Alcuni esercizi da "preparazione esame"

Gabriel Rovesti

March 29, 2025

Esercizio 8

(a) Dimostrare che $A = \{0^k\, u\, 0^k \mid k \geq 1,\, u \in \Sigma^*\}$ è regolare

Idea generale. L'espressione $0^k u 0^k$ *non* impone davvero che il blocco iniziale e quello finale abbiano la stessa quantità di zeri, poiché la parte intermedia u potrebbe contenere a sua volta zeri indistinguibili. Di fatto, l'unico vincolo effettivo è che *la stringa inizi e termini con almeno uno zero.*

Dimostrazione formale. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$. Ogni parola del tipo $0^k u 0^k$ con $k \geq 1$ deve iniziare con almeno un 0 e terminare con almeno un 0. Viceversa, ogni stringa in Σ^* che inizi e termini con 0 (e sia lunga almeno 2) soddisfa la forma data: basta dire che i primi k zeri vengono considerati "blocco di sinistra", i successivi tutti dentro u, e gli ultimi k zeri coincidono di nuovo col blocco di destra. Quindi

$$A \;=\; \{\, 0(0 \mid 1)^*0\}.$$

Poiché $0(0 \mid 1)^*0$ è un'espressione regolare, A è regolare. $\square$

(b) Dimostrare che $B = \{0^k\, 1\, u\, 0^k \mid k \geq 1,\, u \in \Sigma^*\}$ non è regolare

Intuizione. In questo caso, esiste il **simbolo speciale** 1 che separa nettamente il blocco di zeri iniziali dal blocco di zeri finali; ciò permette di "contare" e quindi costringe un automa a stati finiti ad avere memoria illimitata (impossibile).

Dimostrazione formale con Lemma di Pumping. **Passo 1.** Supponiamo, per assurdo, che B sia regolare.
Passo 2. Allora, esiste una costante $p > 0$ (pumping length) che deve valere per ogni stringa lunga almeno p.

Passo 3. Costruiamo una stringa $w \in B$ con $|w| \geq p$: prendiamo

$$w \;=\; 0^p\,1\,0^p,$$

cioè facciamo $k = p$ e $u = \varepsilon$, in modo che $w = 0^p\,1\,0^p \in B$. Chiaramente $|w| = 2p + 1 \geq p$.
Passo 4. Per il Lemma di Pumping, esiste una scomposizione $w = xyz$ tale che:

1. $|xy| \leq p$,
2. $|y| > 0$,
3. $\forall i \geq 0,\ xy^iz \in B$.

Passo 5. Dato che $|xy| \leq p$, i primi p simboli di w sono tutti 0: dunque xy cade *all'interno* del blocco iniziale 0^p. Quindi y è una sottostringa di zeri, cioè $y = 0^m$ con $m > 0$.
Passo 6. Scegliamo $i = 2$. Allora la stringa pompata è

$$xy^2z \;=\; x\,y\,y\,z \;=\; 0^{p+m}\;1\;0^p,$$

evidentemente con $(p + m) \neq p$. Per stare in B, *il numero di zeri* prima del simbolo "1" deve essere lo stesso di quelli dopo la "1": ma qui ce ne sono $p + m$ a sinistra e solo p a destra. Questa è una contraddizione, dunque $xy^2z \notin B$.
Passo 7. Abbiamo quindi trovato un $i \geq 0$ (precisamente $i = 2$) tale che $xy^iz \notin B$. Questo contraddice la proprietà (3) del Lemma di Pumping. Concludiamo che la nostra supposizione era errata e B non è regolare. $\square$

Esercizio 9: Altri linguaggi non regolari

Nel seguito mostriamo come usare in modo analogo il Lemma di Pumping per provare la non regolarità di altri linguaggi classici.

(a) $L_1 = \{\,0^n\,1^m\,0^m \mid m, n \geq 0\}$

Intuizione. Per restare in L_1, il blocco di '1' è "specchiato" subito dopo in un blocco di '0' della stessa lunghezza. Questo genera una condizione $m \leftrightarrow m$ che un DFA non può controllare arbitrariamente.

Dimostrazione formale. **1.** Supponiamo L_1 regolare. **2.** Esiste $p > 0$. **3.** Consideriamo la stringa $w = 0^p\,1^p\,0^p \in L_1$. **4.** Decomponiamo $w = xyz$ con $|xy| \le p$, $|y| > 0$. **5.** Osserviamo che xy è interamente nella parte iniziale 0^p. Quindi $y = 0^k$ per qualche $k > 0$. **6.** Se prendiamo $i = 2$, otteniamo

$$xy^2z = 0^{p+k}\,1^p\,0^p.$$

Ora, la parte di 1 è ancora lunga p, mentre la parte finale di 0 è lunga p, ma la parte iniziale di 0 è $p + k$, con $k > 0$. Questo non soddisfa la forma di L_1 (dove servirebbe $0^n\,1^m\,0^m$, in particolare la lunghezza del blocco finale di zeri dovrebbe essere la stessa del blocco di '1', e invece la stringa pompata lo rompe). **7.** Contraddizione al Lemma di Pumping. Quindi L_1 non è regolare. □

(b) $L_2 = \{\,0^n\,1^m \mid n \neq m\}$

Idea veloce via complementare. Il complementare di L_2 è il ben noto $\{0^n1^n\}$, non regolare. Se L_2 fosse regolare, lo sarebbe anche $\{0^n1^n\}$ per chiusura dei regolari rispetto al complemento, ma ciò è falso. Quindi L_2 non è regolare.
Dimostrazione via Pumping (opzionale). Si può anche fare direttamente il Pumping Lemma, scegliendo la stringa che sta "al confine" fra $n = m$ e $n \neq m$, ma è più lunga come ragionamento. L'uso della chiusura per complemento è immediato.

(c) $L_3 = \{\,t\,w\,t \mid t, w \in \{0,1\}^+,\ w$ non è palindroma$\}$

Intuizione. La stringa impone che l'inizio e la fine siano *lo stesso identico blocco* t, mentre il blocco in mezzo w deve essere "non palindromo". Un automa a stati finiti non potrebbe (1) ricordare tutto t per confrontarlo con la parte finale, (2) accertarsi contemporaneamente che w non sia palindroma, tutto usando un numero finito di stati.

Dimostrazione formale (schema Pumping). **1.** Supponiamo per assurdo L_3 regolare. **2.** Sia $p > 0$ la pumping length. **3.** Consideriamo la stringa

$$w \;=\; 0^p\,(110)\,0^p,$$

dove $t = 0^p$ e $w = 110$ (che *non* è palindroma, visto che $110 \neq 011$). Chiaramente $w \in L_3$.
4. Decomponiamo $w = xyz$ con $|xy| \le p$, $|y| > 0$. **5.** Dato che $|xy| \le p$, la parte xy ricade nel blocco iniziale di zeri (0^p), quindi $y = 0^k$ per qualche

$k > 0$. **6.** Ponendo $i = 2$, la stringa pompata è

$$xy^2z = 0^{p+k}\,(110)\,0^p,$$

dove la parte iniziale ha $p+k$ zeri, la parte finale ne ha p. Ora non è più della forma $t\,w\,t$ con *lo stesso* t iniziale e finale (in effetti se la prima parte è 0^{p+k}, la parte finale dovrebbe anch'essa essere 0^{p+k}, invece qui è 0^p). $\therefore\ xy^2z \notin L_3$. Contraddizione col Pumping Lemma.
Conclusione. L_3 non è regolare. $\square$

(d) $L_4 = \{\ t\,w\,t \ \mid\ t, w \in \{0,1\}^+, \dots\}$

Qualunque variante che "obblighi" a ricopiare un lungo blocco t in testa e in coda, o controlli proprietà complicate su w, tipicamente non è regolare. Si applica lo stesso metodo: si sceglie una stringa che ripeta un certo simbolo (almeno p volte), in modo che pompando si rompa la condizione di uguaglianza fra inizio e fine, o si violi la proprietà di w. Contraddizione e quindi linguaggio non regolare.

Osservazione conclusiva. In tutti i casi, la "forma"

$$\text{stringa} = \underbrace{\dots}_{\text{parte}}\ \underbrace{\dots}_{\text{parte}}\ \underbrace{\dots}_{\text{parte}}$$

con uno specifico vincolo *non banale* fra *blocco iniziale*, *centrale* e *finale* è un segnale tipico di non regolarità (se tale vincolo richiede memoria potenzialmente illimitata). L'applicazione schematica del Lemma di Pumping (o Myhill–Nerode) mostra il motivo per cui un DFA non può riconoscere stringhe simili.