Tutorato di Automi e Linguaggi Formali

Esercizi in preparazione al primo parziale

Gabriel Rovesti
Corso di Laurea in Informatica - Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2024-2025

1 Linguaggi Regolari

Operazioni logiche bit a bit (da appello 16/4/2024) 1. L'or bit a bit è un'operazione binaria che prende due stringhe binarie di uguale lunghezza ed esegue l'or logico su ogni coppia di bit corrispondenti. Il risultato è una stringa binaria in cui ogni posizione è 0 se entrambi i bit sono 0, 1 altrimenti.

Date due stringhe binarie x e y di uguale lunghezza, $x \vee y$ rappresenta l'or bit a bit di x e y. Per esempio, $0011 \vee 0101 = 0111$.

Dimostra che se L ed M sono linguaggi regolari sull'alfabeto $\{0, 1\}$, allora anche il seguente linguaggio è regolare:

$$L \vee M = \{x \vee y \mid x \in L, y \in M \text{ e } |x| = |y|\}.$$

Suggerimento: Considerare il prodotto cartesiano degli automi per L e M.

Esercizio 2. Considera l'operazione Swap che scambia di posizione i caratteri della stringa a due a due:

$$\textsc{Swap}(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } w = \varepsilon \\ a & \text{se } w = a \text{ con } a \in \Sigma \\ a_1 a_0 \textsc{Swap}(u) & \text{se } w = a_0 a_1 u \text{ con } a_0, a_1 \in \Sigma, u \in \Sigma^* \end{cases}$$

Per esempio, $\textsc{Swap}(\texttt{ABCDE}) = \texttt{BADCE}$.

Dimostra che se $L \subseteq \Sigma^*$ è un linguaggio regolare, allora anche il seguente linguaggio è regolare:

$$\textsc{Swap}(L) = \{\textsc{Swap}(w) \mid w \in L\}.$$

Suggerimento: Costruire un NFA che simula gli stati dell'automa per L mentre legge i caratteri nell'ordine corretto dopo lo swap.

Chiusura rispetto al complemento di prefissi 3. Ricordiamo che una stringa x è un *prefisso* di una stringa y se esiste una stringa z tale che $xz = y$, e che x è un *prefisso proprio* di y se, in aggiunta, $x \neq y$.

Dimostra che la classe dei linguaggi regolari è chiusa sotto l'operazione:

$$\textsc{NoPrefix}(A) = \{w \in A \mid \text{nessun prefisso proprio di } w \text{ è un membro di } A\}.$$

Suggerimento: Considerare l'insieme degli stati attraversati durante l'elaborazione di w nell'automa deterministico per A.

Perfect Shuffle 4. Per i linguaggi A e B, definiamo il *perfect shuffle* di A e B come il linguaggio

$$\textsc{PerfShuffle}(A, B) = \{a_1b_1a_2b_2 \cdots a_nb_n \mid a_1a_2 \cdots a_n \in A, b_1b_2 \cdots b_n \in B, a_i, b_i \in \Sigma\}.$$

Dimostra che la classe dei linguaggi regolari è chiusa sotto perfect shuffle.

Trasformazione automi 5. Sia M un DFA con insieme degli stati Q, alfabeto Σ, funzione di transizione δ, stato iniziale q_0 e insieme degli stati finali F. Definisci un nuovo DFA M' che accetta esattamente le stringhe che vengono accettate da M dopo esattamente k passi, dove k è un numero naturale fissato. Dimostrane la correttezza.

Problema di decisione 6. È dato un linguaggio L definito da un'espressione regolare e una stringa w. Descrivere un algoritmo che determini se esistono stringhe x e y tali che $xwy \in L$. L'algoritmo deve avere complessità polinomiale nella dimensione dell'espressione regolare e nella lunghezza di w.

2 Pumping Lemma e Non-Regolarità

Divisori binari (da appello 16/4/2024) 7. Considera il linguaggio

$$L = \{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ sono numeri binari tali che } x \text{ è un divisore di } y\}.$$

L'alfabeto di questo linguaggio è $\{0, 1, \#\}$. Ad esempio, $10\#100 \in L$ perché 2 è un divisore di 4, mentre $10\#0101 \notin L$ perché 2 non è divisore di 5. Dimostra che L non è regolare.

Suggerimento: Utilizzare il pumping lemma considerando stringhe della forma $1^n\#1^{n^2}$.

Permutazioni (da appello 15/7/2024) 8. Date due stringhe u e v, diciamo che u è una permutazione di v se u ha gli stessi simboli di v con ugual numero di occorrenze, ma eventualmente in un ordine diverso. Per esempio, le stringhe 01011 e 00111 sono entrambe permutazioni di 11001.

Dimostra che il seguente linguaggio non è regolare:

$$L = \{uv \mid u, v \in \{0,1\}^* \text{ e } u \text{ è una permutazione di } v\}.$$

Suggerimento: Considerare stringhe della forma 0^n1^nw dove w è una permutazione di 0^n1^n.

Concatenazione potenze 9. Dimostra che il linguaggio $L = \{a^nb^m \mid n, m \geq 1, n \text{ è divisibile per } m\}$ non è regolare.

Stringhe palindrome 10. Dimostra che il linguaggio delle stringhe palindrome su $\{0,1\}$ non è regolare. Una stringa w è palindroma se $w = w^R$.

Potenze di 2 11. Dimostra che il linguaggio $L = \{a^n \mid n = 2^k \text{ per qualche } k \geq 0\}$ non è regolare.

3 Linguaggi Context-Free

Operazione MIX (da appello 16/4/2024) 12. Dati due linguaggi A, B, definiamo il linguaggio $\textsc{Mix}(A, B)$ come

$$\textsc{Mix}(A, B) = \{x_1y_1x_2y_2 \dots x_ny_n \mid n \geq 0, x_i \in A, y_i \in B\}.$$

Si noti che ciascun x_i, y_i è una stringa. Dimostra che la classe dei linguaggi context-free è chiusa per l'operazione $\textsc{Mix}$.

Suggerimento: Modificare la grammatica per A e B in modo da intrecciarle.

Palindromizzazione (da appello 15/7/2024) 13. Dimostra che se B è un linguaggio regolare, allora il linguaggio

$$\textsc{Palindromize}(B) = \{ww^R \mid w \in B\}$$

è un linguaggio context-free.

Suggerimento: Costruire una grammatica o un PDA.

Concatenazione con potenze 14. Siano A e B linguaggi su Σ. Definiamo $A \cdot B^n = \{xy \mid x \in A, y \in B^n\}$, dove B^n è il linguaggio ottenuto concatenando B con se stesso n volte.

Dimostra che se A e B sono linguaggi context-free, allora per ogni $n \geq 0$ fissato, anche $A \cdot B^n$ è context-free.

Context-free o no? 15. Determina quali dei seguenti linguaggi sono context-free, giustificando la risposta:

a) $L_1 = \{a^nb^mc^k \mid n = m \text{ o } m = k, \text{ dove } n, m, k \geq 1\}$

b) $L_2 = \{a^nb^nc^md^m \mid n, m \geq 1\}$

c) $L_3 = \{a^nb^m \mid n \neq m, \text{ dove } n, m \geq 1\}$

d) $L_4 = \{a^ib^jc^k \mid i + j = k, \text{ dove } i, j, k \geq 1\}$

e) $L_5 = \{a^ib^jc^kd^l \mid i = j \text{ e } k = l, \text{ dove } i, j, k, l \geq 1\}$

Suggerimento: Utilizzare il pumping lemma per CFG o costruire una CFG/PDA dove possibile.

Forma Normale di Chomsky 16. Converti la seguente grammatica in Forma Normale di Chomsky, mostrando tutti i passaggi della trasformazione:

$$G : \begin{aligned} S &\to AB \mid aSb \\ A &\to aA \mid \varepsilon \\ B &\to bB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Ricordare i passaggi: (1) Aggiungere un nuovo simbolo iniziale, (2) Eliminare le produzioni ε, (3) Eliminare le produzioni unitarie, (4) Convertire le restanti produzioni nella forma corretta.

4 Problemi Avanzati

Chiusura rotazionale 17. Abbiamo definito la chiusura rotazionale di un linguaggio A come $RC(A) = \{yx \mid xy \in A\}$.

a) Dimostra che la classe dei linguaggi regolari è chiusa sotto chiusura rotazionale.

b) Dimostra che la classe dei linguaggi context-free è chiusa sotto chiusura rotazionale.

SCRAMBLE di linguaggi 18. Per le stringhe w e t, scriviamo $w \cong t$ se i simboli di w sono una permutazione dei simboli di t. In altre parole, $w \cong t$ se t e w hanno gli stessi simboli nelle stesse quantità, ma possibilmente in un ordine diverso.

Per ogni stringa w, definiamo $\textsc{Scramble}(w) = \{t \mid t \cong w\}$. Per ogni linguaggio A, sia $\textsc{Scramble}(A) = \{t \mid t \in \textsc{Scramble}(w) \text{ per qualche } w \in A\}$.

a) Dimostra che se $\Sigma = \{0, 1\}$, allora lo SCRAMBLE di un linguaggio regolare è un linguaggio context-free.

b) Cosa succede nella parte (a) se Σ contiene tre o più simboli? Dimostra la risposta.

All-NFA 19. Un *all-NFA* M è una 5-tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ che accetta $x \in \Sigma^*$ se *ogni* possibile stato in cui M potrebbe trovarsi dopo aver letto l'input x è uno stato appartenente a F. Nota che questa definizione differisce da quella standard di un NFA.

Dimostra che gli all-NFA riconoscono esattamente la classe dei linguaggi regolari.

Operazioni con lunghezze uguali 20. Se A e B sono linguaggi, definiamo $A \circ B = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B \text{ e } |x| = |y|\}$.

a) Dimostra che se A e B sono linguaggi regolari, allora $A \circ B$ non è necessariamente regolare. Fornisci un controesempio.

b) Dimostra che se A e B sono linguaggi regolari, allora $A \circ B$ è context-free.

c) Cosa puoi dire se A è regolare e B è context-free?