Automi e Linguaggi Formali

Parte 11 – La Tesi di Church-Turing

Davide Bresolin
Ultimo aggiornamento: 22 aprile 2024

Università degli Studi di Padova

Sommario

Un nuovo modello di calcolo

- Automi finiti: dispositivi con ridotta quantità di memoria
- Automi a pila: memoria illimitata con accesso LIFO
- Ci sono linguaggi che vanno oltre le capacità di FA e PDA
- FA e PDA sono limitati come modelli di computer

https://youtu.be/FTSAiF9AHN4

- Modello di calcolo proposto da Alan Turing nel 1936
- Memoria illimitata e senza restrizioni
- Può fare tutto ciò che può fare un computer reale

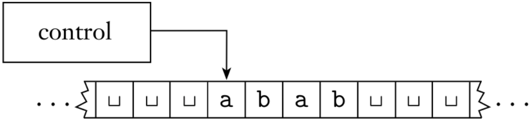
https://youtu.be/FTSAiF9AHN4

- Modello di calcolo proposto da Alan Turing nel 1936
- Memoria illimitata e senza restrizioni
- Può fare tutto ciò che può fare un computer reale

Tuttavia...

- ci sono problemi che una Macchina di Turing non può risolvere
- questi problemi vanno oltre le capacità di un computer

Macchine di Turing



- un nastro infinito come memoria illimitata
- una testina che legge e scrive simboli sul nastro
- all'inizio il nastro contiene l'input
- per memorizzare informazione si scrive sul nastro
- la testina si può muovere ovunque sul nastro
- stati speciali per accetta e rifiuta

Primo esempio di TM

- Costruiamo una macchina di Turing per il linguaggio

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- M_2 deve accettare se l'input sta in B, e rifiutare altrimenti

Primo esempio di TM

- Costruiamo una macchina di Turing per il linguaggio

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- M_2 deve accettare se l'input sta in B, e rifiutare altrimenti
- M_2 = "Su input w:
  1. Si muove a zig-zag lungo il nastro, raggiungendo posizioni corrispondenti ai due lati di $\#$ per controllare se contengono lo stesso simbolo. In caso negativo, o se non trovi $\#$, rifiuta. Barra gli elementi già controllati.
  2. Se tutti i simboli a sinistra di $\#$ sono stati controllati, verifica i simboli a destra di $\#$. Se c'è qualche simbolo ancora da controllare rifiuta, altrimenti accetta."

Codice della macchina su turingmachine.io

Automi finiti vs Macchine di Turing

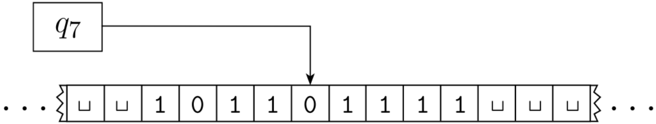
1. Una TM può sia scrivere che leggere sul nastro
2. Una TM può muoversi sia a destra che a sinistra
3. Il nastro è infinito
4. Gli stati di rifiuto e accettazione hanno effetto immediato

TM: Definizione formale

Una Macchina di Turing (o Turing Machine, TM) è una tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$:

- Q è l'insieme finito di stati
- Σ è l'alfabeto di input che non contiene il simbolo blank $\sqcup$
- Γ è l'alfabeto del nastro che contiene $\sqcup$ e Σ
- $\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è la funzione di transizione
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $q_{accept} \in Q$ è lo stato di accettazione
- $q_{reject} \in Q$ è lo stato di rifiuto (diverso da q_{accept})

TM: configurazioni



- Lo stato corrente, la posizione della testina ed il contenuto del nastro formano la configurazione di una TM
- Dalla configurazione possiamo sapere la prossima mossa
- Le configurazioni sono rappresentate da una tripla uqv:
  - q è lo stato corrente
  - u è il contenuto del nastro prima della testina
  - v è il contenuto del nastro dalla testina in poi
  - la testina si trova sul primo simbolo di v
- la configurazione in figura è $1011q_7 01111$

TM: computazione

- La configurazione C_1 **produce** C_2 se la TM può passare da C_1 a C_2 in un passo
- Se $a, b, c \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$ e q_i, q_j sono stati, allora:

$$uaq_ibv \text{ produce } uq_jacv \qquad \text{se } \delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$$

$$uaq_ibv \text{ produce } uacq_jv \qquad \text{se } \delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$$

TM: computazione

- La configurazione iniziale con input w è $q_0 w$
- In una configurazione di accettazione lo stato è q_{accept}
- In una configurazione di rifiuto lo stato è q_{reject}
- Le configurazioni di accettazione e rifiuto sono configurazioni di arresto

Linguaggi Turing-riconoscibili

- una TM M accetta l'input w se esiste una sequenza di configurazioni $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tale che:
  - C_1 è la configurazione iniziale con input w
  - ogni C_i produce C_{i+1}
  - C_k è una configurazione di accettazione
- Linguaggio riconosciuto da M: insieme delle stringhe accettate da M

Definition

Un linguaggio è Turing-riconoscibile (o anche ricorsivamente enumerabile) se esiste una macchina di Turing che lo riconosce.

Linguaggi Turing-decidibili

- Se forniamo un input ad una TM, ci sono tre risultati possibili:
  - la macchina accetta
  - la macchina rifiuta
  - la macchina va in loop e non si ferma mai
- la TM può non accettare sia rifiutando che andando in loop
- una TM che termina sempre la computazione è un decisore
- Un decisore decide un linguaggio se lo riconosce

Definition

Un linguaggio è Turing-decidibile (o anche ricorsivo) se esiste una macchina di Turing che lo decide.

Sommario

Esempio 1

TM che decide il linguaggio di tutte le stringhe di 0 la cui lunghezza è una potenza di 2:

$$A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$$

Esempio 1

TM che decide il linguaggio di tutte le stringhe di 0 la cui lunghezza è una potenza di 2:

$$A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$$

$M_1 =$ "su input w:

1. Scorri il nastro da sinistra a destra, cancellando ogni secondo 0
2. Se il nastro conteneva un solo 0, accetta
3. Se il nastro conteneva un numero dispari di 0, rifiuta
4. Ritorna all'inizio del nastro
5. Vai al passo 1."

Codice della macchina su turingmachine.io

Esempio 2

Università degli Studi di Padova

TM che decide il linguaggio:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Esempio 2

TM che decide il linguaggio:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

$M_2 =$ "Su input w:

1. Si muove a zig-zag lungo il nastro, raggiungendo posizioni corrispondenti ai due lati di $\#$ per controllare se contengono lo stesso simbolo. In caso negativo, o se non trovi $\#$, rifiuta. Barra gli elementi già controllati.
2. Se tutti i simboli a sinistra di $\#$ sono stati controllati, verifica i simboli a destra di $\#$. Se c'è qualche simbolo ancora da controllare rifiuta, altrimenti accetta."

Codice della macchina su turingmachine.io

Esempio 3

TM che esegue operazioni aritmetiche. Decide il linguaggio:

$$C = \{a^i b^j c^k \mid k = i \cdot j \text{ e } i, j, k \geq 1\}$$

Esempio 3

$M_3 =$ "su input w:

1. Scorri il nastro da sinistra a destra e controlla se l'input sta in $a^+b^+c^+$. Rifiuta se non lo è.
2. Ritorna all'inizio del nastro
3. barra una a e scorri a destra fino a trovare una b. Fai la spola tra b e c, barrando le b e le c fino alla fine delle b. Se tutte le c sono barrate e rimangono ancora b, rifiuta
4. Ripristina le b barrate e ripeti 3 finché ci sono a da barrare.
5. Quanto tutte le a sono barrate, controlla se tutte le c sono barrate: se si accetta, altrimenti rifiuta."

Codice della macchina su turingmachine.io

Esempio 4

TM che risolve il problema degli elementi distinti. Prende in input una sequenza di stringhe separate da $\#$ e accetta se tutte le stringhe sono diverse. Decide il linguaggio:

$$D = \{\#x_1\#x_2\#\cdots\#x_\ell \mid x_i \in \{0,1\}^* \text{ e } x_i \neq x_j \text{ per ogni } i \neq j\}$$

Esempio 4 (cont.)

$M_4 =$ "su input w:

1. Mette un segno sul simbolo del nastro più a sinistra. Se è un blank, accetta. Se è un $\#$, continua con 2. Altrimenti, rifiuta.
2. Scorre a destra fino al successivo $\#$ e vi mette sopra un secondo segno. Se nessun $\#$ viene trovato, allora era presente solo x_1: accetta.
3. Procede a zig-zag confrontando le due stringhe a destra dei $\#$ segnati. Se sono uguali, rifiuta.
4. Sposta il segno più a destra sul successivo $\#$ alla sua destra. Se non trova nessun $\#$, sposta il segno più a sinistra sul successivo $\#$ alla sua destra, e sposta il segno più a destra sul successivo $\#$. Se non c'è un $\#$ dopo il segno più a destra, allora tutte le stringhe sono state confrontate: accetta.
5. Vai alla fase 3."

Conclusioni

- I linguaggi A, B, C e D sono decidibili
- Tutti i linguaggi Turing-decidibili sono anche Turing-riconoscibili
- I linguaggi A, B, C e D sono anche Turing-riconoscibili

Conclusioni

- I linguaggi A, B, C e D sono decidibili
- Tutti i linguaggi Turing-decidibili sono anche Turing-riconoscibili
- I linguaggi A, B, C e D sono anche Turing-riconoscibili
- Vedremo che ci sono linguaggi Turing-riconoscibili ma non decidibili