Orientação de trabalho:

• Termine de resolver os exercícios propostos na Folha 3, correspondentes à secção 1.5 (= exer. das pág. 77 e 78 do manual).

• Termine o estudo do Capítulo 1 - secção 1.6 (pág. 79 a 84 do manual)

Secção 1.5: *Enumerabilidade*

Nesta secção irá trabalhar com conjuntos infinitos e aprender as noções de: enumerável, numerável.

Seja X um conjunto.

- $X \neq \emptyset$ diz-se *enumerável* se existe uma função $f\colon \mathbb{N} \to X$ **sobrejectiva**. Por convenção $X = \emptyset$ é enumerável.
- X é *numerável* se existe uma **bijecção** entre X e $\mathbb{N}$. Neste caso, diz-se que X tem a cardinalidade $\aleph_0$.

Observações:

1. Enumerar significa listar: assim de modo intuitivo um conjunto não vazio X é enumerável se podemos listar todos os seus elementos por meio de uma sequência infinita: $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$.
2. Os conjuntos **finitos** são **enumeráveis** - ver exemplo 2 (pág. 80).
3. $X = \{s \in Seq_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável - ver exemplo 5.
4. Sejam X, Y dois conjuntos. Temos:
   (a) X, Y enumeráveis $\implies$ $X \cup Y$ enumerável - ver exemplo 3;
   (b) X enumerável e $f\colon X \to Y$ sobrejectiva $\implies$ Y enumerável - ver exemplo 4;
   (c) X, Y enumeráveis $\implies$ $X \times Y$ é enumerável - ver exemplo 7;
   (d) X enumerável e $Y \subseteq X$ $\implies$ Y enumerável - ver exemplo 8.
5. Se $X \subseteq \mathbb{N}$ é **infinito** então X é **numerável** - ver o lema da pág. 81.
6. É imediato das definições que:
$$X \text{ numerável} \implies X \text{ enumerável}.$$
7. Se X é **infinito**, temos uma equivalência: ver a proposição da pág. 82
$$X \text{ numerável} \iff X \text{ enumerável}.$$

Os seguintes conjuntos são **numeráveis**:

Exemplo 1.

(a) $\mathbb{Z}$ é numerável - porque $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $\Phi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \neq 0 \text{ e } n \text{ é par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é bijectiva.

(b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável - ver obser. 7 e 4-(c).

(c) $\mathbb{Q}$ é numerável - ver exemplo da pág. 83.

Nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, ou seja nem todos os conjuntos infinitos são enumeráveis.

Sequências binárias infinitas:

Designa-se por Seq_∞ o conjunto de todas as sequências binárias infinitas. Um elemento de Seq_∞ é do tipo

$$s = s_0 s_1 s_2 \ldots \quad \text{com } s_0, s_1, s_2, ... \in \{0, 1\}.$$

Por exemplo, temos:

$$s = 0101010101..... \ , \ s' = 1111111111.... \ , \ s'' = s_0 s_1 s_2 \ldots \text{ com } s_i = \begin{cases} 1 & \text{se } 5 \mid i \\ 0 & \text{se } 5 \nmid i \end{cases}. \tag{1}$$

Teorema de Cantor: Seq_∞ não é enumerável.
Além disso,

$$\#Seq_\infty > \aleph_0 = \#\mathbb{N}.$$

Também **não** são **enumeráveis** os seguintes conjuntos:

Exemplo 2.

(a) $\mathbb{R}$ não é enumerável - ver corolário da pág. 83.

(b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é enumerável - ver exercício 1.

Enumerabilidade (secção 1.6)

1. Seja Seq_∞ o conjunto de todas as sequências binárias infinitas. Mostre que Seq_∞ e o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ das partes de $\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade. Conclua que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não tem cardinalidade $\aleph_0$.

2. Seja $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável.

   (a) Mostre que o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de A é enumerável.

   (b) Será que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de A é enumerável?

   (c) Será que o conjunto de todos os subconjuntos de A é enumerável?

3. Sendo $X = \{x_0, x_1, x_2 \ldots\}$ e $Y = \{y_0, y_1, y_2 \ldots\}$, pode apresentar-se a seguinte enumeração de $X \times Y$:

$$\begin{array}{cccccccc} (x_0,y_0) & (x_0,y_1) & (x_1,y_0) & (x_0,y_2) & (x_1,y_1) & (x_2,y_0) & (x_0,y_3) & \cdots \\ | & | & | & | & | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \end{array}$$

   Obtenha uma fórmula em i e j que permita obter a posição do par (x_i, y_j) nesta lista (comece a partir da posição 0).

1. Considerar a correspondência $\Phi\colon Seq_\infty \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $\phi(s_0s_1s_2\ldots) = \{i \in \mathbb{N} : s_i = 1\}$. Provar que é biunívoca e concluir que $\#Seq_\infty = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Usar o Teorema de Cantor para concluir que $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \neq \aleph_0$.

2. **(b)** Sim. **(c)** Não.

3. O par (x_i, y_j) ocupa, na lista indicada, a posição $\frac{(i+j)(i+j-1)}{2} + i + 1 = \frac{(i+j)(i+j-1)+2(i+1)}{2}$.

1. Consideremos a correspondência

$$\begin{array}{ccc} Seq_\infty & \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ s = s_0 s_1 s_2 \ldots & \longmapsto & \{i \in \mathbb{N} : s_i = 1\} \end{array}$$

Para as sequências do exemplo (1) temos:

$\Phi(s) = \Phi(0101010101.....) = \{1, 3, 5, 7, ...\} = \{2k+1 \colon k \in \mathbb{N}\} =$ naturais ímpares,
$\Phi(s') = \Phi(1111111111....) = \mathbb{N}$,
$\Phi(s'') = \{i \in \mathbb{N} : 5 \mid i\} = \{0, 5.10, 15, ...\} = \{5k \colon k \in \mathbb{N}\}$.

A correspondência Φ é **biunívoca**:

1a. Dada qualquer sequência $s = s_0 s_1 s_2 \ldots \in Seq_\infty$, temos $\Phi(s) = \{i \in \mathbb{N} : s_i = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1b, 2b. Sejam $s = s_0 s_1 s_2 \ldots, t = t_0 t_1 t_2 \ldots \in Seq_\infty$. Então

$$\Phi(s) = \Phi(t) \iff \{i \in \mathbb{N} : s_i = 1\} = \{i \in \mathbb{N} : t_i = 1\} \underset{(*)}{\iff} s_i = t_i,\ \forall i \in \mathbb{N} \iff s = t$$

(*) - se têm os 1's nas mesma posições também têm os 0's nas mesmas posições.

2a. Seja $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Logo $X \subseteq \mathbb{N}$. Consideremos a sequência

$$s = s_0 s_1 s_2 \ldots \quad \text{tal que } s_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in X \\ 0 & \text{se } i \notin X \end{cases}.$$

Portanto $\Phi(s) = \{i \in \mathbb{N} : s_i = 1\} = X$, e vale 2b.

Segue-se que Seq_∞ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ têm a mesma cardinalidade. Pelo Teorema de Cantor, $\#Seq_\infty \neq \aleph_0$. Logo $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ também não tem a cardinalidade $\aleph_0$.

2. (a) Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de A, isto é:

$$\mathcal{A} = \{s = a_{k_1} a_{k_2} ... a_{k_m} \colon a_{k_j} \in A, k_j \in \mathbb{N}\}.$$

Em primeiro lugar, consideremos as posições dos elementos de A na enumeração a_0, a_1, a_2, a_3, $\ldots$, dizendo que a_k ocupa a posição $k+1$ (de modo, que a_0 ocupa a posição 1, a_1 ocupa a posição 2, $\ldots$).

Dada uma sequência finita $s = a_{k_1} a_{k_2} ... a_{k_m} \in \mathcal{A}$ definimos o PESO de s como sendo a soma $\sum_{i=1}^{m} (k_i + 1)$ das posições das suas componentes. Por exemplo:

$s = a_0$ tem peso 1,
$s' = a_0 a_5 a_3$ tem peso $(0+1) + (5+1) + (3+1) = 11$,
$s'' = a_{12} a_6 a_{11}$ tem peso $(12+1) + (6+1) + (11+1) = 32$.

Agora, para cada número natural $n \geq 1$, consideramos o conjunto $\mathcal{A}_n$ constituído por todos os elementos de $\mathcal{A}$ que têm peso n. Como qualquer sequência em $\mathcal{A}$ tem um peso bem determinado, concluímos que $\mathcal{A}$ é a união disjunta de todos os seus subconjuntos $\mathcal{A}_n$:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \,\dot\cup\, \mathcal{A}_2 \,\dot\cup\, \mathcal{A}_3 \,\dot\cup \cdots.$$

Tratando-se de uma união enumerável, poderemos concluir que $\mathcal{A}$ é enumerável se provarmos que cada $\mathcal{A}_n$, $n \geq 1$, é enumerável - ver o exemplo 6 da página 81. Ora,

$$\begin{aligned} s = a_{k_1}a_{k_2}\ldots a_{k_m} \in \mathcal{A}_n &\iff (k_1+1)+(k_2+1)+\ldots+(k_m+1)=n \\ &\iff k_1+k_2+\ldots+k_m = n-m \end{aligned}$$

e como uma equação deste tipo tem um número finito de soluções naturais, que é dado por $\binom{n-m+m-1}{n-m} = \binom{n-1}{n-m}$, concluímos que $\mathcal{A}_n$ é um conjunto finito e, portanto, enumerável. Logo $\mathcal{A}$ é enumerável.

(b) A resposta é afirmativa. Designemos por $\mathcal{P}_f(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de A. De facto, a correspondência

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{P}_f(A) \\ s = a_{k_1}a_{k_2}\ldots a_{k_m} & \longmapsto & \{a_{k_1}, a_{k_2}\ldots, a_{k_m}\} \end{array}$$

define uma sobrejecção entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}_f(A)$ - verifique!. Como $\mathcal{A}$ é enumerável (pela alínea anterior), concluímos que $\mathcal{P}_f(A)$ também é enumerável - ver o exemplo 4 da pág. 80.

(c) Um subconjunto (qualquer) $X = \{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots\}$ determina, de maneira única, o subconjunto $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Mais, a correspondência assim definida

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ X = \{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots\} & \longmapsto & \{k_1, k_2, k_3, \ldots\} \end{array}$$

é biunívoca - verifique!. Pelo exercício 1, sabemos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é numerável, logo $\mathcal{P}(A)$ também não é numerável. Como A é infinito, também $\mathcal{P}(A)$ é infinito, logo $\mathcal{P}(A)$ não pode ser enumerável - proposição da pág. 82.

3. Comecemos por dispor os elementos de $X \times Y$ numa "matriz infinita":

$$\begin{array}{ccccc} (x_0,y_0) & (x_0,y_1) & (x_0,y_2) & (x_0,y_3) & \cdots \\ (x_1,y_0) & (x_1,y_1) & (x_1,y_2) & (x_1,y_3) & \cdots \\ (x_2,y_0) & (x_2,y_1) & (x_2,y_2) & (x_2,y_3) & \cdots \\ (x_3,y_0) & (x_3,y_1) & (x_3,y_2) & (x_3,y_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Então, a lista indicada

$$(x_0,y_0),\ (x_0,y_1),\ (x_1,y_0),\ (x_0,y_2),\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_0),\ (x_0,y_3),\ \cdots$$

corresponde a percorrermos, de cima para baixo, certas "diagonais" nesta matriz. Para qualquer número natural n, chamemos n-ésima diagonal à sequência

$$(x_0,y_n),(x_1,y_{n-1}),\ldots,(x_n,y_0)$$

– deste modo:

- a 0-ésima diagonal é (x_0,y_0),
- a 1-ésima diagonal é $(x_0,y_1),(x_1,y_0)$,
- a 2-ésima diagonal é $(x_0,y_2),(x_1,y_1),(x_2,y_0)$,

- e assim sucessivamente.

Notemos que os pares da n-ésima diagonal são da forma (x_i, y_j) com $i + j = n$, com i a crescer e j a decrescer. Notemos, também que, naquela listagem, para atingirmos o elemento (x_0, y_n) teremos de percorrer todas as diagonais anteriores à n-ésima. Sendo assim, se

$$a_k = \text{ número de elementos da } k\text{-ésima diagonal}, \quad (\text{portanto, } a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3)$$

percorremos, precisamente.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

pares antes de atingirmos (x_0, y_n). Como a k-ésima diagonal contém todos os elementos da forma (x_i, y_{k-i}) com $0 \leq i \leq k$, temos $a_k = k + 1$ e, portanto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2} \quad (\text{progressão aritmética de razão } 1).$$

Deste modo, na lista indicada, o par (x_0, y_n) ocupa a posição $\frac{n(n-1)}{2} + 1$. Finalmente, para chegarmos a um par genérico (x_m, y_{n-m}), da n-ésima diagonal, teremos de considerar, nessa diagonal, primeiro os pares (x_0, y_n), (x_1, y_{n-1}), ..., $(x_{m-1}, y_{n-(m-1)})$ que são exactamente m pares. Em conclusão, o par (x_m, y_{n-m}) ocupa a posição

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 + m.$$

Agora dado um par qualquer, (x_i, y_j), este par está na $i+j$-ésima diagonal. Assim substituindo na expressão acima n por $i + j$ e m por i obtemos

$$\frac{(i+j)(i+j-1)}{2} + 1 + i = \frac{(i+j)(i+j-1) + 2(i+1)}{2}$$

- a posição que ocupa na lista.