# Automi e Linguaggi Formali - Q&A - $PAL_{TM}$

Gabriel Rovesti

Anno Accademico 2024-2025

## Esercizio PAL_TM

Un linguaggio $B \subseteq \{0,1\}^*$ è **palindromo** se ogni stringa in $B$ è palindroma, cioè se $w = w^R$ per ogni $w \in B$. Ad esempio, sia $\{00, 1101, 1001\}$ che $\emptyset$ sono linguaggi palindromi, mentre $\{00, 10\}$ non lo è. Considera il problema di determinare se il linguaggio di una TM $M$ è palindromo.

**Definizione 1.** $\text{PAL\_TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una TM e } L(M) \text{ è palindromo}\}$

**Teorema 1.** PAL_TM è indecidibile.

*Dimostrazione.* Dimostriamo l'indecidibilità per riduzione dal problema della cofinalità $A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ accetta } w\}$. Costruiamo una funzione di riduzione $f : \{\langle M, w \rangle\} \mapsto \{\langle M' \rangle\}$ dove $M'$ è la TM che su input $x$:

1. Simula $M$ su input $w$
2. Se $M$ accetta $w$, accetta se $x = x^R$ **oppure** se $x =$ "10"
3. Se $M$ non accetta $w$ (rifiuta o va in loop), accetta qualunque input $x$

Restituisce $\langle M' \rangle$.

**Analisi dei casi:**

**Caso 1:** Se $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}}$, allora $M$ accetta $w$, quindi $M'$ accetta solo palindromi e la stringa "10". Poiché "10" non è palindroma, $L(M')$ contiene almeno una stringa non palindroma, perciò $\langle M' \rangle \notin \text{PAL\_TM}$.

**Caso 2:** Se $\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}}$, allora $M$ non accetta $w$, quindi $L(M') = \{0,1\}^*$ che contiene stringhe non palindrome come "10", perciò $\langle M' \rangle \notin \text{PAL\_TM}$.

Quindi abbiamo:

$$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff \langle M' \rangle \notin \text{PAL\_TM}$$

Equivalentemente:

$$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff \langle M' \rangle \in \overline{\text{PAL\_TM}}$$

Poiché $A_{\text{TM}}$ è indecidibile e si riduce a $\overline{\text{PAL\_TM}}$, anche $\overline{\text{PAL\_TM}}$ è indecidibile. Siccome $E_{\text{TM}}$ è indecidibile e si riduce a PAL_TM, anche PAL_TM è indecidibile. $\square$

## Osservazione

La chiave di questa dimostrazione è garantire che quando $M$ accetta $w$, il linguaggio $L(M')$ contenga almeno una stringa non palindroma. L'aggiunta della stringa "10" è cruciale: senza di essa, $L(M')$ conterrebbe solo palindromi e sarebbe quindi palindromo, rendendo la riduzione inefficace.

Una costruzione alternativa potrebbe far accettare a $M'$ l'insieme vuoto quando $M$ accetta $w$ (che è palindromo) e un linguaggio non palindromo quando $M$ non accetta $w$, invertendo così la riduzione.