

Nome: _____

Instruções:

1. Leia atentamente cada questão e responda cada item. Respostas **sem justificativas** não serão consideradas;
2. É permitido o uso de caneta esferográfica ou lápis e calculadora. Seja claro para apresentar suas respostas. **As respostas em que houver falta de nitidez ou procedimentos ilegíveis e/ou confusos não serão consideradas;**
3. Não é permitido o uso de telefones celulares, rádios, gravadores, fones de ouvido ou fontes de consulta de qualquer espécie.

A. Parte Teórica (Entrega em 30/06/2025 até 09:00h)

1. (2.0 pontos) Considere

$$Y = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

satisfazendo as Suposições **A1** – **A4**. Considere a seguinte partição

$$\mathbf{X}\beta = (\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\text{Var} [\hat{\beta}_2]$, onde $\hat{\beta}_2$ é o estimador de mínimos quadrados ordinários de β_2 .

2. (3.0 pontos) Considere

$$Y = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

satisfazendo as Suposições **A1** – **A4**. O uso de transformações em modelos de regressão é uma prática muito comum para alterar a forma da relação entre as variáveis preditoras e a variável resposta, visando melhorar o ajuste do modelo ou atender às suposições do modelo. Suponha a família de transformações propostas por Box-Cox (1964) [Box, George E. P.; Cox, D. R. (1964). "An analysis of transformations". Journal of the Royal Statistical Society, Series B. 26 (2): 211–252.], i.e.

$$Y(\lambda) = \begin{cases} \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0; \\ \log Y, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Dessa forma, considere o cenário

$$Y(\lambda) = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

mantendo as suposições do modelo original.

- a. Apresente um estimador para os parâmetros do modelo, i.e. β e σ^2 ;
- b. O novo estimador para β satisfaz o teorema de Gauss-Markov? Justifique;
- c. Construa as novas tabelas de ANOVA e apresente os respectivos testes para significância dos parâmetros;
- d. Com base nos itens acima, quais as vantagens e desvantagens do novo cenário?

B. **Parte Prática** (Entrega em 06/07/2025 até 09:00h)

1. (3.0 **ponto**) Considere

$$Y = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

satisfazendo as Suposições **A1** – **A4**. Avalie empiricamente as propriedades estatísticas do Critério de Informação de Akaike (AIC) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC). Esse critérios serão utilizados para a seleção de modelos.

2. (2.0 **pontos**) Considere os dados do arquivo `brazil.csv`. Nesse arquivo estão disponíveis os dados anuais do Brasil, referentes a Produto Interno Bruto *per capita* (GDP), investimento estrangeiro direto, entradas líquidas, crescimento populacional, poupança bruta no período 1975 - 2022. O dados estão disponíveis em *World Development Indicators* do Banco mundial (<https://databank.worldbank.org/source/world-development-indicators>).

Ajuste um modelo de regressão para obter a previsão de 2023 da variável GDP.