Rafael Jordane de Souza Oliveira
STA13824: Prof. Dr. Fabio Alexander Fajardo Molinares
May 23, 2025

Desafio 2

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias com médias θ_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Suponha que os momentos em torno da média μ_2, μ_3 e μ_4 são calculados como $\mu_r = \mathbb{E}[X_i - \theta_i]^r$, para $r = 2, 3, 4$, respectivamente. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica $n \times n$, $\mathbf{a}$ é um vetor coluna dos elementos diagonais de $\mathbf{A}$ e θ representa o vetor de médias, mostre que

$$\mathrm{Var}[X'\mathbf{A}X] = (\mu_4 - 3\mu_2^2)\mathbf{a}'\mathbf{a} + 2\mu_2^2 \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) + 4\mu_2\theta' A^2\theta + 4\mu_3\theta'\mathbf{A}\mathbf{a}$$

Solução:

O primeiro passo é reescrever o vetor X em função do vetor de médias θ e de um vetor Y de variáveis aleatórias centradas (ou seja, com média zero), da seguinte forma:

$$X = \theta + Y.$$

Assim, a expressão $X'\mathbf{A}X$ se transforma em:

$$X'\mathbf{A}X = (\theta + Y)'\mathbf{A}(\theta + Y).$$

Expandindo essa expressão, temos:

$$X'\mathbf{A}X = \theta'\mathbf{A}\theta + 2\theta'\mathbf{A}Y + Y'\mathbf{A}Y.$$

$\theta'\mathbf{A}\theta$ é uma constante (pois não depende de Y), e os termos restantes envolvem a variável aleatória Y.

O objetivo é calcular a variância da expressão $X'\mathbf{A}X$, ou seja:

$$\mathrm{Var}[X'\mathbf{A}X] = \mathrm{Var}[\theta'\mathbf{A}\theta + 2\theta'\mathbf{A}Y + Y'\mathbf{A}Y].$$

Como o primeiro termo é constante, ele não contribui para a variância:

$$\mathrm{Var}[X'\mathbf{A}X] = \mathrm{Var}[2\theta'\mathbf{A}Y + Y'\mathbf{A}Y].$$

Aplicando a fórmula da variância da soma de dois termos quaisquer, temos:

$$\mathrm{Var}[X'\mathbf{A}X] = \mathrm{Var}[2\theta'\mathbf{A}Y] + \mathrm{Var}[Y'\mathbf{A}Y] + 2\,\mathrm{Cov}[2\theta'\mathbf{A}Y,\ Y'\mathbf{A}Y].$$

1. Cálculo de Var$[2\theta'\mathbf{A}Y]$. Sabemos que a variância de uma constante multiplicada por uma variável aleatória é o quadrado da constante vezes a variância da variável. Assim:

$$\mathrm{Var}[2\theta'\mathbf{A}Y] = 4\,\mathrm{Var}[\theta'\mathbf{A}Y].$$

Como Y tem vetor de variância-covariância diagonal com μ_2 em todos os elementos diagonais (devido à independência e à homogeneidade dos momentos de segunda ordem), temos:

$$\mathrm{Var}[\theta'\mathbf{A}Y] = \theta'\mathbf{A}\,\mathrm{Cov}(Y)\,\mathbf{A}\theta = \mu_2\theta'\mathbf{A}^2\theta.$$

Portanto:

$$\mathrm{Var}[2\theta'\mathbf{A}Y] = 4\mu_2\,\theta'\mathbf{A}^2\theta.$$

2. Cálculo de Var$[Y'\mathbf{A}Y]$: Utilizando os resultados das notas de aula de KHOSHNEVISAN [1] sobre a variância de formas quadráticas de vetores com componentes independentes, centrados, e com momentos até a quarta ordem (discussão realizada na página 30). Temos que:

$$\mathrm{Var}[Y'\mathbf{A}Y] = (\mu_4 - 3\mu_2^2)\sum_{i=1}^{n} A_{ii}^2 + 2\mu_2^2 \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2).$$

Esse resultado se justifica observando que:

$$(Y'\mathbf{A}Y)^2 = \sum_{i,j,k,\ell} A_{ij}A_{k\ell}Y_iY_jY_kY_\ell,$$

e apenas certas combinações de índices produzem termos de esperança diferentes de zero, dadas as propriedades de independência e centramento dos Y_i.

- Se $i = j = k = \ell$, então $\mathrm{E}(Y_i^4) = \mu_4$.
- Se os índices formam pares distintos (por exemplo, $i = j \neq k = \ell$), então $\mathrm{E}(Y_i^2 Y_k^2) = \mu_2^2$.
- Outras combinações resultam em zero, pois as variáveis são independentes e têm média zero.

Substituindo as somas simplificadas na expressão anterior, obtemos:

$$\mathrm{E}[(Y'\mathbf{A}Y)^2] = \mu_4 \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}^2 + \mu_2^2 \left[(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 - \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}^2 + 2\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) - 2\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}^2\right].$$

Reorganizando os termos:

$$\mathrm{E}[(Y'\mathbf{A}Y)^2] = (\mu_4 - 3\mu_2^2)\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}^2 + \mu_2^2\left[(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 + 2\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\right].$$

A variância é dada por:

$$\mathrm{Var}(Y'\mathbf{A}Y) = \mathrm{E}[(Y'\mathbf{A}Y)^2] - [\mathrm{E}(Y'\mathbf{A}Y)]^2.$$

Sabendo que $\mathrm{E}(Y'\mathbf{A}Y) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$, temos:

$$\mathrm{Var}(Y'\mathbf{A}Y) = (\mu_4 - 3\mu_2^2)\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}^2 + \mu_2^2\left[(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 + 2\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\right] - \mu_2^2(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2.$$

Simplificando o último termo:

$$\mathrm{Var}(Y'\mathbf{A}Y) = (\mu_4 - 3\mu_2^2)\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}^2 + 2\mu_2^2\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2).$$

Escrevendo $\sum_{i=1}^{n} A_{ii}^2$ como $\mathbf{a}'\mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$ é o vetor dos elementos diagonais de $\mathbf{A}$, temos:

$$\mathrm{Var}[Y'\mathbf{A}Y] = (\mu_4 - 3\mu_2^2)\mathbf{a}'\mathbf{a} + 2\mu_2^2\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2).$$

3. Cálculo da covariância Cov$[2\theta'\mathbf{A}Y,\ Y'\mathbf{A}Y]$: Aqui, aplicamos a definição de covariância:

$$\mathrm{Cov}[2\theta'\mathbf{A}Y,\ Y'\mathbf{A}Y] = 2\left(\mathbb{E}[\theta'\mathbf{A}Y \cdot Y'\mathbf{A}Y] - \mathbb{E}[\theta'\mathbf{A}Y]\cdot\mathbb{E}[Y'\mathbf{A}Y]\right).$$

Como Y tem média zero, a esperança do primeiro termo se anula:

$$\mathbb{E}[\theta'\mathbf{A}Y] = 0.$$

Portanto:

$$\mathrm{Cov}[2\theta'\mathbf{A}Y,\ Y'\mathbf{A}Y] = 2\,\mathbb{E}[\theta'\mathbf{A}Y \cdot Y'\mathbf{A}Y].$$

Desenvolvendo a multiplicação:

$$\theta'\mathbf{A}Y \cdot Y'\mathbf{A}Y = \sum_k (\theta'\mathbf{A})_k Y_k \cdot \sum_{i,j} A_{ij}Y_iY_j = \sum_{i,j,k}(\theta'\mathbf{A})_k A_{ij}\mathbb{E}[Y_iY_jY_k].$$

A esperança $\mathbb{E}[Y_iY_jY_k]$ é diferente de zero apenas quando $i = j = k$, caso em que é igual a μ_3. Assim, obtemos:

$$\mathbb{E}[\theta'\mathbf{A}Y \cdot Y'\mathbf{A}Y] = \mu_3\sum_i(\theta'\mathbf{A})_i A_{ii} = \mu_3\,\theta'\mathbf{A}\mathbf{a}.$$

Portanto:

$$\mathrm{Cov}[2\theta'\mathbf{A}Y,\ Y'\mathbf{A}Y] = 2\mu_3\,\theta'\mathbf{A}\mathbf{a}.$$

Conclusão: Reunindo todos os termos:

$$\mathrm{Var}[X'\mathbf{A}X] = 4\mu_2\,\theta'\mathbf{A}^2\theta + (\mu_4 - 3\mu_2^2)\mathbf{a}'\mathbf{a} + 2\mu_2^2\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) + 4\mu_3\,\theta'\mathbf{A}\mathbf{a}.$$

Assim, mostramos passo a passo como a variância da forma quadrática $X'\mathbf{A}X$ pode ser decomposta em termos dos momentos centrais das variáveis X_i, das entradas da matriz $\mathbf{A}$, e do vetor de médias θ.

References

[1] KHOSHNEVISAN D. *Math 6010-1, University of Utah, Fall 2016*. Department of Mathematics, University of Utah, 155 South 1400 East JWB 233, 2016.

[1]

Universidade Federal do Espírito Santo