Orientação de trabalho:

Continue o estudo do Capítulo 1 - secções 1.4 e 1.5 (pág. 63 a 72 do manual)

Secção 1.4: *A tabela dos* 12 *caminhos - discussão dos caminhos 1, 2, 4, 5, 6.*

Nesta secção irá aprender a diferenciar se nas contagens interessa a ordem ou se há ou não repetição/reposição de elementos.

Quando estamos a fazer distribuições de objectos para algum lado, estamos a definir uma função entre um conjunto X e um conjunto Y:

X - conjunto dos objectos a distribuir;
Y - conjunto para onde vamos fazer a distribuição.

Assim contar o número de distribuições possíveis, numa dada situação, é equivalente a definir uma função de determinado tipo entre X e Y. Por outro lado, os "objectos a distribuir" e os "lugares onde serão colocados" podem ser distinguíveis ou não.

A tabela dos 12 caminhos sintetiza todas as possibilidades de funções existentes entre 2 conjuntos X e Y, com $\#X = n$ e $\#Y = m$, cujos elementos podem ser distinguíveis ou indistinguíveis e as funções podem ser de 3 tipos; injectivas ou sobrejectivas ou nenhum destes casos.

$\#X = n$, $\#Y = m$	f qualquer	f injectiva	f sobrejectiva
elem. de X dist. elem. de Y dist.	1. m^n	2. $m^{\underline{n}}$	3. $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$
elem. de X indist. elem. de Y dist.	4. $\binom{n+m-1}{n}$	5. $\binom{m}{n}$	6 $\binom{n-1}{m-1}$
elem. de X dist. elem. de Y indist.	7. $\sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\}$	8. $\|n \leq m\|$	9. $\left\{ {n \atop m} \right\}$
elem. de X indist. elem. de Y indist.	10. $p_m(n+m)$	11. $\|n \leq m\|$	12. $p_m(n)$

As entradas a azul são as situações que estudaremos nesta unidade curricular. Não é necessário fixar estas entradas da tabela. É importante, sim, que a sua construção seja entendida.

Esta secção e seguinte estão disponíveis no Tópico 1 "Materiais de Apoio - Úteis ao Longo do Curso", em "Bibliografia".

As contagens elementares podem ser identificadas com uma sequência cujos elementos podem repetir ou não, tendo também em conta se interessa a ordem por que são colocados. A tabela seguinte resume os diferentes tipos de contagens elementares que podemos ter:

		sem repetição	com repetição
interessa a ordem	**permutações**	$n!$	$\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_k!}$
		nº de sequências de comprimento **n** com os elementos todos distintos.	nº de sequências de comprimento **n** com **k** tipos de elementos que <u>repetem-se</u> $n_1, n_2, \ldots, n_k$ respectivamente com $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.
	arranjos	$n^{\underline{k}}$	n^k
		nº de sequências de comprimento **k** a partir de **n** elementos distintos.	nº de sequências de comprimento **k** cujos elementos <u>podem repetir-se</u>, e são escolhidos de entre **n** distintos.
não interessa a ordem	**combinações**	$\binom{n}{k}$	$\binom{k+n-1}{k}$
		nº de subconjuntos c/ **k** elementos (distintos) de um conjunto com **n** (distintos).	nº de multiconjuntos com **k** elementos sendo **n** distintos.

Secção 1.5: *O princípio da inclusão/exclusão - Material básico*

Nesta secção irá aprender outro princípio básico de contagem: o princípio de inclusão/exclusão. Este princípio aplica-se quando numa contagem os objectos satisfazem uma ou mais propriedades. Deste modo, é necessário determinar o cardinal de uma união de conjuntos finitos, onde cada conjunto A_i interveniente está associado a uma propriedade P_i. A determinação de $\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ complica-se quando os conjuntos não são disjuntos e é dada pela seguinte fórmula:

Fórmula da Inclusão/Exclusão:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \cdots + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cup \ldots \cap A_n).$$

Esta fórmula toma um aspecto mais simples em casos particulares:

2 conjuntos: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

3 conjuntos: $$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) &= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) \\ &\quad - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Este princípio aparece muitas vezes combinado com o princípio do complementar.

O quadro seguinte sintetiza os principais princípios de contagens, de acordo com a sua aplicação e o que contam, respectivamente:

PRINCÍPIOS	Justificação	Aplicação
Multiplicação	$\#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = \#A_1 \times \#A_2 \times \ldots \times \#A_k$	se precisamos de fazer contagens em sequência.
Adição	$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_k$ se $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \varnothing$	se temos vários casos mutuamente disjuntos a considerar.
Complementar	$\#(X \setminus A) = \#X - \#A$	se a uma contagem geral queremos excluir contagens particulares.
Inclusão/Exclusão	$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \cdots + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$	se temos contagens de objectos que satisfazem uma ou mais propriedades (pode ser combinado com o princípio do complementar).

A tabela dos 12 caminhos (secção 1.4)

1. Lançam-se cinco dados indistinguíveis. Quantos resultados é que pode haver?

2. Um corpo eleitoral de N pessoas é chamado a votar (por voto secreto) em 5 candidatos para a presidência da ASSOCIAÇÃO DOS AMANTES DAS ERVAS DANINHAS. Não são permitidas abstenções, mas é possível votar em branco. De quantas maneiras pode resultar o escrutínio?

3. Considere a seguinte situação: uma caixa contém n bolas diferentes, r das quais são retiradas uma a uma. Qual o número de diferentes extracções se...

   (a) ...procedermos com reposição (*i.e.* sempre que se retira uma bola ela é imediatamente reposta na caixa) e considerarmos a ordem pela qual as bolas são retiradas.

   (b) ...procedermos sem reposição e considerando a ordem pela qual as bolas são retiradas.

   (c) ...procedermos sem reposição e sem considerar a ordem pela qual as bolas são retiradas.

   (d) ...procedermos com reposição e sem considerar a ordem pela qual as bolas são retiradas.

O princípio da inclusão/exclusão (secção 1.5)

1. Num grupo de 67 pessoas, 47 falam inglês, 35 falam francês e 23 falam ambas as línguas. Quantas pessoas é que não falam, nem inglês, nem francês? Se, além disso, 20 falam alemão, das quais 12 também falam inglês, 11 falam francês e 5 falam as três líguas, quantas pessoas do grupo é que não falam nenhuma destas línguas?

2. Considere os números naturais de 1 a 300.

   (a) Quantos é que são divisíveis por 3? E por 3 e por 7, simultaneamente?

   (b) E quantos é que não são divisíveis, nem por 3, nem por 7?

3. (a) Quantas palavras se podem formar com dois **U**'s, um **A**, um **E** e um **T**?

   (b) Em quantas dessas palavras não ocorrem as sequências **EU** e **TU**?

4. Pretende-se arrumar numa estante quatro livros de *Computação*, seis livros de *Álgebra* e dois livros de *Geometria*. Quantas são as possíveis maneiras de os arrumar, sabendo que:

   (a) Os livros de um mesmo assunto devem ficar juntos.

   (b) Os livros de *Computação* devem ficar juntos.

   (c) Apenas os livros de *Computação* devem ficar juntos.

5. Quantas soluções tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

onde cada x_i é um número natural menor ou igual a 10.
[*Sugestão:* Se não houvesse a restrição de cada x_i ser menor ou igual a 10, tratar-se-ia de um problema discutido na secção anterior. A sugestão é a seguinte: considere S_1 o conjunto de soluções da equação com $x_1 > 10$ (tais soluções correspondem a soluções da equação $(y_1 + 11) + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ nos números naturais); considere também S_2, S_3 e S_4 e aplique convenientemente a fórmula da inclusão/exclusão).]

6. Quantas maneiras há de distribuir seis bolas idênticas por quatro caixas se a primeira caixa só puder conter uma bola, a segunda duas bolas, a terceira três bolas e a quarta quatro bolas?

7. Quantas são as sequências formadas por três a's, três b's e três c's em que não aparecem três letras iguais consecutivas?

8. Uma pessoa tem sete amigos e durante uma semana convida para jantar um conjunto diferente de três amigos. De quantas maneiras se pode isto fazer de modo a que todos os amigos vão jantar pelo menos uma vez?

9. Mostre combinatorialmente que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\text{¡}$$

para qualquer número natural n.
[*Sugestão:* Não é muito difícil, mas tem somatórios de somatórios .... Se quiser, tente só depois de estudar o próximo capítulo.]

Folha 3: SOLUÇÕES

A tabela dos 12 caminhos (secção 1.4)

1. $\binom{10}{5}$

2. $\binom{N+5}{N} = \binom{N+5}{5}$

3. (a) n^r (b) $n^{\underline{r}}$ (c) $\binom{n}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!}$ (d) $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$

O princípio da inclusão/exclusão (secção 1.5)

1. Há 8 pessoas que não falam, nem inglês, nem francês, e há 6 pessoas que não falam nenhuma das três línguas do exercício.

2. (a) 14 (b) 172

3. (a) $5!/2! = 60$ (b) $60 - 42 = 18$

4. (a) $3!4!6!2!$ (b) $9!4!$ (c) $9!4! - 4!4!6! - 8!4!2! + 3!4!6!2!$

5. $\binom{33}{3} - 4\binom{22}{3} + 6\binom{11}{3}$

6. $\binom{9}{3} - \binom{8}{4} + 6$

7. $\frac{9!}{3!3!3!} - 3\frac{7!}{3!3!} + 3\frac{5!}{3!} - 3!$

8. $7!\left[\binom{35}{7} - 7\binom{20}{7} + \binom{7}{2}\binom{10}{7}\right]$

9. $n! = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{n-k}(n-k)\text{¡} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\text{¡}$

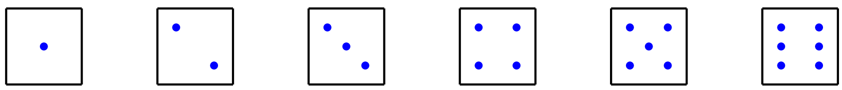
A tabela dos 12 caminhos (secção 1.4)

1. Temos 5 dados indistinguíveis. Cada dado tem 6 faces distinguíveis. O resultado de um lançamento corresponde a 5 faces voltadas para cima. Assim o número de resultados possíveis é igual ao número de funções existentes entre X e Y onde $X = \{5 \text{ dados}\}$ e $Y = \{6 \text{ faces}\}$ Esse número é dado por

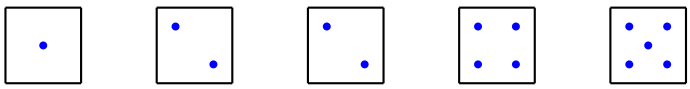
$$\binom{5+6-1}{5} = \binom{10}{5} \text{ – quarta entrada da tabela dos 12 caminhos.}$$

Alternativa: Cada resultado corresponde a uma sequência binária com 5 zeros e 5 uns:

$$k_1 \text{ zeros} \quad 1 \quad k_2 \text{ zeros} \quad 1 \quad k_3 \text{ zeros} \quad 1 \quad k_4 \text{ zeros} \quad 1 \quad k_5 \text{ zeros} \quad 1 \quad k_6 \text{ zeros}$$



com $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 5$. Por exemplo

$0100110101 \longleftrightarrow$ 

O número de tais sequências é: $\dfrac{10!}{5!}5! = \dbinom{10}{5}$.

2. Cada eleitor, ou vota num dos 5 candidatos, ou vota em branco (não se pode abster!). Esta situação é equivalente a votar em 6 candidatos (um voto em branco conta como um voto no sexto candidato). Sendo assim, cada eleitor tem 6 escolhas diferentes para atribuir o seu voto. No entanto, tratando-se de voto secreto, não interessa saber qual o candidato em que determinada pessoa votou. Por outras palavras, os N eleitores são indistinguíveis e os seus N votos têm de ser distribuídos por 6 candidatos. O problema é, portanto, equivalente a distribuir N bolas iguais por 6 caixas distintas. Em conclusão, existem

$$\binom{N+6-1}{N} = \binom{N+5}{N} = \binom{N+5}{5} \text{ escrutínios diferentes.}$$

3. **(a)** Em cada extracção, podemos retirar qualquer uma das n bolas, porque procedemos *com reposição*. Além disso, *interessa a ordem* por que são retiradas as bolas e, portanto, existem

$$n^r \text{ extracções diferentes.}$$

(b) Como procedemos *sem reposição*, em cada extracção, só podemos retirar uma bola que não tenha sido retirada numa extracção anterior. Assim, na k-ésima extracção podemos retirar qualquer das $n-k+1$ bolas que ainda não foram retiradas. Em conclusão, existem

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = n^{\underline{r}} \text{ extracções diferentes.}$$

(c) *Não interessa a ordem* pela qual as bolas são retiradas, donde na situação anterior algumas das extracções são iguais. De facto, aqui interessa apenas saber quais as bolas que foram retiradas nas r extracções. Deste modo, existem

$$\binom{n}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!} \text{ extracções diferentes}$$

- simplesmente, contamos todas as maneiras de escolher r bolas de entre as n que estão no saco.

(d) Aqui, tal como na alínea (a), em cada extracção, podemos retirar qualquer uma das n bolas. Mas, como *não interessa a ordem* pela qual as bolas são retiradas, só nos preocupamos com o número de vezes que determinada bola foi retirada. Por outras palavras, interessa-nos apenas saber quantas extracções correspondem a cada bola. Nesta perspectiva, o número total de extracções nas condições impostas é o mesmo do que o número de maneiras diferentes de distribuir as r extracções (indistinguíveis porque não interessa a ordem) pelas n bolas distintas. Pensando em termos de separadores (as n bolas correspondem a $n-1$ separadores), o número pretendido é o mesmo do que o número de todas as sequências binárias com r zeros e $n-1$ uns que, como sabemos, é

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

O princípio da inclusão/exclusão (secção 1.5)

1. Seja X o conjunto das 67 pessoas. Consideremos os subconjuntos:

$$A = \{x \in X : x \text{ fala inglês}\}\ ,\ B = \{x \in X : x \text{ fala francês}\}.$$

Então

$$A \cap B = \{x \in X : x \text{ fala inglês e fala francês}\}.$$

Portanto $\#A = 47$, $\#B = 35$, $\#(A \cap B) = 23$. Ora dado $x \in X$ temos

$$x \text{ não fala inglês e } x \text{ não fala francês} \iff x \notin (A \cap B) \iff x \in X \setminus (A \cup B).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{n}^{\text{o}} \text{ de pessoas que não falam, nem inglês, nem francês } &= \#(X \setminus (A \cup B)) = \#X - \#(A \cup B) \\ &= \#X - [\#A + \#B - \#(A \cap B)] = 67 - [47 + 35 - 23] = 8. \end{aligned}$$

Para a 2ª parte procede-se de modo análogo. Considera-se um novo subconjunto de X:

$$C = \{x \in X : x \text{ fala alemão}\}$$

e temos também

$$\#C = 20\,,\ \#(C \cap A) = 12\,,\ \#(C \cap B) = 11\,,\ \#(A \cap B \cap C) = 5.$$

Agora o número de pessoas que não falam nenhuma das três línguas é:

$$\begin{aligned} \#(X \setminus (A \cup B \cup C)) &= \#X - \#(A \cup B \cup C) \\ &= \#X - [\#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C)] \\ &= 67 - [47 + 35 + 20 - 23 - 11 - 12 + 5] = 6 \end{aligned}$$

2. **(a)** Um número natural n será divisível por 3 se, e somente se, $n = 3k$ para algum número natural k (o quociente da divisão de n por 3) e escreve-se $3 \mid n$. Sendo assim, teremos de contar todos os números naturais da forma $3k$ que estão entre 1 e 300. Ora,

$$1 \leq 3k \leq 300 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq k \leq 100$$

e, portanto, existem precisamente 100 números nas condições pretendidas.

Como antes, um número natural n será divisível por 3 e por 7 simultaneamente se, e somente se, $n = (3 \cdot 7)k = 21k$ para algum número natural k — note que 3 e 7 são primos entre si. Como

$$1 \leq 21k \leq 300 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq k \leq 14,$$

existem precisamente 14 números nas condições pretendidas.

(b) Sejam

$$A = \{n \in \mathbb{N} \colon 1 \leq n \leq 300 \wedge 3 \mid n\}\ ,\ B = \{n \in \mathbb{N} \colon 1 \leq n \leq 300 \wedge 7 \mid n\}.$$

Portanto, como já observámos,

$$A = \{3k \colon 1 \leq k \leq 100, k \in \mathbb{N}\}\ ,\ B = \{7k : 1 \leq k \leq 42, k \in \mathbb{N}\}$$

e temos

$$\#A = 100\ ,\ \#B = 42\ ,\ \#(A \cap B) = 14$$

— note que $A \cap B$ é o conjunto de todos os números naturais entre 1 e 300 que são divisíveis por 3 (porque estão em A) e por 7 (porque estão em B). Sendo assim,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 100 + 42 - 14 = 128.$$

Como $A \cup B$ contém todos os números naturais entre 1 e 300 que são divisíveis por 3 ou por 7, o número pretendido é

$$\#\left([300] \setminus (A \cup B)\right) = \#[300] - \#(A \cup B) = 300 - 128 = 172.$$

3. **(a)** $5!/2! = 60$ - porque é o número de sequências de comprimento 5 com 2 elementos repetidos.

(b) O número da palavras em que aparece o bloco **EU** é $4!$; igualmente, o número de palavras em que aparece o bloco **TU** é $4!$; finalmente, o número de palavras em que aparecem simultaneamente os blocos **EU** e **TU** é $3!$. Assim, o número de palavras em que pelo menos uma das sequências **EU** ou **TU** ocorre é $4! + 4! - 3! = 42$. A resposta final é $60 - 42 = 18$.

4. **(a)** Trata-se de arrumar três blocos diferentes: o primeiro formado pelos quatro livros de Computação, o segundo formado pelos seis livros de Álgebra e o terceiro formado pelos dois livros de Geometria. Ora, existem $3!$ maneiras distintas de colocar estes três blocos na estante. No primeiro bloco, podemos colocar os quatro livros de Computação de $4!$ maneiras distintas; no segundo bloco, podemos colocar os seis livros de Álgebra de $6!$ maneiras distintas; e, no terceiro bloco, podemos colocar os dois livros de Geometria de $2!$ maneiras distintas. Assim, a resposta é: $3!4!6!2!$.

(b) É o mesmo que colocar $1 + 6 + 2 = 9$ livros distintos na estante (1 corresponde ao bloco dos livros de Computação). Assim, a resposta é: $9!4!$ ($4!$ corresponde às permutações dos livros de Computação dentro do bloco).

(c) Devemos retirar ao conjunto X de todas as disposições em que os livros de Computação ficam juntos (que foi considerado na alínea anterior), todas as disposições em que os livros de Álgebra estão juntos OU os livros de Geometria estão juntos. Sendo assim, designando por A o conjunto de todas as disposições em X em que os livros de Álgebra estão juntos e por B o conjunto de todas as disposições em X em que os livros de Geometria estão juntos, devemos calcular a cardinalidade do conjunto $X \setminus (A \cup B)$ que é $\#X - \#(A \cup B)$. Ora, o princípio da inclusão/exclusão diz-nos que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Contemos os elementos de A; neste conjunto estão todas as disposições com os livros de Computação juntos e, tembém, os livros de Álgebra juntos; raciocinando como nas alíneas anteriores, concluímos que $\#A = 4!4!6!$. Analogamente, $\#B = 8!4!2!$ (em B estão todas as disposições com os livros de Computação juntos e, tembém, os livros de Geometria juntos). Finalmente, na intersecção $A \cap B$ estão todas as disposições com os livros de um mesmo assunto juntos e portanto, pela alínea (a), $\#(A \cap B) = 3!4!6!2!$. Por conseguinte,

$$\#(A \cup B) = 4!4!6! + 8!4!2! - 3!4!6!2!.$$

Como $\#X = 9!4!$ (alínea (b)), o resultado pretendido é: $9!4! - 4!4!6! - 8!4!2! + 3!4!6!2!$.

5. O problema é equivalente a contar o número de maneiras distintas de distribuir 30 bolas iguais por 4 caixas distintas de modo a que nenhuma caixa contenha mais do que 10 bolas. Para efectuar esta contagem, podemos (por manobra de passagem ao complementar) contar o número de maneiras de distribuir as 30 bolas pelas 4 caixas de modo a que pelo menos uma das caixas contenha 11 ou mais bolas. Sendo assim, para $i = 1, 2, 3, 4$, designamos por S_i o conjunto de todas as distribuições distintas em que a caixa i contém 11 ou mais bolas (é claro que S_1 (por exemplo) tem tantos elementos quantas as soluções naturais da equação $(y_1+11)+x_2+x_3+x_4 = 30$). Não é difícil convencermo-nos de que $\#S_1 = \#S_2 = \#S_3 = \#S_4$ (os quatro conjuntos são essencialmente o mesmo). Ora, para determinarmos $\#S_1$, tendo colocado 11 bolas na caixa 1, restam-nos distribuir as restantes 19 bolas pelas 4 caixas e existem $\binom{19+3}{3} = \binom{22}{3}$ maneiras diferentes de o fazer. Em conclusão:

$$\#S_1 = \#S_2 = \#S_3 = \#S_4 = \binom{22}{3}.$$

O nosso objectivo é determinar $\#(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4)$. Para isso, deveremos usar a fórmula da inclusão/exclusão e, portanto, teremos de contar os elementos comuns a dois, a três e a quatro dos conjuntos considerados. Consideremos, por exemplo, $S_1 \cap S_2$. A cardinalidade desta interseção é, obviamente, o número de maneiras distintas de distribuir as 30 bolas pelas 4 caixas de modo a que cada uma das caixas 1 e 2 contenha 11 bolas ou mais. Assim sendo, queremos contar as maneiras distintas de distribuir $30 - 22 = 8$ bolas por 4 caixas. Em conclusão:

$$\#(S_1 \cap S_2) = \binom{8+3}{3} = \binom{11}{3}.$$

Analogamente,

$$\#(S_1 \cap S_3) = \#(S_1 \cap S_4) = \#(S_2 \cap S_3) = \#(S_2 \cap S_4) = \#(S_3 \cap S_4) = \binom{11}{3}.$$

Agora, consideremos $\#(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$. Neste caso, temos de contar as maneiras distintas de distribuir as 30 bolas pelas 4 caixas de modo a que cada uma das caixas 1, 2 e 3 contenha 11 bolas ou mais. Esta situação é, obviamente, impossível e, portanto,

$$\#(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 0.$$

Analogamente, $\#(S_1 \cap S_2 \cap S_4) = \#(S_1 \cap S_3 \cap S_4) = \#(S_2 \cap S_3 \cap S_4) = 0$. Pelas mesmas razões, temos $\#(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) = 0$.

Finalmente, usando a fórmula da inclusão/exclusão, concluímos que

$$\#(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) = 4\binom{22}{3} - 6\binom{11}{3}.$$

Como existem $\binom{33}{3}$ maneiras distintas de distribuir 30 bolas iguais por 4 caixas, chegamos à conclusão de que o número pretendido no problema é:

$$\binom{33}{3} - 4\binom{22}{3} + 6\binom{11}{3}.$$

6. Este exercício é semelhante ao exercício **5**. Para $i = 1, 2, 3, 4$, designemos por A_i o conjunto de todas as distribuições das 6 bolas (iguais) pelas 4 caixas de modo a que a caixa i tenha $i + 1$ bolas pelo menos. Contemos o número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Pela fórmula da inclusão/exclusão, temos

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3)$$

$$-\#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_3 \cap \#A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$+\#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

- $\#A_1$: se a caixa 1 já contém 2 bolas, devemos distribuir as restantes 4 bolas pelas 4 caixas e existem $\binom{7}{3}$ maneiras distintas de o fazer. Assim, $\#A_1 = \binom{7}{3}$.
- $\#A_2$: se a caixa 2 já contém 3 bolas, devemos distribuir as restantes 3 bolas pelas 4 caixas, pelo que $\#A_2 = \binom{6}{3}$.

De modo análogo, $\#A_3 = \binom{5}{3}$ e $\#A_4 = \binom{4}{3}$. Consideremos agora as intersecções de dois ou mais conjuntos.

- $\#(A_1 \cap A_2)$: se as caixas 1 e 2 já contém $2 + 3 = 5$ bolas, devemos distribuir bola que sobre pelas 4 caixas. Por conseguinte, $\#(A_1 \cap A_2) = 4$.
- $\#(A_1 \cap A_3)$: as caixas 1 e 3 já contém $2 + 4 = 6$ bolas, que só podem ser colocadas de uma maneira. Logo $\#(A_1 \cap A_3) = 1$.

Em qualquer um dos outros casos, teríamos de colocar um número superior a 6 nas duas caixas consideradas, o que é impossível. Sendo assim,

$$\#(A_1 \cap A_4) = \#(A_2 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_4) = \#(A_3 \cap \#A_4) = 0.$$

Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \binom{7}{3} + \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} - 4 - 1 = \binom{8}{4} - 6$$

(usando a fórmula da adição do índice superior). Finalmente, como existem $\binom{9}{3}$ maneiras distintas de distribuir as 6 bolas pelas 4 caixas, o número pedido é

$$\binom{9}{3} - \binom{8}{4} + 6.$$

7. Se não houvessem restrições, a resposta seria $\frac{9!}{3!3!3!}$. Seja S_a o conjunto das sequências formadas por três a's, três b's e três c's em que os três a's aparecem em bloco. Definam-se S_b e S_c analogamente. Claro que

$$\#S_a = \#S_b = \#S_c = \frac{7!}{3!3!}.$$

Também se tem:

$$\#(S_a \cap S_b) = \#(S_a \cap S_c) = \#(S_b \cap S_c) = \frac{5!}{3!} \quad \text{e} \quad \#(S_a \cap S_b \cap S_c) = 3!\,.$$

Logo a resposta ao problema é

$$\frac{9!}{3!3!3!} - \#(S_a \cup S_b \cup S_c) = \frac{9!}{3!3!3!} - 3\frac{7!}{3!3!} + 3\frac{5!}{3!} - 3!\,.$$

8. Usando a manobra de passagem ao complementar, vamos contar todos os convites possíveis que deixem de fora <u>pelo menos</u> um dos sete amigos. Por outras palavras, se $a_1, \ldots, a_7$ designarem os sete amigos e se, para $1 \leq i \leq 7$, designarmos por A_i o conjunto de todos os convites que deixam de fora o amigo a_i, pretendemos calcular a cardinalidade da união $A_1 \cup \cdots \cup A_7$. Pelo princípio da inclusão/exclusão, temos

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_7) = \sum_{i=1}^{7} \#A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq 7} \#(A_i \cap A_j) \tag{1}$$

— notemos que, em qualquer intersecção de três dos conjuntos $A_1 \cup \cdots \cup A_7$, ficam de fora três amigos e, portanto, a pessoa em causa só poderá fazer $\binom{4}{3} = 4$ convites, ficando obrigada a jantar mais do que uma vez com o mesmo conjunto de três amigos; isto justifica que qualquer daquelas intersecções é vazia; do mesmo modo, são vazias as intersecções de quatro ou mais dos conjuntos considerados.

Agora, para determinarmos $\#A_i$ (para $1 \leq i \leq 7$) deveremos contar o número de convites diferentes que deixem de fora o amigo a_i. Ora, os seis amigos que restam podem ser agrupados de $\binom{6}{3} = 20$ maneiras diferentes. Estes grupos terão de ser distribuídos, sem repetições, pelos sete dias da semana. Temos precisamente $7!\binom{20}{7}$ distribuições diferentes. Em conclusão:

$$\#A_i = 7!\binom{20}{7}$$

para qualquer $1 \leq i \leq 7$.

Por outro lado, consideremos uma interseção arbitrária $A_i \cap A_j$ com $1 \leq i < j \leq 7$. Neste caso, os amigos a_i e a_j nunca são convidados para jantar. Como acima, os cinco amigos que sobram podem ser agrupados de $\binom{5}{3} = 10$ maneiras diferentes e temos $7!\binom{10}{7}$ maneiras diferentes de distribuir, sem repetições, estes grupos pelos sete dias da semana. Deste modo,

$$\#(A_i \cap A_j) = 7!\binom{10}{7}$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq 7$.

Por (1), segue-se que

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_7) = 7 \cdot 7!\binom{20}{7} - \binom{7}{2} \cdot 7!\binom{10}{7} = 7!\left[7\binom{20}{7} - \binom{7}{2}\binom{10}{7}\right].$$

Finalmente, um raciocínio semelhante aos que usámos acima, podemos concluir que a pessoa em causa tem

$$7!\binom{\binom{7}{3}}{7} = 7!\binom{35}{7}$$

maneiras diferentes de jantar com três amigos durante os sete dias da semana sem repetir o grupo de amigos. Em conclusão, o número que se pretende no problema é

$$7!\binom{35}{7} - 7!\left[7\binom{20}{7} - \binom{7}{2}\binom{10}{7}\right] = 7!\left[\binom{35}{7} - 7\binom{20}{7} + \binom{7}{2}\binom{10}{7}\right].$$

9. Sabemos que $n!$ é o número de permutações do conjunto $[n]$, que $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos de $[n]$ com k elementos e que $k¡$ é o número de permutações de $[n]$ que não deixam elementos fixos (i.e., o número de desarranjos de $[n]$). Ora, uma permutação de $[n]$ deixa, ou 0 elementos fixos, ou 1 elemento fixo, ..., ou n elementos fixos. Nesta ordem de ideias, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, designemos por A_k o conjunto de todas as permutações de $[n]$ que deixam exactamente k elementos fixos. Pelo que dissémos, temos

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \#A_k.$$

Agora, para cada k, existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher os k elementos de $[n]$ que ficam fixos; como os restantes $n-k$ elementos não podem ficar nas suas posições originais, concluímos que

$$\#A_k = \binom{n}{k}(n-k)¡ = \binom{n}{n-k}(n-k)¡.$$

Sendo assim,

$$n! = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{n-k}(n-k)¡ = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k¡$$

como queríamos.