

07/03/2025 → 2° PARTITA COLSO

$TM \in (1^{\circ} 12)$   
 INDISCIDIBILITÀ (12)  
 ( NP / NP-HARD /  
 NP - COMPLETEZZA } 12

[OBSERVATION]

- MACCHINE DI TURING { MONO, ESERCIZI }

- ESERCIZI DI  $TM$   
 $\rightarrow$  [SEM-INTERMEDIATE]  $NDT$  ALTRI ESERCIZI (SIPSON)

COMPLETATI 1° PARTITA ...  $\rightarrow$  (2° TURNO)

AUTOMI E LINGUAGGI FORMALI - 15/4/2025  
 PRIMA PROVA INTERMEDIA - SECONDO TURNO

1. (12 punti) Dati due linguaggi  $L, M \subseteq \Sigma^*$ , definiamo il linguaggio

$$L \nabla M = \{ \#^n \in L \mid \text{esistono } w \in L \text{ e } v \in M \text{ tali che } |w| = |v| = n \}.$$

Dimostra che se  $L$  ed  $M$  sono linguaggi regolari allora anche  $L \nabla M$  è regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{ 0^{3n^2+2} \mid n \geq 0 \}$$

Dimostra che  $L_2$  non è regolare.

3. (12 punti) Dato un linguaggio  $L \subseteq \Sigma^*$ , definiamo il linguaggio

$$\text{insert}\#(L) = \{ x\#y \mid xy \in L \}.$$

Dimostra che la classe dei linguaggi context free è chiusa per l'operazione  $\text{insert}\#$ .

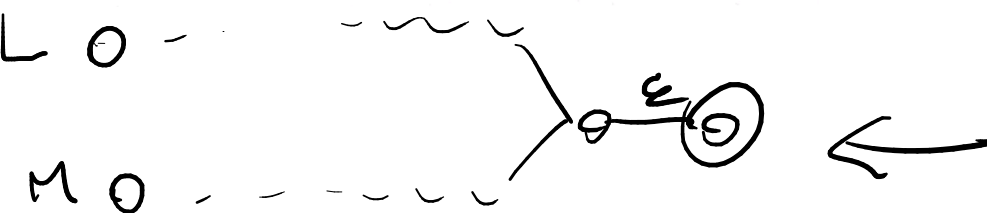
$$L \nabla M$$

$$|w| = |v| = \text{CARDINALITÀ} = N.$$

$$\rightarrow L = (\epsilon) - \text{NFA}$$

$$\rightarrow M = (\epsilon) - \text{NFA}$$

$\downarrow$   
 E - CASES  
 E REGOLARE



$$\rightarrow \text{CASO BASE} \rightarrow L = \emptyset$$

$$\rightarrow M = \emptyset$$

$$n+1 \quad \delta(w, a)$$

2. (12 punti) Considera il linguaggio

ggio  
 $L_2 = \{e^{3n^2+2} \mid n \geq 0\}$

Dimostra che  $L_2$  non è regolare.

$$\downarrow (n=0)$$
$$w = x y^i z^j$$
$$\begin{array}{ccc} & | & \\ \circ & \circ & \circ^{k-2} \end{array}$$

$$[n=0] \rightarrow 3(0)+2 = 2$$

$$n=1 \rightarrow 3(1)^2 + 2 = 5$$

$$n=2 \rightarrow 3(2)^2 + 2 = 14$$

$$n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{n^2}$$

○  $3n^2 + 2$  ) CASO INDISTINGUIBILE

$\emptyset^p \quad \emptyset^q \quad \emptyset^k \quad \emptyset^{3n^2+2} = \emptyset^{\cancel{k} - \cancel{q} - \cancel{2}} \quad \emptyset^{3n^2+2}$   
 $\emptyset^{k+3n^2+2} \rightarrow L \rightarrow_{100} \text{RSC.}$

3. (12 punti) Dato un linguaggio  $L \subseteq \Sigma^*$ , definiamo il linguaggio

$$\text{insert}\#(L) = \{x\#y \mid xy \in L\}.$$

Dimostra che la classe dei linguaggi context free è chiusa per l'operazione *insert#*.

pumping A -

$\downarrow$   
CFG  $\rightarrow$  CNP

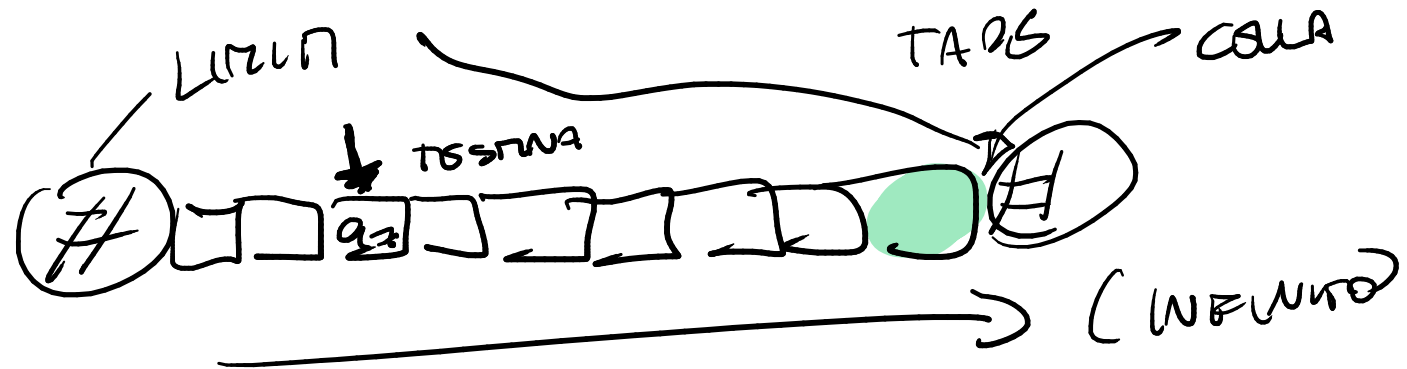
$$[x, \delta]$$

$$G \rightarrow xy \quad G' \rightarrow x \# y$$

$G \subseteq G' \subseteq \text{CNF}$

$$TM \rightarrow M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

$\underbrace{\quad}_{\text{NASMO}_2}$ 
 $\underbrace{\quad}_{\text{TRANSIZIONE}}$



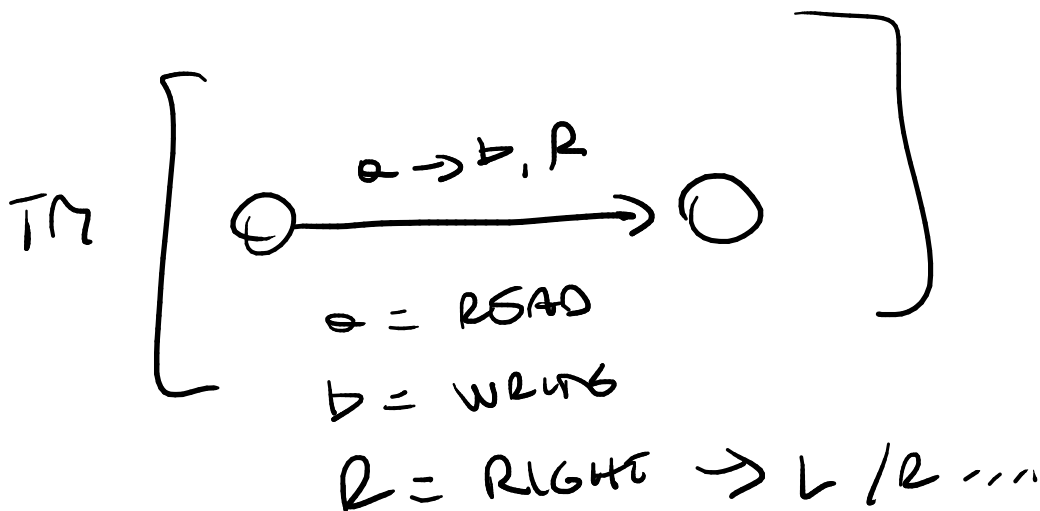
$$TM_{\text{SINGOLA}} \Rightarrow TM_{\text{VARIANTE}} \quad (\Leftrightarrow)$$

VICINANZA

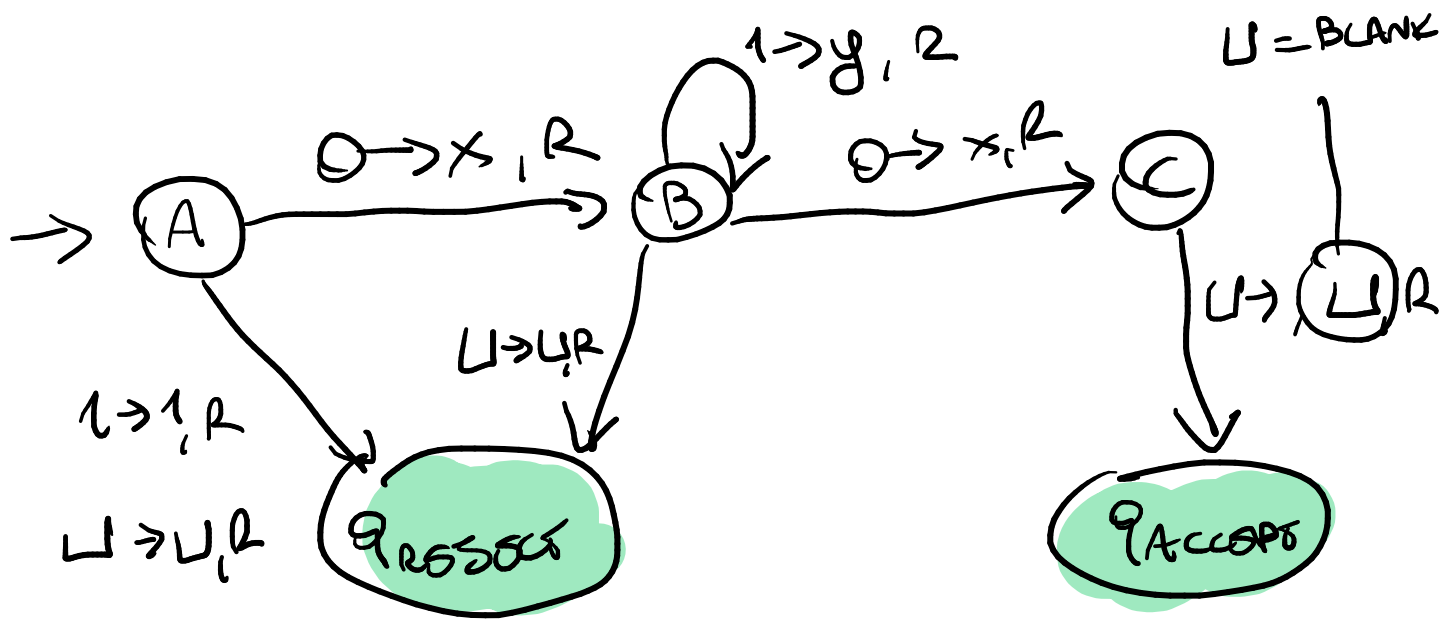
$$TM \rightarrow \delta \{L, R\}$$

$$\Rightarrow \text{TRANSIZ.} \begin{cases} \delta(q, a) = (q, c, L) \\ \delta(q, b) = (q, c, R) \end{cases}$$

RAGIONE MOTO  
PER ESSERE



$[L = 01^*0] \rightarrow TM \xrightarrow{\text{simul.}} \text{TAPIS (L)}$



simul. A

TURING MACHINES - 10

~~TABEOLA~~

~~TUTTO LE TRANSIZIONI~~

TM (DESCRIZIONE)

DESCRIZIONE  
IMPLEMENTATIVA

AUTO  
LUAO

DESCRIVI A PAROLE TM

$B = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\} \rightarrow$  DESCRIVI UNA  
TM CHE  
FA B

CONFINO

$\# [ \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } ] \#$

$\rightarrow R$

↓  
[TM A NASCIMO SINGOLO] → B

$M = \text{SU INPUT } w \rightarrow w = \text{SOPRUGA } \left\{ 0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0 \right\}$

1° → COPIA SUL NASCIMO  
 $0^* 1^* 2^*$

# W W W W →

ε"  
00 11 22  
M M M M  
1° CHECK  
→  $0^n 1^n 2^n$

00 11 22  
2 2

ε → ACCETTA  
0 12 / 2 → RIFIUTA

2. LA MACCHINA RITORNA ALL'INIZIO (LIBRO MOST)

3. [00] • ← NON FA NULLA  
QUANDO USO TUTTI GLI

4. PARTENDO DA • E RITORNA 1/2

→ [ ] FINE NASCIMO  
(ESAUROITO INPUT) → ACCETTA  
RIFIUTA

→ INFORMATION - useful DESCRIPTION  
OF  $TM_s$

$\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contains same "a" and "b"}\}$

$M \rightarrow$  SU INPUT "w" ↓  
H  
(NACOMO)

$[ \delta : Q \times T \rightarrow Q \times T \times \{L, R\} ]$  - HEAD  
\* TAPOS  
-  $\delta \{L, R\}$

$[aaaa bbbb] \rightarrow$  SSORPO  
DI INPUT

CASI  $\rightarrow \Sigma =$  ACCOTTA  
BASSO

DECIDIBILITÀ  $\rightarrow$  FINISCO

(IN) DECIDIBILITÀ  $\rightarrow$  IMPOSSIBILI (RAZIONO)

[1° ALTERNATIVA]

↓  
□ W W W W W  
→  
(COPIA INPUT)

$[ \textcircled{a} a a a b b b b ] \rightarrow$  new column

$\{L, R\} \curvearrowright \# a \rightarrow \bullet$

$\curvearrowright \# b \rightarrow (\#) = \text{BOUND} = \text{LIMIT}$

CONTO NUMERAZIONE A 5 TOTTO; TM

$\bullet = \text{PALLINO} =$

PAR FINE DI

AVREMO NOTIZIA

$a a a a , b b b b$   
 $\longrightarrow$

ARRIVO AL  $(\#) \rightarrow$  FINE - SE AL SECONDO  $\bullet$   
 ABBIAMO SCANSIONATO  
 STESSO N. DI COLLE

$$\rightarrow q(q, n', a) = (q_{out}, \bullet, f)$$

$\downarrow$   $a a a a | b b b b$   $\downarrow$   
 PALLINO PIPE PALLINO  
 $=$   
 SEPARATORE

ABBIAMO  
 SCORSO  
 STESSO N.  
 DI COLLE  
 E DIVISO  
 DA 1

5° SOLIZIONE SIOBOR  $\rightarrow$  IMPLEMENTATION-LEVEL  
DESCRIPTION OF  
A TM

$M_{BAD} \rightarrow$  SU ~~INPUT~~ W

SU INPUT  $\langle P \rangle$  SU  $x_1 \dots x_k$

- $\rightarrow$   
TM
1. PROVA TUTTE LE COMBINAZIONI  
INTERE DI  $x_1 \dots x_k$
  2. VALUTA  $\langle P \rangle$  SU TUTTE LE CORRE  
PENNATE  $\rightarrow x^2 + 3x - 4$
  3. SE UNA CORREVA VA A  $\emptyset$   
ACCETTA  
(ALTERNATIVAMENTE RIFIUTA)

DESCRIZIONE

TM

SINGOLA

$Q \times T \times \delta \rightarrow \{L, R\}$

NON SI TRATTA

di RUSCARE

[ TM [ DFA  
OR  
NFA ] ]  $\Rightarrow$  DESCRIBIBILI



TM SINGOLO  $\Rightarrow$  TR VARIAVE

VERSO 1

TR SINGOLO  $\Leftarrow$  TR VARIAVE

VERSO 2

TM SINGOLO  $\downarrow$   $\circ \longrightarrow$   $\{L, R\}$

TR SERI - IN FINITO

$\downarrow$   
 $\circ$  (TAPIS)  $\xrightarrow{\quad}$   $\circ$  (NO END (#))

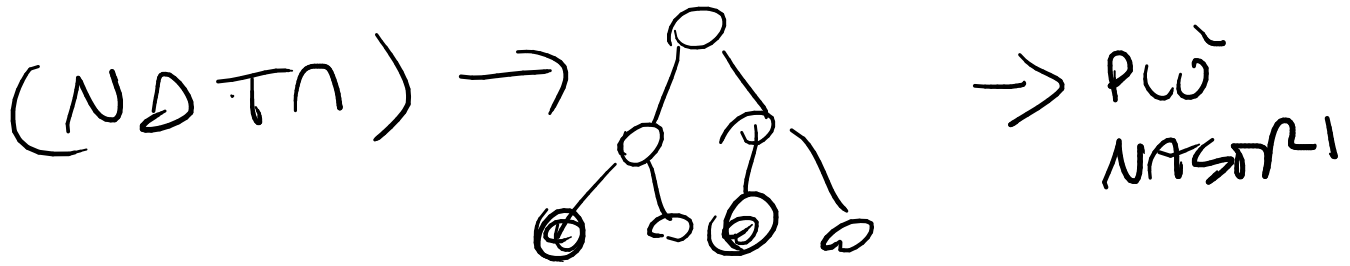
$\left\{ \begin{array}{l} \text{TM SINGOLO} \rightarrow \text{TR SERI - IN FINITO} \\ \downarrow \\ \text{AGGIUNGO SINGOLO QUANDO} \\ \text{CONSUMA TUTTO INPUT} \end{array} \right\}$

TM SERI - INF.

(DO SCRIZ. IN OSTA GUO)  $\rightarrow$

SINGOLO VAR.

← (SO USANDO OPPOSTO)  
 LA VARIA MO FA GIÀ  
 TUTTO QUELLO  
 CHE FA  
 NASCERE SINGOLO



SINGOLA (↑, ↓, ←, →)

(3.12) → RISULTATO A SX (DX) → PARZIALI

TRANSIZIONE → AD-HOC  
 ↓

LEFT-RISULT TM

$$\delta: Q \times \mathbb{T} \rightarrow Q \times \mathbb{T} \times \{R, \text{RISULT}\}$$

$$\delta(q, \underset{\text{INPUT}}{\textcircled{a}}) = (\overset{\text{NASCITA}}{\underset{\text{RIGHT}}{\textcircled{b}}}, \underset{\text{OUTPUT}}{\textcircled{c}}, \text{RISULT}) \rightarrow \text{RISULT}$$

(SO SCRIVENDO  
 SALTA ALLA  
 FINE)  
 ↓  
 SALTA ALLA  
 ASX

TM SINGOLA TAGG ⇒ TM LEFT RISULT

$\Sigma = \{a, b\}^*$

$\{R, \underline{R5555}\}$

$\delta(q, a) = (r, b, \text{R5555})$

$\delta(q, a) = (r, b, R)$

PRENDI L'INPUT W  
LA COPIA SUL NASMO  
ANDANDO NORMALMENTE  
A DX

SE COPIANDO L'INPUT,  
E "b", PONIAMO UN  
SIMBOLO (•)

ADX ↑  
PAGINO



RESET SIGNIFICA SE E' "•"  
E' ALTA ALL'INIZIO  
→ VAL A SX FINCHÉ  
NON INCONTRA (#)

(Assunzione) → A UNA CERTA, LA TM  
FINISCE L'INPUT "W"

(⇒) OVVERO DA RESET  
A SINGLE-TAP

3.14 → AUTOMATA A CODA

→ PUSH  
→ POP  
STACK  
(LIFO)

a a a a b

RIFIUTA

ACCETTA

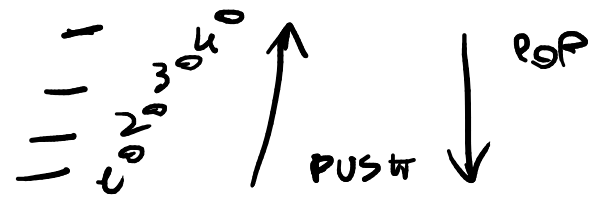
↓

q<sub>RESET</sub>

↓

q<sub>ACCEPT</sub>

IMPILANO DA SOTTO  
 TOGLIANO DA SOPRA  
 $\{L, R\}$



QUEUE AUTOMATON]  $\rightarrow$  TURING-  
 RECOGNIZABLE

TM <sub>swg.</sub>  $\rightarrow$  PDA

1°

$\downarrow$  TM (M)

$\Leftrightarrow$  2°

$\langle M, w \rangle$

PUSH/POP  $\rightarrow \{L, R\} \rightarrow$  LIFO

$\delta(q, a) = (r, b, L)$

POP  $\swarrow$   $L = \text{BLANK}$   
 (RIMPIAZZA PRIMA  
 CELLA CON L)

# a a a a #  
 $\downarrow$   
 LAST IN

ANDANDO (R)  $\rightarrow$  PROVA (#)

(FINE NASCITA)  
 OX

$\rightarrow$  NOTA  $\rightarrow$  GESTIRE CORNER CASE

$\delta(q, a) = (r, b, R)$

$\swarrow$  (DOSS SONO  
 STRAVER L'ORA)

$\downarrow$  #

# a a a a #

$\uparrow$  ANDANDO (R)  $\rightarrow$  NOTA "a"

(ALTERNATIVA  $\rightarrow$  SIMBOLO  
 PER RICORDARE  
 DOV'ORA  
 PARRA)

→ 3.11 → TM DOPPIO NASCIMO  
IN FLUENDO

→ 3.15 → TM A SOLA LETTURA

(PARZIALS → TAG TM)

$(\downarrow, \uparrow, \leftarrow, \rightarrow)$

↓ 4 DIREZIONI CON  $\delta$   
TRANSIZIONI

→ ENUMERATIONS

↳ STAMPANTE  $(\Sigma, \delta(e, b, \dots))$

↳ ORDINE USSLICO GRAFICO

DIMOSTRA CHE L SIA DECIDIBILE  
SSS

∃ ENUMERATIONS CHE  
LO ENUMERA L  $(\Sigma$   
S E SSS ORDINAMENTO  
DELLI STRINGHE

∃ ALGORITMO/  
∃ TM  
CHE TALA  
CSA RICHIESA

LEXICOGRAPHIC  
ORDER

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ABACCO } (1)^{\circ} \\ \text{ABOCCORDANO } (2)^{\circ} \end{array} \right.$

$(\Rightarrow)$  DECIDIBILI =  $\exists$  TM

$E = \text{ENUMERATORS} = \sum^*$

↓  
GENERA (STAMPA)  
TUTTE LE STRINGHE  
IN ORDINE  
LESSICOGRAFICO

SO OUTPUT  
TUTTA LA  
STRINGA "S"  
↓  
ACCETTA

┌──────────────────┐  
A PREREQUISITI,  
ORDINE RISPETTATO!

$E = \text{ENUMERATORS}$

$\rightarrow \exists \text{ TM } \langle M, w \rangle$

$\rightarrow$  ESSEGUE O  
CORRA SUL  
NASO

$M \rightarrow$  DECISORE DI  
 $E$

$(\Leftarrow)$   $M, \textcircled{S}$   $\nearrow$  OUTPUT  
 $\rightarrow$  ORDINE  
LESSICOGRAFICO

$\uparrow$   
 $E \rightarrow$  DERIVA DA  $E \rightarrow$  ACCETTA  
└─ RIFIUTA

(SO ECCETTANO  
MAGGIORI / NON  
IN ORDINE  
LESSICOGRAFICO)