3. Considerate il linguaggio $L_1 = \{0^n 1^m 0^m : n, m > 0\}$. Questo linguaggio è regolare? Dimostrare formalmente la risposta.

Il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia:

- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 01^h0^h$, che appartiene ad L_1 ed è di lunghezza maggiore di h;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
- poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso 01^h di w. Ci sono due casi possibili.
  - Se $x \neq \varepsilon$ allora y è composta solo da 1. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = 1^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $01^{h+p}0^h$, e quindi non appartiene al linguaggio perché il numero di 1 è diverso dal numero di 0 nell'ultima parte della parola.
  - Se $x = \varepsilon$ allora, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = 01^p$ per qualche valore $p \geq 0$. Notate in questo caso lo zero iniziale è compreso in y (perché x è vuota). Allora la parola xy^0z è nella forma $1^{h-p}0^h$, e quindi non appartiene al linguaggio perché non inizia con 0, mentre tutte le parole di L_1 devono iniziare con 0 perché $n > 0$.

In entrambi i casi abbiamo trovato un assurdo quindi L_1 non può essere regolare.

2. Considerate il linguaggio $L = \left\{0^{2n}1^m0^n : n, m \geq 0\right\}$. Questo linguaggio è regolare? Dimostrare formalmente la risposta.

Il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia:

- *sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;*
- *consideriamo la parola $w = 0^{2h}10^h$, che appartiene ad L ed è di lunghezza maggiore di h;*
- *sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;*
- *poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso 0^{2h} di w, e quindi sia x che y sono composte solo da 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = 0^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $0^{2h+p}10^h$, e quindi non appartiene al linguaggio perché il numero di 0 nella prima parte della parola non è uguale al doppio del numero di 0 nella seconda parte della parola.*

Abbiamo trovato un assurdo quindi L_1 non può essere regolare.

2. Considerate il linguaggio $L = \{www \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Questo linguaggio è regolare? Dimostrare formalmente la risposta.

Il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia:

- *sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;*
- *consideriamo la parola $v = a^hba^hba^hb$, che appartiene ad L ed è di lunghezza maggiore di h;*
- *sia $v = xyz$ una suddivisione di v tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;*
- *poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso a^h di v, e quindi sia x che y sono composte solo da a. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = a^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $a^{2h+p}ba^hba^hb$, e quindi non appartiene al linguaggio perché non è possibile suddividerla in tre sottostringhe uguali tra di loro.*

Abbiamo trovato un assurdo quindi L non può essere regolare.

4. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$ e considerate il linguaggio

$$M3N = \{0^m 1^n \mid m \leq 3n\}$$

(a) Completate il seguente schema di partita per il Gioco del Pumping Lemma in modo da far vincere il Giocatore 2:

> **Giocatore 1:** sceglie il valore di $h = \mathbf{2}$
> **Giocatore 2:** sceglie la parola $w \in M3N$ di lunghezza maggiore di h
>
> $$w = \mathbf{00000011}$$
>
> **Giocatore 1:** suddivide w in
> - $x = \mathbf{0}$
> - $y = \mathbf{0}$
> - $z = \mathbf{000011}$
>
> rispettando le condizioni che $|xy| \leq h$ e $y \neq \varepsilon$
> **Giocatore 2:** sceglie una potenza $k = \mathbf{2}$
> La parola $xy^k z = \mathbf{0000000111} \notin M3N$: vince il **Giocatore 2**

(b) Dimostrate che $M3N$ non è un linguaggio regolare usando il Pumping Lemma.

> Supponiamo per assurdo che $M3N$ sia regolare. Di conseguenza, $M3N$ deve rispettare il Pumping Lemma.
> - sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;
> - consideriamo la parola $w = 0^{3h}1^h$, che appartiene ad $M3N$ ed è di lunghezza maggiore di h;
> - sia $w = xyz$ una suddivisione arbitraria di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
> - poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso 0^{3h} di w posto prima della sequenza di 1, e quindi sia x che y sono composte solo da 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = 0^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $0^{3h+p}1^h$, e non appartiene al linguaggio perché il numero di 0 nel prefisso è maggiore del triplo del numero di 1 nel suffisso.
>
> Abbiamo trovato un assurdo: $M3N$ non è un linguaggio regolare.

4. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$ e considerate il linguaggio

$$LMN = \{0^\ell 1^m 0^n \mid \ell < n\}$$

(a) Completate il seguente schema di partita per il Gioco del Pumping Lemma in modo da far vincere il Giocatore 2:

> **Giocatore 1:** sceglie il valore di $h = \mathbf{4}$
> **Giocatore 2:** sceglie la parola $w \in LMN$ di lunghezza maggiore di h
>
> $$w = \mathbf{0000011000000}$$
>
> **Giocatore 1:** suddivide w in
> - $x = \mathbf{0}$
> - $y = \mathbf{00}$
> - $z = \mathbf{0011000000}$
>
> rispettando le condizioni che $|xy| \leq h$ e $y \neq \varepsilon$
> **Giocatore 2:** sceglie una potenza $k = \mathbf{2}$
> La parola $xy^k z = \mathbf{000000011000000} \notin LMN$: vince il **Giocatore 2**

(b) Dimostrate che LMN non è un linguaggio regolare usando il Pumping Lemma.

> Supponiamo per assurdo che LMN sia regolare. Di conseguenza, LMN deve rispettare il Pumping Lemma.
> - sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;
> - consideriamo la parola $w = 0^h10^{h+1}$, che appartiene ad LMN ed è di lunghezza maggiore di h;
> - sia $w = xyz$ una suddivisione arbitraria di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
> - poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso 0^h di w posto prima dell'1 di separazione, e quindi sia x che y sono composte solo da 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = 0^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $0^{h+1}10^{h+1}$, e non appartiene al linguaggio perché la lunghezza della prima sequenza di 0 è uguale alla lunghezza della seconda sequenza di 0.
>
> Abbiamo trovato un assurdo: LMN non è un linguaggio regolare.

4. Sia $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{=}\}$ e considerate il linguaggio

$$EQ = \{w\mathtt{=}w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$$

Per esempio, la stringa `abab=abab` appartiene ad EQ perché la stringa a destra dell'uguale è identica alla stringa a sinistra dell'uguale. Viceversa, la stringa `aaaa=abb` non appartiene ad EQ perché la stringa a destra dell'uguale è diversa dalla stringa a sinistra dell'uguale.

(a) Completate il seguente schema di partita per il Gioco del Pumping Lemma in modo da far vincere il Giocatore 2:

Giocatore 1: sceglie il valore di $h = \mathbf{4}$
Giocatore 2: sceglie la parola $w \in EQ$ di lunghezza maggiore di h

$$w = \mathtt{aaaa=aaaa}$$

Giocatore 1: suddivide w in

- $x = \mathtt{a}$
- $y = \mathtt{aa}$
- $z = \mathtt{a=aaaa}$

rispettando le condizioni che $|xy| \leq h$ e $y \neq \varepsilon$
Giocatore 2: sceglie una potenza $k = \mathbf{2}$
La parola $xy^kz = \mathtt{aaaaaa=aaaa} \notin EQ$: vince il **Giocatore 2**

(b) Dimostrate che EQ non è un linguaggio regolare usando il Pumping Lemma.

Supponiamo per assurdo che EQ sia regolare:

- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = \mathtt{a}^h\mathtt{=}\mathtt{a}^h$, che appartiene ad EQ ed è di lunghezza maggiore di h;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
- poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso $\mathtt{a}^h$ di w posto prima dell'ugale, e quindi sia x che y sono composte solo da $\mathtt{a}$. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = \mathtt{a}^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $\mathtt{a}^{h+p}\mathtt{=}\mathtt{a}^h$, e non appartiene al linguaggio perché la stringa a destra dell'uguale è diversa dalla stringa a sinistra dell'uguale.

Abbiamo trovato un assurdo quindi EQ non può essere regolare.

3. Il linguaggio

$$L = \left\{a^n b^m c^{n-m} : n > m > 0\right\}$$

è regolare? Motivare in modo formale la risposta.

Soluzione: Il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia:

- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma; possiamo supporre senza perdita di generalità che $h > 1$;
- consideriamo la parola $w = a^h b c^{h-1}$, che appartiene ad L ed è di lunghezza maggiore di h;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
- poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso a^h di w, e quindi sia x che y sono composte solo da a. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = a^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $a^{h+p}bc^{h-1}$, e quindi non appartiene al linguaggio perché il numero di c non è uguale al numero di a meno il numero di b (dovrebbero essere $h + p - 1$ mentre sono solo $h - 1$).

Abbiamo trovato un assurdo quindi L non può essere regolare.

2. Considera il linguaggio

$$L_1 = \{a^\ell b^m c^n \mid \ell, m, n \geq 0 \text{ e se } \ell = 1 \text{ allora } m = n\}.$$

(a) Mostra che L_1 non è regolare.
(b) Mostra che L_1 si comporta come un linguaggio regolare rispetto al Pumping Lemma. In altre parole, dai una lunghezza del pumping k e dimostra che L_1 soddisfa le condizioni del Pumping Lemma per questo valore di k.
(c) Spiega perché i punti (a) e (b) non contraddicono il Pumping Lemma.

Seconda alternativa: Per le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, sappiamo che l'intersezione di linguaggi regolari è un linguaggio regolare. Se intersechiamo L_1 con un linguaggio regolare e quello che otteniamo non è un linguaggio regolare, allora possiamo concludere che L_1 non può essere regolare. Consideriamo il linguaggio $L' = L_1 \cap \{a^* b^* c^*\} = \{ab^m c^m \mid m \geq 0\}$, e usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che non è regolare. Supponiamo per assurdo che L' sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = ab^k c^k$, che appartiene ad L' ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- siccome $|xy| \leq k$, allora x e y devono cadere all'interno del prefisso ab^k della parola w. Ci sono due casi possibili, secondo la struttura di y:
  - y contiene la a iniziale. In questo caso la parola xy^2z non appartiene ad L' perché contiene due a;
  - y contiene solamente b. In questo caso la parola xy^2z non appartiene ad L' perché contiene più b che c.

In entrambi i casi abbiamo trovato un assurdo quindi L' non è regolare, e possiamo concludere che neanche L_1 può essere regolare.

(b) Mostriamo che L_1 si comporta come un linguaggio regolare rispetto al Pumping Lemma.
- Poniamo come lunghezza del pumping $k = 2$.
- Data una qualsiasi parola $w = a^\ell b^m c^n \in L_1$ di lunghezza maggiore o uguale a 2, si possono presentare vari casi, secondo il numero di a presenti nella parola:
  - se c'è una sola a, allora $w = ab^m c^m$. Scegliamo la suddivisione $x = \varepsilon$, $y = a$ e $z = b^m c^m$. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola $xy^iz = a^i b^m c^m$ appartiene a L_1: se $i = 1$ allora il numero di b è uguale al numero di c come richiesto, mentre se $i \neq 1$ il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c;
  - se ci sono esattamente due a, allora $w = aab^m c^n$. Scegliamo la suddivisione $x = \varepsilon$, $y = aa$ e $z = b^m c^n$. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola $xy^iz = a^{2i} b^m c^n$ appartiene a L_1: il numero di a è pari, quindi sempre diverso da 1, e ricadiamo nelle situazioni in cui il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c;
  - se ci sono almeno tre a, allora $w = a^\ell b^m c^n$ con $\ell \geq 3$. Scegliamo la suddivisione $x = \varepsilon$, $y = a$ e $z = a^{\ell-1} b^m c^n$. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola $xy^iz = a^{i+\ell-1} b^m c^n$ contiene almeno due a, e quindi appartiene a L_1, perché rientra nelle situazioni in cui il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c;
  - se non ci sono a, allora $w = b^m c^n$. Scegliamo la suddivisione che pone $x = \varepsilon$, y uguale al primo carattere della parola e z uguale al resto della parola. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola xy^iz sarà nella forma $b^p c^q$ per qualche $p, q \geq 0$ e quindi appartenente a L_1, perché quando non ci sono a il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c.

In tutti i casi possibili la parola può essere pompata senza uscire dal linguaggio, quindi L_1 rispetta le condizioni del Pumping Lemma.

(c) Il Pumping Lemma stabilisce che se un linguaggio è regolare, allora deve rispettare certe condizioni. Il verso opposto dell'implicazione non è vero: possono esistere linguaggi, come L_1, che rispettano le condizioni ma non sono regolari. Di conseguenza, i punti (a) e (b) non contraddicono il lemma.

2. Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w \in \{1, \#\}^* \mid w = x_1\#x_2\#\ldots\#x_k \text{ con } k \geq 0, \text{ ciascun } x_i \in 1^* \text{ e } x_i \neq x_j \text{ per ogni } i \neq j\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

2. Consideriamo il linguaggio

$$L_2 = \{w \in \{1, \#\}^* \mid w = x_1\#x_2\#\ldots\#x_k \text{ con } k \geq 0, \text{ ciascun } x_i \in 1^* \text{ e } x_i \neq x_j \text{ per ogni } i \neq j\}.$$

Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 1^k\#1^{k-1}\#\ldots\#1\#\#$, che appartiene ad L_2 ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella prima sequenza di 1. Inoltre, siccome $y \neq \emptyset$, abbiamo che $x = 1^q$ e $y = 1^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 1^{k-q-p}\#1^{k-1}\#\ldots\#1\#\#$. Consideriamo l'esponente $i = 0$: la parola xy^0z ha la forma
$$xy^0z = xz = 1^q1^{k-q-p}\#1^{k-1}\#\ldots\#1\# = 1^{k-p}\#1^{k-1}\#\ldots\#1\#\#$$
Siccome la parola z contiene tutte le sequenze di 1 di lunghezza decrescente da $k-1$ a 0, allora una delle sequenze sarà uguale alla sequenza 1^{k-p}, che è di lunghezza strettamente minore di k perché $p > 0$. Di conseguenza, la parola xy^0z non appartiene al linguaggio L_2, in contraddizione con l'enunciato del Pumping Lemma.

Abbiamo trovato un assurdo quindi L_2 non può essere regolare.

2. *Considera il linguaggio*

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ contiene lo stesso numero di } 00 \text{ e di } 11\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k1^k$, che appartiene ad L_2 ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza di 0. Inoltre, siccome $y \neq \emptyset$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}1^k$. Consideriamo l'esponente $i = 0$: la parola xy^0z ha la forma
$$xy^0z = xz = 0^q0^{k-q-p}1^k = 0^{k-p}1^k$$
e contiene un numero di occorrenze di 00 minore delle occorrenze di 11. Di conseguenza, la parola non appartiene al linguaggio L_2, in contraddizione con l'enunciato del Pumping Lemma.

1. (8 punti) *Considera il linguaggio*

$$L = \{0^m 1^n \mid m/n \text{ è un numero intero}\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^{k+1}1^{k+1}$, che è di lunghezza maggiore di k ed appartiene ad L perché $(k+1)/(k+1) = 1$;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza di 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k+1-q-p}1^{k+1}$. Consideriamo l'esponente $i = 0$: la parola xy^0z ha la forma

$$xy^0z = xz = 0^q 0^{k+1-q-p} 1^{k+1} = 0^{k+1-p} 1^{k+1}.$$

Si può notare che $(k+1-p)/(k+1)$ è un numero strettamente compreso tra 0 e 1, e quindi non può essere un numero intero. Di conseguenza, la parola non appartiene al linguaggio L, in contraddizione con l'enunciato del Pumping Lemma.

2. Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w0^n \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } n = |w|\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Per dimostrare che L2 = {w0^n | w ∈ {0,1}* e n = |w|} non è regolare:

Usiamo il pumping lemma per i linguaggi regolari. Supponiamo per assurdo che L2 sia regolare. Sia p la costante del pumping lemma. Consideriamo la stringa s = 1^p 0^p ∈ L2. Secondo il pumping lemma, s può essere divisa in xyz tale che |xy| ≤ p, |y| > 0, e xy^i z ∈ L2 per ogni i ≥ 0.

Dato che |xy| ≤ p, xy è composto solo da 1. Sia |y| = k > 0. Consideriamo xy^2 z = 1^(p+k) 0^p. Questa stringa non è in L2 perché ha p+k uno e solo p zero. Abbiamo trovato una contraddizione, quindi L2 non è regolare.

1. (8 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid m = n^3\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Utilizziamo il Pumping Lemma per linguaggi regolari. Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Sia p la costante del pumping lemma. Consideriamo la stringa s = 0^(p^3) 1^p ∈ L. Secondo il lemma, s può essere divisa in xyz tale che: (1) |xy| ≤ p (2) |y| > 0 (3) xy^i z ∈ L per ogni i ≥ 0

Dato che |xy| ≤ p, xy è composto solo da 0. Sia |y| = k > 0. Consideriamo xy^2 z = 0^(p^3 + k) 1^p. Questa stringa non è in L perché p^3 + k ≠ p^3 (dato che k > 0). Abbiamo trovato una contraddizione, quindi L non è regolare.

1. (8 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid m > 3n\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Usiamo il Pumping Lemma per linguaggi regolari. Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Sia p la costante del pumping lemma. Consideriamo la stringa s = 0^(3p+1) 1^p ∈ L. Secondo il lemma, s può essere divisa in xyz tale che: (1) |xy| ≤ p (2) |y| > 0 (3) xy^i z ∈ L per ogni i ≥ 0

Dato che |xy| ≤ p, xy è composto solo da 0. Sia |y| = k > 0. Consideriamo xy^0 z = 0^(3p+1-k) 1^p. Questa stringa non è in L perché 3p+1-k ≤ 3p < 3p+1 (dato che k > 0). Abbiamo trovato una contraddizione, quindi L non è regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w1^n \mid w \text{ è una stringa di 0 e 1 di lunghezza } n\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k 1^k$, che appartiene ad L_2 ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 0. Inoltre, siccome $y \neq \emptyset$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}1^k$. Consideriamo l'esponente $i = 2$: la parola xy^2z ha la forma

  $$xy^2z = 0^q 0^{2p} 0^{k-q-p} 1^k = 0^{k+p} 1^k$$

  Poiché $p > 0$, la sequenza iniziale di 0 è più lunga della sequenza finale di 1, e quindi la parola iterata xy^2z non può essere scritta nella forma $w1^n$ con $n = |w|$ perché non contiene abbastanza 1.

Abbiamo trovato un assurdo quindi L_2 non può essere regolare.

Nota: per questo esercizio scegliere l'esponente $i = 0$ non è corretto, perché se p è pari allora la parola xy^0z appartiene al linguaggio L_2, in quanto può essere scritta come $0^{k-p}1^k = 0^{k-p}1^{p/2}1^{k-p/2} = w1^{k-p/2}$ con $w = 0^{k-p}1^{p/2}$ parola di lunghezza $k - p/2$.

2. (12 punti) Se w è una stringa di 0 e 1, allora $\overline{w}$ è una stringa formata da w sostituendo gli 0 con 1 e viceversa; per esempio $\overline{011} = 100$. Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w\overline{w} \mid w \in \{0,1\}^*\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Prima di procedere con la soluzione ci è utile osservare che data una qualsiasi parola w, la parola $\overline{w}$ avrà sempre un numero di 0 uguale al numero di 1 di w, ed un numero di 1 uguale al numero di 0 di w. Di conseguenza, ogni parola nella forma $w\overline{w}$ avrà un numero di 0 uguale al numero di 1.

Ora possiamo usare il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k 1^k$, che appartiene ad L_2 perché $\overline{0^k} = 1^k$, ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 0. Inoltre, siccome $y \neq \emptyset$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}1^k$. Consideriamo l'esponente $i = 2$: la parola xy^2z ha la forma

  $$xy^2z = 0^q 0^{2p} 0^{k-q-p} 1^k = 0^{k+p} 1^k$$

  Poiché $p > 0$, la parola iterata xy^2z contiene più 0 che 1 e di conseguenza non può essere scritta nella forma $w\overline{w}$.

2. **(12 punti)** Considera l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, e sia L_2 l'insieme di tutte le stringhe che contengono almeno un 1 nella loro seconda metà:

$$L_2 = \{uv \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^*1\Sigma^* \text{ e } |u| \geq |v|\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Per dimostrare che L2 non è regolare, usiamo il pumping lemma per linguaggi regolari.

Supponiamo per assurdo che L2 sia regolare. Sia p la lunghezza del pumping data dal lemma. Consideriamo la stringa w = 0p10p ∈ L2. Secondo il pumping lemma, w può essere scritta come w = xyz con |xy| ≤ p e |y| > 0, tale che xyiz ∈ L2 per ogni i ≥ 0.

Poiché |xy| ≤ p, x e y sono interamente contenuti nella prima metà di w (composta solo da 0). Sia y = 0k con 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy0z = 0p-k10p. Questa stringa non appartiene a L2 perché la sua seconda metà (10p) non contiene 1.

Abbiamo trovato una contraddizione, quindi L2 non può essere regolare.

2. **(12 punti)** Considera l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, e sia L_2 l'insieme di tutte le stringhe che contengono almeno un 1 nella loro prima metà:

$$L_2 = \{uv \mid u \in \Sigma^*1\Sigma^*, v \in \Sigma^* \text{ e } |u| \leq |v|\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Useremo il pumping lemma per linguaggi regolari.

Supponiamo per assurdo che L2 sia regolare. Sia p la lunghezza del pumping data dal lemma. Consideriamo la stringa w = 1p0p1p ∈ L2. Secondo il pumping lemma, w può essere scritta come w = xyz con |xy| ≤ p, |y| > 0, tale che xyiz ∈ L2 per ogni i ≥ 0.

Poiché |xy| ≤ p, x e y sono interamente contenuti nella prima metà di w (composta solo da 1). Sia y = 1k con 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy0z = 1p-k0p1p. Questa stringa non appartiene a L2 perché: |1p-k| = p-k < p = |0p1p|, ma la prima metà (1p-k0p/2) non contiene 1 nella sua seconda metà.

Abbiamo trovato una contraddizione, quindi L2 non può essere regolare.

1. **(9 punti)** Considera il linguaggio

$$L = \{1^n 0^{2^n} \mid n \leq 0\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Useremo il pumping lemma per linguaggi regolari.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Sia p la lunghezza del pumping data dal lemma. Consideriamo la stringa w = 1^p0^(2^p) ∈ L. Secondo il pumping lemma, w può essere scritta come w = xyz con |xy| ≤ p, |y| > 0, tale che xy^iz ∈ L per ogni i ≥ 0.

Poiché |xy| ≤ p, x e y sono interamente contenuti nella sequenza di 1 all'inizio di w. Sia y = 1^k con 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy^2z = 1^(p+k)0^(2^p). Per appartenere a L, questa stringa dovrebbe essere della forma 1^(p+k)0^(2^(p+k)). Ma 2^(p+k) > 2^p per k > 0, quindi xy^2z non appartiene a L.

Abbiamo trovato una contraddizione, quindi L non può essere regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{1^n w \mid w \text{ è una stringa di 0 e 1 di lunghezza } n\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 1^k 0^k$, che appartiene ad L_2 ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 1. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 1^q$ e $y = 1^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 1^{k-q-p}0^k$. Consideriamo l'esponente $i = 0$: la parola xy^0z ha la forma

  $$xy^0z = xz = 1^q 1^{k-q-p} 0^k = 1^{k-p} 0^k$$

  Poiché $p > 0$, la sequenza iniziale di 1 è più corta della sequenza finale di 0, e quindi la parola iterata xy^0z non può essere scritta nella forma $1^n w$ con $n = |w|$ perché non contiene abbastanza 1 nella parte iniziale.

Abbiamo trovato un assurdo quindi L_2 non può essere regolare.

Nota: per questo esercizio scegliere un esponente $i > 1$ non è corretto, perché se p è pari allora la parola xy^iz appartiene al linguaggio L_2, in quanto può essere scritta come $1^{k+ip}0^k = 1^k 1^{ip/2} 1^{ip/2} 0^k = 1^{k+ip/2} w$ con $w = 1^{ip/2}0^k$ parola di lunghezza $k + ip/2$.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{wwu \mid u, w \text{ sono stringhe di 0 e 1 tali che } |u| = |w|\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 1^k 1^k 0^k$, che è di lunghezza maggiore di k ed appartiene ad L_2 perché il primo terzo della parola è uguale al secondo terzo;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;

- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 1. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 1^q$ e $y = 1^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 1^{k-q-p}1^k 0^k$. Consideriamo l'esponente $i = 0$: la parola xy^0z ha la forma

  $$xy^0z = xz = 1^q 1^{k-q-p} 1^k 0^k = 1^{k-p} 1^k 0^k$$

  Poiché $p > 0$, la sequenza iniziale di 1 è più corta di $2k$, e quindi la parola iterata xy^0z non appartiene ad L_2 perché il primo terzo della parola è fatta solamente da 1 mentre il secondo terzo include anche un certo numero di 0.

Abbiamo trovato un assurdo quindi L_2 non può essere regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{uwu \mid u, w \text{ sono stringhe di 0 e 1 tali che } |u| = |w|\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 1^k0^k1^k$, che è di lunghezza maggiore di k ed appartiene ad L_2 perché il primo terzo della parola è uguale all'ultimo terzo;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 1. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 1^q$ e $y = 1^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 1^{k-q-p}0^k1^k$. Consideriamo l'esponente $i = 2$: la parola xy^2z ha la forma

$$xy^2z = 1^q1^{2p}1^{k-q-p}0^k1^k = 1^{k+p}0^k1^k$$

  Poiché $p > 0$, la sequenza iniziale di 1 è più lunga della sequenza finale di 1, e quindi la parola iterata xy^2z non appartiene ad L_2 perché il primo terzo della parola è fatta solamente da 1 mentre l'ultimo terzo include anche un certo numero di 0.

Abbiamo trovato un assurdo quindi L_2 non può essere regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{uvvu \mid u, v \in \{0, 1\}^*\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che L_2 sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k110^k$, che è di lunghezza maggiore di k ed appartiene ad L_2 perché la possiamo scrivere come $uvvu$ ponendo $u = 0^k$ e $v = 1$;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}110^k$. Consideriamo l'esponente $i = 2$: la parola xy^2z ha la forma

$$xy^2z = 0^q0^{2p}0^{k-q-p}110^k = 0^{k+p}110^k$$

  La parola iterata xy^2z non appartiene ad L_2 perché non si può scrivere nella forma $uvvu$. Visto che la parte iniziale deve essere uguale a quella finale, si deve porre $u = 0^k$, ma in questo caso la parte centrale della parola è 0^p11 che non si può dividere in due metà uguali. Viceversa, se si pone $v = 1$ per avere la parte centrale della parola composta da due metà uguali, allora si ottiene una sequenza iniziale di 0 che è più lunga della sequenza finale di 0.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ non è palindroma}\}.$$

Una parola è *palindroma* se rimane uguale letta da sinistra a destra e da destra a sinistra. Dimostra che L_2 non è regolare.

Soluzione: Consideriamo il complementare del linguaggio L_2, ossia il linguaggio

$$\overline{L_2} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ è palindroma}\}.$$

Usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio $\overline{L_2}$ non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^k 1 0^k$, che è di lunghezza maggiore di k ed è palindroma;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- poiché $|xy| \leq k$, allora x e y sono entrambe contenute nella sequenza iniziale di 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, abbiamo che $x = 0^q$ e $y = 0^p$ per qualche $q \geq 0$ e $p > 0$. z contiene la parte rimanente della stringa: $z = 0^{k-q-p}10^k$. Consideriamo l'esponente $i = 2$: la parola xy^2z ha la forma

$$xy^2z = 0^q 0^{2p} 0^{k-q-p} 1 0^k = 0^{k+p} 1 0^k$$

  La parola iterata xy^2z non appartiene ad $\overline{L_2}$ perché non è palindroma: se la rovesciamo diventa la parola $0^k 1 0^{k+p}$ che è una parola diversa perché $p > 0$.

Abbiamo trovato un assurdo quindi $\overline{L_2}$ non può essere regolare.

Siccome i linguaggi regolari sono chiusi per complementazione, nemmeno L_2 può essere regolare.

1. (9 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid 2m > 3n + 1\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Sia p la lunghezza di pumping data dal lemma. Consideriamo la stringa s = 0^(3p/2+1) 1^p ∈ L. Per il Pumping Lemma, s può essere scritta come s = xyz con |xy| ≤ p, |y| > 0 e xy^i z ∈ L per ogni i ≥ 0.

Poiché |xy| ≤ p, y deve essere composto solo da 0. Sia y = 0^k con 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy^0 z, ovvero xz. Questa stringa ha la forma: 0^(3p/2+1-k) 1^p

Ma 2(3p/2+1-k) = 3p+2-2k ≤ 3p+2-2 = 3p < 3p+1 Quindi xy^0 z ∉ L, contraddicendo il Pumping Lemma.

1. (9 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid 3m \leq 2n\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Sia p la lunghezza di pumping data dal lemma. Consideriamo la stringa s = 0^(2p) 1^(3p) ∈ L. Per il Pumping Lemma, s può essere scritta come s = xyz con |xy| ≤ p, |y| > 0 e xy^i z ∈ L per ogni i ≥ 0.

Poiché |xy| ≤ p, y deve essere composto solo da 0. Sia y = 0^k con 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy^2 z. Questa stringa ha la forma: 0^(2p+k) 1^(3p)

Ma 3(2p+k) > 3(2p) = 6p > 2(3p) Quindi xy^2 z ∉ L, contraddicendo il Pumping Lemma.

Questo dimostra che L non è regolare.

1. (9 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{a^{n^2} b^{n^2} \mid n > 0\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Per L = {a^(n^2) b^(n^2) | n > 0}, dimostriamo che non è regolare:

Supponiamo per assurdo che L sia regolare. Sia p la lunghezza di pumping data dal lemma. Consideriamo la stringa s = a^(p^2) b^(p^2) ∈ L. Per il Pumping Lemma, s può essere scritta come s = xyz con |xy| ≤ p, |y| > 0 e xy^i z ∈ L per ogni i ≥ 0.

Poiché |xy| ≤ p, y deve essere composto solo da a. Sia y = a^k con 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy^2 z. Questa stringa ha la forma: a^(p^2+k) b^(p^2)

Ma p^2+k non è un quadrato perfetto per 0 < k ≤ p. Quindi xy^2 z ∉ L, contraddicendo il Pumping Lemma.

Questo dimostra che L non è regolare.

2. (12 punti) Dimostra che il seguente linguaggio non è regolare:

$$L_2 = \{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ e } x \neq y\}.$$

Dimostriamo che L2 = {x#y | x,y ∈ {0,1}* e x ≠ y} non è regolare.

Dimostrazione per contraddizione usando il Pumping Lemma: Supponiamo che L2 sia regolare. Sia p la lunghezza di pumping del Pumping Lemma. Consideriamo la stringa s = 0p#1p ∈ L2. Per il Pumping Lemma, s può essere scritta come s = xyz, dove:

- |xy| ≤ p
- |y| > 0
- xyiz ∈ L2 per ogni i ≥ 0

Data la struttura di s, y deve essere composta solo da 0, quindi y = 0k per qualche 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy0z = 0p-k#1p Questa stringa non appartiene a L2 perché la parte prima del # è più corta della parte dopo il #.

Questo contraddice il Pumping Lemma, quindi L2 non può essere regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ sono numeri binari tali che } x \text{ è un divisore di } y\}.$$

L'alfabeto di questo linguaggio è $\{0, 1, \#\}$. Ad esempio, $10\#100 \in L_2$ perché 2 è un divisore di 4, mentre $10\#0101 \notin L_2$ perché 2 non è divisore di 5. Dimostra che L_2 non è regolare.

Dimostrazione per contraddizione usando il Pumping Lemma: Supponiamo che L_2 sia regolare. Sia p la lunghezza di pumping del Pumping Lemma. Consideriamo la stringa s = 1#1^(p!) ∈ L_2 (1^(p!) rappresenta p! uni in binario). Per il Pumping Lemma, s può essere scritta come s = xyz, dove:

- |xy| ≤ p
- |y| > 0
- xy^iz ∈ L_2 per ogni i ≥ 0

Data la struttura di s, y deve essere composta solo da 1 dopo il #. Sia y = 1^k per qualche 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy^0z = 1#1^(p!-k) Questa stringa non appartiene a L_2 perché 1 non è un divisore di 1^(p!-k) per k > 0.

Infatti, p!-k non è divisibile per p! per ogni 0 < k ≤ p.

Questo contraddice il Pumping Lemma, quindi L_2 non può essere regolare.

2. (12 punti) Considera il linguaggio

$$L_2 = \{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ sono numeri binari tali che } x \text{ è un multiplo di } y\}.$$

L'alfabeto di questo linguaggio è $\{0, 1, \#\}$. Ad esempio, $100\#10 \in L_2$ perché 4 è multiplo di 2, mentre $0101\#10 \notin L_2$ perché 5 non è multiplo di 2. Dimostra che L_2 non è regolare.

Dimostrazione per contraddizione usando il Pumping Lemma: Supponiamo che L_2 sia regolare. Sia p la lunghezza di pumping del Pumping Lemma. Consideriamo la stringa s = 1^(p!)#1 ∈ L_2 (1^(p!) rappresenta p! in binario). Per il Pumping Lemma, s può essere scritta come s = xyz, dove:

- |xy| ≤ p
- |y| > 0
- xy^iz ∈ L_2 per ogni i ≥ 0

Data la struttura di s, y deve essere composta solo da 1 prima del #. Sia y = 1^k per qualche 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy^2z = 1^(p!+k)#1 Questa stringa non appartiene a L_2 perché p!+k non è un multiplo di 1 per k > 0.

Infatti, p!+k non è divisibile per p! per ogni 0 < k ≤ p.

Questo contraddice il Pumping Lemma, quindi L_2 non può essere regolare.

2. (12 punti) Date due stringhe u e v, diciamo che u è una *permutazione* di v se u ha gli stessi simboli di v con ugual numero di occorrenze, ma eventualmente in un ordine diverso. Per esempio, le stringhe 01011,e 00111 sono entrambe permutazioni di 11001.

Dimostra che il seguente linguaggio non è regolare:

$$L_2 = \{uv \mid u, v \in \{0,1\}^* \text{ e } u \text{ è una permutazione di } v\}.$$

Dimostrazione per contraddizione usando il Pumping Lemma: Supponiamo che L2 sia regolare. Sia p la lunghezza di pumping del Pumping Lemma. Consideriamo la stringa s = 0^p1^p0^p1^p ∈ L2. Per il Pumping Lemma, s può essere scritta come s = xyz, dove:

- |xy| ≤ p
- |y| > 0
- xy^iz ∈ L2 per ogni i ≥ 0

Data la struttura di s, y deve essere composta solo da 0 e deve trovarsi nella prima metà della stringa. Sia y = 0^k per qualche 0 < k ≤ p.

Consideriamo xy^2z = 0^(p+k)1^p0^p1^p Questa stringa non appartiene a L2 perché la prima metà contiene p+k zeri e p uni, mentre la seconda metà contiene p zeri e p uni. Non può essere una permutazione.

Questo contraddice il Pumping Lemma, quindi L2 non può essere regolare.

1. (9 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{1^m 0^n \mid 5m \leq 3n\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

Supponiamo per assurdo che L sia regolare.

Sia p la costante di pumping garantita dal lemma.

Consideriamo la stringa s = 1^(5p)0^(3p) ∈ L, poiché 5(5p) ≤ 3(3p).

|s| = 8p ≥ p, quindi possiamo applicare il pumping lemma.

Sia s = xyz, con |xy| ≤ p, |y| ≥ 1 e xy^i z ∈ L per ogni i≥0.

Poiché |xy| ≤ p, y può contenere solo 1.

Sia y = 1^k, con k≥1. Consideriamo i=0.

Allora xy^0 z = x1^0 z = xz = 1^(5p-k)0^(3p)

Ma (5p-k) non è divisibile per 5 se k≥1, quindi xz ∉ L.

Ciò è assurdo per il pumping lemma, quindi L non può essere regolare.