Guida pratica per gli esercizi - Approccio Bresolin

🎯 QUANDO USARE IL PUMPING LEMMA

Il Pumping Lemma serve per **dimostrare che un linguaggio NON è regolare**.

⚠️ **ATTENZIONE**: Non può dimostrare che un linguaggio È regolare!

📚 PUMPING LEMMA - ENUNCIATO

🔧 ENUNCIATO FORMALE

```
Se L è un linguaggio regolare, allora:
∃k > 0 tale che ∀w ∈ L con |w| ≥ k
∃ decomposizione w = xyz tale che:
1. y ≠ ε (il pezzo centrale è non vuoto)
2. |xy| ≤ k (i primi due pezzi sono corti)
3. ∀i ≥ 0: xy^i z ∈ L (possiamo "pompare" y)
```

🎯 COME USARLO PER DIMOSTRARE NON-REGOLARITÀ

```
STRATEGIA: Mostrare che il linguaggio VIOLA il Pumping Lemma

SCHEMA LOGICO:
Supponiamo per assurdo che L sia regolare
→ Allora deve soddisfare il Pumping Lemma
→ Ma noi troviamo una contraddizione
→ Quindi L non può essere regolare
```

🔧 METODOLOGIA STEP-BY-STEP

TEMPLATE STANDARD

```
DIMOSTRAZIONE che L non è regolare:

STEP 1: Supponiamo per assurdo che L sia regolare
STEP 2: Sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma
STEP 3: Scegliamo w ∈ L con |w| ≥ k [SCELTA STRATEGICA]
STEP 4: Per qualsiasi decomposizione w = xyz con y ≠ ε, |xy| ≤ k
STEP 5: Mostriamo che ∃i ≥ 0 tale che xy^i z ∉ L [CONTRADDIZIONE]
STEP 6: Assurdo → L non è regolare □
```

🎯 STEP CRITICI

STEP 3: Scelta della parola w

STRATEGIA: Scegli w che dipende da k in modo "bilanciato"

```
PATTERN COMUNI:
• L = {a^n b^n | n ≥ 0} → scegli w = a^k b^k
• L = {a^i b^j | i > j} → scegli w = a^(k+1) b^k
• L = {ww^R | w ∈ {a,b}*} → scegli w = a^k b^k a^k
• L = {a^(n²) | n ≥ 0} → scegli w = a^(k²)
```

STEP 5: Trovare la contraddizione

TECNICA: Analizza dove può stare y e cosa succede pompando

```
CASISTICA TIPICA:
• Se y contiene solo a: pompando cambi il numero di a
• Se y contiene solo b: pompando cambi il numero di b
• Se y contiene a e b: pompando mescoli l'ordine
• Se y è nella prima metà: pompando rompi simmetrie
```

📋 ESEMPI TIPO D'ESAME

🔹 ESEMPIO 1: a^n b^n

```
LINGUAGGIO: L = {a^n b^n | n ≥ 0}

DIMOSTRAZIONE:
1. Supponiamo L regolare
2. Sia k la lunghezza del Pumping Lemma
```

```
3. Consideriamo w = a^k b^k ∈ L, |w| = 2k ≥ k
4. Sia w = xyz con y ≠ ε, |xy| ≤ k
5. Poiché |xy| ≤ k, le stringhe x,y contengono solo a
   Quindi y = a^j per qualche j ≥ 1
6. Considerando i = 0: xy^0 z = xz = a^(k-j) b^k
   Ma k-j < k, quindi a^(k-j) b^k ∉ L
7. Contraddizione → L non è regolare □
```

◆ ESEMPIO 2: {a^i b^j | i > j}

```
LINGUAGGIO: L = {a^i b^j | i > j ≥ 0}

DIMOSTRAZIONE:
1. Supponiamo L regolare
2. Sia k la lunghezza del Pumping Lemma
3. Consideriamo w = a^(k+1) b^k ∈ L, |w| = 2k+1 ≥ k
4. Sia w = xyz con y ≠ ε, |xy| ≤ k
5. Poiché |xy| ≤ k < k+1, le stringhe x,y contengono solo a
   Quindi y = a^j per qualche j ≥ 1
6. Considerando i = 0: xy^0 z = a^(k+1-j) b^k
   Ma k+1-j ≤ k, quindi a^(k+1-j) b^k ∉ L
7. Contraddizione → L non è regolare □
```

◆ ESEMPIO 3: Palindromi

```
LINGUAGGIO: L = {ww^R | w ∈ {a,b}*}

DIMOSTRAZIONE:
1. Supponiamo L regolare
2. Sia k la lunghezza del Pumping Lemma
3. Consideriamo w = a^k b^k a^k ∈ L, |w| = 3k ≥ k
4. Sia w = xyz con y ≠ ε, |xy| ≤ k
5. Poiché |xy| ≤ k, le stringhe x,y sono nella prima parte a^k
   Quindi y = a^j per qualche j ≥ 1
6. Considerando i = 2: xy^2 z = a^(k+j) b^k a^k
   Ma questa non è un palindromo, quindi ∉ L
7. Contraddizione → L non è regolare □
```

◆ ESEMPIO 4: Quadrati perfetti

```
LINGUAGGIO: L = {a^(n²) | n ≥ 0}

DIMOSTRAZIONE:
1. Supponiamo L regolare
2. Sia k la lunghezza del Pumping Lemma
3. Consideriamo w = a^(k²) ∈ L, |w| = k² ≥ k
4. Sia w = xyz con y ≠ ε, |xy| ≤ k
5. Quindi |y| ≤ k, sia |y| = j dove 1 ≤ j ≤ k
6. Considerando i = 2: xy^2 z = a^(k²+j)
   Per essere in L serve k² < k²+j < (k+1)² = k²+2k+1
   Quindi serve j < 2k+1, che è sempre vero
   Ma serve anche k²+j = m² per qualche m
7. Per k abbastanza grande, tra k² e k²+k non ci sono quadrati perfetti
   Quindi a^(k²+j) ∉ L per 1 ≤ j ≤ k
8. Contraddizione → L non è regolare □
```

🎯 STRATEGIA DI SCELTA DELLA PAROLA

🔧 PATTERN RICONOSCIBILI

Linguaggi con Conteggio Bilanciato

```
TIPO: {a^n b^n}, {a^n b^m c^n}, etc.
STRATEGIA: Scegli w dove i parametri sono uguali e dipendono da k
POMPAGGIO: Cambia un conteggio ma non l'altro → squilibrio
```

Linguaggi con Confronto

```
TIPO: {a^i b^j | i > j}, {a^i b^j | i ≠ j}, etc.
STRATEGIA: Scegli w dove la relazione è "al limite"
POMPAGGIO: Cambia la relazione tra i parametri
```

Linguaggi con Simmetria

```
TIPO: Palindromi, {ww^R}, {ww}, etc.
STRATEGIA: Scegli w simmetrico dove y sarà in una parte specifica
POMPAGGIO: Rompe la simmetria
```

Linguaggi con Struttura Matematica

```
TIPO: {a^(n²)}, {a^(2^n)}, {a^(n!)}, etc.
STRATEGIA: Scegli w = a^(f(k)) dove f è la funzione speciale
POMPAGGIO: I numeri tra f(k) e f(k)+k non hanno la forma f(m)
```

⚠️ ERRORI COMUNI DA EVITARE

❌ Scelta sbagliata di w

```
ERRORE: Scegliere w senza pensare a dove finirà y
CORREZIONE: Analizza i vincoli |xy| ≤ k prima di scegliere w
```

❌ Non considerare tutti i casi

```
ERRORE: Considerare solo i = 0 o i = 2
CORREZIONE: Scegli l'i che funziona meglio per la contraddizione
```

❌ Pompaggio sbagliato

```
ERRORE: Pompare x o z invece di y
CORREZIONE: Solo y può essere pompato: xy^i z
```

❌ Non spiegare perché xy^i z ∉ L

```
ERRORE: "Chiaramente xy^i z ∉ L"
CORREZIONE: Spiega esplicitamente perché viola la definizione di L
```

📝 TEMPLATE VELOCE PER ESAMI

```
TEOREMA: L non è regolare

DIMOSTRAZIONE (per assurdo):
1. Supponiamo L regolare
2. Sia k > 0 dato dal Pumping Lemma
3. Consideriamo w = [scelta strategica dipendente da k] ∈ L con |w| ≥ k
4. Sia w = xyz con y ≠ ε e |xy| ≤ k
5. [Analisi: dove può stare y data la struttura di w]
```

```
6. Considerando i = [valore che crea contraddizione]:
   xy^i z = [calcolo esplicito]
   Ma [spiegazione perché ∉ L]
7. Contraddizione con Pumping Lemma
8. Quindi L non è regolare □
```

✅ CHECKLIST FINALE

Per ogni dimostrazione verifica:

- [ ] Supposto L regolare all'inizio
- [ ] Scelta w ∈ L con |w| ≥ k
- [ ] w dipende da k in modo strategico
- [ ] Considerato vincoli y ≠ ε e |xy| ≤ k
- [ ] Trovato i che produce xy^i z ∉ L
- [ ] Spiegato chiaramente perché xy^i z ∉ L
- [ ] Concluso con contraddizione → L non regolare

Linguaggi tipici d'esame che NON sono regolari:

- [ ] {a^n b^n | n ≥ 0}
- [ ] {a^i b^j | i > j} o {a^i b^j | i ≠ j}
- [ ] {ww^R | w ∈ Σ*} (palindromi)
- [ ] {a^(n²) | n ≥ 0} (quadrati)
- [ ] {a^n b^m c^n | n,m ≥ 0}

Strategie da ricordare:

- [ ] Scegli w bilanciato/simmetrico/al limite
- [ ] Analizza dove può cadere y per |xy| ≤ k
- [ ] Pompa per rompere equilibri/simmetrie/relazioni
- [ ] Usa i = 0 per diminuire, i = 2 per aumentare