Teorema 4.1: Il Pumping Lemma per Linguaggi Regolari

Se L è un linguaggio regolare, per il Pumping Lemma, allora
Allora $\exists n, \forall w \in L : |w| \geq n \Rightarrow w = xyz$ tale che:

1. $y \neq \epsilon$
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \geq 0,\ xy^k z \in L$

Esempio: L_{pal}

- Sia L_{pal} il linguaggio delle stringhe palindrome.
- Supponiamo che L_{pal} sia regolare. Allora $w = 0^n 1 0^n \in L_{pal}$.
- Per il pumping lemma, $w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ e $xy^k z \in L_{pal}$

$$w = \underbrace{000\cdots\cdots}_{x}\underbrace{\cdots 0}_{y}\,\underbrace{0\ldots 0100\cdots 00}_{z}$$

- In particolare, $xz \in L_{pal}$, ma xz ha meno zeri a sinistra di quelli a destra.
- Il linguaggio non è regolare, ma è libero. Ne abbiamo già visto la grammatica.

Esempio: L_1

- Sia L_1 il linguaggio seguente:

$$\{a^n b^m c^{n+m} \in \{a, b\}^* | n >= 1, m >= 0\}$$

- Supponiamo che L_1 sia regolare. Allora $w = a^n b^m c^{n+m} \in L_1$.
- Per il pumping lemma, $w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ e $xy^k z \in L_1$
- Fissiamo n come costante e $w = a^n b^m c^n + m$. Per la suddivisione notiamo che, in ogni caso, $y = a^j$, con $0 < j \leq n$.
- In particolare, xz dovrebbe essere in L_1, ma $xz = a^{n-j} b^m c^{n+m}$ ha meno a e quindi $|a^{n-j} b^m| \neq |c^{n+m}|$. Di conseguenza non appartiene a L_1.
- Il linguaggio non è regolare, ma è libero. Pensare a una grammatica libera per L_1.

Esempio: L_2

- Sia L_2 il linguaggio seguente:

$$\{a^i b^j \in \{a,b\}^* | mcd(i,j) = 1\}$$

- Supponiamo che L_2 sia regolare.
- Fissiamo n come costante e $w = a^q b^{(q-1)!}$, in cui q e il più piccolo primo maggiore di n.
- Allora y è formato da sole a. In particolare, xz dovrebbe essere in L_2, ma $xz = a^{q-j} b^{(q-1)!}$ è tale che $mcd(q-j,(q-1)!) = q-j$. Di conseguenza non appartiene a L_2.
- Il linguaggio non è regolare. Non è nemmeno libero.

Esempio: L_3

- Sia L_3 il linguaggio seguente:

$$\{0^{n^2} | n \text{ intero}\}$$

- Supponiamo che L_3 sia regolare.
- Fissiamo n come costante e $w = 0^{n^2}$.
- Allora $y = 0^j$ è formato di 0, con $1 \leq j \leq n$. In particolare, $xyyz$ dovrebbe essere in L_3,
- ma $xyyz$ è tale che $n^2 + 1 < |xyyz| < n^2 + n$. Il successivo quadrato è tuttavia $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Di conseguenza non pu ò appartenere a L_3.
- Il linguaggio non è regolare. Non è nemmeno libero.

Propriet à di Chiusura 1

Si definisce *min* di un linguaggio L come l'insieme delle stringhe w in L tali che nessun prefisso proprio (ovvero diverso da ϵ e da w stessa) di w sia in L.

$$min(L) = \{w \in L : \nexists u \in L, v \in \Sigma^+, t.c.\ w = uv\}$$

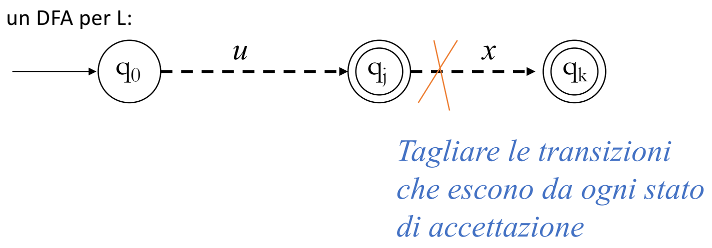
Ad esempio, se $L' = \{00, 001, 0011, 101\}$ allora $min(L') = \{00, 101\}$. Dimostrare, in generale, che se L è regolare, allora lo è anche $min(L)$.

Proprietà di Chiusura 1

Dimostrazione. Sia L riconosciuto da un DFA

$$A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A).$$

Vogliamo scegliere solo quegli stati finali q per i quali non esiste un percorso dallo stato iniziale q_0 a q che passi per un altro stato finale. Modifichiamo la DFA, cancellando tutti gli archi che escono da qualsiasi stato accettante (inclusi i cappi) e reindirizzandoli verso uno stato pozzo. Allora $L(B) = min(L)$.



Proprietà di Chiusura 2

Sia L un linguaggio e a un simbolo, allora si definisce L/a il *quoziente* di L e a, come l'insieme delle stringhe w tali che $wa \in L$.
Ad esempio se $L = \{a, aa, baa\}$, allora $L/a = \{\epsilon, a, ba\}$.
Dimostrare che se L è regolare anche L/a lo è. (Si consiglia di partire da un DFA per L e di dire come modificarlo per ottenere un DFA per L/a.)
Dimostrazione. Sia L riconosciuto da un DFA

$$A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A).$$

Si costruisca un nuovo DFA B, che è fatto come quello per A, tranne per il fatto che uno stato q è finale per B se e solo se $\delta(q, a)$ è finale per A.
Di conseguenza B accetta una stringa w se e solo se A accetta wa.
Allora $L(B) = L/a$.