Solução do Desafio da Semana

Séries Temporais I – Data: 31 de outubro de 2025.

Nome: Gabriel Borges Santos

Matrícula: 2021100659

Considerando o modelo econômico dado por:

$$\begin{cases} D_t = \alpha_0 - \alpha_1 P_t, & \alpha_0 > 0,\ \alpha_1 > 0, \\ O_t = \beta_0 + \beta_1 P_t, & \beta_0 < 0,\ \beta_1 > 0, \\ P_{t+1} = P_t - \gamma(O_t - D_t), & \gamma > 0, \end{cases}$$

temos:

$$O_t - D_t = (\beta_0 + \beta_1 P_t) - (\alpha_0 - \alpha_1 P_t) = (\beta_0 - \alpha_0) + (\beta_1 + \alpha_1) P_t.$$

Substituindo:

$$P_{t+1} = P_t - \gamma\big[(\beta_0 - \alpha_0) + (\beta_1 + \alpha_1) P_t\big] = \big(1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1)\big) P_t - \gamma(\beta_0 - \alpha_0).$$

Essa é uma equação em diferenças de primeira ordem, da forma geral:

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1},$$

onde:

$$a_1 = 1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1) \quad \text{e} \quad a_0 = -\gamma(\beta_0 - \alpha_0).$$

A solução geral dessa equação é:

$$X_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + \left(X_0 - \frac{a_0}{1 - a_1} \right) a_1^t, \quad \text{para } a_1 \neq 1.$$

Aplicando ao caso do preço P_t:

$$P_t = \frac{-\gamma(\beta_0 - \alpha_0)}{1 - (1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1))} + \left[P_0 - \frac{-\gamma(\beta_0 - \alpha_0)}{1 - (1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1))} \right] (1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1))^t.$$

Simplificando:

$$P_t = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 + \alpha_1} + \left(P_0 - \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 + \alpha_1} \right) (1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1))^t.$$

Para que o preço P_t se estabilize a longo prazo, o termo $(1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1))^t$ deve tender a zero. Assim, a condição de estabilidade é:

$$|1 - \gamma(\beta_1 + \alpha_1)| < 1.$$

Resolvendo:

$$0 < \gamma(\beta_1 + \alpha_1) < 2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{0 < \gamma < \frac{2}{\beta_1 + \alpha_1}}.$$

Quando essa condição é satisfeita, o preço converge para o valor de equilíbrio:

$$P^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 + \alpha_1}.$$

Em outras palavras, o sistema é estável se o ajuste de preço γ for suficientemente pequeno para evitar oscilações e divergências, fazendo com que $P_t \to P^*$ conforme $t \to \infty$.