Automi e Linguaggi Formali - $QPAL_{TM}$ - Q&A

Gabriel Rovesti

Anno Accademico 2024-2025

Esercizio QPAL_TM

Una stringa w è palindroma se rimane uguale letta da sinistra a destra e da destra a sinistra, cioè se $w = w^R$. Un linguaggio $B \subseteq \{0,1\}^*$ è **quasi-palindromo** se contiene al più una stringa non palindroma. Ad esempio, sia $\{00, 1101, 1001\}$ che $\{00, 101\}$ sono linguaggi quasi-palindromi, mentre $\{00, 10, 100\}$ non lo è. Considera il problema di determinare se il linguaggio di una TM M è quasi-palindromo.

Definizione 1. $\text{QPAL\_TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una TM e } L(M) \text{ è quasi-palindromo}\}$

Teorema 1. QPAL_TM è indecidibile.

Dimostrazione. Dimostriamo l'indecidibilità per riduzione dal problema della cofinalità $A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ accetta } w\}$. Costruiamo una funzione di riduzione $f : \{\langle M, w \rangle\} \mapsto \{\langle M' \rangle\}$ dove M' è la TM che su input x:

1. Simula M su input w
2. Se M accetta w, accetta se e solo se $x = x^R$ (cioè x è palindroma)
3. Se M non accetta w (rifiuta o va in loop), accetta se $x = x^R$ **oppure** se $x =$ "10" **oppure** se $x =$ "01"

Restituisce $\langle M' \rangle$.

Analisi dei casi:

Caso 1: Se $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}}$, allora M accetta w, quindi $L(M') = \{x \in \{0,1\}^* \mid x = x^R\}$, cioè l'insieme di tutte le stringhe palindrome. Poiché ogni stringa in $L(M')$ è palindroma, $L(M')$ contiene 0 stringhe non palindrome, quindi $L(M')$ è quasi-palindromo. Perciò $\langle M' \rangle \in \text{QPAL\_TM}$.

Caso 2: Se $\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}}$, allora M non accetta w, quindi $L(M') = \{x \in \{0,1\}^* \mid x = x^R\} \cup \{\text{"10"}, \text{"01"}\}$. Poiché né "10" né "01" sono palindrome, $L(M')$ contiene esattamente 2 stringhe non palindrome. Dato che $2 > 1$, $L(M')$ non è quasi-palindromo. Perciò $\langle M' \rangle \notin \text{QPAL\_TM}$.

Quindi abbiamo:

$$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff \langle M' \rangle \in \text{QPAL\_TM}$$

Poiché A_{TM} è indecidibile e si riduce a QPAL_TM, anche QPAL_TM è indecidibile. □

Osservazione

La differenza chiave rispetto al problema PAL_TM è il controllo del **numero** di stringhe non palindrome nel linguaggio. Nel caso quasi-palindromo, dobbiamo distinguere tra linguaggi con:

- Al più 1 stringa non palindroma (quasi-palindromi)
- Più di 1 stringa non palindroma (non quasi-palindromi)

La costruzione utilizza strategicamente l'aggiunta di due stringhe non palindrome ("10" e "01") nel caso in cui M non accetta w, garantendo che il linguaggio risultante non sia quasi-palindromo. Quando M accetta w, il linguaggio contiene solo palindromi, risultando quasi-palindromo.

Questa tecnica di "dosaggio" del numero di stringhe non palindrome è fondamentale per controllare la proprietà di quasi-palindromicità del linguaggio costruito.