $L_{\text{pair}} = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Dimostrare che L_{pair} non è context-free utilizzando il pumping lemma per linguaggi context-free.

2 Ambiguità nelle Grammatiche Context-Free

Esercizio 4.

- Dimostrare che la seguente grammatica è ambigua, trovando una stringa che ammette due diversi alberi di derivazione:

$$S \rightarrow S + S \mid S * S \mid (S) \mid a$$

- Trasformare la grammatica precedente in una grammatica non ambigua che rispetchi le usuali regole di precedenza degli operatori aritmetici (dove $*$ ha precedenza su $+$).
- Fornire una grammatica non ambigua per il linguaggio delle espressioni condizionali nella forma `if E then S else S`, dove:
 - E rappresenta una condizione
 - S rappresenta uno statement
 - Si deve evitare l'ambiguità del "dangling else"

Esercizio 5. Un linguaggio si dice inerentemente ambiguo se non esiste alcuna grammatica non ambigua che lo genera.

- Dimostrare che il linguaggio $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ o } j = k, \text{ dove } i, j, k \geq 1\}$ è inerentemente ambiguo.
- Sia $L = \{a^n b^m c^p \mid n = m \text{ o } m = p, \text{ dove } n, m, p \geq 0\}$. Discutere se L è inerentemente ambiguo.

3 Forma Normale di Chomsky

Esercizio 6. Convertire le seguenti grammatiche in Forma Normale di Chomsky, mostrando tutti i passaggi della trasformazione:

a) G_1 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid a \\ A &\rightarrow BA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

b) G_2 :

$$S \rightarrow aSb \mid ab$$

c) G_3 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid C \\ A &\rightarrow aAb \mid ab \\ B &\rightarrow cB \mid c \\ C &\rightarrow aCa \mid a \end{aligned}$$

Ricordare i passaggi: (1) Aggiungere un nuovo simbolo iniziale, (2) Eliminare le produzioni ε , (3) Eliminare le produzioni unitarie, (4) Convertire le restanti produzioni nella forma corretta.

Esercizio 7. Sia data la seguente grammatica context-free:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABA \mid BSB \\ A &\rightarrow a \mid aA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid bB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- a) Determinare il linguaggio generato da G .
- b) Eliminare le produzioni ε dalla grammatica.
- c) Eliminare le produzioni unitarie.
- d) Completare la trasformazione in FNC.
- e) Costruire un esempio di derivazione per la stringa "abababa" nella grammatica originale e nella grammatica in FNC.

Esercizio 8. Sia L un linguaggio context-free generato da una grammatica G in Forma Normale di Chomsky.

- a) Dimostrare che ogni derivazione di una stringa w di lunghezza n in G richiede esattamente $2n - 1$ passi di derivazione.

- b) Dato che per ogni stringa $w \in L$ con $|w| = n$ si richiede $O(n)$ passi di derivazione, discutere le implicazioni di questo fatto sull'efficienza degli algoritmi di parsing per linguaggi context-free.
- c) Utilizzare la FNC per dimostrare che per ogni linguaggio context-free L , l'insieme $\{w \in L \mid |w| \leq n\}$ è finito per ogni $n \geq 0$.