CURS 1

SIRURI ÎN SPATII METRICE

A) Notiuni preliminarii depre spatii metrice

$X \neq \varnothing$

Definitia 1. Se numeste distantă pe$X$ o functie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care are următoarele proprietăti:

i) $d(x,y) = d(y,x) \forall x, y \in X$

ii) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \forall x, y, z \in X$.

Definitia 2. Se numeste spatiu metric orice multime nevidă X pe care se defineste o distantă d.

Notatie:(X,d)

Exemple de spatii metrice

1) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d(x,y) = |x-y| \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2) d_2: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

Definitia 3. Fie (X,d) un spatiu metric, $x_0 \in X, r > 0$.

Multimea $B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ se numeste bila deschisă de centru x_0 si raza r ..

Multimea $B[x_0, r] = \{x \in X | \, d(x, x_0) \leq r\}$ se numeste bila închisă de centru x_0 si rază r.

B) Siruri în spatii metrice

(X,d) spatiu metric

Definitia 4. Se numeste sir de elemente din (X,d) orice functie $f : \mathbb{N} \to X$.

Notatie: $f(n) = x_n$

$f = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Definitia 5. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$un sir cu elemente din (X,d) si $n_1 < n_2 < ..... < n_k < ....$ un sir strict crescător de numere naturale.

Sirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$se numeste subsir al sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definitia 6. a) Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din (X,d) se numeste convergent dacă $\exists x \in X$ astfel încât $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$d(x_n, x) < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$.

b) Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din (X,d) se numeste sir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m \geq n_\varepsilon$.

c) Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din (X,d) se numeste sir mărginit dacă $\exists a \in X, \exists r > 0$ astfel încât $d(x_n, a) < r \forall n \in \mathbb{N}$.

d) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d). Elementul $x \in X$ se numeste punct limită al sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subsir al sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$.

e) Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) se numeste divergent dacă nu este convergent.

Teorema 1. a) Orice sir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este sir Cauchy.

b) Orice sir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este sir mărginit.

c) Orice sir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) care are cel putin un punct limită în X este sir convergent.

Definitia 7. Se numeste spatiu metric complet un spatiu metric (X,d) în care orice sir Cauchy este convergent.

C) Siruri din $\mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \geq 2$

$\mathbb{R}^k = \{(x_1, x_2, ..., x_k)\, |x_i \in \mathbb{R} \forall 1 \leq i \leq k\}$

Lema 1. Oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ sunt adevărate inegalitătile $|x_i - y_i| \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \forall 1 \leq i \leq k$.

Teorema 2. Fie un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$, $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{kn}) \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă si numai dacă sirurile $(x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente în $\mathbb{R}$.

În plus, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{1n}, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}, ..., \lim\limits_{n\to\infty} x_{kn}\right)$.

b) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este sir Cauchy dacă si numai dacă sirurile $(x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt siruri Cauchy în $\mathbb{R}$.

D) Siruri de numere reale .

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Definitia 8. a) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este mărginit dacă $\exists m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este (strict) crescător dacă $(x_n < x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N})\, x_n \leq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este (strict) descrescător dacă $(x_n > x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N})\, x_n \geq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

d) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este (strict) monoton dacă este (strict) crescător sau (strict) descrescător.

e) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$.

f) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă $\forall \varepsilon < 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$.

h) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă este convergent sau are limita $+\infty$ sau are limita $-\infty$.

Lema lui Cesaro. Orice sir mărginit de numere reale are cel putin un subsir convergent.

Criteriul lui Cauchy pentru siruri de numere reale. Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă si numai dacă este sir Cauchy.($\mathbb{R}$ este spatiu metric complet)

Demonstratie."" $\Rightarrow$ "" Implicatia este evidenta (a se vedea Teorema 1, pct.(a))

"" $\Leftarrow$ "" Conform Teoremei 1, pct.(b), sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este marginit.

Din Lema lui Cesaro obtinem ca sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are cel putin un subsir convergent, adica are cel putin un punct limita in $\mathbb{R}$.

Utilizand Teorema 1, pct.(c), deducem ca sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Corolar. Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă si numai dacă este sir Cauchy.($\mathbb{R}^k$ este spatiu metric complet)

Teorema lui Weierstass pentru siruri de numere reale. Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton si mărginit este convergent.

Observatie. Reciproca teoremei lui Weierstrass este falsa. Sirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$ este convergent, dar nu este monoton.

Exemplu. Sa se demonstreze ca sirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n, n \in \mathbb{N}^*$ este convergent.

Studiem monotonia sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$

Sunt adevarate inegalitatile

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

Din prima inegalitate rezulta ca

$$x_{n+1} - x_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

Fiind sirul strict descrescator, se studiaza marginirea inferioara a acestuia.

Utilizam a doua inegalitate succesiv pentru $k = 1, k = 2, ..., k = n$. Adunam inegalitatile respective si obtinem ca

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > \ln(n+1)\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > \ln(n+1) - \ln n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3}$$

Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton si marginit. Conform Teoremei lui Weierstrass, sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Notatie.

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n = c \in (0,1) \tag{4}$$

Numarul real c se numeste constanta lui Euler.

Criteriul clestelui pentru siruri de numere reale. Se considera sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifica

urmatoarele ipoteze:

a) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $x_n \le y_n \le z_n \forall n \ge n_0$

b) sirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Atunci sirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Criteriul raportului pentru siruri cu termeni pozitivi. Se considera un sir de numere reale pozitive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Daca $l < 1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Daca $l > 1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exemplu. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}$, unde $a, \alpha > 0$.

Notam $x_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = a$.

Daca $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Daca $a \in (0,1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Daca $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

Criteriul radicalului pentru siruri cu termeni pozitivi. Se considera un sir de numere reale pozitive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}=l$.

Exemplu. Sa se calculeze $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Notam $x_n = \frac{n!}{n^n}, n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

Aplicam criteriul radicalului pentru siruri cu termeni pozitivi si obtinem ca $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}=l$.

Lema lui STOLZ-CESARO (cazul $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$). Fie sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescator sau $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescator

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

Lema lui STOLZ-CESARO (cazul $\frac{0}{0}$). Fie sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

E) Limita inferioara si superioara a unui sir de numere reale

Pentru intelegerea cat mai eficienta a noilor notiuni introduse in aceasta sectiune sunt necesare cateva rezultate preliminarii.

Teorema 3. a) Orice sir monoton de numere reale are limita in $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Orice sir de numere reale are cel putin un subsir care are limita in $\overline{\mathbb{R}}$.

Oricarui sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i se asociaza sirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\overline{\mathbb{R}}$ definite in felul urmator

$$u_n = \sup_{k\geq n} x_k \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

$$v_n = \inf_{k \geq n} x_k \forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Sirurile $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au urmatoarele proprietati:
1) $u_{n+1} \leq u_n \forall n \in \mathbb{N}$
2) $v_{n+1 \geq} v_n \forall n \in \mathbb{N}$
3) $v_n \leq u_m \forall n, m \in \mathbb{N}$
4) $\exists u = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$
5) $\exists v = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$
6) $v \leq u$

Definitia 9. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir din $\mathbb{R}$.

a) Numarul $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right)$ se numeste limita superioara a sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Numarul $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right)$ se numeste limita inferioara a sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notatii:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) = \limsup x_n \tag{7}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right) = \liminf x_n \tag{8}$$

Observatie. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$

Definitia 10. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir din $\mathbb{R}$. Numarul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeste punct limita al sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ daca exista $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ un subsir al sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel incat $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = l$.

Notatie. $L\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \left\{ l \in \overline{\mathbb{R}} \middle| \, l \text{ este punct } \lim ita \text{ al sirului } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\}.$

Teorema 4. Pentru orice sir de numere reale sunt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adevarate afirmatiile

$$\liminf x_n = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} L\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \tag{9}$$

$$\limsup x_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} L\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \tag{10}$$

Corolar. a) Un sir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita in $\overline{\mathbb{R}}$ daca si numai daca $\liminf x_n = \limsup x_n$. In plus, $\lim_{n \to \infty} x_n = \liminf x_n = \limsup x_n$.

b) Un sir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este marginit daca si numai daca $\liminf x_n, \limsup x_n \in \mathbb{R}$.

CURS 2
SERII DE NUMERE REALE

A) NOTIUNI GENERALE

Sirului de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i se asociaza sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definitia 1. a) Perechea de siruri $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, notata $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, se numeste seria de numere reale asociata sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) x_n se numeste termenul general de rang n al seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

c) s_n se numeste suma partiala de rang n a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Definitia 2. a) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeste convergenta daca sirul de numere reale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

b) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeste divergenta daca sirul de numere reale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

c) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ are suma in $\overline{\mathbb{R}}$ daca sirul de numere reale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita in $\overline{\mathbb{R}}$.

In acest caz, suma seriei este egala cu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Notatie. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty n} s_n$.

d) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergenta.

Teorema 1. Se considera seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ convergenta. Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstratie. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta, rezulta ca sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

$$\lim_{n\to\infty n} s_n = s \in \mathbb{R}.$$

$$x_n = s_n - s_{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diferenta a doua siruri convergente este sir convergent. Obtinem ca sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

Corolar. Fie sirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ sau $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Observatie. Reciproca Teoremei 1 este falsa.

Sirul $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ are limita 0, dar seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergenta.

Criteriul lui Cauchy pentru serii de numere reale. a) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, astfel\ incat \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.

b) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca si numai daca $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ astfel\ incat \sum\limits_{k=n}^{n+p} |x_k| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. Orice serie de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ absolut convergenta este convergenta.

Observatie. Reciproca Teoremei 2 este falsa.

Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergenta, dar nu este absolut convergenta.

*Definitia 3.*Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeste semiconvergenta daca este serie convergenta, dar nu este serie absolut convergenta.

Criteriul lui Abel pentru serii de numere reale. Se considera sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu urmatoarele proprietati:

a) $x_{n+1} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

b) sirul de numere reale $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} y_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este marginit.

Atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergenta.

Exemplu. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergenta.

$$\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \cos n$$

Notam $x_n = \frac{1}{n}$ si $y_n = \cos n$.

Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescator cu limita 0.

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \cos 1 + \cos 2 + ... + n = \frac{\cos\frac{n+1}{2} \cdot \sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Sirul $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este marginit.

Conform criteriului lui Abel, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergenta.

Criteriul lui Dirichlet pentru serii de numere reale. Se considera sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu urmatoarele proprietati:

a) sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton si marginit

b) seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergenta.

Atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergenta.

Criteriul lui Leibniz pentru serii alternate de numere reale. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir descrescator de numere reale pozitive pentru care

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seriile de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ sunt convergente.

Exemplu. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergenta.

Alegem sirul $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$x_{n+1} < x_n \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Aplicam criteriul lui Leibniz si obtinem ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergenta.

B) Serii de numere reale cu termeni pozitivi

Se considera sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$.

Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca si numai daca este serie convergenta.

Teorema 3. Se considera o serie de numere reale pozitive $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) Sirul sumelor partiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescator si marginit inferior de 0.

b) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca sirul sumelor partiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este marginit superior. In plus, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n$.

c) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ poate fi convergenta sau divergenta, cu suma $+\infty$.

Criteriul raportului pentru serii de numere reale. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel ca $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Daca $l < 1$, atunci seria este convergenta.

Daca $l > 1$, atunci seria este divergenta.

Criteriul radicalului pentru serii de numere reale. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel ca $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}=l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Daca $l < 1$, atunci seria este convergenta.

Daca $l > 1$, atunci seria este divergenta.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Daca $l < 1$, atunci seria este divergenta.

Daca $l > 1$, atunci seria este convergenta.

Criteriul condensarii al lui Cauchy. Se considera un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ descrescator cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seriile de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceiasi natura.

Exemplu. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ este divergenta.

Notam $x_n = \frac{1}{n\ln n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescator cu limita 0.

Aplicam criteriul de condensare al lui Cauchy si rezulta ca seriile de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceiasi natura.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este caz particular al seriei armonice cu $\alpha = 1$, asadar aceasta este divergenta.

Rezulta ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ este divergenta.

Criteriul de comparatie cu inegalitati. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ doua serii cu termeni pozitivi pentru care exista n_0 astfel incat $x_n \le y_n$ $\forall n \ge n_0$.

a) Daca seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta.

b) Daca seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergenta.

Criteriul de comparatie cu limite. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ doua serii cu termeni pozitivi pentru care exista $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Daca $l \in (0, +\infty)$, atunci seriile au aceiasi natura.

b) Daca $l = 0$ si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta.

c) Daca $l = +\infty$ si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergenta.

EXEMPLE DE SERII DE NUMERE REALE REMARCABILE

1) Seria armonica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta daca si numai daca $\alpha > 1$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergenta daca si numai daca $\alpha \leq 1$.

2) Seria putere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n, a \in \mathbb{R}$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ este absolut convergenta daca si numai daca $a \in (-1, 1)$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ este divergenta daca si numai daca $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

3) Seria exponentiala $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ este absolut convergenta $\forall a \in \mathbb{R}$.

CURS 3
ELEMENTE DE TOPOLOGIE
TOPOLOGIA UNUI SPATIU METRIC

1) NOTIUNI ELEMENTARE DE TEORIA MULTIMILOR

Definitia 1. Fie $X \neq \varnothing$. Multimea $\wp(X) = .\{A|\, A \subseteq X\}$ se numeste multimea partilor lui X.

Observatie. $A \subseteq X \Leftrightarrow A \in \wp(X)$

Definitia 2. a) Fie A, B doua multimi. Multimea $A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$ se numeste diferenta multimilor A si B.

b) Fie A, B doua multimi cu $A \subseteq B$.Multimea $B \backslash A = C_B A$ se numeste complementara multimii A in raport cu multimea B.

c) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de multimi din $\wp(X)$. Multimea $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X | \exists i \in I\ astfel\ incat\ x \in A_i\}$ se numeste reuniunea familiei de multimi $(A_i)_{i \in I}$..

d) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de multimi din $\wp(X)$. Multimea $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X|\ x \in A_i \forall i \in I\}$ se numeste intersectia familiei de multimi $(A_i)_{i \in I}$.

Teorema 1. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de multimi din $\wp(X)$. Sunt adevarate afirmatiile

$$C_X \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} C_X A_i$$

$$C_X \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} C_X A_i.$$

2) NOTIUNI GENERALE DESPRE SPATII TOPOLOGICE

Definitia 3. a) O familie de multimi $\tau \subseteq \wp(X)$ se numeste topologie pe X daca indeplineste urmatoarele conditii:

$$\text{(i) } \varnothing, X \in \tau$$

$$\text{(ii) } G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$$

$$\text{(iii) } G_i \in \tau \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau.$$

b) Se numeste spatiu topologic o multime nevida X pe care se defineste o topologie $\tau \subseteq \wp(X)$.

Notatie. (X, τ)

Exemple de spatii topologice.

1) $X \neq \varnothing$

$\tau = \wp(X)$ topologie pe X.

2) $X \neq \varnothing$

$\tau = \{\varnothing, X\}$ topologie pe X.

Definitia 4. Fie (X,τ) un spatiu topologic.

a) O multime $G \subseteq X$ se numeste multime deschisa relativ la topologia τ daca $G \in \tau$.

b) O multime $F \subseteq X$ se numeste multime inchisa relativ la topologia τ daca $C_X F \in \tau$.

c) O multime $V \subseteq X$ se numeste vecinatate a punctului $x_0 \in X$ daca $\exists G \in \tau$ astfel incat $x_0 \in G \subseteq V$.

Notatie. $V_\tau(x_0) = \{V \subseteq X | V \textit{ vecinatate a punctului } x_0\}$

Definitia 5. Fie (X,τ) un spatiu topologic.

a) O multime $K \subseteq X$ se numeste multime compacta relativ la topologia τ daca din orice acoperire cu multimi deschise a lui K se poate exrtrage o subacoperire finita.

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i, G_i \in \tau \forall i \in I \Rightarrow \exists J \subseteq I \text{ submultime finita astfel incat } K \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$$

b) O multime $A \subseteq X$ se numeste multime neconexa relativ la topologia τ daca $\exists G_1, G_2 \in \tau$ astfel incat $G_1 \cap A \neq \varnothing, G_1 \cap A \neq \varnothing, (G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \varnothing$ si $A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$.

c) O multime $A \subseteq X$ se numeste multime conexa relativ la topologia τ daca aceasta nu este multime neconexa.

Definitia 6. Fie (X,τ) un spatiu topologic, $A \subseteq X$ si $x_0 \in X$.

a) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct interior al multimii A daca $A \in V_\tau(x_0)$. Multimea $\overset{0}{A} = \{x_0 \in X | \ x_0 \textit{ punct interior al multimii } A\}$ se numeste interiorul multimii A.

b) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct de aderenta al multimii A daca $V \cap A \neq \varnothing \forall V \in V_\tau(x_0)$. Multimea $\overline{A} = \{x_0 \in X | \ x_0 \textit{ punct de aderenta al multimii } A\}$ se numeste aderenta (inchiderea) multimii A.

c) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct de acumulare al multimii A daca $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing \forall V \in V_\tau(x_0)$. Multimea $A' = \{x_0 \in X | \ x_0 \textit{ punct de acumulare al multimii } A\}$ se numeste multimea punctelor de acumulare ale multimii A.

d) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct de acumulare al multimii A daca $\exists V_0 \in V_\tau(x_0)$ astfel incat $V_0 \cap A = \{x_0\}$. Multimea $IzoA = \{x_0 \in X | \ x_0 \textit{ punct izolat al multimii } A\}$ se numeste multimea punctelor izolate ale multimii A.

e) Multimea $\overline{A} \cap \overline{C_X A}$ se numeste frontiera topologica a multimii A.

Notatie. $FrA = \overline{A} \cap \overline{C_X A}$

Teorema 1. (Proprietatile multimilor inchise) In orice spatiu topologic (X,τ) sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $\varnothing, X$ sunt multimi inchise relativ la topologia τ;

b) Daca $F_1 \subseteq X$ si $F_2 \subseteq X$ sunt multimi inchise, atunci $F_1 \cup F_2$ este multime inchisa;

c) Daca $(F_i)_{i\in I}$ este o familie de multimi inchise, atunci $\bigcap_{i\in I} F_i$ este multime inchisa.

Teorema 2. (proprietatile vecinatatilor unui punct) In orice spatiu topologic (X,τ) sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) Daca $V \in V_\tau(x_0)$ *si* $V \subseteq W$, atunci $W \in V_\tau(x_0)$;

b) Daca $V_1, V_2 \in V_\tau(x_0)$, atunci $V_1 \cap V_2 \in V_\tau(x_0)$ *si* $V_1 \cup V_2 \in V_\tau(x_0)$.

Teorema 3. In orice spatiu topologic (X, τ) sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $\overline{C_X A} = C_X \overset{0}{A}\ \forall A \subseteq X$;

b) $\overset{0}{C_X A} = C_X \overline{A}\ \forall A \subseteq X$;

c) $FrA = \overline{A} \backslash \overset{0}{A}\ \forall A \subseteq X$.

Teorema 4. Fie (X, τ) un spatiu topologic si $A \subseteq X$.

a) Multimea $\overset{0}{A}$ are urmatoarele proprietati

$$\overset{0}{A} \subseteq A$$

$$G \in \tau, G \subseteq A \Rightarrow G \subseteq \overset{0}{A}$$

$$A \in \tau \Leftrightarrow A = \overset{0}{A}.$$

b) Multimea $\overline{A}$ are urmatoarele proprietati

$$A \subseteq \overline{A}$$

$$A \subseteq F, F\ multime\ inchisa \Rightarrow \overline{A} \subseteq F$$

$$A \text{ multime inchisa} \Leftrightarrow A = \overline{A}.$$

c) Multimea A' are urmatoarele proprietati

$$A' \subseteq \overline{A}$$

$$\overline{A} = A \cup A'$$

$$A \text{ multime inchisa} \Leftrightarrow A' \subseteq A.$$

d) Multimea $IzoA$ are urmatoarele proprietati

$$IzoA \subseteq A \backslash A'.$$

3) TOPOLOGIA UNUI SPATIU METRIC

Teorema 5. Orice spatiu metric (X, d) este spatiu toplogic.

Distantei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ i se asociaza topologia $\tau_d \subseteq \wp(X)$ definita in felul urmator

$$\tau_d = \{\varnothing\} \cup \{G \subseteq X | G \neq \varnothing, \forall x \in G \exists r > 0\ astfel\ incat\ B(x_0, r) \subseteq G\ \}.$$

Definitia 6. a) Topologia τ_d se numeste topologia asociata distantei d.
b) Multimea $G \subseteq (X, d)$ se numeste deschisa daca $G \in \tau_d$.
c) Multimea $F \subseteq (X, d)$ se numeste inchisa daca $C_X F \in \tau_d$.
Exemple.
1) (R, d)
$d(x, y) = |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$
$\tau_d \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}}$ topologia uzuala a lui $\mathbb{R}$.
2) $n \geq 2$
$(\mathbb{R}^n, d_2)$
$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_2\left((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$
$\tau_{d_2} \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}^n}$ topologia uzuala a lui $\mathbb{R}^n$.
Teorema 6. Fie (X, d) un spatiu metric, $A \subseteq X, x_0 \in A$.
a) $V \in V_{\tau_d}(x_0) \Leftrightarrow \exists r > 0\ astfel\ incat\ B(x_0, r) \subseteq V$.
b) $x_0 \in \overset{0}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0\ astfel\ incat\ B(x_0, r) \subseteq A$.
c) $x_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow A \cap B(x_0, r) \neq \varnothing \forall r > 0$.
d) $x_0 \in A' \Leftrightarrow A \cap (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing \forall r > 0$.
e) $x_0 \in IzoA \Leftrightarrow \exists r > 0\ astfel\ incat\ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$.

Teorema 7. Fie (X, d) un spatiu metric. Multimea $K \subseteq (X, \tau_d)$ este compacta daca si numai daca $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sir din K exista $x_0 \in K$ si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsir ai sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.

Definitia 7. O multime $A \subseteq (X, d)$ se numeste multime marginita daca $\exists a \in X, r > 0$ astfel incat $A \subseteq B(a, r)$.

Teorema Heine-Borel. O multime $K \subseteq (\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}^n})$ este compacta daca si numai daca K este multime inchisa si marginita.

Definitia 8. Multimea nevida $A \subseteq \mathbb{R}$. se numeste interval daca $\forall x, y \in A$ cu $x \leq y$ si $\forall z \in \mathbb{R}$ cu $x \leq z \leq y$ avem ca $z \in A$.

Teorema 8. Multimea $A \subseteq \mathbb{R}$ este conexa daca si numai daca $A = \varnothing$ sau A este interval in $\mathbb{R}$.

..

FUNCTII CONTINUE PE SPATII METRICE

SIRURI SI SERII DE FUNCTII

A) FUNCTII CONTINUE PE SPATII METRICE

Definitia 1. Fie o functie $f : D \subseteq X \to Y$ o functie, $A \subseteq D$ si $B \subseteq Y$.

a) Multimea $f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A \; astfel \; incat \; f(x) = y\} \subseteq Y$ se numeste imaginea directa a multimii A prin functia f.

b) Multimea $f^{-1}(B) = \{x \in D | \; f(x) \in B \;\} \subseteq D$ se numeste preimaginea multimii B prin functia f.

Observatii. 1) $f(\varnothing) = \varnothing, f(D) = \operatorname{Im} f$.

2) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(Y) = D$.

Definitia 2. (definitii alternative pentru functii continue)

Se considera $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o functie si $x_0 \in D$.

a) Functia f este continua in x_0 daca $\forall W \in V_{\tau_{d_2}}(f(x_0)) \, \exists V \in V_{\tau_{d_1}}(x_0)$ astfel incat $f(D \cap V) \subseteq W$.

b) Functia f este continua in x_0 daca $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea ca $\forall x, y \in D \; cu \; d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$ avem ca $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

c) Functia f este continua in x_0 daca $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sir din D cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem ca $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Definitia 3. Spunem ca functia $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continua pe multimea $A \subseteq D$ daca f este continua in orice punct al multimii A.

Teorema 1. Fie $D \subseteq (X, d_1)$ o multime nevida pentru care $\exists x_0 \in IzoD$. Orice functie $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continua in x_0.

Demonstratie. $x_0 \in IzoD \Rightarrow \exists V_0 \in V_{\tau_{d_1}}(x_0)$astfel incat $V_0 \cap D = \{x_0\}$.

Fie $W \in V_{\tau_{d_2}}(f(x_0))$ o vecinatate arbitrara a punctului $f(x_0)$. Rezulta ca $f(x_0) \in W$.

Este adevarat ca $f(V_0 \cap D) = \{f(x_0)\} \subseteq W$.

Conform definitiei 1, pct. a deducem ca functia este continua in punctul x_0.

Teorema 2.(proprietatile functiilor continue) Fie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o functie continua pe X. Sunt adevarate urmatoarrele afirmatiiS

a) $\forall F \subseteq Y$ multime inchisa, multimea $f^{-1}(F) \subseteq X$ este multime inchisa;

b) $\forall G \subseteq Y$ multime deschisa, multimea $f^{-1}(G) \subseteq X$ este multime deschisa;

c) $\forall K \subseteq X$ multime compacta, multimea $f(K) \subseteq Y$ este multime compacta;

d) $\forall A \subseteq X$ multime conexa, multimea $f(A) \subseteq Y$ este multime conexa;

Teorema 3. Fie $K \subseteq (X, d_1)$ o multime compacta. Orice functie continua $f : K \subseteq (X, d_1) \to \mathbb{R}$ este marginita si isi atinge mariginile.

Definitia 4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie. Spunem ca f are proprietatea lui Darboux daca $\forall x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2$,$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ situat intre $f(x_1)$ si $f(x_2)$ exista $c \in I$ situat intre x_1 si x_2 astfel incat $f(c) = \lambda$.

Teorema 5. Fie $I \subseteq R$ un interval.

a) Orice functie continua $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

b) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie injectiva care are proprietatea lui Darboux. Atunci f este o functie strict monotona.

Corolar. Fie $I \subseteq R$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua.

a) Daca $\exists a, b \in I$ cu $a \neq b$ astfel ca $f(a)f(b) < 0$, atunci $\exists c \in I$ situat intre a si b astfel incat $f(c) = 0$.

b) Daca f este functie injectiva, atunci f este strict monotona.

B) SIRURI DE FUNCTII

$D \subseteq \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Definitia 6. Spunem ca sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe multimea nevida $A \subseteq D$ daca $\forall x \in A \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Notatii.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x) \forall x \in A$$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$f_n \overset{s}{\to} f$$

Definitia 7. Spunem ca sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe multimea nevida $A \subseteq D$ catre functia $f : A \to \mathbb{R}$ daca $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$ si $\forall x \in A$.

Notatie.

$$f_n \overset{u}{\to} f$$

Observatie.

$$f_n \overset{u}{\to} f \Rightarrow$$

$$f_n \overset{s}{\to} f$$

Implicatia "" $\Leftarrow$ "" este falsa. Sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n\ \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$ converge simplu pe $[0,1]$, dar nu converge uniform pe $[0,1]$.

Criteriul practic de convergenta uniforma. Se considera sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, multimea nevida $A \subseteq X$ si functia $f : A \to \mathbb{R}$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

(i) $f_n \overset{u}{\to} f$

(ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

Teorema lui Weierstrass pentru siruri de functii. Se considera sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, multimea nevida $A \subseteq X$ si functia $f : A \to \mathbb{R}$ astfel ca $f_n \overset{u}{\to} f$. Daca $\exists x_0 \in A$ cu proprietatea ca f_n este functie continua in $x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$, atunci f este functie continua in x_0 .

Corolar. a) Daca $f_n \overset{u}{\to} f$ si f_n este functie continua pe multimea A $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci f este functie continua pe multimea A.

b) Daca $f_n \overset{s}{\to} f$, $\exists x_0 \in A$ cu proprietatea ca f_n este functie continua in x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$ si f nu este functie continua in x_0 , atunci $f_n \overset{u}{\nrightarrow} f$.

Teorema lui Dini. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii continue cu $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua cu urmatoarele proprietati:

a) $f_n \overset{s}{\to} f$

b) $f_n \leq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_n \geq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $f_n \overset{u}{\to} f$.

*Teorema lui Polya.*Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii monotone cu $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua astfel ca $f_n \overset{s}{\to} f$.

Atunci $f_n \overset{u}{\to} f$.

C) SERII DE FUNCTII

$D \subseteq \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sirului de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i se asociaza sirul de functii $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu

$$s_n : D \to \mathbb{R}, s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)\ \forall x \in D$$

Definitia 8. a) Perechea de siruri de functii $\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, notata $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, se numeste seria de functii asociata sirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) f_n se numeste termenul general de rang n al seriei de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

c) s_n se numeste suma partiala de rang n a seriei de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

Definitia 9. a) Spunem ca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergenta pe multimea $A \subseteq D$ daca sirul de functii $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe multimea A .

b) Spunem ca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergenta pe multimea $A \subseteq D$ daca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergenta pe multimea $A \subseteq D$.

c) Spunem ca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergenta pe multimea $A \subseteq D$ daca sirul de functii $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe multimea A .

Observatii. a) Daca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergenta pe multimea A, atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergenta pe multimea A.

b) Daca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergenta convergenta pe multimea A, atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergenta pe multimea A.

Criteriul lui Weierstrass pentru serii de functii. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii cu $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de numere reale pozitive astfel ca $|f_n(x)| \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$. Daca seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta, atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform si absolut convergenta pe multimea D.

Criteriul lui Abel pentru serii de functii. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doua siruri de functii cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ care indeplinesc urmatoarele conditii:

a) $f_n \xrightarrow{u} 0$

b) $f_{n+1} \leq f_n \forall n \in \mathbb{N}$

c) $\exists M > 0$ astfel incat $|g_0(x) + ... + g_n(x)| \leq M \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$.

Atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergenta pe multimea D.

Criteriul lui Dirichlet pentru serii de functii. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doua siruri de functii cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ care indeplinesc urmatoarele conditii:

a) $f_{n+1} \leq f_n \forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_{n+1} \geq f_n \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\exists M > 0$ astfel incat $|f_n(x)| \leq M \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$.

c) seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniform pe multimea D.

Atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergenta pe multimea D.

FUNCTII DERIVABILE

A) SPATII LINIARE NORMATE

X spatiu liniare real

0_X elementul neutru al lui X

Definitia 1. Se numeste norma pe X o functie $p : X \to \mathbb{R}_+$ care are urmatoarele proprietati:

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in X$

b) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

c) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$.

Notatie. $p(x) \overset{not}{=} \|x\|$

$p \overset{not}{=} \|\ \|$

Definitia 2. Se numeste spatiu liniar normat un spatiu liniar X pe care se defineste o norma $\|\ \| : X \to \mathbb{R}_+$.

Notatie. $(X, \|\ \|)$

Teorema 1. Orice spatiu normat $(X, \|\ \|)$ este spatiu metric.

Normei $\|\ \| : X \to \mathbb{R}_+$ ii asociem distanta $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definita prin $d(x, y) = \|x - y\|\ \forall x, y \in X$.

Distantei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ i se asociaza topologia $\tau_d \overset{not}{=} \tau_{\|\ \|} \subseteq \wp(X)$.

Definitia 3. Topologia $\tau_{\|\ \|}$ se numeste topologia asociata normei $\|\ \|$.

Notatie. $\lambda \in \mathbb{R}^*, x \in X$

$$\tfrac{1}{\lambda}x \overset{not}{=} \tfrac{x}{\lambda}$$

EXEMPLE DE SPATII NORMATE

1) $(\mathbb{R}, |\ |)$.

2) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$ unde $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

3) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$ unde $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|\ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ unde $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}\ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

B) FUNCTII DERIVABILE

Definitia 4. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\|)$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca exista $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$.

Notatie. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'(x_0)$ derivata functiei f in punctul x_0

Definitia 5. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\|)$ este derivabila pe multimea $A \in D \cap D'$ daca f este derivabila in orice punct al multimii A.

Teorema 2. Daca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\|)$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci f este continua in x_0.

Observatie. Reciproca Teoremei 2 este falsa.

In continuare vom considera cazul particular $(X, \|\|) = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ cu $n \geq 2$ si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))\ \ \forall x \in D$.

Functiile $f_1, f_2, ..., f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numesc componentele functiei f.

Notam $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$.

Teorema 3. Functia $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca si numai daca functiille $f_1, f_2, ..., f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile in punctul $x_0 \in D \cap D'$. In plus $f'(x_0) = \left(\overset{'}{f}_1(x_0), ..., \overset{'}{f}_n(x_0) \right) \in \mathbb{R}^n$.

C) FUNCTII REALE DERIVABILE

Conform Teoremei 3, studierea derivabilitatii functiilor vectoriale se reduce la studierea derivabilitatii componentelor acestora. Componentele unei functii vectoriale fiind functii reale, se impune studierea derivabilitatii in cazul functiilor $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema 4. a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile in punctul $x_0 \in D \cap D'$si $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci functiile $f + g, f - g, \alpha f, fg : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile in $x_0 \in D \cap D'$ si sunt adevarate relatiile $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$, $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ si $(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$.

b) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile in punctul $x_0 \in D \cap D'$ cu $g(x) \neq 0 \forall x \in D$. Atunci functia $\frac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila in $x_0 \in D \cap D'$ si este adevarata relatia $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

c) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to A$ o functie derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$si $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie derivabila in punctul $f(x_0) \in A \cap A'$. Atunci functia $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$si $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

d) Fie I, J doua intervale din $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ o functie bijectiva si $x_0 \in I$ cu urmatoarele proprietati:

- f este functie monotona
- f este derivabila in punctul x_0
- $f'(x_0) \neq 0$.

Atunci $f^{-1} : J \to I$ este derivabila in punctul $f(x_0) = y_0$ si $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Definitia 6. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in D$.

a) x_0 se numeste punct de minim local al functiei f daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in V \cap D$.

b) x_0 se numeste punct de maxim local al functiei f daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in V \cap D$.

c) x_0 se numeste punct de extrem local al functiei f daca x_0 este punct de maxim local al functiei f sau x_0 este punct de minim local al functiei f.

Teorema lui Fermat. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in \overset{0}{D}$ un punct de extrem local al functiei f. Daca f este derivabila in punctul x_0, atunci

$f'(x_0) = 0.$

Demonstratie. $x_0 \in \overset{0}{D} \Rightarrow \exists r_1 > 0$ astfel incat $(x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subset D$

Presupunem ca x_0 este punct de minim local al functiei $f \Rightarrow \exists r_2 > 0$ astfel incat $f(x) \geq f(x_0) \, \forall x \in (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \cap D$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\}$ si obtinem ca

$$f(x) \geq f(x_0) \, \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Sunt adevarate inegalitatile

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + r)$$

(1)

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \ \forall x \in (x_0 - r, x_0) \ (2)$$

Trecem la limita in relatiile (1) si (2) si obtinem ca $f'_s(x_0) \leq 0$ si $f'_d(x_0) \geq 0$.

Tinand cont ca functia este derivabila in punctul x_0, rezulta ca $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = 0$.

Teorema lui Rolle. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b) cu $f(a) = f(b)$. Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = 0$.

Demonstratie. Multimea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ este compacta si functia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua pe $[a, b]$. Atunci f este marginita si isi atinge marginile pe $[a, b]$.

$$\exists u, v \in [a, b] \text{ astfel incat } f(u) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ si } f(v) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Se dinsting mai multe cazuri, si anume:

Cazul 1. $u, v \in \{a, b\}$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(u) = f(v) \Rightarrow f \text{ functie constanta} \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$$

Cazul 2. $u \in \{a, b\}, v \in (a, b)$

$v \in (a, b) = \overset{0}{[a, b]}$ punct de extrem local al functiei f si f este derivabila in punctu

l

v$\overset{th.Fermat}{\Rightarrow} f'(v) = 0$

Cazul 3. $v \in \{a, b\}, u \in (a, b)$

$u \in (a, b) = \overset{0}{[a, b]}$ punct de extrem local al functiei f si f este derivabila in punctul

u$\overset{th.Fermat}{\Rightarrow} f'(u) = 0$

Cazul 4. $u, v \in (a, b)$

$u, v \in (a,b) = \overset{0}{[a,b]}$ puncte de extrem local ale functiei f si f este derivabila in punctele

u ,v$\overset{th.Fermat}{\Rightarrow} f'(u) = f'(v) = 0$.

Teorema lui Cauchy. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ doua functii continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) cu $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Exista $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Teorema lui Lagrange. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b). Exista $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstratie. Alegem functia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita prin $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x \ \forall x \in [a, b]$.

Functia g are urrmatoarele proprietati:

- g este continua pe $[a, b]$
- g este derivabila pe (a, b)
- $g(a) = g(b)$
- $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \forall x \in (a, b)$.

Aplicam Teorema lui Rolle si obtinem ca $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $g'(c) = 0$.

Rezulta ca $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) \ astfel \ incat \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corolare la Teorema lui Lagrange. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie.

a) Daca f este derivabila pe I si $f'(x) = 0 \forall x \in I$, atunci f este functie constanta pe I.

b) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua pe I si $\exists x_0 \in I$ astfel ca f este derivabila pe $I \setminus \{x_0\}$... Daca $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, atunci f este derivabila in punctul x_0 si $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

c) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila pe I.

Daca $f'(x) \geq 0 \forall x \in I$, atunci f este functie crescatoare pe I.

Daca $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$, atunci f este functie descrescatoare pe I.

Daca $f'(x) > 0 \forall x \in I$, atunci f este functie strict crescatoare pe I.

Daca $f'(x) < 0 \forall x \in I$, atunci f este functie strict descrescatoare pe I.

Definitia 7. Un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ se numeste nedegenerat daca I are cel putin doua elemente distincte.

Teorema lui Darboux. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila. Atunci $f' : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

Corolar. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila. Daca $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$, atunci $f'(x) > 0 \forall x \in I$ sau $f'(x) < 0 \forall x \in I$.

Regula lui L'Hospital (varianta $\frac{0}{0}$)

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I' \backslash I$ si $f, g : I \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile pe I care verifica urmatoarele ipoteze:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$

c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Regula lui L'Hospital (varianta $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$*)*

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I' \backslash I$ si $f, g : I \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile pe I care verifica urmatoarele ipoteze:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$

b) $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$

c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel incat $g(x) \neq 0 \forall x \in I \cap V$ si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Observatie. Ipoteza (c) din Regula lui L'Hospital este esentiala pentru ca limitele sa fie egale.

Alegem functiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $g(x) = \sin x \forall x \in (0, +\infty)$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nu exista.}$$

Limitele nu pot fi egale pentru ca $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu exista.

D) DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Definitia 8. a) Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila de doua ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel ca functia f sa fie derivabila pe multimea $V \cap D$ si $f' : D \cap V \to \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila de n ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel ca functia f sa fie derivabila de $n-1$ ori pe multimea $V \cap D$ si $f^{(n-1)} : D \cap V \to \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$.

c) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila de n ori pe multimea $A \subseteq D \cap D'$ daca f este derivabila de n ori in orice punct al multimii A.

Notatii. a) $f''(x_0) \overset{not}{=} (f')'(x_0)$.

b) $f^{(n)}(x_0) \overset{not}{=} \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$.

Definitia 9. Se considera functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in D \cap D'$ si $n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat f este derivabila de n ori in punctul x_0.

a) Functia $T_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $T_{f,n,x_0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ se numeste polinomul Taylor de rang n asociat functiei f si punctului x_0.

b) Functia $R_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $R_{f,n,x_0}(x) = f(x) - T_{f,n,x_0}(x)$ se numeste restul lui Taylor de rang n asociat functiei f si punctului x_0.

Observatie. $f = T_{f,n,x_0} + R_{f,n,x_0}$

Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $n \in \mathbb{N}^*$, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de $n+1$ ori pe multimea I si $x_0 \in I$. Oricare ar fi $x \in I$ *cu* $x \neq x_0$ exista $c \in I$ situat intre x *si* x_0 astfel incat

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Exemplu. Functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ este indefinit derivabila pe $\mathbb{R}$ si $f^{(k)}(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Alegem $n \in \mathbb{N}^*, x_0 = 0$.

Aplicam Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange si obtinem ca oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ *cu* $x \neq 0$ exista $c \in \mathbb{R}$ situat intre x *si* 0 astfel incat

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^n}{n!} + \tfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Definitia 10. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie.

a) f se numeste functie convexa daca $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \ \forall x, y \in I, \forall t \in [0,1]$.

b) f se numeste functie concava daca $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y) \ \forall x, y \in I, \forall t \in [0,1]$.

Inegalitatea lui Jensen. a) Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie convexa. Oricare ar fi $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ si $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, +\infty]$ cu $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$ este adevarata inegalitatea

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n).$$

b) Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie concava. Oricare ar fi $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ si $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, +\infty]$ cu $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$ este adevarata inegalitatea

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n).$$

Teorema 10. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de doua ori pe multimea I.

a) f este functie convexa daca si numai daca $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.

b) f este functie concava daca si numai daca $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.

Definitia 11. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie si $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Spunem ca functia f este de clasa C^n pe I daca f este derivabila de n ori pe I si $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ este functie continua pe I.

b) Spunem ca functia f este de clasa C^{∞} pe I daca f este derivabila de m ori pe I $\forall m \in \mathbb{N}^{*}$.

Notatii. $C^{n}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | \ .f \ functie \ de \ clasa \ C^{n} \ pe \ I\}$

$C^{\infty}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | \ .f \ functie \ de \ clasa \ C^{\infty} \ pe \ I\}$.

CURS 6
SERII DE PUTERI
DEZVOLTARI IN SERII TAYLOR

A) SERII DE PUTERI

Definitia 1. Se numeste serie de puteri in jurul punctului $x_0 \in \mathbb{R}$ seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, unde functia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definita prin $f_0(x) = a_0 \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = a_n (x - x_0)^n \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Notatie. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Definitia 2. a) Numarul $R = \sup \{r \geq 0 | \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \textit{ serie convergenta}\} \in [0, +\infty]$ se numeste raza de convergenta a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

b) Intervalul $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \mathbb{R}$ se numeste intervalul de convergenta al seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

c) Multimea $A = \{x \in \mathbb{R} | \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \textit{ serie convergenta} \} \subseteq \mathbb{R}$ se numeste multimea de convergenta a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

d) Functia $f : A \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \forall x \in A$ se numeste suma seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Observatie. 1) $x_0 \in A$

2) $f(x_0) = a_0$.

Teorema Cauchy-Hadamard. Se considera seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ si numarul $l = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$. Raza de convergenta a seriei de puteri este data de formula

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, l \in (0, +\infty) \\ +\infty, l = 0 \\ 0, l = +\infty \end{cases}$$

Teorema lui Abel. Se conseidera seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ si R raza sa de convergenta. Atunci:

a) $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ este absolut convergenta;

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$ seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ este divergenta;

c) Daca $R > 0$, pentru orice numar real $r \in (0, R)$ seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \ (x - x_0)^n$ este absolut si uniform convergenta pe $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Corolar. a) Sunt adevarate incluziunile $A \subseteq \mathbb{R}$ si $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$.

b) Daca $R = +\infty$, atunci $A = \mathbb{R}$.

c) Daca $R = 0$, atunci $A = \{x_0\}$.

Teorema 1. Se considera seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \ (x - x_0)^n$ cu $R > 0$ si $f : A \to \mathbb{R}$ suma seriei de puteri. Atunci:

a) $f \mid_{(x_0 - R, x_0 + R)}$ este functie de clasa C^{∞} pe $(x_0 - R, x_0 + R)$. In plus,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x - x_0)^n\right)^{(k)} \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n.$$

b) f este functie continua pe A.

B) DEZVOTARI IN SERIE TAYLOR

Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^{∞} pe intervalul I.

Definitia 3. Seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ se numeste seria Taylor asociata functiei f in jurul punctului x_0.

Teorema 2. Fie $a < b \in \mathbb{R}, I = [a, b]$ *sau* $I = (a, b)$ *sau* $I = [a, b)$ *sau* $I = (a, b]$, $x_0 \in I$ si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^{∞} pe intervalul I pentru care $\exists M > 0$ astfel incat $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \ \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci seria Taylor asociata functiei f in jurul punctului x_0 este uniform convergenta pe I si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \ \forall x \in I$.

Dezvotari in serie Taylor in jurul punctului $x_0 = 0$ ale unor functii elementare

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \forall x \in \mathbb{R}$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ \forall x \in \mathbb{R}$

4) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \ \forall x \in (-1, 1)$

5) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ \forall x \in (-1, 1)$

CURS 7
FUNCTII DIFERENTIABILE
A) APLICATII LINIARE SI CONTINUE PE SPATII LINIARE NORMATE

Definitia 1. O functie $T:(X,\| \|_X)\to(Y,\| \|_Y)$ se numeste aplicatie liniara daca $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)\ \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall x,y\in X$.

Teorema 1. O aplicatie liniara $T:(X,\| \|_X)\to(Y,\| \|_Y)$ este functie continua pe X daca si numai daca $\exists\lambda>0$ astfel incat $\|T(x)\|_Y\le\lambda\|x\|_X\ \ \forall x\in X$.

Notatie.$\mathcal{L}(X,Y)=\{T:X\to Y|T\ \textit{aplicatie liniara si continua}\}$

Pe spatiul liniar real $\mathbb{R}^n$ se considera baza canonica $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, unde

$$e_1=(1,0,0,...,0)$$

$$e_2=(0,1,0,...,0)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$e_n=(0,0,0,...,1)$$

Oricare ar fi $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ are loc egalitatea $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$.

Teorema 2. Fie $n,m\in\mathbb{N}^*$. Orice aplicatie liniara $T:(\mathbb{R}^n,\| \|_2)\to(\mathbb{R}^m,\| \|_2)$ este functie continua pe $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3. Functia $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ este aplicatie liniara daca si numai daca $\exists!u\in\mathbb{R}^m$ astfel incat $T(x)=xu\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$$T=id_{\mathbb{R}}\cdot u$$

$$id_{\mathbb{R}}\overset{not}{=}dx\Longrightarrow T=dx\cdot u$$

Teorema 4. Fie $n\ge2$. Functia $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ este aplicatie liniara daca si numai daca $\exists!\ \lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n\in\mathbb{R}^m$ astfel incat

$$T(x_1,x_2,...x_n)=x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+...+x_n\lambda_n\ \forall(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Definim aplicatiile liniare
$pr_1=dx_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},pr_1(x_1,x_2,...x_n)=x_1\ \forall(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n$
$pr_2=dx_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},pr_2(x_1,x_2,...x_n)=x_2\ \forall(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n$
.
.
.
$pr_n=dx_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},pr_n(x_1,x_2,...x_n)=x_n\ \forall(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n$
Aplicatia liniara $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ se descrie in felul urmator

$$T = dx_1 \cdot \lambda_1 + dx_2 \cdot \lambda_2 + ... + dx_n \cdot \lambda_n$$

B) DERIVATELE PARTIALE ALE FUNCTIILOR DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Se considera $n \geq 2$ si functia $f = (f_1, f_2, ...f_m) : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definitia 2. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivata partiala in raport cu variabila $x_i, 1 \leq i \leq n$, in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}^m$.

Notatie. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \overset{not}{=} \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$

Teorema 5. Functia $f = (f_1, f_2, ...f_m) : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivata partiala in raport cu variabila $x_i, 1 \leq i \leq n$, in punctul $x_0 \in D \cap D'$daca si numai daca functiile $f_1, f_2, ..., f_m : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admit derivata partiala in raport cu variabila $x_i, 1 \leq i \leq n$, in punctul $x_0 \in D \cap D'$. In plus, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_0), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0) \right)$.

Exemplu. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Derivatele partiale se calculeaza pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in felul urmator.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{(xy)'_x (x^2 + y^2) - xy (x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{(xy)'_y (x^2 + y^2) - xy (x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

In $(0, 0)$ derivatele partiale se calculeaza folosind definitia.

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f((0,0) + te_1) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$f admite derivata partiala in raport cu variabila x in punctul $(0, 0)$ si $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f((0,0) + te_2) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$f admite derivata partiala in raport cu variabila

$y inpunctul (0, 0)$ si $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

C) FUNCTII DIFERENTIABILE

Definitia 3. Spunem ca functia $f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ este diferentiabila in punctul$x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists T \in \mathcal{L}(X, Y)$ astfel incat

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0.$$

Observatie. Aplicatia liniara si continua $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ din definitia 3 este unica.

Notatie. $T \overset{not}{=} df(x_0)$ -diferentiala functiei f in punctul x_0.

Definitia 4. Spunem ca functia $f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ este diferentiabila pe multimea $A \subseteq D \cap D'$ daca f este diferentiabila in orice punct al multimii A.

Notatie.$df : A \to \mathcal{L}(X, Y)$ -diferentiala functiei f pe multimea $A \subseteq D \cap D\prime$.

Teorema 6. Orice functie $f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ diferentiabila in punctul $x_0 \in D \cap D\prime$ este continua in x_0.

Demonstratie.$f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ diferentiabila in punctul $x_0 \in D \cap D' \Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(X, Y)$ astfel incat

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0.$$

$T \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow \exists \lambda > 0$ astfel incat $\|T(x)\|_Y \leq \lambda \|x\|_X \ \forall x \in X$

Evaluam

$$\|f(x) - f(x_0)\|_Y = \|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) + T(x - x_0)\|_Y \leq$$

$$\leq \|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y + \|T(x - x_0)\|_Y =$$

$$= \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} \cdot \|x - x_0\|_X + \|T(x - x_0)\|_Y \leq$$

$$\leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} \cdot \|x - x_0\|_X + \lambda \|x - x_0\|_X \ \forall x \in D, x \neq x_0.$$

Avem ca $0 \leq \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} \cdot \|x - x_0\|_X + \lambda \|x - x_0\|_X$ $\forall x \in D, x \neq x_0$.

Folosind criteriul clestelui pentru limite de functii, obtinem ca

$$\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0)\|_Y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ este continua in } x_0.$$

Teorema 7. (Operatii cu functii diferentiabile)

a) Fie $f, g : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ doua functii diferentiabile in punctul $x_0 \in D \cap D'$. Atunci functiile $f + g, f - g, \alpha f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ sunt diferentiabile in x_0 si sunt adevarate egalitatile

$$d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$$

$$d(f - g)(x_0) = df(x_0) - dg(x_0)$$

$$d(\alpha f)(x_0) = \alpha df(x_0), \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) Fie $f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to B \subseteq (Y, \| \|_Y)$ o functie diferentiabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ si $g : B \subseteq (Y, \| \|_Y) \to (Z, \| \|_Z)$ o functie diferentiabila in punctul $y_0 = f(x_0) \in B \cap B'$. Atunci functia $g \circ f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Z, \| \|_Z)$ este diferentiabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ si

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0).$$

Teorema 8. a) Fie $f : (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ o aplicatie liniara si continua pe X. Atunci f este diferentiabila pe X si $df(x) = f \ \forall x \in X$.

b) Fie $f : (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ o functie constanta pe X. Atunci f este diferentiabila pe X si $df(x) = 0 \ \forall x \in X$.

D) FUNCTII DIFERENTIABILE, CAZUL $\mathbf{f} : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*$

Functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este definita prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \ \forall x \in D$.

Functiile $f_1, f_2, ..., f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numesc componentele functiei f.

Notam $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$.

Teorema 9. Functia $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este diferentiabila in punctul $x_0 \in D \cap D\prime$daca si numai daca f este derivabila in punctul x_0. In plus, $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este data de formula $df(x_0)(x) = x \cdot f'(x_0) \forall x \in \mathbb{R}$.

Notatie.$df(x_0) = id_{\mathbb{R}} \cdot f'(x_0) = dx \cdot f'(x_0)$

E) FUNCTII DIFERENTIABILE, CAZUL $\mathbf{f} : \mathbf{D^n} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{n} \geq 2$

Functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este definita prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \ \forall x \in D$.

Functiile $f_1, f_2, ..., f_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numesc componentele functiei f.

Notam $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$.

Teorema 10. Daca functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferentiabila in punctul $x_0 \in D \cap D\prime$, atunci f admite toate derivatele partiale in punctul x_0. In plus, $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este data de formula $df(x_0)(x) = df(x_0)(x_1, x_2, .., x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \forall (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Notatie. $df(x_0) = pr_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + ... + pr_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = dx_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + ... + dx_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$

Corolar. Daca functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nu admite cel putin o derivata partiala in punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci f nu este diferentiabila in x_0.

Observatie. Reciproca Teoremei 10 nu este adevarata.

Functia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \{ \begin{array}{c} \frac{xy}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{array}$ admite toate derivatele partiale in $(0, 0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pentru a testa existenta limitei construim cel putin doua siruri de vectori care converg catre $(0, 0)$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0, 0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0, 0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\left(\frac{1}{n^2} + 0\right)\sqrt{\frac{1}{n^2} + 0}} = 0$$

Limitele functiei pe sirurile alese sunt diferite, rezulta ca limita functiei nu exista cand $(x, y) \to (0, 0)$.

Folosind definitia, deducem ca f nu este diferentiabila in punctul $(0, 0)$.

Teorema 11. (Criteriu de diferentiabilitate) Fie $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o functie, $x_0 \in D$ si $V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0) \subseteq D$ astfel ca f admite toate derivatele partiale pe multimea V si acestea sunt continue in punctul x_0. Atunci f este diferentiabila in x_0.

Corolar. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o functie si $A = \overset{0}{A} \subseteq D$ o multime nevida pe care f admite toate derivatele partiale si acestea sunt continue. Atunci f este diferentiabila pe multimea A.

Definitia 5. Spunem ca functia $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este de clasa C^1 pe multimea D daca f admite toate derivatele partiale pe D si acestea sunt functii continue pe D.

Notatie. $C^1(D) = \left\{ f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \middle| \, f \text{ functie de clasa } C^1 \text{ pe } D \right\}$

Observatie. Daca $f \in C^1(D)$, atunci f este diferentiabila pe D.

F) PUNCTE CRITICE. MATRICEA JACOBI ASOCIATA UNEI FUNCTII DIFERENTIABILE

Definitia 6. Fie $f : D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ o functie. Elementul $x_0 \in D \cap D'$ se numeste punct critic al functiei f daca f este diferentiabila in x_0 si $df(x_0) = 0 \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Teorema 12. a) Se considera functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ si $x_0 \in D \cap D'$. Elementul x_0 este punct critic al functiei f daca si numai daca f este derivabila in x_0 si $f'(x_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

b) Se considera functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, n \geq 2$ si $x_0 \in D \cap D'$. Elementul x_0 este punct critic al functiei f daca si numai daca f este diferentiabila in x_0 si $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Definitia 7. a) Fie $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o functie diferentiabila in $x_0 \in D \cap D'$. Matricea $J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ se numeste matricea Jacobi a functiei f in punctul x_0.

b) Daca $m = n$, $\det J_f(x_0) \overset{not}{=} \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ se numeste Jacobianul functiei f in punctul x_0.

Observatie. a) $d(f)(x_0)(x_1, x_2, ..., x_n) = \left[J_f(x_0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

b) $J_{f \pm g}(x_0) = J_f(x_0) \pm J_g(x_0)$
$J_{\alpha f}(x_0) = \alpha J_f(x_0)$
$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) J_f(x_0)$.

CURS 8

DIFERENTIABILITATEA DE ORDIN DOI

PUNCTE DE EXTREM LOCAL

A) NOTIUNI INTRODUCTIVE

Definitia 1. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferentiabila de doua ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat f este diferentiabila pe $V \cap D$ si $df : V \cap D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este diferentiabila in x_0.

Notatie. $d^2 f(x_0) \overset{not}{=} d(df)(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicatie biliniara si continua

Definitia 2. Functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivata partiala de ordinul doi in raport cu variabilele x_i si $x_j, 1 \leq i, j \leq n$ in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat f admite derivata partiala in raport cu variabila x_j pe $V \cap D$ si $\frac{\partial f}{\partial x_j} : V \cap D \to \mathbb{R}^m$ admite derivata partiala in raport cu variabila x_i in punctul x_0.

Notatie. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \overset{not}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0) \in \mathbb{R}^m$

Teorema lui Schwarz. Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferentiabila de doua ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci functia f admite toate derivatele partiale de ordinul doi in x_0 si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)\ \forall i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$. In plus,

$$d^2 f(x_0)((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) =$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\ \ \forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Corolar. a) Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nu admite toate derivatele partiale de ordinul doi in punctul x_0, atunci f nu este diferentiabila de doua ori in x_0.

b) Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite toate derivatele partiale de ordinul doi in punctul x_0 si $\exists i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel incat $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, atunci f nu este diferentiabila de doua ori in x_0.

Teorema lui Young. Se considera functia $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$ si $V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel ca $V \subseteq D$.Daca f admite derivatele partiale de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe V si acestea sunt functii continue in punctul x_0, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$. Daca, in plus, f admite toate derivatele partiale de ordinul doi pe V si acestea sunt functii continue in punctul x_0, atunci f este diferentiabila de doua ori in x_0.

Corolar. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o functie si $A = \overset{0}{A} \subseteq D$ o multime nevida. Daca f admite toate derivatele partiale de ordinul doi pe A si acestea sunt functii continue pe A, atunci f este functie diferentiabila de doua ori pe A.

Definitia 3. Spunem ca functia $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este de clasa C^2 pe multimea D daca f admite toate derivatele partiale de ordinul doi pe D si acestea sunt functii continue pe D.

Notatie. $C^2(D) \overset{not}{=} \{f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m | f \text{ functie de clasa } C^2 \text{ pe } D\}$

B) PUNCTE DE EXTREM LOCAL PENTRU FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Definitia 4. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in D$.

a) Spunem ca x_0 este punct de minim local al functiei f daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in V \cap D$.

b) Spunem ca x_0 este punct de maxim local al functiei f daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in V \cap D$.

c) Spunem ca x_0 este punct de extrem local al functiei f daca x_0 este punct de minim local sau punct de maxim local al functiei f.

Definitia 5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in D \cap D'$ astfel ca f este diferentiabila de doua ori in x_0.

Matricea $H_f(x_0) \overset{not}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ se numeste hessiana functiei f in punctul x_0.

Criteriul lui Sylvester. Fie $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2 pe multimea D si $x_0 \in D$ un punct critic al functiei f.

a) Daca $d^2 f(x_0)(\omega, \omega) > 0\ \forall \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$, atunci x_0 este punct de minim local al functiei f.

b) Daca $d^2 f(x_0)(\omega, \omega) < 0\ \forall \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$, atunci x_0 este punct de maxim local al functiei f.

c) Daca $\exists \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$ astfel incat $d^2 f(x_0)(\omega_1, \omega_1) > 0$ si $d^2 f(x_0)(\omega_2, \omega_2) < 0$, atunci x_0 nu este punct de extrem local al functiei f.

Observatie. Notam $\Delta_k = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1\leq i,j\leq k}, k \in \{1, 2, ..., n\}$

a) Daca $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n > 0$, atunci x_0 este punct de minim local al functiei f.

b) Daca $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$, atunci x_0 este punct de maxim local al functiei f.

c) Daca $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, ..., (-1)^n \Delta_n \geq 0$ si $\exists 1 \leq i \leq n$ astfel incat $\Delta_i = 0$, atunci nu ne putem pronunta asupra naturii punctului x_0 cu criteriul lui Sylvester.

d) In celelalte cazuri, x_0 nu este punct de extrem local al functiei f.

Exemplu. Sa se determine punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Algoritmul de determinare al punctelor de extrem local prezentat pentru acest exemplu se aplica functiilor care au domeniul de definitie o multime deschisa inclusa in $\mathbb{R}^n$.

• $D = \mathbb{R}^2$ multime deschisa

• Se studiaza continuitatea functiei si se descrie multimea punctelor de discontinuitate D_f.

f functie continua pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D_f = \varnothing$

• Se studiaza diferentiabilitatea functiei si se descrie D_1 multimea punctelor in care aceasta nu este diferentiabila.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ functii continue pe $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ multime deschisa
Rezulta ca f este functie de clasa C^1 pe $\mathbb{R}^2$ si $D_1 = \varnothing$
• Se determina punctele critice ale functiei f, rezolvand sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\} = C$
• Se studiaza diferentiabilitatea de ordinul doi a functiei si se descrie D_2 multimea punctelor in care aceasta nu este diferentiabila de doua ori.
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = 6x \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 6y \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. functii continue pe $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ multime deschisa
Rezulta ca f este functie de clasa C^2 pe $\mathbb{R}^2$ si $D_2 = \varnothing$
• Se aplica criteriului lui Sylvester in punctele critice in care functia este diferentiabila de doua ori si se descriu D_3 multimea punctelor critice in care criteriul se poate aplica si D_4 multimea punctelor critice in care criteriul nu se poate aplica.
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
$\Delta_1 = 0$
$\Delta_2 = -9 < 0$
Ne incadram la subpunctul (d) al observatiei criteriului lui Sylvester, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local al functiei f.
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$
$\Delta_1 = 6 > 0$
$\Delta_2 = 27 > 0$
Ne incadram la subpunctul (a) al observatiei criteriului lui Sylvester, deci $(1,1)$ este punct de minim local al functiei f.
$D_3 = \{(0,0),(1,1)\}$
$D_4 = \varnothing$
Concluzie: $(1,1)$ este singurul punct de extrem local al functiei f.
In cazul in care una dintre multimile D_f, D_1, D_2, D_4 este nevida, elementele respective sunt posibile puncte de extrem local ale functiei. Se verifica daca sunt puncte de extrem local folosind doar definitia, criteriul lui Syvester in cazul acestor puncte nu se poate aplica.

C) TEOREMA FUNCTIILOR IMPLICITE

Pentru simplitatea scrierii, se foloseste notatia $(x_0, y_0) = ((a_1, a_2, ..., a_n), a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema functiilor implicite. Fie $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^1 pe multimea D si $(x_0, y_0) \in D$ astfel incat:

i) $f(x_0, y_0) = 0$

ii) $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) \neq 0$.

Exista $r_1, r_2 > 0$ astfel incat $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D, \exists! \varphi : B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ o functie de clasa C^1 cu urmatoarele proprietati:

a) $\varphi(x_0) = y_0$

b) $f(x, \varphi(x)) = 0 \ \forall x \in B(x_0, r_1)$.

In plus, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0,y_0)} \ \forall 1 \leq i \leq n$.

Exemplu. Sa se arate ca ecuatia $e^z + x^2 y + z - 1 = 0$ are o infinitate de solutii definite implicit sub forma $z = \varphi(x, y)$ in vecinatatea punctului $(1, 0, 0)$. Sa se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ si $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$.

Se alege functia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^z + x^2 y + z - 1$

$\mathbb{R}^3$ multime deschisa

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^z + 1 \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ functii continue pe $\mathbb{R}^3$

Deducem ca f este functie de clasa C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

$f(1, 0, 0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) = 2 \neq 0$

Sunt verificate ipotezele teoremei functiilor implicite si obtinem ca exista $r_1, r_2 > 0$ astfel incat $B((1, 0), r_1) \times B(0, r_2) \subseteq \mathbb{R}^3, \exists! \varphi : B((1, 0), r_1) \to B(0, r_2)$ o functie de clasa C^1 cu urmatoarele proprietati:

a) $\varphi(1, 0) = 0$

b) $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \ \forall (x, y) \in B((1, 0), r_1)$.

Relatia (b) este echivalenta cu afirmatia ca ecuatia are o infinitate de solutii de forma $z = \varphi(x, y)$ cu $(x, y) \in B((1, 0), r_1)$.

$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)} = -\frac{0}{2} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)} = -\frac{0}{2} = 0.$

FUNCTII INTEGRABILE RIEMANN

A) NOTIUNI GENERALE

Definitia 1. Se numeste diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $a < b \in \mathbb{R}$ o multime finita de elemente $\Delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ astfel incat $x_0 < x_1 < ..... < x_n = b$.

Notatie.$\Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$

$D([a, b]) = \{\Delta | \, \Delta \text{ } \textit{diviziune a intervalului } [a, b]\}$

Definitia 2. Fie $\Delta \in D([a, b]), \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$.

a) Numarul real $\|\Delta\| = \max\{|x_{i+1} - x_i| \,|\, 0 \leq i \leq n - 1\}$ se numeste norma diviziunii Δ.

b) O multime finita $t_\Delta = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ cu $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \;\; \forall 1 \leq i \leq n$ se numeste sistem de puncte internediare asociat diviziunii Δ.

Definitia 3. Se considera o functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \; \Delta \in D([a, b]), \; \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ si $t_\Delta = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Numarul real $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ se numeste suma Riemann asociata functiei f, diviziunii Δ si sistemului de puncte intermediare t_Δ.

Notatie.$\sigma_\Delta(f; t_\Delta) \overset{not}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$

Definitia 4. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita, $\Delta \in D([a, b]), \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ si $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \forall 1 \leq i \leq n$.

a) Numarul real $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ se numeste suma Darboux superioara asociata functiei f si diviziunii Δ.

b) Numarul real $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ se numeste suma Darboux inferioara asociata functiei f si diviziunii Δ.

Notatie. $S_\Delta(f) \overset{not}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$

$s_\Delta(f) \overset{not}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

Definitia 5. O functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeste integrabila Riemann pe $[a, b]$ daca $\exists I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $|\sigma_\Delta(f; t_\Delta) - I| < \varepsilon \forall \Delta \in D([a, b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ si $\forall t_\Delta$ sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ.

Notatie. a) $I \overset{not}{=} \int\limits_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ -integrala Riemann a functiei f pe $[a, b]$

b) $\Re([a, b]) \overset{not}{=} \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | \, f \textit{ functie integrabila Riemann pe } [a, b]\}$

Teorema 1. Fie $f \in \Re([a, b])$. Pentru orice sir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} \|\Delta_n\| = 0$ si pentru orice t_{Δ_n} sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n exista $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_{\Delta_n}(f; t_{\Delta_n}) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Criteriul de integrabilitate al lui Darboux. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) $f \in \Re([a,b])$

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \; \forall \Delta \in D([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Definitia 6. O multime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeste neglijabila Lebesgue daca $\forall \varepsilon > 0\varepsilon \; \exists ((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sir de intervale deschise astfel incat $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Teorema 2 (Proprietatile multimilor neglijabile Lebesgue). Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) Daca $A \subseteq \mathbb{R}$ este multime neglijabila Lebesgue si $B \subseteq A$, atunci B este multime neglijabila Lebesgue.

b) Daca $A \subseteq \mathbb{R}$ este multime finita sau multime numarabila, atunci A este neglijabila Lebesgue.

c) Daca $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un sir de multimi neglijabile Lebesgue, atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este multime neglijabila Lebesgue.

d) Multimea vida $\varnothing$ este neglijabila Lebesgue.

Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue. O functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$ daca si numai daca f este functie marginita si $D_f = \{x \in [a,b] | \, f \textit{ nu este continua in } x\}$ este multime neglijabila Lebesgue.

Observatie. 1) Daca $f, g \in \Re([a,b])$, atunci $\alpha f + \beta g \in \Re([a,b]) \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^b g(x) dx$.

2) Daca $f, g \in \Re([a,b])$, atunci $f \cdot g \in \Re([a,b])$.

Teorema 3. a) Orice functie continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$.

b) Orice functie monotona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$.

Demonstratie. a) In demonstratie folosim criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.

$[a,b]$ multime compacta in $\mathbb{R}$

f functie continua pe $[a,b] \Rightarrow f$ functie marginita pe $[a,b]$ (1)

$D_f = \varnothing \Rightarrow D_f$ multime neglijabila Lebesgue (2)

Din relatiile (1) si (2), folosind criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezulta ca $f \in \Re([a,b])$.

b) Vom utiliza criteriul de integrabilitate al lui Darboux.

Presupunem, fara a restrange generalitatea, ca f este functie crescatoare.

Fie $\Delta \in D([a,b]), \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$. Vom evalua $S_\Delta(f) - s_\Delta(f)$.

$S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

$s_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1i}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \le \|\Delta\| \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \|\Delta\| (f(b) - f(a))$

Fie $\varepsilon > 0$.

Alegem $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$

$\forall \Delta \in D([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem ca $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \|\Delta\|(f(b) - f(a)) \le \delta_\varepsilon(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.

Aplicand criteriul de integrabilitate al lui Darboux, deducam ca $f \in \Re([a,b])$.

Teorema 4. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii astfel ca $f \in \Re([a,b])$ si $A = \{x \in [a,b] |\, f(x) \neq g(x)\}$ este multime finita. Atunci $g \in \Re([a,b])$ si

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Exemplu. Sa se arate ca functia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data de $f(x) = \begin{cases} x^2, x \in (0,1] \\ 2, x = 0 \end{cases}$ este integrabila Riemann pe $[0,1]$ si sa se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Se observa ca f este continua pe multimea $(0,1]$ si ca f nu este continua in punctul $x_0 = 0$.

$D_f = \{0\}$ multime finita$\Rightarrow D_f$ multime neglijabila Lebesgue

$0 \le f(x) \le 2\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ functie marginita

Aplicand criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, avem ca f este integrabila Riemann pe $[0,1]$.

Alegem $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = x^2\ \forall x \in [0,1]$.

g functie continua pe $[0,1] \Rightarrow g$ functie integrabila Riemann pe $[0,1]$.

$A = \{x \in [0,1] |\, f(x) \neq g(x)\} = \{0\}$ multime finita.

Din teorema 4 avem ca

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

B) PROPRIETATILE FUNCTIILOR INTEGRABILE RIEMANN

Definitia 7. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f, F : I \to \mathbb{R}$ doua functii. Spunem ca F este o primitiva a functiei f daca F este functie derivabila pe I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Teorema 5. Fie $f \in \Re([a,b])$ si functia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita prin $F(x) = \int_a^x f(t)dt\ \forall x \in [a,b]$. Atunci F este functie continua pe $[a,b]$. Daca, in plus, f este continua in punctul $x_0 \in [a,b]$, atunci F este derivabila in x_0 si $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corolar. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat. Orice functie continua $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I.

Teorema 6. Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ doua intervale nedegenerate, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua pe I si $g, h : J \to I$ doua functii derivabile pe J. Atunci functia $F : J \to \mathbb{R}$ definita prin $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ este derivabila pe J si $F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)\ \forall x \in J$.

Formula Leibniz-Newton. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann care admite primitive, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fiind una dintre primitivele functiei f. Atunci $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Formula de integrare prin parti pentru integrala Riemann. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile astfel ca $f', g' \in \Re([a,b])$. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Teorema 7. Se considera $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii integrabile Riemann.

a) Daca $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Daca $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

c) Daca $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ si $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

d) Daca $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ si $\exists x_0 \in [a,b]$ astfel incat f este continua in x_0, atunci $f(x_0) = 0$.

e) Avem ca $|f| \in \Re([a,b])$ si ca

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Teorema de medie pentru functii integrabile Riemann. Se considera $f, g \in \Re([a,b])$ cu urmatoarele proprietati:

a) f are proprietatea lui Darboux

b) $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$.

Atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel incat $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Corolar. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua. Atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel incat $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Teorema convergentei uniforme pentru integrala Riemann. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie astfel ca $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci $f \in \Re([a,b])$ si $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Teorema convergentei marginite pentru integrala Riemann. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f \in \Re([a,b])$ astfel ca:

a) $f_n \xrightarrow{s} f$

b) $\exists M > 0$ astfel incat $|f_n(x)| \leq M \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Teorema convergentei monotone pentru integrala Riemann. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f \in \Re([a,b])$ astfel ca:

a) $f_n \overset{s}{\to} f$

b) $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_n \geq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Exemplu. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Se alege sirul de functii $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

f_n functie continua pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ integrabila Riemann pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Este clar ca $f_n \overset{s}{\to} f$.

f este functie marginita pe $[0,1]$ si $D_f = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ este multime neglijabila Lebesgue$\Rightarrow$ f este integtabila Riemann pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$|f_n(x)| = |\sin^n x| \leq 1$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$

Se verifica ipotezele teoremei convergentei marginite pentru integrala Riemann. Asadar, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx = 0.$

INTEGRALE IMPROPRII

A) NOTIUNI GENERALE

Intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ poate avea forma (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $\mathbb{R}$.

Pe parcursul cursului se alege $I=[a,b)$

Definitia 1. Functia $f: I \to \mathbb{R}$ se numeste local integrabila pe I daca $\forall \alpha,\beta \in I$ cu $\alpha<\beta$ avem ca $f|_{[\alpha,\beta]}$ este functie integrabila Riemann pe $[\alpha,\beta]$.

Notatie. $\Re_{loc}(I)=\{f: I\to\mathbb{R} | \, f \ functie \ local \ integrabila \ pe \ I\}$

Teorema 1. a) Orice functie continua $f: I \to \mathbb{R}$ este local integrabila pe I.

b) Orice functie monotona $f: I\to\mathbb{R}$ este local integrabila pe I.

c) Fie o functie marginita $f: I\to\mathbb{R}$ cu proprietatea ca $D_f=\{x\in I | \, f \ nu \ este \ continua \ in \ x\}$ este multime neglijabila Lebesgue. Atunci f este local integrabila pe I.

Definitia 2. Fie $f\in\Re_{loc}([a,b))$ cu $a<b\in\mathbb{R}$.

a) Spunem ca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta daca $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R}$.

b) Spunem ca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta daca aceasta nu este convergenta.

c) Spunem ca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca integrala improprie $\int_a^{b-0} |f(x)|\,dx$ este convergenta.

Criteriul lui Cauchy pentru integralele improprii. Fie $f\in\Re_{loc}([a,b))$.

a) Integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta daca si numai daca $\forall\varepsilon>0$ $\exists c_\varepsilon\in(a,b)$ astfel incat $\left|\int_x^y f(t)dt\right|<\varepsilon$ $\forall x,y\in[a,b)$ cu $c_\varepsilon\le x<y<b$.

b) Integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca si numai daca $\forall\varepsilon>0$ $\exists c_\varepsilon\in(a,b)$ astfel incat $\int_x^y |f(t)|\,dt<\varepsilon$ $\forall x,y\in[a,b)$ cu $c_\varepsilon\le x<y<b$.

Teorema 2. Se considera $f\in\Re_{loc}([a,b))$. Daca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta, atunci aceasta este convergenta.

Observatie. Reciproca Teoremei 2 este falsa.

Daca, in plus, $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b)$ sau $f(x)\le 0$ $\forall x\in[a,b)$, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca si numai daca aceasta este convergenta.

Criteriul lui Abel pentru integralele improprii. Se considera $f, g \in \Re_{loc}([a,b))$ care verifica urmatoarele proprietati:

i) f este functie descrescatoare si $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = 0$;

ii) $\exists M > 0$ astfel incat $\left| \int\limits_a^x f(t)dt \right| \leq M \ \forall x \in [a,b)$.

Atunci integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)g(x)dx$ este convergenta.

Criteriul lui Dirichlet pentru integralele improprii. Se considera $f, g \in \Re_{loc}([a,b))$ care verifica urmatoarele proprietati:

i) f este functie descrescatoare si $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \in (-\infty, +\infty]$;

ii) integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta.

Atunci integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)g(x)dx$ este convergenta.

Criteriul de comparatie cu inegalitati pentru integralele improprii. Fie $f, g \in \Re_{loc}([a,b))$ doua functii pozitive care verifica inegalitatea $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b)$.

a) Daca integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta, atunci integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta.

b) Daca integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta, atunci integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este divergenta.

Criteriul de comparatie cu limite pentru integralele improprii. Fie $f, g \in \Re_{loc}([a,b)$ doua functii pozitive pentru care $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

a) Daca $l \in (0, +\infty)$, atunci integralele improprii au aceiasi natura.

b) Daca $l = 0$ si integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta, atunci integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta.

c) Daca $l = +\infty$ si integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este divergenta, atunci integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta.

B) METODE DE CALCUL PENTRU INTEGRALELE IMPROPRII

Formula Leibniz-Newton pentru integralele improprii. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o functie local integrabila care admite primitive, $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ fiind una dintre primitive. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta

b) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x) \in \mathbb{R}$.

In plus, $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x) - F(a)$.

Formula de integrare prin parti pentru integralele improprii. Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile astfel ca $f', g' \in \Re_{loc}([a,b)$ *si* $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f'(x)g(x)dx$ este convergenta

b) integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} g'(x)f(x)dx$ este convergenta.

In plus, $\int\limits_a^{b-0} f'(x)g(x)dx = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int\limits_a^{b-0} g'(x)f(x)dx$.

Teorema de schimbare de variabila pentru integralele improprii. Fie $f \in \Re_{loc}([a,b))$ si $g : [\alpha, \beta) \to [a,b)$ o functie bijectiva, derivabila, strict monotona cu $g' \in \Re_{loc}([a,b))$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int\limits_\alpha^{\beta-0} f(g(t))g'(t)dt$ este convergenta

b) integrala improprie $\int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta-0)} f(x)dx$ este convergenta.

In plus, $\int\limits_\alpha^{\beta-0} f(g(t))g'(t)dt = \int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta-0)} f(x)dx$.

C) FUNCTIILE BETA SI GAMMA ALE LUI EULER

Teorema 3. a) Oricare ar fi $p, q > 0$ integrala improprie $\int\limits_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ este convergenta.

b) Oricare ar fi $p > 0$ integrala improprie $\int\limits_{0+0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este convergenta.

Definitia 3. a) Functia $B:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita prin $B(p,q)=\int\limits_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$ se numeste functia Beta a lui Euler.

b) Functia $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita prin $\Gamma(p)=\int\limits_{0+0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\ \forall p\in(0,+\infty)$ se numeste functia Gamma a lui Euler.

Teorema 4. (Proprietatile functiei Gamma) Functia Gamma are urmatoarele proprietati:

a) $\Gamma(1)=1$

b) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)\ \ \forall p>0$

c) $\Gamma(n+1)=n!\ \forall n\in\mathbb{N}$

d) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\ \forall p\in(0,1)$

e) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Teorema 5. (Proprietatile functiei Beta) Functia Beta are urmatoarele proprietati:

a) $B(p,q)=B(q,p)\ \ \forall p,q\in(0,+\infty)$

b) $B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)\ \ \forall p,q\in(0,+\infty)$

$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)\ \ \forall p,q\in(0,+\infty)$

c) $B(p,q)=2\int\limits_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0}\sin^{2p-1}x\cos^{2q-1}x dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$

d) $B(p,q)=\int\limits_{0+0}^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$.

Teorema 6. (Legatura intre functiile Beta si Gamma) Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ \forall p,q\in(0,+\infty)$

b) $B(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\ \forall p\in(0,1)$.

Exemple. Sa se calculeze $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x dx$ si $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\sqrt{tgx}dx$.

Integralele se calculeaza folosind functiile Gamma si Beta.

$B(p,q)=2\int\limits_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0}\sin^{2p-1}x\cos^{2q-1}x dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$.

Rezolvam sistemul $\begin{cases}2p-1=n\\2q-1=m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\frac{n+1}{2}\\q=\frac{m+1}{2}\end{cases}$

$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\frac{m+1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}$

Vom calcula $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ pe doua cazuri.

Cazul 1. $n=2k+1$

$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)=\Gamma(k+1)=k!$

Cazul 2. $n=2k$

$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-1\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-2\right)=$
$\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)....\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)....\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$
$\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)....\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tgx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x dx$$

Rezolvam sistemul $\left\{ \begin{array}{c} 2p-1=\frac{1}{2} \\ 2q-1=-\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} p=\frac{3}{4} \\ q=\frac{1}{4} \end{array} \right.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tgx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$