

Automi e Linguaggi Formali

Parte 8 – Da PDA a grammatiche context-free

Davide Bresolin
Ultimo aggiornamento: 8 aprile 2024



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

1 Da PDA a grammatiche context-free

Lemma

Se un L è riconosciuto da un PDA, allora L è un linguaggio context-free

Idea.

- Abbiamo un PDA P che riconosce il linguaggio
- Mostriamo come trasformare P in una CFG equivalente G

- Una stringa w è accettata da P se fa andare P dallo stato iniziale a quello finale
- Progetteremo una grammatica che **fa un po' di più**:
 - una variabile A_{pq} per ogni coppia di stati p, q di P
 - A_{pq} genera tutte le stringhe che portano **da p con pila vuota a q con pila vuota**

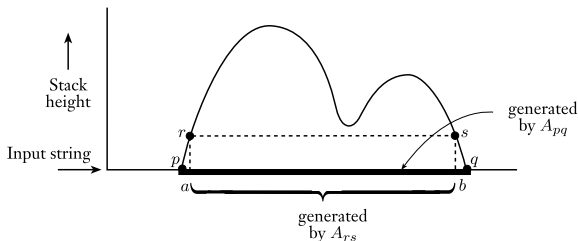
Come prima cosa, semplifichiamo P in modo che rispetti tre condizioni:

- 1 Ha un unico stato accettante q_f
- 2 Svuota la pila prima di accettare
- 3 Ogni transizione **inserisce un unico simbolo sulla pila (push)** oppure **elimina un simbolo dalla pila (pop)**, ma non fa entrambe le cose contemporaneamente

Andare da p a q (1)



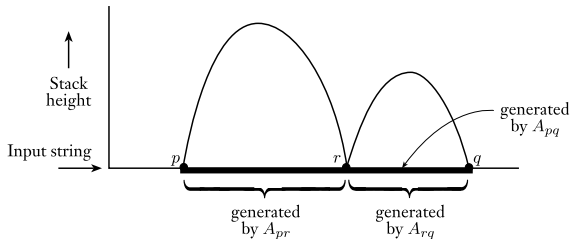
- Per andare da p con pila vuota a q con pila vuota:
 - la prima mossa deve essere un push
 - l'ultima mossa deve essere un pop
- Ci sono due casi:
 - 1 il simbolo inserito all'inizio viene eliminato alla fine:



Andare da p a q (1)

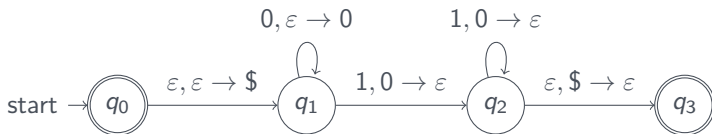


- Per andare da p con pila vuota a q con pila vuota:
 - la prima mossa deve essere un push
 - l'ultima mossa deve essere un pop
- Ci sono due casi:
 - 1 il simbolo inserito all'inizio viene eliminato alla fine
 - 2 oppure no:



- Sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_f\})$
- Costruiamo $G = (V, \Sigma, R, A_{q_0, q_f})$ tale che:
 - $V = \{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$
 - per ogni $p, q, r, s \in Q$, $u \in \Gamma$ e $a, b \in \Sigma_\varepsilon$, se $\delta(p, a, \varepsilon)$ contiene (r, u) e $\delta(s, b, u)$ contiene (q, ε) , aggiungi la regola $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$
 - per ogni $p, q, r \in Q$, aggiungi la regola $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$
 - per ogni $p \in Q$, aggiungi la regola $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$

- Trasformiamo il PDA per il linguaggio $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ in grammatica:



Lemma

Se A_{pq} genera la stringa x , allora x può portare P da p con pila vuota a q con pila vuota

Lemma

Se la stringa x può portare P da p con pila vuota a q con pila vuota, allora A_{pq} genera x

Lemma

Se A_{pq} genera la stringa x , allora x può portare P da p con pila vuota a q con pila vuota

Lemma

Se la stringa x può portare P da p con pila vuota a q con pila vuota, allora A_{pq} genera x

Theorem

Un linguaggio è context-free se e solo se esiste un PDA che lo riconosce

- Sappiamo che un linguaggio è context-free se esiste una CFG che lo genera
- Abbiamo mostrato come trasformare una CFG in un PDA
- E viceversa, come trasformare un PDA in una grammatica