

Tutorato di Automi e Linguaggi Formali

Homework 7: Macchine di Turing (TMs), varianti ed esempi

Gabriel Rovesti

Corso di Laurea in Informatica - Università degli Studi di Padova

Tutorato 7 - 05-05-2025

1 Macchine di Turing e Descrizioni Implementative

Esercizio 1. Sia data la seguente definizione formale di una Macchina di Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{accept}, q_{reject}\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$$

δ = tabella di transizione sottostante

Stato	Simbolo letto	Nuovo stato	Azione
q_0	0	q_1	(1, R)
q_0	1	q_0	(1, R)
q_0	\sqcup	q_2	(\sqcup , L)
q_1	0	q_1	(0, R)
q_1	1	q_0	(1, R)
q_1	\sqcup	q_{accept}	(\sqcup , R)
q_2	0	q_2	(0, L)
q_2	1	q_{reject}	(1, L)
q_2	\sqcup	q_{accept}	(\sqcup , R)

- Determina l'esito della computazione di M sulle seguenti stringhe: (i) 010, (ii) 1101, (iii) 00
- Descrivi informalmente quale linguaggio riconosce la macchina M
- Disegna il diagramma degli stati della macchina M

Esercizio 2. Per ciascuno dei seguenti linguaggi, fornire una descrizione a livello implementativo della TM in grado di accettare il linguaggio proposto:

- a) $L_1 = \{a^n b^m c^n \mid n, m \geq 1\}$
- b) $L_2 = \{w \mid w \text{ contiene un numero uguale di 0 e di 1}\}$
- c) $L_3 = \{w \mid w \text{ contiene un numero di 0 doppio rispetto al numero degli 1}\}$
- d) $L_4 = \{w \mid w \text{ non contiene il doppio degli 0 rispetto al numero degli 1}\}$

Nota: Per "descrizione a livello implementativo" si intende specificare in dettaglio il comportamento della macchina, descrivendo come si muove la testina, quali simboli scrive sul nastro e come cambia gli stati per riconoscere il linguaggio.

Esercizio 3. Progettare una macchina di Turing che implementi l'operazione di moltiplicazione tra due numeri naturali codificati in unario. In particolare, la macchina deve accettare input nella forma $a^n \# a^m$ e trasformare il nastro in modo che contenga $a^{n \cdot m}$.

- a) Fornire una descrizione dettagliata del funzionamento della macchina
- b) Descrivere lo stato del nastro in ogni fase dell'esecuzione per l'input $a^3 \# a^2$
- c) Discutere le possibili ottimizzazioni per rendere l'algoritmo più efficiente

2 Varianti delle Macchine di Turing

Esercizio 4. Una macchina di Turing con nastro doppiamente infinito è simile ad una macchina di Turing ordinaria, ma il nastro è infinito sia a sinistra che a destra. Il nastro è inizialmente riempito di blank, eccetto che per la porzione che contiene l'input. La computazione è definita come al solito, eccetto che la testina non incontra mai la fine del nastro mentre si muove a sinistra.

- a) Dimostrare che questo tipo di macchina di Turing riconosce la stessa classe di linguaggi delle macchine di Turing standard
- b) Descrivere esplicitamente come simulare una macchina di Turing con nastro doppiamente infinito usando una macchina di Turing standard
- c) Discutere se la simulazione comporta un aumento di complessità temporale o spaziale

Esercizio 5. Una macchina di Turing con nastro di sola lettura è una macchina di Turing che, oltre al nastro di lavoro standard, ha un nastro aggiuntivo di sola lettura che contiene l'input e sul quale la testina può solo leggere, senza scrivere.

- a) Dimostrare che questo tipo di macchina di Turing riconosce la stessa classe di linguaggi delle macchine di Turing standard
- b) Fornire una descrizione dettagliata di come simulare una macchina di Turing standard usando una macchina di Turing con nastro di sola lettura

- c) Implementare una macchina di Turing con nastro di sola lettura che riconosca il linguaggio $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$, dove w^R è il reverse di w

Esercizio 6. Una macchina di Turing a singola scrittura è una TM a nastro singolo che può modificare ogni cella del nastro al più una volta (inclusa la parte di input del nastro).

- a) Mostrare che questa variante di macchina di Turing è equivalente alla macchina di Turing standard
- b) Fornire una descrizione dettagliata di come simulare una macchina di Turing standard usando una macchina di Turing a singola scrittura
- c) Discutere quali limitazioni pratiche questa restrizione impone all'implementazione di algoritmi

Esercizio 7. Una macchina di Turing con "ferma" invece di "sinistra" è simile a una macchina di Turing ordinaria, ma la funzione di transizione ha la forma $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{S, R\}$. In ogni punto, la macchina può spostare la testina a destra (R) o lasciarla nella stessa posizione (S).

- a) Dimostrare che questa variante della macchina di Turing non è equivalente alla versione usuale
- b) Quale classe di linguaggi riconoscono queste macchine?
- c) Fornire un esempio di linguaggio che può essere riconosciuto da una macchina di Turing standard ma non da una macchina di Turing con "ferma" invece di "sinistra"

3 Enumeratori e Altre Varianti

Esercizio 8. Un enumeratore è una macchina di Turing speciale che inizia con un nastro vuoto e stampa su un nastro separato (usando una stampante) le stringhe di un certo linguaggio. L'enumeratore può generare le stringhe in qualsiasi ordine, anche con ripetizioni.

- a) Spiegare la connessione tra enumeratori e macchine di Turing che riconoscono linguaggi
- b) Progettare un enumeratore per il linguaggio $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$
- c) Progettare un enumeratore per il linguaggio $L = \{w \mid w \text{ contiene lo stesso numero di } 0 \text{ e } 1\}$