INCONTRO (3)

OVERVIEW

→ DIAGONALIZZAZIONE

→ LINGUAGGI NON DECIDIBILI / NON TURING-RICONOSCIBILI

→ CLASSI DI PROBLEMI NOTEVOLI

DECIDIBILITÀ — INDECIDIBILITÀ

$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una TM}, w \text{ è una stringa}\}$

↓ TUPLA

↓ ACCETTA

↓ INDECIDIBILE ⇒ PER ECCELLENZA

↓ DIAGONALIZZAZIONE

$M_1 \ldots \ldots M_n$

M_1

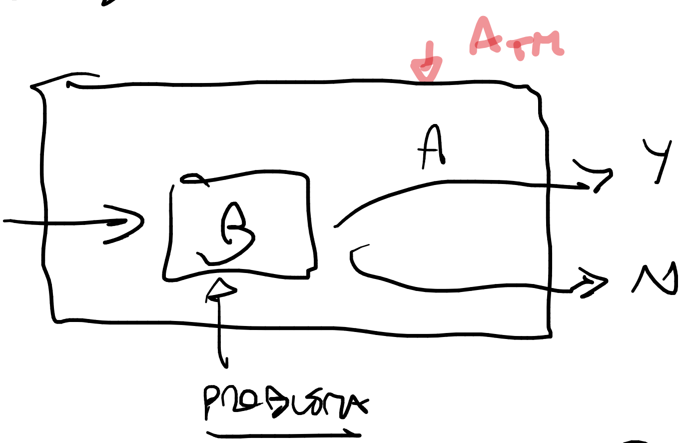
M_n

$\mathbb{R}$ — NON RIUSCIAMO PIÙ A CONTARLO

$(A \leq_m B)$ → INDECIDIBILITÀ → NP-HARD

PROBLEMA

A è INDECIDIBILE → B è INDECIDIBILE



$A_{TM} \leq_m$

$\overline{A_{TM}} \leq_m$

$A_{TM} \mid \overline{A_{TM}}$ → TURING-RICONOSCIBILE

$A_{2DFA} = \{\langle M, x\rangle \mid M$ è un 2DFA e M accetta $x\}$

§ 5.26 LIBRO

DFA → 2 TESTINE BIDIREZIONALI

→

←→

DIMOSTRA CHE A_{2DFA} È DECIDIBILE

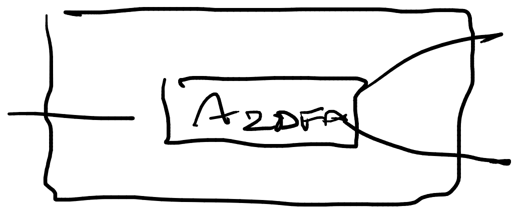
(A_{2DFA})

- A_{DFA} / A_{NFA} / A_{REX} / A_{CFG}
- TM che accetta A_{2DFA} → DECIDIBILE

PROBLEMA $\leq_m \underbrace{A_{2DFA}}$ → SOTTOPROBLEMA → x

INPUT

EQ_{DFA}



$EQ_{DFA} \leq_m \underbrace{A_{2DFA}}_{B}$

Se B DECIDIBILE, ALLORA A LO È

$EQDFA$ → C → $\langle A, B, w\rangle$ (SU INPUT TUPLA)

- Simula D sul nastro
  - Eseguiamo A fino ad esaurire gli input
  - Eseguiamo B

↓

A_{2DFA} → OUTPUT (x)

A2DFA

↓

D

è
DECIDIBILE

- Se D incontra X → ACCETTA
  ALTRIMENTI → RIFIUTA

A_{2DFA} è DECIDIBILE $\Longleftrightarrow$ EQ_{DFA} è DECIDIBILE

[§ 5.34] $X = \langle M, w \rangle$

M è una TM SINGLE-TAPE / NASTRO SINGOLO

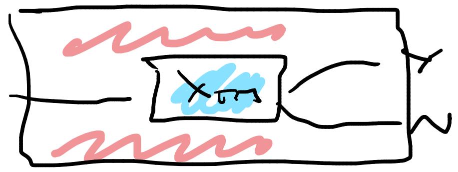
→ NON MODIFICA IL NASTRO
→ MA CONTIENE "w"

X è INDECIDIBILE → PROOF

X_{TM} INDECIDIBILE $\begin{cases} A_{TM} \\ HALT_{TM} \end{cases}$ = HALTING PROBLEM

PROBLEMA NOTORIOUS $\leq_m$ X_{TM}

A_{TM} B INDECIDIBILE

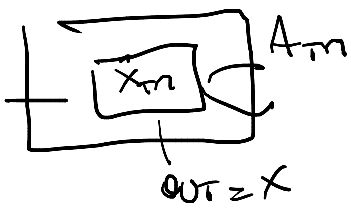


A_{TM}

$A_{TM} = \langle M, w \rangle$ = M accetta w
ACCEPT

$X_{TM} = \langle X, w \rangle$

M per A_{TM} → M = "su input ⟨w⟩"



0. → SIMULA SUL NASTRO LA COMPUTAZIONE DI INPUT DI X

0.1 → X COPIA SUL NASTRO IL SUO INPUT

0.2 → SE NEL SUO INPUT, ∃ w CONTINUA FINO ALLA FINE DELL'INPUT

0.3 → SE IN UN QUALSIASI PUNTO DELL'INPUT SCRIVE w, RIFIUTA ALTRIMENTI ACCETTA

USIAMO X_{TM} ACCETTANDO SULLE CONDIZIONI DI A_{TM}

→ 2. RESTITUISCE X IN OUTPUT

[SULLA BASE DI X { ACCETTA / RESPINGI }]

A_{TM} USA X → STOP

[$A_{TM} \le_m X_{TM}$]

E_{TM} => EMPTY => NON COMPARE MAI W RIF

$E_{TM} \le_m X_{TM}$

$HALT_{TM}$ => ⟨M, w⟩ = M accetta fermandosi su "w"

$EQ_{CFG} \le_m$

A_{TM} / $\overline{A_{TM}}$ → NO W → ACCETTA

$A_{1010} = \{ \langle M \rangle \mid M$ è una TM $\mid 1010 \in L(M) \}$

$A_{1010} \rightarrow$ INDECIDIBILE (?)

F = SU INPUT $\langle M, w \rangle$, M è una TM, w STRINGA

RIDUZIONE

1. M su input x $\qquad A_{TM} \leq_m A_{1010}$

1.a → SE $x = 1010$, esegue M su w

1.b → SE $x \neq 1010$, RIFIUTA

1.c → SE M ACCETTA, ACCETTA

ENTRA IN UNO STATO DI ACCETTAZIONE

1.d → ALTRIMENTI RIFIUTA

$\langle x \rangle$ $\langle M_w \rangle$] → CI DÀ IN OUTPUT UN INPUT CHE È INDECIDIBILE

$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \Leftrightarrow f\langle M, w \rangle \in A_{1010}$

IFF

① $\langle M, w \rangle \in A_{TM} \rightarrow M$ accetta w.

M_w ACCETTA 1010 $\rightarrow f\langle M, w \rangle = f\langle M_w \rangle \in A_{1010}$

② $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$ — M rifiuta / M non termina

loop INDEF ....

M_w RIFIUTA 1010

$f\langle M, w \rangle = f\langle M_w \rangle \notin A_{1010}$

$PERSISTENT_{CFG}$ → G = CFG, A = VARIABILE
∀ DERIVAZIONE DI G,
COMPARE $\underline{w}$ = STRINGA.

CONSIDERA IL PROBLEMA DELLA PERSISTENZA.

ⓐ FORMULA IL PROBLEMA COME LINGUAGGIO
ⓑ DIMOSTRA $\underbrace{PERSISTENT_{CFG}}$ → DECIDIBILE.

$\left\{ \underbrace{A_{CFG}}_{\substack{CFG \\ \text{CHE ACCETTA} \\ w}} / \underbrace{E_{CFG}}_{\text{VUOTO}} \right\} / \cancel{EQ_{CFG}}$ → INDECIDIBILE

→ ⓐ $\underline{PERSISTENT}_{CFG} = \{ \langle G, A \rangle \mid$ G è UNA CFG, A è UNA VARIABILE DERIVATA $\}$

∃ SEMPRE w NELLE DERIVAZIONI

SPECIFICA CON UN DECISORE D

$\left[\begin{array}{l} A_{CFG} \leq_m PERSISTENT_{CFG} \\ E_{CFG} \leq_m PERSISTENT_{CFG} \end{array} \right]$ DECIDIBILE

[$PERSISTENT_{CFG}$] D USA M CHE DECIDE $\underline{A_{CFG}}$

M = SU INPUT ⟨G, A⟩, G = CFG, A VARIABILE

1. → VERIFICA CHE NELLA PRODUZIONE DI A, ESISTE w

2. → ESEGUE D SU w
- SE w COMPARE IN A, ACCETTA
- SE w NON COMPARE, RIFIUTA

$\Downarrow$

$E_{CFG} \leq_m \text{PERSISTENT}_{CFG}$

$\Downarrow$ L(G), w non c'è! → N (decisore) su ⟨G, A⟩

→ verifica che A appartenga a G

→ costruisci una G' con tutte le regole di G e di A

→ M (viene eseguita da N) su G', verifica che w sia presente in tutte le regole
$\underbrace{\text{in tutte le regole}}_{\text{persistente}}$

vale anche questo! ↓ (contrario...)

[osservazione:
M → tutte derivazioni di G'
→ se trova L vuoto → accetta]

M ↗ rifiuta/va in loop
$\Updownarrow$ accetterebbe solo se non compare mai w

M ↘ accetta

⟨G, A⟩ G persistent_{CFG} ⟺ ⟨M, w⟩ su E_{CFG} / A_{CFG}

[TM con alfabeto binario ⇒ $\Sigma = \{0, 1\}$
$\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$]

(tornando)

↘ TM_{BINARY} → {0, 1, 2}

usa solo questi sul nastro

[Verifica che TM_{BINARY} sia una classe di linguaggi Turing-rec sull'alfabeto {0, 1}]

$$\left[\frac{TM_{\text{SINGOLO}}}{\{L,R\}} \Rightarrow TM_{\text{BINARY}}\right] \quad \text{SARÀ BUG } \{0,1\}$$

$$\Leftarrow$$

$\rightarrow \delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \underline{\{L,R\}}$

δ = TRANSIZIONE

- $\delta(r,a) = (q,b,R)$ → $\underbrace{\{0,1,\sqcup\}}$ $= \Gamma$

∃ CODIFICA C^K

LA TM SIMULA NORMALMENTE LO SPOSTAMENTO $\underline{R}$ = RIGHT e a seconda dai simboli

$K = 1 \rightarrow \{0\}$ $\quad K=3 = \{0,1,\sqcup\}$

$K = 2 \rightarrow \{0,1\}$

- $\delta(r,a) = (q,b,L)$

STESSO MOVIMENTO PER $\underline{L}$

RISPETTO ALLA TRANSIZIONE

→ SE M ACCETTA L → ACCETTA

ALTRIMENTI RIFIUTA

$(TM_{\text{SINGLE-TAPE}} \Rightarrow TM_{\text{BINARY}})$

$(\Leftarrow)$

NASTRO SINGOLO "BANALE" RISPETTO ALLA VARIANTE

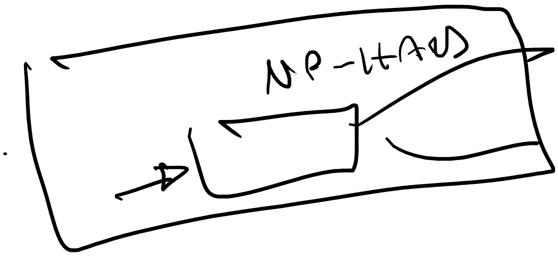
NP - HARD

VERIFICA

↳ DECIDIBILITÀ = CERTIFICATO

FINITO

LOGICA DI RIDUZIONE



→ PROBLEMI SU GRAFO

(VERTEX - COVER $\leq_m$ PROBLEMA)

....