Atividade 7 de Cálculo 3

Nome: João Vitor Antoniassi Segantin
Matrícula: 2015 01643

Exercício 1 c)

Por meio de coordenadas polares, calcule a integral:

$$\iint_R \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dA$$

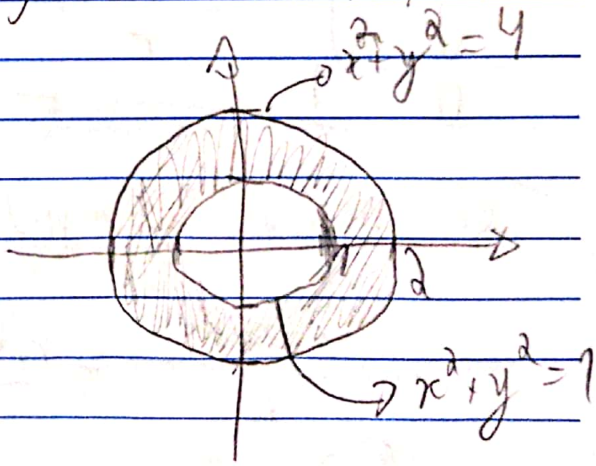
~~A região limitada pelo semicírculo~~

R: região anular limitada por $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$

Esboçando um gráfico p/ facilitar a visualização

$\underbrace{x^2+y^2=1}$ | $\underbrace{x^2+y^2=4}$

Circunferência com raio 1 | Circunferência com raio 2



$1 \leq r \leq 2$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

montando a integral:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 f(r)\,dr\,d\theta$$

→ Ainda estou buscando.

para mudar de "x" e "y" para "r" e "θ" podemos utilizar a fórmula de integração em que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x = r \cdot \cos\theta$$
$$y = r \cdot \sin\theta$$

com isso, podemos converter:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{(r \cdot \cos\theta)^2}{r}$$

e então finalizar a integral em:

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 r \cdot \frac{(r \cdot \cos\theta)^2}{r} \, dr \, d\theta$$

é possível simplificar a equação fazendo

$$\frac{(r \cdot \cos\theta)^2}{r} = \frac{r \cdot \cancel{r^2} \cdot \cos^2\theta}{\cancel{r}} \Rightarrow r^2 \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cos^2\theta \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \cos^2(\theta) \cdot r^2 \, dr \, d\theta$$

Interessante

Constante, em relação a dr, logo

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \int_1^2 r^2 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_1^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) d\theta$$

Constante

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \left(\frac{7}{3}\right) d\theta = \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1+\cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} 1+\cos 2\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta \right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(2\pi + \left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\theta) \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{6} \cdot \left(2\pi + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(0)}{2}}_{\to 0} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{6} \left(2\pi + 0 \right) = \frac{7}{6} \cdot 2\pi = \boxed{\frac{14\pi}{6}}$$

Digitalizado com CamScanner

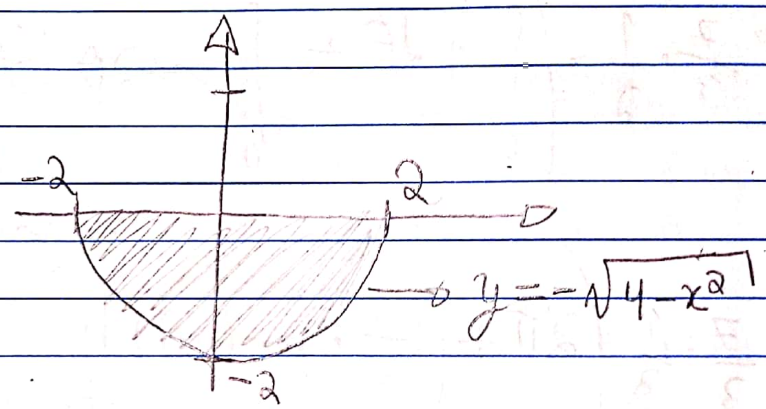
Exercício: 1 e)

Por meio de coordenadas polares, calcule a integral:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{-\sqrt{4-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

Colocando em gráfico para melhor visualização.

$-2 \leq x \leq 2$



Traduzindo em coordenadas polares:

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq \theta \leq \pi$ → Meia volta, limitado pelo "–" antes do $\sqrt{4-x^2}$

$x^2+y^2=r^2$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{2} r\cdot e^{-(r^2)}\,dr\,d\theta \Rightarrow$$

$u=r^2$

$du=2r\,dr$

$\frac{du}{2}=r\,dr$

$\int e^{-u}\,du = -e^{-u}$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\int e^{-u}\,du\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(-e^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=2} d\theta$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\left(-e^{-(2)^2}\right) - \left(-e^{-\overset{\to 0}{0^2}}\right)\right) d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\Rightarrow \text{Constante}}\left(-e^{-4} + \overset{\to 1}{e^{0}}\right) d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi} -e^{-4}+1 \, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} 1 \, d\theta - \int_0^{\pi} e^{-4} d\theta\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\pi - \overset{\to 0}{0} - \int_0^{\pi} \overset{\to \text{Constante}}{e^{-4}} d\theta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\left(\theta e^{-4}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \Rightarrow \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \cdot \pi e^{-4}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{2}\pi \cdot \left(1 - e^{-4}\right)}$$