Automi e Linguaggi Formali - EVEN-HALTS - Q&A

Gabriel Rovesti

Anno Accademico 2024-2025

Esercizio EVEN-HALTS

Considera il linguaggio

Definizione 1. $EVEN-HALTS = \{\langle M \rangle \mid$ per ogni numero naturale n pari, M termina la computazione su n $\}$

Teorema 1. EVEN-HALTS è indecidibile.

Dimostrazione. Dimostriamo l'indecidibilità per riduzione dal problema della cofinalità $A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid M$ accetta $w\}$. Costruiamo una funzione di riduzione $f : \{\langle M, w \rangle\} \mapsto \{\langle M' \rangle\}$ dove M' è la TM che su input n (rappresentato in binario):

1. Controlla se n è pari o dispari:
   (a) Se n è dispari: va in loop infinito
   (b) Se n è pari: procede al passo 2
2. Simula M su input w:
   (a) Se M accetta w: termina nello stato di accettazione
   (b) Se M rifiuta w: termina nello stato di rifiuto
   (c) Se M va in loop su w: anche M' va in loop

Restituisce $\langle M' \rangle$.
Analisi dei casi:
Caso 1: Se $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}}$, allora M accetta w. Quindi:

- Per ogni numero pari n: M' simula M su w, che termina (in accettazione), quindi M' termina su n
- Per ogni numero dispari n: M' va in loop infinito

Poiché M' termina su tutti i numeri pari, abbiamo $\langle M' \rangle \in$ EVEN-HALTS.

Caso 2: Se $\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}}$, allora M non accetta w (rifiuta o va in loop). Quindi:

- Se M rifiuta w: per ogni numero pari n, M' simula M su w, che termina (in rifiuto), quindi M' termina su n. In questo caso $\langle M' \rangle \in$ EVEN-HALTS.
- Se M va in loop su w: per ogni numero pari n, M' simula M su w, che non termina, quindi M' non termina su n. Poiché esiste almeno un numero pari su cui M' non termina, abbiamo $\langle M' \rangle \notin$ EVEN-HALTS.

Per rendere la riduzione funzionale, modifichiamo la costruzione di M' nel seguente modo: su input n pari, invece di simulare M su w, M' simula M su w e termina solo se M accetta w. Se M rifiuta w o va in loop, M' va in loop infinito.

Con questa modifica:

Caso 1 (rivisto): Se $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}}$, allora M accetta w, quindi M' termina su tutti i numeri pari. Perciò $\langle M' \rangle \in$ EVEN-HALTS.

Caso 2 (rivisto): Se $\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}}$, allora M non accetta w, quindi M' non termina su nessun numero pari. Perciò $\langle M' \rangle \notin$ EVEN-HALTS.

Quindi abbiamo:

$$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff \langle M' \rangle \in \text{EVEN-HALTS}$$

Poiché A_{TM} è indecidibile e si riduce a EVEN-HALTS, anche EVEN-HALTS è indecidibile. □

Osservazione

La chiave di questa dimostrazione è la distinzione tra numeri pari e dispari nel comportamento di M'. La costruzione garantisce che:

- Su input dispari, M' ha sempre un comportamento prevedibile (loop infinito)
- Su input pari, il comportamento di M' dipende dall'accettazione di w da parte di M
- La proprietà "termina su tutti i pari" viene utilizzata per codificare l'informazione sull'accettazione

Questa tecnica di "partizionamento dell'input" (pari vs dispari) è fondamentale per costruire riduzioni che coinvolgono proprietà universali su sottoinsiemi infiniti degli input possibili.

La modifica nella costruzione è essenziale per garantire che solo l'accettazione (e non anche il rifiuto) porti alla terminazione sui numeri pari.